

Husserls Doppelvortrag in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen 1901

STEFANIA CENTRONE

Im September 1901 wurde Husserl gegen den Willen der Philosophischen Fakultät der Universität Göttingen zum nicht-etatmäßigen Extraordinarius ernannt. Diese Ernennung wurde aber von der mathematisch-naturwissenschaftlichen Abteilung der Fakultät als Verstärkung der eigenen Richtung begrüßt. In der Schuhmann-Edition der Husserl'schen Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag liest man, dass Hilbert und seine Schule Husserl sogleich in die Aktivitäten der Göttinger Mathematischen Gesellschaft einbezogen. „Schon in der 5. Sitzung des WS 1901/02 (26. November 1901) sowie in der 7. Sitzung vom 10. Dezember hielt Husserl in diesem Kreis einen Doppelvortrag mit dem Titel ‚Der Durchgang durch das Unmögliche und die Vollständigkeit eines Axiomensystems‘“. „In diesem Vortrag“ – fährt die Herausgeber fort – „legte Husserl die ‚nahe Beziehung‘ des von ihm schon anfangs der neunziger Jahre entwickelten Begriffs der Definitheit ‚zu dem von D. Hilbert für die Grundlegung der Arithmetik eingeführten Vollständigkeitsaxiom‘ dar und stellte heraus, dass seine und Hilberts Intentionen im wesentlichen in dieselbe Richtung gingen.“¹ Zu einer Veröffentlichung des Doppelvortrags kam es nie. Jedoch verwies Husserl in späteren Werken immer wieder auf die Wichtigkeit des Doppelvortrags, – auch um darauf aufmerksam zu machen, dass einige der wichtigsten Ideen bezüglich des Konzeptes der Definitheit in den logischen Untersuchungen der Hilbert'schen Schule mehrfach wieder aufgenommen wurden, ohne dass seine Vorgängerschaft anerkannt worden wäre.

In den *Ideen* schreibt Husserl:

Die hier eingeführten Begriffe [Husserl meint hier das Konzept eines *definiten Axiomensystems* und sein ontologisches Gegenstück, das Konzept einer *definiten Mannigfaltigkeit*] dienen mir schon zu Anfang der 90er Jahre (in den als Fortsetzung meiner „*Philosophie der Arithmetik*“ gedachten „*Untersuchungen zur Theorie der formal-mathematischen Disziplinen*“), und zwar hauptsächlich zu dem Zweck, für das Problem des Imaginären eine *prinzipielle* Lösung zu finden ... In Vorlesungen und Übungen habe ich seitdem oft Gelegenheit gehabt, die bezüglichen Begriffe und Theorien z. T. in voller Ausführlichkeit zu entwickeln, und im WS 1900/01 be-

1 Schuhmann & Schuhmann 2001, 87. Fortan: Sch&Sch.

handelte ich dieselben in einem Doppelvortrag in der Göttinger Mathematischen Gesellschaft. Einzelnes aus diesem Gedankenkreis ist in die Literatur eingedrungen, ohne dass die Ursprungsquelle genannt worden wäre. – Die nahe Beziehung des Begriffs der Definitheit zu dem von D. Hilbert für die Grundlegung der Arithmetik eingeführten Vollständigkeitsaxiom wird jedem Mathematiker einleuchten.²

In diesem Aufsatz werde ich hauptsächlich zwei Ziele verfolgen:

- i) eine immanente Interpretation von Husserls *Doppelvortrag* vorzulegen und
- ii) einige Hauptresultate der Husserl'schen Überlegungen formal zu rekonstruieren, wo immer eine mathematische Definition seiner Begriffe helfen kann, die Intention des Doppelvortrags zu klären.³

Bevor ich mit der eigentlichen Arbeit beginne, mache ich darauf aufmerksam, dass der *Doppelvortrag* in zwei Versionen verfügbar ist: die eine wurde 1970 von L. Eley herausgegeben,⁴ die andere 2001 von E. Schuhmann und K. Schuhmann.⁵ In der neueren Edition wird der Text anders als in der *Husserliana*-Ausgabe rekonstruiert, und zwar auf der Basis einer Anmerkung im *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung*: In der Sitzung am 10. Dezember „setzt [Husserl] seinen Vortrag vom 26. Nov. fort. Vor allem werden die Begriffe des ‚definiten‘ und des ‚absolut definiten‘ Systems auseinandergesetzt. Bei definiten Systemen und nur bei diesen ist der Durchgang durch das Unmögliche gestattet.“⁶ – Bei meiner Analyse werde ich mich aus inhaltlichen Gründen primär an die ältere Ausgabe halten. Ich glaube mir diese Freiheit nehmen zu dürfen, weil die Herausgeber der neueren Version zugeben: Was den ersten Vortrag angeht, gebe es allemal keine relevanten Probleme, und was den zweiten Vortrag angeht, so sei es schwierig, den Text zu rekonstruieren, da der Hauptteil des Vorlesungsmanuskripts nicht erhalten ist: „In Ermangelung des ursprünglichen Vortragsmanuskripts musste dieses Material ... in einer von den Herausgebern zu verantwortenden Anordnung eingefügt werden.“⁷

2 Husserl, ID:I, § 72, Anm.1.

3 Für eine ausführliche Diskussion verschiedener Interpretationen des *Doppelvortrags* (insbesondere: Ortiz Hill 1995, Majer 1997, Da Silva 2000 und Hartimo 2007) siehe Centrone 2010, Kap. 3, §§ 6, 12.

4 In: Husserl, *Philosophie der Arithmetik*. Mit ergänzenden Texten (1891–1901), 430–451. Fortan: PdA Anh.

5 Sch&Sch, 87–123.

6 Ibid. 89.

7 Ibid. 88.

I. Die Einleitung des *Doppelvortrags*

In der *Einleitung* formuliert Husserl seine *Grundfrage* folgendermaßen:

Das Thema, welches ich in diesem Vortrag behandeln will, betrifft eine Grundfrage der mathematischen Methodik und gehört als solches in jenes schwierige Gebiet, in welchem Mathematiker und Philosophen in gleichem Maße, wenn auch nicht ganz in demselben Sinn, interessiert sind.⁸

Die Frage, die Husserl im Auge hat, beschäftigte die Mathematiker seit 1850 mit zunehmender Häufigkeit: man verwendete immer mehr „neue mathematische Begriffe“, die sich in Rechenprozessen als nützlich erwiesen, ohne dass man ihren Gehalt näher bestimmt hätte.⁹ Husserls zentrale These in seinem *Doppelvortrag* kann so formuliert werden: Wenn ein neuer mathematischer Begriff sich als nützlich erweist, dann besteht ein Bedarf an mathematischer und philosophischer Reflexion, durch welche die Prinzipien, die dem neuen Begriff zugrunde liegen, aufgedeckt werden, um ihm auf diese Weise einen Status zu geben, der dem Status der bereits etablierten Begriffe entspricht. Wenn dies gelingt, so ist der Gebrauch des neuen Begriffs legitimiert: er kann dann nicht mehr zu Widersprüchen führen. Der *Doppelvortrag* versucht, allgemeine Richtlinien für eine strenge mathematische Rechtfertigung neuer Begriffe anzugeben.

Es sei an dieser Stelle schon bemerkt, dass Hilberts Identifikation der ‚mathematischen Existenz‘ eines Begriffs mit der Konsistenz des Axiomensystems, das diesen Begriff implizit definiert, durch dasselbe Problem der Proliferation neuer und nützlicher mathematischer Begriffe motiviert ist.¹⁰ Hilbert beschäftigt sich mit diesem Problem in der Anfangsphase seiner Untersuchungen über die Grundlagen, in der er sich eine Fundierung nicht nur der Mathematik, sondern auch der Physik und anderer Wissenschaften durch die axiomatische Methode erhoffte.¹¹ Diese Phase erstreckt sich über ca. drei Jahre, von 1898 bis ungefähr 1901, – eine Zeit, die mit Husserls frühen Göttinger Jahren zusammenfällt. In seinem berühmten Vortrag „*Mathematische Probleme*“ (Paris 1900) stellt Hilbert Fragen nach der Bedeutung mathematischer Probleme für den Fortschritt mathematischen Wissens und nach den Quellen, aus welchen die Mathematik ihrer Probleme schöpft.¹² Manches aus diesem Gedankenkreis

8 PdA Anh., 430. Vgl. Hartimo 2007, 298 ff.

9 Vgl. Sieg 2002, 365.

10 Diesen Vorschlag hat Georg Cantor antizipiert: „Die Mathematik ist in ihrer Entwicklung völlig frei und nur an die selbstredende Rücksicht gebunden, dass ihre Begriffe sowohl in sich widerspruchsfrei sind, als auch in festen durch Definitionen geordneten Beziehungen zu den vorher gebildeten, bereits vorhandenen und bewährten Begriffen stehen“ (Cantor 1883, 182).

11 Abrusci 1978, 19 ff. Vgl. auch Abrusci 1981, Corry 2004.

12 Vgl. Reid 1970, 70-71.

kann uns dabei helfen, in die Problemsphäre, in welcher der *Doppelvortrag* entsteht, Einblick zu gewinnen:

Wie überhaupt jedes menschliche Unternehmen Ziele verfolgt, so braucht die mathematische Forschung Probleme ... Es ist schwierig und oft unmöglich, den Wert eines Problems im Voraus richtig zu beurteilen; denn schließlich entscheidet der Gewinn, den die Wissenschaft dem Problem verdankt. Dennoch können wir fragen, ob es allgemeine Merkmale gibt, die ein gutes mathematisches Problem kennzeichnen ... Sicherlich stammen die ersten und ältesten Probleme in jedem mathematischen Wissenszweige aus der Erfahrung und sind durch die Welt der äußeren Erscheinungen angeregt worden. Selbst die Regeln des *Rechnens* mit ganzen Zahlen sind auf einer niederen Kulturstufe der Menschheit wohl in dieser Weise entdeckt worden ... Bei der Weiterentwicklung einer mathematischen Disziplin wird sich jedoch der menschliche Geist, ermutigt durch das Gelingen der Lösungen, seiner Selbstständigkeit bewußt; er schafft aus sich selbst heraus oft ohne erkennbare äußere Anregung allein durch logisches Kombinieren, durch Verallgemeinern, Spezialisieren, durch Trennen und Sammeln der Begriffe in glücklichster Weise neue und fruchtbare Probleme und tritt dann selbst als der eigentliche Frager in den Vordergrund ... Inzwischen, während die Schaffenskraft des reinen Denkens wirkt, kommt auch wieder von neuem die Außenwelt zur Geltung, zwingt uns durch die wirklichen Erscheinungen neue Fragen auf, erschließt neue mathematische Wissensgebiete und, indem wir diese neuen Wissensgebiete für das Reich des reinen Denkens zu erwerben suchen, finden wir häufig die Antworten auf alte ungelöste Probleme und fördern so zugleich am besten die alten Theorien. Auf diesem stets sich wiederholenden und wechselnden Spiel zwischen Denken und Erfahrung beruhen, wie mir scheint, die zahlreichen und überraschenden Analogien und jene scheinbar prästabilierte Harmonie, welche der Mathematiker so oft in den Fragestellungen, Methoden und Begriffen verschiedener Wissensgebiete wahrnimmt.¹³

Hier drängt sich die Frage auf, wann die mathematische Existenz eines neuen Begriffs, der sich als nützlich erwiesen hat, als gesichert angesehen werden kann. Hilberts Antwort hierauf besteht – um es mit Wilfried Sieg zu sagen – in einem „partial syntactic turn“¹⁴: die Existenz eines Begriffs wird durch die Nicht-Widersprüchlichkeit der Theorie verbürgt, die ihn formal bestimmt. Hilbert sagt:

Gelingt es jedoch zu beweisen, daß die dem Begriffe erteilten Merkmale bei Anwendung einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen niemals zu einem Widerspruche führen können, so sage ich, daß damit die mathematische Existenz des Begriffes z.B. einer Zahl oder einer Function, die gewisse Forderungen erfüllt, bewiesen worden ist.¹⁵

Husserl präsentiert das Problem des Imaginären als eines, das entstand im Kontext der Entwicklung der Mathematik aus einer Wissenschaft der Zahlen und

13 Hilbert 1900b, 290–293. Vgl. auch Sieg 2002, 365 ff.

14 Sieg 2002, 368.

15 Hilbert 1900b.

Größen zu einer Theorie beliebiger abstrakter Strukturen, für die es keines unmittelbaren Bezugs auf bestimmte Regionen der realen Welt bedarf. Er denkt an die radikale Transformation der Mathematik im 19. Jh., die Howard Stein als eine Transformation „so profound“ definiert, „that it would not be inappropriate to call it a rebirth of the subject“.¹⁶

Wie Ettore Casari zu Recht betont: Husserl „hatte die fundamentalen Aspekte der Entwicklung der Mathematik in seiner Zeit wirklich verstanden: ihre Bewegung hin zur Formalisierung, Algebraisierung. Er war sich völlig darüber im Klaren, dass er diesen Gedanken früher als andere erfasst hatte. So pflegte er in späteren Jahren zu sagen: ‚jetzt spricht alle Welt von Formalisierung, aber damals war ich der einzige, der ihre Bedeutung erkannte und sie in theoretischen und historischen Studien mühsam entwickelte‘“.¹⁷ Husserl nimmt in diesem Zusammenhang ausdrücklich auf Leibnizens Idee der abstrakten Mathematik als *mathesis universalis* Bezug, als *Theorie der Theorien*, welche die *allgemeine Form* aller deduktiven Disziplinen zu bestimmen vermag:

Ursprünglich auf das Gebiet der Zahlen und Quantitäten beschränkt, ist die Mathematik weit über dieses Gebiet hinausgewachsen. Sie hat sich mehr und mehr dem Ziel genähert, das Leibniz schon klar konzipiert hatte, nämlich dem Ziel einer reinen, von allen besonderen Erkenntnisgebieten freien und insofern formalen Theorienlehre; Mathematik im höchsten und umfassendsten Sinn ist die Wissenschaft von den theoretischen Systemen überhaupt und in Abstraktion von dem, was in den gegebenen Theorien der verschiedenen Wissenschaften theoretisiert wird.¹⁸

Husserl ist nun aber auch stets daran interessiert, die ontologischen Korrelate formaler Theorien zu untersuchen: er bedenkt stets, dass den formalen Theorien „mögliche Erkenntnisgebiete“ entsprechen, die von diesen Theorien axiomatisiert werden. Als *mathesis universalis* ist die abstrakte Mathematik als die allgemeinste Theorie der Strukturen (jede mit ihrem eigenen Axiomensystem) anzusehen, deren Aufgabe darin besteht, Schritt für Schritt angemessene Instrumente für die wissenschaftliche Erfassung diverser Bereiche der Realität bereitzustellen.¹⁹

16 Stein 1988, 238–259; zitiert nach Sieg 2002, 365. Vgl. Tieszen 1995: „Husserl was witness to advances in formalization, generalization, and abstraction that were unprecedented in the history of mathematics“ (50).

17 In: Giusti 2000, 105; vgl. Tieszen 2004, 29 & 2005, 9.

18 PdA Anh., 430. In den *Prolegomena* heißt es: „Die offenbare Möglichkeit von Verallgemeinerungen bzw. Abwandlungen der formalen Arithmetik, wodurch sie ohne wesentliche Änderung ihres theoretischen Charakters und ihrer rechnerischen Methodik über das quantitative Gebiet hinausgeführt werden kann, müßte die Einsicht erwecken, daß das Quantitative gar nicht zum allgemeinsten Wesen des Mathematischen oder „Formalen“ und der in ihm gründenden kalkulatorischen Methode gehöre.“ (PR, VI).

19 Dieser Punkt wurde auch von Hilbert sehr betont, sein Lieblingsbeispiel war die Anwendung der „Euclidean axioms of linear order and congruence to the genetic variati-

Merkwürdigerweise erwähnt Husserl in diesem Zusammenhang nicht Bernard Bolzano, der Leibnizens Intuitionen schon ein Jahrhundert früher und genau in Husserls Sinne entwickelt hatte. In seinen *Beytraegen zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik* (1810) konzipiert Bolzano die abstrakte Mathematik nämlich als eine Wissenschaft, die „von den allgemeinen Gesetzen (Formen) handelt, nach welchen sich die Dinge in ihrem Daseyn richten müssen“.²⁰ Miteinbezogen in dieser Definition ist, dass die Mathematik – so konzipiert – sich nicht mit dem „Daseyn der Dinge“ beschäftigt, „sondern nur ganz allein mit den Bedingungen ihrer Möglichkeit“.²¹ Aus dieser Erklärung leitet Bolzano eine Gliederung der Mathematik in diverse mathematische Teildisziplinen her. Die Gesetze, nach denen sich die Dinge in ihrem Dasein richten müssen, sind entweder „so allgemein, daß sie auf alle Dinge ganz ohne Ausnahme anwendbar sind, oder nicht“.²² Die ersteren machen – so Bolzano – die *allgemeine Mathesis* aus, die übrigen die *besondere Mathesis*. „[Zur] *allgemeinen Mathesis* gehört ... die Arithmetik, Combinationslehre, u.m.a.“.²³ Um die ihr „subordinierten“ besonderen Teile der Mathematik („Chronometrie, Geometrie u.s.w.“) zu erhalten, muss man „die *Dinge selbst*, mit deren allgemeinen Formen sich die Mathematik beschäftigt, in gewisse Classen bringen“.²⁴

Was wird nun aus dieser Leibniz-Bolzano'schen Idee der *Mathesis* in der von Hilbert beeinflussten Husserl'schen Konzeption? Zunächst: wie geht man überhaupt von den besonderen mathematischen Theorien – von der *besonderen Mathesis* in Bolzanos Begrifflichkeit – zu der allgemeinen über?

Der erste Schritt bei der Konstruktion einer *formalen* Theorie, ausgehend von einer konkreten Theorie, besteht in ihrer *Formalisierung*. Eine Theorie zu formalisieren, bedeutet: von der Materie, also von der besonderen Region der Realität, welche die Theorie zu erfassen sucht, zu abstrahieren, von ihr abzuweichen. Dies geschieht, indem man „Variablen“ für die Bezeichnungen „materiell bestimmter Objekte“ einsetzt, also z.B. die Buchstaben *a*, *b*, *c*, etc. für die Bezeichnungen natürlicher Zahlen. Die Eigenschaften der Gegenstände werden jetzt durch die Axiome der Theorie bestimmt. Dieser Prozess erlaubt so etwas wie die Vereinheitlichung verschiedener Erkenntnisgebiete, die *materialiter* nichts miteinander zu tun haben. Durch die Formalisierung wird deutlich, dass sie durch dieselbe formale Theorie axiomatisiert werden können.²⁵ Auf diese Weise kommt es zu einer (Art von) „*Verallgemeinerung*“: die Ausgangs-

ons in *Drosophila* flies produced by cross-breeding“ (Webb 1980, 81). Vgl. auch Casari in: Giusti 2000, 109–110.

20 Bolzano 1810, §8.

21 loc. cit.

22 Bolzano 1810, §11.

23 loc. cit.

24 Bolzano 1810, §12.

25 PdA Anh., 431.

theorie ist jetzt ein Element einer Klasse von Theorien, die allesamt dieselbe „Theorienform“ haben.

Zur Zeit seines Vortrags konzipierte Husserl formale Theorien im engeren Sinne als eine Gesamtheit von Axiomen, die *rein formal miteinander verträglich* und *voneinander unabhängig* sind,²⁶ und in einem *weiteren* Sinn als eine Gesamtheit, die auch die aus den Axiomen ableitbaren Sätze, also die Theoreme der Theorie enthält. Das zugehörige *Objektgebiet* charakterisiert er als ein Gebiet, das nur dadurch bestimmt ist, dass es unter Axiome dieser oder jener Form fällt. „Ein so definiertes Objekt-Gebiet“ – sagt Husserl – „nennen wir eine ... formal definierte Mannigfaltigkeit.“²⁷ Das Axiomensystem, das eine solche Mannigfaltigkeit bestimmt, fixiert also nur die Relationen, die zwischen den Elementen der Mannigfaltigkeit bestehen, – es lässt die Natur der Elemente mithin unbestimmt.²⁸

Husserl sagt:²⁹

Die in solcher Abstraktion definierten Theorienformen lassen sich nun zueinander in Bezug setzen, sie lassen sich systematisch klassifizieren, man kann solche Formen erweitern und verengen, man kann irgendeine vorgegebene Form in systematischen Zusammenhang mit anderen Formen bestimmt definierter Klassen bringen und über ihr Verhältnis wichtige Schlüsse ziehen.³⁰

26 In der (oben umgrenzten) ersten Phase der Hilbert'schen Grundlagenforschung ist Hilberts Gebrauch der axiomatischen Methode u.a. durch die folgenden Merkmale charakterisiert: (i) es wird stillschweigend angenommen, dass jede logische Folgerung aus den Axiomen in einer endlichen Anzahl von Schluss-Schritten herleitbar ist; (ii) es gibt keine explizite Darlegung der formalen Sprache und der Logik einer formalen Theorie; (iii) die Anzahl der Axiome ist endlich, und es wird angenommen, dass diese Anzahl so klein wie möglich sein sollte; (iv) die Axiome sind miteinander verträglich und voneinander unabhängig.

27 PdA Anh., 431.

28 In dem Aufsatz *Über den Zahlbegriff*, in dem Hilbert die *axiomatische Methode* als die für die Untersuchung des Zahlbegriffs adäquateste vorschlägt, charakterisiert Hilbert das System der reellen Zahlen folgendermaßen: „Wir denken ein System von Dingen; wie nennen diese Dinge Zahlen und bezeichnen sie mit a, b, c, \dots . Wir denken diese Zahlen in gewissen gegenseitigen Beziehungen, deren genaue und vollständige Beschreibung durch die folgenden Axiome geschieht“ Weiter: „Unter der Menge der reellen Zahlen haben wir uns hiernach nicht etwa die Gesamtheit aller möglichen Gesetze zu denken, nach denen die Elemente einer Fundamentalreihe fortschreiten können, sondern vielmehr – wie eben dargelegt ist – ein System von Dingen, deren gegenseitige Beziehungen durch das obige *endliche und abgeschlossene* System von Axiomen I-IV gegeben sind, und über welche neue Aussagen nur Gültigkeit haben, falls man sie mittels einer endlichen Anzahl von logischen Schlüssen aus jenen Axiomen ableiten kann.“ (Hilbert 1900a, 181, 184).

29 Um es mit den Worten von Hartimo 2007 zu sagen (die dabei freilich an ein anderes Werk Husserls denkt): „Husserl is occupied by some kind of a structural relationship between two different domains“ (296).

30 PdA Anh., 431.

So ist z.B. die Geometrie unseres physikalischen Raums eine materiale Theorie, die durch Formalisierung in eine Theorienform verwandelt wird, – man bezeichnet sie als eine Theorie der dreidimensionalen Euklidischen Mannigfaltigkeit.³¹ Husserls Behauptung, dass die formalisierten Theorien selbst als mathematische Gebilde und somit als Objekte mathematischer Forschung betrachtet werden können,³² antizipiert eine These, die auch Hilbert einige Jahre später aufstellen wird. Hilbert formuliert sie zum ersten Mal in seinem Vortrag *Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik* (1904), wenngleich nur für formale Beweise und nicht für Theorien:³³ „Man hat eben den Beweis selbst als ein mathematisches Gebilde“ und somit als ein Objekt mathematischer Forschung. – Deutlicher als bei Hilbert tritt bei Husserl der Unterschied zwischen einer Theorie als Axiomensystem und ihrem gegenständlichen Korrelat, d.h. einer von der Theorie als Axiomensystem erfassten Mannigfaltigkeit hervor. Deshalb untersucht Husserl die rein formalen Beziehungen der Generalisierung und Spezialisierung nicht nur zwischen Theorien, sondern auch zwischen Mannigfaltigkeiten³⁴ und versucht, relevante Entsprechungen zwischen gewissen Eigenschaften formaler Theorien und gewissen Eigenschaften von Mannigfaltigkeiten zu bestimmen.

Das Problem des Imaginären wird von Husserl folgendermaßen eingeführt:

Mathematik ist also ihrer höchsten Idee nach Theorienlehre, die allgemeinste Wissenschaft von den möglichen deduktiven Systemen überhaupt. Mit dieser Verallgemeinerung, durch welche die Sphäre der alten Träger mathematischer Forschung – die Anzahlen, Ordinalzahlen, die absoluten und gerichteten Größen und dgl. – ganz überschritten [ist], hängen nun ungelöste methodologische Probleme zusammen.³⁵

Husserl bemerkt, dass der ungeprüfte Gebrauch des Symbolismus in der Algebra, der von jedem objectiven Sachbezug abgekoppelt ist,

zu Operationsformen [führte], die arithmetisch sinnlos waren, aber die merkwürdige Eigentümlichkeit zeigten, dass sie trotzdem rechnerisch verarbeitet werden durften. Es stellte sich nämlich heraus, dass, wenn die Rechnung nach den Operationsregeln mechanisch durchgeführt wurde, als ob alles sinnvoll wäre, dass dann [zu]mindest in weiten Sphären von Fällen jedes Rechnungsergebnis, das von den Imaginaritäten frei war, als richtig in Anspruch genommen werden konnte, wie man durch direkte Verifikation empirisch nachweisen konnte.³⁶

31 loc. cit. Vgl. auch Hartimo 2007, 299.

32 Vgl. FTL, 79.

33 Publiziert als Hilbert 1905, 185.

34 Vgl. FTL, 80. Eine formale Theorie T zu generalisieren, heißt grob gesprochen, Axiome/formale Bedingungen aus T zu beseitigen. „Spezialisierung“ bezeichnet die umgekehrte Relation. Für eine formale Rekonstruktion der Husserl'schen Begriffe der Generalisierung und Spezialisierung vgl. Centrone 2010, Kap. 3, § 7.

35 PdA Anh., 431.

36 PdA Anh., 432.

Die Mathematiker pflegen auf diese Schwierigkeit zu reagieren, indem sie Rechnungsverfahren immer mehr perfektionieren, ohne sich um die prinzipiellen Schwierigkeiten zu kümmern, die mit der Anwendung des Symbolismus auf verschiedene Zahlengebiete verbunden sind. Das Problem des Imaginären betrifft also die *Methodologie* der Mathematik, und es verdankt sich der Tatsache, dass der Reflexion auf symbolische oder formale Aspekte nicht ein genuin *theoretisches* Interesse zugrunde lag, sondern ein auf die Entwicklung arithmetischer Algorithmen gerichtetes *praktisches* Interesse, das mithilfe neuer Rechenregeln zum Zweck der Lösung verschiedener konkreter mathematischer Probleme befriedigt wurde.

Das Gebiet einer Wissenschaft, so sagt Husserl, wird durch einen *allgemeinen Begriff* begrenzt, und es wird konstituiert durch die Objekte, die unter diesen Begriff fallen.³⁷ So wird bspw. das Gebiet der Theorie der Kardinalzahlen durch den Begriff der *Anzahl* begrenzt und durch die *Anzahlen* konstituiert. Die Beziehungen und Verknüpfungen, die zwischen diesen Objekten möglich sind, ergeben sich aus dem Wesen dieser Objekte, und sie finden ihren formalen Ausdruck in einem Axiomensystem, das die Theorie dieses Gebietes ist.³⁸ Daraus ergibt sich – so argumentiert Husserl – folgendes Problem: „Aufgrund der besonderen Natur der Objekte haben gewisse Verknüpfungsformen keine reale Bedeutung, d.h. es sind widersinnige Verknüpfungsformen.“³⁹ Deshalb fragt sich Husserl: *Kann Widersinniges legitimerweise im Kalkül benutzt werden?* Darf rational-deduktives Denken, das in einer mathematisch-formalen Wissenschaft seinen Ausdruck findet, Widersinniges zulassen und die sich bei seiner Verwendung ergebenden Resultate akzeptieren? Kann ein solches Vorgehen theoretisch gerechtfertigt werden?

II. Husserls Begriff einer *allgemeinen Arithmetik*.

Unter der „allgemeinen Arithmetik“⁴⁰ versteht Husserl ein System von Rechnungsregeln, die (fast) alle in Form von Zahlensystemen ausgebildeten Zahlengebiete unter sich befasst. Wie wir gesehen haben, werden die verschiedenen Zahlengebiete durch verschiedene allgemeine Begriffe (*Anzahl*, *ganze Zahl*, *Irrationalzahl*, ...) begrenzt und durch Gegenstände verschiedener Arten (*Anzahlen*, *ganze Zahlen*, *Irrationalzahlen* ...) konstituiert. Die verschiedenen Zahlengebiete können aber *durch denselben Algorithmus interpretiert werden*,

37 Zur Herkunft von Husserls Konzeption eines durch einen Begriff abgegrenzten Erkenntnisgebiets vgl. Bolzano, bspw. WL I, 9: „Man kann ... fragen, ob das Gebiet der Wissenschaft, *die wir durch [eine] Begriffsbestimmung erhalten*, weder zu weit, noch zu eng sey“ (meine Hervorhebung).

38 Vgl. Centrone 2010, Kap. 2, § 4.

39 PdA Anh., 433.

40 Vgl. PdA, 281.

m.a.W. ihre Gegenstände können (zum Teil) in denselben Beziehungen stehen und durch dieselbe Theorie axiomatisiert werden. Die Beziehungen und Verknüpfungen, die beispielsweise zwischen Anzahlen bestehen, werden durch ein bestimmtes System von ‚Rechnungsregeln‘ axiomatisiert, das Husserl ‚allgemeine Arithmetik der Anzahl‘ nennt. Dergleichen für die anderen Zahlensysteme: jedes wird durch eine andere Arithmetik axiomatisiert.

Es zeigt sich, dass in allen Zahlensystemen (mit Ausnahme der *komplexen* Zahlen) die Gegenstände des Gebietes nach der \leq -Beziehung geordnet und auf gewisse Weisen (+, −, ...) verknüpft werden können. Nach Husserls Ansicht ist die allgemeine Arithmetik der *gemeinsame Teil* der verschiedenen Arithmetiken, und diese sind spezifische Instanzen von jener. In diesem Zusammenhang unterscheidet er

- a) allgemeine Operationsformen und
- b) *Operationsformen der Besonderung*, d.h. Operationen, welche nur in einem besonderen Zahlengebiet gültig sind.

Die ersteren bilden die allgemeine Arithmetik, während die *Operationsformen der Besonderung* die einzelnen Arithmetiken in ihrer Besonderheit bestimmen. Der Übergang von einer Arithmetik in eine andere, bspw. von der Arithmetik der Anzahlen in die der ganzen Zahlen, wird durch die Spezifizierung einiger Operationsformen der Besonderung ermöglicht, die von der allgemeinen Arithmetik offen gelassen waren.

Die alten Axiome geben die allgemeinen Operationen und gewissen besonderen Operationsgebilden einen bestimmten Sinn. Was nicht definiert ist, das ist in diesem engeren Gebiet ausgeschlossen. Die neuen Axiome halten alle diese Axiome fest, aber geben besonderen Operationsgebilden, die vorher nicht definiert und vorher offen gelassen waren, einen Sinn. Das fordert zusätzliche Axiome.⁴¹

Die spezifischen Operationsformen können in einem oder mehreren, aber keineswegs in allen Zahlensystemen gelten. Zu beachten ist, dass *nicht* die verschiedenen Zahlbegriffe und die jeweiligen Gebiete erweiterungsfähig sind, sondern *nur* das formelle Operationssystem, das sie beherrscht. Versteht man unter Anzahl „die Antwort auf die Frage Wieviel“,⁴² so kann es im strengen Sinne keine Erweiterung dieses Begriffs geben: „Die Sphäre des Anzahlbegriffs kann ich ohne Absurdität nicht beliebig aufgrund schöpferischer Definitionen erweitern, denn dieser Begriff ist es ja der mir Grenzen setzt.“⁴³ Nur der for-

41 PdA Anh., 444.

42 PdA Anh., 434.

43 PdA Anh., 435. Auf diesem Argument basiert u.a. Husserls Kritik an Dedekinds Erweiterungstheorie des Anzahlbegriffs (Vgl. PdA Anh., 434-435). Nach Husserls Dafürhalten ist diese Theorie unter dem Gesichtspunkt der arithmetischen Technik korrekt, aber seine theoretische Erklärung der schrittweisen Erweiterung des Anzahlgebiets erweist sich als mangelhaft. Sie setzt nämlich voraus, dass es möglich sei, den Zahlbegriff und das entsprechende Zahlengebiet durch Definitionen zu erweitern. Vgl. hierzu

male, „von seinen begrifflichen Grundlagen losgelöste“ Algorithmus ist erweiterungsfähig. Es ist nun möglich, dass in der Verallgemeinerung der spezifischen Kalküle einige Zahl- und Operationsgebilde, die durch die formale Erweiterung der Rechnungsregeln zugelassen werden, sich mit Bezug auf das Ursprungsgebiet als ‚imaginäre‘, ‚unmöglich‘ erweisen:

Betrachten wir z.B. das Axiomensystem der ganzen Zahlen, der positiven und negativen, dann ist $x^2 = -a$, $x = \pm\sqrt{-a}$ doch sinnvoll. Denn Quadrat ist definiert, $-a$ und $=$ auch. Aber „im Gebiet“ existiert keine $\sqrt{-a}$. Die Gleichung ist im Gebiet falsch, sofern eine solche Gleichung im Gebiet überhaupt nicht bestehen kann. Daher kann ich das Problem nicht stellen: „Eine gewisse Größe, x^2 ist $= a$. Welches ist diese Größe?“⁴⁴

Husserls Idee einer sukzessiven Erweiterung des Anzahlenalgorithmus ist eigentlich nichts anderes als eine konkrete Anwendung dessen, was Hilbert in *Über den Zahlbegriff* als die ‚genetische Methode‘ bezeichnet⁴⁵ und was Dedekind zum Zweck der schrittweisen Zurückführung der ‚neuen‘ Zahlen (der negativen, der rationalen, der Irrational- und komplexen Zahlen) auf die Anzahlen gebraucht. Hilberts Argument in dem gerade erwähnten Aufsatz bildet genau die Idee einer sukzessiven Erweiterung des Anzahlenalgorithmus ab, die Husserl mit Hilfe des Unterordnungsverhältnisses der besonderen Arithmetiken zur allgemeinen Arithmetik zu verwirklichen versucht. Es ist allerdings darauf hinzuweisen, dass Hilbert und Dedekind – als Mathematiker weniger empfindsam als Husserl bezüglich der begrifflichen Schwierigkeiten einer ‚Begriffserweiterung‘ – eben von einer Erweiterung des Zahlbegriffs bzw. des Zahlgebietes reden. Der entscheidende Punkt ist aber, daß ihre Theorien im Hinblick auf die arithmetische Technik als Varianten der Theorie Husserls angesehen werden können. Hilbert sagt:

Vergegenwärtigen wir uns zunächst die Art und Weise der Einführung des Zahlbegriffes. Ausgehend von dem Begriff der Zahl 1, denkt man sich gewöhnlich durch den Process des Zählens zunächst die weiteren ganzen rationalen positiven Zahlen 2, 3, 4, ... entstanden und ihre Rechnungsgesetze entwickelt; sodann gelangt man durch die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraction zur negativen Zahl; man definiert ferner die gebrochene Zahl, etwa als ein Zahlenpaar – dann besitzt jede lineare Function eine Nullstelle –, und schließlich die reelle Zahl als einen Schnitt oder eine Fundamentalreihe – dadurch erreicht man, dass jede ganze rationale indefinite, und überhaupt jede stetige indefinite Function eine Nullstelle besitzt. Wir können diese Methode der Einführung des Zahlbegriffes die *genetische Methode* nennen, weil der allgemeinste Begriff der reellen Zahl durch successive Erweiterung des einfachen Zahlbegriffes erzeugt wird.⁴⁶

auch Ingeborg Strohmeiers bemerkenswerte „Einleitung der Herausgeberin“ zu Hua XXI, xxxii-xxxiii.

44 Sch&Sch, 111-112.

45 Hilbert 1900a, 180-181.

46 loc. cit.

III. Anmerkung: Zu Husserls Begriff des *Unmöglichen* oder des *Imaginären*.

In der Schuhmann-Edition der Husserl'schen Manuskripte wird – einer Bemerkung Volker Peckhaus' folgend⁴⁷ – darauf hingewiesen, dass das Wort „unmöglich“, das sowohl in dem im *Jahresbericht des Deutschen Mathematiker-Vereinigung* überlieferten Titel („Der Durchgang durch das Unmögliche und die Vollständigkeit eines Axiomensystems“) als auch in der knappen Inhaltsangabe zur Sitzung am 10. Dezember vorkommt,⁴⁸ in den zum Manuskript von 1901 gehörenden Blättern nie auftaucht.⁴⁹ Freilich kommt dieser Ausdruck in einigen Anfang der neunziger Jahre entstandenen Manuskripten häufig vor, die ebenfalls zur Vorbereitung des Doppelvortrags gedient haben könnten.⁵⁰ Diese Manuskripte – so wird in der Einleitung der Schuhmann-Edition behauptet – „können dennoch nicht als zum ursprünglichen Vortragsmanuskript gehörig angesehen werden, da in ihnen das Unmögliche als die ‚Sphäre der Gegenstandslosigkeit‘ gilt (K I 26/73), wogegen Husserl das Imaginäre 1901 bestimmt als durch bestimmte Axiome festgelegt und in einem konsistenten Deduktionssystem formal definiert.“⁵¹ Aber hat Husserl wirklich zu Anfang der neunziger Jahre (also in einer Zeit, in der er an der *Philosophie der Arithmetik* arbeitete) und 1901 zwei verschiedene Begriffe des *Unmöglichen* bzw. *Imaginären* verwendet? Mir scheint, dass Husserl sowohl in der Ausarbeitung für die Manuskripte der neunziger Jahre als auch in der 1901-Vorlage zum Doppelvortrag die Ausdrücke „imaginär“, „unmöglich“, „sinnlos“, „widersinnig“ als gleichbedeutend verstanden wissen will⁵² und sie gebraucht, um „die Sphäre der Gegenstandslosigkeit“⁵³ zu bezeichnen. Dies steht keineswegs im Widerspruch zu Husserls Versuch von 1901, das Imaginäre „durch bestimmte Axiome festzulegen und in einem konsistenten Deduktionssystem formal [zu] definieren“.⁵⁴ Gerade die Idee, dass einige numerische Begriffe in einem Gebiet gegenständlich, in dem anderen gegenstandslos sind, versucht Husserl formal zu bestimmen. Das sollte einleuchten, wenn man sich die im vorigen Paragraphen dargestellte schrittweise Erweiterung des Zahlenalgorithmus vergegenwärtigt. Die „neuen“ Zahlbegriffe sind *mit Bezug auf das Anzahlengebiet*

47 Peckhaus 1990, 126.

48 Siehe oben S. 2.

49 Obwohl in dem Abschnitt, der dem Manuskript K I 26/78 entspricht (PdA Anh., 432-434; Sch&Sch, 93-98), Bruchzahlen, negative Zahlen usw. „unmögliche Zahlen“ genannt werden (PdA Anh., 432, Z.8).

50 Vgl. Sch&Sch, 89.

51 Sch&Sch, 89.

52 Vgl. bspw. Husserls Gebrauch von „imaginär“, „sinnlos“ und „sinnvoll“ in PdA Anh., 432 Z. 25-37; vgl. PdA Anh., 433.

53 Vgl. Sch&Sch, 89.

54 Sch&Sch, 89.

imaginäre Begriffe, denen kein Gegenstand entspricht und entsprechen kann. Dies schließt aber nicht aus, dass sie im Hinblick auf ein anderes, begrifflich abgegrenztes Gebiet gegenständlich sind. Macht man, von der formalen Arithmetik der Anzahlen ausgehend, beispielsweise die Forderung der allgemeinen Ausführung der Subtraktion geltend, so hat man numerische Begriffe zugelassen, die mit Bezug auf das Anzahlgebiet leer sind. So drücken die Zahlwörter „-1“, „-2“, „-3“, ... Zahlbegriffe aus, die mit Bezug auf das Anzahlgebiet gegenstandslos, mit Bezug auf das Gebiet der ganzen Zahlen aber gegenständlich sind. Husserl schreibt:

Bruchzahlen, negative Zahlen usw. sind vom Standpunkt der ursprünglich allein definierten Anzahlen allerdings unmögliche Zahlen; es sind Begriffe, denen kein Gegenstand [in dem alten Gebiet] entsprechen kann.⁵⁵

IV. Theorien des Imaginären.

Husserl erörtert eine ganze Reihe von Theorien, die das Problem des Imaginären in der Mathematik zu lösen versuchen. Ich werde hier nur diejenige Theorie diskutieren, die Husserl modifiziert, um seine *eigene* Lösung dieses Problems auszuarbeiten.

Diese fragwürdige Theorie basiert auf Hermann Hankels „Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze“, das im wesentlichen in der folgenden Forderung besteht: wenn man in der Mathematik einen Begriff – über seine ursprüngliche Definition hinausgehend – erweitert, so muss man, soweit es möglich ist, die „alten“ Rechenregeln *bewahren*.⁵⁶ In diesem Kontext diskutiert Husserl den Begriff eines ‚*definiten*‘ Axiomensystem, der bei seiner Lösung des Problems der theoretischen Rechtfertigung des Gebrauchs des Imaginären in

55 PdA Anh., 434.

56 Die wichtigsten Beiträge des Mathematikers (und Mathematik-Historikers) Hermann Hankel (1839-1873) betreffen die Theorie der Funktionen und der komplexen und hyperkomplexen Zahlen. Das ‚Prinzip der Permanenz der formalen Gesetze‘ formuliert er in seiner *Theorie der complexen Zahlensysteme* (1867), in der er das System der komplexen Zahlen, das der Hamilton’schen Quaternionen sowie einige von H. Grassmanns algebraischen Systemen detailliert darstellt. Das ‚Prinzip‘ revidiert und präzisiert das ‚principle of permanence of equivalent forms‘, das G. Peacock (1791-1858) eingeführt hatte, um den Übergang von der arithmetischen Algebra zur symbolischen als sinnvoll auszuweisen. *In nuce* fordert dieses Prinzip, dass die Gesetze der arithmetischen Algebra auch Gesetze der symbolischen sein sollten: wenn die allgemeinen Regeln für arithmetische Operationen an die entsprechenden Operationen der symbolischen Algebra angepasst werden, so werden die Resultate in dem gemeinsamen Teil dieser Disziplinen zusammenfallen; m.a.W., die symbolische Algebra wird eine ‚konservative‘ (und daher konsistente) Erweiterung der arithmetischen sein. Genau diese Frage nach der Konservativität wird auch Husserl stellen, wie wir sehen werden. Eine detaillierte Auseinandersetzung mit Hankels Permanenz-Prinzip findet man in Hartimo 2007, 285 ff.

der Mathematik eine entscheidende Rolle spielt. Für das, was Husserl als „Durchgang durch das Imaginäre“ beschreibt, akzeptiert er einige Resultate der Theorie der Permanenz, aber er spricht dieser Theorie nur für *definite* Axiomensysteme Gültigkeit zu.

In einer Passage in seinem Buch *Formale und Transzendente Logik* nimmt Husserl auf diesen Teil des *Doppelvortrags* Bezug, und er fasst das dort exponierte Problem wie seine Lösung sehr klar zusammen:

Der Begriff der definiten Mannigfaltigkeit diente mir ursprünglich ... zur Klärung des logischen Sinnes des rechnerischen Durchgangs durch das ‚Imaginäre‘ und im Zusammenhang damit zur Herausstellung des gesunden Kernes des vielgerühmten, aber logisch unbegründeten und unklaren Hankel’schen ‚Prinzips der Permanenz der formalen Gesetze‘. Meine Fragen waren: an welchen Bedingungen hängt die Möglichkeit, in einem formal definierten deduktiven System ... mit Begriffen frei zu operieren, die gemäß seiner Definition imaginär sind? Wann kann man sicher sein, dass Deduktionen, die bei solchem Operieren von dem Imaginären freie Sätze liefern, in der Tat ‚richtig sind‘, das ist *korrekte Konsequenzen der definierenden Axiomenformen*? Wie weit reicht die Möglichkeit, ... ein wohl definiertes deduktives System zu ‚erweitern‘ in ein neues, das das alte als Teil enthält? Die Antwort lautet: Wenn die Systeme ‚definit‘ sind, dann kann das Rechnen mit imaginären Begriffen nie zu Widersprüchen führen.⁵⁷

Das Argument, das Husserl in seinem *Doppelvortrag* entwickelt, beginnt mit einer abstrakten Rekonstruktion und Begründung des Hankel’schen Prinzips. Es sei G ein gegebenes Gegenstandsbereich, z.B. das der natürlichen Zahlen. Es sei A_G die Menge der Axiome bezüglich G , i.e. das formale Gebiet, das durch Formalisierung aus G gewonnen wird. Und es sei schließlich F_G die Menge der logischen *Folgen* aus A_G . „Bei dieser Formalisierung wird dann jedem durch die *Grundsätze* bestimmten Satz des realen Gebietes [G] ein Satz im formalen entsprechen und umgekehrt. Das formale Gebiet wird dieselben Schranken haben wie das reale, – Schranken, die in den Axiomen *präformiert* sind.“⁵⁸ Da Husserl an Theorien des algebraischen Typs denkt, d.h. an Theorien, die wesentlich durch Gleichungen charakterisiert sind, müssen wir unter den Beschränkungen des formalen Gebiets solche verstehen, die dem definierten Gebiet durch die Axiome A_G auferlegt werden, d.h. wir müssen an die Durchführbarkeit gewisser Operationen denken. (Wenn G bspw. das Gebiet der natürlichen Zahlen ist, dann ist die Subtraktion nur unter gewissen Bedingungen ausführbar, die dem Minuenden und dem Subtrahenden auferlegt werden.)

In der Hankel’schen Theorie der Permanenz gilt Folgendes: Es sei A_I eine Erweiterung von A_G , wobei $A_I = A_G + A'$. Demnach müsste gelten:

$$A_G \subseteq A_I \text{ und } F_I = F(A_G + A').$$

57 FTL, 85.

58 PdA Anh., 439.

Die neuen Axiome A' befreien die Operationen von gewissen Einschränkungen im eben erörterten Sinn. Für Husserl läuft das auf die Zulassung imaginärer Gegenstände hinaus. Wenn wir bspw., in den neuen Axiomen A' festlegen, dass die Subtraktion überall definiert sein soll, dann sind die von uns zugelassenen imaginären Gegenstände negative Zahlen.

An dieser Stelle behauptet die Theorie der Permanenz (in der heute üblichen Terminologie formuliert): *wenn die Erweiterung (A_I) konsistent ist, dann ist sie auch über A_G konservativ*. Husserl bezieht sich auf die Erweiterung des Systems der reellen Zahlen, die im System der komplexen Zahlen resultiert, wenn er sagt:

Wir erheben uns nach dem Prinzip der Permanenz über das besondere Gebiet, gehen ins formale über, und da dürfen wir mit $\sqrt{-1}$ frei operieren. Nun ist der Algorithmus der formalen Operationen zwar weiter als der Algorithmus der engeren Operationen ... *ist aber die formale Arithmetik in sich konsistent, so kann das erweiterte Operieren keinen Widerspruch zeigen mit dem engeren; also was ich formal so abgeleitet habe, dass es nur Zeichen des engeren Gebietes enthält, muss für das engere Gebiet auch wahr sein.*⁵⁹

Für Husserl ist diese von Hankel unterstellte Implikation keineswegs offenkundig. In Hankels Argumentation kann man zwei Probleme unterscheiden:

- (1) unter welchen Bedingungen ist A_I , die Erweiterung von A_G , *konsistent*?
- (2) unter welchen Bedingungen ist die Theorie A_I *konservativ* über A_G ?

„Unter welchen Umständen [sind] die Sätze, die vom Widersinn frei [sind], auch wirklich gültig?“⁶⁰ M.a.W., unter welchen Bedingungen sind die Sätze der ‚alten Sprache‘ (derjenigen von G), die im Ausgang von A_I beweisbar sind, auch aus A_G beweisbar und mithin für das konkrete Gebiet G gültig?

Husserls entscheidender Einwand ist der folgende: Zwar *impliziert Konservativität* über einer konsistenten Theorie *die Konsistenz der erweiterten Theorie*, aber die Umkehrung gilt nicht. Insbesondere folgt die Konklusion, dass die erweiterte Theorie konservativ ist, nicht aus der Prämisse, dass sie konsistent ist, wie die Permanenz-Doktrin unterstellt. Ob Konservativität wirklich vorliegt, muss für jede Theorie einzeln bewiesen werden.

Es liegt nahe zu stipulieren, dass die erweiterte Theorie A_I konsistent ist: „Eine selbstverständliche Voraussetzung der Erweiterung ist, dass das neue Axiomensystem in sich verträglich ist. Denn aus Unverträglichem kann man selbstverständlich alles Mögliche beweisen oder vielmehr: da gibt es keinen Beweis.“⁶¹ Unter dieser Hypothese – so Husserls *makelloso* Argument – gilt: gegeben, dass A_G in A_I enthalten ist, folgt für jede beliebige Formel α in der Sprache von G , dass wenn α aus A_I beweisbar ist, dann steht α (wegen der

59 PdA Anh., 438 (meine Hervorhebung).

60 loc. cit.

61 PdA Anh., 439.

Konsistenz von A_I) *nicht in Widerspruch zu A_G* ; d.h. die Negation von α ist aus A_G nicht beweisbar. „Es ist sicher richtig, dass kein abgeleiteter Satz ... eine Unverträglichkeit enthalten, dass er weder mit den erweiterten noch mit den ursprünglichen und engeren Axiomen streiten kann.“⁶²

Daraus, dass α nicht im Widerspruch zu A_G steht (d.h., dass $\neg\alpha$ nicht aus A_G beweisbar ist), schließt die Permanenz-Doktrin nun, dass α aus A_G beweisbar ist. M.a.W., gemäß dieser Doktrin gilt: wenn α keine imaginären Gebilde enthält und aus A_I folgt, dann gilt – um es in Husserls semantischer Terminologie zu formulieren –, dass α in dem konkreten Gebiet G *wahr* ist: „Ist das neue System ein *verträgliches* und schließt es das alte in sich, so kann [nach der Argumentation des Anhängers der Permanenz-Doktrin] in dem ganzen Bereich der Deduktion keine Unverträglichkeit bestehen, also kann ein Satz, der ... so abgeleitet ist, dass er keine der ‚unmöglichen‘ [imaginären] Operationsgebilde enthält, unmöglich eine Unverträglichkeit einschließen, also ist er wahr.“⁶³

In Husserls Augen enthält diese Argumentation einen begrifflichen Sprung, der nur dann möglich ist, wenn das ursprüngliche Axiomensystem A_G *ganz bestimmte Bedingungen erfüllt*:

Woher wissen wir, dass, was widerspruchslos ist, auch wahr ist, oder, wie es hier anzusprechen ist, woher wissen wir, dass ein Satz, der ausschließlich die im engeren Gebiet⁶⁴ vorkommenden und dort definierten Begriffe enthält und welcher den Axiomen des engeren Gebietes nicht widerstreitet, dass ein solcher für das engere Gebiet gilt?⁶⁵

Oder:

Bedenken wir folgendes: Das engere Gebiet G hat die Axiome A_G , die Gesamtheit rein logischer Konsequenzen F_G ; das weitere Gebiet I , z.B. $A_G + A' = A_I$; oder $A_I \supset A_G$, also die Konsequenz ($F = \text{Folge}$)

$$F_I = F_G + F_{A'} = F_{(G+A')}$$

Wenn irgendein Satz [sc. der zu F_I gehört] die erweiterten Operationskomplexionen nicht enthält, ist es doch nicht selbstverständlich, dass er zu den F_G gehört.⁶⁶

[Man beachte, dass die Gleichung $F_I = F_G + F_{A'} = F_{(G+A')}$ (die in genau dieser Form auch in der Neuedition von 2001 erscheint) einen Irrtum enthält: es gilt nicht allgemein, dass $F_G + F_{A'} = F_{(G+A')}$.]

62 loc. cit.

63 loc. cit.

64 Im Text steht ‚Begriff‘, was offenkundig ein Versehen ist.

65 loc. cit. (meine Hervorhebung).

66 PdA Anh., 439-440.

In summa, die Eigenschaft der Konsistenz der erweiterten Theorie A_I impliziert nicht, wie die Permanenztheorie stillschweigend und irrigerweise unterstellt, dass A_I über A_G konservativ ist.

V. „Der Durchgang durch das Imaginäre“

In dem Text mit dieser Überschrift, den Husserl als letzten Teil seines Göttinger Doppelvortrags präsentierte, identifiziert er eine *Eigenschaft von Axiomensystemen*, die in der oben beschriebenen Situation die Konservativität einer Erweiterung garantiert: es handelt sich dabei um die Eigenschaft der ‚(relativen) Definitheit‘, die man auf der Basis der Husserl’schen Erklärungen,⁶⁷ mit derjenigen identifizieren kann, die man heutzutage als ‚syntaktische Vollständigkeit‘ einer Theorie zu bezeichnen pflegt: „Relativ definit ist ein Axiomensystem, wenn jeder nach ihm sinnvolle Satz in Beschränkung auf sein Gebiet entschieden ist“,⁶⁸ d.h. wenn jede Formel (der Sprache der Theorie) in ihm entweder beweisbar oder widerlegbar ist.⁶⁹ Diese Identifikation muss *modulo* der Tatsache verstanden werden, dass Husserl und die zeitgenössischen Mathematiker und Logiker bis ca. 1917-1920 sich einer Sprache und Logik *höherer Stufe* zu bedienen pflegten, also sich nicht die heute übliche Beschränkung auf Sprache und Logik *erster Stufe* auferlegt. Außerdem müssen wir folgendes bedenken: es gibt zwar in Husserls Texten Belege für eine *algorithmische* Konzeption der *Ableitbarkeit* einer Formel α aus gegebenen Axiomen A gemäß gewissen zuvor festgelegten formalen Ableitungsregeln. Aber es wäre natürlich ein *overstatement*, wollte man behaupten, Husserl verfüge bereits über die heute übliche scharfe Unterscheidung zwischen dem *syntaktischen* Begriff der Ableitbarkeit aus einer (endlichen) Menge A von Axiomen und dem *semantischen* Begriff der Wahrheit in jeder Struktur, in der die Axiome A gelten.⁷⁰

67 Vgl. auch „Drei Studien zur Definitheit und Erweiterung eines Axiomensystems“, in: PdA Anh., 452-469.

68 PdA Anh., 440.

69 Vgl. Tieszen 2005: „a ‚definite‘ formal axiom system appears to be a consistent and complete axiom system, and a definite manifold is the system of formal objects, relations, and so on, to which a definite axiom system refers“ (4).

70 Awodey & Reck 2002 haben diese Frage sorgfältig erörtert und eine technisch detaillierte und historisch gut dokumentierte Untersuchung der verschiedenen Begriffe der *Vollständigkeit* vorgelegt, die im Zusammenhang mit der Entwicklung der axiomatischen Methode in der Mathematik des späten 19. und frühen 20. Jh. stehen. Die Autoren betrachten die Ursprünge und die fortschreitende Erklärung und Differenzierung sowohl dieses Begriffs als auch des verwandten Begriffs der ‚Kategorizität‘, die mit den eher tastenden Charakterisierungen bei Dedekind und Peano und auch in Hilberts *Grundlagen der Geometrie* (1899) und *Über den Zahlbegriff* (1900a) beginnen, dann von Huntington und Veblen verfeinert wurden und schließlich in Fraenkel 1919 und in Carnap 2000 (einem leider sehr vernachlässigten Text) eine ausgereifte Darstellung ge-

Kehren wir zu unserer Interpretation von Husserls Vortragstext zurück. Wenn A_F eine konsistente Erweiterung von A_G ist und wenn der ‚von imaginären Gebilden freie Satz‘ α aus A_F bewiesen werden kann, dann beweist A_G nicht $\neg\alpha$. Wegen der angenommenen Definitheit von A_G beweist dieses System mithin α . *Konsistente Erweiterungen eines definiten Axiomensystems sind stets konservative Erweiterungen.*⁷¹

Husserl gibt hierfür zunächst ein Beispiel: Er betrachtet eine ‚restringierte Arithmetik‘, AR (wir können sie uns als eine *algebraische* Theorie⁷² der elementaren Operationen der natürlichen Zahlen denken) und eine ‚universelle Arithmetik‘, AU . Alle Formeln von AR können – so sagt Husserl – *auf Gleichungen reduziert werden*, „wie wir denn $a < b$ als die Gleichung $a + u = b$ verstehen“.⁷³ *AR entscheidet jede Gleichung.* Deshalb sagt Husserl zu Recht, dass „jede in diese Arithmetik fallende Gleichung entweder aufgrund der Axiome gilt oder aufgrund der Axiome nicht gilt; d.h. *entweder der Satz ist eine Folge der Axiome oder er ist in Widerspruch mit den Axiomen.*“⁷⁴ *Also ist AU eine konservative Erweiterung von AR:*

Demnach werden wir sagen: Für die Arithmetik löst sich das Problem so: Jeder in die engere Arithmetik fallende, aber aufgrund der weiteren abgeleitete Satz ist eine Gleichung. Nun ist jede in die engere Arithmetik fallende Gleichung entweder in ihr richtig oder in ihr widersprechend; widersprechend kann eine im weiteren Gebiet abgeleitete Gleichung mit den Axiomen des engeren Gebietes nicht sein, sonst wäre das ganze engere Gebiet inkonsistent. Also ist sie richtig.⁷⁵

Das Beispiel generalisierend kann Husserl nun behaupten: ein ‚Durchgang durch das Imaginäre‘ ist möglich, wenn die folgenden zwei Bedingungen erfüllt sind:

- (1) das Imaginäre kann in einem konsistenten und umfassenden Deduktionssystem *formal* definiert werden, und

funden hat. Leider werden Husserls Begriffe der Definitheit nicht einmal erwähnt, obwohl in Fußnote 38 auf Majer 1997 und da Silva 2000 verwiesen wird „for more historical and philosophical background, in particular involving Hilbert’s relation to Husserl in this connection“.

71 Ortiz Hill 2002, 89-94 diskutiert diese Frage ausführlich, aber sie deutet die von Husserl gesuchte Eigenschaft nicht als *Konservativität* einer Theorie, und sie gibt auch kein formales Gegenstück zum Begriff der Definitheit einer Theorie an.

72 Über die wesentliche *algebraische-äquationale* Natur der ‚Arithmetiken‘, um die es hier geht, vgl. Centrone 2010, Kap. 3.

73 PdA Anh., 440. Man beachte aber, dass $a + u = b$ streng genommen keine Gleichung ist; denn die Variable u ist (implizit) *durch einen Existenzquantor gebunden*.

74 PdA Anh., 441 (meine Hervorhebung).

75 loc. cit.

- (2) das ursprüngliche Deduktionsgebiet hat, wenn es formalisiert ist, die Eigenschaft, dass jeder zu diesem Gebiet gehörende Satz auf der Basis der Axiome des Gebiets *entschieden* ist.⁷⁶

Die *Definitheit*, mit der wir bislang zu tun hatten, war, wie Husserl sagt eine ‚relative‘. Am Ende des Doppelvortrags betrachtet Husserl auch das, was er meist ‚absolute Definitheit‘ nennt und manchmal auch ‚[unechte] Vollständigkeit im Hilbert’schen Sinn‘.⁷⁷ Ein Axiomensystem ist absolut definit, wenn es ein *Schließungsaxiom* enthält, das dem *Axiom der Vollständigkeit* entspricht, welches Hilbert in seine (kategorische) axiomatische Charakterisierung des Systems der reellen Zahlen aufnimmt. In Hilberts eigenen Worten:

Es ist nicht möglich, dem Systeme der Zahlen ein anderes System von Dingen hinzuzufügen, so dass auch in dem durch Zusammensetzung entstehenden Systeme die Axiome I, II, III, IV 1 sämtlich erfüllt sind; oder kurz: die Zahlen bilden ein System von Dingen, welches bei Aufrechterhaltung sämtlicher Axiome keiner Erweiterung mehr fähig ist.⁷⁸

Oder um Husserls Formulierung aufzugreifen: „durch die und die Axiome ist das Gebiet bestimmt, und andere gelten nicht.“⁷⁹ In Husserls Augen ist dies ein *negatives* Axiom, dem keine interessante Eigenschaft der Axiomensysteme entspricht; denn durch die Hinzufügung eines solchen Schließungsaxioms kann natürlich jedes System vollständig gemacht werden.⁸⁰ Tatsächlich handelt es sich nicht um ein ‚echtes‘ Axiom, sondern eher um eine *metatheoretische* Aussage, also um etwas, das auf eine andere Ebene als die echten Axiomen gehört. Diese metatheoretische Aussage wird in eine formale Theorie sozusagen ‚von außen eingeführt‘ und ist – wie auch Hilbert bemerkt – mit der Anforderung äquivalent, dass die Theorie *kategorisch* ist, d.h. dass sie abgesehen von Isomorphismen ein einziges Modell besitzt.

76 loc. cit.

77 PdA Anh., 440.

78 Hilbert 1900a, 180-184. Vgl. auch: Hilbert 1899. Dazu Webb 1980, 84; Centrone 2010, Kap. 3, Anh. 6.

79 PdA Anh., 442.

80 „Diese Vollständigkeit ist nämlich nichts an Axiomensystemen speziell Charakteristisches ... Dieser Begriff der Vollständigkeit soll [daher] als unechte Vollständigkeit bezeichnet werden“ (loc. cit.).

Literaturverzeichnis

I. Schriften Edmund Husserls

- Husserliana: Edmund Husserl Gesammelte Werke* (1950+), Bd. I-XXVI, Den Haag: Martinus Nijhoff; Bd. XXVII-XXXVII, Dordrecht: Kluwer; Bd. XXXVIII– , New York: Springer. **[Abk.: Hua]**
- Philosophie der Arithmetik. Mit ergänzenden Texten (1890-1901)*, in: Hua, Bd. XII, Lothar Eley (Hrsg.), Den Haag: Martinus Nijhoff 1970. **[Abk.: PdA]**
- Logische Untersuchungen*. Bd I: *Prolegomena zur reinen Logik*, Halle a.d.S.: Max Niemeyer 1900 (1993: unveränd. Nachdr. d. 2., umgearb. Aufl.). **[Abk.: PR]**
- Logische Untersuchungen*. Bd II: *Untersuchungen zur Phänomenologie und Theorie der Erkenntnis*, Halle a.d.S.: Max Niemeyer 1901 (1993: unveränd. Nachdr. d. 2., teilw. umgearb. Aufl.).
- Ideen zu einer reinen Phänomenologie und phänomenologischen Philosophie. Erstes Buch; Allgemeine Einführung in die reine Phänomenologie. Neue, auf Grund der handschriftlichen Zusätze des Verfassers erweiterte Auflage*, in: Hua, Bd. III, Walter Biemel (Hrsg.), Den Haag: Martinus Nijhoff 1950. **[Abk.: ID:I]**
- Formale und transzendente Logik. Versuch einer Kritik der logischen Vernunft*, Jahrbuch für Philosophie und phänomenologische Forschung, X, 1929 (als selbständiger Band: Halle a.d.S.: Niemeyer 1929). **[Abk.: FTL]**
- Studien zur Arithmetik und Geometrie. Texte aus dem Nachlass 1886-1901*, in: Hua, Bd. XXI, Ingeborg Strohmeier (Hrsg.), Den Haag: Martinus Nijhoff 1983.

II. Schriften anderer Autoren und Studien

- Abrusci, Vito Michele (Hrsg.) (1978), *David Hilbert. Ricerche sui fondamenti della matematica*, Neapel: Bibliopolis.
- Abrusci, Vito Michele (1981), „Proof“, „theory“, and „foundations“ in Hilbert’s mathematical work from 1885 to 1900“, in: Maria Luisa Dalla Chiara (Hrsg.), *Italian studies in the philosophy of science*, Dordrecht: Kluwer, S. 453–491.
- Awodey, Steve / Reck, Erich (2002), „Completeness and Categoricity. Part I: Nineteenth-century axiomatics to twentieth-century metalogic“, in: *History and Philosophy of Logic* 23, S. 1–30.
- Bolzano, Bernard (1810), *Beyträge zu einer begründeteren Darstellung der Mathematik. Erste Lieferung*, Prag: Caspar Widtmann. Neudruck (1974): Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Bolzano, Bernard (1985+), *Wissenschaftslehre. Versuch einer ausführlichen und größtenteils neuen Darstellung der Logik mit steter Rücksicht auf deren bisherige Bearbeiter (1837)*, in: *Bernard Bolzano-Gesamtausgabe*, Reihe I, Bd 11–14, Jan Berg (Hrsg.), Stuttgart-Bad Cannstatt: Frommann-Holzboog. **[Abk.: WL]**
- Cantor, Georg (1883), *Grundlagen einer allgemeinen Mannigfaltigkeitslehre*, in: Cantor 1932, S. 165–209.

- Cantor, Georg (1932), *Gesammelte Abhandlungen mathematischen und philosophischen Inhalts*, Herausgegeben von Ernst Zermelo, Berlin: Springer.
- Carnap, Rudolf (2000), *Untersuchungen zur allgemeinen Axiomatik*, Herausgegeben von Thomas Bonk und Jesus Mosterin, Darmstadt: Wissenschaftliche Buchgesellschaft.
- Cavaillès, Jean (1938), *Méthode axiomatique et formalisme* (1938), in: Cavaillès 1994, S. 1-202.
- Cavaillès, Jean (1994), *Oeuvres complètes de Philosophie des Sciences*, Paris: Hermann.
- Centrone, Stefania (2010), *Logic and Philosophy of Mathematics in the Early Husserl*, Berlin: Springer.
- Corry, Leo (2004), *David Hilbert and the Axiomatization of Physics (1898-1918)*, Dordrecht: Kluwer.
- Da Silva, Jairo José (2000), „Husserl’s two notions of completeness. Husserl and Hilbert on completeness and imaginary elements in mathematics“, in: *Synthese* 125, S. 417-438.
- Fraenkel, Abraham (1919), *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin: Springer.
- Giusti, Mariangela (2000), „Punti di vista esterni alla Pedagogia. La rilettura di E. Husserl fatta da Ettore Casari“, in: *Encyclopaideia* 4/7, S. 103-116.
- Hankel, Hermann (1867), *Theorie der complexen Zahlensysteme*, Leipzig: Voss.
- Hartimo, Mirja (2007), „Towards completeness: Husserl on theories of manifolds 1890 - 1901“, in: *Synthese* 156, S. 281-310.
- Hilbert, David (1899), *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig: Teubner.
- Hilbert, David (1900a), „Über den Zahlbegriff“, in: *Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung* 8, S. 180-184.
- Hilbert, David (1900b), „Mathematische Probleme“, in: Hilbert 1935, S. 290-329.
- Hilbert, David (1905), „Über die Grundlagen der Logik und der Arithmetik“, in: Adolf Krazer (Hrsg.), *Verhandlungen des Dritten Internationalen Mathematiker-Kongresses in Heidelberg vom 8. bis 13. August, 1904*, Leipzig: Teubner, S. 174-185.
- Hilbert, David (1935), *Gesammelte Abhandlungen. Dritter Band: Analysis, Grundlagen der Mathematik, Physik, Verschiedenes*, Berlin: Springer.
- Majer, Ulrich (1997), „Husserl and Hilbert on Completeness: A Neglected Chapter in Early Twentieth Century Foundations of Mathematics“, in: *Synthese* 110, S. 37-56.
- Ortiz Hill, Claire (1995), „Husserl and Hilbert on completeness“, in: Jaakko Hintikka (Hrsg.), *From Dedekind to Gödel. Essays in the development of the foundations of mathematics*, Dordrecht: Kluwer, S. 143-163.
- Ortiz Hill, Claire (2002), „Tackling three of Frege’s problems: Edmund Husserl on sets and manifolds“, in: *Axiomathes* 13, S. 79-104
- Peckhaus, Volker (1990), *Hilbertprogramm und Kritische Philosophie*, Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.
- Reid, Constance (1970), *Hilbert*, Berlin/Heidelberg/New York: Springer.
- Schuhmann, Elisabeth / Schuhmann, Karl (Hrsg.) (2001) „Husserls Manuskripte zu seinem Göttinger Doppelvortrag von 1901“, in: *Husserl Studies* 17, S. 87-123.
- [Abk.: Sch&Sch]**

- Sieg, Wilfried (2002), „Beyond Hilbert’s Reach“, in: David Malament (Hrsg.), *Reading Natural Philosophy - Essays in the History and Philosophy of Science and Mathematics*, Chicago: Open Court Press, S. 363–405.
- Stein, Howard (1998), „Logos, Logic, and Logistiké: Some Philosophical Remarks on the 19th-century Transformation of Mathematics“, in: W. Aspray / Philip Kitcher (Hrsg.), *History and Philosophy of Modern Mathematics*, Minnesota Studies in the Philosophy of Science, vol. XI, University of Minnesota Press 1988, S. 238–259.
- Tieszen, Richard (1995), „Mathematics and Transcendental Phenomenology“, in: Tieszen 2005, S. 46–68.
- Tieszen, Richard (2004), „Science as a triumph of the human spirit and science in Crisis. Husserl and the fortunes of reason“, in: Tieszen 2005, 21–45.
- Tieszen, Richard (2005), *Phenomenology, Logic and the Philosophy of Mathematics*, Cambridge (NY): Cambridge University Press.
- Webb, Judson (1980), *Mechanism, Mentalism and Mathematics*, Dordrecht: Reidel.