Die Göttinger Mathematiker
Gauß, Riemann, Klein und Hilbert

TAMMO TOM DIECK

1 Einleitung

Die Mathematik ist seit Jahrtausenden ein bedeutender Bestandteil der Kultur. Schon die klassische griechische Mathematik entwickelt sich zu einer Wissenschaft, die um ihrer selbst willen betrieben wird, mit eigenen mathematischen und philosophischen Problemen, und die nicht nur Rezepte liefert. Berühmt sind die 13 Bücher des Euklid (genannt „Elemente"), die 2000 Jahre lang richtungsweisend für die Mathematik waren. Wir werden sehen, welchen Einfluß dieses Erbe auch noch im 19. Jahrhundert hatte.

Spätestens im 18. Jahrhundert, zusammen mit dem Aufblühen der Naturwissenschaften, beginnt sich die Mathematik von ihren klassischen Vorbildern durch beeindruckende Fortschritte zu lösen. Dazu gehört besonders die Entwicklung der Differentialrechnung, mit der es möglich wird, kausal ablaufende Naturvorgänge durch Differentialgleichungen zu beschreiben.

Die alten Probleme werden allerdings nicht vergessen, sondern weiterhin als Herausforderung angesehen und eben dann auch gelöst.

Die im Titel meines Vortrages genannten Mathematiker

Carl Friedrich Gauß	1777 – 1855
Bernhard Riemann	1826 – 1866
Felix Klein	1849 – 1925
David Hilbert	1862 – 1943

begründen den weltweiten Ruhm, den die Göttinger Mathematik seit Anfang des 19. Jahrhunderts genießt. Die Bedeutung dieser Wissenschaftler mag man etwa daran ermessen, daß aus ihren Forschungen, Ideen und Programmen nachmals ganze Forschungsrichtungen entstanden sind. (Natürlich müssen eigentlich noch weitere Namen genannt werden, etwa Dirichlet, Minkowski, Weyl, Landau, Hecke, Courant, Emmy Noether ...)

Bedingt durch die einschränkenden Rahmenbedingungen eines Vortragsmanuskriptes kann ich aber weder auf biographische Einzelheiten eingehen noch dem Lebenswerk der Forscher auch nur annähernd gerecht werden. Einige lexikalische Daten seien jedoch immerhin in einem Anhang (Abschnitt 14) zusammengestellt.

Ich werde über die Begriffs- und Ideenwelt der Mathematik berichten und anhand ausgewählter Beispiele aus dem Werk von Gauß, Riemann, Klein und Hilbert einige Entwicklungslinien aufzeigen. Dabei werde ich auch auf Beiträge anderer Wissenschaftler eingehen können.

Ich habe drei Themenbereiche herausgegriffen, zu denen ich gewisse Grundkenntnisse voraussetzen kann: Zahlen, Geometrien und Räume. Dabei muß ich mich allerdings auf Dinge beschränken, die weitgehend ohne Fachsprache (insbesondere ohne „Formeln") mitteilbar sind. Wie Riemann anläßlich seines Habilitationsvortrages sagt [15, S. 258]:

> „Es wird daher, um festen Boden zu gewinnen zwar eine abstracte Untersuchung in Formeln nicht zu vermeiden sein, die Resultate derselben aber werden sich im geometrischen Gewande darstellen lassen."

Formeln sind zunächst sprachliche Abkürzungen, entwickeln dann aber ein Eigenleben, werden selbst mathematische Gegenstände („Formeln von Formeln", ad infinitum), und dieser hierarchische Charakter erschwert den Zugang. Eine Fremdsprache zu erläutern, ohne sie zu benutzen, ist widersprüchlich, wenn nicht gar absurd.

2 Vorbemerkungen

Bevor ich zu den drei genannten Themen komme, beginne ich zur Einstimmung mit einigen allgemeinen Worten zur Welt der Mathematik.

2.1 Was ist Mathematik?

Diese rhetorische Frage kann man natürlich nicht beantworten. Die Mathematik ist keine Naturwissenschaft und keine Geisteswissenschaft. Man könnte sie, grob gesagt, als Wissenschaft der formalen Regelsysteme und ihrer sprachlichen Bewältigung ansehen. Vielleicht sollte man sogar sagen: Die Mathematik ist die Wissenschaft vom geordneten und systematischen Denken in formalen Strukturen. Die Regelsysteme der Mathematik sind allerdings nicht willkürlich, sondern durch ihre eigene Entwicklung und durch Fragestellungen aus anderen Wissenschaften und vielfältigen Lebensbereichen entstanden.

In der Mathematik wird nichts „überholt", was einmal richtig war, bleibt richtig. Jedoch wird die Sprache verbessert und zweckmäßiger, Einzelfälle werden in allgemeine Theorien eingeordnet, die Grundlagen werden präzisiert, neue Bereiche werden mathematischer Methodik zugänglich.

Wer beim Stichwort Mathematik an Zahlen, Räume und geometrische Figuren denkt, liegt absolut richtig, und diese Gegenstände werden ja auch die Ausgangspunkte und Leitbegriffe meines Vortrages sein. Aber keine Wissenschaft ist jemals „fertig", und immer wieder werden wir überrascht durch neue

Ideen über etwas, das man vorher gar nicht als Teil der Mathematik wahrgenommen hat.

Ehe es in der Mathematik zu formalen Ergebnissen kommt, werden durchaus naturwissenschaftliche Methoden verwendet, etwa Datensammlungen erstellt, um Gesetze über Zahlen zu finden oder Vermutungen zu erhärten, und geisteswissenschaftliche Methoden, etwa philosophische Betrachtungen darüber, was Zahlen oder Geometrien sein können und sollen oder eigentlich sind.

2.2 Mathematik und Mensch

Nachdem einmal ein Problem gelöst, ein Lehrsatz bewiesen, ein Konzept entwickelt worden ist, so ist der menschliche Urheber danach verschwunden. Die Mathematik ist eine Wissenschaft der Gedanken und des Denkens — und sie existiert und überlebt nur in aufgeschriebener Form (handschriftlich, gedruckt, elektronisch, ...). Sie muß jedoch einmal durch den menschlichen Geist und Körper hindurch, ein recht mysteriöser und oft mühevoller Vorgang. Hören wir dazu Gauß aus einem Brief an W. Olbers [4, S. 70]:

> „Sie erinnern sich vielleicht meiner Klagen über einen Satz, der alle meine Bemühungen, einen genügenden Beweis zu finden, vereitelt hatte. Seit 4 Jahren wird selten eine Woche hingegangen sein, wo ich nicht einen oder den anderen vergeblichen Versuch, diesen Knoten zu lösen, gemacht hätte — besonders lebhaft nun auch wieder in der letzten Zeit. Aber alles Brüten, alles Suchen ist umsonst gewesen, traurig habe ich jedesmal die Feder wieder hinlegen müssen. Endlich vor ein paar Tagen ist es gelungen, aber nicht meinem mühsamen Suchen, sondern bloß durch die Gnade Gottes, möchte ich sagen. Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Rätsel gelöst; ich selbst wäre nicht im Stande, den leitenden Faden zwischen dem, was ich vorher wußte, dem, womit ich die letzten Versuche gemacht hatte, und dem, wodurch es gelang, nachzuweisen."

Nun, dieses Zitat beschreibt nicht die volle Wahrheit. Oft wird ein Wissenschaftler von einer Fülle von Ideen heimgesucht. Halten wir aber fest: Ideen und Erkenntnisse lassen sich nicht erzwingen. Leider ist wenig darüber bekannt, welche Umweltbedingungen die Entstehung von Ideen fördern.

3 Zahlen

Zahlen sind und bleiben die Grundobjekte der Mathematik. Zum einen sind sie selbst Gegenstand der mathematischen Forschung (Zahlentheorie), zum anderen sind sie ein universelles sprachliches Hilfsmittel, um andere Bereiche zu behandeln (Analytische Geometrie).

3.1 Natürliche, ganze, rationale, reelle Zahlen

Es gibt eine mindestens 3000 Jahre währende Geschichte der Entwicklung des Zahlbegriffs, die mit den natürlichen Zahlen 1,2,3,4,… beginnt und mit der Erfindung der Null und den negativen Zahlen $-1,-2,-3,\ldots$ zum Bereich der ganzen Zahlen und den gebrochenen Zahlen (den sogenannten rationalen Zahlen) fortschreitet.

Die Entdeckung irrationaler Verhältnisse, wie der Quadratwurzel $\sqrt{2}$ aus 2 (Diagonale im Einheitsquadrat) und $\sqrt{5}$ (Pentagramm, goldener Schnitt), führte zu einer Krise in der Mathematik und Philosophie der Pythagoreer („Alles ist Zahl“). Eine Theorie des Irrationalen wird dann schon von Eudoxos von Knidos entworfen. Diese Grundlagenprobleme werden im 19. Jahrhundert neu aufgegriffen durch Richard Dedekind (1831 – 1916) [1] sowie Georg Cantor (1845 – 1918). Bei Dedekind sind die irrationalen Zahlen die „Lücken“ zwischen den rationalen, sie lassen sich somit allein aus der Anordnungsstruktur definieren. So ist $\sqrt{2}$ durch das System der kleineren und das System der größeren Zahlen bestimmt, und — das ist der Witz — diese Zahl wird durch diese Zerlegung der rationalen Zahlen hergestellt, wenn man sie vorher noch nicht hatte.

Die reellen Zahlen (das heißt alle rationalen und irrationalen Zahlen) werden durch die Zahlengerade veranschaulicht, eine gerade Linie, auf der die Zahlen ihrer Größe nach abgetragen werden. Die Zahlengerade ist das Grundmodell eines räumlichen geometrischen Begriffs. Dieses geometrische Objekt gibt es natürlich nicht in einer unabhängigen Weise, es wird in Wahrheit durch die Zahlen definiert. (Wenn man das exorbitante Begriffssystem der reellen Zahlen als sprachliches Modell für „Zeit“ benutzt, so macht man sich kaum noch klar, was für eine großzügige und unbeweisbare Idealisierung darin verborgen ist.)

Trotz der Probleme bei der begrifflichen Präzisierung des Zahlbegriffs hat man sich jedoch in der Praxis nicht große Sorgen um sie gemacht.

3.2 Die komplexen Zahlen

Ganz anders verhielt es sich mit einer nochmaligen Erweiterung des Zahlbegriffs, den komplexen Zahlen (zur interessanten Geschichte [14] [2]). Seit dem 16. Jahrhundert entstand durch das Lösen von Gleichungen das Bedürfnis, den Bereich der reellen Zahlen zu erweitern durch die sogenannten imaginären Zahlen, den Quadratwurzeln aus negativen Zahlen. (Eine Gleichung ist primär eine Frage — und oft rettet man sich in der Mathematik damit, daß die Frage selbst als Antwort auf sich deklariert wird!)

Gauß war mit 19 Jahren die Veranschaulichung des Bereichs der Zahlen, die er später komplexe Zahlen nannte, durch Punkte der Ebene geläufig. Andere vor ihm haben mit diesen Zahlen (und dieser Veranschaulichung) gearbeitet, besonders virtuos etwa Leonhard Euler (1707 – 1783). Da aber eine systematische und formal einwandfreie Begründung fehlte, wurden auch allerlei Fehler gemacht.

Eine Rechtfertigung, zumindest für die Nützlichkeit der komplexen Zahlen, war der von Gauß in seiner Doktorarbeit [5, Bd. 3, S. 1-30] und später noch mehrmals von ihm bewiesene Satz, daß jede algebraische polynomiale Gleichung innerhalb der komplexen Zahlen eine Lösung hat. Dadurch war man nicht gezwungen, noch weitere neue Zahlen zu erfinden oder Gleichungen als unlösbar zu deklarieren.

Die erfolgreiche Benutzung der komplexen Zahlen in der Zahlentheorie und die Autorität von Gauß haben zur Durchsetzung dieser Zahlen wesentlich beigetragen. Doch findet sich auch bei ihm noch keine formale Begründung. Seine Äußerungen haben mehr den Charakter einer Überredung. So sagt er:

> 1825: „Der wahre Sinn des $\sqrt{-1}$ steht mir mit großer Lebendigkeit vor der Seele, aber es wird schwer sein, ihn in Worte zu fassen, die immer nur ein vages, in der Luft schwebendes Bild geben können."

> 1831: „Allein die den reellen Grössen gegenübergestellten imaginären — ehemals, und hin und wieder auch jetzt, obwohl unschicklich, *unmögliche* genannt — sind noch immer weniger eingebürgert als nur geduldet, und erscheinen also mehr wie ein an sich inhaltsleeres Zeichenspiel, dem man ein denkbares Substrat unbedingt abspricht, ohne doch den reichen Tribut, welchen dieses Zeichenspiel zuletzt in den Schatz der Verhältnisse der reellen Grössen steuert, verschmähen zu wollen."

Im Jahr 1835 hat William Rowan Hamilton (1805 – 1865), berühmt durch seine Erfindung der Quaternionen (ein 4 -dimensionaler Rechenbereich), die komplexen Zahlen formal als Paare reeller Zahlen eingeführt, für die er Addition und Multiplikation definiert und die üblichen Rechenregeln beweist. So gehen wir noch heute vor[1].

Für Riemann waren dann die komplexen Zahlen in seiner berühmten Göttinger Inauguraldissertation „Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Größe" aus dem Jahre 1851 schon selbstverständlich. Mit dieser Dissertation beginnt die geometrische Funktionentheorie, wodurch nicht nur der formelmäßige analytische Aspekt einer Funktion sondern auch ihre globale qualitative Gestalt in den Blick kam.

4 Zahlentheorie

Das Hauptwerk von Gauß zur Zahlentheorie sind die Disquisitiones Arithmeticae, 1801 in Leipzig erschienen, siehe auch [6]. Darin werden drei The-

1 Im Bemühen um eine Grundlegung und Rechtfertigung einer Theorie wird oft das allgemeine Prinzip der Modellbildung benutzt. Man kann den „Schwarzen Peter" nur verschieben, aber nicht beseitigen. In unserem Falle: Die Begründung der komplexen Zahlen wird auf die Begründung der reellen Zahlen zurückgeführt.

men ausführlich behandelt, die die weitere Entwicklung der Zahlentheorie nachhaltig beeinflußt haben: Kreisteilung, quadratische Reste, und ganzzahlige Lösungen quadratischer Gleichungen.

4.1 Kreisteilung

Gauß fing schon mit 14 Jahren mit eigenständigen mathematischen Untersuchungen an. Es war eine Entdeckung des 19-Jährigen, die ihn bestimmte, sich der Mathematik als Lebensaufgabe zu widmen. Seit 2000 Jahren fragte man, welche regelmäßigen Vielecke sich mit Zirkel und Lineal konstruieren lassen. Am 29. März 1796 entdeckte Gauß das Prinzip, welche Vielecke sich derart herstellen lassen, insbesondere weist er dieses für das 17-Eck nach. Die erste Ankündigung des Resultates erscheint am 18. April 1796: An die Leser der Allgemeinen Literaturzeitung, Braunschweig [4, S. 55]. Er schreibt dazu später [4, p.54]:

> „Das Geschichtliche jener Entdeckung kann ich sehr genau angeben. Der Tag war der 29. März 1796, und der Zufall hatte gar keinen Anteil daran. Durch angestrengtes Nachdenken über den Zusammenhang aller Wurzeln untereinander nach arithmetischen Gründen glückte es mir, bei einem Ferienaufenthalt in Braunschweig am Morgen des gedachten Tages (ehe ich aus dem Bette aufgestanden war), diesen Zusammenhang auf das Klarste anzuschauen, so daß ich die spezielle Anwendung auf das Siebzehneck und die numerische Bestätigung auf der Stelle machen konnte."

Die erste Ankündigung des Resultates geschieht am 18.4.1796: An die Leser der Allgemeinen Literaturzeitung, Braunschweig. Nachdem dort gesagt wird, daß man Dreieck, Fünfeck, Fünfzehneck, ... schon zu Euklids Zeit geometrisch konstruieren konnte, fährt Gauß fort:

> „Desto mehr dünkt mich, verdient die Entdeckung Aufmerksamkeit, daß außer jenen ordentlichen Vielecken noch eine Menge anderer, z.B. das Siebzehneck, einer geometrischen Konstruktion fähig ist. Diese Entdeckung ist eigentlich ein Corollarium [d.h. ein Folgeergebnis] einer noch nicht ganz vollendeten Theorie von größerem Umfang, und sie soll, sobald diese ihre Vollendung hat, dem Publikum vorgelegt werden."

Fragen nach der Konstruierbarkeit gab es seit der Antike, mit vielen Spezialversuchen zu Einzelfällen (Quadratur des Kreises, Würfelverdoppelung, Dreiteilung des Winkels,...). Es wurden übrigens dabei auch andere Werkzeuge und mathematische Hilfsmittel als Zirkel und Lineal benutzt.

In der Ebene der komplexen Zahlen entsprechen die Eckpunkte eines regelmäßigen 17-Ecks den Zahlen, die 17-mal mit sich selbst multipliziert die Zahl 1 ergeben (deshalb 17. Einheitswurzeln genannt). Die Konstruierbarkeit läuft dann darauf hinaus, diese Zahlen durch Quadratwurzeln auszurechnen. Die Gaußsche Formel im Falle des Siebzehnecks ist schon recht haarsträubend. Seine Formel sei hier zur Illustration kopiert: Der Cosinus des Winkels

$\alpha = 2\pi/17$ wird durch Quadratwurzeln ausgerechnet; das Sechszehnfache $16 \cdot \cos\alpha$ ist gleich

$$-1+\sqrt{17}+\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{17+3\sqrt{17}-\sqrt{34-2\sqrt{17}}+2\sqrt{34+\sqrt{17}}}\,.$$

Gauß zeigt: Regelmäßige p-Ecke lassen sich für die Primzahlen der Form $p = 2^n + 1$ konstruieren, und er erwähnt auch, ohne einen Beweis aufzuschreiben, für keine anderen. Die bekannten Primzahlen dieser Art sind 3, 5, 17, 257 und 65537.

Heutzutage werden diese Fragestellungen in die Galois–Theorie eingeordnet, der systematischen Theorie von Lösungen algebraischer Gleichungen unter dem Gesichtspunkt der Symmetrie.

4.2 Quadratische Reste

Nach Tagebuchaufzeichnungen hat Gauß am 8. April 1796 den ersten Beweis für einen merkwürdigen Satz über ganze Zahlen gefunden, den er „theorema fundamentale" nennt. Der Satz heißt heute „quadratisches Reziprozitätsgesetz" nach Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833). Entdeckt wurde das Gesetz aber wohl zuerst von Euler. Der erste vollständige Beweis wurde von Gauß in den Disquisitiones Arithmeticae 1801 veröffentlicht. Gauß hat dann im Laufe der Zeit sieben weitere Beweise gegeben — ein Zeichen dafür, wie wichtig er dieses Gesetz nahm und wie er um ein tieferes Verständnis bemüht war. Gauß schreibt dazu später:

> „Auf den Satz kam ich völlig selbständig im Jahre 1795, zu einer Zeit, da ich mich in völliger Unkenntnis über Alles fand, was in der höheren Arithmetik bereits erreicht worden war, und zugleich nicht die mindesten literarischen Hilfsmittel besaß. Ein ganzes Jahr quälte mich dieser Satz und entzog sich den angestrengtesten Bemühungen, bis ich endlich den ... gegebenen Beweis erlangte."

Mit geringen Schulkenntnisssen kann man die Formulierung des Ergebnisses verstehen — und einmal wenigstens in diesem Aufsatz wollen wir uns dieser Mühe gutwillig unterziehen.

Alltäglich ist die Einteilung der ganzen Zahlen in gerade und ungerade. Aber mit den Worten(!) „gerade" und „ungerade" kann man auch rechnen[2], zum Beispiel: ungerade mal ungerade ist ungerade oder ungerade plus ungerade ist gerade. Man erhält so einen Rechenbereich aus zwei Dingen.

Nun nehme man eine feste Zahl, etwa 19, um etwas Konkretes vor Augen zu haben, und werfe alle diejenigen ganzen Zahlen in denselben Topf, die bei Division mit 19 denselben Rest ergeben (wie man in der Schule sagt, die Division geht nicht immer auf, es bleibt ein Rest). Man erhält so 19

2 Rechnen ist: Addieren und multiplizieren von Irgendwas nach üblichen Regeln.

Töpfe, die man etwa durch ihre typischen Mitglieder mit $0,1,2,\ldots,18$ bezeichnen könnte. Die entscheidende Feststellung ist nun: Mit diesen Töpfen kann man wieder rechnen, das heißt man kann sie addieren und multiplizieren. Das Produkt zweier Töpfe erhält man so: Man nehme aus jedem der beiden Töpfe eine Zahl, multipliziere sie in gewöhnlichem Sinne und schaue nach, in welchem Topf das Produkt landet. Dieser sei der Produkttopf. Ebenso für die Addition. Man erhält so einen Rechenbereich aus 19 Töpfen. Die Töpfe werden auch Restklassen genannt.

Wir betrachten nun statt 19 eine beliebige ungerade Primzahl p und die zugehörigen Töpfe (Restklassen) außer dem Topf, der die Null enthält. Produktbildung führt aus diesen nicht heraus. Man stellt nun fest: Genau die Hälfte dieser Töpfe enthält eine Quadratzahl. Die Zahlen in diesen Töpfen nennt man deshalb quadratische Reste[3] bezüglich der Primzahl p.

Theorema fundamentale. *Hat wenigstens eine der ungeraden Primzahlen p,q bei Division mit 4 den Rest 1, so ist q genau dann quadratischer Rest bezüglich p, wenn p quadratischer Rest bezüglich q ist. Haben beide bei Division mit 4 den Rest 3, so ist q genau dann quadratischer Rest bezüglich p, wenn p nicht quadratischer Rest bezüglich q ist.*

Eine zahlentheoretische Wechselbeziehung zwischen zwei beliebigen ungeraden Primzahlen — ein Resultat dieser Art ist weit jenseits unserer Alltagserfahrungen mit dem Zahlenrechnen. Ja, man kann nicht einmal schnell erläutern, warum man sich überhaupt dafür interessiert, geschweige denn, was daran „fundamental“ sein soll.

In der Folgezeit wurde es zu einem Hauptanliegen der Zahlentheorie dieses Gesetz zu verstehen. Aber was heißt hier verstehen? Man sucht nach den allgemeinsten Erscheinungsformen; dieser Prozeß ist auch heute noch nicht abgeschlossen, und es gibt bedeutende programmatische Vermutungen darüber.

Ende des 19. Jahrhunderts wurde mit dem sogenannten Zahlbericht [9] von Hilbert über die Theorie der algebraischen Zahlkörper der Stand der Forschung zusammengefaßt, abgerundet und weiterentwickelt. Dieser Bericht war dann für viele Jahre die Grundlage für den Fortschritt der algebraischen Zahlentheorie.

Hier noch eine methodische Bemerkung zu Restklassen und Primzahlen: Die unendlich vielen Zahlen werden von jeder Primzahl in ein endliches und damit viel einfacheres System von Restklassen verwandelt. Man betrachtet deshalb gerne alle Zahlen durch eine „Restklassenbrille“. Obgleich durch diese Brille das Bild unschärfer wird, so hat man gute Gründe dafür, daß sich aus der Gesamtheit der unscharfen Bilder das ursprüngliche Bild rekonstruieren läßt.

---

3 Im Nachlaß von Gauß hat man umfangreiche Tabellen gefunden, in denen die Primzahlen unter 1000 als Reste oder Nichtreste in Bezug auf 3 bis 503 aufgeführt werden [5, Bd.2, S. 400].

4.3 Primzahlen

Bekanntlich zeigt eine einfache klassische Überlegung (Euklid): Die Reihe der Primzahlen endet nicht.

Bis heute sind die Primzahlen eines der großen Mysterien der Mathematik. Man kennt keine effektive Methode, immer größere Primzahlen zu finden. (In der Presse wird gelegentlich über neue „Weltrekorde“ berichtet.) Die Reihe der Primzahlen wird auf dem Weg ins Unendliche immer dünner, denn mit jeder neuen Primzahl kann man ja alle ihre Vielfachen streichen. Ihre Verteilung ist sehr unregelmäßig. Mal gibt es große Lücken; mal liegen zwei Primzahlen eng zusammen. Man spricht von Zwillingen, wenn sie nur um 2 auseinanderliegen, wie z.B. 17 und 19; jedoch weiß man nicht, ob es unendlich viele Zwillinge gibt. (Addition und Multiplikation sind unversöhnlich.)

Der allgemeine Glaube an die Harmonie in der (mathematischen) Welt erzwingt die Frage: Kann man wenigstens qualitative Aussagen über die Verteilung der Primzahlen machen?

Gauß fängt schon mit 14 Jahren an, die Häufigkeit der Primzahlen abzuzählen. Er gewinnt aus diesem Datenmaterial eine Vermutung: Die Anzahl $\pi(x)$ der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Schranke x ist ungefähr gleich $x/\log x$, wobei „ungefähr“ bedeutet, daß sich der Quotient von $\pi(x)$ und $x/\log x$ mit wachsendem x immer mehr der 1 nähert. Dieses Verteilungsgesetz wurde auch von Legendre (in etwas anderer Form) vermutet.

Die Vermutung von Gauß und Legendre wurde 1896 von Jaques Salomon Hadamard (1865 – 1963) und Charles de la Vallée–Poussin (1866 – 1962) unabhängig voneinander bewiesen, ein bedeutendes Ergebnis der Mathematik des 19. Jahrhunderts. Der Weg dahin wurde geebnet durch eine berühmte Arbeit von Riemann [15, S. 136 - 144]. Bemerkenswert ist dabei, daß in eine zahlentheoretische Welt Methoden der Analysis, also der Differential- und Integralrechnung und der Theorie Funktionen komplexer Zahlen eintreten.

Außer dem Problem der Verteilung gibt es natürlich noch viele andere Ergebnisse über Primzahlen. So hat Johann Peter Gustav Lejeune-Dirichlet (1805 – 1859, Nachfolger von Gauß) gezeigt: Sind a und b teilerfremd, so enthält die Reihe der Zahlen von der Form $an+b$, n eine beliebige natürliche Zahl, unendlich viele Primzahlen.

Die ganzen Gaußschen Zahlen $a+bi$ (a,b ganz, $i=\sqrt{-1}$), also die Einheitsgitterpunkte in der komplexen Ebene, haben ebenfalls eine Primzahlzerlegung. Eine gewöhnliche Primzahl der Form $4n+3$ bleibt darin prim, eine Primzahl der Form $p=4n+1$ ist immer eine Summe von zwei Quadraten $p=c^2+d^2$ (z.B. $5=2^2+1^2$, $29=5^2+2^2$) und hat die Zerlegung $(c+di)(c-di)$ in zwei komplexe Primzahlen. Die Weiterentwicklung solcher Zerlegungsgesetze wird dann ein Hauptanliegen der Zahlentheorie.

5 Nichteuklidische Geometrie

Wir kommen ein weiteres Mal auf die griechische Mathematik zurück. In den Büchern des Euklid wird versucht, die Geometrie der Ebene (und andere Teile der Mathematik) als ein logisches Gedankensystem aus gewissen wenigen Postulaten und Axiomen aufzubauen. Diese axiomatische Methode ist auch heute noch für weite Teile der Mathematik Vorbild und Ziel.

5.1 Das Parallelenaxiom

Die euklidischen Postulate betreffen unter anderem Punkte, Geraden, Winkel, Kreise, Dreiecke,... und lassen sich anschaulich erläutern. Unter diesen hat seit alters her das sogenannte Parallelenaxiom eine besondere Aufmerksamkeit erhalten, weil es wegen der sich ins Unendliche erstreckenden Geraden unseren Anschauungsbereich verläßt.

Das Parallelenaxiom besagt: Zu einer Geraden und einem nicht auf ihr gelegenen Punkt gibt es *genau eine* Parallele zu der gegebenen Geraden durch diesen Punkt; dabei heißen zwei Geraden parallel, wenn sie keinen gemeinsamen Punkt haben, oder, wie man sagt, sich nicht schneiden.

Es gab daher schon frühzeitig Versuche, das Parallelenaxiom aus anderen Annahmen herzuleiten. Die reichhaltige Geschichte dieser Versuche kann hier natürlich nicht nachgezeichnet werden. Ein Aspekt sei aber doch herausgegriffen, der Zusammenhang mit der Winkelsumme im Dreieck, nämlich die Frage, ob diese Summe kleiner, gleich oder größer als zwei rechte Winkel ist. Die Gleichheit ist zum Parallelenaxiom äquivalent (bei geeigneten anderen Annahmen). In der hier behandelten nichteuklidischen Geometrie ist die Summe kleiner, aber nicht konstant, und beeinflußt dann außerdem den Flächeninhalt des Dreiecks. Obgleich viele Fragen über die Axiomatik denkbar sind, so ist es doch bemerkenswert, daß gerade die Diskussion der Parallelen sich als wesentlich herausgestellt hat.

Anfang des 19. Jahrhunderts, wohl beginnend wiederum mit Gauß, entwickelt sich die Überzeugung, daß eine konsistente Geometrie denkbar ist, in der das Parallelenaxiom nicht gilt. Erste Ausarbeitungen einer heute sogenannten nichteuklidischen Geometrie wurden von Nikolai Iwanowitsch Lobatschefskij (1792–1856) und János Bolyai (1802–1860) veröffentlicht (ab etwa 1823). Um diese Entwicklung zu würdigen, muß man bedenken:

- Geometrie ist nicht länger ein fixiertes Gedankengebäude, das man etwa aus der Anschauung abstrahieren kann.
- Die aus einem anderen Axiomensystem hergeleiteten Aussagen, zum Beispiel über die Winkelsumme im Dreieck oder den Umfang eines Kreises, widersprechen den aus der traditionellen (euklidischen) Geometrie bekannten. Ist das Gedankengebäude trotzdem konsistent (widerspruchsfrei)?

Die nichteuklidische Geometrie kann man unter zwei Gesichtspunkten betrachten: Axiomatik und Modellbildung.

5.2 Axiomatik

Zunächst kann man den ursprünglichen Versuch, das Parallelenaxiom aus anderen Axiomen herzuleiten, zu einer vollständigen axiomatischen Theorie erweitern, in der in formaler Weise aus Grundannahmen eine Geometrie entwickelt wird.

In der Monographie [8] von Hilbert werden diese Bemühungen zusammengestellt, abgerundet und erweitert, und darin finden auch prinzipielle Fragen nach der Vollständigkeit und der Widerspruchsfreiheit des Axiomensystems eine Antwort. Beweise für die Widerspruchsfreiheit werden durch Modellbildung geführt. Hilbert formuliert insgesamt 20 Axiome unter den Überschriften: Verknüpfung, Anordnung, Kongruenz, Parallelen, Stetigkeit. In seinem Aufsatz „Naturerkennen und Logik“ zur Bedeutung der axiomatischen Methode gibt Hilbert ein Beispiel aus den Vererbungsgesetzen der Drosophila:

> „Auf die Zahlen, die man dadurch experimentell findet, stimmen die linearen Euklidischen Axiome der Kongruenz und die Axiome über den geometrischen Begriff „zwischen“, und so kommen als Anwendung der linearen Kongruenzaxiome, d.h. der elementaren Sätze über das Abtragen von Strecken, die Gesetze der Vererbung heraus; so einfach und genau — und zugleich so wunderbar, wie wohl keine noch so kühne Phantasie sie sich ersonnen hätte“.

Die axiomatische Denkweise mag als ein Vorläufer für die allgemeine logische Grundlegung der Mathematik angesehen werden, zu der unter anderen auch Hilbert in späteren Jahren bedeutende Beiträge geliefert hat.

Ein prinzipielles Ergebnis der Axiomatik sei erwähnt. Weite Teile der (ebenen) Geometrie kann man mit der analytischen Geometrie erledigen; also letztlich durch die Zurückführung auf Rechenbereiche. Ein Resultat der axiomatischen Theorie besagt nun: Ein System mit geeigneten Axiomen hat ein analytisches Modell.

5.3 Modelle

Der zweite Gesichtspunkt besteht darin, Modelle der nichteuklidischen Geometrie zu entwickeln. Ein Modell liefert ein Abbild der nichteuklidischen Geometrie innerhalb der Sprache der euklidischen Geometrie. Es gibt zwei gängige Modelle der nichteuklidischen Ebene, die nach Felix Klein und Henri Poincaré (1854 – 1912) benannt werden. In beiden Modellen sind die Punkte der nichteuklidischen Ebene die Punkte einer Kreisscheibe (ohne den Randkreis). Im Kleinschen Modell sind die Geraden der Geometrie die Sehnen des Kreises, im Poincaréschen Modell die Kreisbögen, die auf dem Randkreis senkrecht stehen. Innerhalb eines Modells muß man sich dann um die Axiomatik nicht weiter kümmern, wenn man mit der Geometrie arbeiten will. Jedoch sind noch weitere Begriffe zu klären, etwa Winkel oder Entfernungen. Das Modell von Poincaré gibt die Winkel richtig wieder.

6 Krumme Flächen

Eine Kreislinie ist krumm. Vom Autofahren ist bekannt: Je „schärfer die Kurve", das heißt je kleiner der Radius, desto krummer.

Eine Fläche, etwa die Oberfläche einer hügeligen Landschaft, ist ebenfalls krumm, aber in unterschiedlicher Weise. An einem Gipfelpunkt geht es in jeder Richtung bergab, in einem Talpunkt geht es in jeder Richtung bergauf. Es gibt aber auch Sattelpunkte: Dort kreuzt sich ein Weg, der nach beiden Richtungen bergab führt, mit einem, der nach beiden Richtungen bergauf führt.

Abgesehen von dieser „sichtbaren" Krummheit ist darin eine interne Krümmung verborgen. Wir wissen: Jede Landkarte ist etwas verkehrt. Ein Stück einer Kugeloberfläche läßt sich nicht ohne Verzerrung auf ein ebenes Stück übertragen. Tritt man auf eine Apfelsinenschale, so platzt sie, bügelt man ein Oberhemd, so bilden sich Falten.

6.1 Die Gaußsche Krümmung

Gauß hat in seiner Theorie der Flächen „Disquisitiones generales circa superficies curvas" 1828 die interne Krümmung definiert. Die inneren Maßverhältnisse mag man sich so vorstellen: In der Fläche kriecht ein punktförmiger „Käfer" herum; er kann dabei etwas messen, was eine Fläche eventuell wesentlich von einer ebenen unterscheidet. Was er messen kann sind Entfernungen und Flächengrößen.

Betrachten wir kleine Kreise auf der Fläche: Ein Kreis soll dabei die Linie aller Punkte mit festem (kleinen) Abstand (= Radius) um einen fixierten Punkt (= Mittelpunkt) sein. Dieser Kreis hat dann auf einer krummen Fläche eventuell einen anderen Umfang als ein ebener Kreis mit demselben Radius.

Für Gauß war eine Fäche ein durch Formeln (Funktionen) beschreibbares Gebilde im Raum, und die interne, von der räumlichen Realisierung unabhängige Krümmung war wohl auch für Gauß ein überraschendes Ergebnis; er nennt den betreffenden Satz ein „theorema egregium".

Hier noch eine spätere Beschreibung von Riemann zu diesen Ideen:

> „In die Auffassung der Flächen mischt sich neben den inneren Massverhältnissen, bei welchen nur die Länge der Wege in ihnen in Betracht kommt, immer auch ihre Lage zu ausser ihnen gelegenen Punkten. Man kann aber von den äußeren Verhältnissen abstrahieren, indem man solche Veränderungen mit ihnen vornimmt, bei denen die Länge der Linien in ihnen ungeändert bleibt, d.h. sie sich

> beliebig — ohne Dehnung — gebogen denkt, und alle so auseinander entstehenden Flächen als gleichartig betrachtet. Es gelten also z.B. beliebige cylindrische oder conische Flächen einer Ebene gleich, weil sie sich durch blosse Biegung aus ihr bilden lassen, wobei die inneren Massverhältinisse bleiben, und sämmtliche Sätze über dieselben — also die ganze Planimetrie — ihre Gültigkeit behalten; dagegen gelten sie als wesentlich verschieden von der Kugel, welche sich nicht ohne Dehnung in die Ebene verwandeln lässt."

Diese Ideen waren der Anfang einer bedeutenden Entwicklung. Man fing bald an, sich vom dreidimensionalen Anschauungsraum zu befreien und abstrakte Räume und ihre Maßverhältnisse zu studieren.

6.2 Krümmung und Kombinatorik von Flächen

Stellen wir uns einen Würfel vor, keinen Spielwürfel sondern eine Würfelfigur, etwa einen Umzugskarton. An jeder Ecke stoßen drei Seitenflächen zusammen. Schlägt man um einen Eckpunkt einen kleinen Kreis, so entsteht in jeder der drei Seitenflächen ein gewöhnlicher Viertelkreis. Insgesamt fehlt also ein Viertel eines ebenen Kreises. (In den Kantenpunkten tritt dieses Phänomen nicht auf.) Es gibt acht Ecken, addiert man die Fehlstände, so ergibt sich $8 \cdot \frac{1}{4} = 2$ als totaler Fehler.

Diese Art Zählung kann man an allen analogen Figuren durchführen. Stellen wir uns eine riesige „Kartoffel" vor, etwa die Erdoberfläche, mit mehreren Millionen Facetten und Eckpunkten. In jeder Ecke fehlt ein gewisser Betrag vom ebenen Kreisumfang. Und, o Wunder!: Die Summe aller Fehlbeträge ist wieder die Zahl 2. Diese so gewonnene Zahl 2 ist ein globales Krümmungsmaß für ein nach einer Kugelfläche modelliertes Objekt. Im Beispiel des Würfels ist das Krümmungsverhalten in einigen singulären Punkten („schwarzen Löchern") konzentriert. Wenn man nun den Würfel nicht so eckig haben will und die Ecken und Kanten glattfeilt, so werden die Krümmungseigenschaften „verschmiert"; man kann sie dann nicht mehr im naiven Sinne addieren, sondern braucht die Integralrechnung. Aber weiterhin erhält man die Zahl 2.

Diese Zahl wurde auf andere Weise schon um 1750 von Euler entdeckt: die sogenannte Eulersche Polyederformel. Man zerlegt in Länder, erhält E Ecken, K Kanten und F Flächen, und $E - K + F$ ergibt bei einer kugelartigen Fläche immer den Wert zwei. Für das Ikosaeder (einer der platonischen Körper) erhält man $E = 12, K = 30, F = 20$ und also $12 - 30 + 20 = 2$. Übrigens hat schon Descartes dazu äquivalente Formeln gekannt [3].

Das Krümmungsverhalten, gegeben durch die inneren Maßverhältnisse, kann man sich, jedenfalls in kleinen Teilen, durch ein Flächenstück im Raum modelliert denken. Es stellt sich heraus, daß die nichteuklidische Ebene krumm ist (konstante negative Gaußsche Krümmung), was man der Axiomatik und den platten Modellen nicht ansieht. Hilbert hat gezeigt [8, Anhang V], daß diese Ebene mit ihren Maßverhältnissen kein maßgetreues Modell im euklidischen dreidimensionalen Raum, unserem Anschauungsraum, hat. Eine Art Erklärung für diesen Sachverhalt: Die nichteuklidische Ebene ist viel größer als die euklidische, der euklidische Raum bietet für sie nicht Platz genug.

Gauß war jahrelang mit Vermessungen im Königreich Hannover beschäftigt. Es ist naheliegend zu fragen, ob durch Messungen etwas über die Erdkrümmung festgestellt werden kann. Wenn auf einer krummen Fläche ein kleines Dreieck betrachtet wird, dessen Seiten kürzeste Verbindungen zwischen den Eckpunkten sind, so zeigt Gauß, daß das Integral der Krümmung über das Dreieck gleich der Summe der Innenwinkel minus π ist (Winkel im Bogenmaß), genannt Exzeß des Dreiecks. Auf einer Einheitssphäre ist dieser Exzeß der Flächeninhalt des Dreiecks. Verallgemeinerungen dieses Sachverhalts auf globale Flächen hängen mit den verallgemeinerten Eulerschen Polyedersätzen zusammen.

7 Projektive Geometrie

Wir wollen noch eine weitere „Geometrie“ beschreiben, die zunächst als ein abstraktes Objekt erdacht wird und deren anschauliche Geometrie zu interessanten Problemen der Topologie geführt hat.

Wir gehen aus von der üblichen ebenen Geometrie, ihren Punkten und Geraden. Durch je zwei Punkte gibt es genau eine Gerade. Je zwei Geraden schneiden sich in höchstens einem Punkt. Schneiden sie sich nicht, so heißen sie parallel. Wenn wir zwei parallele Geraden in unserem Anschauungsraum betrachten, so laufen sie aufgrund der Perspektive auf einen wohlbestimmten Punkt am Horizont zu. Diesen Punkt und überhaupt den Horizont gibt es nicht als Teil der Ebene. Wir haben schon erfahren: Man erfindet neue Zahlen, damit Gleichungen eine Lösung haben. Warum also nicht Punkte erfinden, damit Geraden sich immer schneiden? Es geht ja um Gedankendinge, also um ideale Punkte, die wir nun „unendlich fern“ nennen. Zu jeder Schar paralleler Geraden gehört dann genau einer dieser neuen Punkte, der „vorwärtige“ Horizontpunkt ist dann aber, ach!, notwendig derselbe wie der „rückwärtige“, da wir nur einen Schnittpunkt haben wollen. In dieser neuen erweiterten Geometrie haben wir dann zwei duale (gleichartige) Situationen; zwei Punkte bestimmen eine Gerade (Verbindungsgerade), zwei Geraden bestimmen einen Punkt (Schnittpunkt). Die so erweiterte Ebene heißt die projektive Ebene.

Die projektive Ebene ist eine Fläche, wie sieht sie aber eigentlich aus? Jeder kennt heute das nach Möbius benannte Band, ein verdrilltes Band, das, wie man sagt, „einseitig“ ist, es läßt sich nicht auf der einen Seite rot auf der anderen schwarz färben; das Band ist auch nicht-orientierbar, was bedeutet, links herum ist dasselbe wie rechts herum, das heißt, es gibt keinen „Uhrzeiger-Drehsinn“[4] .

Nun denken wir uns dieses Möbius-Band gummiartig; es läßt sich dann so verformen, daß seine Randkurve ein echter runder Kreis in einer Ebene ist. Eine Kreisscheibe hat ebenfalls einen Kreis als Randkurve. Wir verkleben Kreisscheibe und Möbius-Band entlang ihrer Randkurven und erhalten eine randlose Fläche. Kaum zu glauben, das Resultat ist ein geometrisches Modell für die projektive Ebene. Diese enthält also ein Möbius-Band.

Den eben beschriebenen Klebeprozeß kann man aber nicht im Raum, etwa mit Papier, direkt nachbilden. Der Grund: Es entsteht eine Fläche, die sich selbst durchdringt. Warum nicht? (Eine Acht ist ein Kreis, der sich selbst durchdringt.) Auch wäre das entstehende Objekt nicht glatt. Ein Modell, das lokal wie eine glatte Fläche aussieht, wurde gefunden von Werner Boy (1879 – 1914), einem Schüler von Hilbert, obgleich Hilbert wohl nicht an ein solches Modell geglaubt hat. Es hat aber noch viele Jahre gebraucht, bis man eine wirkliche formelmäßige Parametrisierung gefunden hat. Die Boysche Fläche hat eine dreifache Symmetrie, und die Kurve der Selbstdurchdringungen hat einen Dreifachpunkt. Ein schönes Modell steht vor dem mathematischen Forschungsinstitut in Oberwolfach (Schwarzwald). Ein Drahtmodell findet man in der Modellsammlung des Mathematischen Instituts. Die projektive Ebene hat kein Modell im dreidimensionalen Raum wohl aber im vierdimensionalen. Ohne Dreifachpunkte der Selbstdurchdringung kommt man nicht aus.

Man kann übrigens auch zwei Möbius-Bänder entlang ihrer Randkurven verkleben. Es entsteht eine Fläche, die heute Kleinscher Schlauch[5] heißt, weil Klein sie anschaulich als Fläche mit Selbstdurchdringungen beschrieben hat. Er sagt [11, Bd 3, S. 571]:

> „Man kann sich von derselben ein Bild machen, indem man etwa ein Stück eines Kautschukschlauches umstülpt und nun so sich selbst durchdringen läßt, daß bei Zusammenbiegung der Enden die Außenseite mit der Innenseite zusammenkommt.“

8 Der Begriff eines Raumes

Beginnen wir ganz allgemein. Das Wort Raum ist gebräuchlich in sämtlichen Lebensbereichen (Philosophie, Physik, Architektur, Politik, ...). Die Mathematik verlangt eindeutige und reproduzierbare Definitionen.

Ein Raum, als geometrisches Objekt, besteht aus Punkten (Orte, an denen sich etwas befindet). In der abstrakten Geometrie ist jedoch ein Punkt nicht

4 Es gibt auch dreidimensionale Räume, in denen eine Rechtsschraube nach langer Reise als Linksschraube zurückkehrt!

5 Durch falsche Rückübersetzung aus dem Englischen auch Kleinsche Flasche.

das, was wir uns landläufig unter punktförmig vorstellen, also etwas sehr Kleines. Ein Punkt in einer Theorie von Räumen ist lediglich ein Gedankending. Es ist ein allgemeines Prinzip in der Mathematik, gleichartige Objekte zusammenzufassen; damit eine solche Zusammenfassung geometrischen Charakter bekommt, müssen dann noch weitere Strukturdaten hinzugefügt werden.

Man kann etwa festlegen, welche Punkte „nahe" bei einem Punkt liegen; in der Axiomatik spricht man von Umgebungen eines Punktes. Ein nachvollziehbarer Ansatz besteht darin, je zwei Punkten einen Abstand zuzuordnen, und eine Umgebung besteht dann aus allen Punkten, die vom gegebenen einen Abstand unterhalb einer festen Größe haben. Das darf nicht völlig willkürlich geschehen. Man abstrahiert eine Eigenschaft, die ein gewöhnliches Dreieck hat: Der Abstand zweier Ecken ist die Seitenlänge und die Summe zweier Seitenlängen ist niemals kürzer als die dritte Seite. Aus diesem einzigen Dreiecksaxiom hat man eine erstaunlich reichhaltige Theorie entwickelt (metrische Räume). Bei Riemann heißt das dann „innere Maßverhältnisse" (im Gegensatz zu den „Ausdehnungsverhältnissen", unter denen man wohl die topologische Gestalt zu verstehen hat).

Heute wird die gesamte Mathematik in der „Mengensprache" formuliert. Raum scheint damit substanzartig zu sein. Sollte ein Raum vielleicht eine „Regel" sein? Braucht eine Regel ein Substrat, in dem sie lebt?

9 Das Programm von Riemann

Seinen berühmten Habilitationsvortrag „Über die Hypothesen welche der Geometrie zugrunde liegen" vom 10. Juni 1854 bezeichnet Riemann als eine Art philosophische Untersuchung. Die Thesen und Beschreibungen in diesem Vortrag klingen oft etwas unbestimmt, sind aber gleichzeitig mutig und neuartig. Für Eingeweihte konnten sie schon damals als Handlungsanweisung dienen, und mit unserem heutigen Wissen müssen wir sie als prophetisch bezeichnen. Die gestellte Aufgabe umreißt Riemann so [15, S. 254]:

> „Ich habe mir daher zunächst die Aufgabe gestellt, den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Grösse aus allgemeinen Grössenbegriffen zu construiren. Es wird daraus hervorgehen, dass eine mehrfach ausgedehnte Grösse verschiedener Massverhältnisse fähig ist und der Raum also nur einen besonderen Fall einer dreifach ausgedehnten Grösse bildet. Hiervon aber ist eine nothwendige Folge, dass die Sätze der Geometrie sich nicht aus allgemeinen Grössenbegriffen ableiten lassen, sondern das diejenigen Eigenschaften, durch welche sich der Raum von anderen denkbaren dreifach ausgedehnten Grössen unterscheidet, nur aus der Erfahrung entnommen werden können[6]."

6 Unter „Raum" ist hier der 3-dimensionale euklidische Anschauungsraum zu verstehen.

Im Vortrag entwickelt Riemann den Begriff einer mehrfach ausgedehnten Größe und deren mögliche Maßverhältisse, wie er es nennt.

> „Grössenbegriffe sind nur da möglich, wo sich ein allgemeiner Begriff vorfindet, der verschiedene Bestimmungsweisen zulässt. Je nachdem unter diesen Bestimmungsweisen von einer zu einer andern ein stetiger Uebergang stattfindet oder nicht, bilden sie eine stetige oder discrete Mannigfaltigkeit; die einzelnen Bestimmungsweisen heissen im ersten Falle Punkte, im letztern Elemente dieser Mannigfaltigkeiten. Begriffe, deren Bestimmungsweisen eine discrete Mannigfaltigkeit bilden, sind so häufig, dass sich für beliebig gegebene Dinge wenigstens in den gebildeteren Sprachen immer ein Begriff auffinden lässt, unter welchem sie enthalten sind [...], dagegen sind die Veranlassungen zur Bildung von Begriffen, deren Bestimmungsweisen eine stetige Mannigfaltigkeit bilden, im gemeinen Leben so selten, dass die Orte der Sinnengegenstände und die Farben wohl die einzigen einfachen Begriffe sind, deren Bestimmungsweisen eine mehrfach ausgedehnte Mannigfaltigkeit bilden ....“

Riemann gibt dann zwei duale Beschreibungen an. Einmal induktiv „Construction einer Veränderlichkeit von $n+1$ Dimensionen aus einer von n Dimensionen und Einer Dimension“. Zum anderen Bestimmungsweisen durch Koordinatenbeschreibungen:

> „ ... Man nehme innerhalb der gegebenen Mannigfaltigkeit eine stetige Funktion des Ortes an, welche nicht längs eines Theils dieser Mannigfaltigkeit constant ist. Jedes System von Punkten, wo die Function einen constanten Werth hat, bildet dann eine stetige Manigfaltigkeit von weniger Dimensionen als die gegebene. Diese Mannigfaltigkeiten gehen bei Aenderung der Function stetig in einander über; man wird daher annehmen können, dass aus einer von ihnen die übrigen hervorgehen, und es wird dies, allgemein zu reden, so geschehen können, dass jeder Punkt in einen bestimmten Punkt der anderen übergeht; die Ausnahmefälle, deren Untersuchung wichtig ist, können hier unberücksichtigt bleiben.“

Was hier qualitativ beschrieben wird, ist nach heutiger Terminologie ein Faserbündel, aber eventuell mit Ausnahmefasern („Singularitäten“). Riemann fährt dann fort mit dem eben beschriebenen Zerlegungsverfahren:

> „Durch n malige Wiederholung dieses Verfahrens wird daher die Ortsbestimmung in einer n fach ausgedehnten Mannigfaltigkeit auf n Grössenbestimmungen, und also die Ortsbestimmung in einer gegebenen Mannigfaltigkeit, wenn dieses möglich ist, auf eine endliche Anzahl von Quantitätsbestimmungen zurückgeführt. Es giebt indess auch Mannigfaltigkeiten, in welchen die Ortsbestimmung nicht eine endliche Zahl, sondern entweder eine unendliche Reihe oder eine stetige Mannigfaltigkeiten von Grössenbestimmungen erfordert. Solche Mannigfaltigkeiten bilden z.B. die möglichen Bestimmungen einer Funktion für ein gegebenes Gebiet, die möglichen Gestalten einer räumlichen Figur u.s.w.“

Soweit zu den Größenbegriffen, also zur Beschreibung von Mannigfaltigkeiten. Sein nächstes Thema sind dann die Massbestimmungen. Dazu gehören

Entfernungen und Krümmungen. Die Krümmungen werden durch infinitesimale Daten beschrieben, was man aber ohne Formeln schlecht erklären kann.

Als Konsequenz der allgemeinen Relativitätstheorie von Albert Einstein hört man die Redeweise: Der Weltenraum ist gekrümmt. Wir können den Weltenraum nicht, wie ein Gott, von außen betrachten, als armselige Wesen stecken wir mitten drin, aber wir können ihn ausmessen. Die Riemannsche Weiterentwicklung des Gaußschen Krümmungsbegriffes auf höherdimensionale Räume erlaubt dann, der Aussage „krumm" einen Sinn beizulegen.

Im Dreidimensionalen kann man etwa für einen festen Punkt alle durch ihn laufenden kleinen Flächenstücke betrachten und deren Gaußsche Krümmung.

In Riemanns Vortrag kommen natürlich noch nicht beliebige abstrakte Räume vor, sondern eher das, was wir heute als differenzierbare Mannigfaltigkeiten bezeichnen. Hilbert hat in seinem Ansatz, die ebene Geometrie aus dem Stetigkeitsbegriff aufzubauen, ein Axiomensystem vorgeschlagen[7], das schon an den allgemeinen Begriff eines topologischen Raumes von Felix Hausdorff (1868 – 1942) erinnert [7]. Bis zu einer allgemeinen formalen Definition einer differenzierbaren Mannigfaltigkeit mußte man dann noch länger warten. Das nur als Hinweis, wie lange die endgültige Ausarbeitung von Begriffen dauert.

10 Riemannsche Flächen

Ich komme nun zu einer weiteren wichtigen geometrischen Idee Riemanns. Er beschreibt, wie aus Verhältnissen der Funktionentheorie Räume mit analytischer Zusatzstruktur entstehen.

Ein zentraler Begriff der Mathematik ist der Begriff einer Funktion. Eine Funktion ist etwa:

- Eine Wertetabelle.
- Eine Maschine: Man steckt eine Zahl aus einem gewissen erlaubten Bereich (dem sogenannten Definitionsbereich) hinein und eine weitere Zahl kommt heraus, die zugeordnete Zahl, der Funktionswert genannt.

Diese Maschine kann eine Rechenvorschrift, eine Formel sein, oder auch etwas Willkürliches. Der Verlauf einer Funktion wird gelegentlich durch ein Schaubild dargestellt. Wenn man den Wirtschaftsteil einer Zeitung aufschlägt, findet man darin gezackte Kurven, etwa Börsenkurse. Manche glauben, aus dem Zickzack die künftige Entwicklung (der Funktion) voraussagen zu können. Unmöglich.

In der Mathematik jedoch gibt es nun eine besonders wichtige Art von Funktionen, die sich aus einem Keim nach einem, könnte man sagen, genetischen Programm entwickeln. Kennt man sie an einer Stelle, so kennt man sie

7 Siehe etwa [8, Anhang IV].

überhaupt, was immer das heißen mag. Es sind Funktionen von komplexen Zahlen, und die Funktionswerte sind ebenfalls komplexe Zahlen. Hier hilft kein Schaubild. Es gibt aber andersartige Veranschaulichungen. Der Definitionsbereich ist ein Stück der Ebene, etwa das Innere eines Kreises, und der Wertebereich ist ebenfalls ein Stück der Ebene, etwa ein verzerrtes amöbenartiges Abbild einer Kreisscheibe.

Nun passiert bei den hier angesprochenen Funktionen folgendes: Ihr Keim lebe in einem winzigen Kreisbereich. Nach ihrem genetischen Programm wächst die Funktion aus diesem Kreisbereich heraus, erstreckt sich zum Beispiel schließlich über die ganze Ebene. Aber, o Schreck! oder o Wunder!, es kann passieren, daß die Funktion, wenn man ihren Lebensweg entlang einer Kurve, die zum Ausgangspunkt zurückführt, verfolgt, nicht wieder zum ursprünglichen Keim zurückkehrt.

Zwei alltägliche Beispiel dazu:

- Nach 24 Stunden zeigt zwar die Uhr wieder dieselbe Zeit an, aber wir sind einen Tag älter geworden. Außer der Uhrzeit muß man sich also noch etwas merken!
- Man steigt auf einer Wendeltreppe nach oben und betrachtet den Schatten, von oben auf den Boden geworfen. Wenn man eine Wendel, dieses Wort sei hier erfunden, durchlaufen hat, ist der Schatten am gleichen Ort, man selbst aber ein Stockwerk höher.

Dieses Phänomen im mathematischen Kontext hat Riemann eine geniale Idee eingegeben, die dann schließlich zu einem eigenen Forschungsgebiet geführt hat, die sogenannten Riemannschen Flächen. Lesen wir dazu seine Beschreibung [15, S. 83]:

> „Für manche Untersuchungen [...] ist es vortheilhaft, die Verzweigungsart einer mehrwerthigen Function in folgender Weise geometrisch darzustellen. Man denke sich in der (x,y)-Ebene [das ist die Ebene der komplexen Zahlen] eine andere mit ihr zusammenfallende Fläche (oder auf der Ebene einen unendlich dünnen Körper) ausgebreitet, welche sich so weit und nur so weit erstreckt, als die Function gegeben ist. Bei Fortsetzung dieser Function wird also diese Fläche ebenfalls weiter ausgedehnt werden. In einem Theile der Ebene, für welchen zwei oder mehrere Fortsetzungen der Function vorhanden sind, wird die Fläche doppelt oder mehrfach sein; sie wird dort aus zwei oder mehreren Blättern bestehen, deren jedes einen Zweig der Function vertritt. Um einen Verzweigungspunkt der Function herum wird sich ein Blatt der Fläche in ein anderes fortsetzen, so dass in der Umgebung eines solchen Punktes die Fläche als eine Schraubenfläche mit einer in diesem Punkte auf der (x,y)-Ebene senkrechten Axe und unendlich kleiner Höhe des Schraubenganges betrachtet werden kann. Wenn die Function nach mehreren Umläufen des z um den Verzweigungswerth ihren vorigen Werth wieder erhält [...], muss man dann freilich annehmen, dass sich das oberste Blatt der Fläche durch die übrigen hindurch in das unterste fortsetzt.“

Nun wird der Keim einer solchen Funktion etwa durch einen Rechenausdruck, eine Formel, beschrieben; diese Formel ist aber eventuell nicht für den ganzen Lebensweg der Funktion zuständig (gültig), und es ist die Kunst und Geschicklichkeit des Forschers, die Funktion anderweitig zu verfolgen (zu beschreiben), durch eine andere Formel.

Das typische Beispiel eines dreifachen Verzweigungspunktes entsteht beim Ziehen der dritten Wurzel. Eine Zahl, die nicht gerade Null ist, hat drei dritte Wurzeln. Von einer ausgehend kann man diese dann stetig um den Nullpunkt herum fortsetzen.

Eine n-fach über der Ebene ausgebreitete Riemannsche Fläche mit Verzweigungspunkten ist ein kompliziertes Gebilde. Wenn man allerdings von ihrer funktionentheoretischen Natur absieht und nur ihre (sogenannte topologische) Gestalt ansieht, so kann man eine übersichtliche Liste aller dieser Flächen aufstellen: Kugeln mit einer Anzahl Henkeln. Die Anzahl g dieser Henkel heißt heute das Geschlecht der Fläche. Eine Vorstellung wird geliefert durch die Oberfläche einer Leiter mit $g+1$ Sprossen. Wie Klein sagt [11, S.]:

> „Bei höherem p mag man sich [unter einer Fläche vom Geschlecht p] eine Kugel mit p Anhängseln (Handhaben) versehen denken."

Die qualitativen anschaulichen und formal noch nicht ausgereiften Beschreibungen konnten aber schon als nützliches Hilfsmittel benutzt werden. Eine erste vollständige Ausarbeitung findet man in dem 1913 erschienenen Buch von Hermann Weyl (1885 – 1955, 1930 Nachfolger von Hilbert, 1933 Emigration nach Princeton) „Die Idee der Riemannschen Fläche" [18].

11 Hilbert–Räume

Wie aus einem früheren Zitat erhellt, hatte Riemann auch schon die Möglichkeit unendlich-dimensionaler Räume angedacht: Räume von Funktionen, Räume von Gestalten.

Naturgemäß dauerte es noch viele Jahre, bis dafür präzise Begriffe geschaffen wurden, und das setzte voraus, daß überhaupt ein Interesse daran entstand. Auch hier hat wiederum Hilbert entscheidende Impulse gegeben innerhalb seiner Theorie der Integralgleichungen. Grob gesagt ging es um das Lösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Zu diesem Zweck mußte die algebraische Struktur einer Gleichung noch mit weiteren Strukturen (Stetigkeit, Topologie) angereichert werden.

Bestimmte unendlich-dimensionale Räume tragen heute den Namen Hilbert-Raum. Nachmals ist aus diesen Ansätzen das große Gebiet der Funktionalanalysis entstanden — übrigens heute ein Standardhilfsmittel der theoretischen Physik (Quantentheorie). Klassische Prozesse wie Differentiation und Integration werden jetzt Operatoren zwischen solchen Räumen. Es ist auch nicht schwer, sich vorzustellen, wie man aus einer Menge von Funktionen einen metrischen Raum herstellt: Der „Abstand“ ist einfach der größtmögliche Abstand der Funktionswerte.

Im einfachsten Fall hat ein Raumvektor (Punkt) eine unendliche Reihe von Zahlenkoordinaten $(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots)$, und man setzt voraus, daß die Summe aller Quadrate $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + \ldots$ endlich ist, damit die Quadratwurzel aus dieser Summe nach dem ins Unendliche ausgedehnten pythagoräischen Satz als Länge des Vektors erklärt werden kann. Einen Punkt mit den Koordinaten $(1,1,1,\ldots)$ gibt es also in diesem Hilbert–Raum nicht. Tja, so einfach ist das.

12 Geometrie und Symmetrie

Felix Klein hat in seinem berühmten Aufsatz „Vergleichende Betrachtungen über neuere geometrische Forschungen“, heute auch bekannt unter dem Namen „Erlanger Programm“, im Jahre 1872 den Symmetriebegriff als Ordnungsprinzip für Geometrien vorgeschlagen.

Wir kennen alle einfache geometrische Figuren, denen wir eine Symmetrie zubilligen. Die Art der Symmetrie kommt darin zum Ausdruck, daß gewisse Operationen die Figur in sich überführen.

Ein Quadrat kann durch Drehung um den Mittelpunkt um den Winkel $2\pi/4$ (also 90°) und seine Vielfachen mit sich selbst zur Deckung gebracht werden. Zusätzlich gibt es 4 Spiegelachsen: Die Diagonalen und die senkrechten Achsen durch die Seitenmittelpunkte. Die Symmetriestruktur des Quadrates besteht somit aus 8 Operationen.

Ein Kreis hat eine kontinuierliche Symmetriestruktur, nämlich die Drehungen um den Nullpunkt und alle Spiegelungen an Geraden durch den Mittelpunkt.

Es gibt aber auch ganz andere Arten von Symmetrie, die zunächst keinen geometrischen Charakter haben. So kann eine Formel symmetrisch sein. Betrachtet man etwa den Ausdruck $ab + bc + ac$, sagen wir für Zahlen a, b, c, so ändert sich dieser Wert nicht, wenn wir die drei Zahlen in beliebiger Weise vertauschen.

Klein führt nun in seinem Programm zunächst den Grundbegriff einer Transformationsgruppe ein:

> „Beliebig viele Transformationen eines Raumes ergeben zusammengesetzt immer wieder eine Transformation. Hat nun eine gegebene Reihe von Transformationen die Eigenschaft, daß jede Änderung, die aus den ihr angehörigen durch Zusammensetzung hervorgeht, ihr selbst wieder angehört, so soll die Reihe eine *Transformationsgruppe* genannt werden.“

In einer Fußnote an dieser Stelle hebt er hervor, daß mit einer Transformation auch immer die Inversion zu der betrachteten Menge gehören soll. Wenngleich im Erlanger Programm die damals interessierenden Geometrien (etwa die projektive Geometrie) als wesentliche Beispiele behandelt werden, weist Klein [11, Bd I, S. 482] ausdrücklich darauf hin, daßallgemein Objekte der Topologie (insbesondere Mannigfaltigkeiten) unter diesem Gesichtspunkt betrachtet werden sollen. Heutzutage ist es eine Selbstverständlichkeit, jedes mathematische Objekt zusammen mit seinen Symmetrieeigenschaften zu untersuchen. Im geometrischen Kontext denkt Klein wohl hauptsächlich an „kontinuierliche Gruppen", also Gruppen, die heute nach Sophus Lie (1842 – 1899), mit dem Klein auch zusammengearbeitet hat, Liesche Gruppen genannt werden. Er weist aber auch ausdrücklich auf endliche oder allgemeiner diskrete Gruppen hin[8].

Zur allgemeinen Begrifflichkeit seines Programms seien hier einige weitere Zitate aus dem Erlanger Programm eingefügt.

> „Ein Beispiel für eine Transformationsgruppe bildet die Gesamtheit der Bewegungen (jede Bewegung als eine auf den ganzen Raum ausgeführte Operation betrachtet). Eine in ihr enthaltene Gruppe bilden etwa die Rotationen um einen Punkt.[...] Es gibt nun räumliche Transformationen, welche die geometrischen Eigenschaften räumlicher Gebilde überhaupt ungeändert lassen. Geometrische Eigenschaften sind nämlich ihrem Begriffe nach unabhängig von der Lage, die das zu untersuchende Gebilde im Raume einnimmt. [...] Als Verallgemeinerung der Geometrie entsteht so das folgende umfassende Problem:
>
> *Es ist eine Mannigfaltigkeit und in derselben eine Transformationsgruppe gegeben; man soll die der Mannigfaltigkeit angehörigen Gebilde hinsichtlich solcher Eigenschaften untersuchen, die durch die Transformationen der Gruppe nicht geändert werden.*"

Klein sieht sein Programm in einem weiten mathematischen Kontext. So erwähnt er: Invariantentheorie; Mannigfaltigkeiten mit konstanter Krümmung; Galois-Theorie; symmetrische Polynome; Liesche Gruppen; partielle Differentialgleichungen.

Im Umkreis des Erlanger Programms gibt es einige Arbeiten von Klein zur nichteuklidischen Geometrie. Damit ist jetzt aber nicht mehr die Axiomatik gemeint, sondern die Ideen von Riemann werden weiter verfolgt, wobei es um die Gestalt von Flächen geht, etwa: Wie sehen Flächen konstanter Gaußscher Krümmung aus? Obgleich die Antwort auf diese Frage viel mit Symmetriestrukturen zu tun hat, mußten erst noch Hilfsmittel wie etwa die topologische Überlagerungstheorie entwickelt werden, was noch einige Jahrzehnte dauerte.

Zum Symmetrieaspekt gehört auch die Raum-Zeit-Geometrie von Hermann Minkowski (1864 – 1909), die für die Relativitätstheorie bedeutsam wurde.

Ich möchte noch auf eine umfangreiche spezielle Untersuchung von Klein hinweisen [12] [17], deren Grundlage der Symmetriebegriff ist. In seinem

---

8 Mit Schmunzeln liest man dazu die Wortwahl „Vielmehr bilden z.B. die unendlich vielen ruckweise aufeinander folgenden Verschiebungen, welche eine Sinuslinie mit sich selbst zur Deckung bringen, eine Gruppe. [11, S. 317]

Werk „Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade“ stellt Klein unter dem Symmetrieaspekt eine Beziehung her zwischen drei völlig verschiedenen Objekten: Ikosaeder; Auflösung von Gleichungen fünften Grades; Hypergeometrische Differentialgleichungen.

13 Probleme und Vermutungen

13.1 Die 23 Probleme von Hilbert

Hilbert hat auf dem internationalen Mathematiker-Kongress in Paris im Jahr 1900 einen Vortrag über mathematische Probleme gehalten. Die Veröffentlichung stellt 23 Probleme aus verschiedenen Gebieten vor, teils spezielle konkrete Fragen, teils Forschungsprojekte und teils philosophische Wünsche. Es gibt viele Problemlisten, aber die Hilbertsche Liste ist die berühmteste. Sie hat eine großen Einfluß gehabt und viele weitere Forschungen angeregt. Ein Grund dafür ist das Ansehen, das Hilbert in der mathematischen Welt genießt. Wenn man ein Problem von Hilbert löst, so ist man berühmt.

13.2 Die Riemannsche Vermutung

Ich möchte meinen Aufsatz schließen mit dem wohl berühmtesten Problem, der sogenannten Riemannschen Vermutung.

In einer nur 10 Seiten langen Abhandlung „Ueber die Anzahl der Primzahlen unterhalb einer gegebenen Grösse“ hat Riemann unter Verwendung funktionentheoretischer Methoden einen Weg zur Untersuchung des Verteilungsproblems der Primzahlen eingeschlagen. Ohne Formeln läßt sich sein Ansatz allerding nicht beschreiben. Es gelingt ihm, die schon von Euler untersuchte Funktion der Summe aller Potenzen $1/n^z$ der Reziproken aller natürlichen Zahlen, die zunächst nur für gewisse Argumente z sinnvoll ist, auf die ganze komplexe Zahlenebene fortzusetzen. Das analytische Werteverhalten dieser Funktion bringt er mit der Primzahlverteilung zusammen. (Schon Euler hat diese Summe in ein unendliches Produkt zerlegt, ein Faktor für jede Primzahl, und das deutet schon eine Beziehung zu Primzahlen an.) Die Riemannsche Vermutung ist eine Aussage über die Nullstellen dieser Funktion und äquivalent zu einer bestmöglichen asymptotischen Aussage über die Primzahlverteilung. Riemann bezeichnete die Funktion mit dem griechischen Buchstaben ζ. Seit Riemann ist die Untersuchung dieser Zeta-Funktion zu einer eigenen Industrie angewachsen, mit einigen Monographien nur über diese Funktion, weil natürlich die Primzahlverteilung als ein wesentliches Problem der Reinen Mathematik angesehen wird. Ein erster Erfolg des Riemannschen Ansatzes war der Beweis des früher schon erwähnten von Gauß und Legendre vermuteten Primzahlsatzes.

Der nur 10 Seiten lange Aufsatz von Riemann ist sicherlich eine der einflußreichsten mathematischen Veröffentlichungen überhaupt und die Geburtsstunde eines mathematischen Gebiets, der analytischen Zahlentheorie.

Die Vermutung von Riemann ist immer noch unbewiesen. Für ihren Beweis ist ein Preis von 1 Million Dollar ausgesetzt (Millennium Prize Problems 2000, Clay Mathematics Institute, Cambridge, Mass.).

14 Anhang: Daten und Hinweise

Carl Friedrich Gauß

⋆30.4.1777 Braunschweig, † 23.2.1855 Göttingen. „Princeps mathematicorum". Der bedeutendste Gelehrte, der je an der Universität und in der Societät der Wissenschaften in Göttingen geforscht und gelehrt hat. Mathematiker, Astronom, Geodät, Physiker. 1796 Nachweis der Möglichkeit das reguläre 17-Eck mit Zirkel und Lineal zu konstruieren. 1799 Promotion Universität Helmstedt. 1801 Disquisitiones arithmeticae (Hauptwerk zur Zahlentheorie). Korr. Mitglied der Petersburger Akademie. Berechnung der Ceres-Bahn mittels Ausgleichsrechnung aus wenigen Daten. 1807 Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte in Göttingen. 1809 Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis Solem ambientium. 1818 Beginn der Vermessungsarbeiten im Königreich Hannover. 1820 Erfindung des Heliotropen. 1827 Disquisitiones generales circa superficies curvas (Flächen und ihre Krümmung). 1828 Gast bei Alexander von Humboldt in Berlin. 1831 Zusammenarbeit mit Wilhelm Weber (Erdmagnetismus). 1845 – 1850 langwierige Berechnungen zur Reorganisation der Göttinger Professoren-Witwenkasse. Große Teile des Gaußschen Wissens wurden erst durch die Veröffentlichung des Nachlasses bekannt: Nichteuklidische Geometrie, Elliptische Funktionen, Topologie.

Bernhard Riemann

⋆17.9.1826 Breselenz, † 20.7.1866 Selasca. 1851 Promotion, 1853 Habilitation, seit 1859 Professor in Göttingen. Bahnbrechende Ideen, die aber in ihrer Tiefe erst allmählich verstanden wurden, geben bis heute der Mathematik wesentliche Impulse. Riemannscher Integralbegriff. Analytische Funktionen. Riemannscher Abbildungssatz. Riemannsche Flächen mit ihren Auswirkungen auf algebraische Kurven und die Anfänge der Topologie. Mannigfaltigkeiten mit ihren Metriken und Krümmungen, wichtig später für die Relativitätstheorie. Primzahlverteilung mit der berühmten Riemannschen Vermutung.

Felix Klein

⋆25.4.1849 Düsseldorf, † 22.6.1925 Göttingen. 1871 Habilitation in Göttingen. Ordinarius 1872 Erlangen, 1875 München, 1880 Leipzig, 1886 Göttingen. Funktionentheorie und Geometrie. 1827 Erlanger Programm: Gruppen- und Symmetriebegriff zur Ordnung der Vielzahl von Geometrien. Nichteuklidische Geometrie (Modell). Modulfunktionen und automorphe Funktionen. Verstärkung der Verbindung zwischen Mathematik, Naturwissenschaft und Technik. Modernisierung des mathematischen Unterrichts an Schulen und Hochschulen.

David Hilbert

⋆23.1.1862 Königsberg, † 14.2.1943 Göttingen. 1892 Professor in Königsberg, 1895 – 1930 in Göttingen. Einer der bedeutendsten und vielseitigsten Mathematiker mit vielfältigen Forschungserfolgen. Zentrum des mathematischen Betriebs im Anfang des 20. Jahrhunderts. Mit großem Einfluß als akademischer Lehrer; 69 Doktoranden; viele führende Mathematiker des 20. Jahrhundert waren seine Schüler (H. Weyl, J. von Neumann, P. Bernays, R. Courant). Die Forschungen haben systematischen und prinzipiellen Charakter und lassen sich in Perioden einteilen: Invariantentheorie; Zahlentheorie; Grundlagen der Geometrie; Integralgleichungen und Anfang der Funktionalanalysis. Probleme der theoretischen Physik. Grundlagen der Mathematik (mit P. Bernays).

Weitere Hinweise

In den Fluren des mathematischen Institutes in der Bunsenstraße sind Porträts berühmter Göttinger Mathematiker zusammen mit einer kleinen Tafel zu Leben und Werk ausgestellt. Diese Sammlung ist auch im Internet einzusehen. Siehe auch [13].

Literatur

[1] Dedekind, Richard: Stetigkeit und Irrationalzahlen. Braunschweig 1872.

[2] Ebbinghaus et al.: Zahlen (Grundwissen Mathematik 1). Springer, Berlin 1983.

[3] Federico, P. J.: Descartes on Polyhedra. Springer, Berlin 1982.

[4] Gauß, Carl Friedrich: Der „Fürst der Mathematiker" in Briefen und Gesprächen. Herausgegeben von Kurt–R. Biermann. C.H.Beck, München 1990.

[5] Gauß, Carl Friedrich: Werke Bde. I – XII. Göttingen 1870 – 1929.

[6] Gauß, Carl Friedrich: Deutsche Ausgabe der Disquisitiones Arithmeticae und weiterer zugehöriger Arbeiten. Herausgegeben von H. Maser, Berlin 1889.

[7] Hausdorff, Felix: Grundzüge der Mengenlehre. Leipzig 1914.

[8] Hilbert, David: Grundlagen der Geometrie. 8. Aufl., mit Revisionen und Ergänzungen von P. Bernays. Teubner, Stuttgart 1956.

[9] Hilbert, David: Bericht über die Theorie der algebraischen Zahlkörper. Jahresbericht der DMV 4, 1894.

[10] Hilbert, David: Gesammelte Abhandlungen. Springer, Berlin 1932 – 1935.

[11] Klein, Felix: Gesammelte mathematische Abhandlungen, Bde. I – III. Julius Springer Verlag, Berlin 1921.

[12] Klein, Felix: Vorlesungen über das Ikosaeder und die Auflösung der Gleichungen vom fünften Grade. Teubner, Leipzig 1884.

[13] Neuenschwander, Erwin, und Burmann, Hans–Wilhelm: Die Entwicklung der Mathematik an der Universät Göttingen. Georgia Augusta, Nachrichten aus der Universität Göttingen, 17 - 28, Göttingen 1987.

[14] Pieper, Herbert: Die komplexen Zahlen. Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1991.

[15] Riemann, Bernhard: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Teubner, Leipzig 1876.

[16] Schwermer, Joachim: Über Reziprozitätsgesetze in der Zahlentheorie. Mathematische Miniaturen 29 – 69. Birkhäuser, Basel 1986.

[17] Slodowy, Peter: Das Ikosaeder und die Gleichungen fünften Grades. Mathematische Miniaturen 71 – 113. Birkhäuser, Basel 1986.

[18] Weyl, Hermann: Die Idee der Riemannschen Fläche. Teubner, Leipzig 1913.