G O T T F R I E D W I L H E L M
L E I B N I Z

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

DRITTER BAND

2003

Inhaltsverzeichnis
Copyright

GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN VOM

LEIBNIZ-ARCHIV
DER
NIEDERSÄCHSISCHEN LANDESBIBLIOTHEK
HANNOVER

DRITTER BAND

1672–1676

DIFFERENZEN, FOLGEN, REIHEN

2003

Inhaltsverzeichnis
Copyright

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS HERBERT BREGER

BEARBEITER DIESES BANDES
SIEGMUND PROBST · EBERHARD KNOBLOCH
NORA GÄDEKE

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNISSE

VORWORT

Der dritte Band von Leibniz' mathematischen Schriften enthält Aufzeichnungen aus den Jahren 1672 bis 1676 zu Folgen, Reihen und Differenzen. Auf dieser Grundlage werden sich die nächsten Bände der Infinitesimalrechnung in Leibniz' Pariser Zeit zuwenden.

Zum weit überwiegenden Teil hat Herr Dr. Siegmund Probst (ab 1. April 1995) als hauptamtlicher Mitarbeiter im Zusammenwirken mit Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch die Stücke des Bandes bearbeitet. Bis zum 31. März 1995 hat Frau Dr. Nora Gädeke im Zusammenwirken mit Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch die Stücke N. 1, 4, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 35, 36 und 37 bearbeitet; einige dieser Stücke wurden von Herrn Dr. Heinz-Jürgen Heß gegengelesen. Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch gebührt ein besonderer Dank, da er sich trotz seiner zahlreichen Verpflichtungen auch bei diesem Band als Bearbeiter zur Verfügung gestellt hat. Die Schlußredaktion (einschließlich Datierungen, Verzeichnissen und Einleitung) wurde von Herrn Dr. Siegmund Probst und Herrn Prof. Dr. Eberhard Knobloch durchgeführt. Für die digitale Erfassung der Stücke ist Frau Susanne Bawah, aber auch Frau Manuela Mirasch-Müller und zu einem kleinen Teil Frau Isolde Hein zu danken.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und dem Vorsitzenden der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Herrn Professor Dr. Jürgen Mittelstraß, für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle. Der Ltd. Direktor der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover, Herr Dr. Georg Ruppelt, sowie sein Amtsvorgänger Herr Dr. Wolfgang Dittrich (bis 30. Juni 2002) haben die Arbeit des Leibniz-Archivs mit Wohlwollen unterstützt. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts verglichen werden.

Für die Beantwortung von Einzelfragen ist Frau PD Dr. Ursula Goldenbaum (Berlin), Herrn Prof. Dr. Douglas M. Jesseph (Raleigh, North Carolina), Herrn Dr. habil. Peter Por (Rouen) und Herrn Dr. Carsten Reinhardt (Regensburg) zu danken.

Wie schon bei den Bänden I, 17 und III, 5 ist der Satz des Bandes mittels des TeX-Macropakets EDMAC vom Leibniz-Archiv erstellt worden; Herrn John Lavagnino (Mas-

sachusetts) und Herrn Dominik Wujastyk (London) ist für die freundliche Überlassung der Macros zu danken. Die Zeichnungen wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in PICTEX weiter bearbeitet. Der Verlag hat eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten. Für gute Zusammenarbeit danke ich Herrn Peter Heyl vom Akademie-Verlag.

Hannover, August 2003 Herbert Breger

EINLEITUNG

Der vorliegende Band umfaßt die Studien, Entwürfe, Aufzeichnungen des Zeitraums 1672 bis 1676 zur Differenzenrechnung, zu Folgen und Reihen, soweit diese ausschließlich oder überwiegend Gegenstand der Leibnizschen Untersuchungen waren. Die Marginalien in nur teilweise einschlägigen, von Leibniz herangezogenen zeitgenössischen Werken sowie die umfangreichen Studien zur arithmetischen Kreisquadratur, das heißt zur Berechnung der Kreisfläche mittels unendlicher konvergenter Reihen von rationalen Zahlen, werden in späteren Bänden dieser Reihe veröffentlicht.

Die Texte wurden in 73 Hauptstücken zusammengefaßt, deren Länge zwischen zwei Zeilen (N. 42) und 172 Seiten (N. 38) schwankt. Dazu gehören neben den theoretischen Studien Exzerpte und Anmerkungen zu Gr. de Saint-Vincent (N. 7), G. Gosselin (N. 41), M. Ricci und R. Fr. de Sluse (N. 65), vier mit E. W. v. Tschirnhaus angefertigte Gesprächsnotizen (N. 49_1, 55, 67, 68_1), eine von Tschirnhaus für Leibniz angefertigte Aufzeichnung (N. 49_2) und eine Gesprächsaufzeichnung mit einem nicht identifizierten jungen Franzosen (N. 70). Nur zwei Stücke (N. 3, 42) waren bisher ganz, drei Stücke (N. 35, 47, 53) teilweise im Druck zugänglich: insgesamt weniger als 18 Druckseiten.

Die chronologische Anordnung der Stücke bot zum Teil erhebliche Probleme, da nur 15 von ihnen datiert sind: N. 36, 39, 43, 44, 50, 53, 54, 55, 57_2, 58, 59, 60, 61, 62, 68. Die relativen Datierungen wurden wie im Falle der vorangegangenen beiden Bände dieser Reihe vor allem mit Hilfe von Verweisen, charakteristischen Besonderheiten des Inhalts, der Schreibweise (Notation), des Papiers (Wasserzeichen) erschlossen. Nicht näher datierbare, aber wenigstens einem bestimmten Zeitraum zuordenbare Stücke wurden an den Schluß des jeweiligen Zeitabschnittes gestellt.

Längere Studien (N. 17, 38, 43, 44) wurden von Leibniz in Abschnitten geschrieben oder aus ursprünglich selbständigen Stücken zusammengefügt (N. 53, 61); einige haben eine komplizierte Textstruktur. Besonders deutlich werden diese Merkmale am längsten Stück des Bandes (N. 38).

Quellen

Die zahlreichen Bezugnahmen auf zeitgenössische Literatur im vorliegenden Band bezeugen, in wie vielfältiger Weise Leibniz Anregungen, teilweise auf Hinweise von Huygens hin, gefunden hat, die er kritisch und schöpferisch weitergeführt hat. Noch im Jahre 1672 studiert Leibniz Pascals *Traité du triangle arithmétique* (N. 3, 4, später 28, 35), Galileis *Discorsi* (N. 6, später 18, 19), mit den Überlegungen zum Unendlichen; Saint-Vincents *Opus geometricum* (N. 4, 7, später 21, 38, 39, 60) mit den Abschnitten über Verhältnisse stand ihm in einem Exemplar der königlichen Bibliothek zur Verfügung (*LMG* III S. 72). Ebenfalls früh, spätestens Anfang 1673, wird Leibniz durch einige Aufsätze in den Philosophical Transactions mit den Quadraturen von Nicolaus Mercator (N. 6, 8, später 38, 52, 54) und James Gregory (N. 6, später 20, 38, 39, 50, 51, 60, 62, 63, 64) bekannt; kurz danach studiert er Gregorys *Exercitationes geometricae* und Mercators *Logarithmotechnia*.

Die zehn betroffenen Stücke zeigen, wie sehr sich Leibniz für Gregorys Methoden interessiert, mit denen er sich kritisch auseinandersetzt. Als direkte Quellen kommen die folgenden drei Monographien und zwei Aufsätze in Frage: *Vera circuli et hyperbolae quadratura.* Padua 1667, Nachdruck 1668; *Exercitationes geometricae.* London 1668; *Geometriae pars universalis.* Padua 1668; *Answer to the Animadversions of Mr. Hugenius upon his book De vera circuli et hyperbolae quadratura*, in *Philosophical Transactions* 3 (1668), Nr. 37; *An Extract of a Letter*, in *Philosophical Transactions* 3 (1668/69), Nr. 44. Die Lektüre der *Exercitationes geometricae* ist ab dem Frühjahr 1673 nachweisbar (Cc 2, Nr. 500, Druck in Band VII, 4). Die *Vera circuli et hyperbolae quadratura* leiht sich Leibniz am 30.XII.1673 von Huygens aus (*LSB* III, 1 S. LV). Auf die *Geometriae pars universalis* bezieht sich Leibniz Anfang März 1675 (*LSB* III, 1 N. 46_1 S. 202). Gregorys konvergente Doppelfolgen, denen gegenüber Leibniz die bis dahin nicht erfolgte Behandlung divergenter Doppelfolgen anmahnt, spielen in allen fünf Veröffentlichungen Gregorys eine Rolle. Hinzu kommen als indirekte Quellen die Besprechungen der Bücher in den *Philosophical Transactions* und im *Journal des Savans*, von denen Leibniz sicher die Rezension der *Geometriae pars universalis* in den *Philosophical Transactions* 3 (1668), Nr. 35 gelesen hat (N. 38_{12}).

Leibniz teilt die Kritik von Huygens am Vorgehen von Gregory: während Gregory die Fläche des Kreissektors mit Hilfe einer gegebenen rekursiven Formel finden wollte, habe er umgekehrt eine rekursive Formel mit Hilfe der gegebenen Kreissektorfläche finden wollen (N. 60).

Brounckers Hyperbelquadratur war Leibniz bereits 1673 bekannt (Cc 2, Nr. 552, Druck in Band VII, 4), wird hier jedoch erst im Oktober 1674 erwähnt (N. 38_9).

Die *Arithmetica infinitorum* von J. Wallis (N. 6, 8, 15, 26, 38, 39, 58) kennt er anfangs nicht aus unmittelbarer Lektüre, wie die falsche Zuschreibung in N. 8 und der Vermerk in N. 15 über seine Unkenntnis der Wallisschen Interpolationsmethode zeigen. Eine eingehendere Auseinandersetzung mit diesem Werk ist erst ab Mitte 1674 festzustellen.

In zwei frühen Stücken verweist Leibniz auf seine eigene *Dissertatio de arte combinatoria* von 1666 (N. 3, 21).

Auf Mengolis Summation der reziproken figurierten Zahlen war Leibniz im Frühjahr 1673 von Oldenburg hingewiesen worden (*LSB* III, 1 N. 13_2 S. 60). Das Studium einer einschlägigen Schrift von Mengoli (*Circolo*, 1672) ist im Frühjahr 1676 festzustellen (N. 57_2).

Aus G. Gosselins *De arte magna* exzerpiert Leibniz einen Satz über Polygonalzahlen (Druck mit den zugehörigen Marginalien in N. 41). Er entnimmt auch einigen weiteren Werken, deren inhaltlicher Schwerpunkt auf anderen Gebieten liegt, Einzelheiten zu Folgen und Reihen: O. v. Guerickes *Experimenta nova* (N. 33), H. Fabris *Synopsis geometrica* (N. 17, 18), I. G. Pardies' *Élémens de géométrie* (N. 6, 26, 38), A. de Sarasas *Solutio problematis* (N. 21), R. Fr. de Sluses Tangentenbrief (N. 38, 68) und *Mesolabum* (N. 65) sowie Wallis' *Mechanica* (N. 38).

Quellen zu Themen außerhalb von Differenzen, Folgen und Reihen sind schließlich u. a. Schriften von Archimedes (N. 8, 18, 19, 39), Chr. Huygens' *De circuli magnitudine* (N. 6) bzw. *Horologium oscillatorium* (N. 38, 39). Mehrfach erscheint Fr. van Schootens zweibändige Ausgabe der *Geometria* von Descartes mit den diversen Kommentaren und anderen angehängten Schriften (N. 16, 17, 31, 38, 39, 51), wobei sich Leibniz hier hauptsächlich mit Descartes und H. van Heuraets *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas* auseinandersetzt.

In der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover befindliche Marginalexemplare der genannten Quellen werden nachstehend mit ihrer Signatur angegeben, wobei zu berücksichtigen ist, daß einige dieser Bände Leibniz erst in späterer Zeit zur Verfügung standen.

Leibnizsche Eintragungen bereits aus der Pariser Zeit finden sich in der zweibändigen Ausgabe der *Geometria* von R. Descartes (Signatur Leibn. Marg. 178); in H. Fabri, *Synopsis geometrica* (Signatur Leibn. Marg. 7,1); G. Gosselin, *De arte magna* (Signatur Nm-A 317), J. Gregory, *Exercitationes geometricae* (Signatur Ms IV 377); Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium* (Signatur Leibn. Marg. 70); N. Mercator, *Logarithmotechnia* u. M. Ricci, *Exercitatio geometrica* (Signatur Ms IV 377); Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique* (Signatur Nm-A 605); R. Fr. de Sluse, *Mesolabum* (Signatur Nm-A 746).

Nur Marginalien aus späterer Zeit enthalten J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Signatur Leibn. Marg. 98) und *Geometriae pars universalis* (Signatur Leibn.

Marg. 98); A. de Sarasa, *Solutio problematis* (Signatur Leibn. Marg. 230); Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum* (Signatur Leibn. Marg. 230).

Terminologie

Im Rahmen seiner Folgen- und Reihenlehre verwendet Leibniz keine eindeutig festgelegte Terminologie.

(1) progressio, series

Beide Begriffe, progressio wie series, können eine Folge oder eine Reihe im modernen Sinn bezeichnen: Beide können gegebenenfalls eine Summe haben (N. 6, 27, 38, 48 u. ö.). Die umfangreichste Betrachtung zur Terminologie ist in N. 4 enthalten. Das Bildungsgesetz einer Folge heißt fundamentum progressionis. Es gibt an, wie aus einer gegebenen Größe die nächste Größe gewonnen wird und heißt daher auch connexio quantitatum. An anderen Stellen verwendet Leibniz dafür Begriffe wie aequatio elementalis bzw. fundamentalis, charactère analytique oder proprietas essentialis.

Zwar nennt Leibniz die gesamte series der Größen progressio, erwägt jedoch, mit progressio den Übergang (transitus) von einem zum nächsten Folgenglied zu bezeichnen. Dieser Übergang heißt ascensus, descensus, fluctuatio, je nachdem ob die Folge streng monoton wächst, streng monoton fällt oder alterniert. Zur Vermeidung von Mißverständnissen schlägt er statt progressio in diesem Sinn die allgemeine Bezeichnung productio vor. Denn etwas Gegebenem entspricht durch Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division ein productum (Ergebnis): Summe, Rest, Produkt, Quotient.

Das Folgendreieck (triangulum progressionum) ist das Aggregat aus den Folgengliedern und aller Summen- bzw. Differenzen aller Ordnungen. Leibniz verwendet meist das Differenzenschema: Die Folgenglieder sind die Basis des Dreiecks, die Folge der Differenzen derselben Ordnung ist parallel zur Folge der Glieder. Das Differenzenschema ist gleichseitig. Die zur Basis parallelen Differenzenfolgen können auch Basen genannt werden. Sie heißen homologe Folgen (progressiones homologae). Das wichtigste Beispiel für das Differenzenschema ist das harmonische Dreieck: Das triangulum harmonicum tritt namentlich in N. 30, 53, inhaltlich in N. 49, 55 auf. Der Name beruht auf der entscheidenden Rolle, die dabei die harmonische Reihe spielt.

Eine unendliche Reihe heißt aequatio infinita, wenn ihre Summe bzw. der endliche Ausdruck angegeben werden können, dem sie gleich ist:

$$a - x \sqcap \frac{y^2}{a} - \frac{y^2x}{a^2} + \frac{y^2x^2}{a^3} \text{ etc. (N. 48)}$$

(2) Konvergenz, Divergenz

Leibniz übernimmt den Ausdruck convergens (konvergent) ebenso wie den Ausdruck terminatio (Grenzwert) von James Gregory, der ihn in seiner *Vera circuli et hyperbolae quadratura* (Padua 1667, Definitionen) für eine Doppelfolge i_n, c_n eingeführt hatte: Die i_n bilden eine streng monoton wachsende, die c_n eine streng monoton fallende, die Differenzen $c_n - i_n$ eine Nullfolge. Dazu sagt Gregory: die Differenz wird kleiner als jede vorgegebene Größe. Die Terme i_n, c_n heißen convergentes, konvergierend, insofern sie sich immer stärker zueinander neigen und bei unendlicher Fortsetzung einander und damit dem Grenzwert gleich werden.

Im Anschluß daran definiert Leibniz: Eine Folge ist convergens, wenn die Differenz zwischen zwei (aufeinanderfolgenden) Termen kleiner als jede gegebene Größe wird (N. 64). Die Gregorysche bzw. Leibnizsche Folgenkonvergenz ist also als Spezialfall im allgemeinen Konvergenzprinzip von Cauchy enthalten: $|\, a_n - a_{n+m} \,| < \varepsilon$ mit $m = 1$.

Am Gregoryschen Begriff der series convergentes kritisiert Leibniz den Charakter der Doppelfolge, da in der Regel eine einzige (im oben genannten Sinne konvergente) Folge allein bereits ausreichend sei. Dem stellt Leibniz das andere Merkmal der meisten Doppelfolgen von Gregory gegenüber, die series replicatae oder substitutrices, die rekursiv definierten Folgen (N. 39, 60, 64, 68), deren Untersuchung er für weit nützlicher hält. Leibniz setzt auch diese als konvergent voraus, wenn er fordert, daß in einer series replicata für hinreichend großes n die Differenz zwischen a_n, a_{n+1} und a_{n+2} kleiner als jede gegebene Größe wird.

Konvergente Reihen im modernen Sinne heißen series summabiles (N. 38, 43 u. ö.)

In Anlehnung an Gregorys konvergente Folgen führt Leibniz den Begriff series divergentes (divergente Folgen) für eine Doppelfolge a_n, d_n ein: Die Terme a_n, d_n entfernen sich zunehmend voneinander. Die a_n vergrößern eine Größe g, die d_n vermindern g. Unter bestimmten Bedingungen führt dieser Prozeß dennoch zu etwas Endlichem. Leibnizens Divergenzbegriff ist also nur für zwei Folgen erklärt und führt — im Sinne des modernen Divergenzbegriffes — gegebenenfalls auf zwei Häufungspunkte der Doppelfolge a_n, d_n. Das durch die Diskussion zwischen Leibniz und Grandi (*LMG* IV S. 215–217) berühmt gewordene Beispiel $\frac{1}{2} = \frac{1}{1+1} = 1 - 1 + 1 - 1 \pm$ etc. tritt bis Mitte 1674 (N. 30) und 1676 in einer Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus (N. 68_2) auf.

(3) Spezielle Folgen, Reihen

Eine harmonische Reihe (progressio harmonica) ist dadurch definiert, daß für drei beliebige, aufeinander folgende Glieder a, b, c gilt: $\frac{a}{c} = \frac{a-b}{b-c}$ bzw. $b = \frac{2ac}{a+c}$, das heißt

das mittlere Glied das harmonische Mittel der beiden anliegenden Glieder ist (N. 54). Leibnizens wichtigstes Beispiel ist die Reihe der reziproken natürlichen Zahlen: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}$ etc. Gelegentlich verwendet Leibniz auch andere Definitionen:
$\frac{a-b-c}{a}=\frac{c}{b}$ bzw. $\frac{a-b-c-d}{a-b}=\frac{d}{c}$ (N. 6).

Eine arithmetische Reihe heißt progressio arithmetica (konstante Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern), eine geometrische Reihe progressio geometrica (konstanter Quotient zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern). Leibniz nennt jedoch auch eine Folge arithmetisch, wenn sie in Zahlen dargestellt werden kann, geometrisch wenn eine geometrische Darstellung möglich ist (N. 39). Danach ist die Folge der Dreieckszahlen nur arithmetisch, nicht geometrisch, die Folge der Quadratzahlen arithmetisch und geometrisch.

Die Wallissche Formel für $\frac{4}{\pi}$ heißt series Wallisiana (N. 69). Sie ist finita indefinita, da sie an einer beliebigen Stelle abgebrochen werden kann.

Reihen heißen rein und rational, wenn die unbekannte Größe wurzelfrei ist (N. 43_1), z. B. $\frac{y+d}{y+g}$. Ist der Flächeninhalt einer Figur mittels einer unendlichen Reihe berechenbar, so handelt es sich um eine series quadratrix (N. 38_2, 38_6, 38_7 u. ö.). Leibnizens Kreisreihe ist die series quadratrix des Viertelkreises. Es kann verschiedene series quadratrices derselben Figur geben.

Die Summe summierbarer Reihen wird mit Hilfe von series summatrices ermittelt (N. 38_2, 38_7, 38_{16}, 65). Mit dieser Methode glaubt Leibniz, als erster eine universelle Methode zur Reihensummierung gefunden zu haben.

(4) Andere Fachausdrücke

Im Frühjahr 1673 verwendet Leibniz das Adjektiv coordinatus zur Bezeichnung einer Zuordnung (N. 18).

Im August/September 1673 tritt der kurz zuvor von Leibniz geprägte Ausdruck functio auf (N. 21), im Oktober 1674 functionem facere, eine Funktion bilden, für Größen wie die Subnormale, die von der jeweiligen Kurve abhängen (N. 38_6).

Ab Herbst 1673 (N. 23) verwendet Leibniz den Ausdruck transzendent für Figuren (figura transcendens), Kurven (curva transcendens), Probleme (problema transcendens), denen keine algebraische Gleichung bestimmten Grades zugeordnet werden kann. Dem entspricht die aequatio transcendens (N. 64).

Die von ihm 1673 für die Kreisquadratur verwendete Versiera bezeichnet Leibniz meist als figura segmentorum (N. 23, 26, 38), aber auch als cissoeis nova (N. 25), figura anonyma (N. 38) und nach einem Vorschlag von Huygens (*LSB* III, 1 N. 40 S. 171) als cyclocissoeis (N. 44).

Für die an Quadraturen bzw. Rektifikationen beteiligten Kurven verwendet Leibniz neben curva bzw. figura quadratrix oder summatrix (N. 23, 26 u. ö.) und linea tetragonistica (N. 38) auch figura homogenea (N. 23, 26 u. ö.), homologa (N. 61), sygnotos (N. 23, 31), symmetros (N. 38) und curva syntomos (N. 26, 38).

Den offenbar von Cl. Mydorge übernommenen Begriff des Parameters versucht Leibniz 1673/74 von Kegelschnitten auch auf Folgen zu übertragen (N. 28).

Themenschwerpunkte

(1) Leibniz hatte vermutlich ausgehend von seinen kombinatorischen Studien (vgl. N. 3) die Idee, mit der Umkehrung der Differenzenbildung bei Folgen auch die Summierung methodisch und allgemein durchführen zu können. In einem Gespräch mit Huygens (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 5 Z. 13 – S. 6 Z. 6) behauptete er, eine solche Summationsmethode zu besitzen, worauf dieser ihm die Aufgabe stellte, die reziproken Dreieckszahlen zu summieren. Diese Unterredung mit Huygens hat wohl im September 1672 stattgefunden (vgl. N. 36 S. 365 Z. 16 f.). Nach vergeblichen Versuchen (N. 1) gelingt ihm die Darstellung der reziproken Dreieckszahlen als Differenzenfolge der harmonischen Folge und damit auch die geforderte Summierung (N. 2). In einer weiteren Unterredung bestätigte Huygens die Übereinstimmung mit seinem eigenen Ergebnis. Das Ergebnis und die Ausdehnung auf die weiteren reziproken figurierten Zahlen gehen bis Ende 1672 in die *Accessio ad arithmeticam infinitorum* (*LSB* III, 1 N. 2) sowie in die Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 (*LSB* III, 1 N. 4) ein. Später entwirft Leibniz wiederholt Darstellungen, in denen er die Methode der Entdeckung dieser Resultate nicht preisgibt (N. 35, 36, 53).

(2) Das wichtigste Ergebnis der Beschäftigung mit der als divergent erkannten harmonischen Reihe (N. 2, 8 –10, 12, 14, 22, 27 –30, 38_3, 38_{10}, 47, 49, 52 –55, 57, 68, 71) ist die Aufstellung des harmonischen Dreiecks, das analog zu Pascals arithmetischem Dreieck mit den iterierten Summen der natürlichen Zahlen die iterierten Differenzen der Kehrwerte der natürlichen Zahlen enthält (N. 30, 53). Leibniz diskutiert dieses Resultat auch mit Tschirnhaus (N. 49, 55).

(3) Bei der Untersuchung der Reihe der reziproken Quadratzahlen gelingt Leibniz die Summation der Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1}$ als Summe der Differenzenreihen der reziproken geraden und ungeraden Zahlen (N. 15). In der Aufzeichnung eines Gesprächs

mit einem jungen, nicht identifizierten Franzosen (N. 70) werden die Verhältnisse der Summen von Teilreihen der reziproken Quadrat- und Kubikzahlen, nämlich der Potenzen der geraden bzw. ungeraden Zahlen, und der alternierenden Reihen zur Summe der Gesamtreihen bestimmt. Wiederholt versucht sich Leibniz an der Summierung irrationaler Größen (N. 21, 38_7, 38_8, 38_9).

(4) Die Beschäftigung mit der im Herbst 1673 entdeckten Kreisreihe (N. 24 –26, 34, 38_{10}, 43_3, 46, 66) bietet Anlaß für die Untersuchung von Näherungen (N. 25, 26, 34), ab 1675 auch mittels Folgen von Ungleichungen, also Einschachtelungen (N. 46, 66). An der Auffassung, daß die alternierende Kreisreihe ohne weiteres zu einer Differenz zweier harmonischer Reihen umgeordnet werden könne und damit die gegenseitige Abhängigkeit von Kreis- und Hyperbelquadratur belege (N. 24, 25), hält Leibniz auch später noch fest.

(5) Die Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division (N. 17, 48, 56, 58), die zuerst Mercator auf seine Hyperbelreihe und dann Leibniz auf seine Kreisreihe führte, ergänzt Leibniz ab 1674 durch die Reihenentwicklung mithilfe von Wurzelalgorithmen (N. 32, 33, 38, 62).

(6) Systematisch verwendet Leibniz ab Herbst 1674 die zur Flächenberechnung unter Kurven eingeführte Schwerpunktmethode zur Bestimmung der Summe von als Treppenfunktionen aufgefaßter Reihen (N. 38, 40, 45). Weitere Untersuchungen behandeln den Zusammenhang zwischen Reihensummation und Integrationsmethoden (N. 27, 50, 52, 71, 72).

(7) Die bei der Summierung von unendlichen Reihen sich aufdrängende Frage nach dem Zusammenhang von unendlicher Anzahl und endlicher Größe führt zu weiteren Überlegungen über die Rolle des Unendlichen (vor allem N. 6, 38_{10}, 47, 58).

(8) Außerhalb der Bandthematik liegen Textabschnitte zur Einführung transzendenter Kurven (Herbst 1673, N. 23). Ein längerer Exkurs zu Rollkurven untersucht die Trochoide des Brennpunktes der Parabel. Leibniz konstruierte damit unbewußt bereits die Kettenlinie. In diesem Zusammenhang setzt Leibniz sich kritisch mit den Ansichten von R. Descartes über die in der Geometrie zulässigen Kurven auseinander (N. 38).

Programmatische Studien

Von besonderem Interesse sind die siebzehn programmatischen Studien (N. 1, 4, 7, 17, 20, 21, 31, 32, 38_5, 38_7, 38_9, 38_{12}, 39, 42, 50, 51, 54, 58, 62, 68), unter denen die Stücke N. 4

und 39 hervorragen. In zehn von ihnen (N. 4, 7, 20, 21, 38_{11}, 39, 43, 54, 62, 68) äußert sich Leibniz ausdrücklich zu Methoden, die ihm stets am meisten am Herzen lagen. In fünf Aufzeichnungen (N. 6, 7, 8, 37, 51) formuliert er Probleme, die vorrangig zu lösen sind.

So könne das Studium der Differenzenfolgen höherer Ordnungen die scientia progressionum und damit den edelsten Teil der Arithmetik zum Gipfel führen. Man müsse eine Methode finden, zum Index n den Term a_n zu finden und umgekehrt (N. 4). Er vergleicht die Arithmetik der (verschiedenen) Unendlichen mit der Geometrie der Indivisibeln und stellt fest: die Erkenntnis des Unendlichen ist der Gipfel des menschlichen Scharfsinns. Das Fundamentaltheorem sei: In jeder monoton fallenden Folge (genauer wäre: Nullfolge) ist ein gegebener Term die Summe aller folgenden Differenzen. Davon hänge eines der schwierigsten Probleme ab, die vom Menschen erdacht werden können, durch das die Geometrie zu einer bewundernswerten Vervollkommnung geführt werde. Zweifellos könne eine unendliche Reihe rationaler Zahlen eine irrationale Summe haben. Aber die näheren Umstände seien zu erforschen (N. 6). Er „begründet“, warum die alternierende Reihe $1 - 2 + 4 - 8 \pm \ldots$ eine endliche Summe habe und warnt vor einem Mißbrauch der Indivisibeln (N. 17). Eine Methode zu finden, die Summen aller unendlichen oder endlichen Reihen zu ermitteln, sei das Bedeutendste in den von der reinen Überlegung abhängigen Wissenschaften. Es sei Aufgabe einer besonderen Kunst (ars), eine series confusa, eine chaotische Reihe, die andernfalls nur gliedweise summiert werden kann, auf eine Regel zurückzuführen. Freilich gebe es keine noch so große Unordnung, in der nicht ein Allwissender eine Harmonie beobachten kann (N. 21). Die bewundernswerte Harmonie der Dinge tritt auch in anderen Stücken auf (N. 24, 31). Er stellt einen Zusammenhang mit der doctrina divinandi seu de hypothesibus her, von der die Chiffrierkunst ein Teil sei. Er wünschte, daß diese von Wallis genau behandelt werde (N. 21, 38_4, 53_3), und äußert sich allgemein dazu, wie elegante Sätze und Beweise auf Grund einer Rechnung zu finden sind (N. 51). Die Lehre der unendlichen arithmetischen (d. h. Zahlen-) Reihen könne nur mit Hilfe der Geometrie vorangebracht werden (N. 31). Allgemein erörtert er das wechselseitige Verhältnis von Geometrie und Arithmetik (N. 39, 50, 54). Von allen Reihen seien die am nützlichsten, durch die geometrische Figuren beschrieben werden.

Niemand habe bisher die Summierung endlich oder unendlich vieler irrationaler Zahlen ermitteln können, er selbst sehe noch keine Methode dafür (N. 38_5, 38_7, 38_9). Kennzeichnend sind für ihn Sätze wie: „Lieber will ich nämlich zweimal dasselbe als einmal nichts tun“ (N. 38_{16}), „vielleicht kann diese identische Gleichung zum Beweis unseres Satzes dienen, ohne daß sein Ursprung aufgedeckt wird“ (N. 39). Immer wieder hebt er den

Nützlichkeitsgedanken hinsichtlich bestimmter Kurven oder Reihen hervor (N. 38_{12}, 39, 50, 54). Er erörtert die verschiedenen Konstruktionsmethoden für Kurven (analytische, geometrische, physikalische) und erwähnt seinen Beweis, daß es keine analytische Figur gibt, die den Kreis quadriert (N. 39). Er mahnt die Begründung allgemeiner Kalküle zu Summen, Summen von Summen, statischen Momenten an (N. 42). Oft thematisiert er allgemeine methodische Verfahren wie Aufzählungen, Tafeln, Kataloge der Einzelfälle, Induktionen (N. 4, 31, 54). Allgemein untersucht er das Auffinden unendlicher Gleichungen mit und ohne Logarithmen (N. 62).

Tschirnhaus-Stücke, Gesprächsaufzeichnungen

Seit Ende September 1675 hielt sich E. W. v. Tschirnhaus in Paris auf und hat sich Leibniz vermutlich am 1. Oktober jenes Jahres vorgestellt (*LSB* III, 1, S. LXII). Die vier gemeinsamen Aufzeichnungen N. 49_1, 55, 67, 68 beruhen auf Gesprächen und gemeinsamen Untersuchungen der beiden Gelehrten. N. 49_2 wurde von Tschirnhaus für Leibniz angefertigt. Es geht um die Erzeugungsweise und Summierung endlich vieler Terme der harmonischen Reihe, Überlegungen zu Hyperbel, Parabel, Reihenentwicklung des Ausdrucks $\frac{1}{1-x}$, allgemeine Differenzenfolgen, die Reihe für $\frac{\pi}{4}$ und die Frage, ob die Summe rationaler Terme irrational sein kann.

Zur Notation und Rechentechnik

Leibniz verwendet bei seinen Rechnungen eine vielgestaltige Symbolik, die er zwar größtenteils aus der zeitgenössischen Literatur, insbesondere der Geometria-Ausgabe, übernimmt, aber zugleich auch weiterzuentwickeln versucht. Im einzelnen wirken seine Bezeichnungen dadurch oft fließend, gelegentlich unscharf und führen manchmal sogar direkt zu Fehlern. Im Grunde ist aber Leibniz' Schreibweise von der unseren kaum verschieden, so daß seine Formeln leicht lesbar bleiben, sofern man einige Einzelheiten berücksichtigt (zu dem gesamten Abschnitt siehe auch S. 879).

Diese betreffen insbesondere

(1) Vorzeichen:
Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz seit dem Sommer 1673 Doppelvorzeichen (signa ambigua). Ihre Bildung erfolgt überwiegend paarweise. Offenbar bevorzugt Leibniz bis Sommer 1674 die Form ∓, ⩱ (N. 26); bis Ende 1674 ǂ, ⩲

(N. 38, aber auch noch in N. 44); danach hauptsächlich $\overline{+}$, $\underline{+}$ (N. 43). Vereinzelt treten zusammengesetzte Zeichen auf, die Unterscheidungen in mehr als zwei Fälle signalisieren (N. 34; vgl. dazu *De la méthode de l'universalité*, gedr. in *LFC* S. 97–143). Unbestimmt gelassene oder wiederholte Vorzeichen werden durch Punkte 2. Größe wiedergegeben. Beispiel (N. 43):

$$\begin{array}{llll@{\qquad}llll@{\qquad}ll}
\overline{+} & 4r1\beta & 25 & y^2 & \overline{+} & (2) & 1a6s1\beta & 5y & \overline{+} & 1a6s1\beta^2 \\
\underline{+} & 2n1\beta & .. & .. & \cdot & & 4r1\beta^2 & .. & \cdot & 2n6s1a1\beta \\
 & & & & \underline{+} & (2) & 1a3p1\beta & .. & \underline{+} & 1a3p1\beta^2 \\
 & & & & \cdot & & 2n1\beta^2 & .. & \cdot & 4r3p1a1\beta
\end{array}$$

Ab und zu verwendet Leibniz größere Symbole, die auch eine Klammerfunktion besitzen (N. 19, 27).

(2) Operationen:

Bei den arithmetischen Operationen, vor allem von Brüchen, verwendet Leibniz manchmal nicht die sonst von ihm gebrauchten Zeichen $+, -, \frown, \smile$ und verzichtet darüber hinaus auch auf ein Gleichheitszeichen, sondern setzt das Ergebnis lediglich durch einen größeren Zwischenraum von den Operationen ab. Häufiger werden aber die Verbindungen von Zählern und Nennern durch Striche angezeigt, bei Addition, Subtraktion und Division dementsprechend meist durch liegende Kreuze und zusätzliche Zeichen (N. 10). Divisionen werden manchmal auch durch das Proportionszeichen $\propto$ gekennzeichnet (N. 8). Zeitgemäß sind die Überwärtsdivision und das Überwärtswurzelziehen mit ihren charakteristischen Streichungsschemata. Gleichheit bezeichnet Leibniz anfangs vereinzelt mit f. für facit, sonst mit =, manchmal auch senkrecht geschrieben (N. 3), ab Sommer 1674 mit dem Waagebalken $\sqcap$; gegen Ende des Parisaufenthalts kommen zusätzlich *aequ.* bzw. *aeq.* (auch ohne Punkt) in Gebrauch, auch = tritt wieder auf. Durchgehend gebraucht Leibniz ein stilisiertes facit (⨍) vor allem bei rein numerischen Rechnungen, besonders Überwärtsdivisionen u. ä.

Potenzen stellt Leibniz mit mehreren Bezeichnungssystemen dar, die vor allem in der Frühzeit auch nebeneinander auftreten können. Beispiele (N. 6, 8, 15):

$$\begin{array}{cccc}
d^{qq} & \llcorner d+e \lrcorner Q. & c^2, c^3, c^4 & a^q \\
b2-a2 & 9aa+bb-6ab & & \text{quad (1)}
\end{array}$$

Später treten neben die Exponentenschreibweise vor allem $\square$ und $\boxed{2}$, $\boxed{3}$ etc.

Für die Darstellung von Wurzeln verwendet Leibniz bis Sommer 1673 (und vereinzelt noch kurz danach) *Rq*, *Rc*, *Rqq* etc. (N. 16), ab dem Frühsommer 1673 auch das Wurzelsymbol, wobei er in der Regel keinen Wurzelbalken setzt, wenn der Radikand eindeutig

bestimmt ist (N. 24). Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor- wie nachgestellt.
Bekanntlich hat Leibniz ab Ende Oktober 1675 die Symbole d und $\int$ für Differentiation und Integration eingeführt. Dennoch verwendet er auch danach noch ältere Bezeichnungen wie diff., omn. und summ. teilweise auch neben der neuen Symbolik (N. 46, 57_2, 62). Vor allem bei der Differentiation von zusammengesetzten Ausdrücken schreibt Leibniz häufig auch das Operationszeichen unter und nicht vor den Klammerbalken (N. 46, 58).

(3) Klammern:
Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken (vinculum) sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. ⌞ und ⌟ wiedergegeben). Häufig erfolgt Klammerung durch Position, teilweise auch durch Wechsel im Schriftbild. Beispiel (N. 8):

$$Rq_{\llcorner\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q - Rq_{\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q \frown {}_\llcorner 2\underline{\text{rad.}}^q - 2\underline{\text{sin. polyg. inscr. praeced.}}^q$$

(4) Wiederholungszeichen und Indexbezeichnungen:

Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz wiederholt auftretende Bestandteile der Formeln (sowohl Operatoren wie Terme) durch entsprechende Punktierung bzw. durch einfaches Freilassen. Die Punktierung gibt manchmal die Dimension des wiederholten Elements wieder. Beispiel (N. 39):

$$\begin{array}{rrrrcrrrr}
4bx^3t+ & 3cyx^2t+ & 2dy^2xt+ & ey^3t & \sqcap & -4fy^4-3ex & y^3- & 2dx^2y^2- & cx^3y \\
 & +\,3ag\ldots+ & 2ahy\ ..\ + & aky^2. & & & -3al\ \ldots- & 2akx\ ..\ - & ahx^2\ . \\
 & & +2a^2m\ ..\ + & a^2ny\ . & & & & -2a^2p\ ..\ - & a^2nx\ \ . \\
 & & & & & & & - & a^3r\ \ .
\end{array}$$

Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz vereinzelt vorangestellte Ziffern (N. 33) oder sukzessive Klammerung (N. 50), die ihrerseits wieder durch Ziffern verdeutlicht werden kann. Beispiel (N. 54):

$$\begin{array}{lccccccccccc}
y \sqcap 1 & \dfrac{y}{1+y} & \mathbb{P} & y & - & y^2 & + & y^3 & - & y^4 & + & y^5 \\
y \sqcap 2 & \dfrac{(y)}{1+(y)} & \mathbb{P} & (y) & - & (y)^2 & + & (y)^3 & - & (y)^4 & + & (y)^5 \\
y \sqcap 3 & \dfrac{((y))}{1+((y))} & \mathbb{P} & ((y)) & - & ((y))^2 & + & ((y))^3 & - & ((y))^4 & + & ((y))^5 \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} \\
y \sqcap 100 & \dfrac{\underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}}{1+\underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}} & \mathbb{P} & \underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}} & - & \underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}^2 & + & \underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}^3 & - & \underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}^4 & + & \underline{\overline{({}_{100}(y)_{100})}}^5
\end{array}$$

(Für die kombinierte Koeffizienten- und Indexbezeichnung durch Ziffern s. (6).)

(5) Auslassungszeichen:
Nicht auftretende bzw. wegfallende Terme werden durch den Asterisk $*$ angezeigt (N. 38_9, 38_{10}, 52), der dementsprechend auch für den Koeffizienten 0 stehen kann (N. 38_7). Gelegentlich werden auch Punkte bzw. Doppelpunkte (N. 26) und $\square$ (N. 5) für Leerstellen verwendet.

(6) Koeffizienten:
Binomialkoeffizienten: Leibniz hebt diese Koeffizienten gelegentlich als wesentliche Zahlen (numeri essentiales) durch besondere Kennzeichnung hervor. Beispiele (N. 43, 54):

$25y^2 + (2)\, 2g5y + 4g^2$

$2, a, c \sqcap a, b + b, c$

Manchmal stehen nicht Buchstaben, sondern Ziffern für Koeffizienten. Beispiele (N. 5, 62, 72):

num. $\square .1.4.p-$ n.$\square .2.3.p = 2.4.q.$

$1y + b, 2y + c, 3y + d,$, etc. $\sqcap$ $4y + e, 5y + f, 6y + g$ etc.

$11a + 12a^2 + 13a^3$ ...
$11 = 1 \quad 12 = 0 \quad 13 + 11 = 0$

Im ersten Beispiel stehen die Ziffern für die unbekannten Koeffizienten von p und q, $\square$ für die bekannten, hier die sukzessiven Terme der Folge der Quadratzahlen.

(7) Ungleichungen:
Zusätzlich zu den üblichen Symbolen $\sqcap$ für „größer“ und $\sqcap$ für „kleiner“ (N. 66) führt Leibniz noch Zeichen für „ein wenig größer“ ($\sqcap$) bzw. „ein wenig kleiner“ ($\sqcap$) ein (N. 54).

(8) Leibniz rechnet gelegentlich „fortlaufend“, d. h. er verwendet bei Gleichungsketten Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter. Beispiel (N. 27):

$$\frac{3}{1} + \frac{9}{2} = \frac{6+9}{2} + \frac{27}{3} = \frac{18+29+54}{6} + \frac{81}{4} = \frac{72+116+216+486}{24} + \frac{243}{5} =$$
$$\frac{360+580+1080+2430+5832}{120} + \frac{729}{6} = \frac{2160+3480+6480+14580+34992+87480}{720}$$

(9) Leibniz schreibt in Anlehnung an Fr. Viète Gleichungen oft homogen. Das Verfahren dient überwiegend zur Rechenkontrolle, ohne daß es immer konsequent durchgeführt

wird. Wechsel zwischen homogener und inhomogener Schreibweise kommen öfter vor, z. B. in N. 26.

(10) Zur Überprüfung algebraischer Rechnungen setzt Leibniz oft spezielle Zahlenwerte ein, die den betreffenden Größen beigeschrieben werden. Beispiel (N. 8):

$$\begin{array}{l} z = \ a \ + \ 2b, \frown \dfrac{a}{b}\ \dfrac{(\frac{1}{2})}{(\frac{1}{2})}((1)) + 1 \ (((2))). \\ \frac{6}{2} \quad (\tfrac{1}{2})((\tfrac{3}{2}))(1) \end{array}$$

Die Neunerprobe verwendet Leibniz hauptsächlich bei rein numerischen Rechnungen (N. 26), aber nicht ausschließlich. Beispiel (N. 38_{17}):

$$\overset{\text{VI}}{78h} \sqcap \frac{\begin{array}{c} \boxed{\overset{\text{III}}{\boxed{4}\,3ega^2 4\beta}} + \boxed{\overset{\text{V}}{\boxed{2}\,4f^2a^24\beta}} + \boxed{2}\,\boxed{6}\,\overset{\text{IX}}{3e2f16\beta^2a} + \boxed{2}\,\overset{\text{IX}}{9e^264\beta^3} \\ - \boxed{8}\,\overset{\text{II}}{2fga^3} - \boxed{4}\,\boxed{8}\,\overset{\text{III}}{3e4\beta ga^2}\ \boxed{- \boxed{4}\,\overset{\text{III}}{3e2f16\beta^2a}} - \boxed{2}\,\boxed{4}\,\overset{\text{VIII}}{4f^24\beta a^2} \end{array}}{\overset{\text{VII}}{16\beta^2a^2}}$$

(11) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz zur Rechenerleichterung mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere Zuordnungsstriche und Punkte, vgl. vor allem N. 23 Teil 2.

(12) Umformungen:
Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz mittels mehrfacher Klammerung, Streichungen oder abgerundeter Umrahmungen angezeigt. Davon zu unterscheiden ist die Hervorhebung gültiger Terme, die durch kreisförmige, ovale oder eckige Umrahmungen wiedergegeben wird. Die Reihenfolge der Rechenschritte kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichungen oder durch beigefügte Zähler. Dabei werden im Rechengang neu auftretende Terme gelegentlich mit entsprechend indizierten Sonnensymbolen versehen. Bei Mehrfachstreichungen werden aus Gründen der Lesbarkeit die betreffenden Größen nur einmal durchgestrichen und die Anzahl der Streichungen durch darüber (darunter) gesetzte Schrägstriche in entsprechender Häufigkeit angezeigt. Beispiele (N. 9, 17_3, 44):

$$\left(\begin{array}{c} \left(\left(\left(\left(1\right)\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right)\right)\frac{1}{2} \\ \left(\left(\left(\left(\frac{6}{2}\right)\right)\right)\right) \end{array}\right)$$

$$\frac{3\frac{c}{\alpha}}{\dfrac{12\frac{\cancel{c^2}}{\;}}{Rq\,\frac{\cancel{\alpha^2}}{\frac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha}}}+1}} = \frac{3c}{Rq\ 12+\alpha}$$

$$\begin{array}{ll} f^2y^2 \odot_{I} & +\,2afg\,..+afg\beta \\ & +\,f^2\beta\ \ ..+a^2g^2 \\ & \underbrace{\boxed{+\ \ afg\,..}}_{I} \end{array}$$

Eberhard Knobloch Siegmund Probst

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Die vorliegende Reihe bedingt aber zusätzlich folgende Besonderheiten:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes. Eigene Überschriften von Leibniz werden unmittelbar vor dem Text wiederholt.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird gemäß den Editionen der Klassiker normalisiert. Insbesondere werden i und j sowie u und v entsprechend vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Mißverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, daß bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der anderen Reihen. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluß eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist *L*) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

DIFFERENZEN, FOLGEN, REIHEN 1672–1676

1. DE SUMMA NUMERORUM TRIANGULARIUM RECIPROCORUM
[September 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 5. 1 Bl. 2°. 2 S., zweispaltig beschrieben.
Cc 2, Nr. 514

Datierungsgründe: Das Stück ist offenbar unmittelbar nach dem Gespräch mit Huygens verfaßt, in dem dieser Leibniz das Problem stellte, die Folge der reziproken Dreieckszahlen zu summieren. Leibniz gelangt hier noch nicht zur Lösung. Aus den Angaben in N. 36 (vgl. S. 365 Z. 16 f.) ergibt sich eine Entstehungszeit etwa im September 1672.

Hugenius summam exhibere promisit fractionum in infinitum decrescentium, quarum numerator unitas, nominatores sunt numeri triangulares.

$$\begin{array}{cccccccccl}
3 & \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} & \frac{1}{28} & \frac{1}{36} & \text{t e r m i n i.} \\[2ex]
2 & \frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \frac{4}{60} & \frac{5}{150} & \frac{6}{315} & & \text{d i f f e r e n t i a e, quarum pro-} \\[2ex]
 & \frac{2}{\frac{1}{3}} & \left(\frac{3}{\frac{3}{6}}\right) & \frac{1}{\frac{1}{6}} & \left(\frac{4}{\frac{6}{10}}\right) & \frac{2}{\frac{3}{10}} & \frac{5}{\frac{10}{15}} & \frac{6}{\frac{15}{21}} & &
\end{array}$$

---

11 *Am Rande, in der Handschrift vertikal angeordnet:*

0 0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22 23 24
0 1 3 6 10 15 21 28 36

---

9 Hugenius: Zur Lösung von Huygens s. *HO XIV* S. 144–150.

inde summam habere mihi in proclivi est. Earum numeratores sunt numeri naturales, nominatores sunt facti ex duobus triangularibus sibi vicinis.

$3 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{3}{18} \quad \frac{6}{60} \quad \frac{10}{150} \quad \frac{15}{315}$ t e r m i n i aliter enuntiati, ubi numeratores sunt ipsi termini triangulares et nominatores sunt iidem facti ex duobus triangularibus sibi vicinis seu duobus numeratoribus, fractionis huius et sequentis.

$4 \quad \frac{4}{3} \quad \frac{9}{18} \quad \frac{16}{60} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{315}$ s u m m a e duorum terminorum quorumlibet sibi vicinorum. Hae non nisi numeratore differunt a differentiis, ut scilicet numerator summae, sit hoc loco quadratum numeratoris differentiae inter eosdem terminos.

$\frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{2}{60} \quad \frac{5}{150} \quad \frac{9}{315}$ d i f f e r e n t i a e inter differentias et terminos

$\frac{1}{3} \quad \frac{6}{18} \quad \frac{12}{60} \quad \frac{20}{150} \quad \frac{30}{315}$ d i f f e r e n t i a e inter differentias et summas, id est inter numeratores differentiarum, et earum quadrata, subscriptis nominatoribus tam differentiis quam summis, communibus.

1 2 6 12 20 30 42 56 seu facti ex numeratore et numero proxime minore seu unitate differente.

$$\frac{1}{1} \ \underline{\times}\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15} \quad \frac{1}{21}$$

$$\frac{4}{3} \quad \frac{27}{18} \quad \frac{288}{180}$$

Facile est per analysin invenire duos terminos, quorum differentia sit fractio data primum enim quaeruntur duo nominatores terminorum, quorum multiplicatio conficiat [nominatorem] fractionis, quo facto iam restat numerator fractionis, id est inventio numeratorum terminorum, qui in crucem per nominatores multiplicati, et a se subtracti relinquant numeratorem fractionis datae. Esto enim fractio data $\frac{1}{150}$ requirendae sunt duae fractiones, quarum differentia sit $\left[\frac{1}{150}\right]$. Componitur 150 ex 10. et 15. in se ductis. Ergo nominatores terminorum supponi possunt 10. et 15. Numeratores supponantur a

4 termini *(1)* naturales *(2)* triangulares *L* 11 inter *(1)* radices *(2)* numeratores *L* 19 numeratorem *L ändert Hrsg.* 22 150 *L ändert Hrsg.*

et b. erunt termini $\frac{a}{10} - \frac{b}{15}$. qui scilicet a se invicem subtracti relinquant $\frac{1}{150}$. Quaeruntur qui sint a et b. Hoc ita investigabimus: $15a - 10b = 1$. Ergo $15a = 1 + 10b$. Ergo $a = \frac{1}{15} + \frac{10b}{15}$. Ergo b pro arbitrio assumi potest. Et esto $b = 1$. Ergo $\frac{1}{15} + \frac{10}{15} = \frac{11}{15}$. Iam stabunt termini $\frac{\frac{11}{15}}{10} \mathrel{\underset{-}{\times}} \frac{1}{15}$. $\frac{11}{150} - \frac{10}{150} = \left[\frac{1}{150}\right]$. Ita b si velis per inversam aequationem determinato, poterit a pro arbitrio assumi.

Sed in progressione integra terminorum in infinitum procedente, ubi scilicet reperiendi sunt termini infiniti, invento scilicet progressionis fundamento, datarum infinitarum differentiarum. Ibi vero maxima est difficultas, et fortasse maior, quam ut cognitis hactenus artibus superari possit. Primum enim resolutio nominatoris in factores, seu nominatores differentiarum, non arbitraria est; sed ita comparata, ut idem sit factor posterior nominatoris antecedentis, et prior sequentis. Deinde resolutio in numeratores adhuc difficilior est, quia iterum numerator posterior concurrens ad constituendam subtractione differentiam praecedentem, concurrit nunc ad constituendam quoque differentiam sequentem, illic ut posterior, hic ut prior, illic ut deminuens, hic ut deminuendus, sed praecedente scilicet multiplicatione per crucem ante subtractionem. Aliquando fit ut habeamus nominatores determinatos, at non numeratores, ut in hoc exemplo, cum quaeritur summa huius fractionis $\frac{1}{3}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{60}\ \frac{1}{150}\ \frac{1}{315}$ etc. Constat nobis nominatores

---

2 *Dazu am oberen Rand:* $15a - 10b = 1$. $15a = 1 + 10b$. $a = \frac{1+10b}{15}$. $10b = 15a - 1$. $b = \frac{15a}{10} - \frac{1}{10}$. Ergo $b = \frac{1+10b}{10} - \left[\frac{1}{10}\right]$. seu $\frac{1}{10} + b\left[-\frac{1}{10}\right]$.

2 *Dazu, gestrichen:* Nota: alterutrum horum, vel a, vel b. est arbitrarium.
$15a - \llcorner 10a + b\lrcorner = 1$. $5a - 10b = 1$. $a - 2b = \frac{1}{5}$. $a = \frac{1}{5} + 2b$.
b esto 1. Ergo a est $\frac{1}{5} + \frac{10}{5}$. $b = \frac{15a}{10}\lrcorner - \llcorner\frac{15a - \llcorner 15a - 1\lrcorner}{10}$.

3 f. $\frac{11}{15}$. | Iam ... $-\frac{10}{150} = 1$ *erg L, ändert Hrsg.* |. Ita *L* 5 poterit | etiam *gestr.* | a *L* 8 vero *(1)* maior *(2)* maxima *L* 19 $\frac{1+10b}{10}$ *(1)* + *(2)* −1. seu $\frac{1}{10}$ + b | + 1 *ändert Hrsg.* |. *L*

fieri ex multiplicatione numerorum triangularium 1. 3. 6. 10. 15. 21. Quaeruntur iam et numeratores harum fractionum $\frac{a}{1}\ \frac{a}{3}\ \frac{}{6}\ \frac{}{10}\ \frac{}{15}$ qui scilicet in nominatores per crucem

---

5,17 *Dazu auf der Vorderseite des Blattes, in der Handschrift vertikal angeordnet:*

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{3} & & \frac{1}{18} & \frac{1}{60} & \frac{1}{150} & \frac{1}{315} \\
& \frac{15}{54} \,\Big|\, \frac{5}{18} & & & &
\end{array}$$

2 *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 21 & & & & & \\
 & 15 & & & & & \\
 & 10 & & & & & \\
 & 6 & & & & & \\
 & 3 & & & & & \\
a & & & & & & \\
 & 1 & & & 1 + \frac{2}{3} & \frac{5}{3} \,\Big|\, \frac{30}{18} & \\
a-1 & & \frac{2}{3} & & & & \frac{21}{18} \,\Big|\, \frac{7}{6} \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{[27]}{54} \,\Big|\, \left[\frac{1}{2}\right] & \frac{1}{3} + \frac{3}{18} & \frac{9}{18} \,\Big|\, \frac{30}{60} & \\
a-1-\frac{1}{3} & & \frac{3}{18} & & & & \frac{16}{60} \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{108}{1080} \,\Big|\, \frac{1}{10} & \frac{1}{6} + \frac{4}{60} & \frac{14}{60} & \\
a-1-\frac{1}{3}-\frac{1}{6} & & \frac{4}{60} & & & & \\
 & \frac{1}{10} & & \frac{300}{9000} \,\Big|\, \frac{1}{30} & & \frac{20}{150} & \\
 & & \frac{5}{150} & & & & \\
 & \frac{1}{15} & & & & &
\end{array}$$

1 multiplicatione *(1)* horum terminorum *(2)* numerorum *L* 1 21. | 28. 36. etc. *gestr.*| Quaeruntur *L*

ducti, et a se invicem subtracti relinquant 1. Si qua per analysin reperiri posset generalis huius problematis datae differentiarum progressionis [summas] reperire, solutio, quanquam aequatio talis multorum graduum futura esset, posset tamen non minus inveniri solutio, quam duarum mediarum proportionalium.

In omni progressione ubicunque differentia, (aut aliquid definitae ad differentiam rationis, ut duplum eius aut triplum) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest.

Inquirendae notae quibus dignosci possit an aliqua progressio sit prima sui generis, an vero differentia alterius.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{3}{3} & 1 & & & & \\
 & & \frac{2}{3} & & & \frac{2}{1} \\
\frac{5}{15} & \frac{1}{3} & & \frac{6}{15} & & \\
 & & \frac{4}{15} & & \frac{20}{105} & \frac{4}{5} \\
\frac{7}{105} & \frac{1}{15} & & \frac{22}{105} & & \\
 & & \frac{6}{105} & & & \frac{6}{35} \\
\frac{9}{945} & \frac{1}{105} & & \frac{46}{945} & & \\
 & & \frac{8}{945} & & & \frac{8}{315} \\
 & \frac{1}{945} & & & & \\
 & & & & & \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

6,16 30 *bzw.* $\frac{5}{9}$ *L ändert Hrsg.* 2 differentias *L ändert Hrsg.*

5–7 Ähnlich N. 2 S. 12 Z. 14–16.

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
1 & & \overset{\bullet}{\frac{2}{3}} & & \frac{1}{3} & & \overset{\bullet}{\frac{4}{15}} & & \frac{1}{15} & & \overset{\bullet}{\frac{6}{105}} & & \frac{1}{105} & & \overset{\bullet}{\frac{8}{945}} & & \frac{1}{945} & \text{etc.} \\
& \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{3}{15} & & \frac{1}{105} & & \frac{5}{105} & & \frac{1}{945} & & \frac{7}{945} & &
\end{array}$$

Totum $\frac{2}{3}\ \frac{4}{15}\ \frac{6}{105}$ etc. $= 1$. Ergo $1 + \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105} = 1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105}$. et $1 - \frac{1}{3}\ \frac{3}{15}\ \frac{5}{105}$ etc. $=$ $\frac{1}{3}\ \frac{1}{15}\ \frac{1}{105}$.

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{2}{3} & \text{divisa} & \frac{2}{1} & \frac{1}{1} \\[4pt]
\frac{4}{15} & \text{per} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\[4pt]
\frac{6}{105} & \frac{1}{3} & \frac{6}{35} & \frac{3}{35} \\[4pt]
\text{etc.} & \text{dant} & \frac{8}{315} & \frac{4}{315} \\[4pt]
 & & \text{etc.} & \\[8pt]
= & & = & = \\[8pt]
1 & & 3 & 1\frac{1}{2}
\end{array}$$

7,9 f. alterius.
$$\left|\begin{array}{ccccc}
 & & & & \text{a} \quad \textit{gestr.} \\
 & & & & \text{b} \\
\frac{2}{15} & \frac{6}{15} & \frac{12}{15} & & \text{a} + \text{b} \\
 & & & & \text{c} \\
\frac{3}{105} & \frac{9}{105} & \frac{18}{105} & & \text{a} + \text{b} + \text{c} \\
 & & & & \text{d} \\
\frac{4}{945} & \frac{12}{945} & \frac{24}{945} & & \text{a} + \text{b} + \text{c} + \text{d} \\
 & & & & \text{etc.}
\end{array}\right| \frac{3}{3}\ L$$

1 f. In der Handschrift ist die Tabelle vertikal angeordnet. Die Punkte über den Brüchen hat Leibniz zu deren Hervorhebung gesetzt.

Non sufficit ut seriem continue inveniamus, cuius differentias contineat series data, nisi eae duae series simul evanescant. Alioquin si assumam numerum primum infallibiliter maiorem tota summa, potero semper subtrahere in infinitum, nec tamen consumam.

Nota possum series componere ex datis ipsas multiplicando dividendo alias series cognitas ipsis addendo vel subtrahendo, item multiplicando seriem in seriem, quo facto prodeunt numeri infinities infiniti, nihilominus summae datae. Possum dividere seriem per terminum, sed non possum dividere terminum per seriem. Ars est in analysi datam scilicet progressionem ad classem suam producere posse; cuius scilicet ipsa d i f f e r e n t i a s p a r a l l e l a s continet.

8,2 f.

$$\left|\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{15} & & \frac{3}{15} & & \frac{1}{105} & & \frac{5}{105} & & \frac{1}{945} & & \frac{7}{945} & \\
 & 0 & & \frac{4}{15} & & \frac{2}{15} & & \frac{20}{105} & & \frac{4}{105} & & \frac{71}{945}\,\textit{(!)} & & \frac{6}{945} & & \textit{gestr.} \\
 & & \frac{2}{3} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{4}{15} & + & \frac{1}{15} & + & \frac{6}{105} & + & \frac{1}{105} & & & \\
 & & & 1 & & + & & & & & & & & & &
\end{array}\right|$$

Totum *L*

8,4 f.

$$\frac{1}{105}.\left|\begin{array}{cccccccccc}
1 & - & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & - & \frac{4}{15} & \frac{1}{15} & - & \textit{gestr.} \\
 & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{15} & & & \frac{1}{105} &
\end{array}\right| \frac{2}{3}\ L$$

7 seriem. *(1)* Imo possum fortasse dum sciam su *(2)* Ars *L*

2. DIFFERENTIAE NUMERORUM HARMONICORUM ET RECIPROCORUM TRIANGULARIUM
[September/Oktober 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 197–198. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 198 v° zweispaltig. Zusatz auf der Gegenseite Bl. 197 r°. — Auf dem übrigen Bogen ein Stück zum Sechsquadrateproblem (Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 530 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1, mit dem es wörtliche Übereinstimmungen gibt (vgl. Erl. zu S. 12 Z. 14–16). Auf S. 13 berechnet Leibniz ein Differenzenschema zur Folge der harmonischen Zahlen mit der Folge der halbierten reziproken Dreieckszahlen als erster und der Folge der gedrittelten reziproken Pyramidalzahlen als zweiter Differenzenfolge. In N. 53_3 S. 712 Z. 17 – S. 713 Z. 1 berichtet Leibniz über seine Entdeckung der Summierung der reziproken Dreieckszahlen anhand eines solchen Differenzenschemas. Die Nähe zu N. 1, wo das Problem noch ungelöst war, läßt vermuten, daß Leibniz aufgrund von Überlegungen im Anschluß an N. 2 zu der Entdeckung gelangt ist. Das Stück dürfte also im Zeitraum September/Oktober 1672 entstanden sein.

$$
\begin{array}{cccccccccc}
 & & 3 & & & \qquad & & 4 & \\
 & 4 & & 2 & & & 5 & & \frac{12}{4} \Big| \, 3 \\
\frac{4}{4} & & \frac{1}{1} & & \frac{4}{3} & & & \frac{1}{1} & \\
 & \frac{4}{3} & & \frac{2}{3} & & & \frac{5}{4} & & \frac{3}{4} \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & & \frac{27}{54}\Big|\frac{3}{6}\Big|\frac{1}{2} & & & \frac{1}{4} & \\
 & \frac{9}{18}\Big|\frac{1}{2} & & \frac{3}{18} & & & \frac{14}{40} & & \frac{6}{40}\Big|\frac{3}{20} \\
\frac{3}{18} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & & \frac{1}{10} & \\
 & \frac{16}{60}\Big|\frac{4}{15} & & \frac{4}{60} & & & & & \frac{10}{200}\Big|\frac{1}{20} \\
\frac{6}{60} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{30} & & & \frac{1}{20} & \\
 & \frac{25}{150}\Big|\frac{5}{30} & & \frac{5}{150} & & & & & \frac{15}{700}\Big|\frac{3}{140} \\
\frac{10}{150} & & \frac{1}{15} & & & & & \frac{1}{35} & \\
 & \frac{36}{315}\Big|\frac{4}{35} & & \frac{6}{315} & & & & & \\
 & & \frac{1}{21} & & & & & & \\
 & & \frac{1}{28} & & & & & & \\
 & & \frac{1}{36} & & & & & &
\end{array}
$$

$\frac{1}{6} \times \frac{4}{60}$	$\frac{60}{24}\Big\vert\frac{10}{4}\Big\vert\frac{5}{2}$		3		$\cancel{3}$	
		$\frac{1}{1}$		1	1	
$\frac{1}{3} \times \frac{3}{18}$	$\frac{18}{9}\Big\vert\, 2$		2			$\frac{2}{3}$
		(1)		$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	
$\frac{1}{1} \times \frac{2}{3}$	$\frac{3}{2}$		1			$\frac{3}{18}$
		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$	$\frac{3}{18}$	
			$\frac{2}{3}$			$\frac{4}{60}$
4		$\left(\frac{1}{3}\right)$		$\frac{1}{10}$	$\frac{6}{60}$	
$3+2$			$\frac{1}{3}$			$\frac{5}{150}$
$\frac{4}{3}$				$\frac{1}{15}$	$\frac{10}{150}$	
			$\frac{3}{18}$			$\frac{6}{315}$
			$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{15}{315}$	
			$\frac{4}{60}$			

In omni progressione, quoties differentia (aut aliquid definitae ad differentiam rationis, ut duplum, triplum etc.) semper termino sequenti maior est, summa terminorum methodo mea haberi potest.

Colligantur summae continuae tum terminorum tum differentiarum, quia enim habent eosdem semper divisores, hinc ratio apparere potest.

14 aut *(1)* definita pars differentia, ut tertia *(2)* aliquid *L*

14–16 Ähnlich N. 1 S. 7 Z. 5–7.

	3		$\frac{1}{1}$			
		2		$\frac{1}{2}$		
4	1		$\frac{1}{2}$		$\frac{4}{12}$	$\frac{1}{3}$
		$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{6}$		
$\frac{13}{3}$	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{6}{72}$	$\frac{1}{12}$
		$\frac{3}{18}$		$\frac{1}{12}$		
$\frac{81}{18}$	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{8}{240}$	$\frac{1}{30}$
		$\frac{4}{60}$		$\frac{1}{20}$		
	$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{10}{600}$	$\frac{1}{60}$
		$\frac{5}{150}$		$\frac{1}{30}$		
	$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{12}{1260}$	$\frac{1}{105}$
		$\frac{6}{315}$		$\frac{1}{42}$		
	$\frac{1}{21}$		$\frac{1}{7}$			
				$\frac{1}{56}$		
			$\frac{1}{8}$			
				$\frac{1}{72}$		
			$\frac{1}{9}$			
				$\frac{1}{90}$		
			$\frac{1}{10}$			
				$\frac{1}{110}$		
			$\frac{1}{11}$			

$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{2}$			1	
	$\frac{2}{3}$		$\frac{1}{3}$			$\frac{2}{3}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{3}{9}$	$\frac{1}{3}$	
	$\frac{2}{15}$		$\frac{1}{15}$			$\frac{2}{9}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{3}{27}$	$\frac{1}{9}$	
	$\frac{2}{35}$		$\frac{1}{35}$			$\frac{2}{27}$
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{14}$		$\frac{3}{81}$	$\frac{1}{27}$	
	$\frac{2}{63}$		$\frac{1}{63}$			$\frac{2}{81}$
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{18}$		$\frac{3}{243}$	$\frac{1}{81}$	
						$\frac{2}{243}$
					$\frac{1}{243}$	

$$\begin{array}{ll}
1 & \\
 & \frac{1}{3} \\
\frac{2}{3} & \\
 & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{3} & \\
 & \frac{1}{9} \\
\frac{2}{9} & \\
 & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{9} & \\
\frac{2}{27} & \\
\frac{1}{27} & \\
\frac{2}{81} & \\
\frac{1}{81} & \\
\frac{2}{243} & \\
\frac{1}{243} &
\end{array}$$

Totum $\frac{2}{3} \quad \frac{2}{9} \quad \frac{2}{27}$ etc. valet 1.

Totum $\frac{1}{3}\ \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9}\ \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27}\ \frac{1}{27}$ valet 1.

$\frac{2}{3}+\frac{1}{3}. \quad \frac{2}{9}+\frac{1}{9}. \quad \frac{2}{27}+\frac{1}{27}.$ etc. $= 1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{27}.$ etc.

$\frac{2}{3}-\frac{1}{3}. \quad \frac{2}{9}-\frac{1}{9}. \quad \frac{2}{27}-\frac{1}{27}. \qquad = \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.\ \frac{1}{27}$ etc.

Ergo inter $1+\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ et

$1-\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ differentia est 1.

Ergo abiecto 1. a maiore fiet aequale minori seu

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ etc. $= 1-\frac{1}{3}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{27}$ etc.

Hinc inveniri potest quantitas differentiarum servientium

quae additae primis dant summam.

[*Zusatz*]

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & \frac{1}{1} & & \\[4pt]
\frac{4}{3} & & & \frac{2}{3} & \\[4pt]
 & \frac{15}{18}\Big|\frac{45}{54} & \frac{2}{6}\ \Big|\frac{1}{3}\Big|\frac{6}{18} & & \\[4pt]
\frac{9}{18}\ \Big|\frac{3}{6} & & & \frac{3}{18} & \left[\frac{1}{6}\right] \\[4pt]
 & & \frac{3}{18}\Big|\frac{1}{6} & & \\[4pt]
\frac{16}{60}\ \Big|\frac{4}{15} & & & \frac{4}{60} & \left[\frac{1}{15}\right] \\[4pt]
 & & \frac{6}{60}\Big|\frac{1}{10} & & \\[4pt]
\frac{25}{150}\Big|\frac{5}{30} & & & \frac{5}{150} & \left[\frac{1}{30}\right] \\[4pt]
 & & \frac{10}{150}\Big|\frac{1}{15} & & \\[4pt]
\frac{36}{[315]} & & & & \\[4pt]
 & & \frac{1}{21} & &
\end{array}
$$

5–9 $\frac{1}{6}$ $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{30}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 11 315 *erg. Hrsg.*

3. DE NUMERIS COMBINATORIIS
[Frühjahr – Herbst 1672]

Überlieferung:

L Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 45–46. 1 Bog. 2°. Ca. 2 1/3 S. Mehrspaltig beschrieben. Auf Bl. 45 r° linke Spalte Cc 2, Nr. 519 A (= *LKK* Nr. 3 tlw., Druck in einem späteren Band der Reihe). Bl. 46 v° leer.

E *LKK* Nr. 3 tlw. (= Teil 1 unseres Textes), Nr. 5 (= Teil 2 unseres Textes)
Cc 2, Nr. 518

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie der zweite Entwurf der *Propositiones quaedam physicae* (*LSB* VI, 3 N. 2_2), dessen Entstehung für den Zeitraum Frühjahr – Herbst 1672 anzusetzen ist.

[*Teil 1*]

$$35\begin{cases}15\\[1ex] 20\begin{cases}10\\[1ex] 10\begin{cases}6\\[1ex] 4\begin{cases}3\\[1ex] 1\end{cases}\end{cases}\end{cases}\end{cases}$$

5. 4. 3. 2. 1	5. 4. 3. 2. 1	$\frac{5 \frown 6}{2}$	30
4. 3. 2. 1	4. 3. 2. 1	$\frac{4 \frown 5}{2}$	20
3. 2. 1	3. 2. 1	$\frac{3 \frown 4}{2}$	12
2. 1	2. 1	$\frac{2 \frown 3}{2}$	6
	1	$\frac{1 \frown 2}{2}$	2

13–18 *Nebenrechnungen auf der Rückseite:*

35	70	25		64
20	<u>35</u>	<u>3</u>		<u>35</u>
10	35	75	‖ 125 – 50	29
4				
<u>1</u>				
70				

		10			4. 3. 2. 1
	20		6		3. 2. 1
		10		3	2. 1
			4		
				1	[1]
35			6		3. 2. 1
		10		3	2. 1
			4		
				1	1
	15				
				3	2. 1
			4		
		5		1	[1]
			1		[1]

17,13–18 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

$5^\frown 3$	$1+2+3+4+5$	[15]	$5^\frown 6$		$4^\frown 15$	60
$2^\frown 5$	$2+3+4+5$	$\underline{14}$	$4^\frown 5$		$3^\frown\ 8$	24
$3^\frown 2$		60	$3^\frown\ 4$		$2^\frown\ 3$	$\underline{6}$
$1^\frown 3$		$\underline{15}$	$2^\frown 3$	12		90
$1\ ^\frown 1$		210	$1^\frown 2$	6		
			2		$5^\frown\ 6$ ⨍	30
2. 12. 36. 80.					$6^\frown\ 7$ ⨍	$42 - 1$
1 6 18 40						41
						$\underline{\cancel{30}}$
						$\underline{30}$
						1230

5–14 1 *erg. Hrsg. dreimal* 16 15 *erg. Hrsg.*

com2nationes	con3nationes	con4nationes				con5nationes
4	4. 3. 2. 1	4 3 2 1				
3	3. 2. 1	3 2 1				
2	2. 1	2 1				
1	1	1				
		3 2 1			1	1
		2 1				
		1		2		
		2 1				
		1	3			
		1				
						2
						3
						4 1

[*Rechnungen ohne direkten Bezug zum Haupttext*]

$$\begin{array}{r} 495 \\ \underline{2} \\ 990 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4096 \;⨍\; 4 \\ 990 \end{array}$$

2–14 Leibniz hat die Tabelle und die zugehörigen Nebenrechnungen zunächst für den Fall n = 5 angeschrieben, die Tabelle dann aus Platzgründen auf n = 4 reduziert; die Klammerung ist vom Herausgeber an den gültigen Text angepaßt worden. Den Fall n = 5 behandelt Leibniz im Teil 2 S. 26 Z. 1–35.

[*Teil 2*]

Demonstratio huius propositionis quod in progressione arithmetica termino ultimo ducto in proxime maiorem facti dimidium sit summa.

19,1 *Zu* com2nationes: $4 \frown 5$ ⨍ $\frac{20}{2}$ | 10

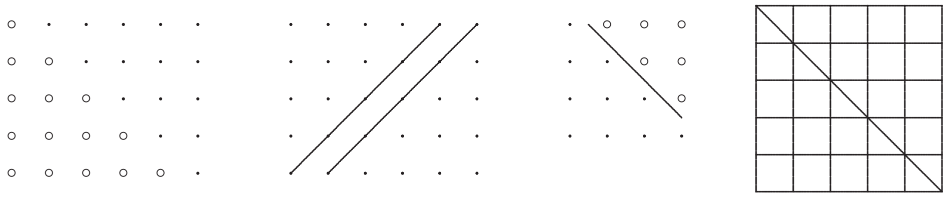
19,1 *Zu* con3nationes:

$4 \frown 5 \smile 2$	20	10
$4 \frown 3 \smile 2$	12	6
$3 \frown 2 \smile 2$	6	3
$2 \frown 1 \smile 2$	2	1
	40	20

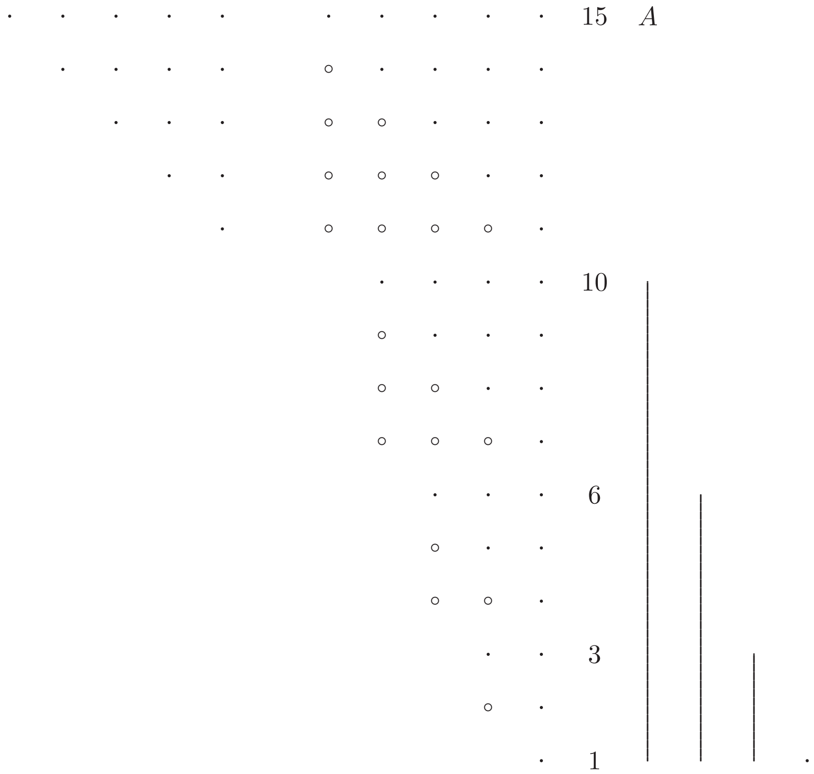
19,1 *Zu* con4nationes:

$4 \frown 5 + 5 \frown 6$	$5 \frown 10(6+4)$	50	25		
$3 \frown 4 + [4 \frown 5]$	$4 \quad 8(5+3)$	32	16		
	$3 \quad 6(4+2)$	18	9		
	$2 \quad 4(3+1)$	8	4		
	$1 \quad 2(2+0)$	2	1		
		110	55	– 20 ⨍ 35	
		55		25	
			30		
				16	
			14		
				9	
			5		
				4	
			1		

12 $5 \frown 6$ *L ändert Hrsg.*



Nota progressio progressionis cum ipsa differentia crescit.



Duae summae sibi vicinae progressionum arithmeticarum per unitates progredientium constituunt quadratum cuius latus est terminus progressionis maior v. g. $15+10 = 25$ cuius latus 5.

22 sibi vicinae *erg. L* 22 f. per … progredientium *erg. L*

Summa progressionis secundanae numerorum, est summa progressionis primanae quadratorum dimidiata; demto dimidio $\square^{\text{ti}}$ primi.

Summa tertiana numerorum, est 2^{dana} $\square^{\text{torum}}$ similiter.

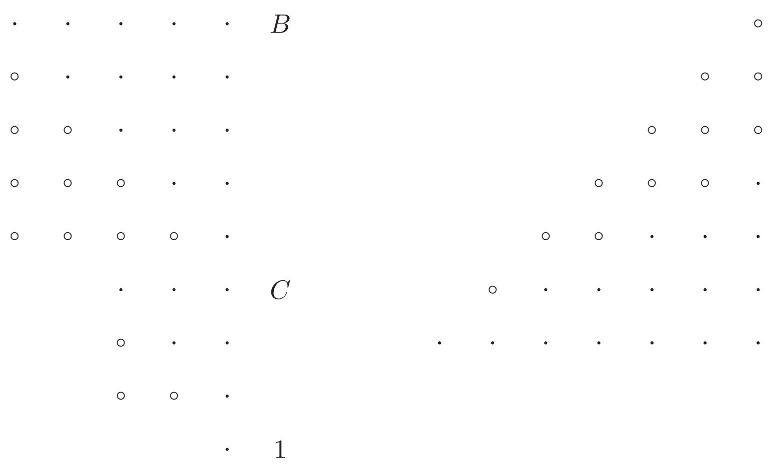
Omnis combinatio est summa progressionis arithmeticae per unitates crescentis, 5. 4. 3. 2. 1. est com2natio de 6.

Con3natio est summa summarum progressionis seu summa secundana, 5. 4. 3. 2. 1. | 4. 3. 2. 1. | 3. 2. 1 | 2. 1 | 1. est con3natio de 7.

Con4natio est summa summarum 2^{danarum} seu con3nationum.

Si quadrata omnium numerorum ab unitate usque ad numerum eo cuius con3nationes quaeris, binario minorem addas, productum dimidies, dimidio addas unitatem, et dimidium quadrati numeri maximi, habebis, summam secundanam, seu con3nationes quaesitas. V. g. $25 + 16 + 9 + 4 + 1$ ⨍

$$\begin{array}{ccccccccc} 25 & + & 16 & + & 9 & + & 4 & + & 1 \\ & 9 & & 7 & & 5 & & 3 & \end{array}$$



1 secundanae *(1)* quadrato *(2)* numerorum *L* 1 progressionis *(1)* secund *(2)* primanae *L* 4 progressionis *(1)* geomet *(2)* arithmeticae 10 f. dimidio addas *(1)* dimidium quad *(2)* unitatem, et *(a)* quadratum *(b)* dimidium *L*

1–3 Summa ... similiter: Die Behauptungen sind nicht richtig; Leibniz kommt S. 23 Z. 3–9 zu den korrekten Ergebnissen. 9–12 Si ... quaesitas: Die Behauptung ist nicht richtig; das korrekte Ergebnis formuliert Leibniz S. 23 Z. 3–9.

Ex duobus triangulis aequilateris inter se compositis fit $\square^{\text{tum}}$. Si sint in ea qua hic summae ratione.

Nota cum duae quaelibet summae dent quadrata lateris termini maioris, restabit solum unitas si numerus summarum est impar nihil si par, sed quadrata habebunt intervalla v. g. A reduxi in duo quadrata $B.C.$ et unitatem. Quadratum de 5. + quad. de 3. + 1. idem est quod con3nationes quaesitae. De numero 5 + 2. Ergo pro con3nationibus sume numerum eo cuius con3nationes quaeruntur binario [minorem] v. g. 5. est $7-2$. Inde sume quadrata de 5.3.1. semper unum transiliendo summa horum $\square^{\text{torum}}$ dat con3nationes seu summas progressionum secundanas.

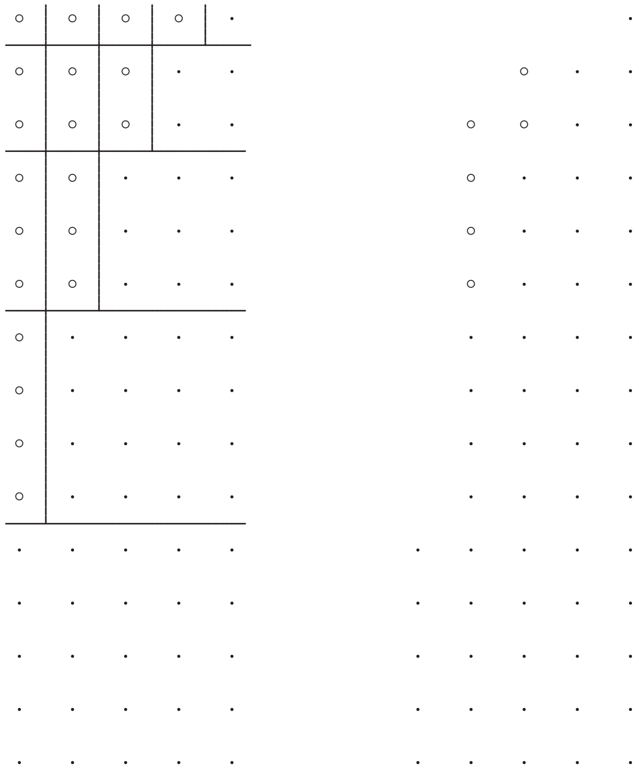
$$\left.\begin{array}{l} 4 \frown 1 \\ 3 \frown 2 \\ 2 \frown 3 \\ 1 \frown 4 \end{array}\right\} \text{est summa progressionis secundanae}$$

Invenire summam progressionis arithmeticae per binarios. Inveni summam progressionis per unitates usque ad terminum ultimum ab unitate; a producto subtrahe summam duplicatam progressionis per unitates terminorum unitate pauciorum terminis summandis[,] residuum erit summa progressionis per binarios.

Hic a summa data datur summa $\square^{\text{torum}}$, hac data summa progressionum secundanarum.

7 maiorem *L ändert Hrsg.* 22 duplicatam *erg. L*

Addere plura $\square^{\text{ta}}$ v. g. 1. 4. 9. 16. id ita fiet: Adde radices omnes, 1. 2. 3. 4. productum multiplica per radicem maximam, a facto detrahe $\begin{bmatrix} 3 \frown 1 \\ 2 \frown 2 \\ 1 \frown 3 \end{bmatrix}$ summam progressionis 2^{danae} minoris, sed haec computatur quaerendo summam $\square^{\text{torum}}$ ab unitate.



1 *Zu* Adde radices omnes, *am Rande:* Adjoutez toutes les racines ensemble.

2 detrahe *(1)* summam omnium radicum demta maxima $\begin{array}{l} 3 \frown 1 \\ 2 \frown 2 \\ 1 \frown 3 \end{array}$ *(2)* $\left| \begin{array}{l} 4 \frown 1 \\ 3 \frown 2 \\ 2 \frown 3 \\ 1 \frown 4 \end{array} \right.$ *ändert Hrsg.* | summam *L*

Nota si progressio secundana rectangulo omnium radicum et maximae adimatur, productum erit summa $\square^{\text{torum}}$ deinceps ab unitate. Computare progressiones 2^{danas} Frenicl. apud Paschal. in *Triang.*

○, ○ ○, ○ ○ ○, ○ ○ ○ ○ · · · · ·	15		0	
		5		5
○, ○ ○, ○ ○ ○ · · · ·	10		5	
		4		4
○, ○ ○ · · ·	6		9	
		3		3
○ · ·	3		12	
		2		2
·	1		14	

Progressio secundana est summa progressionis terminorum quorum differentiae sunt numeri deinceps crescentes ab unitate seu progressio primana.

Progressio omnium $\square^{\text{torum}}$ numerorum est summa progressionis numerorum deinceps imparium a primana secundani ⟨etc.⟩

---

2 f. Frenicl. apud Paschal.: Leibniz verwechselt B. Frenicle mit P. Fermat, dessen Regeln zur Berechnung der figurierten Zahlen bei Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665, Nr. V *Traité des ordres numériques*, prop. 11 S. 5 [Marg.] (*PO* III S. 510) zitiert werden. In seinem Handexemplar *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 605 hat Leibniz im Pascalschen Satz „Voila comment on peut varier les enonciations.“ die letzten drei Wörter unterstrichen; vgl. auch *Aus und zu Galileis Discorsi*, *LSB* VI, 3 N. 11_2 S. 167 Z. 10 f.

$\overline{5}$	15	1
4		
3		
2		
1		
$\overline{4}$	10	2
3		
2		
1		
$\overline{3}$	6	3
2		
1		
$\overline{2}$	3	4
1		
$\overline{1}$	1	5
4	10	6
3		
2		
1		
$\overline{3}$	6	7
2		
1		
$\overline{2}$	3	8
1		
$\overline{1}$	1	9
3	6	10
2		
1		
$\overline{2}$	3	11
1		
$\overline{1}$	1	12
$\overline{2}$	3	13
1		
$\overline{1}$	1	14
$\overline{[1]}$	1	15

Pro primanis quodlibet semel pro secundanis primum semel secundum bis, tertium 3.
Triangula = latera pro primanis unum pro secundanis.
Numerus triangularis pro [primanis] est = lineae primae[,] pro secundanis triangulo primo, pro tertianis scalae primae.

In com2nationibus de 5. 5. 4. 3. 2. 1. quodlibet multiplicatur per 1.

In con3nationibus de 5. 5 multiplicatur per 1. et 4 per 2. et 3 per 3. et 2 per 4. et 1 per 5.

8	1	8			$5 \frown 1$	5	· · · · ·
			6		$4 \frown 2$	8	· · · ·
7	2	14		2	$3 \frown 3$	9	· · ·
			4		$2 \frown 4$	8	· ·
6	3	18		2	$1 \frown 5$	5	·
			2				· · · ·
5	4	20			5		· · ·
			0		1		· ·
4	5	20			4		·
			2		1		· · ·
3	6	18			3		· ·
			4		1		·
2	7	14			2		· ·
			6		1		·
1	8	8			1		

Con3natio. Dimidia numerum et sume terminos arithmeticae progressionis binariae totidem, productum duplica.

Nota progressio arithmetica in numerum terminorum dat geometricam.

In con4nationibus de 5. 5 multiplicatur per 1.	$5 \frown 1$	$5 \frown 1$
et 4 multiplicatur per 2 + 1 [=] 3.	$4 \frown 2+1$	$4 \frown 3$
et 3 per 3 + 2 + 1 [=] 6.	$3 \frown 3+2+1$	$3 \frown 6$
et 2 per 4 + 3 + 2+ 1 [=] 10.	$2 \frown 4+3+2+1$	$2 \frown 10$
et 1 per 5 + 4 + 3 + 2 + 1 =15.	$1 \frown 5+4+3+2+1$	$1 \frown 15$

		5	5	5	35	Vid.
	7)					
1		12	$8+4$	8 4	20	tab.
	6)					
4		18	$9+6+3$	9 6 3	10	meam
	2)					
3		20	$8+6+4+2$	8 6 4 2	4	in
	5)					
		15	$5+4+3+2+1$	5 4 3 2 1	1	*Comb.*
				5 12 18 20 15		

1–15 *Nebenbetrachtungen:*

$6 \frown 5 \smile 2$	$5 \frown 2 \smile 2$	5
$5 \frown 4 \smile 2$	$12 \frown 2 \smile 2$	12
$4 \frown 3 \smile 2$	$12 \frown 3 \smile 2$	18
$3 \frown 2 \smile 2$	$[20] \frown 2 \smile 2$	[20]
$2 \frown 1 \smile 2$	$6 \frown 5 \smile 2$	15

26,4 secundanis *L ändert Hrsg.* 26,29+31 duplica. | Con4natio. Sume numerum termino uno altiorem et omitte producti duplicationem *gestr.* | Nota *(1)* summas *(2)* pro progressionis *(3)* progressio *L* 26,35 1 *erg. Hrsg.* 2–4 = *erg. Hrsg. dreimal* 20 10 *L ändert Hrsg. zweimal*

26,7 In com2nationibus de 5: Leibniz wechselt hier die Beziehungsweise; statt $\binom{n}{2}$, $\binom{n}{3}$ entspricht sie im folgenden $\binom{n+1}{2}$, $\binom{n+2}{3}$ etc. 26,28 f. Dimidia ... duplica: Die Formel ist nicht richtig.

Con5nationes
$5 \frown 1$
$4 \frown 2 + 1, + 1$
$3 \frown 3 + 2 + 1, + 2 + 1, + 1$
$2 \frown 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$
$1 \frown 5 + 4 + 3 + 2 + 1 + 4 + 3 + 2 + 1 + 3 + 2 + 1 + 2 + 1 + 1$
. . . . . .
5 . . . . . .
$8 + 4 + 4$ . . . . . .
$9 + 6 + 3 + 6 + 3 + 3$
$8 + 6 + 4 + 2 + 6 + 4 + 2 + 4 + 2 + 2$
$5 + 4$ 3 2 1 4 3 2 1 3 2 1 2 1 1

8	$\frown$ 1								8								8
7	2	1							14	7							21
6	3	2	1						18	12	6						36
5	4	3	2	1					20	15	10	5					50
4	5	4	3	2	1				20	16	12	8	4				60
3	6	5	4	3	2	1			18	15	12	9	6	3			63
2	7	6	5	4	3	2	1		14	12	10	8	6	4	2		54
1	8	7	6	5	4	3	2	1	8	7	6	5	4	3	2	1	36

14–16 *Nebenbetrachtungen:*
$8 \frown 1$
$7 \frown 2 + 1$
$6 \frown 3 + 2 + 1$

8–10 *Rechts daneben:* Nota in progressionibus geometricis diversis summae sunt aequales si exponentes numeris reciproci *gestr. L*

27,8 tab.: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 7 (*LSB* VI, 1 S. 174). 20 54: Richtig wäre 56; der Fehler beeinträchtigt die beiden folgenden Differenzenschemata, wobei im rechten Schema ein weiterer Flüchtigkeitsfehler hinzukommt.

		0														
	5		0													
3		5		0												
	2		5		0											
1		3		5		8										
	3		2		5		8									8
3		0		3		13									13	
	0		2		2		21							2		21
1		0		1		15							1		15	
	1		2		1		36					1		1		36
1		1		3		14					1		3		14	
	0		1		4		50			1		0		4		50
1		1		3		10			1		2		3		10	
	1		2		7		60			2		2		7		60
3		0		1		3					0		1		3	
	4		2		6		63					2		6		63
3		4		3		9							3		9	
	1		6		9		54							9		54
5		3		9		18									18	
	6		9		18		36									36
3		9		18		36										
	9		18		0											
		18		0												
	18		0													
		0														

4. DE ARTIBUS RESOLVENDI PROGRESSIONEM IRREDUCTAM
[Juli – Dezember 1672]

Die folgenden Stücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang, wobei sich ihre Reihenfolge aus den Querverweisen ergibt. Alle vier Teilstücke sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie die physikalischen Aufzeichnungen Cc 2, Nr. 282, 484 A, B und 486 B-D, deren Entstehung aufgrund inhaltlicher Bezüge zwischen dem Erscheinen der Juli- und der Dezembernummer des *Journal des Sçavans* von 1672 anzusetzen ist. Am Ende von N. 4_4 äußert Leibniz die Absicht, sich im Werk von Gr. de Saint-Vincent über die Verhältnisrechnung zu informieren; in der *Accessio* von Ende 1672 (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 f.) hat er dies bereits getan. N. 4 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 25 Z. 1 – S. 26 Z. 13 u. S. 19 Z. 17–19).

4_1. PARS PRIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 148–149. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 149 v°, 148 r°. Bl. 148 v°, 149 r° leer.
Cc 2, Nr. 510 C

Cum artes invenerim progressionem irreductam resolvendi et componendi per aliam reductam, (quod est gradum struere ad magnum illud problema: dato fundamento progressionis invenire reductionem), easque in potentiis comprobaverim, paulo ante utilitas eius rei admonenda est. Pascalius cum summam invenisset potentiarum, quarum radices sunt progressiones arithmeticae, se tenere non potuit, quin triumphabundus ita concluderet: *Quantum haec notitia ad spatiorum curvilineorum dimensiones conferat, satis norunt, qui in indivisibilium doctrina tantisper* (tantillum) *versati sunt. Omnes enim omnium generum parabolae illico quadrantur et alia innumera facillime mensurantur*. Et

20 summam | tantum *gestr.* | invenisset *L* 21 arithmeticae, *(1)* gaudio abreptus exclamavit *(2)* se *L*

17 invenerim: N. 4_2. 19 comprobaverim: N. 4_3. 21+31,1 concluderet, subicit: Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, Nr. X *Potestatum numericarum summa*, 1665 [Marg.], S. 40 (*PO* III, S. 364).

subicit canones quosdam generales de applicatione ad spatia. Quid vero nunc dicemus, ubi quadrata et cubos omnis generis progressionum ac proinde omnis generis figurarum in unum colligere, sed et eorum terminos, et differentias cuiuscunque generis, et singulas infinitis modis reperire.

Reperire terminos, summas, differentias progressionis cuiusdam, eadem solutio absolvit. Pascalius non posset solvere problema, reperire terminos, summas, differentias progressionis constantis ex surdesolidis numerorum, quorum differentiae sunt duplum summae ex quadratis et surdesolidis deinceps ab unitate compositae. Et ex positis tamen principiis solvere hoc problema, et aliud quodcunque perfacile est.

Sunt quaedam progressiones quae non producunt in infinitum, sed terminantur, aliquando, quando incrementa sunt decrescentia, et tali mensura, ut concurrant aliquando incrementum et decrementum, et hoc fit in figuris linearum in se redeuntium, circulorum ellipsium, ovalium, et quorundam etiam spiralium. Quando vero incrementa et decrementa non sunt synodica, tunc lineae non sunt in se redeuntes, ut parabolae, hyperbolae[,] quaedam spirales, conchoeides. Potest linea fingi, quae neque in se redeat, neque tamen longius produci queat. Qualis scilicet dependeret ex applicatione ad circulum et ellipsem vel ovalem, vel aliam in se redeuntem.

Reperire progressionis terminos, summas[,] differentias, quae constet ex continue factis per multiplicationem numerorum naturalium, vel alterius cuiuslibet progressionis. Hoc esse difficile problema patet. Nec sane quicquam fingi potest universalius. Primum resolvenda est progressio, ex cuius terminorum continuis multiplicationibus producitur nova. Cum ita sint differentiae componentes inter se invicem, ut sunt termini, et data sit ratio terminorum, dabitur et ratio differentiarum, datis differentiis progressionis novae, earumque in infinitum continuandarum ratione, dantur omnes termini, differentiae[,] summae, seu integrae progressionis resolutio.

1 spatia. *(1)* Ego vero *(2)* Quid *L* 7 ex *(1)* radicibus *(2)* surdesolidis *L* 8 f. Et ... perfacile est *erg. L* 14 sunt *(1)* proportionalia, *(2)* synodica *L* 20 universalius. *(1)* Applicationem *(2)* Primum *L* 21 progressio | prima *gestr.* | , ex *L* 22 termini, *(1)* datis terminis unius resol *(2)* fiat ea ratio differentiarum *(3)* et *L*

1 nunc: N. 4₃. 6 Pascalius: Pascal beschränkt sich *a. a. O.* auf ganzzahlige Exponenten.

Quaerere, an et quando plures progressiones concurrant in unum terminum, similem, habet usum, ut sciamus quando figurae se osculentur, seu cum habent unam chordam seu rectam quae producta statim extra figuram proditura sit, communem ut duae hyperbolae se possunt osculari, hyperbolae et ellipses se possunt osculari, ita possunt duo solida se osculari, et habere non tantum unam chordam, sed et unum planum commune. Eodem modo quaeri ultra potest, quando plures, tres, quatuor, quinque figurae se osculentur, sed difficillimum est omnium problematum in hoc negotio, invenire an infinitae progressiones datae eodem tempore in terminum communem incidant, puto tamen solubile esse tale problema, modo infinitae illae progressiones habeant definitam relationem ad se invicem, seu comparationem cognitam. Et hoc est in effectu, quaerere an et ubi data progressione aliqua reperiri possit eius differentia universalis, et quaenam illa sit idque sine continuatione calculi, usque dum inveniat, qui modus solvendi non est perfectus, quia si nihil inveniamus non sumus certi an non reperturi fuerimus continuando.

Et si non dantur differentiae differentiarum primi gradus, an dentur secundi gradus, an tertii[,] an quarti aut an omnino. Puto hoc aliquando inveniri posse. Hoc qui invenerit scientiam progressionum, et nobilissimam arithmeticae partem ad apicem perduxerit.

Hoc ut inquiratur videndum an una progressio continue crescat, an vero nunc decrescat, nunc crescat. Si continue crescat, inveniri potest an aliquando an non concurrat. Inveniri enim potest quando terminum habeat, aut an unquam. Et si habet, an altera, eodem tempore, et si non omnes eodem tempore, nunquam concurrent illae infinitae.

De progressionibus ergo veris solutio est in potestate non de seriebus omnibus regularibus sed modo regredientibus modo progredientibus, quae scilicet eundem terminum habere possunt plus simplici vice.

Nota etiam quoad progressiones veras id quod dixi non sufficit. Neque enim est terminus datus. Igitur tantum videndum est, cum progressiones duae diversae, verae seu continue crescentes vel decrescentes aliquando maxime sibi fiant propinquae, videndum an in eundem terminum incidant, an non; tempore maximae propinquitatis, quae certe determinari potest. Et si incidunt, an et sequentes. Sed de seriebus in universum quae scilicet progressiones non sunt, sed sunt progressiones regressionibus mixtae. Nihil est hoc problemate difficilius. Si quis tamen inquirendi sibi patientiam sumat, is inquirere

1 an et *erg. L* 2 habent *(1)* unum diametrum, seu lineam *(2)* unam *L* 6 osculentur, *(1)* item quando se osculantur, an *(2)* sed *L* 7 invenire *(1)* infinitas progressiones eodem termino incidentes *(2)* an *L*

debet de omnibus approximationibus duarum progressionum in genere, an aliquando coincidant, an vero ea necesse sit coincidere nunquam, et si aliquando coincidant, an omnes aliarum quoque termini coincidant eodem tempore.

4_2. PARS SECUNDA

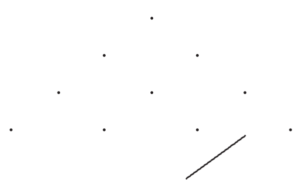
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 150–153. 2 Bog. 2°. 4 S. Textfolge Bl. 151 v°, 150 r°, 153 v°, 152 r°. Bl. 150 v°, 151 r°, 152 v°, 153 r° leer. Die Zusammengehörigkeit der Bögen ist durch eine Kustode gesichert.
Cc 2, Nr. 510 D

Nota ex terminis item calculari possunt omnia: differentiae, scilicet summae, termini sequentes. Sed differentiae et summae plurimae tam praecedentes quam sequentes, quae continentur recta differentiis componentibus parallela ex termino ultimo cognito ducta non possunt produci nisi per divisiones quoque et subtractiones, at differentiae primae omnia producunt per additionem et multiplicationem, methodo facili et universali.

Ad haec demonstranda fieri debet triangulum idque non numeris, sed literis priores numeros continentibus plenum. Ut fiat demonstratio[:]

---

11 *Daneben:*



1 debet | regulas universales *gestr.* | de *L* 10 summae *(1)* et termini praecedentes non nisi *(2)* plurimae *L* 11 ex *(1)* terminis cognitis duct *(2)* termino *L* 12 quoque *(1)* additionesque. At *(2)* et *L*

o				
d	do			
c	cd	cd		
		do		
b	bc	bc	bc	
		cd	cd	
			cd	
			do	
a	ab	ab	ab	
		bc	bc	ab
			bc	bc
			cd	bc
				cd
				bc
				cd
				cd
				do

Haec tabula monstrat dato uno termino omnes alios terminos, summas, differentias intra idem triangulum comprehensas invenire et omnes in infinitum, si differentiae componentes sunt finitae, aut differentiae saltem componentes, secundi aut tertii aut alicuius gradus sunt finitae, aut etsi infinitae sint, modo earum constructio[,] ratio, progressio, series, definita sit.

Deberet alia construi tabula summarum tam terminorum, quam differentiarum. Sed hoc opus non est, iungantur solum in unum conspectum, iam summata sunt in tabula, neque enim alia eorum summa fieri potest quam dispersa simul scribere.

Sed alia penitus tabula constituenda est fundamenti. Et quidem fundamenti aut progressionis ipsius aut fortasse alterius hanc componentis, qualis est series aliqua differentiarum primi aut alterius gradus. Sed quia cum hac progressione componente eodem modo procedendum est, quo cum prima ideo solum meretur nova tabula constitui non iam ex differentiis componentibus, sed ex fundamento progressionis sumta.

1–17 *Schema zunächst aus den sechs Grundelementen a, b, c, d, e, o aufgebaut, dann e jeweils in o korr. und überzählige Elemente gestr. L* 19 f. differentiae | primae *erg. u. gestr.* | componentes *erg.* | sunt *L* 22 f. sit. *(1)* Debet *(2)* Deberet *L* 29 solum *(1)* considerandum est, quando *(2)* meretur *L*

Nota termini eiusdem distantiae a primis sunt inter se proportionales, seu ut unus est ad unum sibi respondentem seu eiusdem altitudinis seu latitudinis, ita et alius. Nota progressionis triangulum est aequilaterum, basis eius esto longitudo, latus eius esto latitudo: at profunditas esto computanda differentiis secundi gradus. Et haec crescit ut solida ultra cubum imaginatione.

Termini eiusdem latitudinis et diversae longitudinis, aut eiusdem longitudinis[,] diversae latitudinis sunt proportionales, seu eandem habent rationem. Sed ut est *cd* ad [*cddo*]. ita est *bc* ad *bccd*. I m o m a l e : e a n d e m q u i d e m h a b e n t c o m p a r a t i o n e m , s e d n o n e a n d e m r a t i o n e m. Magnum inter haec discrimen. Nulla hic vera ratio reperiri potest cum omnia additionibus transigantur.

Quaelibet differentia radicalis (imo in genere quilibet terminus) duos radios habet alterum perpendicularem, alterum obliquum descendentem in quem radiat. Et quilibet radius a quolibet termino intermedio eodem modo reflectitur in duos radios duobus illis directis parallelos. Numerus radiorum concurrentium, facit numerum componentium sumendorum. Sed cum radius obliquus cum priore coincidat, ideo eius ratio non habenda, sed loquendum solum cum eo quem parallele reflectit cum eo, qui ad se non inciderat. Hinc quia plures radii reflexi concurrunt in unum punctum inde additio sequentium. Cogitandum autem est, duos radios semel unitos, manere semper unitos.

Nunc de fundamento progressionis. Fundamentum progressionis idem est quod connexio quantitatum, id est modus inveniendi quantitatem data quantitate, quod fundamentum si aliquoties continuetur[,] tota quantitatum series dicitur progressio. Vo-

1 Nota. | ut est unus *streicht Hrsg.* | *(1)* terminus primi ordinis *(2)* termini *(a)* ordinum *(b)* eiusdem *L* 2 seu latitudinis *erg. L* 2 f. Nota *(1)* altitudinem vocare possum distantiam a terminis progressionis, *(a)* latitudinem *(b)* longitudinem distantiam a *(2)* progressionis *L* 8 cdde *L ändert Hrsg.* 10 f. transigantur. *(1)* Ratio commoda inquirendi in differentiam universalem, ne *(2)* Quaelibet *L* 16 f. inciderat. *(1)* Sed et idem radius ex *(2)* Hinc *L* 17 quia *(1)* in cddo *(a)* concurrunt per exemplum plura d. *(aa)* ideo *(bb)* seu plures radii, hinc iam *(b)* formantur *(2)* plures *L* 19 f. quod *(1)* comparatio quantitatum *(2)* connexio *L*

1 f. Diese Aussage ist unrichtig, was Leibniz im nächsten Absatz selbst bemerkt.

cem satis propriam ad hunc transitum exprimendum non reperio. Fortasse intererit ipsum nomen p r o g r e s s i o n i s adhibere; et progressionem definire modum quo quantitas invenitur data alia quantitate. Nam ratio non nisi progressio geometrica est. P r o g r e s s i o seu modus educendi quantitatem ex quantitate est, vel addendo vel subtrahendo, vel addendo simul et subtrahendo, et vel addendo plus quam subtrahendo, quo casu progressio est a s c e n s u s , vel subtrahendo plus quam addendo, quo casu progressio est d e s c e n s u s [,] vel neutrius excessu determinato, quo casu progressio est f l u c t u a t i o. Porro additio aut subtractio est numeri aut determinati per se, aut determinati per aliam progressionem, et huius rursus aut per se aut per aliam progressionem in infinitum. Hinc habemus p r o g r e s s i o n e m , p r i m i s e c u n d i t e r t i i e t c. g r a d u s. In qualibet progressione dantur t e r m i n i , dantur d i f f e r e n t i a e , dantur d i f f e r e n t i a e d i f f e r e n t i a r u m , seu d i f f e r e n t i a e 2 d a e , t e r t i a e etc. Dantur s u m m a e .

Porro t r i a n g u l u m p r o g r e s s i o n u m est aggregatum ex terminis omnibusque differentiis omnium graduum, terminis in linea recta, differentiis inter duos terminos collocatis. Termini sunt b a s i s t r i a n g u l i , differentiae eiusdem gradus sunt b a s i

---

1 f. *Am Rande:* Loco progressionis poterit generale nomen esse p r o d u c t i o , dato enim respondet p r o d u c t u m. Producti species sunt[:] summa residuum; f a c t u s , q u o t i e n s. P r o d u c e n t e s sunt: componentes seu p a r t e s , subtrahentes, seu e x -partes. F a c t o r e s , divisor et dividens seu t e r m i n i r a t i o n i s. Residuum simul et componens d i f f e r e n t i a est. Quod si a n t e c e d e n s est maius est e x c e s s u s si minus d e f e c t u s. Q u o t i e n s et f a c t o r est r a t i o. Ratio est aequalitatis, minoritatis, maioritatis.

Nota ut fractiones seu rationes, faciunt separatas velut species possunt addi subtrahi multiplicari dividi, et fractiones non simplices tantum, sed et continuatae, ita, progressiones quoque, ita ut quivis terminus, quaelibet summa, quaelibet differentia ad aliam progressionem seu constructionem vel productionem habent datam, imo eadem methodo productionum universali etiam rationes, ad aliam datae productionis fieri possunt etsi supputationis methodi speciales.

16 collocatis. *(1)* Termini et differentiae parallelae sunt *(2)* Termini *L* 19 q u o t i e n s. *(1)* seu ratio p r o d u c e n t i u m species sunt *(2)* P r o d u c e n t e s *L*

parallelae. Lineae basi parallelae continuo decrescunt unitate. Triangulum progressionum est aequilaterum. Basi parallelae possunt etiam dici bases; sunt enim termini alterius progressionis. Omnes enim differentiae progressionum sunt progressiones homologae, ut latera in triangulo homologa appellamus. Pluribus progressionibus homologis in eodem triangulo aequilatero positis, differentiae duorum primorum, primae secundae tertiae progressionis, cadunt in latus prius, duorum secundorum terminorum primae 2$^{\text{dae}}$ tertiae progressionis, cadunt in latus prius homologum secundum, duorum tertiorum in tertium etc. Similiter contra latus posterius homologumque ei secundum tertiumque constituunt series differentiarum duorum ultimorum terminorum, aut penultimorum, aut antepenultimorum, etc. ex diversis progressionibus.

Summa terminorum unius trianguli progressionum est summa progressionis arithmeticae ab 1. usque ad numerum terminorum baseos trianguli. Nam in eodem triangulo aequilatero quodvis latus aut quaevis basis parallela est semper minor praecedenti unitate. Nota latus aut basis parallela est tota: ut ad *a. b. c. d. o.* parallela est *ab. bc. cd. do.* at homologa utrinque una minor seu *bc. cd.* ita triangulo maiori: *a. d. abbbcccd.* homologum est: *bc. cd. bccd.* At simile tantum non etiam homologum *a. b. ab.*

Quodlibet triangulum aequilaterum, differt a simili non homologo proxime minori numero terminorum, est numero postremo latere parallelo unitate [maius]. Si triangulum est homologum differt tribus talibus numeris. Simile enim differt solum uno latere, homologum tribus.

Fundamentum iam omnium demonstrationum circa additiones subtractionesque in progressionibus hoc unum est: Ex termino antecedente et differentia interposita immediatis componitur terminus sequens. Et similiter ex termino sequente immediato ademta differentia interposita immediata, relinquitur terminus procedens.

3 f. progressiones *(1)* componentes *(2)* interiectae *(3)* parallelae pluribus progressionibus parallelis *(4)* homologae *L* 6 prius *erg. L* 7 latus *(1)* posterius priori homologorum *(2)* prius *L* 9 f. differentiarum *(1)* ⟨plurium⟩ ultimo *(2)* duorum *L* 12 trianguli | aequilateri *gestr.* | progressionum *L* 14 basis *(1)* homologa *(2)* parallela *L* 19 non homologo *erg. L* 20 terminorum, *(1)* qualis *(2)* quantus est numerus *(3)* est *L* 20 maior *L ändert Hrsg.* 24 f. differentia *(1)* immediata superstante *(2)* interposita *L* 26 immediato *erg. L* 26 differentia *(1)* superest *(2)* interposita *L* 27–38,1 procedens. *(1)* Et quia partes *(a)* primi sunt *(b)* partis sunt partes totius *(2)* Termini *L*

Termini omnes ordinis dati (ut tertii) omnium progressionum parallelarum, componuntur ex omnibus terminis ordinis praecedentis, (exempli causa ex secundis) seu omnes termini secundi componuntur ex omnibus primis, et omnes tertii ex omnibus secundis etc. eiusdem trianguli.

Demonstratio est facilis. Componitur enim terminus primus ordinis dati ex primo et secundo praecedentis, et secundus ordinis dati ex secundo et tertio praecedentis, et tertius ordinis [dati] ex tertio [et] quarto, et ita porro. Cum ergo terminus novus ordinis sequentis semper desideret unum veterem et unum novum ordinis praecedentis, hinc tota series, ordinis sequentis, non desiderabit nisi seriem praecedentis unitate maiorem (ut supra ostensum est), ab eadem basi incipientem et in eodem triangulo desinentem, id est omnes termini ordinis sequentis ad sui compositionem non desiderant nisi omnes praecedentis, intra idem triangulum.

Omnes termini ordinis dati, componuntur ex omnibus terminis cuiuscunque ordinis praecedentis v. g. *abbc.* $-$ *cddo* componi potest vel ex *ab* $-$ *do.* vel ex *a* $-$ *o.* Cum enim componantur illi ex immediate praecedentibus, et hi rursus ex immediate praecedentibus, et compositi componantur ex componentibus componentium, etiam illi ex immediate praecedentibus componentur.

Omnes termini sequentium ordinum eiusdem trianguli, componuntur ex omnibus terminis cuiuscunque ordinis praecedentis. Si enim omnes ordinis dati per prop. praec., ergo omnes omnium ordinum.

Omnes termini totius trianguli componuntur ex terminis ordinis primi. Sunt enim omnes termini totius trianguli aut ordinis ipsius primi, ergo ex ipso, aut aliorum sequen-

---

1 *Am Rande:* Ordo terminorum.

Termini ordinis primi, secundi. Differentiae ordinis primi[,] secundi.

1 omnes *(1)* sequentes *(2)* ordinis *L* 1 f. parallelarum, | ordinis sequentis, *gestr.* | componuntur *L* 4 etc. *erg. L* 4 f. trianguli. *(1)* Omnes *(2)* Demonstratio *L* 7 praecedentis *L ändert Hrsg.* 7 et *erg. Hrsg.* 9 f. (ut supra ostensum est) *erg. L* 10 et ... desinentem *erg. L* 13 ex *(1)* praecedentibus *(2)* praecedentium ordinum *(3)* omnibus *L* 15 illi *erg. L* 18 ex *(1)* ordine praecedente *(2)* omnibus *L* 19 per prop. praec. *erg. L* 21 termini *(1)* sequentium *(2)* totius *L*

---

10 supra: s. o. S. 37 Z. 12–15.

tium, sed termini ordinum sequentium componuntur ex terminis ordinis antecedentis dati per prop., qualis est ordo primus ratione omnium caeterorum.

Et ideo terminos ordinis primi possumus appellare: terminos componentes seu latus prius. Si contingat in aliquo triangulo progressionum utcunque continuato, differentias cuiusdam ordinis, (ut differentias primas secundas seu differentias differentiarum, item tertias etc.) esse semper inter se aequales seu dari differentiam universalem, tota progressio utcunque continuata in infinitum componetur ex terminis finitis ordinis primi a basi seu a termino primo ipsius progressionis, usque ad ipsam differentiam universalem.

Continuato enim utcunque triangulo, semper ex latere primo sequentia omnia componentur. Iam continuato utcunque triangulo, in casu nostro lateri primo, (et omnibus aliis,) nihil accedit nisi 0. cum enim repertae sint differentiae omnes aequales inter se eiusdem ordinis. Ergo omnes earum differentiae novae per continuationem ipsis superstruendae erunt 0. quae nihil addunt, quasi ergo nihil accederet, sequentia omnia ex antecedentibus seu ex latere primo, utcunque non continuato, inutilis enim est continuatio, cum non nisi 0. producat, componentur. Hoc est theorema maximi momenti.

Quilibet terminus est radiatione directa in omnibus terminis sequentibus in eadem cum ipso linea basi parallela constitutis, seu in omni progressione, terminus praecedens inest omnibus sequentibus.

Cum enim ea linea contineat seriem progressionum, sit autem in omni serie progressionum terminus sequens maior antecedenti continue. Iam omnis numerus [minor] inest

---

6 *Auf dem linken Rand:*

$$\begin{array}{rr} 6 & 8 \\ 4 & 4 \\ \hline 10 & 12 \end{array}$$

Darunter:

$$\begin{array}{cc} . & . \\ . & . \\ . & . \\ . & \\ . & \end{array}$$

2 per prop. *erg. L* 4 f. differentias *(1)* eiusdem *(2)* cuiusdam *L* 6 seu ... universalem *erg. L* 17 f. seu ... sequentibus *erg. L* 20 maior *L ändert Hrsg.*

[maiori], ergo terminus datus omnibus sequentibus eiusdem lineae basi parallelae inerit. Idem sic enuntiari potest:

Quilibet terminus est radiatione reflexa, in omnibus terminis omnium linearum, quibus ii termini insunt, quibus ipse inest. Est enim pars partis, pars etiam totius. Nota hic ducantur rami plurium linearum, sive colore sive aliis modis distinctarum. Idem sic enuntiari potest, terminus datus inest in omnibus terminis, omnis progressionis; et omnis seriei differentiarum in terminos transeuntium, quibus alius numerus inest, cui inest ipse. Hinc sequitur etiam illis inesse, ad quos ipse radius reflexionis reflexus pervenit.

Nota hae propositiones verificari [possunt] etiam in illis seriebus regularibus, in quibus aliquando crescunt termini, seu quae propriae progressiones non sunt, analogia quadam, fingendus enim est additus sequenti terminus antecedens decrescens ad calculum continuandum, et ipsemet pro differentia seu termino progressionis uno gradu altioris, eiusdem seriei differentiarum componentium habendus est. Nec alia inde confusio sequetur calculi, quam ut termino eiusmodi quaerendo adhibeantur eae regulae, quae eius differentiae quaerendae adhiberentur. Posset idem transigi per numeros n i h i l o m i n o r e s ; et omnino non magis turbare nos debet imaginaria subtractio maioris a minore, quam imaginaria divisio minoris per maius.

---

2 f. *Neben dem gestrichenen Text, nicht gestrichen:* L i n e a v e r s u s b a s i n i n c l i n a t a seu series differentiarum. Genera. Series. Linea terminorum linea differentiarum, linea differentiarum et terminorum.

1 minori *L ändert Hrsg.* 2 f. potest: | Quilibet terminus est radiatione directa in omnibus *(1)* lineis *(2)* terminis in eadem cum ipso linea *(a)* basi parallela *(b)* versus basin inclinata constitutis *(aa)* . Quilibet terminus *(aaa)* componitur ex omnibus terminis praecedentibus eiusdem progressionis, addita differentia a postremo. *(bbb)* continet quemlibet terminum praecedentem eiusdem progressionis, *(bb)*, vel quilibet terminus continetur in omnibus terminis sequentibus, quorum differentia est *(aaa)* primi *(bbb)* cuiuscunque gradus, scilicet sive differentia sit sive differentiae differentia, etc. *gestr.* | Nam linea illa versus basin inclinata, continet omnes terminos magis progressos, quorum differentia est terminus datus. Iam *(aaaa)* omnes termini maiores quorum *(bbbb)* omnis differentia inest termino maiori cuius differentia aut differentiae differentia est quocunque gradu. *streicht Hrsg.* | Quilibet *L* 3 in *(1)* omnibus lineis *(2)* omnibus *L* 6 terminis *(1)* omnium progressionum, et omnium differentiarum *(2)*, omnis *L* 7 seriei *(1)* differentiarum *(2)* differentiarum *(3)* componentis *(4)* lineae *(5)* differentiarum *L* 9 Nota *(1)* haec propositio verificari potest *(2)* hae propositiones verificari | potest *ändert Hrsg.* | etiam *L* 14 ut *(1)* calculus *(2)* termino *L*

Quilibet terminus radiat in omnes terminos trianguli progressionis demtis iis, qui sunt progressione eius superiores, et serie differentiarum in terminos transeuntium, cui ipse inest, anteriores seu in terminos inter has duas lineas comprehensos. Vel quod idem est: quilibet terminus radiat per triangulum rectangulum inversum, seu basin habens erectam cuius basis in infinitum producibilis est ipsa progressio, et hypotenusa in infinitum producibilis est ipsa series differentiarum transeuntium. Poterat loco trianguli nominari sector circuli, vel quia linea interminata spatium quodcunque. Facilis est demonstratio, quilibet enim terminus in progressione non reflectit nisi in linea parallela et aequali seriei differentiarum transeuntium, et quilibet terminus seriei differentiarum transeuntium, non reflectit nisi in linea parallela et aequali lineae progressionis, hae propositiones primum demonstrandae. NB.

4_3. PARS TERTIA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 146–147. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 147 v°, 146 r°. Bl. 146 v°, 147 r° leer.
Cc 2, Nr. 510 A

Progressiones addere subtrahere, multiplicare dividere, rationes assignare, tertiam, mediam, quartam proportionalem invenire, progressionem invenire quae ad datam rationem habeat datam (supposita proportionis reductione ad differentiam universalem;) id est ut omnes termini sint ad omnes terminos respondentes modo praescripto.

Si quadratum aliamve potentiam progressionis datae, aut etiam radicem progressionis datae id est progressionem cuius omnes termini ad omnes terminos alterius respondentes hoc sint modo, agendum est ut fit, cum radices eorum extrahere volumus, quae

---

1–3 *Am Rande:* NB. Rectius in rhombo, si ipsum triangulum relinquas. NB.

3 seu . . . comprehensos *erg. L* 4 triangulum *(1)* isosceles *(2)* rectangulum *L* 5 producibilis *erg. L* 6 transeuntium *(1)* , seu series compositionis *(2)* . Poterat *L* 9 transeuntium *erg. L*
16 *(1)* Proportiones *(2)* Progressiones

dantur in factoribus, ut radicem extrahere de $5 \frown 5$. seu radicem extrahere de $2 \frown 8$. Quod an per binomia fieri possit dubito, ideo de radicibus progressionum loquendum non est.

		6					3					9		
	4		10			2		5			6		15	
8		12		22	4		6		11	12		18		33

Nota ut ad progressionem datam datasve alia qualem poscimus constituatur, non est necesse differentias componentes datae datarumve esse primi gradus, sufficit differentias componentes quaesitae etiam assumi eiusdem gradus. Quid si vero duae pluresve sint progressiones, in unum addendae, vel in se invicem ducendae, resolutae quidem, sed differentiarum componentium diversi gradus, reducendae sunt ad unum gradum communem differentiarum, quod fieri potest non difficulter, quia differentiis componentibus primi alteriusve gradus definitis, inveniri possunt definitae differentiae 2^{di} gradus. Quemadmodum ergo in fractionum additione et subtractione ad communem [nominatorem], et in potestatum algorithmo ad communem potentiae gradum, ita, hic ad communem differentiae gradum reducendae sunt progressiones omnes. Hoc facto licebit facere progressionibus pene quicquid numeris, nec tantum progressioni addere subtrahere multiplicando dividendo applicare numerum, sed et aliam progressionem; ut progressionem

---

1 *Dazu am Rande:*

		25		
	16		[41]	
9		25		[66]

2 *Darunter:*

Imo fortasse	$9 \frown 9$ f. 81.	3	9
	$3 \frown 3$ f. 9.	3	3
		$\overline{9}$	$\overline{27}$

8 pluresve *erg. L* 11 quod *(1)* ita fieri potest, cum *(2)* fieri *L* 11 quia *(1)* omnes differentiae componentes secundi grad *(2)* differentiis *L* 13 f. communem | numeratorem *ändert Hrsg.* |, *(1)* ita hic ad communem differentiarum gradum, *(2)* et *L* 20 31 *L ändert Hrsg.* 21 56 *L ändert Hrsg.*

in progressionem ducere; aut etiam plures. Ita habebimus progressionum potestates, seu gradus, progressiones rectas, planas, solidas seu recto planas, plano planas, plano solidas, solido solidas, et sic in infinitum. Eodem modo licet progressiones progressionibus dividere. Notabile autem est tantum descendi posse infra rectam quantum supra rectam, ut si rectam recta aut plano [dividas] potest descensus ab ascensu distingui per s u b : v. g. si rectam dividas per rectam est subplanum, uti si multiplices est planum. Et si subplanum dividas per planum producis rectam, et ita de caeteris.

Si progressionis datae differentias componentes multiplices per se ipsas, et numeros multiplicantes itidem per se ipsos, producetur nova progressio cuius omnes termini sunt quadrata praecedentium respondentium.

Eodem modo et cubos, et quadrato-quadrata etc. datae progressionis constitues. Item facere poteris, ut si una progressio sit quasi cubus, altera quasi quadrato-quadratum, si scilicet radix cubica unius investigetur et per eam ipsa multiplicetur. Hoc amplius quomodo resolvemus hoc problema: progressionem invenire cuius omnes termini sint quadrata, vel cubi, vel quadrato-quadrata etc. deinceps ab unitate. Vel in genere progressionem invenire cuius fundamentum sit datum, seu dato fundamento invenire differentias componentes.

Hoc problema capitale est, et inter apices arithmeticae iure merito habendum. Quanquam autem plenam huius solutionem nondum repererim, tamen quorum ope in multis, ac certe plerisque problematis satisfieri possit. Ut ergo exemplo proposito insistam, invenire progressionem quadratorum aut cuborum, aut surdesolidorum, etc. Quod id agemus, cum surdesolida difficulter reduci possint in differentias componentes. Id ergo ita agemus, sumatur progressio numerorum naturalium seu deinceps ab unitate, et per problema praemissum quaeratur progressio, quae sit eius quadratum vel cubus et ea progressio dabit quaesitum. Cum autem differentiae componentes non sint nisi 1. semel quod non multiplicat ideo soli numeri multiplicantes in se ducuntur dicto modo. Eodem modo dabitur summa quadratorum, vel potentiarum omnis generis progressionis, quod est plane admirandum.

2 progressiones *(1)* lineares, pl *(2)* rectas *L* 5 divi *L ändert Hrsg.* 7 f. caeteris. *(1)* Si possum radices extrah *(2)* Si *L* 8 progressionis *(1)* terminos *(2)* datae *L* 9 f. sunt *(1)* aliorum *(2)* quadrata *L* 21 progressionem *(1)* , cuius *(2)* radicum ab unitate *(3)* quadratorum *L* 27–44,1 admirandum. *(1)* Pascalius, *(2)* Hinc *L*

5–7 s u b : Die folgenden Beispiele sind unstimmig.

Hinc non tantum summas, sed et terminos quaerere possumus, seu ipsorum quadratorum et cuborum etc. genesis detegitur, eodem modo radicum extractio ex converso; eodem modo invenitur summa radicum, dato cubo, summa cuborum dato surdesolido, non datis radicibus[,] et cubus dato surdesolido, et differentia potentiarum, vel proximarum vel remotarum. Eadem applicari possunt ad subpotentias, seu radices radicum. Eodem modo differentiae dantur potentiarum et subpotentiarum nec tantum propinquae, sed et remotae, nam differentiae sunt termini progressionis altioris, distantiae unitate minoris vel maioris, minoris sequente, maioris antecedente, et differentiae differentiarum sunt termini distantiae binario (ternario) maioris antecedente minoris sequente etc.

Et summae differentiarum sunt summae progressionis altioris, porro terminus aliquis componi potest modis innumerabilibus[,] id est non tantum ex differentiis componentibus primis, sed et ex secundis, et ex differentiis vel multiplicatis, vel in unum additis, vel aut multiplicatis, aut in unum additis, et calculus subduci potest, quot modis in eadem progressione componi possit terminus idem. Porro haec quae de quadratis et cubis et aliis potentiis aut subpotentiis dico in qualibet progressione radicum vera sunt, cum Pascalius solverit hoc problema tantum in progressione arithmetica radicum, credens se invenisse solutionem universalem.

4_4. PARS QUARTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 145 v°, 144 r°. Bl. 144 v°, 145 r° leer. — Auf Bl. 144 r° unten die später geschriebene Adresse von Leibniz' Hand: „Karolus Emanuel de Roucy, chez M. Arnaud".
Cc 2, Nr. 510 B

4 radicibus *(1)*. Hoc exempl *(2)* et *L* 7 differentiae | simplices *gestr.* | sunt *L* 7 f. distantiae ... antecedente *erg. L* 8 sunt *(1)* summae *(2)* termini *(a)* progressionis adhuc altioris *(b)* distantiae unitate binario *(c)* distantiae *L* 9 (ternario) *erg. L*

16 solverit: Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, Nr. X *Potestatum numericarum summa*, 1665 [Marg.] S. 34–41 (*PO* III, S. 341–367). 16 f. credens ... universalem: Für Potenzsummen *a. a. O.* S. 34 und S. 36 (*PO* III, S. 346 und S. 352). In seinem Handexemplar hat Leibniz dem Pascalschen Text auf S. 36 „in qualibet progressione" die Ergänzung „arithmetica" beigefügt. 21 Roucy ... Arnaud: Charles-Emmanuel, Marquis de Roucy de Sainte-Preuve gehörte zum Kreis um Antoine Arnauld.

Inveniendus est non tantum modus inveniendi numerum loci dati in progressione, sed et dato numero invenire locum eius, aut proxime minoris in progressione, ut fit extractione radicum. Difficile est solutu hoc problema seu hic regressus.

Terminus aliquis datus componitur ex omnibus terminis praecedentibus progressionis immediate superioris addito primo suae.

Ergo componitur etiam ex omnibus terminis etiam non immediate superioris sed toties repetitis, quot sunt termini praecedentes immediate superioris, ita tamen ut pro ultimo termino praecedente immediate superioris, sumantur omnes non immediate superioris, pro penultimo omnes demto uno, pro antepenultimo omnes demtis duobus etc. Summae cuilibet addendus terminus primus immediate superioris, semel. Summae addendus terminus primus ipsius progressionis in qua terminus quaeritur, toties, quot sunt termini progressionis immediate praecedentis.

Dato numero scire quorum cuborum aut ipse aut proxime minor differentia sit, reiciatur unitas, residuum dividatur per 6. Quotiens quaeratur in summis obliquorum trianguli arithmetici, habebis cubum cui additus numerus datus aut proxime minor facit alium cubum.

Differentia terminorum distantium, est summa terminorum progressionis immediate superioris. Possunt et sumi mediate praecedentes eadem cautione. Nam in genere progressio immediate superior homologa cautione praescripta, et pro distantiae ratione aucta, cuilibet inferiori homologae seu eiusdem trianguli aequilateri applicatae aequivalet.

Differentias differentiarum eiusdem termini seu distantiae invenire, hoc de primis non intelligitur quae datae intelliguntur, sed de sequentibus. Invenietur facile quia ita est sequens ad differentias componentes secundam et tertiam, uti est praecedens ad primam et secundam. Ideo sumantur summae trianguli arithmetici in hac distantia adhibendae, multiplicentur per differentiam primi a secundo, et altera per differentiam secundi [a] tertio, summa erit differentia quaesita. Eodem modo invenietur et differentia distantium, cognito tantum loco seriei.

1 tantum *(1)* invenire numerum loci dati, sed et invenire *(2)* modus *L* 4 terminis *(1)* differentiae *(2)* praecedentibus *L* 7 praecedentes *erg. L* 7 f. pro *(1)* primo termino immediate praecedentis *(2)* ultimo *L* 10 addendus *(1)* unus terminus *(2)* terminus primus *L* 10 semel. | Tot *streicht Hrsg.* | Summae *L* 11 f. sunt termini *(1)* unitates in p *(2)* termini *L* 14 unitas, *(1)* productum *(2)* residuum *L* 15 cui *(1)* superpositus *(2)* additus *L* 17 terminorum *(1)* propositionis *(2)* progressionis *L* 24 sumantur *(1)* termini tri *(2)* summae *L* 24 f. adhibendae, *(1)* iungantur in unum, productum dividatur erit differentia duorum terminorum *(2)* multiplicentur *L* 25 a *erg. Hrsg.*

Hinc inveniri potest methodus mirabilis extrahendi radicem cubicam. Scilicet numerus datus dividatur per 6. productus est numerus seriei, quaeratur in ea serie differentia termini praecedentis binario distantis a numero dato, is erit cubus producti. En rationem etiam mirabilem faciendi cubum. Sed ea non opus. Productum potius multiplicetur in se, bis, seu fiat cubus eius. Is subtrahatur a numero dato vel numerus datus ab ipso seu sumatur differentia, reiciatur unitas, residuum dividatur per 6. Productus quaeratur inter summas trianguli arithmetici transversas, sed hae summae sunt semper termini progressionis [arithmeticae] duplae. Huius ergo exponens est radix cubica quaesita. E. g. radix cubica de 216. dividatur per 6. f. 36. cubus de 36 est 1296. eius differentia de 216 est 1080. Habemus differentiam duorum cuborum, quaesiti et alterius, quaeritur iam distantia. Subtrahatur 1. residuum dividatur per 6. Quaeratur inter summas terminorum progressionis [arithmeticae] duplae, inde ab exponente cubi inventi retro vel ante, retro si minor est[,] ante si maior quaesito summa exponentium, et terminorum differentia

---

9 *Nebenrechnung auf der Gegenseite:*

$$\begin{array}{r} 36 \\ 36 \\ \hline 216 \\ 108 \\ \hline 1296 \\ 216 \\ \hline 1080 \end{array}$$

1 f. Scilicet *(1)* numerus datus minuatur unitate productum *(2)* numerus *L* 5 f. dato | vel ... differentia, *erg.* | *(1)* a *(a)* producto *(b)* residuo *(2)* reiciatur *L* 7 inter *(1)* numeros naturales *(2)* summas *L* 8 geometricae *L ändert Hrsg.* 10 1080 | − 1. est 1079 *gestr.* | . Habemus *L* 11 Subtrahatur 1. *(1)* productum *(2)* residuum *L* 11 terminorum *erg. L* 12 geometricae *L ändert Hrsg.* 13 et *(1)* numerus ipse *(2)* differentia cuborum *(3)* terminorum *L*

---

9 1296 ist nicht Kubus, sondern Quadrat von 36. Der Fehler vererbt sich auf S. 47 Z. 3. Auf S. 47 Z. 8 und in der zugehörigen Nebenrechnung wird dann mit dem richtigen Wert gerechnet. 10–13 In Analogie zu S. 45 Z. 13–16 entwickelt Leibniz hier ein Verfahren zur Bestimmung der Differenz zweier Wurzeln, das in dieser Verallgemeinerung nicht zulässig ist.

cuborum, summa est, est differentia radicum. Ecce mirabilem modum dato uno termino dataque eius differentia ab alio termino distantiam invenire. Sed pergamus ita in exemplo:

$$1080 - 1.\ \text{est}\ \begin{array}{c}\cancel{4}\cancel{5}5\\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{7}\cancel{9}\\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\end{array} \ ⨍\ 179\frac{5}{6}.$$

Video opus esse primum solvere hoc problema: data summa differentiarum invenire summam homologam superiorem seu summam differentiarum differentiarum, cognito initio quidem, sed non quantitate distantiae terminorum. Imo fortasse carere possumus neglectis tuto unitatibus quot sunt radices quod adhuc ignoramus; ante divisionem per 6 dividendis, dividatur ergo per 6. $\begin{array}{c}\cancel{2}\ \ \ 4\\ \cancel{4}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{0}\\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\end{array}\ ⨍\ 7406.$

Productum neglectis superfluis quaeratur inter summas terminorum progressionis [arithmeticae] duplae inde a termino cuius exponens est. Imo cum non nisi duobus terminis secundo et tertio opus sit, ideo multiplicantur termini non nisi per

$$\begin{array}{ccc} 3+3. & 4+6. & 10+10.\\ (6) & (10) & (20)\end{array}$$

Quaeres ergo numeros triangulares, seu eorum tabulam deinceps ab unitate. Quaere exponentem ordinis, coincidentem cum radice cubi novi inventi hoc loco 36. Ab hoc retro

---

8 *Nebenrechnung auf der Gegenseite:*

$$\begin{array}{r} 1296\\ 36\\ \hline 7776\\ 3888\\ \hline 46656\\ 216\\ \hline 46440 \end{array}$$

7 unitatibus | detrahendis *gestr.* | quot *L* 9 f. geometricae *L ändert Hrsg.*

---

8 Leibniz dividiert 44440 statt 46440. 12 f. An dritter Stelle müßte es 5+10. bzw. (15) heißen.

summa numeros triangulares, donec summa fiat producto aequalis. Numerus exponentium erit distantia terminorum. Sed error fateor aliquis antecedere potest. Non ergo sufficit haec solutio. Error incidere potest, quoties triangulares extremi ambo non sunt maiores radice cubi inventi.

$\underline{1\,0\underset{.}{0}\,00\underset{.}{0}\,00\underset{.}{0}}$

Producta continuorum solvenda per potentias potius quam contra. Minimi sumatur potentia eius gradus quot sunt producti continuorum.

$$\begin{array}{rrr} 5 & 7 & 10 \\ 7 & & \\ \hline 350 & & \end{array} \qquad \begin{array}{rcr} 5 & & \\ 5 & + & 2 \\ 5 & + & 5 \\ \overline{125} & & \end{array} \qquad \begin{array}{rrr} 5 & 5 & 7 \\ 2 & 5 & 5 \\ \overline{10} & \overline{25} & \overline{35} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ 5 \\ \hline 245 \\ 10 \\ \hline 255 \end{array}$$

Nota procedendum penitus ut in constructione $\square^{\text{torum}}$ et aliarum potentiarum. Quae enim accedunt, binomia et residua faciunt.

Constructio cuiusque tabulae progressionum facile inventa si exponatur tabula numerorum naturalium deinceps ab unitate seu exponentium, erit differentia eius universalis 1. Quae non multiplicat, tractetur haec differentia eo modo quo fundamentum novae progressionis postulat, tractatis eodem modo si necesse est, ut in numeris figuratis seu potentiis fieri debet, habebimus terminos omnes. Ordines ergo numerici sunt progressiones fundamentales. Omnia miranda arithmeticae reducuntur in progressiones, cubi etc. non nisi progressiones.

Ut tabulam de differentiis differentiarum construxi, ita et tabula de rationibus rationum a me constructa est. Unde erunt rationes vel simplices vel compositae, et com-

2 aliquis | non tamen magni momenti *gestr.* | antecedere potest. *(1)* Imo credo nullum. Quia semper maximus terminus triangularis tantus est, *(2)* Non *L* 7 f. continuorum *(1)*, differentiae eorum continue a minimo ducantur in se invicem etc. *(2)* . 5 *L* 14 f. faciunt. *(1)* Reductio *(2)* Constructio *L* 22–49,2 Ut . . . rationum. *erg. L*

22 construxi: N. 4_2 S. 34 Z. 1–17. 23 a me constructa est: *a. a. O.*, vgl. aber S. 35 Z. 6–10.

positae variorum graduum. Erunt ergo rationes primi secundi, tertii gradus, consulenda quae Gregorius a S. Vinc. habet de ratiocinationibus rationum.

2 Gregorius a S. Vinc.: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647 [Marg.], Buch II, S. 51–166 und Buch VIII, S. 866–954.

5. DE DIFFERENTIIS PROGRESSIONUM DECRESCENTIUM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 205–206. 1 Bog. 2°. 3 S. Textfolge Bl. 206 r° (= Teil 1); 205 r°, 206 v° (= Teil 2). Auf Bl. 205 v° Nebenbetrachtungen zu Teil 1.
Cc 2, Nr. 511

Datierungsgründe: Leibniz kennt in N. 5 bereits die Summe der reziproken figurierten Zahlen. Wie aus den Querverweisen ersichtlich wird, ist das Stück vor N. 6 entstanden. N. 5 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 29 Z. 11–19).

[*Teil 1*]

P r o b l e m a m a g n u m : I n v e n i r e p r o g r e s s i o n e m i n i n f i n i t u m d e c r e s c e n t e m , c u i u s d i f f e r e n t i a s c o n t i n e a t p r o g r e s s i o d a t a i n i n f i n i t u m d e c r e s c e n s , q u a n d o i d f i e r i p o t e s t .

Ad progressionem quaesitam inveniendam, sufficit unum eius terminum invenire, exempli causa primum.

---

11 *Darüber:* Nondum explicui differentias generatrices per subtractionem.

11 | Ad hoc ut progressio data in infinitum decrescens contineat differentias alterius in infi *gestr.* | P r o b l e m a *L*

---

16 Nondum explicui: Leibniz befaßt sich damit in N. 6 S. 89 Z. 15–25.

		2					$\frac{3}{2}$	
			$\frac{1}{1}$					1
		1		$\frac{2}{3}$			$\frac{1}{2}$	
			$\frac{1}{3}$		$\left[\frac{27}{54}\right]$			$\frac{1}{4}$
		$\frac{2}{3}$		$\left[\frac{3}{18}\right]$		$\left(\frac{1}{4}\right)$	$\frac{2}{8}$	
			$\frac{1}{6}$		$\left[\frac{108}{1080}\right]$			$\frac{1}{10}$
$\left(\frac{1}{2}\right)$	$\frac{3}{6}$	$\frac{9}{18}$		$\frac{4}{60}$		$\left(\frac{3}{20}\right)$	$\frac{12}{80}$	
			$\frac{1}{10}$					$\frac{1}{20}$
$\frac{2}{5}$	$\left(\frac{24}{60}\right)$	$\frac{72}{180}$		$\frac{5}{150}$		$\left(\frac{1}{10}\right)$	$\frac{160}{1600}$	

1–9 *Nebenrechnungen*:

$\begin{array}{r}90\\18\\\hline 72\end{array}$ $\qquad \frac{2}{3} \times \frac{3}{8} \qquad \frac{16-9}{24} \qquad \begin{array}{r}16\\9\\\hline 7\end{array} \qquad \begin{array}{r}180\\32\\\hline 148\\\hline 840\end{array} \qquad \begin{array}{r}240\\80\\\hline 160\\\hline 1600\end{array}$

4 $\frac{7}{24}$ *L ändert Hrsg.* 5 $\frac{3}{8}$ *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{148}{840}$ *L ändert Hrsg.* 9 $\frac{2}{5}$ | $\left(\frac{12}{30}\right)$ *gestr.* | $\left(\frac{24}{60}\right)$ *L*

Triangularium summa est 1, pyramidalium $\frac{1}{2}$, triangulo-triangularium $\frac{1}{3}$, triangulo-pyramidalium $\frac{1}{4}$, etc.

At naturalium summa est 0, (quod praecedit 1,) seu infinitum, id est non possunt summari, etc.

Aliud est infinitum esse aliquid quod comparatur 0, aliud esse infinitis terminis expressum.

---

1 f. *Nebenrechnungen:* $\frac{4}{3} - \frac{3}{3} = \frac{1}{3}$ $\frac{5}{4} - \frac{4}{4} = \frac{1}{4}$

53,2–11

$\frac{3}{4}$	(*1*)	$-$	$\frac{1}{4}$		$0 - \frac{2}{4}$	(*2*)	*L*
$\frac{5}{36}$		$+$	$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{4}$	$0 - \frac{1}{36}$		
$\frac{7}{144}$		$+$	$\frac{9}{144}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{144} =$		$\frac{2}{144}$
$\frac{9}{400}$		$+$	$\frac{16}{400}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{7}{400}$		$\frac{17}{400}$
							$\frac{14}{14400}$
				etc.	etc.		
$\Vert$			$\Vert$	$\Vert$			
1		$=$	1	2	Ergo $\left(\frac{2}{4}\right) \frac{1}{2} + \frac{1}{36} \left(\frac{19}{36} = \frac{}{144} \text{ etc.}\right)$		

53,2 $\frac{1}{2}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 53,4 $\frac{1}{3}$ *gestr. L erg. Hrsg* 53,6 $\frac{1}{4}$ *gestr. L erg. Hrsg.* 53,8 $\frac{1}{5}$ *gestr. L erg. Hrsg.*

---

1 Triangularium summa: Die angegebenen Werte für die Summen der reziproken figurierten Zahlen sind richtig, wenn der erste Term, also jeweils 1, nicht mitgerechnet wird. 3 At naturalium summa: Ähnlich äußert sich Leibniz in der *Accessio*, *LSB* III,1 N. 2, S. 11 f.

$$
\begin{array}{cc|cccccccc|c}
\frac{1}{2} & \frac{2}{4} & \frac{4}{4} & 1 & & & & & & \multicolumn{2}{c}{\text{Radices de } \frac{1}{4}, \frac{4}{36} \text{ etc.}} \\
 & & & & & \frac{3}{4} & & & & \left[\frac{1}{2}\right] & \\
\frac{1}{9} & \frac{4}{36} & \frac{9}{36} & \frac{1}{4} & & & & & & & \\
 & & & & & \frac{5}{36} & & & & \frac{2}{6} & \left[\frac{1}{3}\right] \\
\frac{1}{24} & \frac{6}{144} & \frac{16}{144} & \frac{1}{9} & \frac{4}{36} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{7}{144} & \frac{2}{144} & \Bigg\} & \frac{9}{144} & \frac{3}{12} & \left[\frac{1}{4}\right] \\
\frac{1}{50} & \frac{8}{400} & \frac{25}{400} & \frac{1}{16} & \frac{9}{144} & & & & & & \\
 & & & & & \frac{9}{400} & \frac{7}{400} & \Bigg\} & \frac{16}{400} & \frac{4}{20} & \left[\frac{1}{5}\right] \\
 & \frac{10}{14400} & \frac{36}{14400} & \frac{1}{25} & \frac{16}{400} & & & & & & \text{etc.} \\
 & & & & & & \frac{14}{14400} & \Bigg\} & \frac{25}{14400} & & \\
 & & & & & \| & & & & & \\
 & & & & & 1 & & & & &
\end{array}
$$

1–12 *Links daneben*:

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{} \\
 & \frac{1}{6} \\
 & \frac{1}{18} \\
 & \frac{1}{40}
\end{array}
$$

Rechts daneben:

$$
\begin{array}{cc|ccc}
\frac{4}{4} & 1 & & & 1 \\
\frac{9}{36} & \frac{14}{36} & \frac{7}{18} & \frac{7}{36} & \frac{20}{} \\
 & \frac{24}{144} & & & \\
 & \frac{34}{400} & & & \\
 & 47 & & &
\end{array}
$$

9 Der fehlerhafte Nenner 14400 (statt 900) beruht auf der Berechnung von 36·400 (statt von 36·25) auf S. 54 Z. 5–7. Leibniz verwendet den Wert bis S. 54 Z. 3.

$$
\begin{array}{cc|cccccccccccc}
 & & \frac{1}{144} & - & 9 & = & \frac{8}{144} & - & 7 & = & \frac{1}{144} & - \; 7 \; = & \frac{6}{144} & \frac{1}{36} \\[6pt]
\frac{1}{100} & & \frac{4}{400} & & 16 & & \frac{12}{400} & & 9 & & \frac{3}{400} & & \frac{6}{400} & \frac{1}{100} \\[6pt]
\frac{1}{1600} & & \frac{9}{14400} & & & & \frac{16}{14400} & & & & \frac{5}{14400} & & \frac{6}{14400} & \frac{1}{3600}
\end{array}
$$

53,1–12 *Nebenrechnungen*:

$$
\begin{array}{r}
16 \\
9 \\
\hline
144
\end{array}
\quad 25 \qquad
\begin{array}{r}
36 \\
400 \\
\hline
14400
\end{array}
$$

Nebenbetrachtungen auf der gegenüberliegenden Seite:

$$
\begin{array}{cc}
\frac{1}{4} & \frac{9}{36} \\[6pt]
\frac{1}{9} & \frac{16}{144} \\[6pt]
\frac{1}{16} & \frac{25}{400} \\[6pt]
\frac{1}{25} & \frac{36}{14400}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c|c}
\frac{1}{36} & \\[6pt]
\frac{4}{144} & \frac{1}{[36]} \\[6pt]
\frac{4}{400} & \frac{1}{100} \\[6pt]
\frac{9}{14400} & \frac{1}{1600}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cc}
1 & \\[6pt]
 & \frac{7}{8} \\[6pt]
\frac{1}{8} & \\[6pt]
 & \frac{19}{27 \frown 8} \\[6pt]
\frac{1}{27} & \\[6pt]
\frac{1}{64} & \\[6pt]
\frac{1}{125} &
\end{array}
$$

1 $\frac{6}{144}$ | $\frac{1}{24}$ *gestr.* | $\frac{1}{36}$ *L* 10 3 *L erg. Hrsg.*

---

1 Das Minuszeichen steht für die Berechnung der Absolutbeträge. Leibniz rechnet fortlaufend und wiederholt Bruchstriche und Nenner, in der zweiten Zeile auch Minus- und Gleichheitszeichen, nicht.

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 4 & & 4 & & 4 & & & \\
 & & 3 & & 7 & & 11 & & 15 & & \\
 & 2 & & 5 & & 12 & & 23 & & 38 & \\
1 & & 3 & & 8 & & 20 & & 43 & & 81
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 1 & & 2 & & \\
 & 1 & & 2 & & 4 & \\
1 & & 2 & & 4 & & 8
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 16 & & & & \\
 & & & 8 & & 24 & & & \\
 & & 4 & & 12 & & 36 & & \\
 & 2 & & 6 & & 18 & & 54 & \\
1 & & 3 & & 9 & & 27 & & 81
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 81 & & & & \\
 & & & 27 & & 108 & & & \\
 & & 9 & & 36 & & 144 & & \\
 & 3 & & 12 & & 48 & & 192 & \\
1 & & 4 & & 16 & & 64 & & 256
\end{array}$$

Differentiae primitivae progressionis geometricae sunt termini progressionis geometricae unitate minoris. Et ideo differentiae progressionis duplae sunt radicales, progressionis triplae sunt quadratae, progressionis quadruplae sunt cubicae, quintuplae sunt quadrato-quadratae etc.

Sed quid si progressionis ratio sit fractio, ut $\frac{3}{2}$.

54,1–3 *Rechts von* $\frac{8}{144}$: $\frac{5}{9}$ $\frac{7}{36}$ $\frac{9}{100}$ *Rechts daneben:* $\frac{64}{3600} \,\Big|\, \frac{32}{1800}$

18 ut *(1)* $\frac{4}{3}$ *(2)* $\frac{3}{2}$ *L*

15–17 Vgl. N. 4_2 S. 35 Z. 1–5.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{1}{8} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{3}{8} & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{3}{4} & & \frac{9}{8} & \\
1 & & \frac{3}{2} & & \frac{9}{4} & & \frac{27}{8}
\end{array}$$

Eodem modo differentiae primitivae erunt termini progressionis eius rationis quae est data demta unitate. Et ideo eo casu sunt termini decrescentes.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{1}{4} & & \left[\frac{1}{8}\right] & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8} & \\
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{8}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccccc}
 & & & \frac{8}{27} & & & \\
 & & \frac{4}{9} & & \frac{4}{27} & & \\
 & \frac{2}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{2}{27} & \\
1 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{27}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & \left[\frac{1}{9}\right] & & & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{2}{9} & & \frac{4}{27} & \\
1 & & \frac{2}{3} & & \frac{4}{9} & & \frac{8}{27}
\end{array}$$

Hinc mirabile in progressionibus fractionum decrescentibus, progressio fractionis datae, et differentiae eius ab unitate sunt sibi mutuo generatrices.

6 decrescentes. | Et ita iterum sunt eorum differentiae primitivae, differentiarum primitivarum, termini progressionis unitate minoris, *gestr.* | *L* 8 $\frac{1}{4}$ *L ändert Hrsg.* 11 $\frac{1}{27}$ *L ändert Hrsg.*

$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$
	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$	
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$
	$\frac{1}{6}$		$\frac{3}{18}$	
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{10}$
	$\frac{1}{12}$		$\frac{4}{60}$	
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{20}$
	$\frac{1}{20}$		$\frac{5}{150}$	
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{35}$
	$\frac{1}{30}$		$\frac{6}{315}$	
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{21}$		$\frac{1}{56}$
	$\frac{1}{42}$			
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{28}$		
	$\frac{1}{56}$			
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{36}$		

NB. In omni generali in numeros inquisitione numerus omnis considerandus ut ratio seu fractio. Potest enim esse, at integer quoque fractio est subscripta unitate.

3–8 *Nebenrechnungen:* $\frac{2}{3}\ \frac{3}{2}\quad \frac{6}{6}\qquad\qquad \frac{4}{60} \times \frac{3}{2}\quad \frac{8}{180}\ \Big|\ \frac{1}{[22\frac{1}{2}]}$

18 $\frac{3}{2}$ *(1)* $\frac{4}{9}$ *(2)* $\frac{6}{6}$ *L* 18 2 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{aligned}
\frac{a}{b} &= \frac{a}{b}\\
\frac{i}{k} &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d}\\
\frac{l}{m} &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f}\\
\frac{n}{o} &= \frac{a}{b} - \frac{c}{d} - \frac{e}{f} - \frac{g}{h}
\end{aligned}
\qquad\qquad
\begin{aligned}
\frac{c}{d} &= \frac{ak-ib}{bk}\ldots \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{1}\\
\frac{e}{f} &= \frac{im-lk}{km} \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{4}\\
\frac{g}{h} &= \frac{lo-nm}{mo} \frown \frac{p}{q} = \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

etc.

$$\frac{akp-ibp}{bkq} = \frac{1}{1}.\quad \text{Ergo}\quad akp-ibp = bkq.$$

$$\frac{imp-lkp}{kmq} = \frac{1}{4}.\quad \text{Ergo}\quad 4imp-4lkp = kmq.$$

$$\frac{lop-nmp}{moq} = \frac{1}{9}.\quad \text{Ergo}\quad 9lop-9nmp = moq.\ 9lo-9nm = mo\frac{q}{p}.$$

$$\text{Ergo}\quad \frac{9lo-9mn}{mo} = \frac{q}{p}.$$

Universalius sicut, *mo* intelligatur multiplicari per 1, vel quisquis alius est datus numerator.

$$\frac{\text{num.quaes.1.}\frown\text{nom.quaes.ult.}\frown\text{numer.multipl.}-\text{num.quaes.2.}\frown\text{nom.qu.1.}\frown\text{num.mult.}}{\text{nom.quaes.1.}\frown\text{nom.quaes.ult.}\frown\text{nom.mult.}}$$

aequatur: $\dfrac{\text{numerat.dat.}}{\text{nominat.dat.}}$

num.qu.1. $\frown$ nom.qu.ult. $\frown$ num.multip. $-$ num.qu.ult. $\frown$ nom.qu.1. $\frown$ num.multipl. aequatur: nom. quaes.1. $\frown$ nom.quaes.ult. $\frown$ nom.multipl. $\frown$ $\dfrac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}}$

6–9 *Nebenrechnung*: num. $\square$.1.4.p − n.$\square$.2.3.p = 2.4.q.

---

16 Leibniz numeriert die Zähler und Nenner a, b, i, k usw. jeweils von $1-4$ durch, insofern ist das num. irreführend; das $\square$ steht für die Koeffizienten.

$$\text{num.q.1.}\frown\text{nom.q.ult.} - \text{num.q.ult.}\frown\text{nom.qu.1.} = \text{nom.quaes.1.}\frown\text{nom.qu.ult.}\frown \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}} \frown \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

$$\overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \smile \overline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} = \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

$$\frac{\text{num.qu.1.}\frown\text{nom.qu.ult.}-\text{num.qu.ult.}\frown\text{nom.qu.1.}}{\text{nom.quaes.1}\frown\text{nom.qu.ult.}} \times \frac{\text{num.dat.}}{\text{nom.dat.}} = \frac{\text{nom.multipl.}}{\text{num.multipl.}}$$

Necesse est ut ratio differentiae quaesitae ad fractionem datam, sit semper eadem.

$$\text{Ergo}\quad \frac{\frac{ak-ib}{bk}}{\frac{\cancel{1}}{\cancel{1}}} = \frac{\frac{im-lk}{km}}{\frac{1}{4}} = \frac{\frac{lo-mn}{mo}}{\frac{1}{9}} \text{ etc.} \quad \frac{ak-ib}{bk} = \frac{4im-4lk}{km} = \frac{9lo-9mn}{mo} \text{ etc.}$$

$$\begin{aligned}
\text{seu}\quad \text{diff. (1.)}\quad & \frac{\text{num. (I)} \frown \text{nom. (II)} - \text{num. (II)} \frown \text{nom. (I)}}{\text{nom. (I)} \frown \text{nom. (II)}} \quad = \\
\text{diff. (2.)}\quad & \frac{4\ \text{num. (II)} \frown \text{nom. (III)} - 4\ \text{num. (III)} \frown \text{nom. (II)}}{\text{nom. (II)} \frown \text{nom. (III)}} \quad = \\
\text{diff. (3.)}\quad & \frac{9\ \text{num. (III)} \frown \text{nom. (IV)} - 9\ \text{num. (IV)} \frown \text{nom. (III)}}{\text{nom. (III)} \frown \text{nom. (IV)}} \quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Diff. 4. pro 4 vel 9 fiat 16. Diff. 5. fiat 25. Diff. 6. sit 36 etc.

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II} - \text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{nom. I} \frown \cancel{\text{nom. II}}} = \frac{4\ \text{num. II} \frown \text{nom. III} - 4\ \text{num. III} \frown \text{nom. II}}{\cancel{\text{nom. II}} \frown \text{nom. III}}$$

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. I}} - \frac{\text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{nom. I}} = \frac{4\ \text{num. II} \frown \cancel{\text{nom. III}}}{\cancel{\text{nom. III}}} - \frac{4\ \text{num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. III}}$$

$$\frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. I}} = 5\ \text{num. II} - \frac{4\ \text{num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{nom. III}}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{\text{num. I}}{\text{nom. I}} & = & \dfrac{5\ \text{num. II}}{\text{nom. II}} & - & \dfrac{4\ \text{num. III}}{\text{nom. III}} \\
[(4)]\left(\dfrac{\text{II}}{\text{II}}\right) & = & [(13)]\left(\dfrac{\text{III}}{\text{III}}\right) & & (9)\left(\dfrac{\text{IV}}{\text{IV}}\right) \\
[(9)]\left(\dfrac{\text{III}}{\text{III}}\right) & = & [(25)]\left(\dfrac{\text{IV}}{\text{IV}}\right) & & (16)\left(\dfrac{\text{V}}{\text{V}}\right) \\
 & & \text{etc.} & &
\end{array}$$

5 f. etc. *(1)* seu substituendo pro num *(2)* seu *L*

Quaerenda ergo progressio decrescens cuius terminus datus sit aequalis differentiae sequentium duorum inter se contiguorum, modo praescripto multiplicatorum. Fortasse hoc praestant plures. ♃. Vereor ne hoc praestari possit, termino dato utcunque pro lubitu assumto.

59,13 $\frac{4 \text{ num. III}}{\text{nom. III}}$ $|=$ $\frac{\text{num. III}}{\text{nom. III}} + \frac{\text{num. I} \frown \text{nom. II} - \text{num. II} \frown \text{nom. I}}{\text{num. I} \frown \text{nom. II}} + \frac{\text{num. II} \frown \text{nom. III} - \text{num. III} \frown \text{nom. II}}{\text{num. II} \frown \text{nom. III}}$. Seu $\frac{\text{num. II}}{\text{nom. III}} + \frac{\text{num. I}}{\text{nom. I}} - \frac{\text{num. II}}{\text{nom. II}}; \frac{\text{num. II}}{\text{nom. II}} - \frac{\text{num. III}}{\text{nom. III}}$ *gestr.* | *L* 59,14 (4) *erg. Hrsg.* 59,14 (10) *L ändert Hrsg.* 59,15 (9) *erg. Hrsg.* 59,15 (17) *L ändert Hrsg.* 1 decrescens *erg. L* 1 terminus *(1)* primus *(2)* datus *L* 1 f. aequalis *(1)* differentiis quorumcunque *(2)* differentiae *L*

6. DE PROGRESSIONIBUS ET DE ARITHMETICA INFINITORUM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* mehrfach überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 163–164, LH 35 XII 1 Bl. 129–136. 5 Bog. 2°. 20 S., zweispaltig beschrieben. Zusätze in der rechten Spalte. Die Reihenfolge der Bögen ist durch Kustoden gesichert.
Cc 2, Nr. 527

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1 und N. 2 und ist, wie die Querverweise zeigen, nach N. 5 und vor N. 8 entstanden. Die Aussage S. 72 Z. 3 f. zur Summe der geometrischen Reihen weist darauf hin, daß N. 6 vor der Lektüre der einschlägigen Abschnitte bei Gr. de Saint-Vincent, die Leibniz in N. 7 und in der *Accessio*, Ende 1672, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 1–10, verarbeitet hat, verfaßt wurde. N. 6 gehört wahrscheinlich zu den Manuskripten, auf die Leibniz in seiner Stellungnahme für die Royal Society vom 13.II.1673 verweist (vgl. *LSB* III, 1 N. 4 S. 25 Z. 6–18). Das Stück schließt an die Überlegungen von *LSB* VII, 1 N. 3_1 an, wo die Ausgangsformel von Z. 18 erarbeitet wird. Diese Formel tritt auch in *LSB* VII, 1 N. 3_2 S. 9 Z. 6, N. 3_3 S. 13 Z. 17 u. ö. sowie N. 3_4 S. 17 Z. 12 auf. Die Stellung der Formel in N. 6 deutet darauf hin, daß das Stück nach *LSB* VII, 1 N. 3_1 und wohl auch nach N. 3_2 verfaßt ist; der etwas abgeänderte Ansatz, den N. 6 verfolgt, legt die Vermutung nahe, daß es außerdem auch nach N. 3_3 und N. 3_4 entstanden ist.

$$\overbrace{Rq \llcorner\llcorner\llcorner \underset{200}{2^q} - Rq \llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q} \frown \llcorner \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q} \lrcorner}^{\cancel{(Rq)}27} \quad \text{dividatur per } Rqq\, \underset{3\frac{2}{3}}{2r^q}$$

$$Rq\, \frac{\cancel{Rq} \llcorner\llcorner\llcorner \underset{200}{2^q} - Rq \llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q} \frown \llcorner \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q} \lrcorner}{(Rqq\, \underset{4}{2r^q})\, Rq\, 2^q}$$

$$Rq\llcorner\left(\frac{\underset{200}{2^q}}{Rq\, 2^q} = \right) Rq\, 2^q - Rq\, \frac{((Rq)\llcorner\llcorner \underset{200}{2r^q}) \frown \underset{200}{2r^q} - \underset{50}{2a^q}}{((\cancel{Rq})2^q)} \quad \text{(nondum 2.)}$$

---

18 Die Ausgangsformel gilt für das dem Kreis einbeschriebene, regelmäßige n-Eck und 2n-Eck. Bis zum Ende der Überlegungen in S. 63 Z. 4 schreibt Leibniz häufiger versehentlich 2^q anstelle von $2r^q$, was er nur teilweise korrigiert. Von der Kontrollzahl im Nenner des Bruches Z. 19 abgesehen ergeben sich daraus keine Folgefehler. — Öfters wird ein Ausdruck hier in Mehrfachfunktion verwendet. Zur eindeutigen Zuordnung der Zwischentexte wurden die Rechenschritte in Z. 18 f., S. 62 Z. 1 f. und S. 63 Z. 1–3 voneinander getrennt wiedergeben.

$Rq\,2^q - Rq\,\llcorner 2r^q - 2a^q$ dividatur per $\underset{Rq\,5}{Rq\,a}$

$$Rq\,\frac{\cancel{(Rq\,\llcorner\llcorner)}Rq\,2^q}{\cancel{(Rq)}a} - \Big(\Big(Rq\,\frac{\cancel{Rq}\,\llcorner 2r^q - 2a^q}{\cancel{(a)}a^q}\Big)\Big)_{(Rq\,6)} = \frac{2r^q}{a^q} - 2.$$

Fiet $Rq\,\llcorner\llcorner\frac{Rq\,2r^q}{a} - Rq\,\llcorner\frac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$ vel $Rq\,\llcorner\llcorner Rq\,\frac{2^q}{a^q} - Rq\,\llcorner\frac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$.

Huius producti sumatur $\square^{\text{tum}}$, habebimus: $Rq\,\frac{2^q}{a^q} - Rq\,\llcorner\frac{2^q}{a^q} - 2\lrcorner$.

Quaerenda nunc ratio est eliminandi istud 2. $Rq\,\llcorner\frac{2r^q}{a} - 2.$ etiam sic enuntiari potest:

$$Rq\,\frac{\cancel{Rq}\,\frac{2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner}{a} - \frac{2a-2}{a}\Big(=2-\frac{2}{a}\Big)}{\cancel{Rq}\,a}.$$ Multiplicetur per $Rq\,a$ fiet[:]

$Rq\,\llcorner\llcorner 2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner - \llcorner 2a-2\lrcorner = Rq\,2\frown\llcorner 1r-1\lrcorner + 2 - 2a.$

$Rq\,2r - 2 + 2 - 2a = Rq\,2r - 2a.$

Et si reliquum quoque: $Rq\,\frac{2^q}{a^q}$ multiplicemus per $Rq\,a$ seu $Rq\,\llcorner\frac{2^q}{a^q}\frown a^q$ fiet $Rq\,2^q$. Et habebimus: $Rq\,2^q - Rq\,\llcorner 2r - 2a\lrcorner$ ita omnia in circulum rediere, nihilque sive in a, sive in 2 eliminando actum est.

4 f. $-2\lrcorner$ *(1)* Sumatur rursus huius $\square^{\text{ti}}$ $\square^{\text{tum}}$, habe *(2)* Et primum investigemus $\square$ de $\text{Rq}\,\llcorner\frac{2^q}{a^q} - 2$. Quod ita fiet: $\frac{2^q}{a^q} + 4 - (\text{Rq}\,\frac{2r^q}{a^q}\frown 4)\text{Rq}\,\frac{8^q}{a^q}$. Habebimus $\frac{2r^q}{a^q} + \frac{2r^q}{a^q} + 4 - \text{Rq}\,\frac{8r^q}{a^q} - \frac{8r^{qq}}{a^{qq}} - \frac{\frac{8r^q}{a^q}}{\frac{2r}{a^q}} + \text{Rq}\,\frac{32^{qqq}}{a^{qqq}}$ *(a)* $\frac{6r^q}{a^q} - \frac{8r^q}{a^q}$ *(b)* $4 + (\text{Rq}\,\frac{32^{qqq}}{a^{qq}} - \text{Rq}\,32$ *(3)* Quaerenda *L* 5 q *erg.* *L* 6 | *(1)* Dividatur per Rq *(2)* Multiplicetur per Rq a *erg.* | fiet *L*

5 Leibniz vergißt in Zähler und Nenner das Quadrat und korrigiert dies später nur unvollständig. Der Fehler setzt sich bis Z. 11 fort. Von S. 63 Z. 1 an kommen weitere Fehler hinzu, die sich bis zum Ende des Rechengangs in S. 63 Z. 4 vererben.

Ergo tentemus aliam rationem: Initio $Rq\,2r^q - Rq\llcorner 2r^q - 2a^q$. Hoc dividatur iterum per $Rqq\,2^q$.

$$Rq\,\frac{(Rqq\,)Rq\,2r^q - Rq\llcorner 2r^q - 2a^q}{(Rqq\,2^q)Rq\,2^q}\lrcorner = Rq\left(\frac{Rq\,2^q}{Rq\,2^q}\right)1 - Rq\,\frac{Rq\llcorner 2r^q - 2a^q}{Rq\,2^q} =$$

$Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \left(\frac{2a^q}{2r^q}\right)\frac{a^q}{1r^q}\lrcorner$. Huius $\square^{\text{tum}}$ erit: $1 - Rq\llcorner 1 - \frac{a^q}{1r^q}\lrcorner$.

Ratio multitudinis		Ratio magnitudinis
	laterum	
$\frac{b}{2b}$		$\frac{2a}{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \frac{a^q}{d^q}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,4d^{qq}}$

$$\frac{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \frac{a^q}{d^q}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,4d^{qq}}{2a} \quad - \quad 2.$$

Si sit progressio aliqua geometrica in infinitum continuata cuius primus terminus sit radius circuli d, et sequens terminus habeat ad praecedentem rationem:

$$\frac{Rq\llcorner\llcorner 1 - Rq\llcorner 1 - \frac{a^q}{[d^q]}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\,[4]d^{qq}}{2a} - 2$$

praecedente termino semper supposito: $2a$. Summa huius progressionis demto termino primo erit differentia inter circumferentiam hexagoni circulo inscripti, seu radium sextuplicatum, et circumferentiam circuli.

---

1 f. Dividere per $Rqq\,2^q$ et productum rursus per $Rqq\,2^q$ est dividere per $Rqq\,2^q \frown Rqq\,2r^q = Rqq\,4r^{qq}$.

1 rationem: *(1)* in hac constructione $\mathrm{Rq}\,\frac{2\mathrm{r}^q}{\mathrm{a}^q} - \mathrm{Rq}\llcorner\frac{2\mathrm{r}^q}{\mathrm{a}^q} - 2\lrcorner$ *(2)* Initio $\mathrm{Rq}\,\frac{\mathrm{Rq}\,2^q}{\mathrm{a}} - \mathrm{Rq}\,\frac{2}{-}$ *(3)* Initio *L*
1 iterum *erg. L* 7 f. $-$ 2. | ita est circumf *gestr.* | Si *L* 9 geometrica ... continuata *erg. L* 10 d, *(1)* et caeteri termini sint *(2)* et *L* 11 d *L ändert Hrsg.* 11 4 *erg. Hrsg.* 12 f. demto termino primo *erg. L* 16 $\mathrm{Rqq}\,4\mathrm{r}^{qq}$ | seu $\mathrm{Rq}\,2\mathrm{r}$. Est ergo idem quod dividere omnia per $\mathrm{Rq}\,2\mathrm{r}$. NB. *gestr.* |. *L*

Ista autem quantitas finita est, etsi numerus terminorum sit infinitus, quia termini sunt continue decrescentes. Constat vero in progressionibus geometricis ab aliquo termino continue decrescentibus summam omnium terminorum in infinitum esse finitam. Et in progressionibus quidem geometricis puris constat summam omnium terminorum sequentium minorum in infinitum aequari termino maiori praecedenti, sed aliquando [in] progressionibus affectis, (liceat in re nova uti hac voce ad exemplum potestatum affectarum, nam et potestates sunt termini progressionis geometricae) non potest locum habere haec regula, ut in praesenti exemplo patet, non potest enim dici istam summam radio aequari, alioquin circumferentia aequaretur radio [sexies] sumto. Ideoque aliae inquirendae sunt rationes. Quisquis ergo invenerit methodum summandi terminos infinitos continue decrescentes datae progressionis geometricae affectae, is invenerit quadraturam quorumcunque rectilineorum, ac per consequens cuiuscunque generis curvae rectam aequalem.

Methodus autem determinandi quantitatem per duas series convergentes, quarum altera continue crescit altera continue decrescit in infinitum, sed ita ut non nisi per fini-

---

13 *Dazu in der rechten Spalte:* Si qua sit progressio terminorum infinitorum, sed ita tamen ut omnes termini sint finiti, ea progressio complicata est duarum pluriumve aliarum progressionum divergentium, aut duarum (nescio an et plurium) convergentium semper c o m p l i c a t a est divergentium, non semper m e d i a convergentium, nisi quatenus ipsae convergentes sunt complicatae.

2 geometricis *(1)* puris sum *(2)* ab *L* 5 minorum *erg. L* 5 in *erg. Hrsg.* 6 uti *(1)* hoc termino *(2)* hac *L* 9 septies *L ändert Hrsg.* 13–65,1 convergentes, | *(1)* continue decrescentes *(2)* quarum ... consideravit, *erg.* | usum *L*

63,11–14 Richtig ist, daß die Differenz der Umfänge von Kreis und regelmäßigem Sechseck gleich dem Grenzwert der Summe der Differenzen der Umfänge aufeinanderfolgender n- bzw. 2n-Ecke ist: $\sum_{n=1}^{\infty}(2_n s_{2n} - n s_n) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{s_{2n}}{s_n} - \frac{n}{2n}\right) 2n s_n$. Leibniz vertauscht irrtümlicherweise Zähler und Nenner im Quotienten der Seitenanzahlen und läßt den Faktor $2_n s_n$ fort. In Leibnizscher Notation müßte der n-te Reihenterm lauten: $\dfrac{Rq \llcorner\llcorner 1 - Rq \llcorner 1 - \frac{a^q}{d^q} \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown Rqq\, 4d^{qq}}{2a} - \frac{1}{2} \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown 2b \frown 2a$. 4 f. Et ... praecedenti: Die Aussage gilt nur für die geometrische Folge mit dem Quotienten $\frac{1}{2}$.

tum spatium decurrat, quam Iac. Gregorius Scotus nuper libro edito consideravit, usum habere non potest, ubicunque termini unius seriei constructionem habent pendentem a terminis alterius seriei, ut in polygonorum inscriptorum, ac circumscriptorum continue subsectorum lateribus apparebit inquirenti ad determinandum latus polygoni circumscripti cognoscendum debere latus polygoni inscripti proxime praecedentis seu numeri laterum dimidii cognosci. Et raro admodum continget, ut series convergentes a se invicem sint independentes. Sed etsi sint independentes, non habebunt usum, nisi cognitam inter se habeant rationem. Sed nondum consideratio habita est de seriebus duabus divergentibus, quarum altera auget, altera diminuit eandem rem in infinitum; unde potest nihilo minus prodire aliquid finitum, si scilicet minus sit [decrementum] augmento vel contra, et ipsum incrementi vel decrementi incrementum sit continue decrescens.

Laterum hexagoni multitudo est 6. Magnitudo unius est 1r. Crescit m u l t i t u d o in infinitum continua progressione geometrica dupla, donec tandem numerus laterum fiat infinitus.

Decrescit magnitudo in infinitum, ea progressione, ut praecedente latere existente $2a$. sequens sit $Rq_{\llcorner\llcorner\llcorner} 2r^q - Rq_{\llcorner\llcorner}\, \underset{4r^{qq} - 4r^q a^q}{2r^q \frown 2r^q - 2a^q}$. vel $Rq_{\llcorner\llcorner} 1 - Rq_{\llcorner} 1 - \dfrac{a^q}{1r^q}{}_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \frown Rqq\, 4r^{qq}$.

Ita ut sequens semper paulo maius sit dimidio praecedentis.

Quia igitur minus semper decrescit laterum magnitudo, quam crescit multitudo, ideo in fine necesse est productum esse maius circumferentia hexagoni.

Nam si ut crevit numerus in progressione dupla, ita decrevisset magnitudo in dimidia, productum fuisset aequale initio. Sed ut dixi quantitas sequentis semper est paulo maior dimidia praecedentis.

Fingamus, exempli causa, laterum numerum semper crescere in progressione dupla, at quantitatem sequentem esse $\frac{3}{4}$ si praecedens fuerit 1. Erit ergo

3 f. continue subsectorum *erg. L* 6 cognosci. *(1)* Et valde dubito a *(2)* Et *L* 8 rationem. *(1)* Idem intelligendum *(2)* Sed *L* 9 altera *(1)* crescit, altera *(2)* auget 10 incrementum *L ändert Hrsg.* 16 sequens *(1)* sit $\mathrm{Rq}_{\llcorner\llcorner} 1 - \mathrm{Rq}_{\llcorner} 1 - \frac{\mathrm{a^q}}{\mathrm{1r^q}}{}_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \frown \mathrm{Rqq}\, 4\mathrm{r^{qq}}$. *(2)* sit *L* 17 sit *(1)* duplo *(2)* dimidio *L* 18 igitur *(1)* magis *(2)* minus *L*

1 Iac. Gregorius Scotus: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668 [Marg.], S. 31 bis 36.

$$\begin{array}{cccccll} 1 & \frac{3}{4} & \frac{9}{16} & \frac{27}{64} & \frac{81}{[256]} & \text{etc.} & \text{progressio magnitudinis per } \frac{3}{4} \text{ decrescens.} \\ 6 & 12 & 24 & 48 & 96 & & \text{progressio dupla multitudinis crescens.} \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & & \text{progressio dupla magnitudinis decrescens.} \end{array}$$

Hinc apparet si eadem sit proportio incrementi multitudinis quae est decrementi magnitudinis, productum quodcunque, in infinitum, ac proinde ultimum omnium productorum quoque post decursum infiniti fore aequale primo, seu omnia fore aequalia inter se nam $\frac{6}{1}$ et $\frac{12}{2}$ et $\frac{24}{4}$ et $\frac{96}{16}$ semper sunt idem.

Eodem modo etsi non sit semper eadem ratio, attamen eadem ratio quadratorum, aut aliarum potestatum vel radicum, vel eadem semper ratio duorum quorundam pluriumve propinquorum, aut certae distantiae, aut eadem ratio rationum etc. aut eadem ratio rationum $\square^{\text{torum}}$ etc. Potest tamen ultimum fortasse definiri. Ut si haec sit progressio

$$\begin{array}{ccc} 6 \frown 6 & 12 \frown 12 & 24 \frown 24 \\ 36 & 144 & 576 \\ 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Et ita pergatur in infinitum, productum est in infinitum, ac proinde est ac si esset progressio continue crescentium

$$\begin{array}{ccc} 36 & 72 & 144 \end{array}$$

progressione dupla, quia divisor semper in progressione dupla deficit a debito, deberet enim esse 1. $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{2}$. $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{4}$. etc. et est tantum 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$ etc.

Item cum progressio magnitudinis decrescens est $\frac{3}{4}$ et multitudinis crescens est 2. Producta sunt: 6. 9. $13\frac{1}{2}$.

---

20 f. *Am oberen Seitenrand, spaltenförmig:*

$$\begin{array}{ccccccccc} 6 & & 3 & & 1 & & 0 & \\ & 3 & & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} \end{array}$$

Davor spaltenförmig, gestrichen:

$$\begin{array}{ccccccccccc} 6 & & 9 & & 11 & & 12 & & 12\frac{1}{2} & & \\ & 3 & & 2 & & 1 & & \frac{1}{2} & & & \text{etc.} \end{array}$$

1 192 *L ändert Hrsg.*

Regula generalis si sint duae progressiones complicatae rationes earum ducendae sunt in se invicem, et constituetur ratio terminorum compositorum ut $2 \frown \frac{3}{4} = \frac{6}{4}$. item $2 \frown \frac{1}{2} = 1$.

Terminus primus a^q. ratio progressionis crescentis 2^q seu 4. decrescentis $\frac{1}{2}$. ducantur in se $4 \frown \frac{1}{2}$[:] fiet 2. est ergo progressio dupla inde ab a^q.

Eodem modo quando utraque progressio est crescens, vel decrescens.

Quid vero si ratio alicuius progressionis non sit eadem sed ratio rationis sit eadem, potest fieri, ut crescat incremento continue decrescente, si progressio rationum progressionis sit decrescens, ut

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{16} & \frac{1}{32} & \quad & 1 & 2 & 4 \\ 6 & 3 & \frac{3}{4} & \frac{3}{64} & \text{etc.} & & & & \end{array}$$

In hac progressione notandum terminum quemlibet produci si ducta in se invicem serie rationum eousque, multiplices primum ut $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} = \frac{1}{8}.\ \frown 6 \fint \frac{3}{4}$.

---

12 f. *Dazu auf der gegenüberliegenden Seite:*

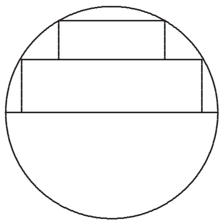
Hinc diameter aequalis est differentiis omnium chordarum et semidiameter aequalis est differentiis omnium chordarum arcus sexta circumferentiae parte minoris, et idem semidiameter aequalis est differentiis chordarum quomodocunque interpositarum inter se et diametrum quod est theorema plane admirandum.

1 complicatae *(1)* altera decrescens altera crescens ad const *(2)* rationes *L* 4 primus *erg. L* 4 crescentis *erg. L* 8 si *(1)* series rationum *(2)* progressio *L* 12 notandum *(1)* est res mirabilis, scilicet *(2)* terminum *L*

---

10 Statt $\frac{1}{32}$ müßte es $\frac{1}{256}$ heißen. 12 f. Das Vorgehen ist unzulässig. Es sollten nicht die Summen $(a_1 + a_2 \ldots)$, $(b_1 + b_2 \ldots)$ miteinander multipliziert werden, sondern jeweils nur die Glieder a_1, b_1; a_2, b_2 usw. Auf S. 79 Z. 18 – S. 80 Z. 11 wird das Problem erneut behandelt, dieses Mal wird der Fehler sofort erkannt.

[Fortsetzung von S. 67]



[Fig. 1]

Hinc sequitur quomodocunque interponantur termini continue decrescentes, eandem semper esse quantitatem differentiarum. Idque tam in serie finita quam in infinita.

Dazu oben über der linken Spalte: Ellips. sol. $\square$quad. compl. ⟨semisegment.⟩ diam.

$\frac{6}{1}-\frac{6}{2}$ $\frac{6}{2}-\frac{18}{8}$ $\frac{6}{8}-\frac{96}{128}$ $\frac{6}{128}$. Necesse est $\frac{6}{2}+\frac{18}{8}+\frac{96}{128}$ etc. in infinitum aequalia esse $\left[\frac{6}{1}\right]$. Et habemus regulam universalem in omni serie continue decrescente differentiae omnes terminorum omnium in infinitum a dato inclusive simul sumtae, aequantur termino dato.

Et contra si series aliqua sit utrinque continuata in infinitum, differentia omnium terminorum aequatur termino maximo seriei. Etsi enim maximus semper sit finitus est tamen differentia ingens inter infinita.

Progressio harmonica semper habet aliquem terminum primum, is ergo aequatur differentiis caeterorum in infinitum omnium.

Et cum in progressione harmonica semper ea sit ratio differentiarum quae est duorum extremorum, hinc potest colligi summa omnium terminorum progressionis harmonicae in infinitum.

In omni serie in infinitum decrescente, ubi aliqua reddi potest ratio differentiarum inter terminos ad ipsos terminos, inveniri potest progressionis summa.

7 $\frac{6}{1}$ *erg. Hrsg.* 7 universalem *erg. L* 7 omni *(1)* progressione *(2)* serie *L*

6 Differenzenfolge in Hs. spaltenförmig. — Statt $\frac{96}{128}$ müßte es $\frac{90}{128}$ heißen.

Infinitum ergo nihil est, nec totum habens nec partes et infinitum unum altero nec est maius nec minus nec aequale, quia nulla est infiniti magnitudo. Sed arithmetica infinitorum et geometria indivisibilium, non magis fallunt quam radices surdae et dimensiones imaginariae et numeri nihilo minores. Et ratio lineae ad punctum etc. datur enim et ratio aliqua seu veritas de impossibilibus seu falsis.

Sed quid postea de motu deque tempore dicemus? Et an non rectius dicetur non esse aequalia, sed differentiae quavis data [minores].

Imo non est cur huc eamus. Hac enim ratione ostendemus potius series illas in infinitum continuatas esse inter se differentes, et potest earum inter se computari proportio. Ut enim semper aequantur in binaria decrescente termini omnes sequentes, uni praecedenti, ita in quaternaria, aequantur [$\frac{1}{3}$], et ut puto in ternaria, aequantur [dimidio] termini praecedentis. Sed hoc exacte investigandum.

67,13 *Über der Streichung:* error

67,13 $\frac{3}{4}$. | Hinc sequitur aliquid mirabile, scilicet omnes terminos in infinitum ut 3. $\frac{3}{4}$. etc. exacte aequare praecedentem 6. et omnes $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{64}$. etc. exacte aequare praecedentem 3. quia multiplicantes $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. etc. aequant 1. et $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{16}$. etc. aequant $\frac{1}{2}$. Hinc patet non tantum in progressionibus geometricis, sed et in progressionibus omnibus decrescentibus per rationes omnes terminos sequentes in infinitum aequari praecedenti. Et ideo quod est mirabile: seriem hanc $\frac{6}{1}$. $\frac{6}{2}$. $\frac{6}{4}$. $\frac{6}{8}$. etc. aequari huic $\frac{6}{1}$. $\frac{6}{2}$. $\frac{6}{8}$. $\frac{6}{128}$. etc. Cum tamen semper in infinitum termini unius sint maiores quam correspondentes alterius, ita 6. 3. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{4}$. $\frac{3}{8}$. etc. aequantur his 6. $\frac{3}{2}$. $\frac{3}{8}$. etc. pars toti cum semper aliquid transsiliatur. *gestr.* | *L* 67,15 *(1)* Hinc diameter est aequalis differentiis omnium chordarum, et hexagoni *(2)* Hinc *L* 68,10 aliqua *(1)* ab aliquo initio continuetur in infinitum differentiae omnium terminorum *(2)* sit *L* 1 partes *(1)* . Sed partes istae sunt *(2)* et *L* 2 nec aequale *erg. L* 7 minoris *L ändert Hrsg.* 11 dimidio *L ändert Hrsg.* 11 aequantur *(1)* $\frac{3}{2}$ *(2)* $\frac{1}{3}$ *(3)* | $\frac{2}{3}$ *ändert Hrsg.* | termini *L*

68,5 Zu dieser Aussage vgl. S. 91 Z. 22–24. 68,15–17 Aus der Beschränktheit der Differenzenfolge ergibt sich noch nicht notwendig die Konvergenz der Reihe. 1 f. Infinitum . . . magnitudo: vgl. Leibniz' Exzerpte und Anmerkungen zu Galileis *Discorsi*, *LSB* VI, 3 N. 11 S. 168, sowie die *Accessio*, *LSB* III, 1, N. 2 S. 11.

In ratione geometrica secundaria decrescente, difficilius est venire ad summam ita in exemplo supra proposito, non difficulter demonstratur totum reliquum minus esse quam 6. sed difficulter quanto. Est enim in eo progressio reassumta. Nam omnes progressiones geometricae secundariae sunt reassumtae.

Investigari optime potest summa ista progressionum decrescentium, per similes ascendentes. Ita: $8.\ 4.\ 2.\ 1.\ \frac{1}{2}.$ etc. omnia simul 16.

Ita videbimus: $27.\ 9.\ 3.\ 1.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{9}.$ etc.

5–7 *Daneben in der rechten Spalte:* Nota si progressio non procedit per unitatem, potest medium in ea assumi ubilibet. Imo etsi procedat per unitatem fingi potest ac si per eam non procederet, et assumi ratio terminorum ad unitatem.

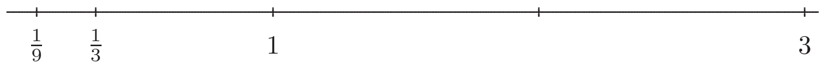
6 f. *Dazu in der rechten Spalte:*

4	9	16	6	6	
					2
2	3	4	5	4	
					1
1	1	1	4	3	
					2
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	2	1	
					$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	
					$\frac{7}{16}$
etc.	$\frac{1}{27}$		$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{16}$	
	etc.				

7 etc. | Omnes tertiae partes omnium tertiarum faciunt tertiam partem totius, uti omnes *(1)* quartae partes omni *(2)* dimidiae omnium dimidiarum faciunt dimidiam totius: imo res *(a)* recte *(b)* accuratius concipienda est: *gestr.* | *L*

---

1 f. in exemplo supra proposito: s. o. S. 67 Z. 11.



[*Fig. 2*]

				9	$-$	$2 \frown 3$	
$3 \frown 1$	3			3	$-$	2	
			1				
1	2	2		1	$-$	$\frac{2}{3}$	
			1				$= 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9}$
$\frac{1}{3}$	3	1		$\frac{1}{3}$	$-$	$\frac{2}{9}$	
			$\frac{5}{9}$				
$\frac{1}{9}$	4	$\frac{4}{9}$		$\frac{1}{9}$	$-$	$\frac{2}{27}$	
		$\frac{5}{27}$					

Ergo $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{9}+\frac{2}{27}$ etc. $=3$. Nam si ista $2+\frac{2}{3}$ etc. a $3-2, 1-\frac{2}{3}$ seu a $1+\frac{1}{3}$ non aufero, sed ei addo, addo 3. Ergo $1+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ etc. $=\frac{3}{2}$.

Nam si iste $2+\frac{2}{3}$ etc. a $3-2, 1-\frac{2}{3}$ seu a $1+\frac{1}{3}$ non aufero, sed addo, addo: 3.

Propositio generalis haec est. Summa terminorum progressionis geometricae ita inibitur. Terminus datus dividatur per numerum unitate minorem ratione, quotiens erit summa terminorum sequentium.

2 $9-2 \frown 3$ *erg. L* 11 f. Nam ... addo 3. *erg. L* 14–16 Propositio ... sequentium. *erg. L*
15 datus *(1)* multiplicetur per rationem progressionis, productum *(2)* dividatur *L*

2 Leibniz hat den Term $9-2 \frown 3$ ergänzt, ohne die Sammelbetrachtungen zu ändern.

Demonstratio potest reddi universalis, si pro numeris assumantur termini, tantum alii assumantur semper unitate minores, aut unitates etc. etc.

Quantum sciam hactenus non nisi summa terminorum infinitorum progressionis geometricae duplae reperta est, haec scilicet sponte sua incidebat menti. Sed aequalitas per accidens in ea evenit, quia in ea unitas, et numerus differens unitate a ratione seu binario, coincidunt.

Nota assumsi in inveniendo tam mirabili theoremate initium a termino, qui est ipse ratio. Idem patet si altior seu maior assumatur. Prodit enim semper terminum datum aequari omnibus sequentibus vicibus unitate paucioribus quam ratio est, repetitis. Ergo si ipse dividatur per numerum ratione unitate minorem, prodit summa terminorum sequentium. Idem est etsi series progressionis non complectatur unitatem, sed ab alio numero ascendendo descendendoque inchoet, eadem enim erit ratio summae terminorum ad terminum antecedentem, quia ipse terminus, aeque ac omnes alii multiplicantur per idem, numerum scilicet a quo incipitur, cuius data est ratio ad unitatem.

Infinitae possunt duci ex theoremate nostro de arithmetica infinitorum, consequentiae. Cum omnes differentiae sequentes in serie continue decrescente aequentur termino, hinc necesse est differentias omnes inter terminum aliquem et alium datum interpositas aequari termino primo detracto ultimo.

$$\begin{array}{ll} 6 & \\ & 1 \\ 5 & \\ & 1 \\ 4 & \\ & 2 \\ 2 & \end{array}$$

1 f. Demonstratio ... etc. *erg. L* 3–6 Quantum ... coincidunt. *erg. L* 7–14 Nota ... unitatem. *erg. L* 8 semper *(1)* sequens *(2)* auferendum esse semper *(3)* terminum *L* 9 aequari *(1)* duplo *(2)* omnibus *L*

3 Quantum sciam: vgl. dagegen die Ausführungen in der *Accessio*, Ende 1672, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 1 f., wo Leibniz, wohl eine Aussage in Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch II S. 51 mißverstehend, die Kenntnis der allgemeinen Summenformel bereits den antiken Mathematikern zuschreibt. 15 ex theoremate nostro: s. o. S. 68 Z. 7–9.

Necesse est differentiarum summas in infinitum esse inter se ut sunt termini a quibus incipiunt, quippe quibus sunt aequales, et proinde si termini habent certam rationem

---

1–74,2 *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\
 & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{8} & & \\
 & \frac{3}{8} & & \frac{[9]}{64} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{[17]}{64} & & \frac{31}{1024} \\
 & \frac{7}{64} & & \frac{[175]}{1024} & \\
\frac{1}{64} & & \frac{97}{1024} & & \frac{[2945]}{32768} \\
 & \frac{15}{1024} & & \frac{2655}{32768} & \\
\frac{1}{1024} & & \frac{449}{32768} & & \\
 & \frac{31}{32768} & & & \\
\frac{1}{32768} & & & &
\end{array}$$

Nota bene etsi series data sit continue decrescens, tamen aliqua ex differentiis differentiarum potest esse non decrescens. Et in genere decrescente licet serie terminorum non sequitur decrescere semper seriem differentiarum (imo ea semper crescere potest) nisi id ex constructione demonstretur.

---

7 6 *L ändert Hrsg.* 8 14 *L ändert Hrsg.* 9 127 *L ändert Hrsg.* 10 1409 *L ändert Hrsg.*

etiam differentias habere certam rationem, et, si termini habent certas constantes differentiarum rationes, etiam summae eas habebunt.

Quicunque termini continue aucti vel minuti inter duos pluresve terminos interponantur, eadem semper manebit differentiarum quantitas.

In omni serie continue aucta vel diminuta differentia inter quoslibet terminos extremos, est summa differentiarum inter omnes medios non sic tantum sed et aliter interpositos.

Ex his sequitur in quantitatibus[,] ut lineis[,] progressione geometrica continua decrescentibus, lineam aliquam aequari differentiis omnium sequentium minorum, et hoc amplius quod in aliis seriebus non contingit summam omnium terminorum sequentium in infinitum ita iniri posse; si scilicet sumatur alius terminus habens ad datum rationem unitate minorem ratione progressionis, seu dividatur per numerum unitate minorem ratione progressionis, is terminus erit omnium terminorum summa.

In qualibet serie continue aucta vel diminuta, seu p r o g r e s s i o n e

---

1 f. *Dazu in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{ccccccc} 4 & 2 & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} \\[2ex] & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{8} & \frac{1}{64} & \frac{1}{1024} \\ & & 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{16} & \text{etc.} & \end{array}$$

5–7 *Dazu in der rechten Spalte:* Applicanda haec si commode fieri potest etiam ad alias series non continue auctas vel diminutas.

2 f. habebunt. *(1)* Ergo summae rationem differenti *(2)* Quicunque *L* 3 continue ... minuti *erg. L* 8 ut lineis *erg. L*

6		$2 \frown 4$	8
	1		
5		$2 \frown 3$	6
	1		
4		$1 \frown 2$	2
	2		
2		$1 \frown 1$	1
17			17

si ducatur differentia prima incipiendo a terminorum maiorum differentiis in 1. secunda in 2. tertia in 3. quarta in 4. etc. et terminus ultimus seriei quasi pro ultima differentia habeatur, quia scilicet cogitari debet post ipsum poni 0. ut series obsignetur: summa omnium factorum aequabitur summae terminorum.

Idem sic enuntiari potest, differentiam quamlibet duci in numerum terminorum praecedentium.

Hinc theorema novum et mirabile. Sumtis quotcunque terminis in infinitum qui differentiae sint progressionis geometricae alteriusve ubi summa omnium terminorum in infinitum, inveniri potest, invenire quid ex illis terminis, in numeros serie naturali procedentes continue crescentibus ductis efficiatur.

Et hic est quaedam determinatio progressionis complicatae, ex duabus divergentibus, altera arithmetica naturali, altera quasi geometrica fractionem (licet aliquando aliquandiu unitate maiorem) formante sumto numero unitate minore quam est ratio, eoque ducto in terminos continue decrescentes progressionis geometricae datae.

Iam per consequens computari ex datis potest, quid efficiat ista eadem series numerorum naturalium infinita continue crescens ducta in aliam seriem continue decrescentem, cuius ratio aliqua ad seriem istam propositam differentiarum progressionis geometricae iniri potest, ut $\frac{4}{3} + \frac{4}{9} + \frac{4}{27}$ etc. in infinitum aequat 2. Et ductum semper in numeros progressionis naturalis ab unitate erit $= \frac{3}{4}$

Finita magnitudo infinitae multitudini aequalis.

9 incipiendo ... differentiis *erg.* *L* 21 formante *(1)* cuius numerator est numerus unitate minor ratione, et nominatores *(2)* sumto *L*

Quaerebam demonstrationem directam cur scilicet in binaria subsectione omnes termini sequentes sint aequales antecedenti, nam quae iam habetur deducens ad impossibile, non praebet fundamentum extendendi longius doctrinam ad alias progressiones, inveni ergo, et quidem detexi theorema, quod videtur fundamentum esse eorum omnium quae de infinitis terminis termino finito ad quemlibet infinitorum rationem cognitam habente, scimus.

Arithmetica infinitorum hoc potissimum quod dixi quaerit, nam possunt quidem exhiberi finitae magnitudines infinitis multitudinibus pares, ut linea punctis, etc. Sed tali ratione nullae absolutae proportiones, sed tantum approximationes in geometria deteguntur.

[*Ergänzungen*]

[*In der rechten Spalte und auf der gegenüberliegenden Seite zwischen den Spalten*]

Quia non semper in potestate nostra est serie [data] per analysin invenire aliam seriem, cuius differentias contineat series data, ideo per synthesin construendae sunt quaedam notae, et primum notandum est, omnes series fractionum (unitate minorum) in quibus tam termini superiores quam inferiores; seu tam numeratores quam nominatores sunt numeri continui cuiusdam progressionis geometricae, esse vel terminos vel differentias alicuius progressionis geometricae, terminos si utrobique sint eiusdem gradus potestatis, quadrata et quadrata, cubi et cubi; differentias si diversi sint gradus, et quidem si differant potestatum gradus unitate, ut quadrata et cubi, cubi et quadrato quadrata, etc. est differentia primi gradus, si differant binario, est differentia 2^{di} gradus, seu differentia differentiae et ita porro, et ad summam eius habendam a termino dato retineatur numerator, pro nominatore sumatur terminus gradus unitate minoris ut pro

9 ratione *(1)* nihil novi detegitur in geometria *(2)* nullae *L* 13 est *(1)* termino dato *(2)* serie | dato *ändert Hrsg.* | per *L* 22 habendam *(1)* aequentur termini *(2)* , a termino *L*

1 Quaerebam: s. o. S. 69 Z. 9–12 u. S. 72 Z. 1–6. 2 quae iam habetur: Leibniz bezieht sich vermutlich auf I. G. Pardies, *Élémens de géométrie*, 1671, livre IX article 14 S. 85 f.; vgl. dazu auch die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 Z. 11 f. 3 f. inveni, detexi: Die Differenzenmethode kennt Leibniz bereits im Herbst 1672; vgl. Nr. 1 S. 3 Z. 11 – S. 4 Z. 1 u. ö.; ausführlich behandelt er sie in N. 4_2.

$\frac{8}{81}$. fiat $\frac{8}{27}$. At ante terminos ipsius progressionis $\frac{2}{3}.\frac{4}{9}$. etc. ponendi sunt termini ubi numerator semper est potestas altior ut $\frac{4}{3}$. $\frac{[8]}{9}$. Et ecce iam rationem novam et universalem summandi omnes series progressionis geometricae eorumve differentias, modo sint continuae: scilicet in termino dato retineatur vel numerator mutato nominatore, si

---

76,18 f. *Dazu auf der gegenüberliegenden Seite, zwischen den Spalten:*

$\frac{3}{3}$	1			$\frac{5}{5}$	1	
		$\frac{1}{3}$				$\frac{2}{5}$
$\frac{6}{9}$	$\frac{2}{3}$			$\frac{15}{25}$	$\frac{3}{5}$	
		$\frac{2}{9}$				$\frac{6}{25}$
$\frac{12}{27}$	$\frac{4}{9}$		$\frac{2}{27}$	$\frac{45}{125}$	$\frac{9}{25}$	
		$\frac{4}{27}$				
$\frac{24}{81}$	$\frac{8}{27}$		$\frac{4}{81}$	$\frac{[135]}{625}$	$\frac{27}{125}$	
		$\frac{8}{81}$				
etc.	$\frac{16}{81}$				$\frac{81}{625}$	

Darüber in der rechten Spalte: Nondum inquisivimus quod dudum factum oportebat, rationem vere universalem inveniendi summas progressionis geometricae decrescentis cuiuscunque ut si ratio illa sit $\frac{2}{3}$. vel $\frac{3}{5}$.

2 $\frac{16}{9}$ *L ändert Hrsg.* 12 405 *L ändert Hrsg.*

2–78,4 Die hier formulierte Regel der Summenbildung ist falsch.

series sit differentia progressionis, vel contra, si series sit progressio ipsa, aut series altior cuius terminus est progressio. Mutatus autem vel nominator vel numerator assumatur unius gradus altior quidem numerator, inferior vero nominator, productum erit summa omnium terminorum post terminum datum. Nota: in ratione $\frac{2}{3}$ statim ascendendo ultra ipsam seriem progressionis, series altior non est finitae summae, etsi sit continue decrescens, sed si ratio ita comparata sit, ut in ea nominator et numerator longius differant, fieri potest, ut series ipsa progressione altior sit summabilis, ut si ratio sit $\frac{1}{2}$. altior electa series coincidet cum hac ipsa est enim numerator altior seu quadr. de 1. nihilominus 1. At si sit $\frac{2}{5}$ altior terminus erit $\frac{4}{5}$. sed si rursus altius habes $\frac{8}{5}$. ubi iam desinit series esse summabilis. Sin vero sit $\frac{2}{16}$. seu $\frac{1}{8}$. altior terminus erit $\frac{2}{8} \Big| \frac{1}{4}$. et adhuc altior rursus $\left[\frac{2}{4}\right]$. Ergo quoties 1. numerator altior series coincidit datae, si sit fractio $\frac{2}{9}$. altior terminus erit $\frac{4}{9}$. et porro $\frac{8}{9}$. sed non ultra. Videndum ergo quota potestas numeratoris maior nominatore toties ascendi potest.

[*Zusatz in der rechten Spalte*]

Ex his determinari potest methodus admiranda et universalis inveniendi summam cuiuslibet progressionis geometricae continue decrescentis. Nempe haec: Ut est ratio data (progressionis datae continue decrescentis) ad defectum suum ab unitate (necesse est enim ut ratio sit unitate seu ratione aequalitatis minor seu ratio minoritatis) ita fiat terminus aliquis quartus ad terminum, progressionis datae datum, productus erit summa omnium terminorum post terminum datum sequentium in infinitum. Haec regula facile demonstratur, quia differentiae ad terminos, habent eandem semper rationem; ergo ratio [differentiae] ab unitate, ad ipsam rationem est eadem cum omnium differentiarum ad terminos sequentes ratione. (Assumenda autem est ratio differentiarum ad terminos sequentes, quia habent communem nominatorem, et ideo sunt comparabiles.) Ergo et

11 $\frac{1}{4}$ *L ändert Hrsg.* 16 decrescentis *(1)* : Quaeratur quantum defi *(2)* Ut *(3)* Nempe haec: *(a)* Ut est defectus rationis (datae progressionis) ab unitate ad rationem datam, ita fiat terminus aliquis datus ad *(b)* Ut *L* 18 seu ratione aequalitatis *erg. L* 21 f. ergo *(1)* differentia *(2)* ratio | differentia *ändert Hrsg.* | ab *L*

summa differentiarum numero infinitarum et summa terminorum numero infinitorum, eandem habent rationem. Summa autem differentiarum est terminus datus. Ergo fiat alius qui ad terminum habeat rationem datam, qui sit summa terminorum. Elegans alia hinc observatio ⟨struitur⟩: summam differentiarum interdum esse maiorem interdum minorem summae terminorum interdum aequalem, aequalem cum ratio data est $\frac{1}{2}$. minorem cum est maior quam $\frac{1}{2}$. maiorem cum est minor. Sed hoc intelligendum est ut summa differentiarum possit esse maior si scilicit assumitur una ante terminum primum. Nam alioquin si omnes differentiae sint post terminum primum necessario terminorum summa differentiarum summam excedit.

[*Fortsetzung von S. 76 Z. 10*]

Si sit talis progressio: $\frac{1}{3}\ \ \frac{\frac{1}{2}}{9}\ \ \frac{\frac{1}{4}}{27}$ etc. potestne inveniri summa huius progressionis? Valde dubito.

Hoc determinari potest terminum quemlibet ad quem esse

$$\frac{2}{3}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{\frac{1}{2}}{27}\quad \text{etc.}$$

$$\begin{array}{lcccccc}
\frac{\frac{1}{2}}{3}\quad \frac{\frac{1}{4}}{9}\quad \frac{\frac{1}{8}}{27} & = & \dfrac{1}{2\frown 3} & + & \dfrac{1}{4\frown 9} & + & \dfrac{1}{8\frown 27}\quad \text{etc.}\\
 & & \dfrac{1}{6} & & \dfrac{1}{36} & & \dfrac{1}{216}\\
\text{seu} & & \frac{1}{2}\frown\frac{1}{3} & + & \frac{1}{4}\frown\frac{1}{9} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Iam scimus quantitatem totius seriei $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$ etc. et alterius $\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$ etc. Ducantur hae summae in se invicem, et habebimus productum duarum progressionum in se invicem

1 numero *erg. L* 11 f. progressionis? *(1)* Idem est quod $\frac{2}{3}$ *(2)* Valde *L*

18–80,4 Leibniz begeht denselben Fehler wie auf S. 67 Z. 12 f., bemerkt ihn, im Unterschied zu dort, aber sogleich.

complicatarum, quarum altera est continue decrescens, altera continue crescens, crescente semper dividente decrescentem, seu quod idem est rationem progressionis decrescentis, ad crescentem vel contra. Sed cavendum ne insit error, dato enim facto ex terminis, non semper datur factus ex summa et contra: videamus:

3	+ 4	+ 6	=	13	9	169	16		
3	+ 4	+ 6		13	16	51	$\cancel{169}$	⨍	3
9	+ 16	+ 36		$\overline{39}$	36	$\overline{118}$	$\cancel{51}$		
				13	$\overline{51}$				
				$\overline{169}$					

Error ergo hic commissus erat nisi caveremus determinari productum ex ductis in se invicem summis, non ex ductis in se invicem terminis.

Apparet tamen saltem alterum ab altero non posse abesse nisi finito intervallo. Investigemus ergo summam huius progressionis.

5–9 *Nebenbetrachtungen:*

3 +	6 +	8		3 +	1 +	2		3	3	2
3 +	6 +	8		3	1	2		3	3	2
$\overline{9}$	$\overline{36}$	$\overline{64}$		$\overline{9}$	$\overline{2}$	$\overline{4}$		$\overline{6}$ +	$\overline{6}$ +	$\overline{4}$
				81 +	4	16		36 +	36 +	16

9	17	81	72	27
36	17	4	16	16
64	$\overline{119}$	16	$\overline{88}$	$\overline{162}$
$\overline{109}$	17	$\overline{101}$		27
16	$\overline{289}$	15		$\overline{432}$
		$\overline{116}$		

13 huius *(1)* propositionis *(2)* progressionis *L*

---

1 f. crescens ... dividente: Leibniz geht auf die Schreibweise von S. 79 Z. 15 zurück. 8 Statt 51 müßte es 61 heißen. Der Fehler wird in die nächsten zwei Berechnungen übernommen.

$$\begin{array}{cccll}
\dfrac{1}{2 \frown 3} & \dfrac{1}{4 \frown 9} & \dfrac{1}{[8] \frown 27} & \text{etc.} & \text{vel} \\[2ex]
\dfrac{1}{6} & \dfrac{1}{36} & \dfrac{1}{216} & \text{etc.} &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{1}{2} \frown \dfrac{1}{3} & - & \dfrac{1}{4} \frown \dfrac{2}{9} & = & \dfrac{1}{4} \frown \dfrac{1}{9} \\[2ex]
\dfrac{1}{4} \frown \dfrac{1}{9} & - & \dfrac{1}{8} \frown \dfrac{2}{27} & = & \dfrac{1}{8} \frown \dfrac{1}{27} \\[2ex]
\dfrac{1}{8} \frown \dfrac{1}{27} & & \text{etc.} & = & \text{etc.} \\[1ex]
\text{etc.} & & & &
\end{array}$$

Ergo $\frac{1}{2} \frown \frac{1}{3} = \frac{1}{4} \frown \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{2}{27}$ etc. in infinitum.

Iam duae progressiones una cognitae summae $\frac{1}{4} \frown \frac{2}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{2}{27}$ etc. altera summae quaesitae $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{1}{27}$ etc. habent eam invicem rationem singulorum terminorum correspondentium, ut quilibet terminus cognitae sit duplus termini respondentis incognitae, ergo summa quoque altera ad alteram habet rationem duplam et proinde $\frac{1}{4} \frown \frac{1}{9} + \frac{1}{8} \frown \frac{1}{27}$ etc. $= \frac{1}{3}$. quod mirum et plane nisi demonstratio adesset, incredibile videri posset.

Nimirum in talis generis progressionibus duabus geometricis inter se complicatis semper apparet ratio terminorum ad differentias, ideo invenitur facile summa terminorum, inventa quippe summa differentiarum.

13–15 *Daneben:* NB. praecurrens. Item repetita ut trium 4 autem differentiae differentiarum.

1 16 *L ändert Hrsg.* 10 cognitae *erg. L*

3–12 Leibniz rechnet gemäß der ungültigen Beziehung $ab - cd = (a - c)(b - d)$. Der Fehler setzt sich bis Z. 12 fort.

Cognitio infiniti apex est humanae subtilitatis.

Investigemus iam et summam progressionis cuiusdam geometricae secundariae, seu cuius differentiae sunt termini progressionis geometricae decrescentis.

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{32}$$

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{64} \quad \frac{1}{1024} \quad \frac{1}{32768}$$

Termini	Differentiae terminorum
$1 \frown 1$	
	$\frac{1}{2}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2}$	
	$\frac{3}{8}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4}$	
	$\frac{7}{64}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8}$	
	$\frac{15}{1024}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8} \frown \frac{1}{16}$	
	$\frac{31}{32768}$
$1 \frown 1 \frown \frac{1}{2} \frown \frac{1}{4} \frown \frac{1}{8} \frown \frac{1}{16} \frown \frac{1}{32}$	

Nota: Differentiae omnes huius progressionis faciunt 1. Seu quod idem est, si fractiones constituas in infinitas continue decrescentes, ex quibus nominator sit factus continue,

1 f. subtilitatis. | Si quis posset solvere hoc pr *gestr.* | Investigemus *L*

terminorum progressionis geometricae, numerator vero sit maximus terminus nominatorem constituentium unitate diminutus, summa harum fractionum infinitarum omnium est unitas, unde sequitur etiam eas fractionum summas omnes esse aequales inter se.

Quo theoremate nescio an cogitari possit mirabilius. Sed quomodo iam summas prioris progressionis inveniemus?

Constituantur duae istae progressiones, altera incognita terminorum, altera cognita differentiarum sibi parallelae: ut appareat an aliqua reperiri possit ratio inter ipsas.

Termini	Differentiae	Summae			Differentiae differentiarum
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1			
				(0)	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{4}{8}$	$\frac{1}{2}$		
				$\boxed{1}$ $(\frac{1}{4})$	$\frac{17}{64}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{8}{64}$	$\frac{1}{8}$		
				$\boxed{2}$ $(\frac{1}{16}\,\frac{1}{32})$	$\frac{97}{1024}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{16}{1024}$	$\frac{1}{64}$		
				$\boxed{3}$ $(\frac{1}{128}\,\frac{1}{256}\,\frac{1}{512})$	$\frac{449}{32768}$
$\frac{1}{32768}$	$\frac{31}{32768}$	$\frac{32}{32768}$	$\frac{1}{1024}$		
					etc.

8–18 *Neben der rechten Spalte:* Haec progressio in infinitum continuata facit $\frac{1}{2}$.

1 sit *(1)* ultimus terminus unitate *(2)* maximus *L* 6 altera *(1)* terminorum, altera differentiarum, altera cogni *(2)* incognita *L*

Aequales sunt summae progressionum, differentiae praemissae, et summa progressionis ipsius purae seu primariae, quod ex hoc schemate eleganter patet:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{2} & = & \frac{1}{2} \\[1ex]
\frac{3}{8} & = & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{8} \\[1ex]
\frac{7}{64} & = & \frac{1}{16} & + & \frac{1}{32} & + & \frac{1}{64} \\[1ex]
\frac{15}{1024} & = & \frac{1}{128} & + & \frac{1}{256} & + & \frac{1}{512} & + & \frac{1}{1024}
\end{array}$$

Ergo et duae progressiones

$$\left.\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\[1ex] \frac{3}{8} \\[1ex] \frac{7}{64} \\[1ex] \text{etc.} \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{c} \frac{1}{2} \\[1ex] \frac{1}{4} \\[1ex] \frac{1}{8} \\[1ex] \text{etc.} \end{array}\right.$$

sunt aequales ac proinde ex diversis principiis demonstratur, idem eleganti nota ac velut proba, in rebus tam intricatis et ab omni sensu penitus remotis, ubi alioquin nullus inductioni locus, gratissima veritatis.

Inquirendum est, quantum valeat summa haec rationum in infinitum:

$$\frac{4}{3} \;\Big|\; \frac{8}{7} \;\Big|\; \frac{16}{15} \;\Big|\; \frac{32}{31} \;\Big|\; \frac{64}{63}$$

est progressio decrescens quidem in infinitum, sed cuius tamen productum seu summa est infinitas. Ideo impossibile est eius quantitatem exprimere, at possibile est exprimere quantitatem differentiarum quae sunt

$$\frac{4}{21} \qquad \frac{8}{105} \qquad \frac{16}{465} \qquad \text{etc.}$$

1 progressionum, *(1)* ex positis, quod hac disposi *(2)* differentiae *L*   12 f. ac velut proba *erg. L*   13 et ... remotis *erg. L*   15 f. infinitum: *(1)* $\frac{4}{3}$ $\frac{8}{7}$ $\frac{16}{15}$ $\frac{32}{31}$ $\frac{64}{63}$ *(2)* $\frac{3}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{7}{8}$ 1 $\frac{15}{16}$ $\frac{31}{32}$ $\frac{63}{64}$ etc. *(3)* $\frac{4}{3}$ *L*   18 eius *(1)* rationem *(2)* num *(3)* quantitatem *L*

aequantur exacte $\frac{4}{3}$ seu $1\frac{1}{3}$. Si ergo ab hac progressione subtraheres terminos alterius progressionis valentis 1 haberes progressionem valentem $\frac{1}{3}$.

Nota hae differentiae hoc loco omnes sunt fractiones quae habent numeratores terminos progressionis geometricae seu numeratores termini praecedentis eiusdem, et nominatores factos ex duobus nominatoribus terminorum. Possum et sic procedere:

$$\frac{1}{0}\;\Big|\,0\,\Big|\;\frac{2}{1}\quad\frac{3}{2}\quad\frac{4}{3}\quad\frac{5}{4}\quad\frac{6}{5}\quad\text{etc.}\quad\text{differentiae sunt}$$

$$\frac{1}{2}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{12}\quad\frac{1}{20}\quad\text{etc.}\qquad\text{Hoc omne in infinitum facit 2.}$$

Hinc est in nostra potestate solvere hoc problema: cuilibet quantitati finitae facere seriem infinitorum terminorum aequalem, imo series infinitas. Hinc potest data qualibet serie infinita constitui series alia infinita, quae ad eam rationem habeat datam, id quidem facile. Item, ut ab ea differentiam habeat datam.

Ne tantum de s e r i e b u s infinitis loqui videamur, loquamur et de terminis, sed qui ex infinitis multiplicationibus vel divisionibus seu rationibus componuntur, ut

$$\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}} \text{ in infinitum.}$$

Haec ratio valet 1. Nam abici potest primum 1. inferioris, caeteris inferioris manentibus, quo facto numerator et nominator sunt aequales, seu fit ratio aequalitatis, id est 1. Sit iam ita:

$$\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc. in infinitum}}{3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \frown 7 \text{ etc. in infinitum}}$$

---

18 *Daneben:* Eodem modo $\frac{2 \smile 3 \smile 4 \smile 5 \text{ etc.}}{3 \smile 4 \smile 5 \smile 6 \text{ etc.}}$

4 seu ... praecedentis *erg.* *L* 11 f. datam | $\frac{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc.}}{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc.}}$ cui aequantur? Item: $\frac{2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \frown 6 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}}$ hoc aequatur 1. Sed si sic: 2 $\frown$ 3 $\frown$ *gestr.* | Ne *L* 13 multiplicationibus ... seu *erg.* *L*

---

7 Tatsächlich gilt $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\ldots=1.$ 15–86,3 Die hier vorgenommenen Kürzungen sind nicht zulässig. Tatsächlich geht der Wert des ersten Bruches gegen ∞, der des zweiten gegen 0. Mit den auf S. 86 Z. 14 angestellten Überlegungen liefert Leibniz selbst ein implizites Gegenargument.

abiectis terminis communibus residuum manet 2. in numeratore, in [nominatore] 1. est ergo tota ratio 2. Contra si sit terminus v.g. 2. [in] nominatore, qui non est in numeratore, ita enim valor erit $\frac{1}{2}$. In genere abiciantur termini communes, licet infiniti, utrinque, si finiti restant vel in summo vel in uno, vel utrobique, determinabunt quantitatem huius progressionis complicatae. Et determinare poterunt vel per modum simplicis multiplicationis, divisionisve vel mixtae cum additione, subtractione, radicum extractione. Sed si in uno termino sit multiplicatio, in altero divisio, productum fit infinite magnum, vel infinite parvum, ut facile patet cuivis consideranti.

Sed quid si termini non coincidant: ut si sit haec complicatio duarum progressionum, quarum altera est geometrica, altera constat ex terminis unitate differentibus a terminis geometricae v.g.

$$\frac{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc. in infinitum}}{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc. in infinitum}}.$$

Hoc casu determinari nihilominus quantitas quidem potest, crescit enim ratio in infinitum, ex. causa $\frac{2 \frown 4}{1 \frown 3}$ facit $\frac{8}{3}$. at $\frac{2 \frown 4 \frown 8}{1 \frown 3 \frown 7}$ facit $\frac{64}{21}$ ⨍ $3\frac{1}{21}$. quod iam est maius priore, ideo invertenda est positio, hoc modo:

$$\frac{1 \frown 3 \frown 7 \frown 15 \frown 31 \text{ etc.}}{2 \frown 4 \frown 8 \frown 16 \frown 32 \text{ etc.}} \text{ in infinitum.}$$

Ita enim terminus continue decrescit in infinitum. Sed investigandum est, an ita decrescat, ut nihilo minus productum fiat [finitum], quod aliquando fit, ut supra exemplo ostendi-

---

8 *Daneben, ohne direkten Bezug zum Haupttext:*

$$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2} \qquad \frac{2}{6}-\frac{3}{6} \qquad \frac{2}{6}\times\frac{2}{4} \qquad \frac{8-12}{24} \qquad \frac{\frac{2}{8}-\frac{2}{6}}{\frac{2}{6}-\frac{2}{4}} \begin{matrix} = 0-\frac{1}{12} \\ = 0-\frac{1}{6} \end{matrix} \qquad \frac{\frac{8}{2}-\frac{6}{2}}{\frac{6}{2}-\frac{4}{2}} \begin{matrix} 4-3=1 \\ 3-2=1 \end{matrix}$$

12 *Späterer Zusatz in der rechten Spalte:* $\frac{1+1 \frown 3+1 \frown 7+1 \frown 15+1}{1 \quad \frown \quad 3 \quad \frown \quad 7 \quad \frown \quad 15}$ $\frac{2}{1} \frown \frac{4}{3} \frown \frac{8}{7} \frown \frac{16}{15}$.

1 numeratore *L ändert Hrsg.* 2 sit *(1)* plus in *(2)* terminus *(a)* in *(aa)* numer *(bb)* nominatore *(b)* v. g. 2 | in *erg. Hrsg.* | nominatore, *L* 2 f. numeratore, *(1)* et ita omnes termini nu *(2)* ita *L* 6 vel . . . extractione *erg. L* 13 potest, *(1)* admiranda quadam ratione: potest enim ratio ita stare $\frac{1+1 \frown 3+1 \frown 7+1 \frown 15+1}{1 \quad \frown \quad 3 \quad \frown \quad 7 \quad \frown \quad 15}$ *(2)* crescit *L* 18 fiat *(1)* finitum *(2)* | infinitum *ändert Hrsg.* |, quod *L*

---

18 supra: s. oben S. 82 Z. 6–17 .

mus, an ita, ut evanescat in nihilum, seu minus quolibet dato; an vero potius aequetur alicui finito, quod rationibus nostris usibusque commodissimum foret, investigabimus ita:

$$\frac{\underset{1}{\cancel{1}} \frown \underset{1}{\cancel{3}} \frown \underset{1}{\cancel{7}} \frown \underset{1}{\cancel{15}}}{\frac{1+1}{1} \frown \frac{3+1}{3} \frown \frac{7+1}{7} \frown \frac{15+1}{15}} \text{ etc.} = \frac{1 \frown 1 \frown 1 \frown 1 \text{ etc.}}{2 \frown 1\frac{1}{3} \frown 1\frac{1}{7} \frown 1\frac{1}{15} \text{etc.}} \text{ vel } \frac{1}{\frac{2}{1} \frown \frac{4}{3} \frown \frac{8}{7} \frown \frac{16}{15} \text{ etc.}}.$$

Est ergo minus productum quolibet dato, scilicet unitas divisa per infinitum. Idem brevius ostendi poterat ex ipsa rationis maioritatis in rationem [minoritatis] transformatione.

Sed ut ad nostram illam progressionem geometricam secundariam, in qua aqua etiamnum haeret, redeamus.

Investiganda est ratio harum duarum progressionum.

Termini	Differentiae
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$
etc.	etc.
Summa huius quaeritur.	Summa huius inventa, est 1.

Investigemus rationes aliquot terminorum, ut lux nobis aperiatur $\dfrac{\frac{1}{2}+\frac{3}{8}+\frac{7}{64}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{1}{64}}$. Addantur termini tam nominatoris quam numeratoris ad se invicem.

Erit numeratoris haec reductio $\frac{1}{2} \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{64}$

1 vero potius *erg. L* 4–6 Idem ... transformatione. *erg. L* 5 maioritatis *L ändert Hrsg.* 18 f. Addantur ... invicem. *erg. L*

7 f. ut ... redeamus: ebd. 7 f. aqua ... haeret: Cicero, *De officiis*, 3, 33.

$$\frac{1}{2}\times\frac{3}{8}=\frac{8+6}{16}=\frac{14}{16}\times\frac{7}{64}=\frac{896+112}{1024}=\frac{1008}{1024}.$$

Et nominatoris haec erit reductio

$$\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\quad\frac{8+2}{16}=\frac{10}{16}\times\frac{1}{64}=\frac{640+16}{1024}=\frac{656}{1024}.$$

Abiciatur divisor communis 1024 et a nominatore et a numeratore, producta ratio erit: $\dfrac{1008}{656}\left|\dfrac{504}{[328]}\right.$. Sed ex his nullus ad problematis solutionem aditus aperitur.

Omnes fere termini seriei cuiuscunque in infinitum decrescentis videntur esse aut summae aut differentiae, aut termini (transsiliendo quoque), aut potestates radicesve, et horum rursus aut summae aut differentiae, horumve variae mixturae: terminorum progressionis alicuius geometricae (aut harmonicae).

De differentiis differentiarum hoc loco aliquid dicendum est:

$$\begin{array}{cccccccccc}
8 & & & & \qquad\qquad & 27 & & & \\
 & 4 & & & & & 18 & & \\
4 & & 2 & & & 9 & & 12 & \\
 & 2 & & 1 & & & 6 & & 8 \\
2 & & 1 & & & 3 & & 4 & \\
 & 1 & & & & & 2 & & . \\
1 & & & & & 1 & & . & \\
 & & & & & & . & & . \\
 & & & & & . & & . & \\
 & & & & & & . & & . \\
 & & & & & & & . & \\
 & & & & & & & & .
\end{array}$$

10 *Zur Streichung, nicht gestrichen:* NB. Manent vera quae de differentiis differentiarum dico, etsi supra ostensum sit, aliquando aliquas differentiarum series non esse continue decrescentes, etsi series terminorum sit continue decrescens. Sed hoc casu ubi series crescere incipit, ibi finiri censetur series decrescens per 0.

5 323 *L ändert Hrsg.* 6 fere *erg. L* 7 (transsiliendo quoque) *erg. L* 10 dicendum *(1)* esto *(2)* est *L*

24 supra: s. oben S. 72 Z. 16–18.

Regula: Summa differentiarum generantium seu primarum addita termino primo aequatur omnibus differentiis et differentiarum differentiis in infinitum.

27. 18. 12. 8. etc. = 18. 6. 2. etc. 12. 4. etc. 8. etc. Nam 27. aequatur seriei differentiarum primae, et 18. 2^{dae}, et 12. 3^{tiae}, et sic in infinitum. Similiter 18. 12. 8. etc. aequantur 12. 4. etc. 8. etc. etc.

Hinc si qua progressio ita comparata sit, ut ipsarum differentiarum generantium infinitarum iniri possit summa, ut in progressione geometrica dupla, ubi differentiae generantes coincidunt ipsis terminis progressionis geometricae duplae continue decrescentibus, utrobique enim sunt 8. 4. 2. 1. etc. Iam 8. 4. [2.] 1. etc. faciunt in universum 16. seu 8 ⌢ 2. Ergo omnes differentiae differentiarum, seu series, numero infinitae quarum quaelibet continet differentias numero infinitas, ac proinde multitudo quantitatum (rationem cognitam habentium) infinities infinita, aequatur magnitudini cuidam finitae, etsi quaelibet ex multitudine illa habet rationem cognitam finitam ad magnitudinem cui aequantur omnes. Quod est admirandum.

Nota istae differentiae primae sunt generantes per subtractionem, non per additionem, atque ideo in illis inflectendam esse regulam meam quam alibi de differentiis generantibus in seriebus crescentibus tradidi. Igitur invertenda res est, et loco progressionis decrescentis consideranda est crescens, seu loco 27. 9. 3. 1. etc. dicendum est 1. 3. 9. 27. etc. ibi vero differentiae generantes erunt 1. 2. 4. 8. numeri scilicet progressionis geometricae unitate differentis, ut a me supra ni fallor demonstratum memini. Et quia praecedens ante geometricam duplam est unitas, ideo fit ut iidem maneant termini differentiarum primus secundus tertius eiusdem ordinis. Ex his etiam patet numeros progressionis geometricae unitate minoris esse differentias generantes simplices datae, at binario differentes, esse differentias generantes quadratas datae seu secundi gradus, et ternario, differentias cubicas seu tertii gradus. Sed haec obiter.

1 | Esto series decrescens progressionis geometricae, in ea manifestum est differentias differentiarum simul sumtas, aequari omnibus terminis progressionis demto primo. Videndum quid in alia progressione contingat. Ibi vero id falsum esse evincitur. Sic ergo recte constituetur *gestr.* | Regula *L*
6 ipsarum *(1)* terminorum generantium in *(2)* differentiarum *L* 9 2 *erg. Hrsg.* 10 seu 8 ⌢ 2. *erg. L* 12 (rationem cognitam habentium) *erg. L* 12 aequatur *(1)* termino cuidam finito *(2)* magnitudini *L*

1 f. Wie die Zahlenbeispiele zeigen, bezieht sich die Regel auf Nullfolgen. Nur für diese gilt sie.
16 alibi: N. 5 Teil 2. 20 ut ... memini: Offenbar ist die rechte Tabelle von S. 88 Z. 11–22 gemeint.

Cuiuscunque rationis sit progressio, modo ratio illa sit numerus integer, sumenda est differentia eius gradus cuius est unitates, vel si progressio aliunde quam ab unitate coepit, is ipse numerus repetitus, quod est notabile.

Sed inquirendum quid eveniat, si ratio non sit numerus integer sed fractus aliquis aut ratio surda, an ibi quoque locum habeat quod de ratione unitate minore dixi, subtilissimae nec certe inutilis hoc est pervestigationis, sed ab hoc loco alienae.

Si quis data serie in infinitum decrescente summae finitae reperiat modum inveniendi aliam seriem, in infinitum decrescentem (sive summae finitae, sive summae infinitae,) cuius differentiae sint termini seriei praecedentis; is datae seriei summam reperire potest, quia seriei inventae initium erit seriei datae summa. Hoc problema etsi videatur facillimum, est tamen ex difficillimis quae ab homine fingi possunt. Hoc quisquis repererit, uno velut ictu geometriam ad perfectionem admirandam perduxerit. Pendet hoc problema ex theoremate totius huius tractationis fundamentali, quod in serie qualibet continue decrescente terminus datus est summa omnium differentiarum sequentium.

Ego initio mihi ipsi obiectionem feceram quae me diu anxium tenuit; cogitabam enim, posse contingere, ut idem aequale sit inaequalibus, quod sit absurdum, quia terminum scilicet primum, pro arbitrio eligere liceat. Sed hoc falsum esse, nec terminum primum pro arbitrio eligi posse experiundo comperi. Non enim nisi unico quodam certo termino electo continget progressionem decrescere in infinitum (nam cum numeris nihilo minoribus nullum nobis hic negotium esse potest.)

Verbi gratia esto progressio continue decrescens 4. 2. 1. $\frac{1}{2}$. etc. quaeritur alia progressio, cuius differentiae sint termini praecedentis. Ponamus eam incipere a 6. Erit ergo hic progressus:

4–6 NB.

2 cuius *(1)* |est numerus *streicht Hrsg.*| *(2)* est *L* 5 de *(1)* rationibus *(2)* ratione *L* 7 data ... finitae *erg. L* 18 primum *erg. L*

5 quod ... dixi: s. oben S. 71 Z. 14–16. 13 ex theoremate ... fundamentali: s. oben S. 68 Z. 7–9. 15 cogitabam: N. 5 S. 60 Z. 2–4.

$$\begin{array}{ccc} 6 & & \\ & \backslash\!\backslash & \\ & & 4 \\ & \mp & \\ 2 & & \\ & \backslash\!\backslash & \\ & & 2 \\ & \mp & \\ 0 & & \end{array}$$

Ecce evanescit mature nec procedit in infinitum. Ita progressio 9. 3. 1. $\frac{1}{3}$. etc.

Problema illud magnum, invenire aliam progressionem cuius differentias contineat data, intelligendum est, scilicet cognita progressionis datae, ratione.

Nota verae repertae progressionis, seu veri termini primi haec est, si communis quaedam ratio seu constructio in infinitum descensura terminorum quaesitorum *A*. *C*. *E*. reperiri potest.

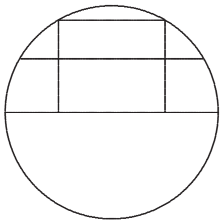
Caeterum ex his quae iam inventa sunt methodus reperiri potest quadrandi plurimas lineas curvas, etiam quae ne describi quidem, nisi per puncta hactenus aut vulgaribus saltem modis, possint, etsi forte describi possint motibus complicatis possibilibus si non factis, saltem intellectis seu suppositis.

Ex eo quod in regula nostra fundamentali dictum est, sequuntur innumerabilia in geometria, ut ex. grat. omnes differentias chordarum omnium infinitarum aequari diametro. Et differentias chordarum interpositarum inter diametrum et semidiametrum aequari semidiametro. Differentias diversas hinc a diametro illinc a semidiametro esse sibi complemento ad rectum. Omnes illos varios modos distribuendi semidiametrum, conficere ellipsin, si tres sint partes ellipsin solidam, si per 4 distribuatur ellipsin quadrato-quadraticam etc. Tentandum an ex his aliquid circa sectionem arcuum deduci possit.

11 est, *(1)* si *(a)* ut diff. *(b)* B + C facit *(2)* si *L*   16 possibilibus *erg.* *L*

---

18 regula nostra: s. Erläuterung S. 90 Z. 13. Leibniz greift im folgenden den Text und die Figur von S. 67 Z. 15 – S. 68 Z. 2 wieder auf.



[*Fig. 3*]

Si quis novum aliquod theorema fundamentale circa infinitum detexerit, is poterit longius ire,

$$\begin{array}{lllll}
A & & & & B \frown b = A \\
 & = & & & \\
 & & b & & \\
 & \frown & & & \\
B & & & & C \frown c = B \\
 & = & & & \\
 & & c & & \\
 & \frown & & & \\
C & & & & D \frown d = C \\
 & = & & & \\
 & & d & & \\
 & \frown & & & \\
D & & & & \text{etc.} \quad \text{etc.}
\end{array}$$

Auferantur omnes multiplicantes in infinitum, fiet

$$\begin{array}{lll}
\text{ex} & A & B \\
 & B & C \\
 & C & D \\
 & D & E \\
 & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

Ergo A $(B \frown b)$ est aequale differentiae inter $B + C + D$ etc. et $B \frown b + C \frown c + D \frown d$ etc. in infinitum.

Hinc porro sequitur differentiam istam esse aequalem differentiis terminorum simul sumtis in infinitum, et si nullus sit progressus in infinitum, addito differentiis termino ultimo, si scilicet ultimo loco ponatur 0.

Si qua series infinita (sive crescens sive decrescens, sive etiam perturbata utcunque) dividatur per rationes inter terminos interiectas productum erit, ipsa series, demto termino primo. Dividi autem intelligendum est quemlibet terminum per rationem antecedentem. Nota si ista ratio est fractio minor unitate, tunc ipsa progressio est descendens, et per consequens divisio per rationes est in reapse multiplicatio. Contra si fractio est unitate maior, est ista divisio, vera divisio, et progressio est continue crescens.

Quoniam differentiis earumque summis uti possumus ad infinita mensuranda, ideo huius loci est, nonnihil de differentiis ratiocinari. Nimirum:

Si fiant duo rectangula alterum factum ex ductu differentiae in terminum primum, alterum factum ex ductu differentiae in terminum secundum, summa rectangulorum aequatur rectangulo ex summa terminorum in differentiam ducta. Et hoc quidem per se patet.

$$\begin{array}{lll}
\quad 2 & \qquad 4 & \qquad 3 \\
6 \quad 8 & \qquad 6 \quad 10 & \qquad 4 \quad 7 \\
6 \frown 2 + 8 \frown 2 = 6 + 8[,] \frown 2. & & 8 \frown 2 - 6 \frown 2 = 2 \frown 2
\end{array}$$

---

2 NB. Si series sit decrescens.

12–94,11 *Dazu auf der vorangehenden Seite:* Differentia inter rectangulum ex differentia et termino uno, et rectang. ex differentia et termino altero est quadratum differentiae.

Et summa est summa ipsorum terminorum multiplicata per differentiam.

Sed quomodo inveniemus differentiam inter summam et differentiam, vel inter quadratum differentiae et summam, vel inter quadratum differentiae et summam rectangulorum, vel inter summam et differentiam horum rectangulorum, ea est terminus primus multiplicatus per differentiae duplum.

10 earumque summis *erg. L*

4–9 Richtig wäre „per rationem sequentem“ statt „antecedentem“, „crescens“ statt „decrescens“, „decrescens“ statt „crescens“.

Sed pergamus:

Differentia inter eadem rectangula, aequatur quadrato differentiae inter terminos. Hoc ita demonstratur.

$$a.\ \overset{b}{a{+}b},\ \ ab+aa-ab=aa.$$

Differentia inter eorundem rectangulorum summam, et eorundem rectangulorum differentiam aequatur rectangulo facto ex termino primo seu minore et differentia duplicata. Nam

$$ab+aa, +ab, -aa = ab+ab = a \frown 2b.$$

Et contra si quadrato differentiae addas rectangulum factum ex duplo differentiae et termino primo, habebis summam duorum rectangulorum.

Data summa rectangulorum $a \frown 2b + aa$. terminoque primo, invenire differentiam et terminum alterum, vel uno ex his tribus dato invenire tertium, hoc nescio an sit solubile: videamus.

Secetur scilicet ista summa rectangulorum data in duas partes, quarum una sit quadratum termini qui cum dato bis multiplicatus faciat alteram. Esto ergo terminus datus b. summa data c^q, quae ita secari iubetur. Ideo secta iam putetur in partes duas d^q. et $c^q - d^q$. ex quibus d^q. ponatur esse pars una quae est quadratum[,] ergo eius Rq. est d. multiplicata per terminum datum b. bis faciet $2b \frown d = c^q - d^q$ seu $2b = \dfrac{c^q - d^q}{d}$ seu $2b = \dfrac{c^q}{d} - \dfrac{d^q}{d}$ seu $2b = \dfrac{c^q}{d} - d$ seu $2b + d = \dfrac{c^q}{d}$ seu $d = \dfrac{c^q}{d} - 2b$. Dividantur omnia per d. fiet $1 = \dfrac{c^q}{dd} - \dfrac{2b}{d}.\ 1 + \dfrac{2b}{d} = \dfrac{c^q}{dd}$.

Nota quadrati differentiae ratio ad ipsam summam rectangulorum differt unitate a ratione inter ipsam partem duplicatam, et differentiam.

7 seu minore *erg. L* 15 data *erg. L* 16 f. terminus datus b. *erg. L* 17–23 data *(1)* c, quae ... duas d. et c − d. ex quibus d ponatur ... Ergo eius Rq d multiplicata ... faciet $2b \frown \mathrm{Rq}\,d = c - d$. seu $2b = \dfrac{c-d}{\mathrm{Rq}\,d}$. seu $2b = \dfrac{c}{\mathrm{Rq}\,d} - \dfrac{d}{\mathrm{Rq}\,d}$. seu $2b = \dfrac{c}{\mathrm{Rq}\,d} - d$. seu $2b + d = \dfrac{c}{\mathrm{Rq}\,d}$. seu $d = \dfrac{c}{\mathrm{Rq}\,d} - 2b$. Dividantur omnia per d, fiet $1 = \dfrac{c}{d} - \dfrac{2b}{d}.\ \dfrac{1+2b}{d} = \dfrac{c}{d}$. Nota, si partem | quamlibet *erg.* | assumes summae rectangulorum, eius ratio ad ... ratione inter differentiam duplicatam, et *(a)* ipsam partem *(b)* ipsius partis radicem *(2)* c^q *L*

9 Dem Wortlaut des Textes entspricht das Produkt $b \frown 2a$. 22 f. Leibniz hat die beiden ersten Glieder der Proportion irrtümlich vertauscht.

Nota, quia differentia et terminus minor sibi mutuo sunt differentia et terminus, ideo variari potest haec enuntiatio multis modis, ut differentiae voci substituatur vox termini minoris et contra.

Videndum quousque haec transpositio permitti possit in differentiis et terminis pluribus continuatis, et in differentiis differentiarum.

Nota in omnibus differentiis decrescentibus terminus ultimus censendus est 0. Is enim est terminus ultimus etsi decrescat series in infinitum.

Hinc summa differentiarum est differentia inter terminum primum et ultimum. Ultimus autem est 0. Ergo summa differentiarum aequalis est termino primo assumto.

Si sint duae series infinitae

$$\begin{array}{lllll}
B & \frown & b & & \\
C & \frown & c = B & & \\
D & \frown & d = C & & \\
\text{etc.} & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lll}
B & \smile & c = C \\
C & \smile & d = D \\
D & & \\
\text{etc.} & &
\end{array}$$

ostensum est $B \frown b$. vel A aequari differentiae inter utramque.

Item differentiam inter

$$\begin{array}{ccc}
B \smile c & \text{et} & B \\
C \smile d & & C \\
D \smile e & & D \\
\text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}$$

esse B

posito quod c. sit ratio inter B et C et d. sit ratio inter C et D etc.

et inter duas progressiones

$$\begin{array}{cc}
B \frown c & B \smile c \\
C \frown d & C \smile d \\
D \frown e & D \smile e \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

differentia erit $B \frown c + B$. seu $A + B$.

1 terminus *(1)* primus *(2)* minor *L* 10 duae *(1)* progressiones *(2)* series *L* 23–28 et ... A+B. *erg. L*

---

15 ostensum: s. o. S. 92 Z. 23 f. 16 Item: s. o. S. 93 Z. 4–6. 28 differentia … $A + B$.: Die Aussage ist falsch, da für die beiden Folgen der vorangehenden Tabelle unterschiedliche Definitionen von b, c, d etc. eingesetzt werden. Während für die Folge in der rechten Spalte wie bisher gilt $B : c = C$, $C : d = D$, setzt Leibniz in der linken Spalte $B \cdot c = A$, $C \cdot d = B$. Im folgenden Text bis S. 96 Z. 10 wird konsequent mit der Definition $B \frown c = A$ gerechnet.

Ergo ducatur differentia in utramque progressionem, seu in quemlibet eius terminum.

$$\begin{array}{llll} B \frown c & (\frown B \frown c) \frown A & - & B \frown (B \frown c)A \\ C \frown d & & - & C \\ D \frown e & & - & D \\ \text{etc.} & & & \end{array}$$

differentia inter has duas series erit $B \frown c \frown B \frown c$ seu $A \frown A$; vel A quadr. Eodem modo de caeteris.

Quod si iam A duplicetur fiet $2A$ seu $2B \frown c$. Et hoc A duplicatum ductum in seriem minorem B. C. D. etc. addito A quadrato faciet duorum istorum rectangulorum summam. Et haec reduci poterit ad aliquid finitum enuntiabile, si ipsa series sit summabilis.

Dantur etiam series continue crescentes, quae tamen habent summam finitam, sed eae sunt complicatae.

Nota investigandum esset quid sit terminus ipse maior ad minorem, aut differentiam seu si terminus assumtus sit maior et unus minorum seu differentia. Ergo loco A.

$$\begin{array}{ccc} & B & \\ A & & A+B \quad \text{ita concipiemus:} \\ & B & \\ A & & A-B \end{array}$$

investigemus: summam rectangulorum: $AB + BA - BB$. erit non ut ante rectangulum ex termino dato primo et differentia [duplicatum] addito quadrato sed potius demto quadrato.

Differentia rectangulorum manet eadem quae prior quadratum differentiae, differentia differentiae rectangulorum a differentiae summae est rectangulum differentiae et termini dati duplicatum, demto quadrato differentiae [duplicato].

Porro ex his principiis etiam possunt dari duae rationes inter finitum et infinitum, unitate differentes inter se. Unde intelligi potest aliquam esse quantitatem rationis finiti

---

25–97,2 *Daneben in der rechten Spalte:* Exhiberi facile potest ex communibus prin-

8 in *(1)* terminum *(2)* seriem *L* 14 seu si terminus *(1)* cognitus *(2)* assumtus ... differentia *erg. L* 19 BB. *(1)* erit itidem differentiae $\square^{\text{tum}}$. Et differentia inter rectangulorum summam | erit *streicht Hrsg.* | *(2)* erit *L* 20 duplicatum *erg. Hrsg.* 24 f. differentiae | duplicato *erg. Hrsg.* |. | Sed haec supponunt differentiam esse minorem termino dato, seu eum ex duobus terminis datis pro differentia, hoc non potest manquer *gestr.* | Porro *L* 25 dari *(1)* quaedam *(2)* duae *L*

ad infinitum, quando differentia inter duas eiusmodi rationes esse potest. Demonstratio in promtu est ex dictis.

Si sumas A differentiae inter duas progressiones supra dictas, quadratum, et ponas ipsarum progressionum summas esse magnitudine infinitas, ut si sint continue crescentes purae, (non complicatae) et, ista differentia A. in quamlibet progressionem ducatur et facta rectangula (ex uno latere infinito altero finito) inter se addantur, (quo facto fiet series supra novissime posita mutando tantum signum $-$ in $+$) et ratio aliqua huius $\square^{\mathrm{ti}}$ A seu AA ad hanc summam esse intelligatur, ita ut summa sit numerator, quadratum sit nominator (vel contra) et vero constituatur alia quoque ratio inter duplum minoris seriei: $B.C.D.$ etc. (vel $B \smile c.$ $C \smile d.$ $D \smile e.$ etc.) in infinitum progredientis (seu summam magnitudine infinitam habentis ex hypothesi;) et differentiam: ita ut duplum seriei illius magnitudine infinitum sit numerator, differentia quae magnitudine finita est, sit nominator (vel contra). Ratio haec unitate differet a praecedente per supra positam regulam.

---

cipiis geometriae finitum aliquod aequale spatio infinitae longitudinis continue decrescentis latitudinis, ut circulus aequalis polygono inscripto cuidam, et continuis differentiis sequentium polygonorum etc. quae si in una serie continua locarentur spatium infinitae longitudinis conficerent. Sed non nisi in uno exemplo habemus, ut totius quantitas non minus quam cuiuslibet ex partibus assumtis possit enuntiari, hoc exemplum est in progressione geometrica dupla. Et id posset accommodari ad geometriam, si assumatur non linea sed rectangulum et dimidia eius pars extensa intelligatur in longitudinem aequalem primae et dimidia dimidiae itidem etc. Necesse esset longitudinem totius fieri infinitam, et tamen spatium aequari duplo primae partis □ ▭ ▭ etc. Elegans erit cogitare de ratione haec spatia asymptota vel infinita ita construendi [ut] una quadam linea includantur. Consulenda hic quae a Barocio sunt demonstrata.

3 sumas *(1)* quadr *(2)* A^q. differe *(3)* quadratum, A, *(4)* A *L* 4 magnitudine *erg. L* 9 f. inter *(1)* minorem seriem ... progredientem *(2)* duplum *L* 12 magnitudine infinitum *erg. L* 24 ut *erg. Hrsg.*

---

3 supra dictas: s. o. S. 92 Z. 23 f. 7 supra novissime: s. o. die Tabelle nach S. 96 Z. 1. Mit einem Verweisungsstrich hat Leibniz diesen Zusammenhang verdeutlicht. 25 Barocio: Fr. Barozzi, *Admirandum illud geometricum problema*, 1586.

Si sumatur series terminorum in infinitum decrescentium et assumi intelligantur omnes quorumlibet duorum terminorum proximorum rationes quae proinde numero infinitae sunt, eaeque rationes in se invicem duci intelligantur: tunc si quidem series data in infinitum decrescens, sit numerorum (nihil refert purorum an surdorum), omnes rationes in se invicem ductae, aequantur termino primo, seu primam rationem proxime

---

1 *Daneben in der rechten Spalte:*

$$\begin{array}{lll} A & & A = a \frown b \frown c \frown d \text{ etc.} \\ \quad\smallsetminus\!\!\smallsetminus & & \\ & a & \\ \quad\frown & & \\ B & & \\ \quad\smallsetminus\!\!\smallsetminus & & \\ & b & \\ \quad\frown & & \\ C & & \\ \quad\smallsetminus\!\!\smallsetminus & & \\ & [c] & \\ \quad\frown & & \\ D & & \\ \quad\smallsetminus\!\!\smallsetminus & & \\ & [d] & \\ \quad\frown & & \\ E & & \end{array}$$

1 infinitum *(1)* , rationes *(2)* decrescentium *(a)* et factus ex ducta omnium rationum in se invicem *(b)* et *L* 2 omnes *(1)* eorum *(2)* quorumlibet *L* 2 proximorum *erg. L* 4 numerorum | (nihil ... surdorum) *erg.* | series *gestr.* |, omnes *L* 17 d *L ändert Hrsg.* 21 e *L ändert Hrsg.*

4–99,1 Leibniz überträgt unzulässigerweise den Satz über die Summe der Differenzen einer Nullfolge auf das Produkt ihrer Quotienten. Der Fehler vererbt sich bis S. 101 Z. 16. In dem nachgetragenen Absatz, S. 100 Z. 6–17 schwächt er die Aussage ab; sein Versuch der Richtigstellung trifft das Problem aber nicht genau. Tatsächlich würde der Satz nur gelten, wenn die Quotientenfolge gegen 1 ginge.

praecedenti. Si non sit series numerorum seu quantitatum, sed quantorum, ut linearum, tunc quia alioquin rationes terminis sunt heterogeneae, necesse est eas imbui ipso rerum genere, seu ductas intelligi, in id quod in eo genere minimum est, ut ad lineas constituendas in punctum, ad plana constituenda in lineam, ad tempus constituendum in instans, ad motum constituendum in conatum, et ita omnes istae rationes in se invicem ductae, et termino homogeneae redditae, termino aequabuntur. Vel quod idem est, si terminus aliquis assumatur et rationes omnes in ipsum ductae intelligantur, summa omnium productorum, erit duplum termini.

Ideo si sint plures series progressionis geometricae continue decrescentes, omnes incipientes ab eodem termino

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{8} & & \frac{1}{27} & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{16} & & \frac{1}{81} & \\
 & & & & \\
 & \text{etc.} & & &
\end{array}$$

et contra aliquis sibi imaginetur aliquem ab infinito incepisse multiplicare in se invicem $\frac{1}{3}$ vel $\frac{1}{2}$ ascendendo et nunc esse in $\frac{1}{81}$ vel in $\frac{1}{16}$ et continuare, is exacte producet 1.

1 seu quantitatum, *erg. L* 8 f. termini. | Imo error est, quia post eundem terminum plures possunt constitui series in infinitum decrescentes, diversae *gestr.* | Ideo *L* 9 decrescentes, *(1)* manifestum *(2)* omnes *L* 21–100,1 producet 1. *(1)* Si | quis *gestr.* | omnia *(2)* Et *L*

Et ideo mirum est omnes harum rationum potestates infinitas numero ab una parte in se invicem ductas, concurrere aliquando in 1. Ita omnes infra $\frac{1}{3}$ in se invicem ductae faciunt $\frac{1}{3}$. Vel sic potius ut ea sit ratio maioritatis in ascensu, quae est minoritatis in descensu ut descensus est $\frac{1}{3}$ ascensus debet esse 3. Est ergo semper ratio descensus rationis ascensus inversa.

Quae hoc loco de rationum factis dixi non sunt universaliter vera, possunt enim termini inter decrescendum tantum a se invicem abesse, per saltus ut ratio fiat maxima ut At si termini sint crescentes:

8			1	
	2			$\frac{1}{3}$
4			3	
	$\frac{4}{3}$			$\frac{3}{4}$
3			4	
	3			$\frac{2}{3}$
1			6	
	$\frac{1}{\frac{1}{1000}}$	seu 1000	9	
$\frac{1}{1000}$			1000	

Ergo non nisi de serie progressionis geometricae veritatem demonstrare possim. Idem forte ubicunque ipsae rationes continue decrescunt, uti quando differentiae continue decrescunt. Imo erit sic in rationibus falsum.

2 omnes *(1)* illae potestates *(a)* inf *(b)* de $\frac{1}{3}$ *(c)* infra $\frac{1}{3}$ *(2)* infra *L* 3 $\frac{1}{3}$. *(1)* Idem esse universaliter verum ita demonstrari potest: *(2)* Vel *L* 6–20 Quae ... falsum. *erg. L*

6 dixi: s. Erl. zu S. 98 Z. 4 – S. 99 Z. 1.

$$
\begin{array}{ccc}
A & & \\
 & \setminus\!\setminus & \\
 & & f \\
 & \frown & \\
B & & \\
 & \setminus\!\setminus & \\
 & & g \\
 & \frown & \\
C & & \\
 & \setminus\!\setminus & \\
 & & h \\
 & \frown & \\
D & & \\
 & \setminus\!\setminus & \\
 & & i \\
 & \frown & \\
E & &
\end{array}
$$

Ostensum est $A.$ esse aequale differentiae inter $B.C.D.E.$ etc. et $B \frown f. + C \frown g. + D \frown h. + E \frown i.$ etc. Ergo in serie progressionis geometricae differentia ista aequalis est rationibus omnibus: simul sumtis

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & & \frac{1}{4} & & \frac{6}{4} \Big| \frac{3}{2} & & \\
 & \frac{3}{4} & & \frac{2}{3} & & 2 & \\
6 & & 8 & & 12 & & 24
\end{array}
$$

$$3 \qquad 27 \qquad 81$$

Infinitae series infinitorum ex traditis facile fabricari possunt ut

$$\frac{4}{\frac{1}{2}} \text{ seu } 8 = \frac{4}{\frac{1}{4}} + \frac{4}{\frac{1}{8}} + \frac{4}{\frac{1}{16}} \text{ etc.}$$

18 $\frac{3}{4}$ *(1)* $\frac{2}{4}$ *(2)* $\frac{2}{3}$ *L*

---

14 Ostensum est: s. oben S. 92 Z. 23 f. 18 Statt 2 müßte es $\frac{1}{2}$ heißen. Daraus und aus der Korrektur beim vorangehenden Element erklären sich die Werte der obersten Tabellenzeile, deren Elemente durch Differenzenbildung entstanden sind.

Imo error in hoc exemplo, non enim idem est aliquid dividi per partes, vel dividi per totum. Sed quia idem est totum dividi, et partes dividi invertatur ut

$$\frac{\frac{1}{2}}{4} \text{ seu } \frac{1}{8} = \frac{\frac{1}{4}}{4}\ \frac{\frac{1}{8}}{4}\ \frac{\frac{1}{16}}{4} \text{ etc. Quod eodem redit ac si diceres}$$

$$\frac{1}{8} = \frac{1}{16}\ \frac{1}{32}\ \frac{1}{64} \text{ etc.}$$

aut si dividas $\frac{3}{4}$ per 6. fiet $\frac{3}{24}$.

$$\frac{\frac{3}{4}}{6} = \frac{\frac{3}{8}}{6} \qquad \frac{\frac{3}{16}}{6} \quad \frac{\frac{3}{32}}{6} \text{ etc.}$$

$$\frac{3}{24}\Big|\frac{1}{8} \qquad \frac{3}{48}\Big|\frac{1}{16} \qquad \frac{3}{96}\Big|\frac{1}{32} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{\frac{3}{4}}{5} = \frac{\frac{3}{8}}{5} \quad \frac{\frac{3}{16}}{5} \quad \frac{3}{32} \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{3}{20} = \frac{3}{40} \quad \frac{3}{80} \qquad\qquad \text{etc.}$$

Eodem modo si multiplices $\frac{1}{8}$ per $\frac{5}{4}$ fiet $\frac{5}{32} = (\frac{5}{4}\frac{1}{16})\frac{5}{64}\ \ \frac{5}{128}$ etc.

Idem est etsi per numerum surdum multiplices etc.

Arithmetica infinitorum mea est pura, Wallisii figurata.

Non est dubitandum, quin aliquae series constantes licet ex numeris rationalibus, aequentur numeris surdis, quod investigandum.

Si qua offeratur series in unum addenda, haec est methodus in eius summam inquirendi generalis: ut quaerantur eius differentiae, et differentiarum differentiae, donec vel appareat aliqua ratio terminorum progressionis datae, ad terminos seriei cuiusdam continuo decrescentis differentiarum vel si hoc non appareat, quaeratur ratio progressionis differentiarum correspondentium: ut primae differentiae seriei primae, et seriei secundae, et seriei tertiae, etc. [invento] progressionis eiusmodi fundamento, continuari potest retro

21 etc. *(1)* inventa hac progressione, *(2)* | inventa *ändert Hrsg.* | progressionis *L*

13 Wallisii: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I, S. 355–478).

invenirique proinde termini alicuius progressionis, cuius differentias contineat series data, terminis autem istis inventis summa progressionis datae inventa est.

Quemadmodum autem non potest omnis aequatio affecta reduci ad puram, nec omne problema resolvi per *Elementa* seu geometriam puram; ideo nec omnis series summari potest, huius methodi ope, quia nec serie terminorum data semper in potestate nostra invenire fundamentum progressionis. Infinita tamen hac methodo resolvi posse, manifestum est, ex dictis. Videndum an nota sit insolubilitatis (per hanc methodum) quando aliquando, differentiae vel differentiae differentiarum non sunt continue decrescentes, etsi series ipsa data sit continue decrescens.

Nota cum possimus fingere pro lubitu progressiones omnis generis, possumus quoque innumera construere exempla serierum hac methodo summandarum, continuata scilicet progressione differentiarum correspondentium seu de ordine in ordinem.

$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{2}{8}$		$\frac{4}{8}$	$\left[\frac{5}{8}\right]$		5	$\frac{9}{64}$	$\frac{13}{64}$	
			$\frac{10}{64}$			[8]				$\frac{8}{64}$
$\frac{1}{64}$	$\frac{7}{64}$	$\frac{6}{64}$		$\frac{8}{64}$	$\frac{13}{64}$		13	$\frac{1}{64}$	$\frac{5}{64}$	
			$\frac{82}{1024}$			16				$\frac{16}{1024}$
$\frac{1}{1024}$	$\frac{15}{1024}$	$\frac{14}{1024}$			$\frac{29}{1024}$		29		$\frac{64}{1024}$	
			$\frac{[418]}{32768}$			32				
$\frac{1}{32768}$	$\frac{31}{32768}$	$\frac{30}{32768}$			$\frac{61}{32768}$					

15–19 *Zur linken Tabelle:* Nota bene scimus quantitatem de $\frac{7}{64}.\frac{15}{1024}.$ etc. Ergo etiam de $\frac{14}{64}.\frac{30}{1024}.$ etc. et de $\frac{21}{64}.\frac{45}{1024}.$

8 vel differentiae *erg. L* 13 $\frac{4}{8}$ | $\frac{1}{8}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{5}{64}$ *ändert Hrsg.* | 5 *L* 14 $\frac{8}{64}$ *L ändert Hrsg.* 18 448 *L ändert Hrsg.*

---

4 *Elementa*: Gemeint sind die *Elemente* Euklids.

$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$		$\frac{3}{8}$	
	$\frac{2}{8}$		$\frac{2}{8}$		$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{8}$		0	
	$\frac{1}{64}$	0			$\frac{1}{8}$
$\frac{7}{64}$			$\frac{7}{64}$	$\frac{1}{8}$	
	$\frac{6}{64}$	$\frac{7}{64}$			$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{64}$				0	
	$\frac{1}{1024}$				$\frac{7}{64}$
$\frac{15}{1024}$				$\frac{7}{64}$	
	$\frac{14}{1024}$				$\frac{7}{64}$
$\frac{1}{1024}$				0	
	$\frac{1}{32768}$				$\frac{1}{64}$
$\frac{31}{32768}$				$\frac{1}{64}$	
	$\frac{30}{32768}$				$\frac{1}{64}$
$\frac{1}{32768}$				0	
					$\frac{15}{1024}$
				$\frac{15}{1024}$	
					$\frac{15}{1024}$
				0	
					$\frac{1}{1024}$
				$\frac{1}{1024}$	

Totum $\frac{3}{8}.\frac{7}{64}.$ etc. est $\frac{1}{2}.$ $\quad \frac{2}{8}+\frac{1}{64}+\frac{6}{64}$ etc. $=\frac{3}{8}$

$$\begin{array}{llll}
a & & & a=b+c+d \\
 & b & & b=e+f \text{ etc.} \\
a-b & & e & a-b=c+d \text{ etc.} \\
 & c & & c=f \text{ etc.} \\
a-b-c & & f & a-b=b+c+d \text{ etc.} \quad - \quad e+f \text{ etc.} \\
 & d & & \\
a-b-c-d & & &
\end{array}$$

Differentia inter duas series proximas alteram differentiarum, alteram differentiarum inter differentias aequatur termino secundo seriei cuius differentiae datae sunt.

Omnes progressiones, quarum summam invenimus, si in infinitum decrescere cogitantur, earum summa etiam potest inveniri, si cogitentur, alicubi subsistere, nec in infinitum produci. Ideo summa inveniri potest omnium progressionum geometricarum, aut ex iis complicatarum, et infinitarum aliarum. Quae accessio maxima est etiam ad arithmeticam finitorum, constituendae sunt tabulae, classes, constructiones, resolutiones earum omnium progressionum, quae ex hactenus inventis solvi possunt.

Ex his inveniri possunt approximationes figurarum in geometricis, compendiosiores quam hactenus habentur, eaeque methodo quadam universali. Methodus universalis hactenus usitata est, ea quam primus attulit Archimedes, per circumscripta inscriptaque polygona, quam postea Ludolphus a Colonia, Willebrordus Snellius, Iac. Gregorius Scotus, aliique provexere. Sed hac methodo non est opus nisi solis inscriptis, imo non nisi

---

2–8 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{lll}
 & b & \\
a & & a+b
\end{array}$$

21 imo *(1)* solis applicatis *(2)* non *L*

---

19 Archimedes: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*. 20 Ludolphus a Colonia: s. vor allem LUDOLPH van Ceulen, *Vanden circkel*, 1596; lat. Fassung *De circulo et adscriptis liber*, 1619. 20 Willebrordus Snellius: W. SNELL, *Cyclometricus*, 1621. 20 f. Iac. Gregorius Scotus: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668 [Marg.]; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668 [Marg.], S. 123.
21 aliique: z. B. Chr. HUYGENS, *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO* II, S. 113-181.)

certa progressione applicatarum cum alia quadam progressione complicata inventisque aut factis aut summis. Utrumque facile approximatur vero. Nam in genere data progressione in infinitum decrescente, summam invenire possum quam proxime velim, summando tantum terminos, quousque adhuc magni sunt seu considerabiles.

Item si qua indagetur ratio terminorum ad differentiam, ut in praecedente illa difficili sane progressione termini omnes habent differentem rationem inter se, attamen habitudo sic exprimi potest, ut unus terminus semper sit 1. correspondentes sint potestates de 2. unitate diminutae.

Iam quaerenda est ratio ex rationibus partium componendi rationem totius; et quidem si rationes illae in infinitum variant saltem quam proxime.

$$\begin{array}{ccccccc} a & + & b & + & c & + & d \\ z & + & y & + & x & + & u \end{array}$$

Si quidem nominator rationis sit simplex quamvis numerator sit compositus, ratio totius componetur ex ratione partium, ut

$$\frac{a+b+c+d}{z} = \frac{a}{z} + \frac{b}{z} + \frac{c}{z} + \frac{d}{z}.$$

Et ideo vicissim si nominator sit compositus quidem sed ex se ipso, seu repetitus, sub qualibet parte, potest subscribi toti. Ideo si rationes quaeruntur duorum terminorum, quorum alter sit compositus alter simplex, cum sit in potestate facere numeratorem quem velis, simplex faciendus est nominator.

Ratio maioritatis et ratio minoritatis inter duos terminos eosdem, sunt inter se ut quadrata terminorum $\frac{A}{B} \infty \frac{B}{A} = AA \infty BB.$

$$\frac{\overset{3}{A}}{\underset{3+1}{A+B}} \infty \frac{\overset{3+1}{A+B}}{A} = \overset{9}{A}A \infty \overset{9}{A}A + \overset{1}{B}B + 2\overset{6}{A}B$$

$$\frac{\overset{3}{A}}{\underset{3-1}{A-B}} \infty \frac{\overset{3-1}{A-B}}{\underset{3}{A}} = \overset{9}{A}A \infty \overset{9}{A}A + \overset{1}{B}B - 2\overset{6}{A}B.$$

2 vero *(1)*, si tantum *(2)*. Nam *L*

Ideo ratio minoritatis est ad rationem maioritatis, ut est quadratum termini minoris, ad summam ex quadrato termini maioris et minoris, factoque duorum terminorum inter se duplicato.

Seu contra[:] Ratio maioritatis est ad rationem minoritatis, ut est termini maioris quadratum ad summam quadrati minoris et differentiae demto facto ex minore termino et differentia, duplicato.

$\dfrac{a}{b+c}$ = vid. *Transact.* ubi de *Logarithmotechnia* Mercatoris.

$$2 \left(\begin{array}{cc} 6 & \\ & 2 \\ 8 & \\ & 4 \\ 12 & \end{array} \right.$$

$\dfrac{A}{A-B-C} = \dfrac{B}{C}$. Ergo $\dfrac{1}{A-B-C} = \dfrac{BA}{C}$. Ergo $\dfrac{B}{A-B-C} = \dfrac{B^qA}{C}$. Datis duabus differentiis.

Data summa terminorum, datisque rationibus variantibus progressionis harmonicae, in certa quadam ratione, cuius tum summa iniri possit, 2. 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{4}$. etc.

1 ratio *(1)* maiorita *(2)* minoritatis et maioritatis sunt inter se, *(3)* maioritatis est ad rationem minoritatis *(4)* minoritatis *L* 2 minoris, *(1)* rectanguloque duplicato *(2)* factoque *L* 3 f. duplicato. *(1)* Seu ut est ratio m *(2)* Seu *L* 4 minoritatis, *(1)* ut est *(a)* summa *(b)* ratio *(c)* qua *(d)* summa praedicta ad termini minoris quadratum, vel *(2)* ut *L* 5 ad *(1)* quadratum *(2)* summam *L* 5 differentiae *(1)* et qu *(2)* facti ex minore termino *(3)* demto *L* 6 f. duplicato. *(1)* Hinc sequitur quoque $\mathrm{AA} + \overset{16}{\mathrm{BB}} + 2\mathrm{AB} \infty \overset{9}{\mathrm{AA}} = \mathrm{AA} \infty \overset{9}{\mathrm{AA}} + \mathrm{BB} - 2\mathrm{AB}$ *(2)* Hinc sequitur *(3)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ *L* 13 f. Datis duabus differentiis. *erg. L*

7 *Transact.* … Mercatoris: J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, in: *Philosophical Transactions* III, Nr. 38 vom 17./27. August 1668, S. 753–759. — N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 [Marg.]. 13 Statt $\dfrac{BA}{C}$ müßte es $\dfrac{B}{AC}$ heißen. Der Fehler vererbt sich auf den nächsten Term.

$$\begin{array}{ccccc}
 & A & \ldots\ldots & B & \\
\dfrac{A}{A-B-C} & & & & \dfrac{B}{C} \\
 & A-B & \ldots\ldots & C & \\
\dfrac{A-B}{A-B-C-D} & & & & \dfrac{C}{D} \\
 & A-B-C & \ldots\ldots & D & \\
\dfrac{A-B-C}{A-B-C-D-E} & & & & \dfrac{D}{E} \\
 & A-B-C-D & \ldots\ldots & E & \\
 & A-B-C-D-E & & &
\end{array}$$

Hinc theoremata: $A = B + C + D + E$ in infinitum. $A - \llcorner A - B - C - D - E \lrcorner = B+C+D+E$. Nam in genere transformari possunt omnia signa continua $-$. in $+$. abiecto termino primo, et omnia signa $+$. in $-$. adiecto alio qui sit summa omnium terminorum.

In progressione harmonica

$$\left.\begin{array}{llll}
\dfrac{A}{A-B-C} = \dfrac{B}{C} & \dfrac{A-B-C}{A} = \dfrac{C}{B} \\[2ex]
\dfrac{A-B}{A-B-C-D} = \dfrac{C}{D} & \dfrac{A-B-C-D}{A-B} = \dfrac{D}{C}
\end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Natura seu definitio progressionis harmonicae} \\ \text{Aequationes fundamentales} \end{array}$$

Aequatio iungens fundamentales in unam.

$$\frac{A}{A-B-C} + \frac{A-B-C-D}{A-B} = \frac{B+D}{C}.$$

$$(A-B, \frown A)$$

$$\frac{AA - BA \quad + A - B - C - D, \frown A - B - C}{A - B - C \frown A - B} = \frac{B+D}{C}$$

Duae praecedentes aequationes possunt inverti, ut nominatores utrobique fiant numeratores et contra. Plura hinc facile fabricabuntur theoremata; faciendo actualiter multiplicationes hic tantum designatas.

Item multiplicando utrumque per C. ubi fiet:

$$\frac{AC}{A-B-C} + \frac{A-B-C-D, \frown C}{A-B} = B + D.$$

10 continua *erg. L*

Consectar. 2: In progress. harm.

Addantur rationes termini primi ad terminum secundum recta et termini quarti ad secundum inversa producetur ratio summae ex differentia prima et tertia, ad differentiam mediam. Vel productum ex divisione termini primi per tertium addatur producto ex divisione termini quarti per secundum, summa aequatur producto ex divisione summae differentiae primae et tertiae per secundam. Vel sic multiplicetur terminus primus per secundum et tertius per quartum, summa ex duobus factis dividatur per factum ex secundo et tertio. Productum est aequale producto ex divisione differentiae 2^{dae} et tertiae per secundam.

Idem multis modis variari potest, si non tam numeratores multiplicentur, quam nominatores dividantur per C. aut si in una parte numerator multiplicetur, in altera nominator dividatur, idque rursus fieri potest, vel in terminis relictis vel in reductis.

Potuisset item uterque aequationis terminus dividi per $B + D$. non multiplicatis per C.

Datis tribus differentiis et termino uno invenire terminos quatuor et alia id genus problemata communia sunt omnibus seriebus. Quaerenda sunt problemata harmonicae propria, seu quae ex domesticis ipsius principiis solvi debeant. Quale est: continuare progressionem harmonicam seu datis tribus terminis progressionis harmonicae invenire quartum. Et quia quartus potest interdum esse multiplex, interdum vero ne dari quidem potest, id ipsum definire.

Deinde dato termino uno eiusque loco id est sitne primus an quartus et rationibus omnibus progressionis harmonicae omnia caetera invenire.

Invenire per compendium terminum loci dati progressionis harmonicae, item summam terminorum.

In omni inquisitione algebraica, datis pluribus terminis, quilibet simplex, si fieri potest, solus locandus est ad habendam eius cum caeteris aequationem, ita hoc loco $A = \dfrac{B \frown A - B - C}{C}$. Sed haec aequatio seu definitio A. est fundata solum in una parte

14 f. C. | Problema 1: *gestr.*| Datis L 21 Deinde *(1)* data progressione ha *(2)* dato L 21 termino *(1)* primo *(2)* uno L 21 eiusque … quartus *erg.* L 22 caetera *(1)* definire *(2)* invenire L 25 algebraica, *(1)* omnes *(2)* datis L

15–22 Vgl. N. 8 Teil 2.

definitionis, seu aequationis fundamentalis, ducatur alia si possit ex altera. Sic tum hoc loco aperitur via: ex tertia aequatione (primo consectario fundamentalium)

$$\frac{A}{A-B-C} = \frac{B+D}{C} - \frac{A-B-C-D}{A-B}.$$

vel

$$A = \frac{B+D}{C} - \frac{A-B-C-D}{A-B}, \frown A-B-C.$$

Si solus locari non potest, signum est, non sufficere pauciora data.

Differentia 2$^{\text{da}}$ seu C. hac aequatione exprimitur:

$$C = \frac{A-B-C}{A} + \frac{A-B}{A-B-C-D},, \frown B+D.$$

Differentia prima et 3$^{\text{tia}}$ simul

$$B+D = \frac{AC}{A-B-C} + \frac{A-B-C \frown C}{A-B}.$$

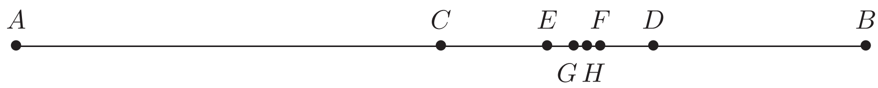
Unde facile intelligitur valor singularum totius argumenti. Hae sunt aequationes elementales.

7. TRISECTIO PER BISECTIONEM
[Herbst – Dezember 1672]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 17 Bl. 16. 1 Ausschnitt ca 21,0 x 2,2 cm. 6 Z. auf Bl. 16 v°. Bl. 16 r° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1549

Datierungsgründe: Am Ende von N. 4_4 (s. S. 49 Z. 1 f.) äußert Leibniz die Absicht, sich im Werk von Gr. de Saint-Vincent über die Verhältnisrechnung zu informieren; in der *Accessio* von Ende 1672 (vgl. *LSB* III, 1 N. 2 S. 4 f.) hat er dies bereits getan. Die vorliegende Notiz bezieht sich auf einen einschlägigen Abschnitt im *Opus geometricum* und ist also vermutlich in der Zwischenzeit jedoch nach N. 6 (s. dort) entstanden. Die Überlegung am Schluß deutet auf einen Wissensstand vor Kenntnis der Methode von N. Mercator hin; mit dieser kann $\frac{1}{5} = \frac{1}{4+1}$ auf einfache Weise in eine geometrische Reihe entwickelt werden, die nur fortgesetztes Vierteln bzw. Halbieren erfordert (vgl. N. 27, S. 318 Z. 10). Leibniz erwähnt diese Methode zwar bereits kurz gegen Ende von N. 6 (vgl. S. 107 Z. 7), setzt sich damit aber erst in N. 8 Teil 3 auseinander. N. 7 dürfte also zwischen N. 6 und N. 8 entstanden sein.

Trisectio per bisectionem



[*Fig. 1*]

AB bisecetur in *C*. et *CB* in *D*. rursus *CD* in *E*. et *ED* in *F*. rursus *EF* in *G*. et *GF* in *H*, et ita in infinitum; terminatio huius progressionis erit punctum a recta *AB* abscindens tertiam partem. Hinc pulcherrima sequitur trisectio anguli vel arcus appropinquatoria per continuam bisectionem.

Videndum an ista ad quinquesectionem possint applicari, an scilicet ope solius bisectionis etiam quinquesecari possit recta.

17 *Daneben:* Gregorius a S. Vincentio

18 punctum *(1)* dividens *(2)* a *L*

24 Gregorius: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch II prop. CIV S. 111 f.

8. DE DIFFERENTIIS PROGRESSIONIS HARMONICAE

[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 328–329 und XII 2 Bl. 165–166. Zusammenhang durch Kustode gesichert. 2 Bog. 2°. 7 S. tlw. zweispaltig beschrieben. Bl. 166 v° leer. Auf Bl. 328 r° oben befindet sich eine Bücherliste (Cc 2, Nr. 529 tlw., Druck in Reihe VIII). Cc 2, Nr. 526, 528, 529 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie N. 1, N. 2 und N. 6 und enthält Verweise auf N. 4 und N. 6 (vgl. S. 113 Z. 15).

[*Teil 1*]

			differentiae	summae		
	9		$9-6=3$	15		4
		6			10	
	3		$3-2=1$	5		2
		2			$\frac{10}{3}$	
	1		$1-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$	$\frac{5}{3}$		1
		$\frac{2}{3}$			$\frac{10}{9}$	
	$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{3}-\frac{2}{9}=\frac{1}{9}$	$\frac{5}{9}$		$\frac{1}{2}$
		$\frac{2}{9}$			$\frac{10}{27}$	
$\frac{3}{25}$	$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{9}-\frac{2}{27}=\frac{1}{27}$	$\frac{5}{27}$		$\frac{1}{4}$
		$\frac{2}{27}$				
$\frac{9}{125}$	$\frac{1}{27}$					$\frac{1}{8}$
etc.	etc.					etc.

6	
	3
3	
	1
2	
	1
1	

Differentia inter circulum et polygonum inscriptum aequalis est summae differentiarum inter omnia polygona interposita. Ut differentia inter circulum et hexagonum inscriptum aequalis est differentiis inter hexagonum et dodecagonum, dodecagonum et 24^{gonum}, 24^{gonum} et 48^{gonum} et sic in infinitum. Similis regula condi potest in aliis figuris curvilineis omnibus. Sed haec summa non potest iniri nisi accedat continua multiplicatio per numeros duplos a 6.

Nota hic exemplum progressionis infinitorum terminorum continue crescentis et tamen finitae, sed istae progressiones omnes ut saepe dixi sunt complicatae.

[*Teil 2*]

Solvere hoc problema a me diu quaesitum inveniendi summam progressionis geometricae reassumtae, idem est quod invenire progressionem harmonicam datis eius differentiis, differentiarumque rationibus:

8 *(1)* Si *(2)* Differentia *L* 14 continue *(1)* decrescentis, et tamen in fine non evanesc *(2)* crescentis *L*

15 ut saepe dixi: vgl. N. 4_1 S. 32 Z. 24–30, N. 6 insbesondere S. 96 Z. 11 f.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{6}{2} & & & & \frac{1}{2} \\
 & & 1 & \frac{6}{6} & & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{2} & \frac{6}{3} & & & 6 & \text{etc. termini progr. harm.} \\
 & & \frac{1}{2} & \frac{6}{12} & & \\
\frac{1}{4} & \frac{6}{4} & & & 8 & \\
 & & \frac{3}{10} & \frac{6}{20} & & \\
\frac{1}{8} & \frac{6}{5} & & & 10 & \\
 & & \left[\frac{1}{5}\right] & \frac{6}{30} & & \\
\frac{1}{16} & \frac{6}{6} & & & &
\end{array}$$

1–9

$$\begin{array}{ccccccc}
 & (1) & \frac{\langle - \rangle}{4} & & & (2) & \frac{6}{2} \quad L \\
 & & & 1 & & & \\
\frac{1}{2} & & 2 & & \frac{1}{2} & & \frac{6}{3} \\
 & & & \frac{1}{2} & & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{3}{2} & & \frac{1}{4} & & \frac{6}{4} \\
 & & & \frac{1}{8} & & & \\
\frac{1}{8} & & 1 & & \frac{1}{8} & & \frac{6}{5} \\
 & & & \frac{1}{64} & & & \\
\frac{1}{16} & & \frac{1}{\langle 2 \rangle} & & \frac{1}{16} & & \frac{6}{6} \\
 & & & \frac{1}{1024} & & & \\
 & & & & \frac{1}{32} & & \\
 & & & \frac{1}{32768} & & &
\end{array}$$

8 $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

$$z - \llcorner\llcorner a \quad + \quad b\lrcorner \ + \ b\lrcorner \qquad = \frac{zb}{a+b} \ \begin{matrix}(z\frac{1}{2})\\(1)\end{matrix} \ ((z\tfrac{1}{2})).$$

$$(\tfrac{1}{2})(([\tfrac{2}{2}]))(\tfrac{1}{2}) \quad (\tfrac{1}{2}) \ (((\tfrac{6}{4})))$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ a + b = zb.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ a + b \ \smile \ b = z.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ \llcorner\frac{a}{b} + 1\lrcorner = z.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ \frac{a}{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner + z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner = z.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ \frac{a}{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner + \cancel{z} = \cancel{z} + \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ \frac{a}{b} = \cancel{z} + \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner - \cancel{z}.$$

$$z - \llcorner\llcorner a + b\lrcorner + b\lrcorner \ \frown \ \frac{a}{b} = a + b + b.$$

$$z = a + 2b, \frown \ \frac{a}{b} + 1.$$

$$z = \ a \ + \ 2b, \frown \ \frac{a}{b}\begin{matrix}(\frac{1}{2})\\(\frac{1}{2})\end{matrix}((1)) + 1 \ (((2))).$$

$$\tfrac{6}{2} \quad (\tfrac{1}{2})((\tfrac{3}{2}))(1)$$

---

11 f. *Nebenbetrachtung:*

$$\frac{1}{2} \quad \left(\begin{matrix} \frac{6}{2} & \\ & 1 \\ 2 & \\ & \frac{1}{2} \\ \left[\frac{3}{2}\right] & \end{matrix} \right) \quad \frac{1}{2}$$

2 2 *L ändert Hrsg.* 17 $\frac{3}{4}$ *L ändert Hrsg.*

---

10 Leibniz vergißt auf der linken Seite der Gleichung den Faktor $\frac{a}{b}$. Da er für die Kontrollrechnung $a = b = \frac{1}{2}$ wählt, bemerkt er den Fehler nicht. S. 116 Z. 10–13 wird die Rechnung — bis auf einen anderen Flüchtigkeitsfehler — richtig durchgeführt.

En ergo inventam rationem: D a t i s d i f f e r e n t i i s i n v e n i r e t e r m i n o s h a r m o n i c a e p r o p o r t i o n i s.

Differentiae minoris duplo addatur differentia eius a maiore. Summa multiplicetur per unitatem auctam quotiente producto ex divisione differentiae inter differentias per differentiam minorem, productum erit terminus quaesitae progressionis maximus quo dato reliqui duo facile inveniuntur.

Brevius ita concipietur: Quadratum differentiae differentiarum dividatur per differentiam minorem, quotienti addatur differentia differentiarum triplicata, et differentia minor [duplicata]. Summa est terminus maior $z = \frac{aa}{b} + 3a + 2b$ proportionis harmonicae.

$z - {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b_{\lrcorner} = \frac{zb}{a+b}$. Multiplicentur omnia per $a + b$ fiet:
$z - {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \frown a + b = zb$. Et $z - {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \frown a + b \smile b = z$.
$z - {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} \frown \frac{a}{b} + 1 = z$. $\frac{az}{b} - {\llcorner\llcorner} \frac{aa}{b} + a_{\lrcorner} + a_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} + \cancel{z} \overset{+}{\cancel{-}} {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b = z \cancel{-} z$.
$\frac{az}{b} - {\llcorner\llcorner} \frac{aa}{b} + a_{\lrcorner} + a_{\lrcorner\lrcorner\lrcorner} + \cancel{z} = z + {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + c_{\lrcorner} - \cancel{z}$. $\frac{z\cancel{a}}{\cancel{b}} = a + b + c + \frac{aa}{b} + a + a\,[\smile]\,\frac{a}{b}$.

---

10 *Daneben*: (Erraveram in aequatione ante, quod non expresseram differentiam praecedentem sequente maiorem.)

1 f. t e r m i n o s *(1)* p r o g r e s s i o n i s *(2)* h a r m o n i c a e *L* 2 f. p r o p o r t i o n i s. *(1)* Terminus minor duplicatur *(2)* Termini minoris duplo *(3)* Differentiae *L* 4 per *(1)* rationem *(2)* quotientem *(3)* unitatem *L* 8 minorem, *(1)* producto a *(2)* quotienti *L* 9 triplicata *L ändert Hrsg.* 9 f. harmonicae. | a differentia 1^{ma}. b 2^{da}. Ratio earum $\frac{a}{b}$. Terminus primus progressionis harmonicae quaesitus z. *(1)* Ergo tertius est $\frac{za}{b}$. Ergo secundus est $\frac{za}{b} + b$. *(2)* Ergo secundus erit $z - a$. et tertius $z - a - b$. at item tertius est $\frac{za}{b}$. Ergo $\frac{za}{b} = z - a - b$. Quaerendum est aliquid aequale ipsi z. *(a)* $\frac{za}{b} = z - a - b$. Ergo $z = \frac{zb}{a} - \frac{ab}{a} - \frac{bb}{a}$. $za = zb - ab - bb$. $za + a$ *(b)* $\frac{zb}{a} = z - a - b$. Ergo $zb = za - aa - ba$. $zb + aa + ba = za$. $aa + ba = za - zb$. Dividantur omnia per a. fiet $a + b = z - \frac{zb}{a}$. Iam $\frac{zb}{a}$ est $= z - a - b$ per priora. Ergo: $a + b = z - {\llcorner} z - a - b_{\lrcorner}$ seu $a + b = z + a + b - z$. En aequationem nugatoriam, $aa + ba = za - zb$. *(aa)* Dividantur $aa + ba$. in duas partes *(bb)* $z - {\llcorner} a + b_{\lrcorner} = zb$ *gestr.* | $z - {\llcorner\llcorner} a + b_{\lrcorner} + b_{\lrcorner}$ *L* 13 $\frown$ *L ändert Hrsg.* 14 expresseram *(1)* rationem alteram *(2)* differentiam *L*

Iam vellem invenire posse hoc problema: Data progressione differentiarum in infinitum continuabili invenire progressionem harmonicam in infinitum continuabilem vel saltem eius initium, nam hoc sufficit. Seu data progressionis differentiarum ratione, et ipso progressionis initio, seu differentia prima, invenire primum terminum progressionis harmonicae.

Seu data differentia prima, et fundamento computandi reliquas, invenire primum terminum progressionis harmonicae, cui differentiae illae sunt interiectae. Hoc problema iam solutum est in omnibus terminis progressionis geometricae simplicis, tam rectae, quam perturbatae. Sed ut in reliquis solvam, superest, ubi non differentiae ipsae sed earum rationes sunt termini alicuius progressionis geometricae.

Imo haec non procedunt, non enim quaelibet differentiarum series progressioni harmonicae interici potest. Nam duae quaelibet quantitates possunt esse differentiae progressionis harmonicae, at non tres quaelibet.

Est ergo problema ita concipiendum: Datis duabus differentiis proportionis harmonicae, invenire tertiam, et per consequens reliquas omnes, seu integram differentiarum progressionem. Differentiae duae datae sunt $a+b$ et b. Ratio earum $\dfrac{a+b}{b}$ eadem ratio termini primi ad tertium. Terminus primus est:

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1.$$

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \ \ - a + b, \text{ terminus secundus.}$$

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \ \ - a + b \ \ - b, \text{ terminus tertius.}$$

Quaeritur saltem differentia quarti a tertio y, ita ut terminus quartus sit

$$a + 2b \frown \frac{a}{b} + 1 \ \ - a + b \ \ - b \ \ - y.$$

7 harmonicae, *(1)* inter qu *(2)* cui *L* 9 ubi *(1)* differentiae ipsae non sunt in termi *(2)* non *L* 11 enim *(1)* cuilibet *(2)* quaelibet *L* 15 f. differentiarum *(1)* proportionem *(2)* progressionem *L*

116,13 Leibniz ändert die Bezeichnung für die Differenz zwischen zweitem und drittem Term von b in c. Da er nicht bereits die Ausgangsgleichung zu $z - (a+b+c) = \dfrac{zc}{a+b}$ umformt, ist das Ergebnis nicht richtig.

Ratio differentiae praecedentis ad hanc tertiam est $\frac{b}{y}$. Multiplicetur terminus quartus per istam rationem: Producetur terminus secundus. Habebimus ergo hanc aequationem:

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner+y\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} \quad = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} - \frac{yb}{y} = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \frac{b}{y} - b \quad = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner$$

$$\frac{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner\llcorner\llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b}{y} \quad = a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a.$$

$$\frac{1}{y} = \frac{\cancel{b}+a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a+\cancel{b}}{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner}.$$

Ergo $y = \dfrac{a+2b \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a+b\lrcorner+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \cancel{b}\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner}{\frac{a}{(b)}+2\cancel{b} \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \frac{a}{(b)}}$ fiet $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b}+2 \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner - a+2}$

seu $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b}+2 \frown \frac{a}{b}}$ seu $y = \dfrac{a}{\frac{aa}{bb}+\frac{2a}{b}}$ seu $y = \dfrac{1}{\frac{a}{bb}+\frac{2}{b}}$.

---

1 f. *Daneben:* $\frac{6}{4} - y, \frown \frac{1}{2y} = 2.$ $\frac{6}{4} - y, \frown \frac{1}{y} = 4.$ Ergo $\frac{6}{4y} - 1 = 4.$ Ergo $\frac{6}{4y} = 5.$ $\frac{6}{y} = 20.$ $y = \frac{3}{10}.$

1 Ratio *(1)* eius ad t *(2)* differentiae *L* 11 $= 20.$ | $y = \frac{20}{6}$ | $\frac{10}{3}$. *streicht Hrsg.* | y *L*

---

8 fiet $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b}+2 \frown \llcorner \frac{a}{b}+1\lrcorner - a+2}$: Richtig wäre $y = \dfrac{a}{\frac{a}{b}+1-\frac{a}{a+2b}}$. Der Fehler vererbt sich bis Z. 9, Leibniz setzt danach neu an.

$$[y=]\ \frac{a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \llcorner a \ \Big|\ +2b\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown b}{\left[a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - \ a\right]\Big|}\ [=]\ b-\frac{2bb}{a+2b \frown \llcorner\frac{a}{b}+1\lrcorner\lrcorner - a} =$$

$$b-\frac{2bb}{\frac{aa}{b}+\left(\frac{2ba}{b}\right)2a+\cancel{a}+2b-\cancel{a}.}.$$

Datis duobus terminis progressionis harmonicae invenire tertium proportionalem. Dati sunto z primus. $z-a$ secundus. $z-\llcorner a+b$ tertius; quaeritur b vel quaeritur $z-\llcorner a+b\lrcorner$. Ratio differentiarum est $\frac{a}{b}$. Ratio termini primi ad tertium est $\frac{a}{b}=\frac{z}{z-\llcorner a+b\lrcorner}$ vel $\frac{b}{a}=\frac{z-\llcorner a+b\lrcorner}{z}$.

$\frac{b}{a}=\frac{z-\llcorner a\overset{-}{\cancel{+}}b\lrcorner}{z}$ seu $\frac{bz}{a}=z-\overset{a-b}{\llcorner a+b\lrcorner}$ seu $\frac{z}{a}=\frac{z}{b}-\frac{a}{b}-1$ seu $\frac{z}{a}+1=\frac{z-a}{b}$ seu $\frac{\frac{z}{a}+1}{z-a}=\frac{1}{b}$ seu $\frac{z-a}{\frac{z}{a}+1}=b=\frac{za-aa}{z+a}$ seu $\frac{z+a}{za-aa}=\frac{1}{b}$ seu $\left[\frac{z+a}{z-a,\frown a}=\frac{1}{b}\right]$.

Est ergo haec problematis solutio in progressione harmonica datis duobus terminis, invenire differentiam secundi minoris a tertio minimo seu tertium minimum. Quod ita

---

8 *Kontrollrechnung:* $\frac{(z)\frac{6}{2}-(a)1=\frac{4}{2}}{\frac{(z)\frac{6}{2}}{(a)1}=\frac{6}{2}+1}$ $\qquad \frac{3-1=2}{4}\Big|\frac{1}{2}$

1 y = *erg. Hrsg.* 1 $\mathrm{a}+2\mathrm{b}\frown\llcorner\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}+1\lrcorner\lrcorner-\mathrm{a}\,|+2\mathrm{b}$ *L ändert Hrsg.* 1 = *erg. Hrsg.*
3 tertium *(1)* Sunto illi termini *(2)* a + b + b. + y. Invenire tertium harmonice *(3)* proportionalem *L*
6 f. $\frac{\mathrm{z}-\llcorner\mathrm{a}+\mathrm{b}\lrcorner}{\mathrm{z}}$. *(1)* Dividatur *(2)* Multiplicetur uterque terminus aequationis per z fiet $\frac{\mathrm{bz}}{\mathrm{a}}=\mathrm{z}-\llcorner\mathrm{a}+\mathrm{b}\lrcorner$. Ergo $\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}-\llcorner\mathrm{a}+1\lrcorner$. $\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}+\mathrm{a}+1=\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}\times\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}$ $\frac{\mathrm{za}-\mathrm{zb}}{\mathrm{ba}}$. $\frac{\mathrm{a}+1}{\mathrm{ba}}=\mathrm{za}-\mathrm{zb}$. $\frac{\mathrm{a}+1}{\mathrm{ba}}=\mathrm{z}\frown\mathrm{ba}$. Ergo $\frac{\mathrm{a}+1}{\mathrm{ba}\frown\mathrm{ba}}=\mathrm{z}$ seu $\frac{\mathrm{a}+1}{\mathrm{bbaa}}=\mathrm{z}$. *(3)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *L* 8 $\frac{\mathrm{z}+\mathrm{a}}{\frac{\mathrm{z}-\mathrm{a}}{\mathrm{a}}}=\frac{1}{\mathrm{b}}$ seu $\frac{\mathrm{z}+\mathrm{a}}{\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}-1}$ *L ändert Hrsg.* 9 in progressione harmonica *erg. L* 10 minoris *erg. L* 10 minimo *erg. L*

fiet: Terminus primus dividatur per differentiam primam, productus unitate auctus dividat terminum primum differentia prima minutum. Quotiens est differentia 2^{da}. Sic ergo rectius concipietur problema: Dato termino primo seu maximo proportionis harmonicae, dataque differentia maxima (qua terminus primus differt a secundo) et per consequens dato termino primo et secundo; invenire differentiam secundam, termini secundi a tertio, seu terminum tertium. Vel quod idem est continuare progressionem harmonicam in infinitum.

$$z = \frac{\cancel{c}}{d}\ {\scriptstyle (1)}$$
$$+$$
$$z - a = \frac{\cancel{c}}{e}\ {\scriptstyle (1)}$$
$$+$$
$$\frac{z-a-b}{c} = \frac{\cancel{c}}{f}\ {\scriptstyle (1)}. \qquad \frac{3z+2a+b}{c} = \frac{1}{d+e+f} \text{ seu } \frac{c}{3z} + \frac{c}{2a} + \frac{c}{b} =$$
$$d \ + \ e \ + f.$$

$$\frac{d-e}{e-f} = \frac{\frac{c}{3z} - \frac{c}{2a}}{\frac{c}{2a} - \frac{c}{b}}.$$ Pro z substituatur eius resolutio in caeteras datas $z = \frac{aa}{b} + 3a + 2b$.

$\frac{2ca - 3zc}{3z\cancel{2}\cancel{a}} \infty \frac{cb - 2ca}{\cancel{2}\cancel{a}b}$. Horum ratio inter se quaeritur. $\frac{3ca}{3z}\ -c \infty c - \frac{2ca}{b}$. Dividantur omnia per c, fiet $\frac{\cancel{3}a}{\cancel{3}z} - 1 \infty 1 - \frac{2a}{b}$. Iam z valet $\frac{aa}{b} + 3a + 2b$. Ergo $\frac{(\cancel{a})1}{\frac{a(\cancel{a})}{b} + 3(\cancel{a}) + 2b} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \frac{1}{(a)} \infty \frac{1}{(a)} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \frac{2(a)}{b}$ $\quad \frac{b-2a}{ab}$. $\frac{a-}{\frac{aa}{b} + 3a + 2b \frown a}$ [*Rechnung bricht ab*]

1 fiet: *(1)* A maximo *(2)* Terminus *(a)* secundus dividatur per differenti *(b)* primus *L* 1 differentiam | primam *erg.* |, *(1)* producto addatur unitas. Summa *(2)* productus *L* 2 differentia *(1)* tertia *(2)* 2^{da} *L* 12 $\frac{\cancel{c}^{(1)}}{\mathrm{f}}$. *(1)* $\frac{3\mathrm{z} - 2\mathrm{a} - \mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ *(2)* $\frac{3\mathrm{z} + 2\mathrm{a} + \mathrm{b}}{\mathrm{c}}$ *L*

12–14 $\frac{3z+2a+b}{c}$: Leibniz verändert den Ansatz der Rechnung mehrfach. Zunächst ersetzt er die Minuszeichen im Zähler des Bruches durch Pluszeichen; auf der rechten Seite der Gleichung müßte nach dem ursprünglichen Ansatz $\frac{1}{d} + \frac{1}{e} + \frac{1}{f}$ stehen. Die Kehrwertbildung, aus der die folgende Gleichung entsteht, ist ebenso unzulässig wie das Gleichsetzen der einzelnen Terme der linken und rechten Seite, auf dem die nächste Gleichung beruht. 15 $\frac{3ca}{3z}$: Richtig wäre $\frac{2ca}{3z}$; der Fehler pflanzt sich fort.

$z = \frac{c}{d}$. $z - a = \frac{c}{e}$. $z - a - b = \frac{c}{f}$. $f - e \infty e - d$.

$z = \frac{c}{d}$. Ergo $\frac{z}{c} = \frac{1}{d}$ ergo $\frac{c}{z} = d$. Item $z = \frac{c}{d}$. Ergo $zd = c$. $z - a = \frac{c}{e}$. Ergo $ze - ae = c$. Et $\frac{z-a}{c} = \frac{1}{e}$ seu $\frac{c}{z-a} = e$. Item $z - a - b = \frac{c}{f}$. Ergo $zf - af - bf = c$. Et $\frac{z-a-b}{c} = \frac{1}{f}$ seu $\frac{c}{z-a-b} = f$.

Ita habemus has aequationes: $c = zd$. $c = ze - ae$. $c = zf - af - bf$. $d = \frac{c}{z}$. $e = \frac{c}{z-a}$. $f = \frac{c}{z-a-b}$.

5–122,1 $\mathrm{f} = \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{z-a-b}}$. | $\mathrm{d = e - \frac{ae}{z} = f - \frac{af}{z} - \frac{bf}{z}}$. $\mathrm{d + \frac{ae}{z} = e}$. Ergo $\mathrm{\frac{ae}{z} = e - d}$. Ergo $\mathrm{\frac{a}{z} = \frac{c-d}{e}}$ seu $\mathrm{\frac{a}{z} = \frac{e}{e} - \frac{d}{e} = 1 - \frac{d}{e}}$. | Ergo $\mathrm{\frac{a}{z} + \frac{d}{e} = 1}$. Ergo $\mathrm{1 - \frac{a}{z} = \frac{d}{e}}$. Ergo $\mathrm{\frac{z-a}{z} = \frac{d}{e}}$. *erg.* | Et $\mathrm{d + \frac{af}{z} + \frac{bf}{z} = f}$. Ergo $\mathrm{\frac{af+bf}{z} = f - d}$. Ergo $\mathrm{\frac{a+b}{z} = \frac{f-d}{f} = 1 - \frac{d}{f}}$. Ergo $\mathrm{1 - \frac{a+b}{z} = df}$. Ergo $\mathrm{\frac{z-a-b}{z} = \frac{d}{f}}$. *(1)* Ergo $\mathrm{\frac{a}{z} + \frac{a+b}{z} - \frac{e-d}{e} + \frac{f-d}{f}}$ *(2)* Ergo $\mathrm{\frac{z-a-b+z-a}{z} = \frac{d}{e} \underline{\times} \frac{d}{f} = \frac{df+de}{ef}}$. $\mathrm{\frac{d}{e} =}$ *(a)* $\mathrm{\dfrac{\frac{c}{z}}{\frac{c}{z-a}} = \frac{c \frown z-a}{zc} = \frac{z-a}{z}}$ *(b)* $\mathrm{\dfrac{\frac{c}{z}}{\frac{c}{z-a}}}$ seu $\mathrm{\frac{c}{z} \times \frac{c}{z-a}}$ $\mathrm{\frac{cz-ca}{cz}}$. Ergo $\mathrm{\frac{cz-ca}{cz} = 1 - \frac{ca}{cz} = \frac{z-a}{z}}$. *(aa)* $\mathrm{\frac{d}{e} \frac{-}{-} \frac{f}{d}}$ *(bb)* $\mathrm{\frac{cz-ca}{cz}}$ *(cc)* $\mathrm{\frac{d}{e} = \frac{z-a}{z}}$. $\mathrm{\frac{d}{f} = \frac{z-a-b}{z}}$. $\mathrm{\frac{e}{f} = \frac{z-a-b}{z-a}}$. *(aaa)* $\mathrm{\frac{e}{f} = \dfrac{\frac{c}{z-a}}{\frac{c}{z-a-b}}}$ $\mathrm{\frac{c}{z-a} \times \frac{c}{z-a-b}}$ $\mathrm{\frac{\cancel{c}z - \cancel{c}a - \cancel{c}b}{\cancel{c}z - \cancel{c}a}}$ *(bbb)* $\mathrm{\frac{e}{d} + \frac{f}{d} = \frac{z}{z-a} + \frac{z}{z-a-b}}$. *(ccc)* Sumatur aliqua harum $\mathrm{\frac{dc}{e\cancel{c}} = \frac{z-a}{z} \frown zd}$ seu $\mathrm{zd - da}$ seu $\mathrm{\frac{1}{ec} = \frac{z-a}{1}}$ seu $\mathrm{ec = \frac{1}{z-a}}$. $\mathrm{\frac{dc}{e\cancel{c}} = \dfrac{\frac{z-a}{z}}{\left(1 - \frac{a}{z}\right)} \frown zf - af - bf}$ *(aaaa)* seu $\mathrm{1 - \frac{a}{z}}$ *(bbbb)* seu $\mathrm{zf - af - bf - \frac{a\cancel{z}f}{\cancel{z}} - \frac{aaf}{z} - \frac{bfa}{z}}$. $\mathrm{\frac{dc}{ef} = \cancel{zf} - 2\cancel{af} - \cancel{bf} + \frac{aa\cancel{f} - b\cancel{f}a}{z}}$. $\mathrm{3c = zd + ze + zf - ae - af - bf}$. $\mathrm{c = \frac{zd}{3} + \frac{ze}{3} + \frac{zf}{3} - \frac{ae}{3} - \frac{af}{3} - \frac{bf}{3}}$. $\mathrm{\frac{c}{f} = \frac{zd}{3f} + \frac{ze}{3f} + \frac{z}{3} - \cancel{\frac{ae}{3f}} - \frac{a}{3} - \cancel{\frac{b}{3}}}$. $\mathrm{\frac{ae}{3f} + \frac{c}{f} + \frac{b}{3} = \frac{zd}{3f} + \frac{ze}{3f} + \frac{z}{3} - \frac{a}{3}}$. $\mathrm{3c + \cancel{bf} = zd + ze + zf - ae - af - bf}$ *gestr.* | z terminus *L*

z terminus primus. $z-a$ terminus 2^{dus}. $z-a-b$ terminus tertius. $z=\frac{c}{d}$. $z-a=\frac{c}{d+e}$. $z-a-b=\frac{c}{d+e+f}$. Ergo $\frac{c}{d}-\frac{c}{d+e}=a$. $\frac{c}{d}\times\frac{c}{d+e}$ [=] $\frac{\cancel{cd}+ce-\cancel{cd}}{dd+de}$. Ergo $a=\frac{ce}{dd+de}$. $b=\frac{c}{\llcorner d+e}\overset{-}{\times}\frac{c}{d+e+f\lrcorner}$ $\frac{\cancel{cd}+\cancel{ce}+cf-\cancel{cd}-\cancel{ce}}{(\llcorner d+e\lrcorner Q.)dd+ee+2de+df+ef}=b$. $\frac{\cancel{c}}{dd+de}\times\frac{\cancel{c}f}{\llcorner d+e\lrcorner Q.+df+ef}=\frac{\cancel{c}}{d}\times\frac{\cancel{c}}{d+e+f}$. $\frac{d+e+f}{\cancel{d}}=\frac{\llcorner d+e\lrcorner Q.+df+ef}{\cancel{d}df}$.

$$
\begin{array}{ccc}
z & & \\
 & & a \\
z-a & & \\
 & & b \\
z-a-b & &
\end{array}
$$

---

1 *Rechts mit anderer Tinte:*

$$
\begin{array}{llll}
a-1 & a+1 & a^2 \overset{-}{\cancel{+}} 2a+1 & a^2-2a+1 \frown a-1 \\
 & \underline{a+1} & & a^3-2a^2+a-a^2+2a-1 \\
 & & & a^3-3a^2+3a-1
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llll}
 & a^4 & -2a^3 & +a^2 \\
+4a^2 & -2a^3 & & -2a \\
+1 & & +a^2 & -2a
\end{array}
$$

$$a^4-4a^3+6a^2-4a+1$$

5–9 *Gestrichen:*

$3r$

$1r$ $\qquad \frac{c}{d}=3r$. $\frac{c}{d}-1r=\frac{c}{d+e}$. $\frac{c}{d}=\frac{c}{d+e}+1r$. $\frac{c}{d}-\frac{c}{d+e}=1r$.

$2r$ $\qquad \frac{c}{d+e+f}=\frac{c}{d}-1r-\frac{1r}{2}$. $\frac{c}{d+e}-\frac{c}{d+e+f}=\frac{1}{2}r$.

$\frac{1}{2}r$ $\qquad \dfrac{\frac{c}{d}-\frac{c}{d+e}}{\frac{c}{d+e}-\frac{c}{d+e+f}}=$ [*Rechnung bricht ab*]

$\frac{3}{2}r$

2 = *erg. Hrsg.*

Supponatur terminus communis omnibus fractionibus esse c. Ergo terminus primus $z = \dfrac{c}{d}$. Ergo terminus secundus $z - a = \dfrac{c}{d+e}$ et terminus tertius $z - a - b = \dfrac{c}{d+e+f}$.

Supra ostendimus dato termino primo et differentia prima seu termino secundo, invenire terminum tertium. $\dfrac{z-a}{z \smile a, +1} = b$. Terminus primus est z, secundus $z-a$, tertius $z-a-b$. Iam si b est $\dfrac{z-a}{z \smile a, +1}$, erit terminus tertius $z - a - \dfrac{z-a}{z \smile a, +1}$. Et $\dfrac{z-a}{z - a - \dfrac{z-a}{\frac{z}{a}+1}}$ seu $\dfrac{1}{1 - \dfrac{1}{\frac{z}{a}+1}}$ est ratio termini secundi ad tertium. Ratio ergo termini tertii ad secundum est $1 - \dfrac{1}{\frac{z}{a}+1}$.

---

5 *Daneben:* $\dfrac{a}{z} \times \dfrac{z}{a} \quad \dfrac{zz}{aa}$. $\quad \dfrac{1}{\frac{z}{a}+1} \times \dfrac{\frac{z}{a}+1}{1} \,||\, 1 \,|\, \dfrac{1}{\frac{zz}{aa}+1+\frac{2z}{a}}$. $\quad \dfrac{\frac{z}{a}+1}{\dfrac{1}{\dfrac{1}{\frac{z}{a}+1}}} = \dfrac{\frac{zz}{aa}+\frac{2z}{a}+1}{1}$

6 *Darunter:* Ratio termini secundi ad tertium. $1 - \dfrac{3}{4} = \dfrac{4}{3}$. $\dfrac{1}{1} \times \dfrac{4}{5} \quad \dfrac{5}{4}$. $\dfrac{3}{1} \times \dfrac{3}{2} \quad \dfrac{6}{3}$. $\dfrac{6}{3} \times \dfrac{6}{4} \quad \dfrac{24}{18} \,\Big|\, \dfrac{4}{3}$.

2 Ergo terminus *(1)* primus se *(2)* secundus *L* 2 f. $\dfrac{c}{d+e+f}$. | $\dfrac{c}{d+e} \times \dfrac{c}{d+e+f}$ *gestr.* | Supra ostendimus *(1)* datis duobus terminis *(2)* dato *L* 4 b. *(1)* Ergo *(2)* Terminus *L* 6 termini *(1)* tertii ad secundum *(2)* secundi *L* 7–124,1 $-\dfrac{1}{\frac{z}{a}+1}$. *(1)* seu $1 - \dfrac{a}{z} + 1$ seu $\dfrac{a}{z}$ est ratio termini secundi ad tertium seu ea est ratio termini secundi ad tertium, in progressione harmonica, quae est ratio termini primi ad differentiam suam a secundo *(2)* Productus *L*

---

3 Supra ostendimus: s. o. S. 120 Z. 1–5.

Productus ex divisione termini primi per differentiam a secundo, unitate auctus dividat unitatem. Productum ab unitate subtrahatur. Residuum erit ratio termini progressionis harmonicae tertii ad secundum, seu minimi ad medium. Huius theorematis ope invenitur tertia proportionalis harmonica seu continuatio progressionis.

[*Teil 3*]

Termini progressionis arithmeticae eundem terminum dividentes, producunt terminos progressionis harmonicae.

Summam inire omnium fractionum imparium deinceps ab unitate in infinitum: $\left[1\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{9}\right]$ etc.

$\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{25}$. Differentiae sunt $\underset{4\frown 9}{\frac{5}{36}}\quad \underset{9\frown 16}{\frac{7}{144}}\quad \underset{16\frown 25}{\frac{9}{400}}\quad \frac{11}{25\frown 36}\quad \frac{13}{36\frown 49}\quad \frac{15}{49\frown 64}$ etc. in infinitum aequantur $\frac{1}{4}$. Ita inire quoque possumus in summam fractionum quarum [numerator] semper est 2, nominator est factus ex duobus quadratis proximis in se invicem ita ductis, ut idem ducatur in praecedentem et in antecedentem, et factis in se invicem rursus ductis. Ergo et dimidium eius seu si illius fractionis nominator sit 1. Ergo et utcunque multiplicari potest seu augeri nominator.

$\frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}$ etc. sunt termini progressionis harmonicae quorum in infinitum productorum summam reperire difficile fuerit.

Observatum est iam a Wallisio et Mercatore $\frac{a}{b+c}$ esse $= a - \frac{ac}{b+c}$. Et hoc ipsum $\frac{ac}{b+c}$ per consequens rursus est $= ac - \frac{ac^2}{b+c}$.

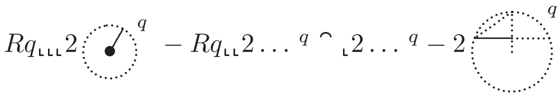
3 harmonicae *(1)* ad proxime maiorem *(2)* tertii *L* 4 invenitur *(1)* media proportionalis harmonica, si *(a)* inventus *(b)* invenietur *(2)* tertia *L* 6 progressionis arithmeticae *erg. L* 6 dividentes, *(1)* constituunt *(2)* producunt *L* 10 f. infinitum: | 1 $\frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}$ *streicht L, ändert u. erg. Hrsg.* | etc. *L* 12 nominator *L ändert Hrsg.* 12 2, *(1)* numerator *(2)* nominator *L* 16 harmonicae *(1)*. Hinc sequitur *(2)* quorum *L* 17 f. fuerit. | Summam reperire progressionis harmonicae in infinitum non productae, summentur termini progressionis arithmeticae, qui sunt eius *(1)* numeratores, *(2)* nominatores *gestr.* | Observatum *L*

Ergo $\dfrac{a}{b+c} = a - \llcorner\llcorner\llcorner\llcorner ac - \llcorner\llcorner\llcorner ac^2 - \llcorner\llcorner ac^3 - \llcorner ac^4 \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner$ etc. sive postremo subscribendo [$b + c$ divisorem]. Nam in infinitum procedi non potest, alioquin idem esset $\dfrac{a}{b+c}$ et $\dfrac{a}{d+c}$ quia scilicet d vel b non ingreditur hanc seriem potestatum, de c per a multiplicatarum, at hinc ego propositionem demonstro admirabilem, si b sit 0 seu nihil et per consequens si numerus sit $\dfrac{a}{c}$, ipsum esse vere aequalem his $a - ac - ac^2$ etc., et per consequens rationem numeri ad numerum, his potestatibus continue subtractis, aequari ergo $\dfrac{1}{c} = 1 - c - c^2 - c^3$. Ergo idem est aliquid dividere, et continue subtrahere hoc modo per consequens idem est subtrahere aliquid quoties possibile est, et subtrahere hoc modo. Ergo $c - c^2 - c^3$ etc. est 1, et ipsum c erit: $c^2 - c^3 - c^4$ etc.

Scientia analyseos aequationumque ope scripturae universalis facile ad omnia applicari potest. Non recte proceditur minime assumendae sunt literae A B etc., sed signa alia materiae quae tractatur commoda, alioquin animus literarum explicationem quaerens confunditur, ex. gr. ratio lateris polygoni inscripti praecedentis ad sequens exponi potest sic per literas

$Rq\llcorner\llcorner\llcorner 2b^q - Rq\llcorner\llcorner 2b^q \frown \llcorner 2b^q \ -2a^q$

ubi b significat radium circuli, a sinum polygoni antecedentis inscripti. Sed quanto rectius signa quaedam naturalia ipsi radio et lateri polygoni tributa adhibemus, ut:



1 etc. *(1)* sive procedendo in infinitum *(2)* sive *L* 2 b + c divisorem *streicht L, erg. Hrsg.* 5 si *(1)* divisor sit *(2)* numerus *L* 13 inscripti *erg. L* 14 sic | melius *gestr.* | per *L* 15 $-2a^q$ *(1)* quanto rectius notas alias adhibemus: pro *(2)* ubi *L* 17 ipsi *(1)* circuli et *(2)* radio *L*

124,18 Observatum: In N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 [Marg.] ist die Formel $\dfrac{a}{b-c} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{ca}{b^2} + \dfrac{c^2a}{b^3} + \dfrac{c^3a}{b^4}$ etc. angegeben (prop. XIII, S. 25); darüber hinaus berechnet Mercator $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. (prop. XV, S. 29 f.), was J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668, S. 753 erwähnt. Die von Leibniz angegebene Formel ist nur für den Spezialfall $b = 1$ gültig; der Fehler beeinträchtigt die Überlegungen bis Z. 9. 15 Die Formel für das dem Kreis einbeschriebene, regelmäßige n-Eck und 2n-Eck verwendet Leibniz in *LSB* VII, 1 N. 3_3, S. 13.

vel figurae loco ipsa vox

$Rq_{\llcorner\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q - Rq_{\llcorner\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q \frown {}_{\llcorner}2\underline{\text{rad.}}^q - 2\underline{\text{sin. polyg. inscr. praeced.}}^q$

Hac methodo omnis aequatio statim daret theorema, nec opus esset eius transformatio. Infinita possunt esse theoremata sed problemata inprimis utilia non nisi finita, quaerenda ergo methodus ea theoremata ex infinito possibilium numero seligendi, quae ad problemata usum habere possunt. In primis autem ad problemata universalia. Ex problematis ea quaerenda sunt prae caeteris, quae sunt compendiosa, quia res eadem effici potest infinitis modis, quaerenda est ratio compendiosissima. Ut in progressionibus potest inveniri methodus repraesentandi omnia Euclidis *Elementa* una cum suis demonstrationibus in una tabula, ope scripturae universalis eiusque demonstrationum. Imo simili tabula comprehendi possunt omnia theoremata Archimedis, Apollonii, Pappi etc. Sed sufficiet id fieri pro istis veteribus, et quod ad recentiores persequenda sunt tandem theoremata quae serviunt ad problemata.

Circulus est summa differentiarum omnium inter ellipses omnes eiusdem diametri maximae, inter ipsum et ellipsin omnium minimam, seu ipsam eius diametrum interpositas. Hinc demonstrari potest debere ellipses esse inter se et ad circulos, ut parallelogramma rectangula circumscripta. Hinc aperitur nova methodus universalis geometriae infinitorum, ut proportiones figurarum possint demonstrari. Nam hoc loco cum circulus etiam sit summa differentiarum inter polygona, necesse est, polygona ellipsibus et circulo esse proportionalia ac proinde ellipses et circulos esse ut polygona circumscripta. Hac methodo ea omnia possunt demonstrari, quae hactenus per geometriam indivisibilium, et nonnulla ampliora. Non enim possunt exhiberi curvae rectis aequales per geometriam indivisibilium, at hac methodo exhiberi possunt tales infinitae.

14 f. eiusdem diametri maximae *erg.* *L*   15 et *(1)* lineam rect *(2)* ellipsin *L*   18 demonstrari *(1)*, quoties scilicet habent *(2)*. Nam *L*   19 et circulo *erg.* *L*   22 et | fortasse *gestr.* | nonnullae *L*

9 omnia Euclidis *Elementa*: EUKLID, *Elemente*.   11 theoremata Archimedis, Apollonii, Pappi: ARCHIMEDES, *Opera*; APOLLONIUS, *Conica*; PAPPUS, *Mathematica collectio*.

A Wallisio observatum tam in *Arithm. infinit.* quam in iudicio de *Logarithmotechnia* Mercatoris quod: $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. alternando potestates affirmatas negatasque, an ergo in genere $-,\,,\,,\,,-,\,,\,,-,\,,-,- = -+-+-$. Inquirendum quid $\dfrac{a}{b-c}$. Non videtur id Wallisius eo in loco satis exacte expressisse. Est in talibus alternatim affirmatis et negatis proprie complicatio duarum progressionum alterius continue crescentis additae alterius subtractae, et subtractio est maior semper, hinc continuum in effectu decrementum. Hinc calculandum quid sint: $1 - 1 + 2 - 3 + 4 - 5$ etc. et ita de caeteris progressionibus complicatis, regulae quaerendae universales.

NB. Possint nova id genus theoremata condi, ubicunque in operationibus per partes factis semper denuo recte inchoandum, ut fit in extractionibus radicum ex binomiis et residuis, item in additione et subtractione rationum.

---

1 *Darüber:*

$$
\begin{array}{llll}
b2 - a2 & 3a - b & 3a - \ b & \begin{array}{rr} 16 & 20 \\ 9 & 6 \\ \hline 144 & 120 \end{array} \\
25 - 16 = 9 & 12 - 5 & 9aa + bb - 6ab & \\
5 \quad\ 4 \quad\ 3 & & 144 + 25 - 120 & \\
 & & \begin{array}{r} 120 \\ \hline 24 \\ +25 \end{array} &
\end{array}
$$

3 genere *(1)* $1,\,,\,,-\mathrm{a},\,,-\mathrm{a}^2,-\mathrm{a}^3 =$ *(2)* $-,\,,\,,\,,$ *L* 5 f. crescentis *(1)*, alterius continue *(2)* additae *L* 9 NB. *(1)* Potest construi regula generalis *(2)* Possint *L* 9 genus | problemat *gestr.* | theoremata *L*

---

1 A Wallisio observatum: vgl. Erl. zu S. 124 Z. 18. Die fortgesetzte Division $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4$ etc. ist in J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, nicht enthalten. Wallis entwickelt jedoch in *Mathesis universalis*, 1657, cap. XXXIII, prop. 68, S. 303 (*WO* I, S. 175 f.) die geometrische Reihe durch fortgesetzte Division. Der Fall $\dfrac{a}{b-c}$ ist bei N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668 in prop. XIII, S. 25 angegeben; in J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, S. 755 findet sich der Spezialfall $\dfrac{b^2}{1-a}$. 13 $b2 - a2$: Außer in gemeinsam mit J. Ozanam verfaßten Texten verwendet Leibniz diese Exponentenschreibweise auch in *LSB* VII, 1 N. 42, S. 250 f.

Vide quae Mercator de differentia inter duos rationum terminos in innumeras partes aequales divisa. Et haec sunt mire foecunda. Licet enim de rationibus quoque rationum etc. compositis divisisque etc. talia comminisci. Liceret omnes pene possibiles modos summandi infinita determinare.

---

1 Vide quae Mercator: N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XVI S. 30 f. [Marg.]

9. AEQUATIO FUNDAMENTALIS PROGRESSIONIS HARMONICAE
[Herbst 1672 – Anfang 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 137. Ca. 1/2 Bog. 4°. 1 Spalte auf Bl. 137 r°. Bl. 137 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Stück ist auf Mainzer Papier geschrieben. Es greift den Ansatz von N. 8 S. 115 Z. 1 wieder auf und dürfte kurz danach entstanden sein.

Aequatio fundamentalis ex definitione progressionis harmonicae $z \; - \; a+2b = \dfrac{zb}{a+b}$.

$z \;-\; a+2b, \frown a+b = zb. \quad za+zb, \;-\; \begin{array}{c} a+2b \\ a+b \end{array} = zb. \quad za+zb = zb + \begin{array}{c} a+2b. \\ a+b \end{array}$

$za + \cancel{zb} - \cancel{zb} = \begin{array}{c} a+2b. \\ a+b \end{array} \quad za = \begin{array}{c} a+2b. \\ a+b \end{array} \quad z = \dfrac{\begin{array}{c} a+2b \\ a+\;\;b \end{array}}{a}\;. \quad z = \dfrac{aa+2ba+ba+2bb}{a}.$

$$\begin{array}{lllll} z = & a \;+ & 3b & +\dfrac{2b^2}{a}. & \dfrac{6}{2} \\ & a \;+ & 3b & +\dfrac{2b^2}{a} & \quad 1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{c} \left(\left(\left(\left(1\right)\frac{5}{2}\left(\frac{3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)\right)\right)\right)\right)\frac{1}{2} \\ \left(\left(\left(\left(\frac{6}{2}\right)\right)\right)\right) \end{array} \right) \qquad \begin{array}{l} \dfrac{6}{3} \\ \quad \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{6}{4} \end{array}$$

16 f. Leibniz berechnet für $a = 1$, $b = \dfrac{1}{2}$ schrittweise z.

Datis duabus differentiis proportionis harmonicae, tres terminos invenire.

$$\begin{array}{lcll}
a + 3b + \dfrac{2b^2}{a} & & & \\
 & a & & \\
3b + \dfrac{2b^2}{a} & & = & b + 3c + \dfrac{2c^2}{b} \\
 & b & & \\
2b + \dfrac{2b^2}{a} & & = & 3c + \dfrac{2c^2}{b} = c + 3d + \dfrac{3d^2}{c} \\
 & c & & \\
 & & & \\
 & d & &
\end{array}$$

129,8 *Dazu, gestrichen:*

$1 \;-\; a + 2b = \dfrac{b}{a+b}$. $\quad 1 = a + 2b + \dfrac{b}{a+b}$. $\quad a + b = \begin{array}{c} a + 2b \\ a + b \end{array}$ [*bricht ab*]

1 Datis | duabus *erg.* | differentiis *(1)* progressionis *(2)* proportionis harmonicae | tres *erg.* | terminos *L*

10. DE FRACTIONIBUS SUMMANDIS
[März – 16. Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 131–132. 1 Bog. 2°. 3 S. Teil 2 ist quer auf den freigebliebenden Rest der Innenseite des Bogens geschrieben. — Auf Bl. 132 v° auf den 16. Mai 1673 datierter Quittungsentwurf von Leibniz' Hand (Cc 2, Nr. 436; Druck für Ergänzungsband zu *LSB* I, 1 vorgesehen). 8 Z.
Cc 2, Nr. 437

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. N. 10 ist vermutlich vor dem Quittungsentwurf auf Bl. 132 v° entstanden, der sich auf einen ab dem 16. Mai 1673 laufenden Mietvertrag bezieht und daher wohl kurz vor diesem Termin verfaßt ist.

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{llcccll}
a & 1 & & & & & \\
 & & \dfrac{a}{b} & = & \dfrac{1}{4} & \dfrac{a}{b} & \dfrac{1}{2} \\
b & 4 & & & & & \\
 & & \dfrac{b}{c} & = & \dfrac{4}{9} & \dfrac{b}{c} & \dfrac{2}{3} \\
c & 9 & & & & & \\
 & & \dfrac{c}{d} & = & \dfrac{9}{16} & \dfrac{c}{d} & \dfrac{3}{4} \\
d & 16 & & & & & \\
 & & \dfrac{d}{e} & = & \dfrac{16}{25} & \dfrac{d}{e} & \dfrac{4}{5} \\
e & 25 & & & & & \\
 & & \dfrac{e}{f} & = & \dfrac{25}{36} & \dfrac{e}{f} & \dfrac{5}{6} \\
f & 36 & & & & &
\end{array}$$

$$\frac{a}{b} \underline{\times} \frac{b}{c} = \frac{ac+b^2}{bc} \qquad \frac{b}{c} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{c}{d} = \frac{bd+c^2}{cd}$$

$$\frac{ac+b^2}{bc} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{bd+c^2}{cd} = \frac{ac^2d+b^2cd+b^2cd+bc^3}{bc^2d} = \frac{acd+2b^2d+bc^2}{bcd}$$

$$\frac{ac+b^2}{bc} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{c}{d} = \frac{acd+b^2d+bc^2}{bcd}$$

In tali ergo casu, cum fractiones summandae sunt, ita comparatae, ut nominator praecedentis sit numerator antecedentis, fiat fractio, cuius nominator, sit factus ex omnibus terminis demto primo, numerator compositus ex tot partibus quot sunt fractiones, et quaelibet pars ita componatur, ita ut prima constet ex omnibus terminis, demto secundo, secunda ex omnibus terminis demto tertio, et ita porro, ita pars prima numeratoris differet a nominatore, quod loco termini 2^{di}, habet primum, (quo nominator caret) pars 2^{da} ita, quod loco termini 3^{tii} habebit 2^{dum} etc.

Iam ut talia: $\dfrac{acd + b^2d + bc^2}{bcd} = \dfrac{a}{b} + \dfrac{b}{c} + \dfrac{c}{d}$.

Imo sic potius: nominator habet omnes demto primo, primus numerator habet omnes demto 2^{do}, reliqui numeratores habent suum terminum bis, et carent proxime antecedente et proxime sequente.

Summam ita investigabimus: $$\begin{aligned} acd + b^2d &= ac + b^2 \lrcorner \frown d \\ b^2d + bc^2 &= bd + c^2 \lrcorner \frown b \end{aligned}$$

Hinc apparet, si b. sit media proportionalis inter a et c. vel c inter b et d. tunc ad summam ineundam, facilius perveniri posse, quia $ac = b^2$ et $bd = c^2$.

1. 2. 4. 8. 16. et sit $\dfrac{1}{2}\ \dfrac{2}{4}\ \dfrac{4}{8}\ \dfrac{8}{16}$ ibi ostendi poterit omnes terminos esse $=$.

Quid vero si termini sint arithmetice proportionales, ita stabit:

$$\frac{a \frown \llcorner a+2x \lrcorner\lrcorner \frown \llcorner a+3x \lrcorner\lrcorner\lrcorner \ + \ \llcorner\llcorner a+x \lrcorner \frown \llcorner a+x \lrcorner \frown \llcorner a+3x \lrcorner\lrcorner \ + \ a+x \frown a+2x \frown a+2x}{a+x \frown a+2x \frown a+3x}$$

$\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c} + \dfrac{1}{d} + \dfrac{1}{e}$. sintque $a.b.c.d.e.$ progressionis arithmeticae.

3 tot *(1)* terminis *(2)* partibus *L* 4 pars | ex *streicht Hrsg.* | *(1)* omnibus terminis ita *(2)* ita componatur *L* 5 ita *(1)* terminus pri *(2)* pars *L* 8 f. $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}}$ *(1)* breviter summes, ita opinor agendum erit: differentia inter acd+ *(a)* $\mathrm{b^2d}$ *(b)* $\mathrm{b^2c}$ *(2)*. Imo *L* 15 ineundam, *(1)* tantum primum terminum multiplicari posse per numerum terminorum, et facto velut numeratori subscribi posse nominatorem factum ex omnibus terminis demto primo v. g. $\mathrm{acd + b^2d + b}$ *(2)* facilius *L*

4 f. ita ... porro: Das hier genannte Bildungsgesetz ist vom zweiten Term an falsch; es wird Z. 9–11 korrigiert. Die folgende Aussage Z. 5–7 ist richtig.

$\frac{1}{a} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{b} = \frac{b+a}{ab}$. (NB. haec aequatio utilis observatu ad reductiones) $\frac{1}{b} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{c} \quad \frac{b+c}{bc}$. $\frac{a+b}{ab} \times \frac{1}{c} = \frac{ab+bc+ac}{abc} \times \frac{1}{d} = \frac{abc+abd+acd+bcd}{abcd}$. Et hoc schema universale est in omnium fractionum additione, in quibus numerator unitas. Cum iam termini sint progressionis arithmeticae, sunto $a = a$. $b = a + 1x$. $c = a + 2x$. $d = a + 3x$. etc.

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{2} = \frac{a+b}{ab} = \frac{a+a+x}{a \frown \llcorner a+x \lrcorner} = \frac{2a+x}{a^2+ax}$$

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} = \frac{ab+bc+ac}{abc} = \frac{a^2+ax+a^2+2x^2+3ax+a^2+2ax}{a^3+3a^2x+2ax^2} = \frac{3a^2+6ax+2x^2}{a^3+3a^2x+2ax^2}$$

Quod si iam $x = a$. erit $\frac{11a^2}{6a^3}$. et si $a = 1$. erit $\frac{11}{6}$.

$$\frac{11}{6} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{4} \quad \frac{44+6}{24} \quad \frac{50}{24} \Big| \frac{25}{12} \qquad \frac{25}{12} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{5} \quad \frac{125+12}{60} \quad \frac{137}{60} \qquad \frac{50}{24} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{250+24}{120} \qquad \frac{274}{120}$$

132,18 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} a^2 + 2ax \\ \underline{a \ + \ 3x} \\ a^3 + 2a^2x + 3a^2x + 6ax^2 \\ a^3 + ax^2 + 2a^2x + 3a^2x + 3x^3 + 6ax^2 = a^3 + 3x^3 + 5a^2x + 7ax^2 \end{array}$$

6 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll} (bc) & = & a + x \frown a + 2x = a^2 + 3ax + 2x^3 \\ (ac) & = & a \frown (a+2x) = a^2 + 2ax \\ (abc) & = & a \frown (a+x) \frown (a+2x) = a^2 + ax \frown a + 2x \\ & = & a^3 + a^2x + 2a^2x + 2ax^2 \end{array}$$

8 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{ccccc} & & 12 & & \\ 3 & \cancel{2}8 & & 12 & \\ \cancel{2}\cancel{7}4 \fint 2. & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} \fint 3. & 24 & & 72 \\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{0} & \cancel{3}\cancel{4} & & 24 & \\ & & 120 & & \end{array}$$

$$\frac{1}{1}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{2}\quad \frac{2+1}{2}=\frac{3}{2}.\qquad \frac{3}{2}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{3}=\frac{11}{6}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{4}\quad \frac{44+6}{24}=\frac{50}{24}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{5}=\frac{250+24}{120}=\frac{274}{120}$$

$$\frac{274}{120}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{6}\qquad 1644+120\quad =\frac{\overset{32}{\cancel{1}\cancel{7}\cancel{6}4}}{\cancel{7}\cancel{2}\cancel{0}}\ \fint\ 2\ \frac{324}{720}.$$

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{1}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{2}=\frac{1\frown 1+1\frown 2}{1\frown 2}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{3}=\frac{1\frown 1\frown 2+1\frown 1\frown 3+1\frown 2\frown 3}{1\frown 2\frown 3}\ +\frac{1}{4}=$$

$$\frac{1\frown 1\frown 2\frown 3+1\frown 1\frown 2\frown 4+1\frown 1\frown 3\frown 4+1\frown 2\frown 3\frown 4}{1\frown 2\frown 3\frown 4}\ +\frac{1}{5}$$

$$\frac{1+2}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2+3+2\frown 3}{2\frown 3}\ +\frac{1}{4}=\frac{2\frown 3+2\frown 4+3\frown 4+2\frown 3\frown 4}{2\frown 3\frown 4}\ +\frac{1}{5}=$$

$$\frac{2\frown 3\frown 4\ +\ 2\frown \overset{30}{3}\frown 5+\ 2\frown \overset{40}{4}\frown 5+\ 3\frown \overset{60}{4}\frown 5+\ 2\frown 3\overset{120}{\frown} 4\frown 5}{2\frown 3\frown 4\frown 5}\ +\frac{1}{6}=$$

---

2 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll} \overset{7}{\cancel{1}\cancel{3}2} & & \cancel{2} \\ \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0}\ \fint\ 2. & & \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0}\ \fint\ 144 \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{4} & & \cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \end{array}$$

3 *(1)* $\frac{1}{a}\ \frac{1}{2a}\ \frac{1}{3a}\ \frac{1}{4a}\ \frac{1}{5a}\qquad \frac{1}{a}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{2a}\quad \frac{2a\frown 1+a\frown 1}{2a}$ *(2)* $\frac{1}{1}$ *L*

4 $\frac{1}{3}$ = *(1)* $\frac{1\frown 1\frown 3+1\frown 2\frown 3}{1\frown 2\frown 3}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{4}=\frac{1\frown 1\frown 3\frown 4+1\frown 2\frown 3\frown 4}{1\frown 2\frown 3\frown 4}+\frac{1}{5}=\frac{1\frown 1\frown 3\frown 4\frown 5+1\frown 2\frown 3\frown 4\frown 5}{1\frown 2\frown 3\frown 4\frown 5}$

(2) | $\frac{1\frown 1+1\frown 2}{1\frown 2}\ \overset{+}{\underset{-}{\times}}\ \frac{1}{3}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{1\frown 1\frown 2+1\frown 1\frown 3+1\frown 2\frown 3}{1\frown 2\frown 3}$ *L*

$$\frac{2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6+2\frown 3\frown 5\frown 6+2\frown 4\frown 5\frown 6+3\frown 4\frown 5\frown 6+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6}{2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6}$$

$$720+360+240+180+144+120=120\frown 6+24\frown 5+36\frown 4+60\frown 3+120\frown 2+360\frown 1$$

$$(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5 \qquad (3)\ 2\frown 3\frown 5\frown 6 \qquad (3)\ 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

$$2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6\ +\ 2\frown 3\frown 5\frown 6+2\frown 4\frown 5\frown 6\ +\ 3\frown 4\frown 5\frown 6+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

Haec ut summemus opus est aequatione eorum seu reductione ad aequalitatem per mutuas compensationes.

$$2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6=2\frown 3\frown 4\frown 5\ (2)+2\frown 3\frown 4\ldots+2\frown 3\frown 5\frown 6=$$

$$2\frown 3\frown 4\frown 5\ (3)+2\frown 3\frown 6+(2)\ 2\frown 3\frown 4\ldots+2\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(4)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(3)\ 2\frown 3\frown 4+(2)\ 2\frown 3\frown 6+(1)\ 2\frown 5\frown 6\ldots+3\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(5)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(4)\ 2\frown 3\frown 4+(3)\ 2\frown 3\frown 4+(2)\ 2\frown 3\frown 6\ldots+2\frown 3\frown 4\frown 5\frown 6=$$

$$(6)\,2\frown 3\frown 4\frown 5+(5)\,2\frown 3\frown 4+(4)\,2\frown 3\frown 6+(3)\,2\frown 5\frown 6+(2)\,4\frown 5\frown 6+(1)\,3\frown 4\frown 5\frown 6.$$

$6\frown 120$	$5\frown 24$	$4\frown 36$	$3\frown 60$	$2\frown 120$	$1\frown 360$
720	120	144	180	240	360

$$(12)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5+(12)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5.$$

$$(3)\ 2\frown 3\frown 4\frown 5 \quad (3)\ 2\frown 3\frown 5\frown 6 \quad (3)\ 3\frown 4\frown 5\frown 6$$

6 f. compensationes. *(1)* $2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4\frown 6=2{,}2\frown 3\frown 4\frown 5+2\frown 3\frown 4+\ldots+2\frown 3\frown 5\frown 6=2\frown 3$ *(2)* $2\frown 3\frown 4\frown 5$ *L*

3 f. Leibniz' kombinatorische Überlegungen zur Zusammenfassung der Summanden sind nur teilweise richtig.

[*Zusätze zu S. 134 Z. 3 – S. 135 Z. 15*]

720			.		.		.		.		.	$\frac{1}{1}$	120	.	.	.	.	.				
	.	360			.		.		.		.			60	.	.	.	.				
360			.	240			.		.		.	$\frac{1}{2}$	60	.	40	.	.	.	24			
	.	120			.	180			.		.			20	.	30	.	.		4		
240			.	60			.	144			.	$\frac{1}{3}$	40	.	10	.	24	.	12		8	
	.	60			.	36			.	120				10	.	6	.	20		12		6
180			.	24			.	24			.	$\frac{1}{4}$	30	.	4	.	4	.	8		2	
	.	36			.	12			.		.			6	.	2	.	.		2		
144			.	12			.		.		.	$\frac{1}{5}$	24	.	2	.	.	.	6			
	.	24			.		.		.		.			4	.	.	.	.				
120			.		.		.		.		.	$\frac{1}{6}$	20	.	.	.	.	.				

diversis assumtis seriebus harmonicis, ut maximus ad maximum, ita et reliqui ad respondentes, ut et differentiae.

720	600	576	540	480	360
360	240	216	180	120	
240	120	96	60		
180	60	36			
144	24				
120	0				
1764					

12 *Unter der mittleren Tabelle:* manet

2–12 *Mittlere Tabelle gestr. u. wieder gültig gemacht L*

$$
\begin{array}{rcccc}
720 & 5040 & & & \\
7 & & 2520 & & \\
\overline{5040} & 2520 & & 1680 & \\
 & & 840 & & 1040 \\
 & 1680 & & 620 & \\
 & & 420 & & 552 \\
 & 1260 & & 168 & \\
 & & 252 & & 84 \\
 & 1008 & & 84 & \\
 & & 168 & & \\
 & 840 & & 148 & \\
 & & 120 & & \\
 & 720 & & & \\
\end{array}
$$

[*Teil 2*]

$$
\frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{4} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{3}{4} \qquad \frac{\frac{1}{4} \times \frac{1}{2}}{4+2}
$$

$$
\frac{1}{3} \times \frac{4}{4} \quad \frac{4}{12} + \frac{3}{12} \qquad \frac{1}{3}\;\frac{-}{-}\;\frac{1}{4} \quad \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4}\;\frac{-}{-}\;\frac{3}{3} \quad \frac{3}{12}
$$

$$
\frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{4}{12} - \frac{3}{12} \quad \frac{1}{12} \qquad \frac{1}{3}\;\frac{-}{-}\;\frac{4}{4} \quad \frac{4}{12} \qquad \frac{1}{4}\;\frac{-}{-}\;\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12}
$$

$$
\frac{1}{4}\;\frac{-}{-}\;\frac{1}{4} \quad \frac{1}{16}
$$

$$
\frac{1}{4} \underset{-}{\times} \frac{2}{3} \quad \frac{3+8}{12} \quad \frac{11}{12} \qquad \frac{1}{4} \quad \frac{2}{3} \quad \frac{2}{12}
$$

$$
60 \quad \frac{1}{60} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{60}{60} \qquad \frac{40}{60} \quad \frac{15}{60} \quad \frac{10}{60} \,\Big|\, \frac{1}{6}\;\frac{-}{-}\;\frac{10}{10} \quad \frac{10}{60}
$$

$$
\frac{80}{10} \quad \frac{10}{80} \,\Big|\, \frac{1}{8}
$$

fl thl fln 243 $\cancel{3}\,1$

60 $\underline{51}$ $\cancel{1}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{3}$ ⨍ $3098\frac{1}{4}$

1 — $\underline{4}$ thl 3 sols — $12\frac{3}{4}$ 243 $\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}$

240 $\frac{243}{1}$ — — $\frac{51}{4}$ $\underline{1215}$

$\frac{12393}{4}$ 3 thl sols

$\cancel{3}\cancel{0}\cancel{9}8$ ⨍ 51 . $38\frac{1}{4}$

$\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}$

fl thl fln 4

$\frac{3}{4}$ $\frac{1}{2}$ — — $\frac{10}{1}$ $\frac{10}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{40}{6}$ $\frac{10}{2} \times \frac{3}{4}$ $\cancel{4}\cancel{0}$ ⨍ $6\frac{4}{6}\,\Big|\overset{2}{}\,\frac{2}{3}$

$\cancel{0}$

---

9 *Nebenrechnung:* $\frac{16}{24}\,\Big|\overset{8}{}\,\frac{2}{3}$

13 *Näherungsrechnung für* $\frac{40}{50} \cdot \frac{2}{3}$ *zur Lesart, nicht gestrichen:* $\frac{13}{25}$

9 $\frac{3}{4}$ *(1)* $\frac{40}{50}$ *(2)* $\frac{40}{6}$ *L*

1–10 Bei den vorliegenden Währungs- und Münzrechnungen handelt es sich wohl um Übungen. Leibniz verwendet im ersten Beispiel die Umrechnungskurse 1 Gulden = 4 Taler, 1 Taler = 60 Sous, 1 Gulden = 243 Sous, im zweiten Beispiel 3 Gulden = 2 Taler. In der Vorlage ist in Z. 4 die 240 durch die 243 überschrieben; aus Gründen der Übersichtlichkeit sind die beiden Zahlen getrennt wiedergegeben.

11. TABULAE SERIERUM FRACTIONUM
[März – 24. Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 2 S., teilweise zweispaltig. Cc 2, Nr. 279

Datierungsgründe: Leibniz bezeichnet die in Teil 2 berechnete Summe $\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{n^k} = 1$ im Brief an H. Oldenburg vom 24.V.1673 als kürzlich gefundenes Ergebnis (vgl. *LSB* III, 1 N. 20 S. 93 Z. 16–24). N. 11 dürfte also nicht vor der Rückkehr aus England Anfang März 1673 enstanden sein.

[*Teil 1*]

$$
\begin{array}{cccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & 0 & \\[2ex]
\frac{1}{3} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \\[2ex]
\frac{1}{6} & \frac{1}{4} & \frac{2}{24} & \Big| \ \frac{1}{12} \\[2ex]
\frac{1}{10} & \frac{1}{8} & \frac{2}{80} & \Big| \ \frac{1}{40} \\[2ex]
\frac{1}{15} & \frac{1}{16} & \frac{1}{240} & \\[2ex]
\frac{1}{21} & \frac{1}{32} & \frac{11}{672} & \\[2ex]
\frac{1}{28} & \frac{1}{64} & \frac{36}{1792} & \\[2ex]
\text{etc.} & & &
\end{array}
$$

[*Teil 2, in anderer Tinte*]

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & & & & & \\
 & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \Big| & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{4} & & & & & \frac{8}{144} \\
 & \frac{5}{36} & \frac{4}{36} & \Big| & \frac{1}{9} & \\
\frac{1}{9} & & & & & \\
 & \frac{7}{144} & \frac{6}{144} & \Big| & \frac{1}{24} & \\
\frac{1}{16} & & & & & \\
 & \frac{9}{400} & \frac{8}{400} & \Big| & \frac{1}{50} & \\
\frac{1}{25} & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
\frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \frac{5}{4}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c|ccccc}
A & B & C & D & E & \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \text{etc.} \\
\hline
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \text{etc.} \\
1 & \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \frac{1}{125} & \text{etc.} \\
1 & \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \frac{1}{625} & \text{etc.} \\
1 & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array} \quad = 1$$

11 $\frac{2}{1} \ldots \frac{5}{4}$ *erg. L* 13–16 *Nach den Spalten* B *bis* D *schreibt Leibniz zunächst die Folge der Differenzen, streicht sie aber wieder.*

Summa horum omnium est: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc.

Ergo omnia ista infinities infinita demto: $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. $=1$.

Iam $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. $=$ eidem infinities infinito. Ergo ista series $=1$.

NB. Sed ista series est [dimidiata reciprocorum] numerorum triangularium quos alibi inveni $=$ [2].

	F	G	H	I	K	etc.
L	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	
M	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	
N	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{180}$	
O	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{54}$	$\frac{1}{192}$	$\frac{1}{500}$	$\frac{1}{1080}$	
	etc.	etc.	etc.	etc.	etc.	

Hae sunt summae tabulae praecedentis.

Ex seriebus A. B. C. D. E. fient series: F. G. [H.] I. K. multiplicando illarum terminos per summas seriei semper in illis praecedentis, ut tota C per $\frac{3}{2}$ dat G. Series M fit ex L demtis a se invicem fractionibus harmonicis. N ex M demtis quadraticis. O ex N demtis cubicis. Eadem series M est [triangularium reciprocorum dimidiatorum]. Et series N coincidit differentiis quadratorum abiecta unitate ex eorum numeratoribus, duplicatisque nominatoribus NB. NB.

2 Ergo | residua *gestr.* | omnia | ista *erg.* | infinities *L* 4 duplicata *L ändert Hrsg.* 5 $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.* 13 H. *erg. Hrsg.* 15 demtis *(1)* quadratis fractionibus. N ex M demtis cubis etc. *(2)* a *L* 16 f. est *(1)* duplum *(2)* | pyramidalium duplicatorum *ändert Hrsg.* |. Et *L* 17 N *(1)* fit ex differentiis *(2)* coincidit *L*

4 f. alibi inveni: vgl. die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 6 Z. 4 f.; in den frühesten Stücken des vorliegenden Bandes, vgl. N. 2, N. 5, hat Leibniz die Summe der halbierten reziproken Dreieckszahlen berechnet.

[*Nebenbetrachtungen zu S. 140 Z. 11 – S. 141 Z. 18*]

$$\frac{1}{3}\,\text{—}\,\frac{3}{2}\;\;\frac{3}{6}\;\Big|\;\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{9}\,\text{—}\,\frac{3}{2}\;\;\frac{3}{18}\;\Big\|\;\frac{1}{6}\qquad \frac{4}{3}\,\text{—}\,\frac{1}{16}\;\;\frac{4}{48}\;\Big\|\;\frac{1}{12}\qquad \frac{1}{25}\,\text{—}\,\frac{5}{4}\;\;\frac{5}{100}\;\Big|\;\frac{1}{20}\qquad \frac{1}{3}\,\text{—}\,\frac{4}{3}\;\Big|\;\frac{4}{9}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20}\;\lrcorner\lrcorner & & \frown\,\frac{2}{1}\\
 & 4 & & 6 & & 8 & & & \\
 & & 2 & & 2 & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\frac{2}{8} & & \frac{3}{54} & & \frac{4}{192} & & \frac{5}{[960]} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{18} & & \frac{1}{48} & & \frac{1}{[192]}\;\lrcorner\;\;\frown\,\frac{3}{2}\\
 & 46 & & 138 & & [768] & & & & 14 & & 30 & & [144] & \\
 & & [92] & & [630] & & & & & & & & & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{4}.\qquad \frac{1}{18}\times\frac{1}{10}\;\;\frac{10}{18}\;\Big|\;\frac{5}{6}.\qquad \frac{1}{48}\times\frac{1}{20}\;\;\frac{20}{48}\;\Big|\;\frac{5}{12}.\qquad \frac{1}{2}\times\frac{3}{2}\;\;\frac{2}{6}\;\Big|\;\frac{1}{3}.\qquad \frac{1}{2}\;\frac{3}{2}\;\;\frac{3}{4}.$$

$$\begin{array}{cccccc}
 & & & \frac{3}{2} & & \\
1 & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{3}{2} & & & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{1}{1} & \\
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & & & \frac{2}{3}\\
\frac{1}{4} & & & & \frac{1}{3} & \\
 & \frac{1}{8} & \frac{1}{6} & & & \frac{2}{9}\\
\frac{1}{8} & & & & \frac{1}{9} & \\
 & \frac{1}{16} & \frac{3}{54} & & & \\
\frac{1}{16} & & & & \frac{1}{27} & \\
 & & \frac{27}{27\frown 54} & & &
\end{array}$$

6 380 *L ändert Hrsg.* 6 76 *L ändert Hrsg.* 7 188 *L ändert Hrsg.* 7 28 *L ändert Hrsg.* 8 82 *L ändert Hrsg.* 8 50 *L ändert Hrsg.*

2 Leibniz verwendet hier die Striche zur Kennzeichnung des Produktes zweier Brüche.

[*Teil 3*]

	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	1	
$\frac{1}{4}$					
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{2}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{8}$
$\frac{1}{8}$					
	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{64}$	$\frac{2}{64}$	$\frac{1}{32}$	$\frac{25}{64}$
	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{1024}$	$\frac{2}{1024}$	$\frac{1}{512}$	$\frac{401}{1024}$
	$\frac{1}{32}$				
	$\frac{1}{64}$				
	$\frac{1}{128}$				
	$\frac{1}{256}$				
	$\frac{1}{512}$				
	$\frac{1}{1024}$				

$$
\begin{array}{cccc}
 & 3 & & \\
\frac{3}{2} & & 2 & \\
 & \frac{1}{1} & & \\
\frac{\frac{1}{2}}{1} & & \frac{2}{3} & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{4}{9} \\
\frac{\frac{1}{2}}{3} & & \frac{2}{9} & \\
 & \frac{1}{9} & & \frac{4}{27} \\
\frac{\frac{1}{2}}{9} & & \frac{2}{27} & \\
 & \frac{1}{27} & & \frac{4}{81} \\
\frac{\frac{1}{2}}{27} & & \frac{2}{81} & \\
 & \frac{1}{81} & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{cccccc}
1 & & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{2}{2} & 1 & & \\
\frac{1}{2} & & & & \frac{2}{3} & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{3} & & \\
\frac{1}{3} & & & & \frac{3}{18} & \Big| \; \frac{1}{6} \\
 & \frac{1}{12} & \frac{2}{12} & \frac{1}{6} & & \\
\frac{1}{4} & & & & \frac{4}{60} & \Big| \; \frac{1}{15} \\
 & \frac{1}{20} & \frac{2}{20} & \frac{1}{10} & & \\
\frac{1}{5} & & & & \frac{5}{150} & \Big| \; \frac{1}{30} \\
 & \frac{1}{30} & \frac{2}{30} & \frac{1}{15} & & \\
\frac{1}{6} & & & & & \\
 & & & \frac{1}{21} & &
\end{array}
$$

---

3 *Nebenbemerkung zu* $\frac{2}{3}$: Divisé par $\frac{3}{2}$ dat $\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \quad \frac{4}{9}$.

5 *Nebenbemerkung zu* $\frac{3}{18}$: $\frac{3}{18} \times \frac{3}{2} \quad \frac{6}{54} \Big| \frac{1}{9}$.

3–9 *Die beiden letzten Spalten erg. L* 13 *(1)* Multiplié par $\frac{3}{2}$ dat $\frac{1}{1}$ *(2)* Divisé … dat | $\frac{1}{1}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{2}{3}$ *L*

$$\begin{array}{ccccc}
 & 3 & & & \\
2 & & 2 & & \\
 & 1 & & & \\
1 & & \frac{2}{3} & & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{27}{54} & \Big| \quad \frac{3}{6} \Big| \frac{1}{2} \\
\frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \\
 & \frac{1}{6} & & \frac{108}{1080} & \Big| \quad \frac{1}{10} \\
\frac{3}{6} & & \frac{4}{60} & & \\
 & \frac{1}{10} & & \frac{300}{9000} & \Big| \quad \frac{1}{30} \\
\frac{24}{60} \Big| \frac{4}{10} & & \frac{5}{150} & & \\
 & \frac{1}{15} & & &
\end{array}$$

1–11 *Nebenrechnungen:*

$$\frac{2}{3}\times\frac{3}{18} \quad 36-9 = \frac{27}{54}. \qquad \frac{3}{18}\times\frac{4}{60} \quad \frac{180-72}{1080} \quad \frac{108}{1080}. \qquad \frac{4}{60}\times\frac{5}{150} \quad \frac{600 \quad 300}{9000} \quad \frac{300}{9000}.$$

$$\begin{array}{ccc}
2 & & \\
 & 1 & \\
1 & & \frac{2}{3} \\
 & \frac{1}{3} & \\
\frac{2}{3} & & \frac{3}{18} \\
 & \frac{3}{18} & \\
\frac{3}{6} & & \frac{4}{60} \\
 & \frac{6}{60} & \\
\frac{4}{10} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
2 & & & \\
1 & 1 & & \\
\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \\
\frac{3}{6} & \frac{1}{6} & \frac{3}{18} & \frac{1}{2} \\
\frac{4}{10} & \frac{1}{10} & \frac{4}{60} & \frac{1}{10} \\
 & & & \frac{1}{30}
\end{array}$$

Summa hic est ratio differentiae ad terminum. $\frac{3}{18}$ per $\times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \mid \frac{1}{2}$.

1–11 *Nebenrechnungen zur Tabelle rechts:*

$\frac{3}{18} \times \frac{1}{3} \quad \frac{9}{18} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{1}{6} \quad \frac{24}{60} \mid \frac{2}{5}$.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} \qquad \frac{3}{18} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{2}{5}$.

$\frac{3}{18} \times \frac{1}{2} \qquad \frac{4}{60} \times \frac{2}{5} \quad \frac{20}{120} \mid \frac{1}{6}$.

$\frac{2}{3} \times \frac{27}{54} \quad \frac{108}{81} \mid \frac{4}{3}$.

$\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \quad \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{4}{3} \quad \frac{3}{8} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}. \qquad \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \quad \frac{4}{3} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{3}{4} \quad \frac{4}{6} \mid \frac{2}{3}$.

$\frac{1}{6} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6} \qquad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \quad \frac{3}{4}$

$$\begin{array}{cc|ccc}
\frac{1}{2} & & & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{3}{4} & & \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & \\
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & & \frac{3}{8} \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{8} & \\
 & \frac{1}{8} & \frac{1}{8} & & \frac{7}{64} \\
\frac{1}{2} & & & \frac{1}{64} & \\
 & \frac{1}{16} & \frac{7}{64} & & \frac{15}{1024} \\
 & & & \frac{1}{1024} &
\end{array}$$

$$\frac{3}{8} \times \frac{1}{2} \quad \frac{6}{8} \mid \frac{3}{4}. \qquad \frac{3}{8} \times \frac{3}{4} \quad \frac{12}{24}. \qquad \frac{7}{64} \times \frac{1}{8} \quad \frac{56}{64} \mid \frac{7}{8}.$$

12. DE SUMMIS SERIERUM FRACTIONUM
[März - Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 III B 10 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. 2 S. u. 3 Z. (Überschrift) auf Bl. 2 r°. Bl. 3 v° leer.
Cc 2, Nr. 278

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das in N. 11 abgeleitete Ergebnis, $\sum\limits_{n=2}^{\infty}\sum\limits_{k=2}^{\infty}\frac{1}{n^k}=1$ wird auf S. 153 Z. 17–20 als bekannt eingeführt.

D e s u m m i s s e r i e r u m f r a c t i o n u m , q u a r u m n u m e r a t o r e s u n i t a s n o m i n a t o r e s s u n t n u m e r i f i g u r a t i.

Data aliqua serie fractionum, invenire aliam seriem ad cuius differentias series data aliquam habeat rationem constantem, si id possibile est, aut ostendere impossibilitatem.

Ut series 1. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{10}$. $\frac{1}{15}$. etc. est duplum $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{6}$. $\frac{1}{12}$. $\frac{1}{20}$. $\frac{1}{30}$. etc. differentiarum seriei 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{6}$. etc.

$\frac{A}{B}$ $\frac{C}{D}$ $\frac{E}{F}$ etc. $=$ quaesitum: $\frac{Z}{Y}$ $\frac{X}{W}$ $\frac{U}{T}$ $\frac{S}{R}$ et ratio dividens aut multiplicans quaecunque ea sit: p. Ergo iam

---

9 *Nach* f i g u r a t i : Hic primum cepi invenire.

11 constantem *(1)* . *(2)* , si *L* 13 f. etc. | Invenienda ergo est talis datae seriei enuntiatio, ut numeratores sint differentiae, nominatores vero facti, continue terminorum seriei datae, vel statim, vel si certo quodam modo dividantur aut multiplicentur. *gestr.* | $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}$ *L*

$$
\begin{array}{ccc}
\dfrac{Z}{Y} \underline{\times} \dfrac{X}{W} & & \dfrac{U}{T} [\underline{\times}] \dfrac{S}{R} \\
| & | & | \\
\dfrac{ZW - XY}{YW} & \dfrac{XT - UW}{WT} & \dfrac{UR - ST}{TR} \\
\| & \| & \| \\
\dfrac{A}{B}\, p & \dfrac{C}{D}\, p & \dfrac{E}{F}\, p
\end{array}
$$

Sed certo sciendum est, seu demonstrandum posse hoc in infinitum continuari. Si quis huc usque analysin produxerit, ut ista invenire queat, eum plurimum praestitisse arbitror.

$$
\begin{array}{cc|c|ccc}
 & & A & B & C & D \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \text{etc.} \\
\hline
\frac{1}{3} & \# & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \text{etc.} \\
\frac{1}{4} & & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \text{etc.} \\
\frac{1}{5} & & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70}\ \# & \text{etc.} \\
\frac{1}{6} & & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}
\quad \left.\right\} = \frac{1}{3} \quad \left.\right\} = \frac{1}{2}
$$

Nam $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. $=$ seriebus infinitis A. B. C. D. etc. a quibus si abiciantur: $\frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. restabit $\frac{1}{2}$ $=$ omni residuo infinities infinito incluso. (ita $\frac{1}{3}$ $=$ interiori incluso, et ita de caeteris).

1 $\underline{\times}$ *erg. Hrsg.*

11–14 Die richtigen Summen lauten $\frac{3}{2}$ bzw. $\frac{5}{6}$; vgl. dazu die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 10, wo Leibniz den gleichen Fehler macht.

Ergo cum in istis infinities infinitis omnes termini bis occurrant, demta media linea notata sic $\# \sim\!\sim\!\sim\!\sim \; . \; \sim\!\sim\!\sim\!\sim \#$ huic $\frac{1}{4}$ = terminis omnibus repetitis antea nunc semel tantum sumtis, lineae terminis dimidiatis.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & D & & E & & F & & & & A & & B & & C & \\
L & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \text{etc.} & G & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \text{etc.} \\
M & \frac{1}{9} & DD & \frac{1}{16} & EE & \frac{1}{25} & FF & \text{etc.} \quad = \quad H & & \frac{1}{6} & AA & \frac{1}{10} & BB & \frac{1}{15} & CC \;\; \text{etc.} \\
N & \frac{1}{27} & & \frac{1}{64} & & \frac{1}{125} & & \text{etc.} & I & \frac{1}{10} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{35} & \text{etc.} \\
O & \frac{1}{81} & & \frac{1}{256} & & \frac{1}{625} & & \text{etc.} & K & \frac{1}{15} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{70} & \text{etc.} \\
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

et $A = D$. $B = E$. $C = F$. etc. Item $G = M$. Ergo totum $M + N + O$ etc. = toti $H + I + K$ etc. H $+ \frac{1}{3}$ = A = D. et $I + \frac{1}{4} = B = E$. et $K + \frac{1}{5} = C = F$. Patet etiam: $AA = DD = H : \frac{1}{6}$. et $BB = EE = I : \frac{1}{12}$. et $CC = FF = K : \frac{1}{20}$. Abiciantur hinc H, illinc DD. residua erunt aequalia utrobique. Ergo $AA - \frac{1}{6} + BB - \frac{1}{10} + CC - \frac{1}{5} = EE + FF$. Pono $DD = \frac{1}{6}$.

Videamus an M possit supponi $= H = \frac{1}{6}$. Imo hoc impossibile. Nam si $\frac{1}{9}$ subtrahas ab $\frac{1}{6}$ restat $\frac{1}{18}$. a quo non potes subtrahere $\frac{1}{16}$.

6 DD, EE, FF, AA, BB, CC *jeweils erg., gestr. und wieder gültig gemacht L* 11 F. | Utrobique abiecta intelligantur huic G. illinc L *gestr.* | Patet *L* 12 $\frac{1}{6}, \frac{1}{12}, \frac{1}{20}$ *erg. L* 13 Ergo | I + K = *gestr.* | = AA $- \frac{1}{6}$ *L*

1 f. media linea notata: In der Handschrift ist die Linie zwischen den Zeichen # in der vorhergehenden Tabelle durch diagonal gesetztes $\sim\!\sim\!\sim\!\sim$ markiert, was hier aus drucktechnischen Gründen unterbleibt. 4–9 Leibniz versucht eine formale Gleichsetzung der beiden Schemata, deren Behauptung er im folgenden Rechengang (bis Z. 16) zu beweisen sucht. Neben dem unrichtigen Ansatz enthält der Rechengang mehrere Detailfehler.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\boxed{\frac{2}{\cdot}} & & \boxed{\frac{3}{4}} & & \boxed{\frac{4}{9}} & & \boxed{\frac{5}{16}} & & \boxed{\frac{6}{25}} & \\
1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & \\
\boxed{1} & & \boxed{\frac{1}{4}} & & \boxed{\frac{1}{9}} & & \boxed{\frac{1}{16}} & & \boxed{\frac{1}{25}} & \\
\frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & \\
& \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{16} & & \frac{1}{25} & & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{4} & & \frac{1}{18} & & \frac{1}{48} & & \frac{1}{100} & & \frac{1}{180} & \\
\frac{1}{8} & & \frac{1}{54} & & \frac{1}{192} & & \frac{1}{500} & & \frac{1}{1080} & \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & \\
A & & B & & C & & D & & E &
\end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{c}\frac{1}{4}\\\frac{1}{8}\\\text{etc.}\end{array}}\right\}$$

= 1. si duplices primam seriem transversam $\frac{2}{4}.\frac{2}{18}.$ etc. Si primam seriem descendentem: $\frac{2}{4}.\frac{1}{8}.$ etc. omittas omnia aequabuntur: $\frac{1}{4}$.

6–13 $\}$ = 1. ... $\frac{1}{4}$ *erg. L*

---

7 $\}$ = 1. si duplices: vgl. S. 153 Z. 14–16.

Summa A est	Summa B est	Summa C est	Summa D est	Summa E
$\frac{2}{1}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{6}{25}$
aufer ab his				
1	$\frac{1}{2}\,\Big\vert\,\frac{2}{4}$	$\frac{1}{3}\,\Big\vert\,\frac{3}{9}$	$\frac{1}{4}\,\Big\vert\,\frac{4}{16}$	$\frac{1}{5}\,\Big\vert\,\frac{5}{25}$
restabunt				
$1 =$	$\frac{1}{4} =$	$\frac{1}{9} =$	$\frac{1}{16} =$	$\frac{1}{25} =$
$\frac{1}{2}.\frac{1}{4}.\frac{1}{8}.$ etc.	$\frac{1}{6}.\frac{1}{18}.\frac{1}{54}.$ etc.	$\frac{1}{12}.\frac{1}{48}.\frac{1}{192}.$ etc.	$\frac{1}{20}.\frac{1}{100}.\frac{1}{500}.$ etc.	$\frac{1}{30}.\frac{1}{180}.\frac{1}{1080}.$ etc.

Ergo hoc loco differentia $\frac{1}{4}$ inter duo prima $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{4}$ seriei praecedentis $\frac{1}{2}.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{8}$ est summa sequentis: $\frac{1}{6}.\ \frac{1}{18}.\ \frac{1}{54}$ etc. Eodem modo in caeteris.

Ergo: $1 = \frac{1}{4}.\frac{2}{4}.\frac{1}{8}.$ etc. Et $\frac{1}{4} = \frac{1}{9}.\frac{2}{18}.\frac{1}{54}.$ etc. Et $\frac{1}{9} = \frac{1}{16}.\frac{2}{48}.\frac{1}{192}.$ et $\frac{1}{16} = \frac{1}{25}.\frac{2}{100}.\frac{1}{500}.$

Ergo omnia ista infinities infinita $= 1.\frac{1}{4}.\frac{1}{9}.\frac{1}{16}.$ etc. Ergo omnia ista residua infinities infinita demtis scilicet $\frac{1}{4}.\frac{1}{9}.\frac{1}{16}.$ etc. $= 1$. Ergo ista:

$$\left.\begin{array}{cccccc} \frac{2}{4} & \frac{2}{18} & \frac{2}{48} & \frac{2}{100} & \frac{2}{180} & \text{etc.} \\[6pt] \frac{1}{8} & \frac{1}{54} & \frac{1}{192} & \frac{1}{500} & \frac{1}{1080} & \text{etc.} \\[6pt] \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right\} = 1.$$

$$\begin{array}{cc} & \text{Iam}\ \ \begin{array}{ccccc} \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \text{etc.} \end{array} \\ \begin{array}{c} \times \\[12pt] \frac{1}{4}.\frac{1}{18}.\frac{1}{48}.\ \text{etc.} \end{array} & \left\{\begin{array}{ccccc} \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \frac{1}{125} & \text{etc.} \\[6pt] \frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \frac{1}{625} & \text{etc.} \\[6pt] \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}\right. \end{array} \Bigg\} = \text{etiam } 1 = \frac{1}{2}.\frac{1}{6}.\frac{1}{12}.\text{etc.}$$

abiecto: $\frac{1}{4}.\frac{1}{18}.\frac{1}{48}$ etc. semel ut redeat $\frac{1}{4}.\frac{1}{18}.$ etc. pro $\frac{2}{4}.\frac{2}{18}.$ etc. abicietur simul totum signatum $\times$.

13. DE SERIEBUS TRANSVERSALIBUS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 140–143. 2 Bog. 2°. 3 1/2 S. auf Bl. 140 r°, v° (Teil 1) und Bl. 141 v°, 142 r° (Teil 2). Bl. 141 r°, 142 v°, 143 r°, v° leer.
Cc 2, Nr. 513 A, B

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{llcccccc}
\frac{1}{1} & & & & & & & \\
 & \frac{1}{1}\times\frac{1}{4} & \frac{4+1}{4} & = & \frac{5}{4} & = & \left(1\frac{1}{4}\right) & \text{4 ad 1} \\
\frac{1}{4} & & & & & & & \\
 & \frac{5}{4}\times\frac{1}{9} & \frac{45+4}{36} & = & \frac{49}{36} & = & \left(1\frac{13}{36}\right) & \text{45 ad 4} \\
\frac{1}{9} & & & & & & & \\
 & \frac{49}{36}\times\frac{1}{16} & \frac{784+36}{576} & = & \frac{820}{576} & & & \text{784 ad 36} \\
\frac{1}{16} & & & & & & & \\
 & \frac{820}{576}\times\frac{1}{25} & \frac{20400+576}{14400} & = & \frac{20976}{14400} & & & \text{20400 ad 576} \\
\frac{1}{25} & & & & & & &
\end{array}$$

---

15 $820 \times 25 = 20500$, nicht 20400 (s. die zugehörige Nebenrechnung auf der nächsten Seite). Die dortige Überwärtsdivision 20400 : 576 ist zusätzlich fehlerhaft. Der falsche Wert vererbt sich bis auf S. 156 Z. 4.

$$\frac{5}{4} \quad \underline{\times} \quad \frac{49}{36} \quad = \quad \frac{45}{36}\ \ \frac{49}{36}$$

$$\frac{49}{36} \quad \underline{\times} \quad \frac{820}{576} \quad = \quad \frac{784 \quad 820}{576}$$

$$\frac{820}{576} \quad \underline{\times} \quad \frac{20976}{14400} \quad = \quad \frac{20400 \quad 20976}{144000}$$

154,8–16 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lllrr}
 & & 2 & 49 & 36 \\
 & 2 & \cancel{6}4 & 16 & 16 \\
 & \cancel{3} & \cancel{3}\cancel{1}\cancel{7} & \overline{294} & \overline{214} \\
1 & \cancel{1}\cancel{6}8 & \cancel{5}\cancel{3}\cancel{2} & 49 & 36 \\
\cancel{4}\cancel{5} ⨍ 11 & \cancel{7}\cancel{8}\cancel{4} ⨍ 21 & \cancel{2}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{0}0 ⨍ 345 & \overline{784} & \overline{576} \\
\cancel{4}\cancel{4} & \cancel{3}\cancel{6}\cancel{6} & \cancel{5}\cancel{7}\cancel{6}\cancel{6} & 36 & 25 \\
 & \cancel{3} & \cancel{5}\cancel{7} & \overline{820} & \overline{2880} \\
 & & & 25 & 1152 \\
 & & & \overline{400} & \overline{14400} \\
 & & & 164 & \\
 & & & \overline{20400} & \\
 & & & 576 & \\
 & & & \overline{20976} &
\end{array}$$

In Fortführung von Spalte 1–3: $\frac{4}{1} ⨍ 4$ $\quad \begin{matrix}\cancel{4}\cancel{5}\\ \cancel{4}\cancel{4}\end{matrix} ⨍ 11\frac{1}{4}$ add. $\frac{3}{4}$ habes 12. $\quad 21\frac{28}{36}$ adde $\frac{8}{36}$ fiet 22. $\quad 345\frac{240}{576}$ adde $\frac{336}{576}$ habes 346.

							224		926			
	42					800		1150		224		
78		36			19600		1950		800		576	
<u>706</u>	<u>784</u>	<u>820</u>				17650		19600		20400		20976
	576											

1–5 *Nebenrechnungen:*

45		
16	$\cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}$	$\cancel{3}2$
$\overline{256}$	$\cancel{7}\cancel{0}\cancel{6}\cancel{0}\cancel{0}$ ⨍ 17650	$\cancel{7}\cancel{8}400$ ⨍ 19600
45	$\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}$	$\cancel{4}\cancel{4}$
$\overline{706}$		

				$\cancel{1}8$
19600	20400	20976	800	$\cancel{9}\cancel{1}\cancel{6}$
<u>17650</u>	<u>19600</u>	<u>20400</u>	<u>576</u>	$\cancel{4}\cancel{2}\cancel{2}$ ⨍ 22
1950	800	800	224	$\cancel{4}$

1–5 Die beiden Differenzenschemata sind wegen der falschen Ausgangswerte 706 (statt 720), 17650 (statt 18000), 20400 (statt 20500) fehlerhaft, s. die zugehörige Nebenrechnung.

$$
\begin{array}{llllll}
 & \frac{4}{1} & & & & \\
 & & 3 & & & \\
A & \frac{1}{1} & & & & \\
 & & \frac{3}{4}\ F & & & \\
B & \frac{1}{4} & & \frac{88}{144}\ G & & \\
 & & \frac{5}{36} & & .\ \ H & \\
C & \frac{1}{9} & & \frac{[468]}{5184} & & .\ \ I \\
 & & \frac{7}{144} & & . & \\
D & \frac{1}{16} & & \frac{1504}{57600} & & \\
 & & \frac{9}{400} & & & \\
E & \frac{1}{25} & & & &
\end{array}
$$

1–11 *Nebenrechnungen zur Tabelle:*

$$
\frac{3}{4} \underset{-}{\times} \frac{5}{36} \quad \begin{array}{r} 108 \\ \underline{20} \\ \hline 88 \\ 144 \end{array} \qquad \frac{5}{36} \underset{-}{\times} \frac{7}{144} \quad \frac{720-252}{5184} \ [468] \qquad \frac{7}{144} \underset{-}{\times} \frac{9}{400} \quad \frac{2800-1296}{57600}
$$

$$
\begin{array}{r} 144 \\ 9 \\ \hline 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ 400 \\ \hline 57600 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1440 \\ 144 \\ \hline 1296 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2800 \\ 1296 \\ \hline 1504 \end{array}
$$

7 478 *L ändert Hrsg.* 15 478 *L ändert Hrsg.*

Columna prima descendens, seu terminorum, aequatur omnibus differentiis differentiarum licet infinities infinitis, demta columna prima differentiarum transversali, addita ipsamet columna prima, excepto termino primo. Ergo terminus primus aequalis est toti tabulae, infinities infinitae, exceptis duabus columnis primis descendente et transversali.

Columna 1^{ma} transversalis aequatur eodem modo differentiis aliis omnibus, addita se ipsa, excepto termino primo. Hinc idem corollarium, ut ante.

Hinc facile summa habetur, cuiuslibet columnae transversalis, demta prima. Ut enim A. 1 est summa omnium inclusorum inter $ABCDE$. et $AFGHI$. ita B. $\frac{1}{4}$ est summa omnium inter $BCDE$. et columnam transversalem 2^{dam}. Iam differentia inter priorem summam et posteriorem, est columna 2^{da} transversalis differentiarum, (seu ademto termino inchoante). Ergo aequatur $1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Hinc patet differentias primas esse summas columnarum transversalium. Sed idem clarius patet, breviusque, quia ademta quasi columna prima descendente, patet 2^{dam} transversalem continere differentias primae. Ergo summa 2^{dae} aequatur primo termino primae.

Eodem modo etiam primam columnam transversalem differentiarum summabis, si altius possis progressionem repetere. At inquies, in arbitrio est quod velis altius assumere, v.g. $\frac{2}{1}$. vel $\frac{3}{1}$. nil enim refert quae sit progressio quod ergo columna prima transversalis $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{3}$. etc. potest simul aequalis esse $\frac{2}{1}$. et $\frac{3}{1}$. Respondetur, non est arbitrarium, nam nisi terminus debitus assumatur, nova columna transversalis, quae nunc prima fit, non aeque descendit in infinitum, ac prior, quae antea prima erat, cum opus sit illo in infinitum descensu.

1 | Series A.B.C.D.E. = caeteris omnibus. *gestr.* | Columna *L* 2 transversali *(1)* . Columna prima transversalis *(2)* , addita *L* 7–21 Hinc ... descensu *erg. L* 21 descensu. |Hinc sequitur et columnam aliquam transversalem (demto termino primo) aequalem esse ei, quod inter ipsam, et columnam descendentem, includitur *gestr.*| *L*

$$
\begin{array}{lllll}
\frac{1}{a} & & & & \\
& \frac{b-a}{ab} & & & \\
\frac{1}{b} & & b^2c-2abc+ab^2 & & \\
& \frac{c-b}{bc} & & \begin{array}{c} b^2c-2abc+ab^2 \\ -c^2d+2bcd-bc^2 \end{array} & \\
\frac{1}{c} & & c^2d-2bcd+bc^2 & & \begin{array}{c} b^2c-2abc+ab^2-\llcorner 2c^2d+4bcd \\ -2b^2\lrcorner+d^2e-2cde+cd^2 \end{array} \\
& \frac{d-c}{cd} & & \begin{array}{c} c^2d-2bcd+bc^2 \\ -d^2e+2cde-cd^2 \end{array} & \\
\frac{1}{d} & & d^2e-2cde+cd^2 & & \\
& \frac{e-d}{de} & & & \\
\frac{1}{e} & & & &
\end{array}
$$

Sed cum ista sint universalia omni progressioni fractionum, ideo aequatio ad eas determinanda, quarum denominatores sunt quadrati continue.

1–9 *Nebenrechnungen:*

$\frac{1}{a}\underline{\times}\frac{1}{b}$ $\quad \frac{b-a}{ab}$ $\quad \frac{b-a}{ab}\underline{\times}\frac{c-b}{cb}$ $\quad b^2c-abc, -abc+ab^2$

$c-b$ [*Rechnung bricht ab*]

1–9 *Neben der Tabelle:* Secunda quaevis differentia duplicat.

10 omni *(1)* fractioni *(2)* progressioni *L*

1–9 Die vierte Spalte ist nur richtig, wenn man zu den eingetragenen Zählern jeweils die verschiedenen Nenner hinzudenkt. Die fünfte ist wegen der Nichtbeachtung dieser Voraussetzung falsch.

Ita:

$$(a) \qquad \frac{1}{a^2.}$$

$$[(a)-(b)]$$

$$\frac{\cancel{a^2}+2a+1\cancel{-a^2}}{a^2+2a+1(a^4+2a^3+a^2)}$$

$$(b) \qquad \frac{1}{a^2+2a+1.}$$

$$(c) \qquad \frac{1}{a^2+4a+4.}$$

$$(d) \qquad \frac{1}{a^2+6a+9.}$$

$$(e) \qquad \frac{1}{a^2+8a+16.}$$

$$\frac{1}{1+10+25.}$$

2–9 *Nebenrechnung zur Tabelle:*

$$\begin{array}{r} 1+2+1 \\ \underline{1+4+4} \\ 4+8+4 \\ 4+8+4\phantom{{}+4} \\ 1+2+1\phantom{{}+4+4} \\ \hline \end{array}$$

[*bricht ab*]

3 (b) − (a) *L ändert Hrsg.*

$$
\begin{array}{cccc}
 & 0 & & \\
 & \frac{1}{1} & & \\
\frac{3}{2} & & \frac{1}{2} & \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{4}{12}\left(\frac{1}{3}\right) \\
\frac{5}{6} & & \frac{1}{6} & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{6}{72}\left(\frac{1}{12}\right) \\
\frac{7}{12} & & \frac{1}{12} & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{8}{240}\left(\frac{1}{30}\right) \\
\frac{9}{20} & & \frac{1}{20} & \\
 & \frac{1}{5} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\frac{1}{1} & & \\
\frac{1}{2} & — & \frac{3}{2} \\
\frac{1}{3} & — & \frac{11}{6} \\
\frac{1}{4} & — & \frac{45}{20} \\
\frac{1}{5} & — & \frac{245}{100}
\end{array}
$$

4–10 *Nebenrechnungen zur rechten Tabelle:* $\frac{3}{2}\times\frac{1}{3}$ $\quad \frac{10}{5}\times\frac{1}{4}$ $\quad \frac{45}{20}\times\frac{1}{5}$

6 $\frac{1}{3}$ — *(1)* $\frac{10}{5}$ *(2)* $\frac{11}{6}$ *L*

6–10 Leibniz hat die Terme der Spalte ganz rechts nach Durchführung von zwei falschen Nebenrechnungen nur unvollständig verbessert. Die letzten zwei Summen müßten $\frac{50}{24}$ bzw. $\frac{274}{120}$ lauten.

[*Teil 2*]

$$
\begin{array}{rccccccc}
x. & & & & & & \\
 & A & & & & & \\
x-A. & & F & & & & \\
 & B & & L & & & \\
x-A-B. & & G & & O & & \\
 & C & & M & & Q & \\
x-A-B-C. & & H & & P & & \text{etc.} \\
 & D & & N & & \text{etc.} & \\
x-A-B-C-D. & & I & & \text{etc.} & & \\
 & E & & \text{etc.} & & & \\
 & & \text{etc.} & & & & \\
 & F & & & & & \\
 & \text{etc.} & & & & &
\end{array}
$$

$\cancel{x}-A-B+2B+F=\cancel{x}.$ $\cancel{x}=\cancel{x}-A+B.\ G.\ M.\ P.$ etc.
$2A.\ \cancel{B}.\ C.\ D.\ E.$ etc. $=x-\cancel{A}.\ +\cancel{B}.\ G.\ M.\ P.$ etc.
$2A.\ C.\ D.\ E.$ etc. $-\,G.\ M.\ P.=x.$ Ergo $2A.\ C.\ D.\ E.$ etc. $-\,F.=x.$

Definitiones: series data continue decrescens in infinitum: series descendens terminorum: $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc.

Series directa descendens $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc. et ei parallela quaevis.

Fundamentum constructionis. Terminus quilibet duobus immediatis in eadem serie directa positis immediate dexterior, eorum differentia est.

Termini sunt qui sunt in serie data $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ differentiae absolute loquendo, sunt reliqui omnes.

Series transversalis est in quam quantitates ex diversis seriebus descendentibus immediate se attingentibus, assumtae, in eandem rectam in tabula cadentes, coniunguntur. Estque aut descendens aut ascendens.

18 infinitum: *(1)* columna *(2)* series |*(a)* recta *(b)* directa *gestr.*| descendens *L* 19 f. etc. *(1)* Columna *(2)* Series *(a)* recta *(b)* directa *L* 20 f. quaevis. *(1)* Terminus quivis sinisterior inter duos interpositus est differentia ut F inter A et B. *(2)* Terminus quivis *(3)* Fundamentum *L* 22 eadem *(1)* columna descendente *(2)* serie *L* 23 differentiae *(1)* . Ergo sunt reliqui omnes *(2)* absolute *L*

S e r i e s t r a n s v e r s a l i s d e s c e n d e n s est cum ex omnibus seriebus descendentibus, iidem ordine termini coniunguntur, ut omnes primi (secundi), tam ex prima serie, quam ex secunda et tertia, etc.

S e r i e s t r a n s v e r s a l i s a s c e n d e n s est, cum determinato certo numero serierum descendentium, sumitur primus ultimae, et secundus penultimae, et tertius antepenultimae etc. Hinc sequitur seriem omnem transversalem [ascendentem] esse finitam. Cum caeterae omnes possint esse [infinitae], et series terminorum, item differentiarum primarum, etiam esse debeat.

D i f f e r e n t i a e p r i m a e sunt quantitates secundae seriei descendentis. Differentiae s e c u n d a e sunt seriei tertiae et ita porro.

In tabula proposita si sumantur duae quantitates immediatae AF in eadem linea transversali descendente, sitque alia quantitas B quae sit in eadem serie transversali ascendente cum una F, in eadem serie directa, cum altera A, ista est differentia illarum. $A - F = B$. Quia per fundamentum constructionis $A - B = F$.

C o r o l l a r. Hinc si ista B iungatur illarum posteriori: F fiet priori A. Nam $B + F = A$. Hinc sequitur etiam series transversales esse continue decrescentes, etsi non semper in infinitum.

Series directa posterior, item transversalis descendens posterior, continet differentias immediate praecedentis. In tabula proposita quaelibet quantitas aequalis est integrae seriei directae infinitae proxime dexteriori, incipiendo eam a quantitate, quae sit in eadem linea transversali descendente, cum data, posita, ut $A = F.\ G.\ H.\ I.$ etc. $G = M.\ N.$ etc.

Hinc innumera duci possunt corollaria, ut: $A = L.\ M.\ N.$ etc. $+\ G.\ H.\ I.$ etc. vel $A = G.\ H.\ I.$ etc. $+\ M.\ N.$ etc. $+\ O.\ P.$ etc. (vel loco $O.\ P.$ dicendo $+\ P$ etc. $+\ Q.$ etc.)

11–14 *Darüber und am Rande:* Omnes transversales descendentes possunt mutato tantum scribendi modo haberi pro directis, et vicissim, quando scilicet decrescunt in infinitum.

6 ascendentem *erg. Hrsg.* 7 finitae *L ändert Hrsg.* 9 quantitates *(1)* primae columnae *(2)* secundae *L* 11–22 In tabula ... = M. N. etc *erg. L* 20 seriei *(1)* descendenti proximae *(2)* directae *L*

In eadem tabula quaelibet quantitas aequalis est integrae seriei transversali descendenti proxime inferiori, incipiendo eam a quantitate quae sit in eadem linea directa, cum data, posita.

Hinc similia plane ut ex praecedenti corollaria duci possunt. Possumus enim cogitare transversales descendentes, transformari in directas, et contra.

Series quaelibet directa (transversalis descendens) aequatur tabulae integrae sequenti, utcunque continuatae in infinitum, seu quantitatibus infinities infinitis constanti; si modo a tabula auferri intelligatur series transversalis (directa) descendens in quam incidit terminus maximus seriei datae relicto tamen seu non ablato ipso termino maximo. Quia enim $A = B.\ G.\ M.\ P.$ etc. et $B = C.\ H.\ N.$ etc. et $C = D.\ I.$ etc. et $D = E.$ etc. Ergo $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc.. = toti tabulae demtis [$A.\ F.\ L.\ 0.$] etc. (Eodem modo, quia $A = F.\ G.\ H.\ I.$ etc. et $F = L.\ M.\ N.$ etc. et $L = O.\ P.$ etc. et $O = Q.$ etc. Ergo $A.\ F.\ L.\ O.\ Q.$ = toti tabulae demtis: [$A.\ B.\ C.\ D.$] etc. Ergo quantitas quaelibet in tabula aequatur quantitatibus infinities infinitis inter seriem directam et transversalem descendentem, in ipsa quantitate data concurrentes, comprehensis. Quia enim $A.\ B.\ C.\ D.\ E.$ etc. $= B.\ G.\ M.\ P.$ etc. $+\ C.\ H.\ N.$ etc. $+\ D.\ I.$ etc. $+\ E.$ etc. ergo auferendo quod utribusque commune est: $B.\ C.\ D.\ E.$ etc. fiet $A = G.\ M.\ P.$ etc. $+\ H.\ N.$ etc. $+\ I.$ etc. etc. ita et $B = H.\ N.$ etc. $I.$ etc. etc.

Series transversalis ascendens data est aequalis seriei transversali ascendenti, proxime antecedenti, aut si nulla antecedit, termino primo, modo termini datae seriei, intermedii, si qui sunt duplicati, intelligantur, ita $B.\ F. = A.$ et $C.\ 2G.\ L. = B.\ F.$ et

---

6–8 *Am Rande:* Series directa et transversalis descendens possunt dici crura, illa r e c t u m , haec i n c l i n a t u m . Series transversa ascendens potest dici b a s i s .

Späterer Zusatz weiter oben: In serie harmonica ab initio suo sumta duo crura extrema aequantur.

9 relicto ... maximo *erg. L* 11 B. C. D. E. *L ändert Hrsg.* 13 F. L. O. Q. *L ändert Hrsg.* 18 f. etc. | Ergo quaelibet columna directa *gestr.* | Series *L*

---

9 relicto ... maximo: Im Gegensatz zu Leibniz' Behauptung muß auch der höchste Term abgezogen werden.

$D.\ 2H.\ 2M.\ O. = C.\ G.\ L.$ Hinc praeclara corollaria ducuntur: Ut: $D.\ 4H.\ 4M.\ O. = B.\ F. = A.$ ita $E.\ 4I.\ 4N.\ 4P.\ Q. = C.\ G.\ L.$ et: $E.\ 8I.\ 8N.\ 8P.\ Q. = B.\ F. = A.$

Regula ergo generalis surget eiusmodi[:] Series transversalis ascendens posterior, aequatur cuilibet priori, si termini seriei posterioris intermedii toties duplicentur, quoties seriem posteriorem aliae series, terminos intermedios habentes, praecedunt, quae non sunt ante priorem. Hinc primus tabulae, aut quantitas seriem directam et transversalem descendentem, connectens (quae semper pro capite assumi potest) aequatur seriei transversali ascendenti seriebus connexis inclusae, terminis intermediis toties duplicatis, quot sunt aliae series transv. ascendentes seu bases.

Hinc basis quaelibet aequatur contento crurum in infinitum licet quantum fieri potest productorum (ipsis scilicet cruribus non computatis) si mediae eius quantitates toties duplicentur, quot sunt bases ante propositam, seu inter apicem et propositam.

Ita $D.\ 4H.\ 4M.\ O. = G.\ M.\ P.$ etc. H. N. etc. I. etc. e t c.

Si duae sint series in tabula data, altera directa, altera transversa descendens, habeantque terminum secundum communem, eae duae series sunt inter se aequales, ut $G.\ H.\ I.$ etc. $= C.\ H.\ N.$ etc. Utrumque enim $= B.$ per iam demonstrata. Ergo $=^{\text{lia}}$ inter se. Ergo et residua aequalia sunt, demto termino communi H.

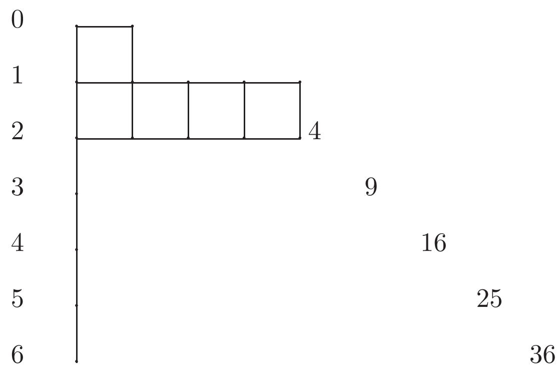
8 inclusae, | terminis ... duplicatis *erg. L* | toties duplicatis *streicht Hrsg.* | quot *L* 10 f. crurum | in infinitum licet *erg., gestr. u. wieder gültig gemacht* | quantum ... productorum *erg* | (ipsis *L* 14 | Assignata quadam quantitate series directa proxime dexterior, cuius terminus *gestr.* | Si *L*

1–13 Die richtigen Beziehungen zwischen den nicht aufeinanderfolgenden Transversalreihen lauten $D.\ 3H.\ 3M.\ O = B.\ F = A$, $E.\ 3J.\ 4N.\ 3P.\ Q = C.\ G.\ L$, $E.\ 4J.\ 6N.\ 4P.\ Q = B.\ F = A$, $D.\ 3H.\ 3M.\ O = G.\ M.\ P.$ Die allgemeine Regel auf Z. 3–12 ist deshalb falsch. Wird der 1. Term mittels der n-ten Transversalreihe ausgedrückt, sind dort die n-ten Binominalkoeffizienten zu nehmen.

14. DE PROGRESSIONIS HARMONICAE DIFFERENTIIS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 138–139, 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 139 r° leer. Textfolge: 139 v°, 138 r°, 138 v°.
Cc 2, Nr. 512

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.



[*Fig. 1*]

$$1 + 4 + 9 + 16 + 25 + 36 = 91$$

1	1	1		
			2	
5	4	3		0
			2	
14	9	5		0
			2	
30	16	7		0
			2	
55	25	9		0
			2	
91	36	11		

				0		0		0		0				
		1	2		2		2		2		2			
	1	1		3		5		7		9		11		
	0		1		4		9		16		25		36	
0		0		1		5		14		30		55		91

Nota cum hoc loco reducantur differentiae 2^{di} gradus ad ascendentes 0.1. ad simplex 1. Hinc ex multiplicatione ipsius 1. per $\square^{\text{ta}}$ forte numerorum figuratorum, invenietur summa quadratorum. Sed hac methodo novum quidem theorema fortasse discemus, sed nihil lucrabimur. Imo fortasse res facilior. Nam $\underbrace{0.\ 1.\ 2}$ componuntur ex 0. 1. et ex his: 0. 1. 2. componuntur 0. 0. 1. 5. 14. Ergo pro 1. suppone $\underbrace{0+1}$. pro 2. suppone $\underbrace{0+2}$. Ergo ut habeamus 1. 5. 14. etc.

	0	0	1	2	0	0	0
	1	.	)	)	.	.	.
	1	1			.	.	.
1	1	2	1	0	.	.	.
5	1	3	3	1	.	.	.
14	1	4	6	4	1	.	.
30	1	5	10	10	5	1	.
55	1	6	15	20	15	6	1

13–20 *Daneben, in Spaltenform:* 36 25 16 9 4 1

13–20 *Daneben:*

. ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ 8
. . . . ○ ○ ○ ○ ○ 5
. . . . 0

12 etc. | *(1)* 1. fiet ex $0+2\frown 0.+1$ *(2)* 1. fiet ex $1\frown 0+2\frown 0+1\frown 1(1\frown 0+1\frown 1)$ 5. fiet ex $1\frown 0+3\frown 0+3\frown 1(1\frown 0+1\frown 1)+1\frown 2(1\frown 0+2\frown 1+0)$ *gestr.* | *L*

1–10 Die Summe der Quadrate ergibt sich aus der Tabelle, wenn man die von Leibniz in *LSB* III, 1 N. 4 (13. Februar 1673), S. 26 entwickelte Berechnungsmethode anwendet.

$\frac{1}{1}$	2	6	12	20
$\frac{1}{2}$	1	3	6	10
$\frac{1}{3}$		2	4	$[\frac{20}{3}]$
$\frac{1}{4}$			3	
$\frac{1}{5}$				4
$\frac{1}{6}$				

1	$\frac{2}{2}$	$\frac{6}{6}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{6}$
$\frac{1}{3}$		$\frac{2}{6}$
$\frac{1}{4}$		
$\frac{1}{5}$		
$\frac{1}{6}$		

169,1–10 *Neben der Tabelle:*

. .	. . . . . .	. . . .
.	. . . ○ ○ ○	. . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
	. . ○ ○ ○ ○	. . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○
		. . . . . . ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○ ○

3 12 *L ändert Hrsg.*

			25		154					
		6		31		185				
	2		8		39		224			
$\frac{1}{1}$		$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{6}$		$\frac{50}{24}$		$\frac{274}{120}$		$\frac{1764}{720}$
1	...	2(0)	...	6	...	24	...	120	...	720
$\frac{1}{2}$	...	1(1)	...	3	...	12	...	60	...	360
$\frac{1}{3}$	...	$\frac{2}{3}$	...	2	...	8	...	40	...	240
$\frac{1}{4}$	...	$\frac{2}{4}$	...	$\frac{6}{4}$	...	6	...	30	...	180
$\frac{1}{5}$	...	$\frac{2}{5}$	...	$\frac{6}{5}$	...	$\frac{24}{5}$	...	24	...	144
$\frac{1}{6}$	...	$\frac{2}{6}$	...	$\frac{6}{6}$	...	$\frac{24}{6}$	...	$\frac{120}{6}$	...	120

				24				
			30		6			
		40		10		4		
	60		20		10		6	
120		60		40		30		24

1–4 *Obere Tabellenhälfte erg. L* 5 720 | |1 *gestr.*| ⌢ 2 ⌢ 3 ⌢ 4 ⌢ 5 ⌢ 6 *gestr.*| *L* 5–10 *Neben der letzten Spalte ganz rechts (um 90° gedreht) von L gestr. Tabelle*:

				36			
			48		12		
		60		24		12	
360	120		60		36		24

6 360 | |2 *gestr.*| ⌢ 3 ⌢ 4 ⌢ 5 ⌢ 6 *gestr.*| *L* 7 240 | |1 *gestr.*| ⌢ 2 ⌢ 4 ⌢ 5 ⌢ 6 *gestr.*| *L*

1–15 Leibniz hat beide Tabellen ineinander geschrieben, die zweite auf der Basis der harmonischen Folge 120, 60, 40 ... in der 5. Spalte der ersten. Aus drucktechnischen Gründen werden sie hier getrennt wiedergegeben, die zweite Tabelle um 90° gedreht.

Regula memorabilis. In omni progressione harmonica integra seu ab initio sumta si a summo inchoes differentiae generatrices coincidunt numeris ipsius progressionis datae. Et si ab imo differentiarum generatricium series ita comparata est, ut prima ultimae, et penultima peneprimae aequetur, idque fit et in omnibus differentiarum generatricium seriebus ad illam parallelis, 24. 6. 4. 6. 24. 30. 10. 10. 30. Hoc ergo et in fractionibus verum est.

				NB.			NB.	
1	2	6	24	120	720			
	1 (1)	3 (3)	12 (12)	60 (60)	360 (360)	240	(60)	36
		2 (4)	8 (16)	40 (80)	240 (480)	120 (120)	40 (80)	16 (20)
			6 (18)	30 (90)	180 (540)	60 (180)	30 (90)	6 (30)
				24 (96)	144 (576)	30 (210)	(96)	
					120 (600)			

Hinc differentia inter duo extrema supplementa, ut 60. 96. et duos extremos terminos maximo non computato, seu minimum et penemaximum, 24. 60. esse aequales hoc loco 36.

Idem per consequens procedit in infinitum in supplementis supplementorum ut non sit opus inquirere in differentias differentiarum supplementorum.

Similis contra regula condi potest de supplementis differentiarum. Summae. Differentiae. Supplementa. Rationes.

---

7 NB. Differentiae supplementorum congruunt differentiis terminorum dictis ut

60	80	90	96	demta maxima.
20	10	6		

1 integra ... sumta *erg. L* 7–13 *Tabelle erg. L*

1	720	5040					
$\frac{1}{2}$	360	2520 (2520)	1820				
$\frac{1}{3}$	240	[1680 (3360)	980	(840)	840]		
$\frac{1}{4}$	180	1260 (3780)	560	(1260)	420	[420]	
$\frac{1}{5}$	144	1008 (4032)	308	(1512)	168	[672]	
$\frac{1}{6}$	120	840 (4200)	140	(1680)			
$\frac{1}{7}$		720[(4320)]					
$\frac{1}{8}$							

3 1880 (3160) 1180 (640) 1040 *L ändert Hrsg.* 4 620 *L ändert Hrsg.* 5 872 *L ändert Hrsg.* 7 (4340) *L ändert Hrsg.* 8 $\frac{1}{8}$ | *Folgende Tabelle, gestr.* | *L*

5040						
	2520					
2520		1880				
	640		.			
1880		20		.		
	620		.		.	
1260		368		.		.
	252		.		.	
1008		84		.		
	168		36			
840		48				
	120					
720						

1	1		$\frac{3}{2}$		$\frac{11}{6}$		$\frac{50}{24}$		$\frac{274}{120}$	$\left(\frac{1764}{720}\right)$
		1								
2	$\frac{2}{2}$		$\frac{3}{2}$							$\frac{5}{2}$
		3		2						
3	$\frac{6}{6}$		$\frac{9}{6}$		$\frac{11}{6}$					$\frac{26}{6}$
		12		8		6				
4	$\frac{24}{24}$		$\frac{36}{24}$		$\frac{44}{24}$		$\frac{50}{24}$			$\frac{154}{24}$
		60		40		30		24		
5	$\frac{120}{120}$		$\frac{180}{120}$		$\frac{220}{120}$		$\frac{250}{120}$		$\frac{274}{120}$	$\frac{1044}{120}$

$$\begin{array}{ccccc} & A-B & & B-C & \\ A & & B & & C \end{array} \qquad \frac{A-B}{B-C}=\frac{A}{C}$$

Ergo $AC-BC=BA-CA$. Ergo $2AC-BC=BA$. Ergo $2AC=BA+BC$.

Ergo $\frac{2AC}{B}=A+C$. Ergo $\frac{2AC+B^2}{B}=A+B+C$. $\frac{2BD+C^2}{C}=B+C+D$.

$$\frac{2AC+B^2}{B}+\frac{2BD+C^2}{C}=A+2B+2C+D.$$

Ergo: $\frac{2AC}{B}+\frac{2BD}{C}=A+B+C+D$. Iam $\frac{2CE+\cancel{D^2}}{D}=C\cancel{+D}+E$.

Ergo[:] $\frac{2AC}{B}+\frac{2BD}{C}+\frac{2CE}{D}=A+B+2C+D+E$.

$$\frac{2AC^2D+2B^2D^2+2CEBC}{BCD}=A+B+2C+D+E.$$

1–9 *Zur letzten Spalte, auf der Gegenseite:*

0. 1. 5. 26. 154.

4. 21. 128.

$\frac{F}{G}\quad \frac{F}{G+H}\quad \frac{F}{G+2H}\quad \frac{F}{G+3H}$. Differentiae: $\frac{\cancel{FG}+FH-\cancel{FG}}{G^2+GH}$ et $\frac{2FH}{G^2+3GH+2H^2}$.

Eorum ratio[:] $\frac{G^2+3GH+2H^2}{2G^2+GH}=\frac{FG+2FH}{FG}$.

Ergo $\cancel{G^3F}+3G^2HF+\cancel{2H^2FG}=\cancel{2}FG^3+4FHG^2+FG^2H+\cancel{2FH^2G}$.

$$\frac{F}{G}\times\frac{F}{G+H}\quad \frac{F}{G+2H}\quad \frac{F}{G+3H}.$$

$$\frac{2\cancel{F}G+\cancel{F}H}{G^2+GH}\times\frac{\cancel{F}\,1}{G+2H}\quad \frac{2G^2+5GH+2H^2}{G^3+2G^2H+G^2H+2GH^2}$$ [*Rechnung bricht ab*]

$$\frac{1}{G}\quad \frac{1}{G+H}\quad \frac{1}{G+2H}\quad \frac{1}{G+3H}\quad \frac{1}{G+4H}.$$

$$\frac{1}{G}\substack{+\\\times\\-}\frac{1}{G+H}=\frac{2G+H}{G^2+GH}\substack{+\\\times\\-}\frac{1}{G+2H}=\frac{3G^2+6GH+2H^2}{G^3+3G^2H+2GH^2}\substack{+\\\times\\-}\frac{1}{G+4H}$$

$$\|$$

$$\frac{3G^3+\overset{10}{\cancel{6}}G^2H+\overset{26}{\cancel{2}}H^2G+8H^3}{G^4+\underset{7}{\cancel{3}}G^3H+2G^2H^2+8GH^3}$$

$$\|$$

---

1 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{rrr} & G+ & H\\ & G+ & 2H\\ \hline G^2 & 3GH & 2H^2\end{array}$$

3 *Darunter:* Error calculi

1 Differentiae: *erg. L* 2 Eorum ratio *erg. L* 6 *Unter* $\frac{1}{\mathrm{G}}$ *spaltenförmig* $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}$ *gestr. L*

1–3 Differentiae: Im Zähler der zweiten Differenz müßte der Faktor 2 gestrichen werden; dieses Versehen und ein weiterer Koeffizientenfehler in der folgenden Zeile führen in Z. 3 zu einem Widerspruch, den Leibniz erkennt und mit „Error calculi“ markiert. 4–174,3 In Z. 5 setzt Leibniz $F = 1$, bricht dann die unvollständige Rechnung ab und führt sie in Z. 6 f. neu durch. In Z. 9 vernachlässigt er einige Terme und rechnet konsequent weiter.

$$\frac{3G^2 + 10GH + 26H^2 + 8\dfrac{H^3}{G}}{G^3 + 7G^2H + 2GH^2 + 8H^3}$$

$$\|$$

$$\frac{3\dfrac{G^2}{H} + 10G + 26H + 8\dfrac{H^2}{G}}{\dfrac{G^3}{H} + 7G^2 + 2GH + 8H^2}$$

15. DE SUMMA QUADRATORUM IN FRACTIONIBUS
[März – Mai 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 208–209. 1 Bog. 2°. 4 S., teilweise zweispaltig. — Teil 2 und mehrere Zusätze mit anderer Feder und Tinte geschrieben. Cc 2, Nr. 280

Datierungsgründe: Im vorliegenden Stück kennt Leibniz die Summe der reziproken Triangularzahlen bereits und berechnet die Summe $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2-1} = \frac{3}{4}$; diese Reihe erscheint am Beginn von N. 16 zusammen mit den Reihen der reziproken Quadrat- und Triangularzahlen, was ohne Kenntnis der Summe kaum erklärlich erscheint. N. 15 dürfte also kurz vor dem etwa April – Mai 1673 verfaßten N. 16 entstanden sein.

[*Teil 1*]

progress. naturalium	differentiae	dupl. diff.
$\frac{1}{1}$		
	$\frac{1}{2}$	1
$\frac{1}{2}$		
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$		
	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$		
	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$		
	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{6}$		
	$\frac{1}{42}$	$\frac{1}{21}$
$\frac{1}{7}$		

Quae duplae differentiarum fractionum ex unitatibus per numeros naturales divisis, coincidunt cum progressione fractionum ex unitatibus per numeros triangulares divisis.

progress.	differentiae		
1			
	$\frac{2}{3}$	1	
$\frac{1}{3}$			
	$\frac{3}{18}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{1}{4}$
$\frac{1}{6}$			
	$\frac{4}{60}$	$\frac{12}{120}$	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{10}$			
	$\frac{5}{150}$	$\frac{15}{300}$	$\frac{1}{20}$
$\frac{1}{15}$			
	$\frac{6}{315}$	$\frac{18}{630}$	$\frac{1}{35}$
$\frac{1}{21}$			

Si differentiae progressionis fractionum triangularis, dividantur per primam productum erit progressio fractionum pyramidalium.

Differentia ista invertatur, habebimus summam, ut $\frac{2}{1}$ est summa progressionum fractionum triangularium. $\frac{3}{2}$ est summa pyramidalium. Potest et regula sic enuntiari.

Si summam datae seriei fractionum numeratores unitates, sed nominatores, seriem ordinum numericorum habentium, quaeris, sume primum numerum (post unitatem) ordinis numerici proxime antecedentis, et hunc divide per suam differentiam ab unitate,

16 f. pyramidalium. *(1)* Hinc summa *(2)* Differentia *L* 19 sed *erg. L* 20 unitatem) *(1)* fractionis seriei numeric *(2)* ordinis *L*

21 hunc: Nicht der Term nach der unitas, sondern diese selbst ist durch die Differenz zu dividieren.

productum erit summa progressionis fractionum datae. Hi ergo numeri $\frac{2}{1}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{4}{3}\cdot\frac{5}{4}\cdot\frac{6}{5}$ etc. sunt summae serierum fractionum ordinum numericorum.

$$
\begin{array}{llll}
 & & & 1 \\
\frac{1}{1} & \ldots\ldots & 1 & \\
2 & \ldots\ldots\ldots & & 2 \\
\frac{1}{2} & \ldots\ldots & 1 & \\
3 & \ldots\ldots\ldots & & 3 \\
\frac{1}{3} & \ldots\ldots & 1 & \\
4 & \ldots\ldots\ldots & & 4 \\
\frac{1}{4} & \ldots\ldots & 1 & \\
5 & \ldots\ldots\ldots & & 5 \\
\frac{1}{5} & \ldots\ldots & 1 & \\
6 & \ldots\ldots\ldots & & 6
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{llll}
 & & & 1 \\
\frac{2}{1} & \ldots\ldots & 2 & \\
3 & \ldots\ldots\ldots & & 3 \\
\frac{3}{3} & \ldots\ldots & 3 & \\
6 & \ldots\ldots\ldots & & 6 \\
\frac{4}{6} & \ldots\ldots & 4 & \\
10 & \ldots\ldots\ldots & & 10 \\
\frac{5}{10} & \ldots\ldots & 5 & \\
15 & \ldots\ldots\ldots & & 15
\end{array}
$$

Quaerenda est ratio summam ineundi quadratorum et cuborum etc. in fractionibus.

1								
	$\frac{3}{4}$	2		$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$			
$\frac{1}{4}$			4			7		
	$\frac{5}{36}$	6		$\frac{4}{36}$	$\frac{1}{9}$		8	
$\frac{1}{9}$			6			15		3
	$\frac{7}{144}$	12		$\frac{6}{144}$	$\frac{1}{24}$		11	
$\frac{1}{16}$			8			26		3
	$\frac{9}{400}$	20		$\frac{8}{400}$	$\frac{1}{50}$		14	
$\frac{1}{25}$			10			40		3
	$\frac{11}{900}$	30		$\frac{10}{900}$	$\frac{1}{90}$		17	
$\frac{1}{36}$			12			57		
	$\frac{13}{1764}$	42		$\frac{12}{1764}$	$\frac{1}{147}$			
$\frac{1}{49}$								

---

3 *Unter* 2, *später geschrieben:* $\frac{7}{36}$.

5 *Unter* 6, *später geschrieben:* $\frac{38}{144}$.

$\frac{1}{4}$	$\frac{4}{4}$	1				
			5			$\frac{5}{6}$
$\frac{1}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{1}{6}$		7		
			12		3	$\frac{12}{108}$
$\frac{1}{144}$	$\frac{8}{144}$	$\frac{1}{18}$		10		
			22		3	$\frac{22}{720}$
$\frac{1}{400}$	$\frac{10}{400}$	$\frac{1}{40}$		13		
			35		3	$\frac{35}{3000}$
	$\frac{12}{900}$	$\frac{1}{75}$		16		
			51			
	$\frac{14}{1764}$	$\frac{1}{126}$				

1–7 *Zur ersten Spalte in anderer Tinte, in der oberen Hälfte der Seite:*

$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{3}{4}$	
$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{[36]}$
$\frac{1}{144}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{48}$	$\frac{1}{144}$	$\frac{2}{144}$
$\frac{1}{400}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	0	$\frac{3}{400}$
$\frac{1}{900}$	$\frac{1}{225}$	$\frac{1}{180}$		

1–7 *Erste Spalte erg. L* 14 18 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{ccccc}
1 & & & & \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frown & \frac{3}{1} & = & \frac{3}{4} \\[6pt]
\frac{1}{9} & & \frac{5}{4} & & \frac{5}{36} \\[6pt]
\frac{1}{16} & & \frac{7}{9} & & \frac{7}{144} \\[6pt]
\frac{1}{25} & & \frac{9}{16} & & \frac{9}{400}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
 & & & & \\[6pt]
\frac{1}{4} & \frown & \frac{5}{4} & = & \frac{5}{16} \\[6pt]
\frac{1}{9} & & \frac{7}{9} & & \frac{7}{81} \\[6pt]
\frac{1}{16} & & \frac{9}{16} & & \frac{9}{256} \\[6pt]
\frac{1}{25} & & \frac{11}{25} & & \frac{11}{625}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{1} & & \\
 & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{3} & & \\
 & \frac{2}{15} & \frac{1}{16} \\
\frac{1}{5} & & \\
 & \frac{2}{35} & \frac{1}{36} \\
\frac{1}{7} & & \\
 & \frac{2}{63} & \frac{1}{64} \\
\frac{1}{9} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{2}{8} & \frac{1}{9} \\
\frac{1}{4} & & \\
 & \frac{2}{24} & \frac{1}{25} \\
\frac{1}{6} & & \\
 & \frac{2}{48} & \frac{1}{49} \\
\frac{1}{8} & & \\
 & \frac{2}{80} & \frac{1}{81} \\
\frac{1}{10} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{3} & - & \frac{1}{4} & = & \frac{1}{12} & \smile\ 12 & \frac{1}{1} \\[6pt]
\frac{1}{8} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{72} & & \frac{1}{6} \\[6pt]
\frac{1}{15} & & \frac{1}{16} & & \frac{1}{240} & & \frac{1}{20} \\[6pt]
\frac{1}{24} & & \frac{1}{25} & & \frac{1}{600} & & \frac{1}{50} \\[6pt]
\frac{1}{35} & & \frac{1}{36} & & \frac{1}{1260} & & \frac{1}{105} \\[6pt]
\frac{1}{48} & & \frac{1}{49} & & \frac{1}{2352} & & \frac{1}{196} \\[6pt]
\| & & & & & & \\[6pt]
\frac{3}{4} & & & & & &
\end{array}$$

1–8 *Späterer Zusatz:*

$$\begin{array}{cccccc|c}
6 & & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & & \frac{2}{9} & \frac{1}{4\frac{1}{2}} \\
 & 10 & & & & & \\
16 & & \frac{1}{8} & \frac{1}{16} & & \frac{1}{16} & \frac{2}{32} \\
 & 14 & & & & & \\
30 & & \frac{1}{15} & \frac{1}{25} & & \frac{2}{75} & \frac{1}{37\frac{1}{2}} \\
 & 18 & & & & & \\
48 & & \frac{1}{24} & \frac{1}{36} & & \frac{1}{72} & \frac{2}{144}
\end{array}$$

Dazu auf der oberen Blatthälfte, gestrichen:

$$\frac{2}{9} \times \frac{1}{16} \quad \frac{32}{9} \qquad \frac{1}{32} \times \frac{1}{75} \quad \frac{75}{32} \qquad \frac{32}{9} \times \frac{75}{32} \quad \frac{1024}{675}$$

1–6 $\smile$ 12 *und letzte Spalte erg. L*

$$
\begin{array}{cc}
\frac{3}{4} & \\
\| & \\
\frac{1}{3} & \\
 & \frac{5}{24} \\
\frac{1}{8} & \\
 & \frac{7}{120} \\
\frac{1}{15} & \\
 & \frac{9}{360} \\
\frac{1}{24} & \\
 & \frac{11}{840} \\
\frac{1}{35} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccccc}
 & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
 & & \| & & \| & \| \\
\frac{1}{3} & \diagdown & & & & \\
 & & \frac{1}{12} & & & \\
\frac{1}{4} & & & = & \frac{5}{24} & \\
\frac{1}{8} & \begin{array}{c}\times \\ \diagdown\end{array} & \left.\begin{array}{c}\frac{4}{32} \\ \\ \frac{1}{72}\end{array}\right) & & = & \frac{5}{36} \\
\frac{1}{9} & & & = & \frac{7}{120} & \\
\frac{1}{15} & \begin{array}{c}\times \\ \diagdown\end{array} & \left.\begin{array}{c}\frac{6}{135} \\ \\ \frac{1}{240}\end{array}\right) & & = & \frac{7}{144} \\
\frac{1}{16} & & & = & \frac{9}{360} & \\
\frac{1}{24} & \begin{array}{c}\times \\ \diagdown\end{array} & \left.\begin{array}{c}\frac{8}{384} \\ \\ \frac{1}{600}\end{array}\right) & & = & \frac{9}{400} \\
\frac{1}{25} & & & & &
\end{array}
$$

1–18 Im zweiten Schema stehen $\diagdown, \times$ für die Operatoren $-$, $+$.

$$\frac{3}{4} \quad - \quad , \frac{1}{12} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{240} \text{ etc.} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{4}{32} \quad \frac{6}{135} \quad \frac{8}{384} \text{ etc.} = \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{3} + \cancel{\frac{3}{4}} - \frac{1}{12} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{240} = \cancel{\frac{3}{4}} - \cancel{\frac{1}{3}} + \frac{4}{32} \quad \frac{6}{135} \quad \frac{8}{384}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{3}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{12} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{240}, \Big| \frac{4}{32} \quad \frac{6}{135} \quad \frac{8}{384}$$

$$0 \quad - \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{240} \quad = \quad \frac{4}{32} \quad \frac{6}{135} \quad \frac{8}{384} \quad - \frac{1}{3}$$

$$\frac{3}{4} \quad = \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \text{ etc.} \quad + \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{240} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{lllllll} \text{NB.} & \frac{1}{12} & \frac{1}{72} & \frac{1}{240} & & & \\ & \frac{2}{12} & \frac{7}{72} & \frac{14}{240} & \text{etc.} & = & \frac{3}{4} \\ & \frac{1}{6} & & & & & \end{array}$$

[*Teil 2*]

Wallis procedit nescio qua methodo inductionis, in sua *Arithmetica infinitorum.*

$$\begin{array}{llllll} & \frac{5}{4} & \frac{49}{36} & \frac{[820]}{576} & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{49} \end{array}$$

$$\frac{1}{1} \times \frac{1}{4} \quad \frac{4}{4} \quad \frac{1}{4} \Big| \frac{5}{4} \qquad \frac{5}{4} \times \frac{1}{9} \quad \frac{45}{36} \quad \frac{4}{36} \Big| \frac{49}{36} \qquad \frac{49}{36} \times \frac{1}{16} \quad \frac{784 + [36]}{36 \frown 16} \Big| \frac{[820]}{576}$$

7–9 NB. . . . $\frac{1}{6}$ *erg. L*   12 785 *L ändert Hrsg.*   14–184,1 $\frac{1}{16}$ | $\frac{784+1}{36 \frown 16}$ | $\frac{785}{576}$. *ändert Hrsg.* | *(1)* Summa prima est $\frac{\text{quadr.}(1) \frown \text{quadr.}(2) + 1}{\text{quadr.}(2) \frown \text{quadr.}(3)}$. Summa secunda est $\frac{\text{quadr.}(1) \frown \text{quadr.}(2) + 1.,, \frown \text{quadr.}(3),, +1.,, \frown \text{quadr.}(4),,, +1.}{\text{quadr.}(2) \frown \text{quadr.}(3) \frown \text{quadr.}(4) \frown}$. hoc sic continuans habebis summam 3^{tiam} *(2)* Summa *L*

11 *Arithmetica infinitorum.*: J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I, S. 355–478).

Summa prima $\quad \dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{4} = \dfrac{5}{4} \qquad \dfrac{1 \frown \text{quad}(1) + 1 \frown \text{quad}(2)}{\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2)} \qquad \dfrac{5}{4}$

Summa 2^{da} $\quad \dfrac{5}{4} \times \dfrac{1}{9} \qquad \dfrac{45+4}{36} = \dfrac{49}{36}$

$$\left.\frac{\text{quad}(1)+\text{quad}(2),,\frown \text{quad}(3),,+\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2),,,\frown \text{quad}(4),,,+\text{quad}(1)\text{quad}(2)\text{quad}(3)}{\text{quad}(1) \frown \text{quad}(2) \frown \text{quad}(3) \frown \text{quad}(4)}\right|$$

$$\frac{,,,,\frown \text{quad}(5),,,,+\text{quad}(1) \frown (2) \frown (3) \frown (4)}{\frown \text{quad}(5)}$$

$$\frac{\text{quad}(1) \frown (3) \frown (4) \frown (5) \text{ etc.} + \text{quad}(2) \frown (3) \frown (4) \frown (5) \text{ etc. } \text{quad}(1) \frown (2),,\frown (4) \frown (5) \text{ etc.} +}{\text{quad } 1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5 \text{ etc.}}$$

$$\frac{\text{quad}(1) \frown (2) \frown (3),,\frown (5) \text{ etc.}}{} \text{ etc.}$$

seu: $\dfrac{2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}} + \dfrac{1 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \text{ etc.}} + \dfrac{1 \frown 2 \frown 4 \frown 5}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4 \frown 5} \text{ etc.} =$
$\dfrac{1}{(1)} \; \dfrac{1}{(2)} \; \dfrac{1}{(3)} \; \dfrac{1}{(4)}$ etc.

seu: $\left.\dfrac{1 \frown 3 \frown 4 \frown \text{ etc. infinities} - 1.[+1] + 2. + 3. + 4. + 5. \text{ etc.}}{1 \frown 2 \frown 3 \text{ etc.}}\right| =$
infinitum$\dfrac{-1.[+1.] + 2. + 3.}{1 \frown 2 \frown 3 \frown 4}$ etc.

Noto autem numero incluso, numerum non unitatum, sed terminorum seu numeratorum. Et idem est quandocunque numeratores sunt semper unitates, quicunque sint fractionum nominatores.

9 f. +1 *erg. Hrsg. zweimal*

9 f. Leibniz klammert gewissermaßen aus allen unendlich vielen Summanden das Produkt 1.3.4. etc. aus. Im ersten Summanden tritt dieser Summand zweimal, also einmal zuviel auf, im zweiten genau einmal, im dritten zweimal statt dreimal (d. h. einmal zu wenig), im n-ten ($n \geq 3$) zweimal statt n-mal, d. h. $(n-2)$-mal zu wenig, auf.

[*Teil 3*]

$$
\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
 & \frac{3}{4} & \frac{1}{2} & \\
\frac{1}{4} & & & 12 \\
 & \frac{3}{28} & \frac{1}{14} & \\
\frac{1}{7} & & & 21 \\
 & \frac{3}{70} & \frac{1}{35} & \\
\frac{1}{10} & & & \\
 & \frac{3}{130} & \frac{1}{65} & \\
\frac{1}{13} & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccc}
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{3}{10} & \frac{1}{5} \\
\frac{1}{5} & & \\
 & \frac{3}{40} & \frac{1}{20} \\
\frac{1}{8} & & \\
 & \frac{3}{88} & \frac{1}{44} \\
\frac{1}{11} & & \\
 & \frac{3}{154} & \frac{1}{77} \\
\frac{1}{14} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc|cc}
\frac{1}{3} & & & \\
 & \frac{3}{18} & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{6} & & & 12 \\
 & \frac{3}{54} & \frac{1}{18} & \\
\frac{1}{9} & & & 18 \\
 & \frac{3}{108} & \frac{1}{36} & \\
\frac{1}{12} & & & 24 \\
 & \frac{3}{180} & \frac{1}{60} & \\
\frac{1}{15} & & &
\end{array}
$$

2–10 *Daneben am Rande:*

$$
\begin{array}{cc}
2 & \\
 & \frac{3}{4} \\
\frac{5}{4} & \\
 & \frac{3}{9} \\
\frac{33}{36} & \\
 & \frac{3}{16} \\
\frac{105}{144} & \\
 & \frac{3}{25}
\end{array}
$$

$$\begin{array}{cccc}
 & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} & \\
6 & & & 3 \\
 & \frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \\
8 & & & 4 \\
 & \frac{1}{18} & \frac{1}{9} & \\
10 & & & 5 \\
 & \frac{1}{28} & \frac{1}{14} & \\
12 & & & 6 \\
 & \frac{1}{40} & \frac{1}{20} & \\
14 & & & 7 \\
 & \frac{1}{54} & \frac{1}{27} & \\
 & & & 8 \\
 & \frac{1}{70} & \frac{1}{35} & \\
 & & & 9 \\
 & \frac{1}{88} & \frac{1}{44} & \\
 & & & 10 \\
 & \frac{1}{108} & \frac{1}{54} & \\
 & \frac{1}{130} & \frac{1}{65} & \\
 & \frac{1}{154} & \frac{1}{77} & \\
 & \frac{1}{180} & \frac{1}{90} & \\
 & \text{etc.} & & \\
 & \| & &
\end{array}$$

$$\frac{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}}{3} = \frac{11}{18}$$

$$
\begin{array}{cccccccc}
 & & 1 & = & \frac{1}{4} & & & \\
1 & \frac{3}{4} & 0 - \frac{2}{4} & & \frac{1}{9} & & & \\
\frac{1}{4} & & & & & & & \\
 & \frac{5}{36} & 0 - \frac{1}{36} & & \frac{1}{16} & & & \\
\frac{1}{9} & & & & & & & \\
 & \frac{7}{144} & \frac{2}{144} & & \frac{1}{25} & \frac{2}{144} & & \\
\frac{1}{16} & & & & & & & \\
 & \frac{9}{400} & \frac{7}{400} & & \frac{1}{36} & \frac{7}{400} & & \\
\frac{1}{25} & & & & & & & \\
 & \frac{11}{900} & \frac{14}{900} & & \text{etc.} & \frac{14}{900} & & \\
\frac{1}{36} & & & & & & & \\
 & \frac{13}{36 \frown 49} & \frac{23}{36 \frown 49} & & \frac{10}{\ldots} & & & \\
 & \frac{15}{49 \frown 64} & \frac{34}{\ldots} & & \frac{19}{\ldots} & -\,15 & = & 4 \\
 & & & & & & & \qquad 9 \\
 & \frac{17}{64 \frown 81} & \frac{47}{\ldots} & & \frac{30}{\ldots} & -\,17 & = & 13 \\
 & & & & & & & \qquad 11 \\
 & \frac{19}{81 \frown 100} & \frac{62}{\ldots} & & \frac{43}{\ldots} & -\,19 & = & 24
\end{array}
$$

3–18 *Dazu am Rande:*

$$
\begin{array}{ccccccccccccccc}
9 & & 16 & & 25 & & 36 & & 49 & & 64 & & 81 & & 100 \\
7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & 17 & & 19 & & 21 \\
\hline
2 & & 7 & & 14 & & 23 & & 34 & & 47 & & 62 & & 79 \\
 & 5 & & 7 & & 9 & & 11 & & 13 & & 15 & & 17 &
\end{array}
$$

1			$1 = \frac{1}{4}\ \frac{5}{36}$ etc.		1		
	$\frac{3}{4}$						
$\frac{1}{4}$		$\frac{22}{36}$	$\frac{1}{4} = \frac{1}{9}\ \frac{7}{144}$ etc.		$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{4}$
	$\frac{5}{36}$						
$\frac{1}{9}$		$\frac{972}{5184}$	$\frac{1}{9} = \frac{1}{16}\ \frac{9}{400}$ etc.		$\frac{1}{9}$	$\frac{49}{36}$	$\frac{49}{36}$
	$\frac{7}{144}$						
$\frac{1}{16}$		etc.	$\frac{1}{16} = \frac{1}{25}\ \frac{11}{900}$ etc.		$\frac{1}{16}$	$\frac{205}{144}$	$\frac{820}{576}$
	$\frac{9}{400}$						
$\frac{1}{25}$		etc.			$\frac{1}{25}$	$\dots$	$\frac{21076}{14400}$
	$\frac{11}{900}$						
$\frac{1}{36}$					$\frac{1}{36}$	$\dots$	

1–11 *Nebenrechnungen:*

$\frac{5}{36} \underline{\times} \frac{7}{144}$	$\underline{720 + 252}$	$\frac{972}{5184}$		
$\frac{5}{4} \underline{\times} \frac{1}{9}$	49	16	16
$\frac{49}{36} \underline{\times} \frac{1}{16}$	$\underline{4}$	$\underline{50}$	$\underline{36}$
	196	800	96
	$\underline{9}$	$\underline{16}$	$\underline{48}$
	205	784	576
		$\underline{36}$	
$\frac{820}{576} \underline{\times} \frac{1}{25}$	20500	820	
	$\underline{576}$		
	$\underline{21076}$		
	14400		

1		.					
	1		$\frac{1}{1}$				
1		.		$\frac{1}{2}$			
	2		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{8}$		
2		.		$\frac{3}{8}$		.	
	4		$\frac{1}{8}$		$\frac{17}{64}$		.
8		.		$\frac{7}{64}$		$\frac{175}{1024}$	
	8		$\frac{1}{64}$		$\frac{97}{1024}$		
64		.		$\frac{15}{1024}$			
	16		$\frac{1}{1024}$				
1024		.					

1–11 *Neben der 1. Tabelle:*

1		*gestr.*	1 *L*
	$\frac{7}{8}$		
$\frac{1}{8}$			
	$\frac{19}{216}$		
$\frac{1}{27}$			
	$\frac{37}{27 \frown 64}$		
$\frac{1}{64}$			

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{1} & & \\[2ex]
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\[2ex]
\frac{1}{8} & \frac{3}{8} & \frac{1}{4} \\[2ex]
\frac{1}{64} & \frac{17}{64} & \frac{1}{8} \\[2ex]
\frac{1}{1024} & \frac{175}{1024} & \frac{174}{1024}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} \\[2ex]
| & | & | & | & | \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} \\[2ex]
\| & \| & \| & \| & \\[2ex]
\frac{1}{12} & \frac{3}{54} & \frac{6}{160} & \frac{10}{375} &
\end{array}$$

1–5 *Nebenbetrachtungen zur linken Tabelle:*

$$\begin{array}{lcl}
 & & \frac{1}{2} \\[2ex]
\frac{3}{8} & & \frac{4}{8}\ [!] \,\Big|\, \frac{1}{2} \\[2ex]
\frac{24}{64} \,\Big|\, \frac{6}{8}\ [!] \,\Big|\, \frac{3}{4} & & \frac{25}{64}
\end{array}$$

---

4 $\frac{1}{8}$: Richtig wäre $\frac{1}{4}$. Der Fehler wirkt sich auf den letzten Term der Nebenbetrachtungen aus, die zusätzlich Unstimmigkeiten aufweisen.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} \\[2ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} & \\[2ex]
\| & \| & \| & \| & \| & \\[2ex]
\frac{3}{4} & \frac{6}{27} & \frac{10}{96} & \frac{15}{250} & & \\[2ex]
| & | & | & | & & \\[2ex]
\frac{1}{12} & \frac{3}{54} & \frac{6}{160} & \frac{10}{375} & & \\
\| & \| & \| & & & \\
\frac{8}{12}\,\Big|\,\frac{2}{3} & \frac{9}{54}\,\Big|\,\frac{1}{6} & \frac{[64]}{960} & \text{etc.} & =1 &
\end{array}$$

Nota differentiae inter numeros quadratos et triangulares sunt numeri triangulares.

$$\begin{array}{cccc}
3-4 & 6-9 & 10-16 & \text{etc.} \\
1 & 3 & 6 &
\end{array}$$

idque utcunque sumas:

6–8 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} 3 \\ \cancel{9}60 \;\not\frown\; 6 \\ \cancel{1}60 \end{array} \qquad \frac{1}{10} \underset{-}{\times} \frac{1}{16} \qquad \frac{10}{96} \quad \frac{100}{960} \quad \frac{6}{160} \quad \frac{36}{960}$$

8 *Darüber, später geschrieben:*

$$\frac{32}{280}\,\Big|\,\frac{16}{140}\,\Big|\,\frac{8}{70}\,\Big|\,\frac{4}{35}\,\Big|$$

8 $\frac{136}{960}$ *L ändert Hrsg.*

1	3	6	10
4	9	16	25
3	6	10	15

[*Zusatz in anderer Feder und Tinte:*]

$$\frac{1 \sqcap \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}}{3 \frown 4} \qquad \frac{3 \sqcap \frac{2 \frown \cancel{3}}{\cancel{2}}}{6 \frown 9} \qquad \frac{6 \sqcap \frac{3 \frown \cancel{4}}{\cancel{2}}}{\frac{\cancel{4} \frown 5}{\cancel{2}} \frown 16}$$

$$\frac{\cancel{2} \frown 3}{\cancel{2}} \qquad \frac{\cancel{3} \frown 4}{\cancel{2}}$$

unde fiet : $\frac{1}{3 \frown 4} \quad \frac{2}{4 \frown 9} \quad \frac{3}{5 \frown 16}$

Momentum eius de 3.4.5. est $\frac{1}{4}\ \ \frac{2}{9}\ \ \frac{3}{16}$, cui si addas $\frac{1}{4}\ \ \frac{1}{9}\ \ \frac{1}{16}$, fiet: $\frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}$.

16. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 227–228. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 627

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das Stück ist nach einer Betrachtung zur Zykloide (Cc 2, Nr. 609, vgl. die Erl. zu S. 195 Z. 5–7) entstanden, diese wiederum ist wohl kurz nach dem Erscheinen von Huygens' *Horologium oscillatorium* („achevé d'imprimer" 1. April 1673) verfaßt. Auf S. 196 Z. 28 ist die in *LSB* VII, 1 N. 36 S. 227 Z. 17 – S. 228 Z. 5 sowie in N. 17_3 S. 222 Z. 2 und in N. 18 S. 238 Z. 3–8 verwendete Schreibweise inf.−1 etc. punktuell ergänzt, so daß vermutlich N. 16 früher anzusetzen ist. N. 17 (s. dort) schließt inhaltlich an N. 16 an.

M e t h o d u s t a n g. i n v e r s a i n s p e c i e d e f i g u r a c u i u s e v o l u t i o n e d e s c r i b i t u r p a r a b o l a, d e q u e e i u s o r d i n a t a r u m s u m m a e s t p a r a b o l o e i d e s

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	1
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{8}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{15}$
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{24}$
etc.		

Altitudo x. applicata y. In parabola $xa = y^2$. y. $Rq\,2, y$. $Rq\,3, y$. Et area $\dfrac{2xy}{3}$. In parabola cubica $xa = y^3$[,] area $= \dfrac{3xy}{4}$. y. $Rc\,2, y$. $Rc\,3, y$. In paraboloeide $x^3 = y^2 a$. $2x^3 = 2y^2 a$. sunt ergo quadrata applicatarum, ut cubi a vertice abscissarum. x.[=]$Rc\,y^2 a$. Ergo si multiplicetur a vertice abscissa simpliciter v. g. $2x$. erit eius cubus $8x^3$. qui est ad cubum x. sim-

13 *Darunter:* Tunc eram adhuc novus.

14 *(1)* xa = y^2. x^3 = y^{2}a *(2)* Altitudo *L* 15 Et *(1)* summa *(2)* area *L* 18 si *(1)* duplicetur *(2)* multiplicetur *L*

11 f i g u r a : vgl. H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I, S. 517–520.

plicis, ut 8. Ergo y^2a. multiplicetur per 8. Ergo $Rq\,8, y^2a$. erit cubus applicatae et applicata erit: $Rc\,y^2a \frown Rqc\,8$. Hinc elegans consideratio.

2	4	8
3	6	12
4	8	16
9	18	36

In parabola altitudinibus multiplicatis, seu crescentibus arithmetice, crescunt applicatae, ut radices quadratae numerorum naturalium, y | $Rq\,2, y.$ | $Rq\,3, y.$ | etc. In triangulo ut radices quadratae numerorum quadratorum, y. $Rq\,4, y$. $Rq\,9, y$. etc. In paraboloeide dicta, ut radices quadratae numerorum cubicorum, y, $Rq\,8, y$. $Rq\,27, y$. etc.

Unde apparet applicatas trianguli esse medias proportionales inter applicatas paraboloeidis Heuratianae, et parabolae.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*
$Rq\,2 = Rqq\,4 = Rqc$ [*bricht ab*]
$Rq\,2 \frown Rq\,2 = 2. \frown Rq\,2 = Rq\,8. \frown Rq\,2 = Rq\,128$ [*!*]
$2 = \square.\ Rq\,2 \quad Rq\,8 = cub \llcorner Rq\,2. \quad Rq\,2. = Rqc\,8.$

6 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{a \frown Rq\,b}{a \smile Rq\,a} = \dfrac{a \frown b}{}$ [*bricht ab*]

			1.	2.	3.
	div.	per	$Rq\,1.$	$Rq\,2.$	$Rq\,3.$
prod.	mult.	per	1	2	3
				aeq.	
			1	2	3
	mult.	per	$Rq\,1.$	$Rq\,2.$	$Rq\,3.$

1 f. erit *(1)* applicata. *(2)* cubus *L* 4 parabola *(1)* verticibus simpli *(2)* altitudinibus *L* 11–195,1 parabolae. | Unde sequitur triangulum esse mediam proportionalem, inter evolventem parabolicam *(1)* et parabolam *(2)* seu paraboloeidem Heuratianam, et parabolam si paraboloeis, triangulum et parabola sint eiusdem altitudinis et basis. Ergo si parabola sit $\frac{2}{3}$ | $\frac{4}{6}$ *gestr.* | et triangulum $\frac{1}{2}$ | $\frac{3}{6}$ *gestr.* | erit paraboloeis $\frac{1}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{3}{8}$, quare rectangulum circumscriptum erit ad paraboloeidem ut 8 ad 3. *gestr.* | Quadratum *L*

---

1 f. erit cubus applicatae: Die Aussage und ihre unmittelbare Folgerung sind nicht richtig, sie beeinträchtigen die weiteren Überlegungen S. 195 Z. 8 f.

Quadratum applicatae trianguli est aequale, rectangulo sub applicata parabolae, et paraboloeidis Heuratianae, ideo et summa quadratorum, pyramis scilicet, ex quadratis triangulo impositis conflata, est aequalis summae rectangulorum, seu solido cuidam cunei forma, quod hinc paraboloeide illinc parabola clauditur.

Triangulum rectangulum sub rectis aequalibus evolutae et per evolutionem descriptae aequatur figurae evolutionis. Quare si detur recta aequalis curvae evolutae et quadratura figurae evolutionis, dabitur recta aequalis curvae per evolutionem descriptae.

$$\begin{array}{llllll} y. & Rq\,2, y. & Rq\,3, y. & y. & Rqc\,8 \frown Rc\,y^3. & Rqc\,27 \frown Rc\,y^3. \\ y. & Rqc\,8 \frown Rc\,y^2 a. & Rqc\,27 \frown Rcy^2 a & y. & Rqc\,8 \frown Rc\,y^2 a. & Rqc\,27 \frown Rc\,y^2 a. \end{array}$$

194,23–27 *Zur gestrichenen Variante:*
Randbemerkung, nicht gestrichen: E r r o r
Nebenrechnungen, nicht gestrichen:

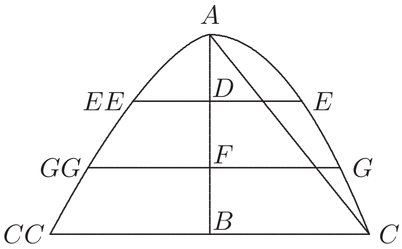
$$\begin{array}{cccccccc} \frac{3}{4} & \frac{3}{4} — \frac{1}{2} & \frac{3}{8} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{2} & \quad\ \frac{1}{2} & & & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & & \frac{2}{3} — \frac{2}{3} = \frac{4}{9} \end{array}$$

20 f. *Nebenrechnung zur Variante:* $\begin{array}{r} 81 \\ \underline{9} \\ 729 \end{array}$ *Zur Variante, gestrichen:* Nihil est.

1 aequale, *(1)* quad *(2)* rectangulo *L* 2 quadratorum, *(1)* prismae scilicet *(2)* pyramidis *(3)* pyramis *L* 2 f. quadratis *(1)* rectangulo *(2)* triangulo *L* 5 rectangulum *(1)* ex evolvente *(2)* sub *L* 6 aequalis *(1)* figurae *(2)* curvae *L* 8 f. Rqc 27 $\frown$ Rc y^3. *(1)* y. Rq 4, y. Rq 9, y. y. Rqc 64 $\frown$ Rqc y^3. Rqc 729 $\frown$ Rc y^3. *(2)* y. *L* 9–196,1 Rqc 27 $\frown$ Rc y^2a. | Hinc applicata paraboloeidis Heuratianae est ad applicatam respondentem parabolae circumscriptae, ut a ad y. Ergo paraboloeis ad parabolam eodem modo erit.

Ut iam ex hac progressione rationem aggregatorum ex applicatis, seu figurarum inveniamus, ita procedendum est: Applicatae parabolae ita procedunt. Si ex *(1)* data *(2)* assignata quadam altitudine x, applicata sit y, *(a)* erit *(b)* sequitur ex altitudine 2x, applicatam fore Rqc 8, $\frown$ Rc y^3; et ex altitudine 3x, applicatam fore Rqc 27, $\frown$ Rc y^3 etc. Applicatae *(aa)* parabolae ita procedunt *(bb)* paraboloeidis ita procedunt: Si ex assignata quadam altitudine x. (eadem quae ante) applicata sit z. ex altitudine 2x. applicatam fore Rqc 8, $\frown$ Rc z^2a. Ex altitudine 3x. fore Rqc 27, $\frown$ Rc z^2a. Futurae sunt ergo applicatae parabolae ad applicatas paraboloeidis, distantiis a vertice proportionalibus ut Rc *gestr.* | Esto *L*

5–7 Leibniz setzt eine fehlerhafte Regel aus seinen Betrachtungen über die Zykloide (Cc 2, Nr. 609) voraus; die Folgerung bleibt daher unbegründet.



[*Fig. 1*]

Esto figura ABC semiparabola. Abscissa a vertice $AD = x$. Applicata $DE = y$. Duplicata abscissa ut fiat $AF = 2x$. Quadratum applicatae $DE = y^2$. duplicetur[,] $2y^2$, producti radix quadrata $Rq\,2 \frown y$ erit $= FG$. applicatae quaesitae. Applicatae ergo aequalium axis portionum crescent ut radices quadratae numerorum naturalium deinceps ab unitate. $Rq\,1$. $Rq\,2$. $Rq\,3$. $Rq\,4$.

Esto figura AB_CC paraboloeis Heuratiana, abscissa a vertice $AD = x$. Applicata $D\_EE = z$. Duplum abscissae $AF = 2x$. Cubus ipsius $AD = x^3$. Cubus ipsius AF est $8x^3$. Quadratum applicatae D_EE est z^2. Ergo quadratum applicatae F_GG erit $8z^2$. Ergo applicata F_GG erit $Rq\,8 \frown z$. Applicatae ergo aequalium axis portionum in paraboloeide Heuratianae erunt ut radices quadratae numerorum cubicorum deinceps ab unitate. $Rq\,1 \mid Rq\,8 \mid\ Rq\,27$.

Nunc quemadmodum reperta a geometris ratio est, ope arithmeticae infinitorum, quadrandi parabolam, seu colligendi harum applicatarum summam, ita tentandum est, an colligi quoque summa paraboloeidis possit, quod ita tentabimus. Applicatae parabolae ita crescunt, ut dictum est:

$$\begin{array}{lcccc} & Rq\,1. & Rq\,2. & Rq\,3. & Rq\,4. \\ \text{seu} & 1 \smile Rq\,1. & 2 \smile Rq\,2. & 3 \smile Rq\,3. & 4 \smile Rq\,4. \end{array}$$

Applicatae paraboloeidis ita crescunt:

$$\begin{array}{lcccc} & Rq\,1. & Rq\,8. & Rq\,27. & Rq\,64. \\ \text{seu} & Rq\,1, \frown 1. & Rq\,2, \frown 2. & Rq\,3, \frown 3. & Rq\,4, \frown 4. \end{array}$$

Si utrobique multiplicentur per radices numerorum naturalium fient [ex] applicatis parabolae:

$$\begin{array}{ccccccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & & \multicolumn{4}{l}{\text{et applicatae parabolae erunt}} \\ \dfrac{1}{Rq\,1} & \dfrac{2}{Rq\,2} & \dfrac{3}{Rq\,3} & \dfrac{4}{Rq\,4} & = & \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1} \cdot & \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 2} \cdot & \dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 3} \cdot & \text{etc.} \end{array}$$

1 semiparabola. *(1)* Altitudo *(2)* Abscissa *L* 15 f. Rq 27. *(1)* Restat figura, quae *(2)* Nunc *L* 25 fient *(1)* ap *(2)* explic *(3)* |ex *erg. Hrsg.*| applicatis *L* 28 $\dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1}$ ... etc. *erg. L*

28 $\dfrac{\text{bas}}{\text{inf} - 1}$ ... etc.: vgl. S. 199 Z. 1–8 u. N. 18 S. 237 Z. 1 – S. 238 Z. 8.

Ex applicatis paraboloeidis:

$$\begin{array}{cccc} 1 & 4 & 9 & 16 \\ \dfrac{1}{Rq\,1} & \dfrac{4}{Rq\,2} & \dfrac{9}{Rq\,3} & \dfrac{16}{Rq\,4}. \end{array}$$

et applicatae paraboloeidis erunt

Unde apparet theorema memorabile, nimirum ut est applicata trianguli ad respondentem parallelam axi parabolae in trilineo parabolico assumtam, ita esse applicatam parabolae ad applicatam paraboloeidos respondentem.

Applicatae nostrarum paraboloeidum sunt minores cis, maiores trans applicatam communem; quam applicatae parabolarum. Hoc generale.

Applicata paraboloeidis, ad applicatam respondentem, est in composita ratione, ex ratione duarum primarum applicatarum, et numero quo quota sit applicata data, inde a prima, axe aequaliter secto, exprimitur.

Unde apparet, cum aliquando fiant aequales, necesse esse, ut duarum primarum applicatarum ratio sit quae finiti ad infinitum, seu qualis anguli contactus ad rectilineum seu ut est radix quadrati numeri infiniti ad numerum infinitum. Hoc generale.

---

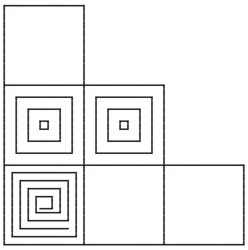
3 *Nebenbetrachtung:*

	$\frac{4}{Rq\,1}$	$\frac{16}{Rq\,2}$	$\frac{36}{Rq\,3}$	$\frac{64}{Rq\,4}$	
	4	$Rq\,32$	$Rq\,72$	$Rq\,128$	$\cancel{2}$
$Rq\,2)$		$Rq\,64$	$Rq\,144$	$Rq\,256$	$\cancel{144}$ ⨍ 48
	4	8	12	16	$\cancel{33}$
2)	2	4	6	8	
2)	1	2	3	4	

4 f. ad *(1)* applicatam *(a)* tri *(b)* trilinei parabolici, basi *(2)* respondentem *L* 7 nostrarum *erg. L* 10 f. inde a prima, *(1)* diametro *(2)* axe aequaliter secto, *erg. L* 14 est *(1)* ratio *(2)* radix *L* 18 Rq 2) | Rq 8 *gestr.* | Rq 64 *L*

---

16 Die Division in der ersten Zeile des Schemas ergibt nicht die zweite. Die Multiplikation der Terme der zweiten Zeile mit $\sqrt{2}$ hat Leibniz für den ersten Term gestrichen.



[*Fig. 2*]

$$1 \frown 1 \qquad 2 \frown 4 \qquad 3 \frown 9$$

$$\begin{array}{cccc} Rq\,1. & Rq\,2. & Rq\,3. & Rq\,4. \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} Rc\,1. & Rc\,2. & Rc\ \ 3. & Rc\ \ 4. \\ Rc\,1. & Rc\,8. & Rc\,27. & Rc\,64. \\ 1 & Rc\,4. & Rc\ \ 9. & Rc\,16. \end{array}$$

1–6 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 4 & 8 \\ 9 & \underline{27} \\ 16 & 36 \end{array} \qquad \frac{5}{8} \quad \begin{array}{c} 8 ⨍ 1\,\frac{3}{5} \\ 5 \end{array} \qquad \frac{14}{27} \quad \begin{array}{c} 27 ⨍ 1\,\frac{13}{14} \\ 14 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \underline{36} \\ 216 \\ \underline{108\ \ } \\ 1296 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{6} & 0 \\ & \cancel{3} & \cancel{3} & \cancel{3} \end{array} ⨍ 420$$

$$Rq\,8 \qquad Rq\,8 = Rq\ \begin{array}{c} Rq\,8 \\ Rq\,8 \end{array} \qquad \begin{array}{c} Rq\ \ 8 \\ \underline{Rq\ \ 8} \\ [Rq\,64] \end{array} \qquad Rq\,8 = Rqq\,64$$

$$\begin{array}{r} Rqq\,Rq\,64 \\ Rq\ \ 8 \end{array} \qquad \begin{array}{c} Rq\,64 \\ \underline{Rq\quad 8} \\ [Rq\,]512 \end{array} \qquad \begin{array}{c} Rq\ \ 64 \\ \underline{Rq\ \ 8} \\ Rq\,512 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \cancel{5}12 \\ \underline{\cdot\ \ \cdot} \\ \underline{2\ \ 2} \\ [\cancel{4}]\ 4 \end{array} \qquad \begin{array}{c} Rq\,4 = Rc\,8 \\ Rc\llcorner Rq\,512. = Rq\,8. \\ Rc\,Rq\,4 \end{array}$$

17 Rq 64 *gestr. L erg. Hrsg.* 20 Rq *erg. Hrsg.* 22 $\cancel{2}$ *L ändert Hrsg.*

1	$\frac{1}{2}\,a$	Diam. circuli cycloeidem generantis a.
2	$\frac{1}{2}\,a$	Linea semicycloeidalis $2a \frown 2a \smile \frac{1}{4} = a^2$.
3	$\frac{1}{2}\,a$	
4	$\frac{1}{2}\,a$	Cautio maximi momenti nec a quoquam animadversa in
5	$\frac{1}{2}\,a$	aestimandis curvis per tangentes, falsum est curvam ex
6	$\frac{1}{2}\,a$	infinitis tangentibus seu rectis compositam semper intelligi
etc.		posse. Ut cycloeis linea intelligenda est composita ex infinitis
basis $\frown \llcorner \frac{1}{4}$ alt.		arcubus. Ideo non procedit regula de figura evolutionis producta

ex dimidia linea evoluta, ducta in dimidiam evolventem, quod procederat, si evoluta ex tangentibus rectilineis constaret. Applicandum hoc ad helicen circularis evolutam.

Caeterum si liceret fingere tangentes infinitas semper possem statim quadrare circulum, nam figura evolutionis, cum evolvitur cycloeis circulo aequalis est duplicato. Eodem modo curva parabolica consideranda, aliaeque. NB. Ideo calculus per polygona aeque obnoxius erroribus, ⟨id⟩eo ⟨cal⟩culus per indivisibilia.

1–8 *Nebenbetrachtungen:*

$\frac{a}{2} \frown 1 \quad \frac{a}{2} \frown 2 \quad \frac{a}{2} \frown 3 \quad \frac{a}{2} \frown 4$

$a \frown a = a^2$, auferatur dimidium[,] $+ \frac{a^2}{4} = \frac{2a^2}{4} + \frac{a^2}{4} = 3$ [*bricht ab*]

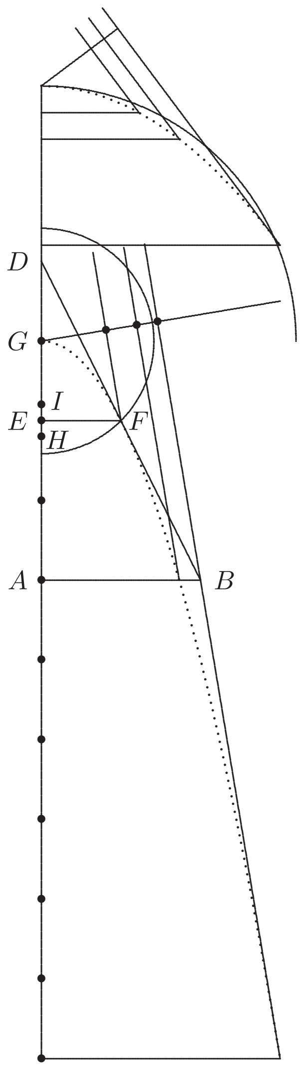
$\frac{a}{4} \frown 2 \quad \frac{a}{4} \frown 3 \quad \frac{a}{4} \frown 4$

5–7 *Am Rande:* Error

5 est *(1)* figuram *(2)* curvam *L* 6 seu rectis *erg. L* 7 linea *erg. L* 9 ex *(1)* figura triangulo *(2)* figura *(3)* dimidia *L* 9 ducta *(1)* in quartam pa *(2)* in *L*

---

8 regula: vgl. die Erl. zu S. 195 Z. 5–7.



[*Fig. 3*]
[*tlw. Blindzeichnung*]

Operae pretium est investigare figuras, in quibus intervalla tangentium a vertice, habent rationem quandam certam et constantem, summationis capacem.

Ante omnia certum est tangentes eiusdem curvae ad easdem partes non posse esse parabolas.

Tangens est recta cuius unum tantum punctum cum figura commune est, eo in loco ubi attingit.

Hinc tangens ibi non nisi circumferentiam attingit.

Tangens attingit unam tantum figurae applicatam.

Omnis applicata ad axem vel basin et tangentem, est maior applicata ad curvam, demta una.

Ex puncto dato ducere tangentem ad curvam datam.

Nota: Tangens est minima earum quae ex axe vel basi productis ad punctum datum duci possunt, ita ut intra figuram non cadant.

Ducatur recta AB ex axi ad punctum datum B basi parallela seu axi perpendicularis, tangens ponatur reperta et esse DB et applicata contactus esse EF. Erit $AB = a$. $GA = b$. $EF = x$. Ergo $EA = x\alpha$. $[GE =]\ b - x\alpha$. $GD = x\beta$. $DB = x\gamma$. Sumtis EH quantumvis parvis, seu recta AI quantumvis maiore et recta AH quantumvis minore quam EA, investigatisque applicatis, ex E et H tum ad curvam, tum ad rectam DB necesse est, si DB est tangens applicatas ad rectam ultra vel cis E esse maiores applicatis ad curvam.

Contra si data sit applicata EF quaerendum est punctum D seu recta ED ut scilicet omnes trianguli DEF applicatae sunt maiores applicatis figurae respondentibus.

29 *Fig. 3*: Leibniz verwendet in der Figur und anfangs auch im Text Kleinbuchstaben für die Punktbezeichnung und geht dann zu Großbuchstaben über; die Wiedergabe ist nach diesem Gebrauch vereinheitlicht.

1	1	1	1	1
Rq 2	2	4	8	16
Rq 3	3	9	27	
Rq 4	4	16	64	
	10	30	100	

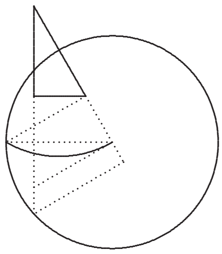
1	1	1
2	4	8
3	9	27
4	16	64

Theorema notabile, summa numerorum naturalium deinceps ab unitate, est radix summae numerorum cubicorum totidem deinceps ab unitate sumtorum.

Ideo etiam trilineum parabolicum cubicum $\frac{1}{4}$ quae est summa cuborum, est quadratum trianguli $\frac{1}{2}$ quod est summa numerorum naturalium.

$$\begin{array}{lllllll} 1. & 2. & 3. & 4. & = & 10. \\ 1 & 4 & 9 & 16 & = & 30 \end{array} \qquad \begin{array}{llllll} \frac{1}{1} & \frac{2}{2} & \frac{3}{3} & \frac{4}{4} & = & 4 \\ \frac{1}{1} & \frac{4}{2} & \frac{9}{3} & \frac{16}{4} & = & 10 \end{array}$$

[*Figur ohne Textbezug*]



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

200,4 f. ad ... partes *erg. L* 200,8 ibi *erg. L* 200,10 vel basin *erg L* 200,19 GA *L ändert Hrsg.* 200,22 applicatis, *(1)* tum ad axem, tum *(2)* ex *L* 200,22 ad *(1)* figuram, *(2)* curvam *L* 200,24 ad *(1)* figur *(2)* rectam *L*

17. DE PROGRESSIONIBUS INTERVALLORUM TANGENTIUM A VERTICE

[April – Mai 1673]

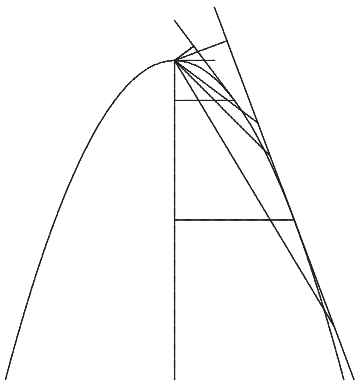
Die folgenden drei Stücke stehen in engem inhaltlichen Zusammenhang. Sie greifen die Problemstellung von N. 16 S. 200 Z. 1–3 auf und dürften kurz danach entstanden sein. Die Überlegungen von Teil 1 von N. 17_1 werden jeweils in Teil 1 von N. 17_2 und N. 17_3 fortgesetzt. Teil 3 von N. 17_1 wird in Teil 3 von N. 17_2 weitergeführt; von letzterem gibt es auch eine Verbindung zu Teil 2 von N. 17_1.

Das Wasserzeichen des Papiers von N. 17_2 u. 17_3 ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt.

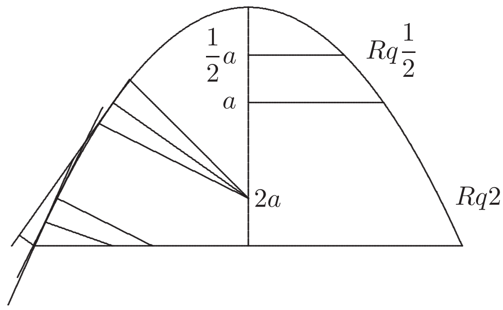
17_1. SCHEDULA PRIMA

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 XII, 2 Bl. 218. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge 218 v°, 218 r° oberes Drittel, 218 v°, 218 r° untere zwei Drittel. Teil 2 in die Lücken von Teil 1 geschrieben. — Am oberen Rand von Bl. 218 r° zwei isolierte Zeilen mit teilweise durchgestrichenen Zahlen (= S. 205 Z. 17 f.).
Cc 2, Nr. 629

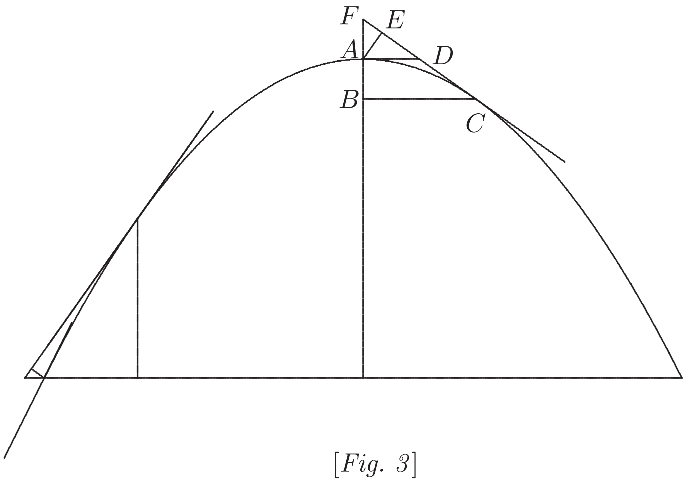
[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$AB = AF = a$. $BC = b$. $BF = 2a$. $AD = \dfrac{b}{2}$. $\nabla AFD = \dfrac{ab}{4}$. $\square AF = a^2$. $\square AD = \dfrac{b^2}{4}$. $FD = Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner$. Ergo recta $AE = \dfrac{ab}{4} \smile Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner \frown 2$ seu $\dfrac{ab}{2Rq\llcorner a^2 + \dfrac{b^2}{4}\lrcorner}$.

Fiat $AB = AF = 2a$. $BC = Rq2, b$. $BF = 4a$. $AD = \dfrac{Rq2, b}{2}$. $\nabla AFD = 2a \frown$

---

1 *Zu Fig. 3, gestrichen*:

$$\begin{array}{r} b \frown a \\ Rq2\ b \frown a \\ Rq3\ b \frown a \\ Rq4\ b \frown a \end{array}$$

2 $\nabla \mathrm{AFD} = \dfrac{\mathrm{ab}}{4}$. *erg. L*

---

1 *Fig. 3*: Leibniz bezeichnet in der Figur die Punkte mit kleinen Buchstaben; es wurde an die Schreibweise im Text angeglichen.

$\frac{Rq2,b}{2} \smile 2$ seu $\frac{aRq2,b}{2}$ dividatur per FD quod est $Rq\llcorner 4a^2 + \frac{2b^2}{4}\lrcorner$ fiet producto duplicato $\frac{aRq2,b}{\cancel{2}} \smile Rq\llcorner 4a^2 + \frac{2b^2}{4}\lrcorner \frown \cancel{2}$ seu $\frac{ab}{Rq\llcorner 4a^2 + \frac{2b^2}{4}\lrcorner \smile Rq2}$ seu $\frac{ab}{Rq\llcorner 2a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner} = AE$. seu

$$\frac{2ab}{2Rq\llcorner 2a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner} \overset{a=b}{=} \frac{2a^2}{\cancel{2}Rq\frac{8a^2+a^2}{\cancel{4}}} = \frac{2a^2}{Rq9a^2} = \frac{2a^2}{3a} = Rq\frac{4a^{\cancel{4}2}}{\cancel{9a^2}} = \frac{2a}{Rq9}.$$

Fiat $AB = 3a$. $BC = Rq3,b$. $BF = 6a$. $AD = \frac{Rq3,b}{2}$. $\nabla AFD = 3a \frown \frac{Rq3,b}{2} \smile 2$ seu $\frac{3aRq3,b}{4}$. $FD = Rq\llcorner 9a^2 + \frac{3b^2}{4}\lrcorner$. Ergo $AE = \frac{3aRq3,b}{4} \smile Rq\llcorner 9a^2 + \frac{3b^2}{4}\lrcorner \frown 2$ seu $\frac{3ab}{2Rq\llcorner 3a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner}$.

En ergo progressionem intervallorum verticis a tangentibus parabolae

$$\frac{ab}{2Rq\llcorner a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{2ab}{2Rq\llcorner 2a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{3ab}{2Rq\llcorner 3a^2 + \frac{b^2}{4}\lrcorner}.$$

Cuius progressionis si poterit summa reperiri habebimus rectam curvae parabolicae aequalem, et quadraturam hyperbolae veram.

Q u a e s t i o a n a p o s s i t s u m i $= b$ in puncto scil. unde inchoatur. Hoc posito erit series

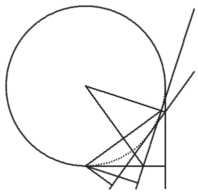
$$\frac{a^2}{\frac{\cancel{2}Rq5a^2}{\cancel{2}}} = \frac{\cancel{Rq}a^{\cancel{4}\cancel{2}}}{Rq5\cancel{a^2}} = \frac{ab}{2Rq\llcorner \frac{4a^2}{4} + \frac{b^2}{4}\lrcorner} \qquad \frac{ab}{2Rq\llcorner \frac{a^2}{2} + \underset{4\frown 4}{\frac{b^2}{16}}\lrcorner}\ \boxed{\frac{2a}{Rq9}} \qquad \frac{ab}{2Rq\llcorner \frac{a^2}{3} + \underset{9\frown 4}{\frac{b^2}{36}}\lrcorner}.\ \boxed{\frac{3a}{Rq13}}$$

Cum ergo a posito $= b$. series intervallorum sit $\frac{a}{Rq5}$ $\frac{2a}{Rq9}$ $\frac{3a}{Rq13}$ etc. Cuius seriei summam addi posse spes est.

1 $\frac{aRq2,b}{2}$ *(1)* quo *(2)* dividatur per ∇AFD. Producto duplicato fiet 2a *(3)* dividatur *L*

7 intervallorum *(1)* puncti dati | seu verticis *erg.* | *(2)* verticis *L*

Fingendae sunt mente figurae in quibus intervalla tangentium a vertice, vel aliquo puncto in curva assumto, habent certam quandam progressionem summabilem, ita enim poterit curvae exhiberi recta aequalis, data figurae quadratura.



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

Possunt ista ad circulum quoque applicari, progressio enim triangulorum ex puncto dato super tangentibus constitutorum implet segmenta continue donec maximum intervallum id est diameter attingatur quo casu summa progressionis est semicirculus. Si talis progressio summari posset haberemus quadraturam circuli, si quaelibet eius pars haberemus sectionem anguli universalem.

[*Teil 2*]

$\frac{2}{1} - \frac{4}{1} + \frac{8}{1} - \frac{16}{1} + \frac{32}{1} - \frac{64}{1}$ etc. potius sic $\frac{1}{1} - \frac{2}{1} + \frac{4}{1} - \frac{8}{1}$ etc. in infinitum hoc totum finitum est. Si liceret subtrahere antecedens adimendum a sequenti addendo ut $4 - 2$ et $16-8$ etc. totum fieret infinitum. Si liceret subtrahere sequens ab antecedente $2-4$, $8-16$ etc. totum foret minus nihilo, toto infinito, nunc fere cum neutrum liceat, aut potius cum non possit determinari utrum liceat, natura medium eligit, et totum aequatur finito.

---

1 *Am oberen Rand, vorher geschrieben*:

2	4	~~2 6~~	~~5 6~~	9 8
1	2	~~8 6~~	~~5 4~~	3 5

2 curva | parabolica *gestr.* | assumto *L* 7 est *(1)* semicirculus *(2)* diameter *L* 8 circuli *erg.* *L* 11 potius ... etc. *erg.* *L* 14 fere *(1)* totum non est *(2)* cum *L*

$a = 1$. $b = 1$. $\frac{c}{b} = 2$. seu $c = 2$. Tota series $= \frac{a}{b+c} = \frac{1}{1+2} = \frac{1}{3}$. Nimirum infinita subtractio divisio est et facit ex re rationem, seu ex ente modum medium inter aliquid et nihil.

Ergo pro $\frac{a}{b+c} = \frac{ac}{b+1}$ summa haec substitui potest: $\frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} + \frac{ac^4}{b^5}$ etc. Ergo $\frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4}$ etc. Divisis omnibus [nominatoribus] per b habebimus

---

4–207,2 *Nebenbetrachtungen*: $\frac{a}{b+c}$. $\frac{a \smile c}{\frac{b}{c}+1}$. $\frac{a \smile c}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{ac^{\cancel{2}}}{\frac{b\cancel{c}}{\cancel{c}}} - \frac{\frac{ac^{\cancel{2}}}{b\cancel{c}}}{\frac{b}{c}+1}$.

$\frac{a}{b} - \frac{a \smile b}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{ac}{b^2} + \frac{\frac{ac}{b^2}}{\frac{b}{c}+1}$. $\frac{\frac{ac}{b^2}}{\frac{b}{c}+1} \fint \frac{ac \smile b^2}{\frac{\cancel{b}}{c}} = \frac{ac}{b^3} \smile \cancel{b^3} - \frac{\frac{ac^2}{b^3}}{\frac{b}{c}+1}$.

4–207,2 *Auf der Rückseite*:

$$\begin{array}{ccccc} \frac{1}{3} & 1 & & 1 & \\ & & \frac{1}{2} & & \frac{2}{3} \\ & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & \\ & & \frac{1}{4} & & \frac{2}{9} \\ & \frac{1}{4} & & \frac{1}{9} & \end{array}$$

5 nominatoribus *erg. Hrsg.*

---

4 $\frac{a}{b+c} = \frac{ac}{b+1}$: Die Gleichung gilt (ebenso wie die Gleichung in Z. 6) nur für den Spezialfall $c = 1$. Leibniz hat sie mit einem Verweisstrich zur zweiten Gleichung von Z. 7 versehen. 6 f. Leibniz rechnet in beiden Gleichungen fortlaufend.

$$\frac{1}{1+\frac{c}{b}} : 1 - \frac{c}{b} + \frac{c^2}{b^2} - \frac{c^3}{b^3} \text{ [etc.] Ergo } 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \left[\frac{1}{8}\right] \text{ etc. aequale } \left[\frac{1}{1+\frac{c}{2}}\right] \text{ si } c = 1.$$

Iam summari possunt fractiones geometricae in infinitum descendentes. Ergo istud $\frac{a}{b+x}$ semper summari potest, seu traduci ad simplicem divisorem sine multiplicatione oppositi aequationis termini. Haec applica ad Mercatoris quadraturam hyperbolae, forte enim perveniri potest ad praecisionem. Eadem methodo tentanda radicum extractio ex binomiis res foret generalissimi usus. Supponitur autem fractiones istas esse integris minores quod si non sunt, tales reddi possunt. In tuo est arbitrio, per quam binomii partem incipere velis. Hac methodo saepe puto aequationes ad planum reduci posse, quae alias solidae habentur aut etiam altiores.

Hinc novae emergent artes algebraicae, nam quae antea fugiebantur divisores binomii et radices ex binomiis nunc expetentur quia iis saepe contrahi poterunt aequationes. Sufficit constare nobis $\frac{a}{b}$ esse minus unitate. Si non sit eo usque deminuemus dum fiat.

Tentandum et in trinomiis ope limitum etc. Iungi possunt diversa nunc haec nunc illa ut ex multinomiis varia binomia formentur, unde novae aequationes inter ipsa.

[*Teil 3*]

$$\begin{matrix} 1 \\ \dfrac{\cancel{3}\cancel{7}\cdots}{\dfrac{6}{\cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}2}} \\ 1 \end{matrix} \qquad \dfrac{16+9}{\dfrac{4+1}{\cancel{1}\cancel{6}8+1}} \qquad \dfrac{16+8}{\dfrac{4+1}{\cancel{1}\cancel{6}8+1}} \qquad 4+1-\frac{1}{8+1} \qquad \frac{8}{8+x} = x$$

---

14 *Rechts*: Haec inventio aequiparari potest Huddenianae *De maximis et minimis*.

1 $\frac{1}{1+\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}}$ *erg. L* 1 etc. *erg. Hrsg.* 1 $\frac{1}{16}$ *L ändert Hrsg.* 1 $\frac{1}{\mathrm{b}+\mathrm{c}}$ *L ändert Hrsg.*

2 possunt *(1)* numeri *(2)* fractiones *L* 9 f. altiores. | Imo nihil refert, an fractio sit minor an maior unitate. *gestr.* | Hinc *L* 11 iis *(1)* aliquae *(2)* saepe *L* 13 ope limitum *erg. L*

---

4 Mercatoris: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV–XVII S. 28–33 [Marg.]. 10 f. Hinc ... aequationes: Ähnlich N. 17₂ S. 219 Z. 8 f. 21 Huddenianae: J. Hudde, *De maximis et minimis*, 1659, *DGS* I, S. 507–516.

$$Rq\ \begin{array}{rr} \cancel{16a^2} + & 6z^2 \\ \hline 4a + & x \\ \hline \cancel{16a^2} & 8a \end{array}$$

$\dfrac{6z^2}{8a+x} = x$. Ergo $6z^2 = 8ax + x^2$. $Rq\ 16a^2 + 6z^2 = 4a + \dfrac{6z^2}{8a+x}$.

$\dfrac{6z^2}{8a+x} = \dfrac{6z^2}{8a} - \dfrac{6z^2x}{64a^2} + \dfrac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. continue multiplicando per $\dfrac{x}{8a}$. Summa horum omnium quae est progressionis geometricae, est aequalis ipsi x. Haec autem summa terminorum progressionis geometricae iniri potest, modo constet nobis $\dfrac{6z^2x}{64a^2}$ esse minus unitate, seu terminum superiorem, esse maiorem inferiore, quod cum hoc loco non sit, superior enim terminus est solidum, inferior superficies, id tamen facile per artem ita obtinebimus ipsum $\dfrac{6z^2}{8a+x} = x$ dividatur per x ergo $\dfrac{6z^2}{8ax+x^2} = \dfrac{x}{x} = 1$. Ergo $\dfrac{z^2}{4ax+x^2} = \dfrac{1}{3}$.

$\dfrac{z^2x^2}{16a^2x^2}$. Quaeritur iam an $16a^2x^2$ maius quam z^2x^2. Si est maius vel minus vel aequale etiam $16a^2$ ad z^2 erit maius vel minus vel aequale. Ergo in hac quaestione eliminato x ex caetera aequatione data facile determinari poterit sitne maius $16a$ quam x quod vel ex quaestione definiri potest vel si quaestio est indeterminata pro lubitu assumetur minueturve, ita habebimus quod volebamus. Iam series summanda haec erit

$\dfrac{z^2}{4ax} - \dfrac{z^2x^2}{16a^2x^2} + \dfrac{z^2x^4}{64a^3x^3} - \dfrac{z^2x^6}{256a^4x^4}$ etc. vel $\dfrac{z^2}{4ax} - \dfrac{z^2}{16a^2} + \dfrac{z^2x}{64a^3} - \dfrac{z^2x^2}{256a^4}$ etc. Termini progressionis geometricae continue decrescentis, in ratione $\dfrac{x^2}{4ax}$ necesse ergo est ipsum x^2 esse minus ipso $4ax$. Sin maius sit invertenda res est, incipietque semper divisio per maius, et fiet ratio $\dfrac{4ax}{x^2}$ ut proinde prior inquisitio de differentia inter $16a$ et z fuerit frustranea. Ergo

12 $16a^2$ *(1)* quam cum *(2)* ad *L* 12 hac *(1)* aequat *(2)* quaestione *L* 19 de *(1)* aequatione *(2)* differentia *L* 19 frustranea. *(1)* Et vero utra vera seu maior sit facile intelligi potest collecta summa *(2)* Redire *(3)* Ergo *L*

---

10 $\dfrac{z^2}{4ax+x^2} = \dfrac{1}{3}$: Richtig wäre $\dfrac{z^2}{4ax+\dfrac{x^2}{2}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler wirkt sich aus bis Z. 19.

redire possum ad primum. $\dfrac{6z^2}{8a+x}$ erit progressio decrescens: $= \dfrac{6z^2}{8a} - \dfrac{6z^2x}{64a^2} + \dfrac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. Differentia inter duos terminos primos est $\dfrac{6z^2}{8a} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \dfrac{6z^2x}{64a^2}$ $\dfrac{384z^2a^2 - 48az^2x}{512a^3}$, vel $\dfrac{24z^2a - 3z^2x}{32a^2}$. Per huius differentiae rationem ad terminum primum, multiplicetur terminus primus. Ratio haec est: $\dfrac{2\cancel{6}\cancel{z^2}}{1\cancel{8}\cancel{a}} \times \dfrac{\cancel{8}\cancel{2}4\cancel{z^2}a - \cancel{3}\cancel{z^2}x}{\cancel{32}\cancel{a^2}2a} = \dfrac{4a}{8a-x}$. Per hanc rationem multiplicetur terminus $\dfrac{3z^2}{\cancel{4}a}$ $\dfrac{\cancel{4}a}{8a-x}$ fiet $\dfrac{3z^2}{8a-x} = x$.

Ergo $\dfrac{6z^2}{8a+x} = \dfrac{3z^2}{8a-x}$. Ergo $\dfrac{2}{8a+x} = \dfrac{1}{8a-x}$. Ergo $8a + x = 2^{[\frown]}8a - 2x$. Ergo $8a = 2^{[\frown]}8a - x$. Ergo $0 = 8a - x$. Ergo $8a = x$. Errorem necesse est inesse calculo. Error in eo est, quod omnia summavi, quasi signum tantum esset $+$.

17_2. SCHEDULA SECUNDA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 210–211. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 640

[*Teil 1*]

Ostendi supra si in parabola, *a* assumas altitudinem ex vertice parabolae ad punctum datum, et applicatam in dato puncto esse altitudini aequalem atque inde progrediaris

---

5 *Über* fiet: er.

6 $\frown$ *erg. Hrsg.* 7 $\frown$ *erg. Hrsg.* 13 parabola, *(1)* si *(2)* A *(3)* a *L*

---

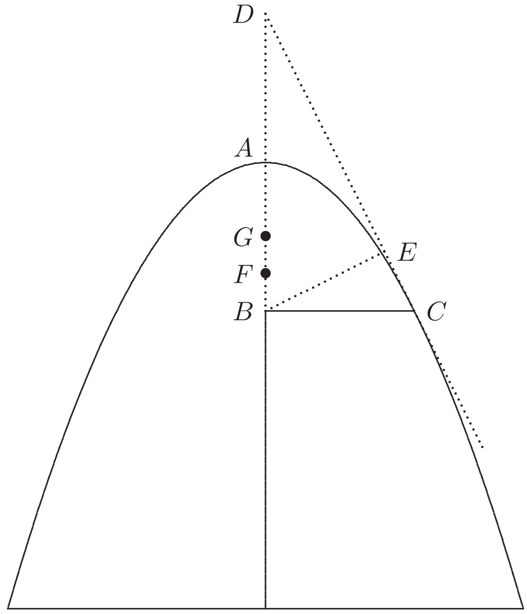
2 Differentia: Für die Berechnung der Summe der alternierenden geometrischen Reihe müßte Leibniz von der Differenz (also der Summe der Beträge) der beiden ersten Terme ausgehen, wie er schließlich erkennt. Die Überlegung wird außerdem durch zwei Rechenfehler beeinträchtigt. Wie Leibniz in N. 17_2 S. 215 Z. 14 ermittelt, ergibt sie richtig durchgeführt die identische Gleichung $\dfrac{6z^2}{8a+x} = \dfrac{6z^2}{8a+x}$.

13 Ostendi supra: s. o. N. 17_1 S. 204 Z. 15.

multiplicando altitudinem, cum applicatarum quadrata sint ut altitudines, progressum intervallorum puncti dati, a tangentibus, applicatas altitudinum multiplicatarum, hunc fore:

$$\begin{matrix} (2) & (4) & (6) \\ \dfrac{a}{Rq\ 5} & \dfrac{2a}{Rq\ 9} & \dfrac{3a}{Rq\ 13}. \end{matrix}$$

Sed quia hoc punctum aequalitatis in ipso vertice assumi non potest ideo hac methodo non completur figura. Quaerenda ergo progressio intervallorum, si altitudo continue diminuatur.



[*Fig. 1*]

Esto altitudo parabolae AB. applicata ei aequalis $BC = a$. $DB = 2a$. eius $\square\ 4a^2$. $\square\ BC = a^2$. Summa quadratorum $5a^2$. Et $Rq\ 5a^2 = DC$. Triangulum $DBC = 2a \frown a \smile$

10 BC = a. *(1)*∇^{lum} *(2)* DB = 2a. *L*   11 5a^2. *(1)* Eius *(2)* Et *L*

9 *Fig. 1*: Leibniz bezeichnet die Punkte in der Figur durch kleine Buchstaben, geht aber im Text zu Großbuchstaben über; es wurde an diese Schreibweise angeglichen.

$2 = a^2$. Dividatur per $Rq\ 5a^2$. Et productum duplicetur fiet $a^2 \smile Rq\ 5a^2 \frown 2 = Rq\ \dfrac{4a^4}{5a^2} = Rq\ \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{2a}{Rq\ 5} = BE$.

Intervallum puncti applicatae in axe sumti a tangente eiusdem applicatae, altitudini aequalis. Iam altitudo $\underline{ab}$. a parte B. diminui intelligatur continue per partes aequales FB. GF. etc. Videamus an aliqua ratio progressionis intervallorum quibus puncta F. G. etc. absunt a tangentibus, inveniri queat; ne autem multiplicare lineas necesse sit, semper punctum B. (et caetera ab eo dependentia per consequens,[)] pro punctis F. G. etc. nominabimus, calculo tantum mutato. Esto ergo $AB = a - b$. $DB = 2a - 2b$. Cumque AB. antea fuerit a. erit ratio altitudinum $\dfrac{a-b}{a}$. Ergo applicatae praecedentis quadratum per hanc rationem multiplicetur, producti radix erit applicata praesentiarum $\dfrac{a^2}{1}\ \dfrac{\text{—}}{\text{—}}\ \dfrac{a-b}{a} = \dfrac{a^3 - a^2b}{a} = a^2 - ab$. Erit ergo applicata BC. nunc $Rq\ a^2 - ab$. Eius $\Box$ addatur $\Box\ DB$. fiet $4a^2 + 4b^2 - 8ab + a^2\ [-ab] = 5a^2 + 4b^2 - 9ab$. eius $Rq = DC$.

$$\nabla BDC = \frac{Rq\ \ 4a^4 - [4ab^3] - 12a^3b + 12a^2b^2,}{2} \text{ vel}$$

$$\frac{2a - 2b, \frown Rq\ a^2 - ab}{2} = a - b, \frown Rq\ a^2 - ab.$$

Dividatur hoc triangulum per $Rq\ 5a^2 + [4b^2] - 9ab$, et productum duplicetur, productum erit intervallum. Sed cum res hoc modo sit implicatissima futura loco subtractionis,

---

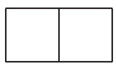
13 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{rrrrrrr}
 & & 4a^2 & + & 4b^2 & - & 8ab \\
 & & & & a^2 & - & ab \\
\hline
 & - & 4a^3b & - & 4ab^3 & + & 8a^2b^2 \\
 & - & 8a^3b & + & 4a^4 & + & 4a^2b^2 \\
\hline
4a^4 & - & 4ab^3 & - & 12a^3b & + & 12a^2b^2
\end{array}$$

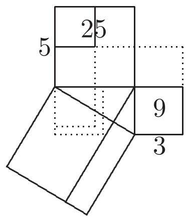
3 applicatae *erg. L* 4 altitudo *(1)* A *(2)* ab. *L* 5 progressionis *(1)* tangentiu *(2)* intervallorum *(a)* a *(b)* quibus *L* 6 multiplicare *(1)* fig *(2)* lineas *L* 9 Ergo *(1)* ratio applicatarum $\dfrac{\quad}{\text{Rq } a^2}$ *(2)* applicatae *L* 12 +ab *L ändert Hrsg.* 13 $12ab^3$ *L ändert Hrsg.* 15 4b *L ändert Hrsg.*

tentandum uti ratione. Esto AF. $\frac{a}{\alpha}$ erit intervallum $\frac{2a}{\alpha Rq\ 5}$. Esto AG. $\frac{a}{\beta}$ erit intervallum $\frac{2a}{\beta Rq\ 5}$. Sed istae rationes α. β. etc. ita decrescent, ut earum tam numeratores, quam nominatores continue minuantur unitate ut si α sit $\frac{3}{4}$ seu si AF. contineat tres quartas de AB. necesse est AG. continere $\frac{2}{3}$tias seu β esse $= \frac{2}{3}$. Et ita porro, idem est, si partes BF. FG. omni linea assignabili minores numeroque infinitae intelligantur. Imo: error inest. Etsi $AF = \frac{a}{\alpha}$ non ideo intervallum ipsius F. a tangente $= \frac{2a}{\alpha Rq\ 5}$. Ergo schedula alia calculum istum corrigemus.

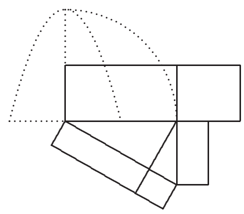
[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

$a^2 - b^2$

$$2a - b, \frown b \ + \ a{-}b \frown a{-}b$$
$$\cancel{2ab} - \cancel{b^2} \quad + \ a^2 + \cancel{b^2} - \cancel{2ab}$$

$$a \smile b, \frown a \quad \frac{a^2}{b}$$

6 f. schedula *(1)* seq *(2)* alia *L*

6 f. schedula alia: s. u. N. 17$_3$ Teil 1.

$$\begin{array}{rrl} & 9 & 3 \\ & 16 & 4 \\ 5) & \overline{25} & \overline{7} \\ \underline{4} & 16 & \\ 1 & 9 & (3 \\ & 9 & 3 \\ & \underline{4} & \underline{2} \\ & 5 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rr} 25 & 5 \\ 9 & 3 \\ \overline{\underline{16}} & \overline{8} \\ 2 & \end{array} \qquad \frac{16}{5-3} = Rq\ 25 + Rq\ 9 \qquad \begin{array}{rr} 25 & \\ 9 & \\ \overline{34} & 34 \\ \underline{16} & \underline{16} \\ 50 & 18 \end{array} \qquad \begin{array}{c} 25 \frown 1. \\ \\ 9 \frown 1. \\ \\ \dfrac{25 \frown 1}{1} + \dfrac{9 \frown 1}{1} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1 \\ \overline{26} \\ \\ 13 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ 13 \\ \overline{12} \\ 12 \\ \overline{144} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 169 \\ 144 \\ \overline{25} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ 25 \\ \overline{125} \\ 50 \\ \overline{625} \\ 81 \\ \overline{686} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 25 \\ 9 \\ \underline{\overline{225}} \\ 2 \\ \\ 225 \\ \overline{Rq\ 686} \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{r} 25 - \dfrac{225}{Rq\ 686} \\ \\ 9 - \dfrac{225}{Rq\ 686} \end{array}\right\} = Rq\ 686$$

9–15 *Nebenbetrachtung, gestrichen*:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 1 \\ \overline{26} \end{array} \qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \overline{39} \\ 13 \\ \overline{169} \\ 1 \\ \overline{168} \end{array}$$

17 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{l} 2 \\ \cancel{6}86 \\ \overline{2} \\ \overline{\cancel{4}4} \end{array}$$

15–18 686: Richtig wäre 706. Der falsche Wert geht in die abschließende Rechnung nach der Formel $\sqrt{a^2+b^2} = \left(a - \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)\left(b - \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$ ein, die hier und i. a. auch näherungsweise nicht gilt.

[*Teil 3*]

Propositum esto extrahere radicem ex binomio ut *Rq* $16a^2{+}6z^2 = 4a + x$. Sed $x = \dfrac{6z^2}{8a+x}$ seu $6z^2 = 8ax + x^2$. Sed illud inquirendum esset an ipsi x. aequale possit inveniri, hoc enim facto perfecta solutio est. Dividamus ergo $\dfrac{6z^2}{8a+x}$ quod ita fiet:

$$\frac{6z^2}{8a+x} \fint \frac{6z^2}{8a} - \frac{6z^2x}{64a^2} + \frac{6z^2x^2}{512a^3} - \frac{6z^2x^3}{4096a^4} \text{ etc. continue multiplicando per } \frac{x}{8a}.$$

Suppono autem x esse minus quam [$8a$] (alioqui invertenda forent omnia) ita enim progressio est continue decrescens et proinde summabilis. Tota autem series aequalis ipsi x. quae ut summetur primum ei termini colligendi sunt qui $+$ praefixum habent, deinde qui $-$ et summa horum a summa illorum detrahenda. Sed exemplo in numeris rem declaremus[:]

Pro $\dfrac{6z^2}{8a}$ termino esto 1. pro $\dfrac{x}{8a}$ ratione esto $\dfrac{1}{2}$. erit series haec $+1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{16} - \dfrac{1}{32}$ etc. ergo summanda primum $1.\dfrac{1}{4}.\dfrac{1}{16}$. etc. deinde $\dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{8}.\dfrac{1}{32}$. etc. et haec summa ab illa subtrahenda. Porro uti integra series est [geometrica], ita et duae series excerptae alternantes. Ratio nimirum harum serierum excerptarum, est quadratum rationis seriei integrae. Quoniam nimirum alternus quisque terminus omittitur, si secundus tertiusque quisque omitterentur ratio excerptae seriei, foret cubus integrae etc. Cum autem ut dixi series istae sint geometricae descendentes earum invenire summam facile est.

Summa autem ita initur, si multiplicetur terminus primus in rationem suam ad differentiam a sequente. At ergo summentur $\dfrac{6z^2}{8a}$ $\dfrac{6z^2x^2}{512a^3}$ etc. differentia investiganda est, ea est: $\dfrac{3072a^{\cancel{3}2}z^2 - 48\cancel{a}z^2x^2}{4096a^{\cancel{4}3}} = \dfrac{192a^2z^2 - 3z^2x^2}{256a^3}$. Haec differentia dividat terminum

3 $+\mathrm{x}^2$ *(1)* quae aequatio si non plana est at per solida facilis est solutu, ac proinde possumus exhibere ipsum x seu radicem de Rq $16\mathrm{a}^2{+}6\mathrm{z}^2$. *(2)* . Sed *L* 6 quam | 8a *gestr., erg. Hrsg.* | *(1)* ita enim *(2)* (alioqui *L* 10 termino *erg. L* 11 etc. *(1)* Iungendo *(2)* ergo *L* 12 uti *(1)* summa *(2)* integra *L* 12 geometricas *L ändert Hrsg.* 13 rationis *erg. L* 14 nimirum *(1)* terminus secundus omittitur, *(2)* alternus *L* 14 si *(1)* tertius *(2)* secundus *L* 16 earum *(1)* rationem *(2)* invenire *L*

1 Teil 3 setzt N. 17_1 Teil 3 fort.

primum $\frac{6z^2}{8a}$ fiet $\dfrac{\overset{2}{(6)\cancel{z^2}}}{\underset{1}{\cancel{8}\cancel{a}}} \times \dfrac{\overset{64}{(192)a^2\cancel{z^2} - (3)\cancel{z^2}x^2}}{\underset{32a^2}{\cancel{256a^3}}} = \dfrac{64a^2}{64a^2-[x^2]}$ per hoc productum multiplicetur terminus primus, fiet $\dfrac{64a^2}{64a^2-[x^2]} \frown \dfrac{6z^2}{8a} = \dfrac{384a^2z^2}{512a^3-8a[x^2]}$ seu $\dfrac{48az^2}{64a^2-x^2}$ summa.

Nunc et summa detrahendorum $\dfrac{6z^2x}{64a^2}$ $\dfrac{6z^2x^3}{4096a^4}$ etc. investigetur, differentia horum duorum primorum terminorum est:

$$\frac{\overset{384a^2}{\cancel{24576a^4}}z^2x - \overset{6}{\cancel{384a^2}}z^2x^3}{\cancel{64} \frown 4096a^{\cancel{6}4}} = \frac{384a^2z^2x-6z^2x^3}{4096a^4}$$ quae dividat $\square^{\text{tum}}$ termini primi fiet:

$$\frac{\overset{6}{\cancel{36}}z^{\cancel{4}2}x^{\cancel{2}}}{\cancel{4096a^4}} \times \frac{\overset{64}{\cancel{384}}a^2\cancel{z^2}\cancel{x} - \cancel{6}\cancel{z^2}x^{\cancel{3}2}}{\cancel{4096a^4}} = \frac{6z^2x}{64a^2-x^2}$$ quae summa si subtrahatur a priore, fiet $\dfrac{48az^2-6z^2x}{64a^2-x^2} = x$ seu $\dfrac{\cancel{6}z^2}{8a+x} = \dfrac{\overset{8}{\cancel{48}}az^2-\cancel{6}z^2x}{64a^2-x^2}$. Ergo $\dfrac{64a^2-x^2}{8a+x} = \dfrac{8a\cancel{z^2}-\cancel{z^2}x}{\cancel{z^2}\ 1}$. Iam $8a+x \frown 8a-x$ faciunt $64a^2-x^2$. Ergo aequatio orietur inutilis $64a^2-x^2 = 64a^2-x^2$. Signum est hoc, operationem fuisse praeclaram et rectam, sed aliis auxiliis opus esse ut aequatio utilis oriatur. Ergo sic rectius: ex aequatione ista $6z^2 = 8ax+x^2$ ita extrahemus radicem: $16a^2+6z^2 = 16a^2+x^2+8ax$ ergo $Rq\ 16a^2+6z^2 = 4a+x$. Sed ita res rursus redit in orbem, et ad priora. Cum sit $\dfrac{6z^2}{8a+x}$ et $\dfrac{6z^2}{8a}$ debeat multiplicari per $\dfrac{x}{8a}$ continue, ut fiat = alicui. Illud ipsum continue per $\dfrac{x}{8a}$ divisum erit = ipsi $\dfrac{6z^2}{8a}$.

2–4 x *L ändert Hrsg. dreimal*   18 f. Cum sit … ipsi $\frac{6z^2}{8a}$. *erg. L*

1–3 Leibniz führt die Reduktion in vier Schritten durch: 1. Kürzung durch 3 (Klammerung); 2. Kürzung durch a (1 Strich); 3. Kürzung durch 8 (2 Striche); 4. Kürzung durch z^2 (3 Striche). Die beiden letzten Stufen werden durch einfache Streichung wiedergegeben.

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4} \text{ etc. Ergo } \frac{1}{b+c} = \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4}.$$

$$\frac{1}{b} + \frac{c^2}{b^3} \text{ etc. } \frac{b^3 - c^2b}{b^4} \qquad \frac{b^2-c^2}{b^3} \text{ hoc dividatur } \frac{1}{b^2} \text{ fiet } \frac{1}{\underset{1}{\cancel{b^2}}} \times \frac{b^2-c^2}{b^{\cancel{3}}} = \frac{b}{b^2-c^2}.$$

Similiter $\frac{c}{b^2} \overset{-}{\underset{-}{\times}} \frac{c^3}{b^4} = \frac{b^{\cancel{4}2}c - c^3\cancel{b^2}}{b^{\cancel{6}4}}$ dividat $\frac{c^2}{b^4}$ fiet $\frac{\overset{c}{\cancel{c^2}}}{\cancel{b^4}} \times \frac{b^2\cancel{c} - c^{\cancel{3}2}}{\cancel{b^4}} = \frac{c}{b^2-c^2}$.

Ergo $\frac{1}{b+c} = \frac{b}{b^2-c^2} - \frac{c}{b^2-c^2}$ supposito b esse maius quam c. Sed ut fiat minus possemus ita dicere: $\frac{1}{\frac{b}{4}+c+\frac{3b}{4}}$ fieret $\frac{c+\frac{3b}{4}-\frac{b}{4}}{c^2+\frac{9b^2}{16}+\frac{6bc}{4}-\frac{b^2}{16}} = \frac{c+\frac{b}{2}}{c^2+\frac{\cancel{8}b^2}{\underset{2}{\cancel{16}}}+\frac{6bc}{4}} = \frac{1}{b+c}$.

Hinc apparet omnem istum calculum etsi verissimum, esse inutilem. Nec unquam hac ratione divisori binomio aequalem uninomium reperiri, nisi scilicet vel differentia vel summa (quibus casibus binomia esse cessant) vel ratio nominum nota sit. Si ratio nominum nota sit, vicimus.

215,19–216,1 ipsi $\frac{6z^2}{8a}$. *(1)* $\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} \times \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2}$ seu $\frac{a}{b} \times \frac{ab^2-acb}{b^3} = \frac{ab^3}{ab^3-acb^2} = \frac{b}{b-c}$. Ergo $\frac{a}{b+c} = \frac{b}{b-c}$. Ergo $ab - ac = b^2 + bc$. Ergo $\frac{18}{4+2} = \frac{4}{\ }$ *(2)* $\frac{a}{b+c}$ *L* 1 $- \frac{ac^3}{b^4}$ etc. *(1)* Ergo *(a)* $1+$ *(b)* $\frac{1-c+c^2-c^3 \text{ etc.}}{1} = \frac{b-b^2+b^3-b^4}{b+c}$. Ergo $\frac{b+c}{1} = \frac{b-b^2+b^3-b^4 \text{ etc.}}{1-c+c^2-c^3}$. *(2)* Ergo $\frac{1}{b+c}$ *L* 4 quam c. *(1)* Ergo $\frac{1}{b^2-c^2} =$ *(2)* Sed *L* 10–217,1 vicimus *(1)* v. g. ponamus fractionem $\frac{1}{b+c}$ *(a)* $= \frac{b-c}{b^2-c^2}$ *(b)* Esto ratio nobis nota $\alpha = \frac{c}{b}$. Erit $b + c = b + ab$. $1b + \alpha b$. $b \frown 1 + \alpha$ *(aa)* et $b^2 - c^2 = 1b^2 - \alpha^2 b^2 = b^2 \frown 1 - \alpha^2$ *(bb)* $\frac{1}{b+c} = \frac{1+\alpha}{b} = \frac{1+\frac{c}{b}}{b}$. Ergo cum supra fuerit $x = \frac{6z^2}{8a+x}$ erit $= \frac{6z^2}{\frac{8a}{1}+\frac{8a}{\alpha}} = \frac{6z^2 \frown 1+\alpha}{8a} = \frac{6z^2+6z^2\alpha}{8}$. | $\frac{8a}{\alpha} = x$. Ergo $x\alpha = 8a$. Ergo $\alpha = \frac{8a}{x}$ *am Rande, streicht Hrsg.*| Iam $\alpha = \frac{8a}{x}$ *erg.*| Ergo $x = \frac{6z^2+\frac{6z^2 8a}{x}}{8a}$. Ergo

$$\frac{a}{b[+x]} = \frac{a}{\frac{b}{1}+\frac{bx}{b}} = \frac{a \smile 1+\frac{x}{b}}{b} \qquad \frac{a}{b} \times . \frac{1+\frac{x}{b}}{1} \qquad \frac{a}{b+x}$$

$$\frac{1}{1} \qquad \qquad \frac{a\alpha}{\alpha}$$

$$\frac{2}{3} \qquad \qquad \frac{a\alpha-a}{\alpha}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \qquad \frac{a}{\alpha}$$

$$\frac{1}{9} \qquad \qquad \frac{a}{\alpha^2}$$

$$\frac{1}{27}$$

$x = \frac{6z^2}{8a} + \frac{6z^2}{x}$. Ergo $x - \frac{6z^2}{x} = \frac{6z^2}{8a}$. Ergo $\frac{x}{6z^2} - \frac{1}{x} = \frac{1}{8a}$. Ergo $\frac{x^2-6z^2}{6z^2x} = \frac{1}{8a}$. Ergo $x^2 - 6z^2 = \frac{6z^2x}{8a}$. Ergo $x^2 - 6z^2 - \frac{6z^2x}{8a} = 0$. Ergo $x^2 - \frac{6z^2x}{8a} = 6z^2$. *(aaa)* Ergo $x^2 = \frac{6z^2}{1-\frac{6z^2}{8a}}$ *(bbb)* Ergo $\frac{x^2}{1} - \frac{x}{8a} = \frac{6z^2}{1-6z^2}$. $\frac{x^2 8a - x}{8a} = \frac{6z^2 8a}{1-6z^2}$ *(ccc)* $x^2 - \frac{6z^2x}{8a} = \frac{6z^2}{1}$. Ergo $\frac{x^2}{6z^2} - \frac{x}{8a} = 1$. Ergo $\frac{x^2 8a - x6z^2}{6z^2 8a} = \frac{1}{1}$. Ergo $6z^2 8a = x^2 8a - x6z^2$. $6z^2 = x^2 - \frac{x6z^2}{8a}$. Ergo $6z^2 + \frac{9z^4}{64a^2} = x^2 - \frac{x6z^2}{8a} + \frac{9z^4}{64a^2}$. Ergo $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a^2} = x - \frac{3z^2}{8a}$. Ergo $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a} = x$ *(aaaa)* vel $0 - x$. *(bbbb)* posito x esse maius quam $\frac{3z^2}{8a}$. Sin $\frac{3z^2}{8a}$ sit maius quam x. fiet $Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a}, -\frac{3z^2}{8a} = x$. Ergo $Rq\ 16a^2 + 6z^2$. est $4a + Rq\ 6z^2 + \frac{9z^4}{64a} + \frac{3z^2}{8a}, -\frac{3z^2}{8a}$. Habemus ergo methodum faciendi ex divisore binomio uninomium v. g. ex $\frac{a}{b+x}$ fiet $\frac{a \frown \frac{c}{x}}{b}$ *(aaaaa)* $\frac{acx}{b}$ *(bbbbb)* Nihil est *(2)* . | $\frac{a}{b}$ *ändert Hrsg.* | $= \frac{a}{\frac{b}{1}+\frac{bx}{b}}$ *L* 1 f. $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+x}}$ | si ratio nominum nota $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{b}}$ *gestr.* | $\frac{1}{1}$ *L*

$$\frac{a^2\alpha}{a\alpha - a} = \frac{a\alpha}{\alpha - 1} = \frac{\alpha}{1 - \dfrac{1}{\alpha}} \qquad \frac{\alpha}{\dfrac{\alpha - 1}{\alpha}} \qquad \frac{\alpha^2}{\alpha - 1}.$$

$$\frac{\alpha^2}{\alpha - 1} \fint (\alpha) + \frac{\alpha}{\alpha - 1}(1) + \frac{1}{\alpha - 1}\left(\frac{1}{\alpha}\right) + \frac{\dfrac{1}{\alpha}}{\alpha - 1} \qquad \frac{1}{\alpha^2 - \alpha}.\ \alpha + 1 + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\alpha^2}$$ etc. Ex hoc calculo nullus alius usus ducitur, quam quod apparet nova methodus demonstrandi modum quo summantur series decrescentes proportionis geometricae, perpetua scilicet divisione per aliquam apotomam $a = \alpha^2 - \alpha$.

Quotiens ex cubo per differentiam quadrati et radicis diviso aequatur quadrato diviso per differentiam radicis et unitatis.

$$\frac{9}{3-1} \qquad \frac{9}{2}\Big|\,4\frac{1}{2} \qquad \frac{36}{6-1} \qquad \frac{36}{5} \fint 7\frac{1}{5}. \qquad \frac{49}{7-1} \qquad \frac{49}{6} \fint 8\frac{1}{6} \qquad \frac{49}{7-1} = 7 + 1 + \frac{1}{7-1}.$$

Ergo $\dfrac{\alpha^2}{\alpha - 1} = \alpha + 1 + \dfrac{1}{\alpha - 1}$ contra $\dfrac{\alpha^2}{\alpha + 1} \qquad \dfrac{49}{7+1} \fint \dfrac{49}{8} \fint 6\,\dfrac{1}{8} = \alpha - 1 + \dfrac{1}{7+1}.$

$\dfrac{1}{\alpha - 1}$ aequatur summae reliquae seriei abscisso $\alpha + 1$. differentia $\dfrac{1}{\alpha^2} \times \dfrac{\alpha^2 - \alpha}{\alpha^3}$ $\dfrac{\alpha^3}{\alpha^4 - \alpha^3} \qquad \dfrac{1}{\alpha - 1}.$

217,2–6 *Nebenbetrachtung*:

$$a \qquad \frac{ca}{c} - \frac{ab}{c} \qquad \frac{a^2c}{ca - ab} \qquad \frac{ac}{c\cancel{a} - b} \qquad \frac{ab}{c}$$

8 *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{1}{7}\ \dfrac{7}{7}\left(\dfrac{8}{7}\right) \quad \dfrac{6}{7} \quad \dfrac{7-1}{7}\diagdown\dfrac{1}{7} \quad \dfrac{49-7}{7} \fint 7 - 1$

5 a $= \alpha^2 - \alpha$. *(1)* Quadratum ra *(2)* Quotiens *L*

---

1 $\dfrac{\alpha}{1 - \dfrac{1}{\alpha}}$: Richtig wäre $\dfrac{a}{1 - \dfrac{1}{\alpha}}$; Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

Habemus ergo hoc saltem utilitatis ex isto calculo, quod scilicet methodo tali possumus ex radicibus aut fractionibus divisorum binomiorum, quotlibet eruere terminos absolutos, et per eos, si res ita fert destruere alios terminos aequationis. Usum ergo habet haec analysis, quoties in reliqua aequatione sunt aliquot termini tales, quales ex perpetua divisione sunt orituri. Ita enim nonnunquam aequationem reducemus, alioquin irreducibilem ut si $\frac{a}{b-x} = \frac{a}{b} + \frac{ax^2}{b^3} - \frac{x}{a}$. Certum est hac methodo $\frac{a}{b} + \frac{ax^2}{b^3}$ facile destrui posse.

Ergo his casibus saepe quaerere eiusmodi divisores binomios, utile erit, quos alias fugimus.

17_3. SCHEDULA TERTIA

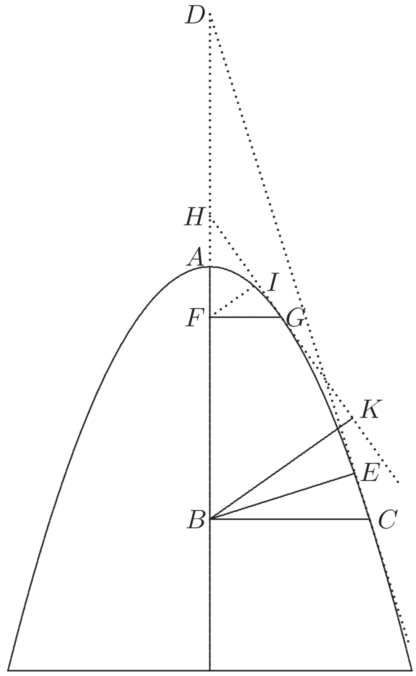
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 123–124. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 630

[*Teil 1*]

Operae pretium videtur, quae de intervallis tangentium curvae parabolicae a puncto altitudinis applicataeque aequalium a communi, ratiocinari coepimus, absolvere, nam si ad progressionem quandam summabilem revocari posset eorum series, curvae parabolicae rectam aequalem geometrice descriptam, ac proinde geometricam, non ut hactenus, mechanicam tantum hyperbolae quadraturam haberemus.

3 absolutos, *(1)* eo *(2)* et *(a)* contra *(b)* per *L* 5 nonnunquam *(1)* ad aequationem perveniemus, irr *(2)* aequationem *L* 7 f. posse. *(1)* Quo facto aequatio ita *(2)* Quodsi dimensiones non differant unitate, inflexione quadam id facile obtineri posse puto, *(3)* Ergo *L* 14 tangentium *(1)* parabolae *(2)* curvae semiparabolicae *(3)* curvae *L* 14 f. puncto *(1)* in eius applica *(2)* axi a *(3)* altitudinis *L* 18 tantum *(1)* parabolae *(2)* hyperbolae *L*

8 f. Ergo ... fugimus: Ähnlich N. 17_1 S. 207 Z. 10 f. 15 coepimus: s. o. N. 17_1 Teil 1 u. N. 17_2 Teil 1.



[*Fig. 1*]

Esto altitudo parabolae AB. aequalis applicatae $BC = a$. $DB = 2a$. Eius $\square$ $4a^2$. $\square$ $BC = a^2$. Summa quadratorum $5a^2$. Et $Rq\ 5a^2 = DC$. Triangulum $DBC = 2a \frown a \smile 2 = a^2$. dividatur per $Rq\ 5a^2$, et productum duplicetur fiet $a^2 \smile Rq\ 5a^2 \frown 2 = Rq\ \dfrac{4a^4}{5a^2} = Rq\ \dfrac{4a^2}{5} = \dfrac{2a}{Rq\ 5} = BE$. [intervallo] tangentis DC. a puncto B.

Assumatur nunc alia altitudo minor quam AB. nempe AF. cuius ratio ad AB. sit quaecunque $\left(\dfrac{1}{\alpha}\right)$ erit $AF = \left(\dfrac{a}{\alpha}\right)$. Cumque in parabola quadrata applicatarum sint ut

5 intervalli *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 1*: Die Figur gibt die Zeichnung von Leibniz möglichst getreu wieder, in der nicht wie im Text $AB = BC$ gilt.

altitudines, et applicata prior BC. fuerit a. erit eius quadratum a^2. multiplicetur per $\dfrac{1}{\alpha}$ fiet $\dfrac{a^2}{\alpha}$ et $Rq\ \dfrac{a^2}{\alpha} = \left(\dfrac{a}{Rq\ \alpha}\right)$ erit applicata FG. Eius $\square = \dfrac{a^2}{\alpha}$ addatur $\square HF = \dfrac{4a^2}{\alpha^2}$ fiet $\dfrac{a^2}{\alpha} + \dfrac{4a^2}{\alpha^2} = \dfrac{\alpha^2 a^2 + 4\alpha a^2}{\alpha^3} = \dfrac{a^2\alpha + 4a^2}{\alpha^2}$ cuius Rq erit: $\left(\dfrac{Rq\ a^2\alpha{+}4a^2}{\alpha}\right) = HG$. Triangulum DHG erit $\dfrac{2a}{\alpha} \frown \dfrac{a}{Rq\ \alpha} \smile 2 = \left(\dfrac{a^2}{Rq\ \alpha^3}\right)$ dividatur per HG. productumque duplicetur, fiet: $\dfrac{\overset{//}{\cancel{a^2}}\, Rq\ a\cancel{4}^2}{\cancel{Rq\ \alpha^3}\, Rq\ \alpha} \quad \dfrac{Rq\ \llcorner\cancel{a^2}\alpha + 4\cancel{a^2}}{\cancel{\alpha}} \frown 2 = \dfrac{2a}{Rq\ \alpha^2{+}4\alpha} = FI$. Cumque sit ut HF. ad HB. ita FI. ad BK. ita stabit regula proportionum $HF = \dfrac{2a}{\alpha}$ dat $HB = \left(a + \dfrac{a}{\alpha}\right)$ quid dabit FI.

$$\dfrac{\overset{1}{\cancel{2a}}}{\cancel{\alpha}} \text{ —— } \dfrac{\alpha a + a}{\cancel{\alpha}} \text{ —— } \dfrac{\overset{1}{\cancel{2a}}}{Rq\ \cancel{\alpha^2}{+}4\cancel{\alpha}} = \left(\dfrac{\alpha a + a}{Rq\ \alpha^2{+}4\alpha}\right) = BK.$$

$$Rq\ \cancel{\alpha^2}\alpha \qquad\qquad Rq\ \alpha{+}4$$

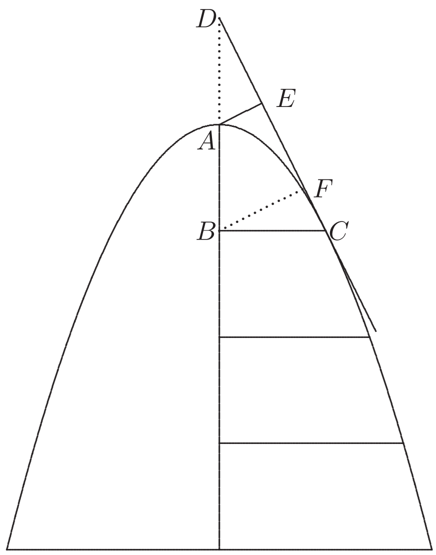
$$Rq\ \dfrac{1}{\alpha}$$

Ergo si ratio altitudinum sit $\dfrac{1}{\alpha}$, ratio intervallorum erit: $\dfrac{2\cancel{a}}{\underset{1}{Rq\ 5}} \times \dfrac{\alpha\cancel{a} + \overset{1}{\cancel{a}}}{Rq\ \dfrac{\alpha^2 + 4\alpha}{5}} = \dfrac{2Rq\ \llcorner\alpha^2 + 4\alpha\lrcorner}{\cancel{\alpha}Rq\ 5\alpha^2 + Rq\ 5}$.

8–11 *Nebenrechnungen*: $\dfrac{\dfrac{a}{\alpha}}{a} = \dfrac{a}{a\alpha} = \dfrac{1}{\alpha} \qquad \dfrac{1}{1} \times \dfrac{1}{Rq\ \alpha} \qquad \dfrac{Rq\ \alpha}{1}$

3 fiet *(1)* Rq $\dfrac{5a^2}{\alpha}$ *(2)* $\dfrac{a^2}{\alpha}$ *L*

Si iam ponatur altitudo continue decrescere uniformiter, erit $a =$ infinito x. reliqua infinit.-1 x. infinit.-2 x. infin.-3 x. etc. et si partes sint finitae poterit esse $a = 10x$. reliqua $9x$. $8x$. $7x$. etc. Ergo rationes ita ibunt: $\dfrac{\frac{9}{10}}{\frac{10}{10}}$ $\dfrac{\frac{9}{10}}{1} = \dfrac{1}{\alpha}$ ergo $\dfrac{10}{9} = \alpha$. Erit ergo α. modo $\dfrac{10}{9}$ $\dfrac{10}{8}$ $\dfrac{10}{7}$ $\dfrac{10}{6}$ etc.



[*Fig. 2*]

---

4 *Dazu, gestrichen*: Nota summa talis seriei ita inibitur $1+\dfrac{1}{9}+1+\dfrac{2}{8}+1+\dfrac{3}{7}+1+\dfrac{4}{6}$ etc.

4 *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{\frac{10a}{9}+a}{Rq\ \frac{100}{81}+\frac{40}{36}}$ $\quad \dfrac{\frac{10a}{8}+a}{Rq\ \frac{100}{40}+\frac{40}{32}}$

Inquirere distantias verticis, a tangentibus parabolae.

Esto vertex A. altitudo AB. applicata BC. tangens CD. intervallum tangentis a vertice, AE. Calculum ita inibimus AB. esto $a = AD$. BC. esto b. $BD = 2a$. $\square$ de $BC = b^2$. $\square$ de $BD = 4a^2$. et $CD = Rq\ 4a^2 + b^2$.

$\nabla^{\text{lum}}\ DBC = \dfrac{2ab}{2}$ dividatur per hypotenusam DC. et productum duplicetur, habebimus BF. $\dfrac{2ab}{\cancel{2}} \smile Rq, 4a^2 + b^2 \frown \cancel{2}$ quo rursus dimidiato habebimus $\dfrac{2ab}{2} \smile Rq, 4a^2 + b^2$ intervallum tangentis DC. a vertice A. vel $Rq\ \dfrac{\cancel{4}a^2b^2}{\cancel{4} \frown \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner}$.

Esto AB. $2a$. BC. $Rq2\ b$. BD. $4a$. $\square$ de BC. $2b^2$. $\square$ de BD. $16a^2$. et $CD = Rq, 2b^2 + 16a^2$.

$\nabla^{\text{lum}}\ [DBC] = \dfrac{2 \frown 2aRq2\,b}{2}$ dividatur per DC. productumque duplicetur, et rursus dimidietur id est relinquatur, fiet: $\dfrac{2 \frown \cancel{2} \frown 2aRq2\,b}{\cancel{2}} \smile Rq, 2b^2 + 16a^2 \frown \cancel{2}$ seu $Rq \dfrac{\overset{(8a^2b^2)}{4a^2 2b^2}}{16a^2 + 2b^2}$ $= AE$. intervallo.

Et si AB. ponatur $3a$. erit intervallum tangentis a vertice: $Rq\ \dfrac{9a^2 3b^2}{36a^2 + 3b^2}\ (27a^2b^2)$.

Et si AB. $4a$. $Rq\ \dfrac{16a^2 4b^2}{64a^2 + 4b^2}\ (64a^2b^2)$

vel sic: $Rq\ \dfrac{\cancel{Rq}\ 4a^2}{\cancel{Rq}\ \dfrac{16a^2}{2b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{9a^2}{\dfrac{36a^2}{3b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{16a^2}{\dfrac{64a^2}{4b^2} + 1}$

vel sic: $Rq\ \dfrac{4a^2}{\dfrac{8a^2}{b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{9a^2}{\dfrac{12a^2}{b^2} + 1}$ $\quad Rq\ \dfrac{16a^2}{\dfrac{16a^2}{b^2} + 1}$

$$\frac{2a}{Rq\ \dfrac{8a^2}{b^2} + 1} \qquad \frac{3a}{Rq\ \dfrac{12a^2}{b^2} + 1} \qquad \frac{4a}{Rq\ \dfrac{16a^2}{b^2} + 1}.$$

222,4+223,1 etc. *(1)* Si in vertice parabol *(2)* Inquirere *L* 6 rursus *(1)* duplicato, habebimus *(2)* dimidiato *L* 10 DB *L ändert Hrsg.* 10 duplicetur, *(1)* fiet *(2)* |fiet *streicht Hrsg.*| *(3)* et *L*

Illud tantum quaestio nunc est, an ratio ipsius a. ad b. seu applicatae ad altitudinem, investigari possit, sumta scilicet altitudine minima, seu quavis assignabili minore. Pendere videtur aestimatio illa a quantitate eius altitudinis, in qua applicata fit altitudini aequalis. Esto enim altitudinis istius b. ad minimam a. ratio α. erit altitudo illa αa. eique aequalis applicata. Iam applicatarum quadrata sunt ut altitudines, ergo cum altitudinum ratio sit α. erit et quadratorum applicatarum. Quadratum applicatae altitudini aequalis est $\alpha^2 a^2$. quod si dividatur per α habebitur αa^2. cuius Rq nempe $Rq\ \alpha, \frown a$. erit applicata altitudinis a.

Unde intelligi potest res mirabilis, applicatam altitudinis qualibet assignabili minoris esse mediam proportionalem inter altitudinem qualibet dabili minorem et eam, quae applicatae suae aequalis est seu quadratum applicatae minimae esse aequale rectangulo altitudinis applicatae suae aequalis cum altitudine minima. Hinc data altitudine applicatae suae aequali, c. erit $a = \dfrac{c}{\alpha}$ et $b = \dfrac{c}{Rq\ \alpha}$.

Ergo intervalla tangentium ita stabunt:

$$\frac{2\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{8\dfrac{c^2}{\alpha^2}}{\dfrac{c^2}{\alpha}}+1} = \frac{2\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{8}{\alpha}+1} = \frac{Rq\ 4c^2}{Rq\ 8+\alpha}.\ Rq\ \frac{4c^2}{8+\alpha}.\ Rq\ \frac{c^2}{2+\dfrac{\alpha}{4}}.\ \frac{2c}{Rq\ 8+\alpha}.$$

$$\frac{3\dfrac{c}{\alpha}}{Rq\ \dfrac{12\dfrac{\cancel{c^2}}{\alpha^{\cancel{2}}}}{\dfrac{\cancel{c^2}}{\cancel{\alpha}}}+1} = \frac{3c}{Rq\ 12+\alpha}.\ \frac{4c}{Rq\ 16+\alpha}.\ \frac{5c}{Rq\ 20+\alpha}\ \text{etc.}$$

2 quavis *(1)* dabili *(2)* assignabili *L* 3 fit *(1)* basi altitudinis *(2)* altitudini *L* 7 nempe Rq $\alpha, \frown$ a. *erg. L* 10 eam, *(1)* in qua et applicata basi *(2)* quae *L* 11 minimae *erg. L*

15 $= \dfrac{Rq\ 4c^2}{Rq\ 8+\alpha}$: Richtig wäre im Nenner $\sqrt{8\alpha + a^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter und übernimmt den Fehler in die folgenden Werte von AB. In S. 225 Z. 3 dividiert er unter der Wurzel im Nenner durch 4 statt mit 4 zu multiplizieren, was das Ergebnis in S. 225 Z. 11 zusätzlich beeinträchtigt.

Quod si iam sint triangula infinita, quorum basis latus curvae, minus qualibet recta assignabili sit β. altitudines intervalla tangentium, triangula ipsa erunt

$$\frac{2c\beta}{Rq\ 2+\dfrac{\alpha}{4}} \quad \frac{3c\beta}{Rq\ 3+\dfrac{\alpha}{4}} \quad \frac{4c\beta}{Rq\ 4+\dfrac{\alpha}{4}} \quad \frac{5c\beta}{Rq\ 5+\dfrac{\alpha}{4}} \text{ etc.}$$

quorum infinita simul sumta, aequantur segmento parabolico seu residuo semiparabolae triangulo inscripto ademto. Quod si ergo rectangulum parabolae circumscriptum sit 3. et parabola 2. et triangulum inscriptum $\frac{3}{2}$ erit segmentum parabolicum $2-\frac{3}{2}$ seu $\frac{4}{2}-\frac{3}{2}=\frac{1}{2}$.

Ac proinde si semiparabolae altitudo et applicata sit c. cum rectangulum futurum sit c^2. et triangulum $\frac{c^2}{2}$ et parabola $\frac{2c^2}{3}$ erit segmentum $\frac{2c^2}{3}-\frac{c^2}{2}=\frac{4c^2}{6}-\frac{3c^2}{6}=\frac{c^2}{6}$.

Ergo $\frac{c^2}{6}=$ erit omnibus illis triangulis simul sumtis, dividatur utraque aequationis pars per c. erit $\frac{c}{6}=\cancel{Rq}\ Rq\ \frac{\overset{2}{\cancel{4}}\beta\cancel{^2}}{2+\frac{\alpha}{4}}+\cancel{Rq}\ Rq\ \frac{\overset{3}{\cancel{9}}\beta\cancel{^2}}{3+\frac{\alpha}{4}}$ etc. si tamen NB. maximum horum seu ultimum (nam in infinitum progredi alioquin licet) definiatur.

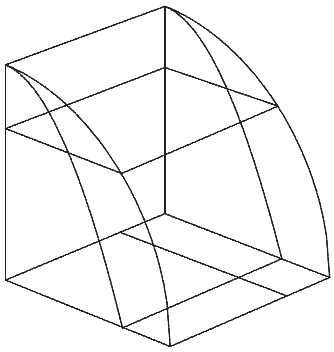
[*Teil 2*]

Sinus est media proportionalis inter radium et parallelam axi parabolae.

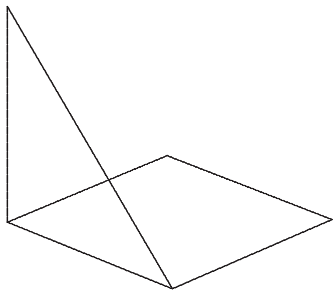
			sinus
1	1	16 − 1	*Rq* 15
2	4	16 − 4	*Rq* 12
3	9	16 − 9	*Rq* 7
4	16	16 −16	*Rq* 0

1 f. latus ... assignabili *erg. L* 3 $\frac{2c\beta}{\mathrm{Rq}\ 2+\frac{\alpha}{4}}$ *erg. L*

14 *Sinus ... parabolae*: Leibniz zitiert fast wörtlich aus H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 73; in seinem Handexemplar ist die Stelle unterstrichen; daneben steht folgender Hinweis: „Adde quae Hugenius in *Cyclom.* adhibita parabola“; s. Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, theor. III prop. III S. 3–5 (*HO* XII S. 123 f.). Fabris Satz erscheint mit der zugehörigen Figur auch in Cc 2, Nr. 500 und in *Mathematica*, *LSB* VII, 1 N. 106 S. 658 f.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Figura conflata ex quadratis sinuum, aequatur cylindro cuius basis est quadrans, altitudo radius.

Eadem figura conflata ex quadratis sinuum, est ad figuram conflatam ex quadrantibus eorundem sinuum seu ad quadrantem hemisphaerii ut quadratum ad quadrantem inscriptum.

Esto quadrans xa. radius a. Erit figura conflata ex quadratis sinuum xa^2.

At figura conflata ex quadrantibus $\frac{2xa^2}{3}$. Esset ergo quadratum ad quadrantem ut 3 ad 2. Ergo posito quadrato 3. erit radius Rq 3. quo si dividatur quadrans 2. et productum duplicetur, habebimus, arcum quadrantis si credere fas est: $2 \times \frac{Rq\ 3}{1}\ \frac{2 \frown 2}{Rq\ 3} = \frac{4}{Rq\ 3}$ et peripheriam circuli $\frac{16}{Rq\ 3}$. radio posito Rq 3. et diametro Rq 12. Ergo ratio peripheriae ad diametrum erit: $\frac{16}{Rq\ 3} \times \frac{Rq\ 12}{1}\ \frac{16}{Rq\ 36}\ \frac{16}{6}$ quod est absurdum.

---

6 *Daneben in anderem Duktus und mit anderer Tinte*: Falsum

4 f. conflatam ex *(1)* circulis *(2)* quadrantibus *L*   5 seu ... hemisphaerii *erg. L*   9 Ergo *(1)* posito *(a)* quadrato 3. erit radius Rq 3. *(b)* radio a. cum quadrans fiat ex radio in semiquadrantem peripheriae ducto, ergo $\frac{4xa}{}$ *(2)* posito *L*   10 habebimus, *(1)* circumferentiam *(2)* arcum

Falsum ergo figuram conflatam ex quadratis sinuum, esse ad figuram conflatam ex quadrantibus, ut quadratum ad quadrantem. Ergo valde cavendum ne indivisibilibus abutamur.

	1		3		4		5	
16		17		20		24		29

	4		4		4		4		4		4	
12		16		20		24		28		32		36

1	3	5	7	9
1	4	9	16	25
4				

Rq 1. *Rq* 3. *Rq* 5. *Rq* 7. *Rq* 9. *Rq* 11. 13. 15. 17. 19. 21. 23. 25.

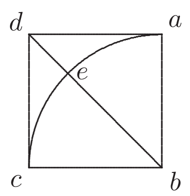
1 ex *(1)* summis *(2)* quadratis *L* 5 *(1)* $10 + 4 \quad 16 + 4$ *(2)* 16 *L*

18. DE RADICIBUS ET SERIEBUS SUMMANDIS
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 206–207. 1 Bog. 2°. 4 S. Text tlw. zweispaltig. Teil 3 in die Lücken der Teile 1 und 2 geschrieben.
Cc 2, Nr. 615

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Die Verwendung der Schreibweise $\frac{\text{infinitum}}{2} - \frac{1}{2}$ etc. (S. 238 Z. 3–8) deutet darauf hin, daß das Stück nach N. 16 (s. dort) und vermutlich auch nach *LSB* VII, 1 N. 36 entstanden ist.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]
[*Blindzeichnung*]

Esto quadratum *abcd*, in eo quadrans *abcea* triangulum semiquadratum *adb* volvantur simul circa axem *ab*. Triangulum producet conum, quadrans hemisphaerium, quadratum cylindrum, et conus erit tertia pars cylindri, hemisphaerium duplum coni, scutella producta a trilineo *cdae* erit aequalis cono *adb*. Scutella enim componitur ex zonis circularibus, quarum quaelibet aequalis circulo coni coordinato, quod demonstratur eadem fere methodo, qua lunulam quadravit Hippocrates. Ut adeo dimensionem sphaerae et cylindri Hippocrati ex parte quadam debeat Archimedes.

Ergo ut circuli compositores coni, ita zonae compositrices scutellae crescunt ut altitudinum quadrata. Rectae porro componentes triangulum, crescunt ut eorum quadratorum

11 simul *erg. L* 14 adb *erg. L* 15 quaelibet *erg. L* 19 ut *(1)* cylin *(2)* circuli *L*

18 debeat Archimedes: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die Herleitung in G. Galilei, *Discorsi*, 1638 S. 28–30 (*GO* VIII S. 74 f.), in der Ausgabe der *Opere*, 1656, Band 2, Nr. 17, aus der er den einschlägigen Abschnitt auf S. 21 im Herbst/Winter 1672 exzerpierte (vgl. *LSB* VI, 3 N. 11_2 S. 167). Eine ähnliche Darstellung findet sich auch in H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, positio III S. 318 f. Der Beweis in Archimedes, *De sphaera et cylindro I*, beruht auf anderen Überlegungen.

radices, id est ut altitudines, at non rectae componentes trilineum, quae quomodo crescant videamus: Sunt scilicet ut radii zonarum. Sed hac methodo rem investigare difficile aliam tentemus:

Scimus summam superficiei [hemisphaericae] aequalem, summae superficiei cylindricae, id est circulum duplum maioris circuli in sphaera. Cum ergo summa peripheriarum constituat hunc circulum rationis est summam radiorum, constituere quadratum vel rectangulum, quod sit ad eum circulum, ut radius ad peripheriam. Sed cum alibi ostensum sit, quadratum generans cylindrum esse ad superficiem cylindricam vel [hemisphaericam] seu circulum diagonalem quadrati ut radius ad circumferentiam; ideo sequeretur quadratum hoc esse quadranti aequale, totum parti, quod est absurdum. Hinc demonstratur, non posse componi radios, ut peripherias licet coordinatas.

Circuli in hemisphaerio crescunt ut applicatae in semiparabola. Sinus in quadrante, crescunt ut radices eius mensurae qua crescunt applicatae in parabola.

Rem ad numeros redigamus, ut fiat lucidior, et aperiatur fortasse via per arithmeticam infinitorum.

230,1–9 *Nebenrechnungen:*

1	1	49
2	4	<u>36</u>
3	9	13
4	16	<u>25</u>
5	25	24
6	36	<u>16</u>
7	49	33

4 superficei *(1)* cylindricae, id est cir *(2)* | sphaericae *ändert Hrsg.* | aequalem *L* 6 f. vel rectangulum *erg. L* 8 sphaericam *L ändert Hrsg.*

---

9 sequeretur: Die Folgerung ist nicht zulässig. Leibniz erkennt dies in *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 66 Z. 3–9.
17–23 Leibniz berechnet in der rechten Spalte sukzessive $49 - 36 = 13, 49 - 25 = 24, 49 - 16 = 33$.

	cylinder	conus	hemisphaerium	quadrans circuli
7	xa	xa	0	[0]
6	xa	$xa \frown 36 \smile 49$	$xa \frown 13 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 13 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
5	xa	$xa \frown 25 \smile 49$	$xa \frown 24 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 24 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
4	xa	$xa \frown 16 \smile 49$	$xa \frown 33 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 33 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
3	xa	$xa \frown 9 \smile 49$	$xa \frown 40 \smile 49$	[$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 40 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$]
2	xa	$xa \frown 4 \smile 49$	$xa \frown 45 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 45 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
1	xa	$xa \frown 1 \smile 49$	$xa \frown 48 \smile 49$	$2a \frown \llcorner\llcorner Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49} \lrcorner\lrcorner \smile Rq\,\cancel{xa} \frown 48 \smile \cancel{49}$
	$7\ xa$	$\frac{7\ xa}{3}$	$\frac{14\ xa}{3}$	Summa ignoratur.

1–9

(1)	cyl. prism.	conus pyram.	hemisphaer. differentiae praecedentium	quadrans radices differentiarum *erg.*
	7	$\frac{7}{1}$	0	0
	6	$\frac{7}{4}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,17}{2\mathrm{x}}$
	5	$\frac{7}{9}$	$\frac{38}{9}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,38}{3\mathrm{x}}$
	4	$\frac{7}{16}$	$\frac{57}{16}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,57}{4\mathrm{x}}$
	3	$\frac{7}{25}$	$\frac{68}{25}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,68}{5\mathrm{x}}$
	2	$\frac{7}{36}$	$\frac{65}{36}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,65}{6\mathrm{x}}$
	1	$\frac{7}{49}$	$\frac{42}{49}$	$\frac{\mathrm{Rq}\,42}{7\mathrm{x}}$

x est ratio radii ad latus quadrati circulo aequalis. Sed non opus est uti isto x, termino ignoto, cum enim sint radii ut radices circulorum, ideo sufficit omnia multiplicari seu affici per radium a. Et ita fiet:

Caeterum omnia in infinitas partes divisa cogitanda sunt.

En ergo quadrantem circuli c o m p e n d i o s i u s exhibitum:

9–16 *Nebenbetrachtung zur Stufe (2) der Variante, nicht gestrichen:* Sed cum 7 debeat intelligi = 49.

$$1 - \frac{7}{1} \times \frac{1}{4} \qquad 49 - 7 - \frac{36}{\frac{7}{29}} \qquad 36 - \frac{7 \frown 36}{49} - 25$$ [*bricht ab*]

Fortsetzung der Lesart zu S. 230 Z. 1–9:

(a)	$\frac{2Rq\,17}{a}$	*(b)*	$\frac{aRq\,17}{2}$	vel	$Rq\,17 \frown \frac{a}{2}$	*(2)* triang.	prism.	pyram.		*(3)*	*L*
	$\frac{3Rq\,38}{a}$		$\frac{aRq\,38}{3}$		$Rq\,38 \frown \frac{a}{3}$		cyl.	conus			
	$\frac{4Rq\,57}{a}$		$\frac{aRq\,57}{4}$		$Rq\,57 \frown \frac{a}{4}$	(7)	7	$\frac{7}{1}$	$\frac{1}{1}$		7
	$\frac{5Rq\,65}{a}$		$\frac{aRq\,68}{5}$		$Rq\,68 \frown \frac{a}{5}$	(6)	7	$\frac{7 \frown 36}{49} \Big\vert \frac{36}{7}$	$\frac{1}{4}$		6
						(5)	7	$\frac{7 \frown 25}{49} \Big\vert \frac{25}{7}$			5
						(4)	7	$\frac{7 \frown 16}{49}$			4
						(3)	7	$\frac{7 \frown 9}{49}$			3
						(2)	7	$\frac{7 \frown 4}{49}$			2
						(1)	7	$\frac{7 \frown 1}{49}$			1

230,1–9

hemisphaerium	*(1)* quadrans circuli	*(2)* quadrans circuli	*L*
0		| 0 *erg. Hrsg.* |	
xa $\frown$ 13 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 13 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$	
xa $\frown$ 24 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 24 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$	
xa $\frown$ 33 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 33 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$	
xa $\frown$ 40 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 40 $\smile$ 49$\lrcorner$	| 2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$ *erg. Hrsg.* |	
xa $\frown$ 45 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 45 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$	
xa $\frown$ 48 $\smile$ 49	2aRq $\llcorner$xa $\frown$ 48 $\smile$ 49$\lrcorner$	2a $\frown$ · · · · · · · · · · · $\smile$ $\cancel{49}$	
$\frac{14xa}{3}$	Summa ignoratur.	Summa ignoratur.	

$$\begin{array}{cc}
2a & Rq\,\frac{13}{48} \\
2a & Rq\,\frac{24}{48} \\
2a & Rq\,\frac{33}{48} \\
[2a & Rq\,\frac{40}{48}] \\
2a & Rq\,\frac{45}{48} \\
2a & \left(Rq\,\frac{48}{48}\right) \\
\hline
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cc}
\multicolumn{2}{c}{\text{hemisphaer.}} \\
xa & \frac{13}{49} \\
xa & \frac{24}{49} \\
xa & \frac{33}{49} \\
[xa & \frac{40}{49}] \\
xa & \frac{45}{49} \\
xa & \frac{48}{49} \\
\hline
\multicolumn{2}{c}{\frac{14\,xa}{3}}
\end{array}$$

Summa ignoratur.

Cum in infinitum facta supponatur subdivisio nil refert 48 pro 49, differunt enim non nisi puncto, id est nihilo quod ad usum calculi. Si quis ergo rationem reperiret quadrantis ad $2a$ ut reperta est hemisphaerii ad xa, haberemus circuli quadraturam.

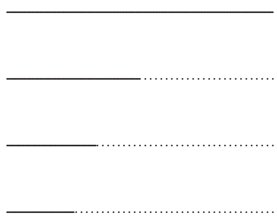
Nota isti numeri 13, 14, 48, 49, etc. significant lineas, et in $\frac{14xa}{3}$ 14 significat lineam, 3 est numerus. Tantum opus est reperiri methodum ista summandi:

$$\begin{array}{ll}
Rq\ 13 & \\
 & 11 \\
Rq\ 24 & \\
 & 9 \\
Rq\ 33 & \\
 & 7 \\
Rq\ 40 & \\
 & 5 \\
Rq\ 45 & \\
 & 3 \\
Rq\ 48 & \\
 & 1 \\
Rq\ 49 &
\end{array}$$

Qui rationem hoc summandi repererit, universalem is nobis quadraturam circuli exhibuerit.

5 2a Rq $\frac{40}{48}$ *erg. Hrsg.* 5 xa $\frac{40}{49}$ *erg. Hrsg.*

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

$$\begin{array}{ccccccccc}
1 & + & 0 & & & & & & \\
\frac{1}{2} & + & \frac{1}{2} & 0 & \left(\frac{1}{2}\right) & & & & \\
\frac{1}{3} & + & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} & 0 & \left(\frac{3}{3}\right) & & & \\
\frac{1}{4} & + & \frac{3}{4} & \frac{2}{4} & \frac{1}{4} & 0 & \left(\frac{6}{4}\right) & & \\
\frac{1}{5} & + & \frac{4}{5} & \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} & [0] & \left(\frac{10}{5}\right) & \\
\frac{1}{6} & + & \frac{5}{6} & \frac{4}{6} & \frac{3}{6} & \frac{2}{6} & \frac{1}{6} & [0] & \left(\frac{15}{6}\right)
\end{array}$$

Si summare velis $\frac{1}{2}\ \frac{3}{3}\ \frac{6}{4}\ \frac{10}{5}\ \frac{15}{6}\ \frac{21}{7}\ \frac{28}{8}\ \frac{36}{9}\ \frac{45}{10}$ etc. habes 1. 1. 1. 1. 1. 1. et praeterea:

$$\boxed{\underbrace{-\frac{1}{2}+\frac{2}{4}}} \quad \left[\frac{5}{5}\,\Big|\,\frac{1}{1}\right] \quad \frac{9}{6}\,\Big|\left[\frac{3}{2}\right] \quad \frac{14}{7}\,\Big|\,\frac{2}{1} \quad \frac{20}{8}\,\Big|\,\frac{5}{2} \quad \frac{27}{9}\,\Big|\,\frac{3}{1} \quad \frac{35}{10}\,\Big|\,\frac{7}{2}$$

Ergo $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$ etc. +[1.] 2. 3. 4. etc. Iam haec $\frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}$ rursus resolvuntur et fiunt: 1. 2. 3. etc. $+\frac{1}{2}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{2}$ etc. Habemus ergo summam huius seriei infinitae inventam.

Iam tentemus hoc quoque summare:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{3} & \frac{3}{4} & \frac{6}{5} & \frac{10}{6} & \frac{15}{7} & \frac{21}{8} & \frac{28}{9} & \frac{36}{10} & \frac{45}{11} \\
 & & \frac{1}{5} & \frac{4}{6} & \frac{8}{7} & \frac{14}{8} & \frac{19}{9} & \frac{26}{10} & \frac{34}{11} \\
 & & & & \frac{1}{7} & \frac{6}{8} & \frac{10}{9} & \frac{16}{10} & \frac{23}{11} \\
 & & & & & & \frac{1}{9} & \frac{6}{10} & \frac{12}{11} \\
 & & & & & & & & \frac{1}{11}
\end{array}$$

6 f. 0 *gestr. L, erg. Hrsg. zweimal* 9 $\frac{5}{10}\Big|\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.* 9 $\frac{2}{3}$ *L ändert Hrsg.* 10 1. *erg. Hrsg.*

Hoc non aeque facile, alia rem ratione aggrediamur. Aio summari posse hanc seriem:

$$\begin{array}{lccccccccc} & \frac{2}{4} & \frac{5}{5} & \frac{9}{6} & \frac{14}{7} & \frac{20}{8} & \frac{27}{9} & \frac{35}{10} & \text{etc.} & \\ \text{seu} & \frac{1}{2} & 1 & \left[\frac{3}{2}\right] & \frac{2}{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{1} & \text{etc.} & & \text{Ut patet.} \end{array}$$

Ergo si summari posset sequens, haberemus summam $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc.

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{3}{5} & \frac{7}{6} & \frac{12}{7} & \frac{18}{8} & \frac{25}{9} & \frac{33}{10} & \frac{42}{11} \\ & \frac{1}{6} & \frac{5}{7} & \frac{10}{8} & \frac{16}{9} & \frac{23}{10} & \\ & & & \frac{2}{8} & \frac{7}{9} & \frac{13}{10} & \end{array}$$

Si esset

$$\begin{array}{cccccccl} \frac{3}{6} & \frac{7}{7} & \frac{12}{8} & \frac{18}{9} & \frac{25}{10} & \frac{33}{11} & \frac{42}{12} & \\ \frac{1}{2} & 1 & \frac{3}{2} & \frac{2}{1} & \frac{5}{2} & \frac{3}{1} & \frac{7}{2} & \text{etc. facile summaremus.} \end{array}$$

Differentia autem inter praecedentem et hanc seriem est

$$\frac{4}{6}\quad \frac{5}{7}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{7}{9}\quad \frac{8}{10}\quad \frac{9}{11}\quad \frac{10}{12}$$

quam ita summabimus:

$$\frac{4}{6}\quad \frac{6}{8}\quad \frac{8}{10}\quad \frac{10}{12}\quad \text{etc.}$$

mult.

$$(6)\quad \frac{4}{1}\quad \frac{36}{8}$$

Alia fieri transpositio potest hoc modo:

$$\frac{4}{6}\quad \frac{6}{8}$$

divis.

$$(6)\quad \frac{4}{36}\quad \frac{1}{8}$$

2–5 *Nebenrechnungen auf der Rückseite:* $\frac{9}{6}\ \frac{2}{3}\qquad \frac{1}{2} \times \frac{2}{3}\qquad \frac{3+4}{6}\ \ \frac{7}{6}$

12 *Nebenrechnung:* $\frac{4}{6} \times \frac{6}{8}\ (-)\qquad \frac{32+36}{48} = \frac{68}{48} \Big| \frac{34}{24}$

1 f. seriem: *(1)* $\frac{2}{3}\ \frac{5}{4}\ \frac{9}{5}\ \frac{7}{6}$ *(2)* $\frac{2}{4}$ *L* 3 $\frac{2}{3}$ *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{lcc}
 & \frac{36}{8} & \frac{8}{10} \\[4pt]
(8) & \frac{36}{1} & \frac{64}{10} \\[4pt]
 & & \frac{64}{10} \quad \frac{10}{12} \\[4pt]
(10) & & \frac{64}{1} \quad \frac{100}{12}
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{lcc}
 & \frac{1}{8} & \frac{8}{10} \\[4pt]
(8) & \frac{1}{64} & \frac{1}{10} \\[4pt]
 & & \frac{1}{10} \quad \frac{10}{12} \\[4pt]
(10) & & \frac{1}{100} \quad \frac{1}{12}
\end{array}$$

ergo summa: $4.36.64.\frac{100}{12}$. Eodem modo alteram $\frac{5}{7}\ \frac{7}{9}\ \frac{9}{11}$ etc.

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6} & \frac{6}{7} & \frac{7}{8} \\[6pt]
1 & \frac{3}{2} & \frac{11}{6} & \frac{25}{12} & \left[\frac{137}{60}\right] & & & \\[6pt]
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} &
\end{array}$$

---

7 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r}
25 \\
\underline{12} \\
50 \\
\underline{250} \\
300 \\
\underline{12} \\
312
\end{array}$$

5 f. etc. *(1)* Hinc mihi tandem quaesita diu se ratio offert summas ineundi fractionum quadraticarum et cubicarum etc.

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \text{etc.} \\[4pt]
\frac{2}{1} & \frac{1}{2} & & & & \\[4pt]
\frac{4}{6} & & & & &
\end{array}$$

(2) $\frac{1}{1}$ *L*

7 $\frac{312}{144}$ *L ändert Hrsg.* 8 $\frac{1}{7}$ | etc. est dimidium infiniti. *gestr.* | *L*

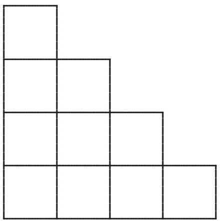
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1															
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27

Nota

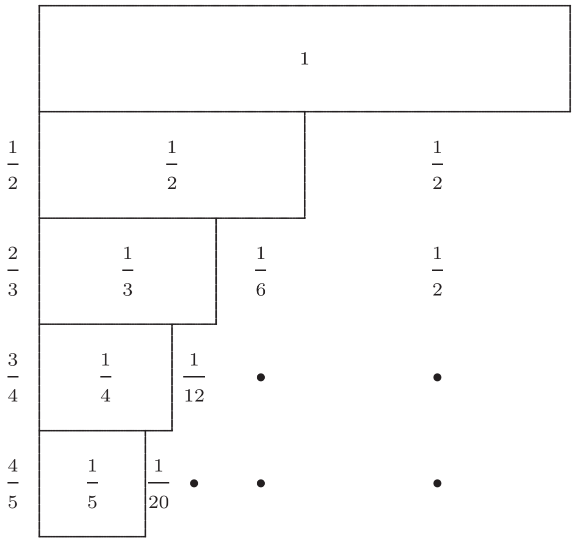
1	est	$\frac{1}{1}$	de	1	1	1	1	7	49
1	=	$\frac{1}{2}$	—	2	1	2	4	6	36
1	=	$\frac{1}{3}$	—	3	1	3	9	5	25
1	=	$\frac{1}{4}$	—	4	1	4	16	4	16
1	=	$\frac{1}{5}$	—	5	4	10	30	3	9
1	=	1	—	1	3	6	14	2	4
$\frac{1}{2}$	=	$\frac{1}{4}$	—	2	2	3	5	1	1
$\frac{1}{3}$	=	$\frac{1}{9}$	—	3					
$\frac{1}{4}$	=	$\frac{1}{16}$	—	4					

Apex erit fastigiumque analyseos atque arithmeticae infinitorum, ex datis rationibus partium, certas progressiones habentium, invenire rationes totorum.

1 f. Zeilen in der Vorlage als Spalten angeordnet.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

1–5 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll}
1 & & \\
 & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{20} \\
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{6} & \frac{2}{6} \,\Big|\, \frac{1}{3} \quad \frac{20}{60} \\
\frac{1}{3} & & \\
 & \frac{1}{12} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{20} & \frac{1}{2} + \frac{1}{6} = \frac{4}{6} \\
\frac{1}{5} & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{20} \quad \frac{2}{12} \quad \frac{3}{6} \quad \frac{4}{2} = \frac{1}{1} - \frac{1}{5} + 1 - \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} = 1 - \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4} + \frac{4}{5} \text{ etc. facit } \frac{\text{infinitum}}{2} - \frac{1}{2} + \frac{\text{inf.}}{6} - \frac{2}{6} + \frac{\text{inf.}}{12} - \frac{3}{12}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{2}{6} \quad \frac{3}{12} \quad \frac{4}{20} = \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

$$\frac{1}{2}\ \text{infin.} - 2 \qquad \frac{1}{6}\ \frac{\text{infin.} - 3}{3} \qquad \frac{1}{12}\ \frac{\text{infin.} - 4}{4}$$

$$\frac{\frac{\text{infin.}}{2} - \frac{2}{2}}{\frac{1}{2}} \quad \frac{\frac{\text{inf.}}{6} - \frac{3}{6}}{\frac{2}{6}}$$

$$\frac{\text{inf.} - 2}{2} \quad \begin{matrix} + \\ \times \\ - \end{matrix} \quad \frac{\text{inf.} - 3}{3} \quad \begin{matrix} + \\ \times \\ - \end{matrix} \quad \frac{\text{inf.} - 4}{4}$$

$$\frac{5\,\text{inf.} - 12}{6} \quad + \quad \frac{\text{inf.} - 4}{4} \quad = \quad \frac{26\,\text{inf.} - 72}{24}$$

1 *Unter* $\frac{1}{20}\ \ \frac{2}{12}\ \ \frac{3}{6}\ \ \frac{4}{2}$: | $\frac{1}{20}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{3}$ *(!) 2 gestr.* | *L*

---

5 $\frac{1}{2}$ infin.−2: Nach dem Verfahren von Z. 3 würde sich hier $\frac{1}{2}\,(\text{inf}{-}1) + \frac{1}{6}\left(\frac{\text{inf} - 2}{2}\right) + \frac{1}{12}\left(\frac{\text{inf} - 3}{3}\right)$ etc. ergeben. Konsequent weitergerechnet müßte der Nenner des zweiten Doppelbruches in der folgenden Zeile $\frac{3}{6}$ lauten.

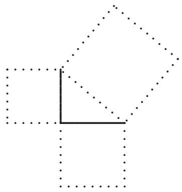
[*Teil 3*]

$$\begin{array}{llll}
36 & 6 & 36 & 6 \\
\underline{25} & \underline{\ 5} & \underline{16} & \underline{\ 4} \\
61 & 11 \frown 11 = 121 & 52 & 10 \frown 10 = 100 \\
 & & 104 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
25 & 5 & 25 & 5 \\
\underline{16} & \underline{4} & \underline{\ 9} & \underline{3} \\
41 & 9 \frown 9 = 81 & 34 & 8 \frown 8 = 64 + 2 \frown 2 = 4 \\
 & & 68 &
\end{array}$$

$$a^2 + b^2 + ab$$
$$Rq\,a^2 + Rq\,b^2$$

$$\begin{array}{llll}
16 & 4 & 36 & 6 \\
\underline{\ 9} & \underline{3} & \underline{\ 4} & \underline{2} \\
25 & 7 \frown 7 = 49 & 40 & 8 \frown 8 = 64 \\
 & & \underline{\ 2} & \qquad \underline{16} \\
 & & 80 & \qquad 80
\end{array}$$



[*Fig. 5*]

Ex his exemplis colligo theorema maximi momenti ad analysin et omnem omnino arithmeticam et geometriam.

Duas radices quadratas invicem addere (subtrahere) addantur quadrata, summa duplicetur, productum excedet quadratum summae radicum, quadrato differentiae.

2–4 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{lll}
36 & 6 + \ \ 5 & \\
25 & 36 + 25 \ -2 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1 \\
\cancel{1}\,\cancel{2}\,6 \\
\underline{\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{4}\,\cancel{0}} \\
\underline{3\ \ \ 2} \\
\cancel{9}\,6\,2
\end{array}$$

15 f. *Daneben:* NB. verissimum.

17 quadrata, *(1)* productum *(2)* summa *L* 25 NB. *(1)* hoc verum non est nisi quando radices sunt numeri progressionis *(a)* geometricae *(b)* arithmeticae. *(2)* $\mathfrak{A}$ *(3)* verissimum *L*

$Rq\,ab + Rq\,\dfrac{cd^2}{a} = Rq\,x^2 + Rq\,\dfrac{xa^2}{d}$. Haec aequatio non nisi arte nostra a surdis purgari potest. Ecce methodum generalem purgandi omnem aequationem a numeris surdis.

$$Rq\,ab + Rq\,\frac{cd^2}{a} = x + Rq\,\frac{xa^2}{d}\ [=]\ Rq\,x^2 + Rq\,\frac{xa^2}{d}$$

$$\square\llcorner Rq\,ab + Rq\,\frac{cd^2}{a}\lrcorner = x^2 + \frac{xa^2}{d} + 2Rq\,\frac{x^3a^2}{d}$$

En regulam breviorem: quadratis addatur factus ex radicibus duplicatus, producti radix est radicum summa.

Nota si summa radicum ducatur in differentiam productum est differentia quadratorum.

Regula alia memorabilis si summa quadratorum dividatur per differentiam quotiens erit radix minor, residuum maior, modo quotiens et residuum ducantur in differentiam quadratorum.

[*Zusätze auf den Rückseiten*]

$$Rq\,a^2 + Rq\,b^2 \qquad \square, Rq\,a^2 - Rq\,b^2\,. = a^2 + b^2 - 2Rq\,a^2b^2$$

$$\underline{Rq\,a^2 - Rq\,b^2}$$

$$a^2 \cancel{+ Rq\,a^2b^2} - \cancel{Rq\,a^2b^2} + b^2 \qquad Rq\,a^2 + Rq\,b^2$$

$$\frac{a^2 + b^2}{2}$$

$$2a^2 + 2b^2\ \ +a^2 + b^2 - 2Rq\,a^2b^2 = 3a^2 + 3b^2 - 2Rq\,a^2b^2$$

$2a^2 + 2b^2\ \ -a^2 - b^2 + 2Rq\,a^2b^2 =$ [*bricht ab*]

$Rq\,a - Rq\,b.\qquad 2a + 2b = \square, Rq\,a - Rq\,b. + \square, Rq\,a + Rq\,b.$

$2a + 2b = 2a + 2b + Rq\,ab - Rq\,ab.$

2 *Darunter:* Non est error sed nullus est usus.

9–11 *Daneben:* N B. d e r e s i d u o a q u o t i e n t e d i v e r s o.

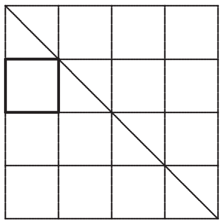
3 = *erg. Hrsg.* 9 differentiam *(1)* productum *(2)* quotiens *L* 22 *(1)* Error puto. *(2)* Non *L*

$$ab : \frac{a}{b} = \frac{ab}{\frac{a}{b}} = \frac{ab^2}{a} = b^2 \qquad \begin{array}{ccc} ab & ac & ad \\ \\ a & a & a \\ \frac{a}{b} & \frac{a}{c} & \frac{a}{d} \end{array}$$

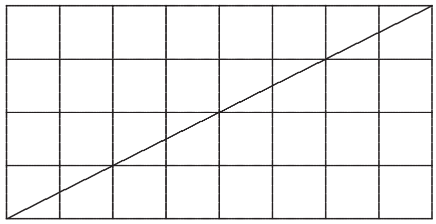
19. DE ADDITIONE SERIERUM PROGRESSIONIS ARITHMETICAE
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 291–292. 1 Bog. 2°. Die oberen 3/5 von Bl. 291 abgeschnitten. 2 1/2 S. Textfolge Bl. 291 r°, 292 v°, 292 r°, 291 v°.
Cc 2, Nr. 515

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Zeit von März bis Mai 1673 belegt. Das Stück enthält einen Verweis auf *LSB* VII, 1 N. 36 (s. Erl. zu S. 4 Z. 12 f.) und ist daher vermutlich auch nach N. 16 (s. dort) anzusetzen.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 2a*]

	(a)					(b)
	·	·	·	·	·	5
1	○	·	·	·	·	4
2	○	○	·	·	·	3
3	○	○	○	·	·	2
4	○	○	○	○	·	1
(c)	4	3	2	1		

fig. 1

	·	·	·	·	·	·	·	7
[2]	○	·	·	·	·	·	·	5
[4]	○	○	○	○	·	·	·	3
[6]	○	○	○	○	○	○	·	1

fig. 2

16 2 *erg. Hrsg.* 17 4 *erg. Hrsg.* 18 6 *erg. Hrsg.*

	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	13
3	○	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	10
6	○	○	○	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	7
9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	4
12	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	1

fig. 3

	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	·	11
3	○	○	·	·	·	·	·	·	·	·	·	8
6	○	○	○	○	○	○	·	·	·	·	·	5
9	○	○	○	○	○	○	○	○	○	·	·	2

fig. 4

Si series numerorum arithmeticae progressionis continuae, ad initium productae, ut 5. 4. 3. 2. 1. addatur alteri seriei proxime minori ut 4. 3. 2. 1. summa 25 est $\square^{\text{tus}}$ termini maximi 5. Demonstratio patet ex fig. 1.

Imo regula universalior: Si series numerorum progressionis arithmeticae cuiuscunque productae ad unitatem, v. g. duplae, ut 1. 3. 5. 7. addatur alteri proxime minori 6. 4. 2. (0) summa est rectangulus seu factus ex ductu numeri maximi in numerum terminorum, maximae seriei, ut $7 \frown 4 = 28$. Vid. fig. 2 et 3.

12 ad initium productae *erg. L* 15 f. cuiuscunque | *(1)* ad initium productae *(2)* productae ad unitatem *erg.* | v. g. *L* 17 rectangulus seu *erg. L* 18–244,1 28. | Vid. fig. 2 et 3. *erg.* | Ab initio producta intelligitur progressio, cum producitur ad terminum minimum, quem in hac serie habere potest. Ut si progressio sit *(1)* tripla *(2)* ternaria, et terminus maximus sit 13. minimus erit 1. si maximus 12. minimus 3. si maximus 11. minimus 2. si maximus 10. minimus 1. Est ergo terminus minimus vel differentia progressionis, vel numerus aliquis ea minor. *gestr.* | Notandum *(a)* autem *(b)* quoque *L*

Notandum quoque seriem proxime minorem hoc loco vocari eam, cuius terminus maximus minor est unitate termino maximo praecedentis, ut post seriem 7. 5. 3. 1. proxime minor est 6. 4. 2. non vero 5. 3. 1. quae in ipsa serie maxima continebatur. Nisi quod in progressione arithmetica continua hoc tantum evenit ut series proxime minor in ipsa maiore comprehensa, et series proxime minor cuius terminus maximus unitate differt, coincidant, quia ipsa differentia progressionis arithmeticae continuae est unitas.

Imo vero regula fieri potest etiamnum, universalior: Nihil enim necesse est, progressionem arithmeticam produci ad unitatem. Potest enim producta intelligi ad initium suum, etiamsi non producatur ad unitatem, dummodo producatur ad terminum minimum quem in ea serie habere potest, id est differentiam progressionis, vel terminum aliquem, ea minorem. Ut si progressio sit ternaria, et terminus maximus sit 13. minimus erit 1. si maximus sit 12. minimus erit 3. si maximus sit 11. minimus erit 2. si maximus sit 10. minimus erit 1. Est autem 3 differentia progressionis ternariae, 2 et 1 numeri proxime minores.

Imo vero tandem ne illud quidem refert an progressio producatur ad initium suum, undecunque enim incipiat, et quocunque desinat, manebit regulae veritas, dummodo differentia inter terminos maximos progressionis maioris et minoris, sit terminus minimus progressionis maioris. Regulam ergo universalissimam et ut credo a nullo tactam, ita concipiemus:

Si sint duae series (11. 8. 5. 2. et 9. 6. 3.) progressionis arithmeticae eiusdem (ut ternariae), et differentia inter terminum maximum seriei unius, et terminum maximum seriei alterius, sit terminus minimus seriei unius, (nempe maioris) (ut diff. inter 11 et 9 est 2), et numerus terminorum unius seriei est unitate minor numero terminorum alterius seriei; tunc summa terminorum utriusque seriei erit rectangulum, comprehensum sub termino maximo seriei maioris, et numero terminorum eiusdem seriei maioris. Seu $11+8+5+2. \;+\; 9+6+3. = 11 \frown 4 = 44.$

2 maximus *(1)* minor est unitate *(2)* differt a termino *(3)* minor *L* 6 f. unitas. *(1)* Porro non refert seriesne maxima | an *gestr.* | in unitatem desinat, an alium numerum, in unitatem desinit, fig. 1. 2. 3. et exempli causa fig. *(a)* 4. *(b)* 3. ubi progressio est ternaria et terminus maximus est 13. At si ut in fig. 4. terminus maximus sit 11, minimus erit 2. Series enim erit 8. 5. 2. et tamen si addatur series proxime minor: 9 *(2)* Imo *L* 17 differentia inter terminos maximos *erg. L* 18 et ut credo a nullo tactam, *erg. L* 20 (11. 8. 5. 2. et 9. 6. 3.) *erg. L* 20 f. (ut ternariae) *erg. L* 22 f. (ut diff. inter 11 et 9 est 2) *erg. L* 25 sub *(1)* numero *(2)* termino *L*

Quia vero in progressione arithmetica continua ad initium producta numerus terminorum, et numerus maximus seriei coincidunt, ut $\begin{matrix} \text{V.} & \text{IV.} & \text{III.} & \text{II.} & \text{I.} \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5. \end{matrix}$ hinc non nisi corollarium est propositionis istius universalis, propositio ab initio posita: Si series numerorum progressionis arithmeticae continuae addatur alteri seriei proxime minori itidem ad initium productae, summam esse termini maximi quadratum.

Unde itidem corollarii instar duci potest, illustris illa propositio: Numeros impares deinceps ab unitate, esse differentias quadratorum deinceps ab unitate. Inspice fig. 1. ubi abscindendo marginem ex quadrato de 5. fit quadratum de 4. Margo autem abscissus $\underline{bac}$. componitur ex $\underline{ab}$. termino maximo, ut 5. et $\underline{ac}$. numero terminorum, itidem 5, ergo margo abscissus seu differentia $\square^{\text{torum}}$ est summa termini maximi et numeri terminorum, qui cum sint aequales, erit duplum termini maximi (vel numeri terminorum) demta tamen unitate, quia unitas, $\underline{a}$, quippe utrique tam termino maximo quam numero terminorum communis, non duplicatur. Ergo differentia duorum quadratorum est duplum radicis maioris demta unitate. Et proinde numeri impares deinceps etc.

Idem corollarium etiam hinc probatur eadem opera, quia iungendo terminos diversarum serierum fiunt numeri impares ut

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & \\ \hline 9 & 7 & 5 & 3 & 1. \end{array}$$

Quod si sic

$$\begin{array}{ccccc} 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline 5 & 8 & 6 & 4 & 2. \end{array}$$

fiet

1 ad initium producta *erg. L* 2 ut *(1)* $\begin{smallmatrix} 5. & 4. & 3. & 2. & 1 \\ 1. & 2. & 3. & 4. & 5 \end{smallmatrix}$ *(2)* $\begin{smallmatrix} \text{V.} \\ 1. \end{smallmatrix}$ *L* 3 posita | et nunc ita reddita universalior *erg. u. gestr.* |: Si *L* 11 f. itidem 5, | est *gestr.* | ergo margo abscissus | seu differentia $\square^{\text{torum}}$ est *erg.* | summa *L* 12 maximi | 5. *gestr.* | et *L* 14 f. Ergo *(1)* differentiae quadratorum sunt *(2)* differentia *L*

7–16 Vgl. Leibniz für die Royal Society, 13.II.1673, *LSB* III, 1 N. 4 S. 25.

Unde aliud corollarium, si ad summam terminorum progressionis continuatae duplicatam accedat numerus terminorum unitate auctus vel numerus proxime maior datis summa erit quadratum huius numeri accessorii.

Ex theoremate nostro (de rectangulis,) demonstrari potest quoque, quod alibi demonstratu necessarium esse dixi triangulum rectangulum esse aequale altitudini ductae in basin facto dimidiato. Sunt enim excessus aequales, minimus omnium punctum, hinc alterius progressionis, complentis maximus cum non nisi puncto differat a maximo primae, erit aequalis.

Vellem simili ratione demonstrari quaedam possent de intactis hactenus figurarum generibus. Huius loci est lemma illud Archimedis, positum ab eo in *De spiralibus* quo utitur et Galilaeus ad quadraturam parabolae dial. 2. mech. *Si quotcunque lineae (quantitates[)]* *se excedant aequaliter, et excessus sit aequalis minimae earum, et sint aliae quotcunque aequales maximae, quadrati omnium harum erunt minores triplis quadratorum earum quae se excedunt sed plus quam tripli aliorum illorum quae restant subtracto quadrato maximae.*

Adde huc quae habet Galilei dial. 3. fine seu appendice, ubi de centro gravitatis.

1 si *(1)* termini progressionis continuatae duplicatae *(2)* ad *L* 10 f. quo | Archimedes *gestr.* | utitur *L* 16 dial. *(1)* ibid. *(2)* 3. *L*

4 alibi: vgl. *De bipartitionibus numerorum*, *LSB* VII, 1 N. 36 S. 227 f. 10 lemma illud Archimedis: *De lineis spiralibus*, Lemma zu prop. 10, zitiert in G. Galilei, *Discorsi*, 1638, S. 141 f. (*GO* VIII, S. 181 f.). 16 quae habet Galilei: *a. a. O.*, S. 289–[314] (*GO* I, S. 187–208)

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & 15 & 10 & 6 & 3 & 1 & & & \\
 & & & & 5 & 4 & 3 & 2 & & & \\
 & 5 & 5 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\
3 & & & & & & & & & & \\
 & 8 & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & 1 & 2 & \\
 & & 4 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & 1 & & \\
1 & & & & & & & & & & 4 \\
 & & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \circ & 2 & & \\
 & 9 & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \circ & 2 & 6 & \\
 & & 3 & \cdot & \cdot & \cdot & \circ & \circ & 2 & & \\
1 & & & & & & & & & & 6 \\
 & & 2 & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ & 3 & & \\
 & 8 & 2 & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ & 3 & 12 & \\
 & & 2 & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ & 3 & & \\
 & & 2 & \cdot & \cdot & \circ & \circ & \circ & 3 & & \\
3 & & & & & & & & & & 8 \\
 & & 1 & \cdot & \circ & \circ & \circ & \circ & 4 & & \\
 & & 1 & \cdot & \circ & \circ & \circ & \circ & 4 & & \\
 & 5 & 1 & \cdot & \circ & \circ & \circ & \circ & 4 & 20 & \\
 & & 1 & \cdot & \circ & \circ & \circ & \circ & 4 & & \\
 & & 1 & \cdot & \circ & \circ & \circ & \circ & 4 & & \\
 & & & 0 & 5 & 9 & 12 & 14 & & & \\
 & & & & & 4 & 3 & 2 & & &
\end{array}
$$

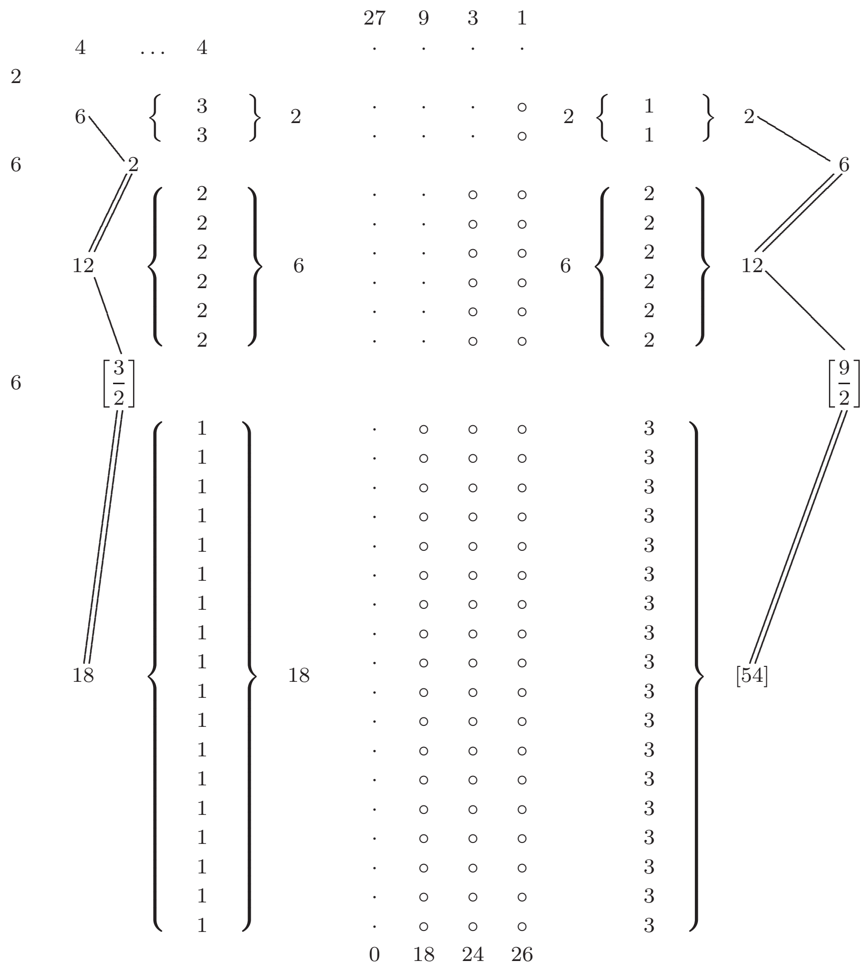
[*Fig. 5*]

Nota haec delineatio utilis esse potest ad dimensionem parabolae, vid. Galil. loc. dicto.

9–16 *Daneben:* Ulterius ista provehi possunt, et ex plano in solidum assurgi, si praegnantia intelligantur data et poterit ipsa exsurrectio eleganter exprimi inscriptis aliis magnitudinis continue deminutae. Ita in ipso plano poterit in solidum assurgi praesertim umbris nonnihil adhibitis.

---

1 f. und 22 f.: quer geschrieben. 25 vid. Galil.: *a. a. O.*, S. 142–144 (*GO* VIII, S. 182 ff.)



[*Fig. 6*]

13 2 *L ändert Hrsg.* 13 6 *L ändert Hrsg.* 23 72 *L ändert Hrsg.*

1–33 Schema quer geschrieben außer Z. 1 und Z. 33.

20. DE LOCIS INTERSECTIONUM OPE SERIERUM
[Spätes Frühjahr – Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 88. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 88 r°. Bl. 88 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die verwendete Notation (Wurzelsymbol, Gleichheitszeichen) deutet auf eine Entstehung des Stückes zwischen dem späten Frühjahr 1673 und vor dem Spätsommer 1674 hin. Den Begriff des Parameters von Kegelschnitten (s. S. 250 Z. 8) hat Leibniz offenbar zuerst bei Cl. MYDORGE, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum . . . libri*, 1631 u. ö. kennengelernt (vgl. *Triangulum characteristicum, speciatim de trochoidibus et cycloide*, Cc 2, Nr. 549). Auf diese Schrift ist er durch die Beilage von J. Collins in H. Oldenburgs Sendung vom 20.IV.1673 hingewiesen worden (s. *LSB* III, 1 N. 13 S. 70). Die Sendung hat Leibniz am 26.IV.1673 erhalten, wie er in seinem Schreiben an H. Oldenburg vom selben Datum erwähnt (s. *LSB* III, 1 N. 17 S. 88). Außerdem gibt es inhaltliche Berührungspunkte zu *LSB* VII, 1 N. 8 [Frühjahr – Sommer 1673], in dem ebenfalls die Frage der Anwendung von Reihen auf die Bestimmung von Kurvenschnittpunkten erörtert wird (s. dort S. 107 Z. 22 – S. 108 Z. 4). Darüber hinaus notiert Leibniz dort S. 106 Z. 16 f., daß die Ellipse der geometrische Ort aller Dreiecke mit festem Umfang und gegebener Basis zwischen den Brennpunkten ist; die Bemerkung in N. 20 S. 250 Z. 12 f. verallgemeinert diesen Sachverhalt. N. 20 dürfte also kurz nach *LSB* VII, 1 N. 8 entstanden sein.

An ope serierum convergentium inveniri possunt
per numeros loca intersectionum, seu ordinatae
communes duarum curvarum?

Non sunt contemnendae contemplationes Iacobi Gregorii de serierum convergentium terminationibus inveniendis: etiamsi in infinitum procedant. Sed rem non videtur in regulam redegisse, neque artem exhibuisse semper quando id fieri potest [invenire] quantitatem quae eodem modo componatur ex duobus terminis quibuslibet.

Mihi ita videtur; id semper fieri non posse. Non magis quam figurae omnes aequationis sunt capaces: nec ideo figurae desinent habere terminationem; etsi aliter componantur

22 f. de *(1)* ineunda *(2)* serierum convergentium *(a)* summis ineundis *(b)* terminationibus *L*
24 invenire *erg. Hrsg.*

22 contemplationes Iacobi Gregorii: *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, S. 19–24 [Marg].

termini. Semper quidem habebitur regula quaedam, sed non semper aequatio. Ut si figura logarithmica descripta fingatur.

Exemplo quodam opinor convincere licebit eius doctrinam, adhibendo ☽nulam Hippocratis investigandoque per inscripta et circumscripta: non puto inveniet eius quadrabilitatem; neque modum quendam exhibendi terminationem eodem semper modo compositam. Caeterum ubi id fieri potest tradam ego methodum universalem, quae eadem est, ac si data quadam figura geometrica; sed in meris incognitis, propositum sit quaerere parametrum. Ut si propositum sit quaerere figuram, quae componatur ex mediis proportionalibus inter continue crescentes decrescentesque aequaliter, sunto duae inter quas quaeritur media x. z. media erit $\sqrt{xz}$. eritque aequatio $y^2 = xz$. Deinde $y^2 = x + \beta \frown z - \beta = xz - x\beta + \beta z - \beta^2$. sed haec aliter facilia reductu. Difficilius si supponatur: e. g. figura habens duos focos, ita ut summae laterum inde ad curvam ductorum aequentur continue applicatis eiusdem trianguli rectanguli.

NB. Hac methodo per synthesin examinandum an dentur figurae altioris gradus quae focos habeant tres, etc. item quae focos habeant duos, sed qui non dent aequalitatem sed certam progressionem summarum vel differentiarum.

1 termini *erg.* *L* 2 fingatur. *(1)* Caeterum ubi reperiri potest haec ae *(2)* Exemplo *L* 9 proportionalibus *(1)* | quarum *streicht Hrsg.* | una continue *(2)* inter *L* 14 examinandum *(1)* aliae *(2)* an *L*

6 methodum: Gemeint ist wohl die in *Ex Dettonvillaeo seu Pascalii geometricis excerpta: cum additamentis* (Cc 2, Nr. 544) entwickelte Methode; vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 31–35.

21. DE METHODI QUADRATURARUM USU IN SERIEBUS
[August – September 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 237–238. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 38 r°. Bl. 37 r°, v° u. Bl. 38 v° leer.
Cc 2, Nr. 694

Datierungsgründe: N. 21 setzt inhaltlich den Brief von H. Oldenburg vom 16.IV.1673 (*LSB* III, 1 N. 13) voraus (s. Erl. zu S. 252 Z. 17). Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 belegt. Leibniz verwendet den in *Methodus tangentium inversa seu de functionibus* (Cc 2, Nr. 575, datiert August 1673) eingeführten Begriff functio (s. S. 252 Z. 12), so daß N. 21 vermutlich danach anzusetzen ist. Da Leibniz bei der Aufzählung seiner Entdeckungen die Kreisreihe nicht erwähnt, dürfte das Stück vor Herbst 1673 entstanden sein.

Posita quadratura hyperbolae et omnium eius partium sequitur quadratura figurae logarithmorum, ex iis quae a Gregorio a S. Vincentio et ex eius principiis a P. Sarrasa demonstrata sunt, de relatione logarithmorum ad hyperbolam. Cum vero methodum invenerim generalem describendi figuram quae u b i q u e q u a d r a r i p o t e s t adhibita inprimis 2^da^ methodo quadraturarum universali, quae per segmenta, et dimidias productas procedit: Hinc descripta ista figura logarithmorum habebitur inventio quotcunque mediarum proportionalium, sola altitudinis figurae logarithmicae sectione, ita ut sectio anguli aut rationis in data ratione, reducatur ad sectionem rectae in data ratione.

Inventa methodo quadraturarum, secunda inprimis per segmenta et dimidias reductarum, seu per portiones applicatarum, continetur aliquid omni quadratura maius, methodus scilicet inveniendi summas omnium serierum; sive infinitarum, sive finitarum. Quo nihil maius in his scientiis a pura ratiocinatione pendentibus, optari propemodum

13 logarithmorum, *(1)* ut a Gregorio a S. Vincentio demonstratum est *(2)* ex *L* 22 serierum; *(1)* item methodus *(2)* sive *L*

13 S. Vincentio: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch VI prop. CIX S. 586 f. 13 Sarrasa: A. de SARASA, *Solutio problematis*, 1649, S. 5–17. 14 methodum: vgl. die Erl. zu S. 250 Z. 6. 16 2^da^ methodo: Zur Entstehungsgeschichte des Transmutationssatzes im Anschluß an Cc 2, Nr. 545/6 vgl. D. MAHNKE, *Neue Einblicke*, 1926, S. 34–37 und die Erläuterung in *LSB* III, 1 S. 115 f.

potest. Nam series proposita quam suppono esse regularem, id est ab aequatione quadam pendentem, nam confusum chaos terminorum, cum regula careat, utique non nisi singulis collectis in summam addi potest, potest concipi in modum figurae, in qua scilicet unitas constructionis non est infinite parva, atque ita methodo geometrica haberi potest summa; et quidem per portiones quas dixi applicatarum. (Nam altera methodus ubi summa sinuum ad basin initur, non facile habet locum, nisi altitudine in infinitum divisa infinitoque existente numero eorum quorum summa quaeritur.) Et notandum est idem esse solvere hoc problema, ac invenire aliud problema calculi seu arithmeticae universalis, invenire scilicet seriem, cuius differentiae sint termini seriei datae, quod problema alioquin profecto desperatum hoc modo solvitur. Nam si data serie quadam, alia quaeritur series, cuius termini pro differentiis habeant terminos seriei datae; tunc quaerenda est figura in qua lineae terminos seriei datae repraesentantes faciant functionem portionum ex applicatis, quam dixi; et rectangula sub applicatis huius figurae in suam abscissam ductis dimidiata; erunt termini, quorum differentiae erunt termini seriei datae.

Porro etsi series data sit confusa, tentandum est, an in regulam reduci possit, quod peculiaris artis negotium futurum est, habetque aliquid commune cum iis quae de interpolationibus Collinius dixit, sed et cum iis quae in *Arte combinatoria* dixi, nulla esse tam confusa in quibus aliquis omniscius non possit observare quandam harmoniam, etsi forte ab altissimi gradus, v. g. centesimae dimensionis aequatione pendeat. Sed cum termini sunt nimis multi id homini mortali utique difficillimum foret, etiam regulis in eam rem datis; si pauci, non est operae pretium summam per hanc methodum invenire, cum facile addi possint methodo communi. Sunt duo alii huius speculationis fructus maximi, quod huius artis ope, divinari quodammodo posset, et data aliqua serie, vel ab homine, vel a natura; ab homine, ut si tabulam videam Angli pro futuris declinationibus a se calcu-

1 Nam *(1)* unitas constructionis *(2)* series *L* 6 basin *(1)* intelligatur *(2)* initur *L* 6 nisi *(1)* partibus in infinitum divisis *(2)* altitudine *L* 7 quaeritur *(1)* , utroque inquam iuncto, quia posterius potest esse aliquando sine priore, ut in *(2)* .) Et *L* 8 arithmeticae *(1)* inf *(2)* universalis *L* 23 posset, *(1)* discernique *(2)* et *L*

17 Collinius: Leibniz wurde durch H. Oldenburg im Brief vom 16.IV.1673 über die Interpolationsmethode von J. Collins unterrichtet (*LSB* III, 1 N. 13 S. 58–60). 17 dixi: vgl. *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, problema II § 33 S. 25 (*LSB* VI, 1 S. 187). 24 Angli: H. Bond, *The Variations of the Magnetick Needle predicted for many years following*, in *Philosophical Transactions* III Nr. 40 vom 19./29. Okt. 1668, S. 789 f.

latam; a natura, ut si tabulam intuearis observationum a nautis ut a Beaulieu de dictis variationibus factarum; invenire aequationem seu rationem seriei tabulaeque constructionem. Potest autem eadem series data esse pars aliarum diversarum, ex his eligenda est simplicissima aut rebus praesentibus accommodatissima, quod aliunde dignosci potest. Posse esse differentium partes, sic probo: Quia si v. g. unus adhuc terminus adderetur nullae ad alios terminos relationis, opus foret ad altiorem forte ire aequationem regulae seriei reperiendae causa. Est haec ipsissima doctrina divinandi seu de hypothesibus, quam nemo accurate tractavit. Huius pars est doctrina de chiffris construendis solvendisque, quam vellem a Wallisio accurate tradi.

Alius usus est huius artis, reducendi terminos confusos datos, ad seriei regularis formam, isque maximus et propemodum non aliunde compensabilis, datis scilicet pluribus quantitatibus surdis quarum summa quaeritur; cum enim hactenus nemo mortalium in hoc genere remedium invenerit, id ab hac methodo in promtu est. Fingendo scilicet eas esse partes seriei cuiusdam regularis cuius summam quaerimus. At ne in natura seriei illius regularis investiganda, nimia nos difficultate calculi oneremus, ideo duos tresve terminos summemus; et rursus alios duos vel tres; et horum summas rursus eadem plane methodo.

Hinc haberi potest summa radicum surdarum, res impossibilis habita hactenus, et mihi ipsi desperata. Et hic vero in serie surdarum finita methodo ista ineundi summam seriei datae, non tantum, ut in rationalibus, utilis est (nam in rationalibus finitis si velimus possumus singulatim computare), sed et necessaria, cum nulla alia extet; quemadmodum et in seriebus infinitis sive rationalium sive irrationalium.

19 in *(1)* serie *(2)* serie *(a)* finita *(b)* surdarum finita *erg. L* 20 finitis *erg. L*

1 Beaulieu: A. DE BEAULIEU, *Mémoires du voyage aux Indes orientales*, gedruckt in M. THEVENOT [Hrsg.], *Relations de divers voyages curieux* II, 1666 [Marg.], enthält S. 124–127 eine von Beaulieus Steuermann Le Tellier zusammengestellte Tafel der magnetischen Deklination. Die Marginalien zu dieser Tafel in Leibniz' Handexemplar (Niedersächs. Landesbibl. Hannover E-A 10026) stammen aus Hannoverscher Zeit (vgl. die Erl. in *LSB* III, 3 S. 445 sowie M. PALUMBO, *Leibniz e i geographica*, 1996, S. 31–33 u. 198 f.). 9 Wallisio: J. Wallis erwähnt seine Dechiffriertätigkeit in der *Mathesis universalis*, 1657, cap. IX S. 56 (*WO* I, S. 47). Leibniz' Quelle waren möglicherweise die Hinweise in Th. HOBBES, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1660, S. 36 bzw. *Dialogus physicus*, 1661, S. 35 (recte: 34), auch gedr. in *Opera philosophica*, 1668, pars II S. 38 f. bzw. pars VI S. 38, (*HOL* IV S. 55 bzw. S. 290), oder in B. de MONCONYS, *Journal des voyages*, P. 2, 1666, S. 54.

Omnes series arithmeticae reduci possunt ad seriem numerorum naturalium varie complicatorum, quemadmodum omnes series geometricae ad x. abscissam, cum semper relatio inter applicatam et abscissam haberi queat.

22. PROGRESSIONIS HARMONICAE DIFFERENTIAE
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 12–13. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 12 v° u. 13 r°, tlw. zweispaltig. Auf dem Rest des Bogens Cc 2, Nr. 1237 u. 1238 (Druck in einem späteren Band der Reihe) mit der auch N. 22 umfassenden Überschrift: „*De quadratura circuli et hyperb. et aliis curvis inde pendentibus et utrum duae illae a se invicem quod hic asseritur. Item progressionis harmonicae differentiae*“.
Cc 2, Nr. 1239

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Die auf den Rest des Bogens geschriebenen Fortsetzungen (Cc 2, Nr. 1237 u. 1238) zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), sind offenbar nach N. 22 entstanden. Das Stück ist vor N. 25 anzusetzen, das einen Verweis auf Cc 2, Nr. 1237 enthält. Es dürfte also etwa zur Zeit der Entdeckung der Kreisreihe oder kurz danach entstanden sein.

[Progressionis harmonicae differentiae]

[*Teil 1*]

Si qua sit figura, quae procedat instar numerorum sequentium:

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 2^2 & & 3^3 & & 4^4 & & 5^5 & & \\
1 & & 4 & & 27 & & 256 & & 3125 & & \text{etc.} \\
& 3 & & 23 & & 229 & & 2869 & & & \\
& & 20 & & 206 & & 2640 & & & & \\
& & & 186 & & 2434 & & & & & \\
& & & & 2248 & & & & & &
\end{array}$$

Si sit $\quad x \qquad \dfrac{4x^2}{a} \quad \dfrac{27x^3}{a^2} \quad \dfrac{256x^4}{a^3} \quad \dfrac{3125x^5}{a^4}$

differentiae $\quad \dfrac{4x^2 - xa}{a}$ [*bricht ab*]

15 Progressionis ... differentiae *erg. Hrsg. nach Cc 2, Nr. 1237*

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{ccccccccccc} \frac{1}{6} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{1} \\ & \frac{5+6}{30} & & \frac{5+4}{20} & & \frac{4+3}{12} & & \frac{3+2}{6} & & \frac{2+1}{2} & \end{array}$$

$$\underbrace{\frac{1}{6}\qquad\frac{1}{5}}$$

$$\frac{5+6}{\underbrace{30\qquad\frac{1}{4}}}$$

$$\frac{20+24+30}{\underbrace{120\qquad\frac{1}{3}}}$$

$$\frac{60\ 72\ 90\ 120}{\underbrace{360\qquad\frac{1}{2}}}$$

$$\frac{120\ 144\ 180\ 240\ 360}{\underbrace{720\qquad\frac{1}{1}}}$$

$$\frac{120\ 144\ 180\ 240\ 360\ 720}{720}$$

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & & 20 & & 44 & & 74 \\ & 20 & & 24 & & 30 & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc} 0 & & 60 & & 132 & & 222 & & 342 \\ & 60 & & 72 & & 90 & & 120 & \end{array}$$

Maximus semper terminus unius expressionis est minimus sequentis aut parum variatus NB.

255,19 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rl} 4 & \bullet \\ \underline{4} & \\ 16 & \bullet\ \bullet \\ \underline{4} & \\ 64 & \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{4} & \\ 256 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{rl} 5 & \bullet \\ \underline{5} & \\ 25 & \bullet\ \bullet \\ \underline{5} & \\ 125 & \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{5} & \\ 625 & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \\ \underline{5} & \\ 3135 & \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet\ \bullet \end{array}$$

0		120		264		444		684		1044		1764
	120		144		180		240		360		720	
		96		108		120		120		0		
		24		36		60		120		360		
			12		24		60		240			
				12		36		180				
					24		144					
						120						

$$\frac{720\quad 360\quad 240\quad 180\quad 144\quad 120}{720}+\frac{1}{7}\quad \text{vel}\quad \frac{10\quad 12\quad 15\quad 20\quad 30\quad 60}{60}+\frac{1}{7}\quad \text{fiet}$$

$$\frac{420\quad 210\quad 140\quad 105\quad 84\quad 70\quad 60}{420}+\frac{1}{8}$$

$$\frac{3360\quad 1680\quad 1120\quad 840\quad 672\quad 560\quad 480\quad 420}{3360}$$

$$\text{vel}\quad \frac{840\quad 420\quad 280\quad 210\quad 168\quad 140\quad 120\quad 105}{840}$$

---

1 *Nebenrechnung:*

120	120
144	264
180	444
240	684
360	1044
720	1764

2–5 *Nebenrechnung:*

120		
	96	
24		[84]
	12	
12		

16 72 *L ändert Hrsg.*

Summae serierum transversalium ascendentium

720			
	120		
600		0	
	120		
480		24	
	96		0
384		24	
	72		
312			

At summae serierum transversalium demtis terminis extremis:

120	
	0
120	
	24
96	
	24
72	

NB. eaedem cum differentiis summarum serierum transversalium ascendentium integrarum.

NB. Eodem modo summa demtis duabus extremis 0. 24. 24. est secunda differentia.

$\begin{array}{ccccc} a & & b & & c \\ & a-b & & b-c & \end{array}$, et $\dfrac{a}{c} = \dfrac{a-b}{b-c}$, quaeritur $a+b+c$. Ergo $ab-ac = ca-bc$. Ergo $ab = 2ac-bc$, et $\dfrac{ab}{c} = 2a-b$ vel $ab+bc = 2ac$. Ergo $a+b = \dfrac{2ac}{b}$ et $c+d = \dfrac{2ce}{d}$ et $e+f = \dfrac{2eg}{f}$. Iam $\dfrac{2ac}{b} + \dfrac{2ce}{d} = \dfrac{2acd+2bce}{bd}$. $\dfrac{2acd+2bce}{bd} + \dfrac{2eg}{f} = \dfrac{2acdf+2bcef+2bdeg}{bdf}$.

Memorandae proprietates seriei harmonicae:

1–9 *Nebenrechnungen:*

		180		
	240	180	288	240
	240	60	72	48
	120	60	24	24
720	600	480	384	312

Si cuiusdam seriei harmonicae sed integrae differentiae differentiarum exhibeantur, primae cuiuslibet gradus faciunt eandem seriem harmonicam.

Si expositis continue differentiis series transversales ascendentes fiant, quae semper iungant exempli causa: terminum tertium seriei primae directae, secundum secundae directae, primum tertiae directae, etc. In eiusmodi serie transversa semper termini utrinque aequidistantes sibi respondent, ut in serie: 180. 60. 60. 180. Hinc series transversae descendentes aequales directis. Unde series quoque certa ratione se per crucem intersecantes ut 60. 24. 12. eaedem sunt.

Sed maxime memorabilis proprietas haec: In differentiis primi gradus, prima differentia est $\frac{1}{2}$, secunda $\frac{1}{6}$, 3^{tia} $\frac{1}{12}$, quarta $\frac{1}{20}$ etc. termini primi.

differentiae 2^{dae} 240. 60. 24. etc. comparentur cum 360. primo termino secundae seriei descendentis, fiet

$$\begin{array}{cccc} \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} & \frac{1}{30}. \\[4pt] \frac{20}{30} & \frac{5}{30} & \frac{2}{30} & \frac{1}{30} \end{array}$$

At 180. 36. 12. in 240. sunt: $\frac{3}{4}$ $\left(\frac{15}{20}\right)$ $\frac{3}{20}$ $\frac{1}{20}$ sed satius etiam secundas et tertias differentias conferre cum termino omnium primo, ut 240. 60. 24. 12 cum 720 fiet

11–14 *Nebenrechnungen:*

$\cancel{1}\cancel{2}$

$\cancel{3}\cancel{6}\cancel{0}$ ⨍ 15 $\qquad\qquad \frac{36}{240}$ $\frac{3}{20}$

$\cancel{2}\cancel{4}\cancel{4}$

$\cancel{2}$

1 cuiusdam *(1)* proposition *(2)* seriei harmonicae | *(a)* incipi *(b)* sed integrae *erg.* | differentiae *L*
14 et tertias *erg. L*

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \left[\frac{1}{60}\right]$$

$$\frac{40}{120} \quad \frac{10}{120} \quad \frac{4}{120} \quad \left[\frac{2}{120}\right] \quad \text{seu} \quad \frac{20.\ 5.\ 2.\ 1}{60}.$$

Si semper cum antecedente vel sequente termino conferas differentiam, fiet in serie differentiarum prima $\frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$, nam 360 est $\frac{720}{2}$ sed et $360 = \frac{360}{1}$. Iam $\frac{1}{2}$ de $\frac{1}{3} = \frac{1}{6}$.

$$\begin{array}{lll} 120 = \frac{360}{3} & 120 = \frac{240}{2} & \frac{1}{3} \text{ de } \frac{1}{4} = \frac{1}{12} \\ 60 = \frac{240}{4} & 60 = \frac{180}{3} & \text{etc.} \\ 36 = \frac{180}{5} & 36 = \frac{144}{4} & \\ 24 = \frac{144}{6} & & \end{array}$$

$$\begin{array}{llllll} 240 = \frac{2}{3}\ 360 & 240 = \dfrac{120}{\frac{1}{2}} & \left(\frac{2}{1} \frown 120\right) & & 180 = \frac{3}{4}\ 240 & 180 = \frac{3}{1}\ 60 \\ 60 = \frac{2}{4}\ 120 & 60 = \dfrac{60}{\frac{2}{2}} & \left(\frac{2}{2} \frown 60\right) & & 36 = \frac{3}{5}\ \ 60 & 36 = \frac{3}{2}\ 24 \\ 24 = \frac{2}{5}\ \ 60 & 24 = \dfrac{36}{\frac{3}{2}} & \left(\frac{2}{3} \frown 36\right) & & 12 = \frac{3}{6}\ \ 24 & 12 = \frac{3}{3}\ 12 \\ 12 = \frac{2}{6}\ \ 36 & 12 = \dfrac{24}{\frac{4}{2}} & \left(\frac{2}{4} \frown 24\right) & & & \end{array}$$

---

7 *Nebenrechnung:*
$$\begin{array}{l} \ \ 3 \\ \cancel{1}\cancel{8}0 \ \cancel{\int}\ 5 \\ \ \cancel{3}6 \end{array}$$

1 $\frac{1}{40}$ *L ändert Hrsg.* 2 $\frac{1}{120}$ *L ändert Hrsg.* 3 cum *(1)* sequent *(2)* antecedente | vel sequente *erg.* | termino *L*

Numerus maximae seriei transversalis ascendentis 120. 24. 12. 12. 24. 120 intermedius (12) est semper omnium numerorum mensura communis. Semper ergo videbimus quomodo in illis contineatur mensura communis seu dividantur omnia per 12 fiet:

10		12		15		20		30		60
	2		3		5		10		30	
		1		2		5		20		
			1		3		15			
				2		12				
					10					

10 − 2	[12 − 3]	15 − 5	20 − 10	30 − 30
8	[9]	10	10	0

---

4 *Nebenbetrachtungen:*

NB.	10	2			NB.		5	25	
	15	3.	5			3			7
	30		10				8	32	
						7			13
	10	2		5)			15	45	
	15	3				[25]			35
							40	80	
	12	3		4)					
	20	5							
	15	5		3)					
	30	10							
	20	10		2)					
	60	30							

1 120 ... 120 *erg. L* 2 (12) *erg. L* 10 12 − 3 *erg. Hrsg.* 11 9 *erg. Hrsg.* 18 20 *L ändert Hrsg.*

420		210		140		105		84		70		60		
	210		70		35		21		14		10			
840		420		280		210		168		140		120		105
9		9		9		9		9		9		9		9
7560		3780		2520		1890		1512		1260		1080		945
	420		140		70		42		28		20		15	

210 − 210		140 − 70		105 − 35		84 − 21		70 − 14		60 − 10
0		70		70		63		56		50
			0		7		7		6	
					0		1			

420 − 420	280 − 140	210 − 70	168 − 42	140 − 28	120 − 20	105 − 15	
0	140	140	126	112	100	90	
							9
		0	14	14	12	10	
							5
			0	2	2		
						1	
					0		

3–6 *Nebenrechnungen:*

210	$\cancel{8}40$ ⨍ 8
<u>168</u>	$\cancel{1}05$
42	

13–17 + 263, 4–10: Leibniz hat beiden Schemata Schrägzeilen angefügt, die durch einen Schrägstrich abgetrennt wiedergegeben werden. In Z. 17 hat er die durch 90 : 10 = 9, 10 : 2 = 5 gewonnene Folge für 2 : 0 mit 1 fortgesetzt.

7560 3780 2520 1890 1512 1260 1080 945 840

3780 1260 630 378 252 180 135 105

0 1260 1260 1134 1008 900 810 735

660

0 126 126 108 90 75

60

0 18 18 15

12

0 3

[0]

3

Ex hoc fundamento videtur ratio iniri posse colligendi summam progressionis harmonicae. Quia differentiarum iniri potest summa, et differentiarum quoque inter differentias et terminos sequentes videtur haberi posse summa.

1–4 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 18\dot{9}0\\ \underline{1512}\\ 378\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\dot{5}12\\ \underline{1260}\\ 252\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\dot{5}\dot{1}2\\ \underline{378}\\ 1134\end{array}\qquad \begin{array}{r} 1\dot{2}60\\ \underline{1134}\\ 126\end{array}$$

3–8 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 3\\ \underline{5}\\ 15\\ \underline{5}\\ 75\end{array}\qquad 735 ⨍ 9$$

10 3 *ändert Hrsg.* 13 differentiarum *(1)* ratio *(2)* iniri *L*

23. PROGRESSIO FIGURAE SEGMENTORUM CIRCULI AUT EI SYGNOTAE

[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 93–94. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 94 v° u. 93 r°. Auf Bl. 93 v° u. 94 r° Cc 2, Nr. 559 (Druck in Band VII, 4).
Cc 2, Nr. 557, 558

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt.

Progressio figurae segmentorum circuli, aut ei sygnotae

[*Teil 1*]

$$\frac{100}{100} \qquad \frac{100}{108} \qquad \frac{100}{118} \qquad \frac{100}{132}$$

$$\frac{100}{100 + 1 \frown \overset{2}{}2} \qquad \frac{100}{100 + 4 \frown 2},$$ etc. divisisque omnibus per 2. fiet:

$$\frac{50}{50+1} \qquad \frac{50}{50+4} \qquad \frac{50}{50+9} \qquad \frac{50}{50+16}$$ etc. vel:

$$\frac{a}{a+1} \qquad \frac{a}{a+4} \qquad \frac{a}{a+9} \qquad \frac{a}{a+16}$$ etc. vel

$$\frac{1}{1+\frac{1}{a}} \qquad \frac{1}{1+\frac{4}{a}} \qquad \left[\frac{1}{1+\frac{9}{a}}\right] \qquad \frac{1}{1+\frac{16}{a}},$$ vel $\dfrac{1}{\frac{16}{16}+\frac{16}{a}}$ vel $\dfrac{\frac{16}{16}}{\frac{16}{16}+\frac{16}{a}}$, divisisque omnibus per 16, fiet: $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{1}{16}+\frac{1}{a}}$, vel $\dfrac{\frac{1}{16}}{\frac{a+16}{16a}}$ vel $\dfrac{a}{a+16}$.

15 $\dfrac{1}{1+\frac{9}{a}}$ *erg. Hrsg.*

$$\frac{a}{a+1} - \frac{a}{a+4} = \frac{a^2+4a-a^2+a}{a^2+4a+a+4} = \frac{5a}{a^2+5a+4},\ \text{sive omissis caeteris}\ \frac{5a}{a^2} = \frac{5}{a}.$$

Ergo differentiae huius figurae sunt homogeneae summis ex duobus numeris quadratis proximis, ut

$\underbrace{0+1}_{1}$ $\underbrace{1+4}_{5}$ $\underbrace{4+9}_{13}$ $\underbrace{9+16}_{25}$ $\underbrace{16+25}_{41}$ $\underbrace{25+36}_{61}$ $\underbrace{36+49}_{85}$ etc. quae si ducantur in distantias seu numerum terminorum, summae eorum aequantur sive homogeneae sunt summis figurae:

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
0 & & 1 & & 11 & & 51 & & 151 & & 356 & & \text{etc.} & & & & & \\
& 1 & & 10 & & 39 & & 100 & & 205 & & 366 & & 595 & & 904 & & 1305 \\
& & 9 & & 29 & & 59 & & 105 & & 161 & & 229 & & 309 & & 401 & \\
& & & 20 & & 30 & & 44 & & 56 & & 68 & & 80 & & 92 & & \\
& & & & 10 & & 14 & & 12 & & 12 & & 12 & & 12 & & & \\
& & & & & 4 & & 2 & & 0 & & 0 & & 0 & & & & \\
& & & & & & 2 & & 2 & & 0 & & 0 & & & & & \\
& & & & & & & 0 & & 0 & & 0 & & & & & & \\
& & & & & & & & 0 & & 0 & & & & & & & \\
& & & & & & & & & 0 & & & & & & & &
\end{array}$$

---

1 *Daneben:* Male.

9 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r}49\\ \underline{64}\\ 113\\ \underline{8}\\ 904\end{array}\qquad \begin{array}{r}64\\ \underline{81}\\ 145\end{array}\qquad \begin{array}{r}145\\ \underline{9}\\ 1305\end{array}$$

2 differentiae *(1)* harum *(2)* huius *(a)* progr *(b)* figurae *(aa)*, sive eius reduct *(bb)* sunt *L*

---

1 Im Zähler des mittleren Ausdrucks der Gleichungskette müßte $-a$ und konsequent im folgenden $3a$ bzw. 3 stehen. Die Addition von Termen mit der „unitas constructionis“ zu Konstanten ist jedoch nicht zulässig, wie Leibniz selbst erkennt und am Rand anmerkt. Auf S. 266 Z. 1 f. führt er die Differenzenberechnung neu durch. 8–17 Die Berechnung der Werte des Schemas wird durch zwei Flüchtigkeitsfehler — 51 statt 50 in Z. 8, 59 statt 61 in Z. 10 — beeinträchtigt.

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+1+2y} = \frac{a^5+y^2a^3+a^3+2ya^3-a^5-a^3y^2}{a^4+2a^2y^2+y^4}$$

sive $\dfrac{2ya^3}{a^4+2a^2y^2+y^4} = x$ quae ideo quadrabilia[,] ideo etiam quadrabilis figura ipsius $\dfrac{a^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ seu $\dfrac{a^4}{y^4}$ summas continens. Ita ex hyperboloeidibus vel paraboloeidibus quadrabilibus alias figuras comminisci licet, quadrabiles.

Ducantur in y, fiet: $\dfrac{2y^2a^3}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ quae etiam pendent ex circuli quadratura. Quae homogenea sunt momento omnium $\dfrac{ya}{a^2+y^2}$ horum haberi potest summa.

	1		2		6		19		66		102		etc.
0		1		5		13		25		41		61	
		1		2		3							

Igitur quando in seriem aliquam geometricam inquiritur, reducatur in arithmeticam, tum pure nullo omissso examinetur, si opus, tum omittantur quae inferioris sunt dimensionis; et, differentiae eius differentiarumve differentiae quaerantur, vel sume si alia non succedant continue differentias a differentiis et terminis seqq. omissis semper quae opus, donec incidatur in differentias inter se aequales. Quo reperto habetur quadratura. Quod si frustra ita progrediaris et vel mutata serie, vel retenta non evanescunt tandem differentiae; duc differentiarum primarum quarundam seriem in numerum terminorum, et aliam habes figuram, cuius quadratura cum figurae datae quadratura eadem, quam eodem rursus modo examinare potes.

NB. Si cuius figurae datur quadratura, etiam seriei differentiarum in numerum terminorum ductarum datur quadratura.

Inquirendum aliquando in naturas figurarum continue variantium, quae scilicet non sunt certae dimensionis sed transcendentes, ut: 1. 2. 6. 24. 120. huiusmodi figurae

2–4 ideo ... quadrabiles *erg. L* 5 f. quadratura. *(1)* Horum quae aequantur mo *(2)* homogenea *L* 10 aliquam | vel in *gestr.* | geometricam *L* 10 f. arithmeticam, *(1)* | omittantur *streicht Hrsg.* | *(a)*, quae inferi *(b)* ac *(c)* vel primu *(2)* tum *L* 12 f. vel ... seqq. *erg. L* 16 primarum *erg. L* 21 scilicet *(1)* crescunt, *(2)* non *L*

7 Richtig summiert ergeben sich die Werte 0, 1, 6, 19, 44, 85; die Fehler wirken sich nicht weiter aus.

quaerantur tangentes, aliaque. Video enim talis naturae aut similis id est transcendentem fore figuram circuli et hyperbolae quadratricem; et nemo huiusmodi figuras consideravit in geometria, cum tamen et motu continuo filorum flexorum describi queant, quando sunt quadratrices. Atque ita quadraturis illis inventis dici etiam possunt geometricae, etsi non sint aequabiles.

[*Teil 2*]

$\frac{\cancel{1}}{\cancel{1}+\cancel{a}} \fint 1 - \frac{a}{1+a}$. Nam $\frac{1}{1+a} = \frac{1+a-a}{1+a}$. Unde $= 1 - \frac{a}{1+a}$.

$$-\frac{\cancel{a}+a^2-a^2}{\cancel{1}+a} = \fint - a + \frac{a^2}{1+a}$$

$$\frac{a^2}{1+a} \fint = \frac{\cancel{a^2}+\cancel{a^3}-a^3}{\cancel{1}+\cancel{a}} \fint a^2 - \frac{a^3}{1+a}$$

$$1 \cdots\cdots - a \cdots\cdots + a^2 - \frac{a^3}{1+a} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{1-a} = \frac{1-a+a}{1-a} \fint 1 + \frac{a}{1-a}$$

$$+ \frac{\cancel{a}-\cancel{a^2}+a^2}{\cancel{1}-\cancel{a}} \fint a + \frac{a^2}{1-a}$$

$$+ \frac{a^2}{1-a} \fint a^2, \quad \frac{a^3}{1-a}$$

$$1 \cdots\cdots + a \cdots\cdots + a^2 + \frac{a^3}{1-a} \text{ etc.}$$

2 fore *(1)* quadraturam *(2)* figuram *L* 2 et hyperbolae *erg.* *L*

$$\frac{1}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}} =$$

$$\ulcorner 1 - \frac{\frac{1}{10}}{1+\frac{1}{10}} \urcorner$$

$$\cdots\cdots = \frac{\cancel{\frac{1}{10}} + \cancel{\frac{1}{100}} - \frac{1}{100}}{\cancel{1} + \cancel{\frac{1}{10}}} \cancel{f} = \ulcorner \frac{1}{10} - \frac{\frac{1}{100}}{1+\frac{1}{10}} \urcorner$$

$$\cdots\cdots = \frac{\frac{1}{100} + \frac{1}{1000} - \frac{1}{1000}}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1}{100} - \frac{\frac{1}{1000}}{1+\frac{1}{10}},$$

$$\cdots\cdots = \frac{\frac{1}{1000} + \frac{1}{10000} - \frac{1}{10000}}{1+\frac{1}{10}} = \frac{1}{1000} - \frac{\frac{1}{10000}}{1+\frac{1}{10}}$$

$$1 \cdots\cdots - \frac{1}{10} \cdots\cdots + \frac{1}{100} \cdots\cdots - \frac{1}{1000} \text{ etc.}$$

---

1 *Nebenbetrachtungen:*

$$\frac{1}{\frac{11}{10}} \quad \frac{10}{11} \qquad \frac{2}{2+\frac{1}{10}} = \frac{2+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{2+\frac{1}{10}} = \cancel{f} 1 - \frac{\frac{1}{10}}{2+\frac{1}{10}} \qquad \frac{2}{\frac{21}{10}} = \frac{20}{21} \qquad \frac{4}{4+\frac{1}{10}} \quad \frac{40}{41}$$

$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = \dfrac{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}-\frac{1}{10}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} & ⨍\ 1-\dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} & & & \\
\vdots & \vdots\quad \dfrac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} = \dfrac{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}-\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} & ⨍\ 1-\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}} & & \\
\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{15}+\frac{1}{10}} = & 1 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & -1+\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{10}+\frac{1}{15}}. & &
\end{array}$$

Sed nulli usui ista sunt.

270,1–11 *Daneben:* Nota quoniam $\dfrac{a}{a+b} = 1 - \dfrac{b}{a+b}$ ideo statim una harum fractionum in alteram converti potest, utilius autem est, [numeratorem] esse variabilem b. Hinc posito $a = 1$. erit: $\dfrac{b}{1+b}$. eoque casu in omnibus productis poterit a. semper omitti.

6 nominatorem *L ändert Hrsg.* 270,10 ba^3 *L ändert Hrsg.* 270,11 etc. | Haec nunc ad aequationem nostram: $\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2+\mathrm{a}^2} = \mathrm{y}$. applicemus, quae est aequalis huic: $1 - \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$ $\left(= \dfrac{\cancel{\mathrm{a}^2}+\mathrm{x}^2-\cancel{\mathrm{a}^2}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}\right)$. | Si iam sit *erg.* | $\mathrm{a}^3 = \mathrm{ya}^2 + \mathrm{x}^2\mathrm{y}$. fiet: $\dfrac{\mathrm{a}^3-\mathrm{ya}^2}{\mathrm{y}} = \mathrm{x}^2$. Ergo $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}} - \mathrm{a}^2 = \mathrm{x}^2$ *gestr.* | *L*

$$\frac{a}{a+b} = \frac{a+b-b}{a+b} =$$

$$1 - \frac{b}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{b+a-a}{a+b} = 1 - \frac{a}{a+b}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{b + \frac{b^2}{a} - \frac{b^2}{a}}{a+b} = \frac{b}{a} - \frac{\frac{b^2}{a}}{a+b} = \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ba}$$

$$\cdots\cdots = \frac{b}{a} - \frac{b^2}{a^2+ba}$$

$$= \frac{b^2 + \frac{b^3\cancel{a}}{\cancel{a^2}} - \frac{b^3\cancel{a}}{\cancel{a^2}}}{a^2+ba} = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3\cancel{a}}{a^3+ba^2}$$

$$\cdots\cdots = \frac{b^2}{a^2} - \frac{b^3}{a^3+ba^2}$$

$$\cdots\cdots = \frac{b^3 + \frac{b^4a^2}{a^3} - \frac{b^4a^2}{a^3}}{a^3+ba^2} = \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4+ba^3}$$

$$= \frac{b^3}{a^3} - \frac{b^4}{a^4+ba^3}$$

$$\cdots\cdots = \frac{b^4 + \frac{b^5}{a} - \frac{b^5}{a}}{a^4+ba^3} = \frac{b^4}{a^4} - \frac{a^5}{a^5+[ba^4]}$$

$$\frac{b}{a+b} = \frac{b}{a} \cdots\cdots - \frac{b^2}{a^2} \cdots\cdots + \frac{b^3}{a^3} \cdots\cdots - \frac{b^4}{a^4} \text{ etc.}$$

24. DE SERIE DIFFERENTIAE INTER SEGMENTUM QUADRANTIS ET EIUS FULCRUM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 161–162. Bl. 161 aufgeschnittener an Leibniz adressierter Briefumschlag mit schwarzem und rotem Siegel. Bl. 162 ein Bl. 2°. Haupttext auf Bl. 162. 2 S. Beilage auf Bl. 161 v°. 1/2 S. Quer beschrieben. Auf Bl. 161 v° unten Notiz (Münzrechnung). 6 Zeilen. Auf Bl. 161 r° Briefadresse in unbekannter Hand. 4 Zeilen. Gegenläufig beschrieben: „A Monsieur; Monsieur Leibnitz Consellier de son Altesse Electorale de Mayence à Paris.“
Cc 2, Nr. 633, 634

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 belegt. Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus; es ist vermutlich nicht lange danach entstanden, da es direkte Bezüge zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233A) aufweist.

[*Notiz*]

4	sols	marq.	=	5	sols comm.
				30	doubles
2	sols	m.	=	15	doubles
1				$7\frac{1}{2}$	

[*Hauptteil*]

Ostensum est a me, data ratione ineundi summam progressionis harmonicae, in infinitum productae, habitum iri quadraturam circuli. Sed et aliud quiddam admirabilius, et supra vota, ut ad usum vitae nihil aliud vel optandum videatur. Ecce enim esto series

21 f. *Links*: Error fiet.

16 | 6 sols *gestr.* | 4 sols *L* 21 ineundi *(1)* progressionem harmonicam, in infinitum productam *(2)* summam *L* 22 circuli *(1)*, hoc modo: *(2)*. Sed *L*

16 sols marq.: Der alte Sou wurde seit 1640 durch Gegenstempeln gegenüber den neueren Münzen um ein Viertel im Wert erhöht. 21 Ostensum: Leibniz bezieht sich auf die *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), s. u. Erl. zu S. 275 Z. 10–15; zur Auffassung der Kreisreihe als Differenz zweier harmonischer Reihen vgl. *LQK*, prop. XXXIV S. 81. 24 Error fiet: Leibniz erkennt nachträglich (s. u. die Erl. zu S. 277 Z. 17) den Fehler in der Argumentation und merkt die ungültigen Behauptungen an.

numerorum fractorum $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15}$ etc. Huius seriei in infinitam productae quantitatem, finitam esse, ex alibi a me demonstratis constat. Quam velut inventam ponamus esse $= \delta$. Aio hoc numero semel invento ac perpetuo constanterque

---

271,22–272,2 *Nebenbetrachtung*:

$$1 + \frac{1}{5} + \frac{1}{9} + \frac{1}{13} + \frac{1}{17} \text{ etc.} \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{7} + \frac{1}{11} + \frac{1}{15} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{1} + \frac{1}{5} = \frac{6}{5} \qquad \frac{1}{3} + \frac{1}{7} = \frac{10}{21} \quad \frac{100}{210}$$

$$\frac{1}{5} + \frac{1}{9} = \frac{14}{45} \qquad \frac{1}{7} + \frac{1}{11} = \frac{18}{77}$$

$$\frac{1}{9} + \frac{1}{13} = \frac{22}{117} \qquad \frac{1}{11} + \frac{1}{15} = \frac{26}{165}$$

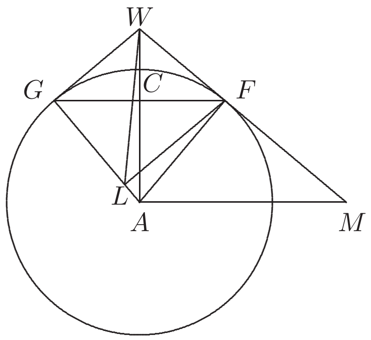
3 f. *Links*: E r r o r .

1 etc. *(1)* Posito enim radio 1, si huius seriei in infinitum productae summa appelletur *(a)* d^2 *(b)* d, atque in eam ducatur valor *(2)* | Esto *streicht Hrsg.* | series quaedam ineundo segmentum circuli datum AFCA cuius area quaeritur *(3)* Huius *L* 2 constat. *(1)* Ea ergo series, *(2)* Quam *L* 3 esse = *(1)* d. *(2)* δ. *L* 5 f. *linke Spalte* etc. | $\frac{2}{2}\ \frac{2}{10}\ \frac{2}{18}$ *gestr.* | $\frac{1}{1}$ *L* 5 f. *rechte Spalte* etc. | $1 + \frac{1}{3} = \frac{4}{3}$ *gestr.* | $\frac{1}{3}$ *L*

---

2 alibi: Leibniz bezieht sich vermutlich darauf, daß die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{(4n)^2 - 1}$ als Teilreihe der summierbaren Reihe $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2}{n^2 - 1}$ (vgl. N. 15 S. 180 Z. 6 – S. 181 Z. 8) einen endlichen Wert haben muß.

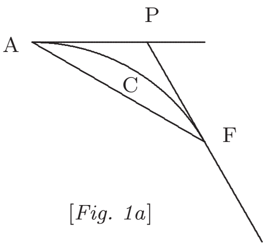
adhibito; cuiuslibet segmenti circularis aream, mirabili naturae rerum harmonia, definiri. Idque ita fiet:



[*Fig. 1*]

Dato circuli segmento $GCFG$, quod sit semicirculo minus; ad extrema eius puncta, G et F, tangentes GW, FW ducantur, quae sibi occurrant in W. Quemadmodum et radii GA, FA qui sibi occurrent in centro A. Ipsi GW, ducatur parallela LF, iungaturque WL. itemque WA. Ac WF producatur, donec ipsi AM perpendiculari ad WA, (vel parallelae ad GF,) occurrat in M. Recta FM, erit tangens complementi semiarcus CF quem vocemus g. Radius autem esto a. Rectangulum ga, sub radio, et tangente complementi semiarcus segmenti dati comprehensum, et per numerum, δ, quem semper constantem ac qualicunque segmento assumto, invariatum, diximus, multiplicatum si a triangulo GWL subtrahatur: residuum erit area segmenti propositi.

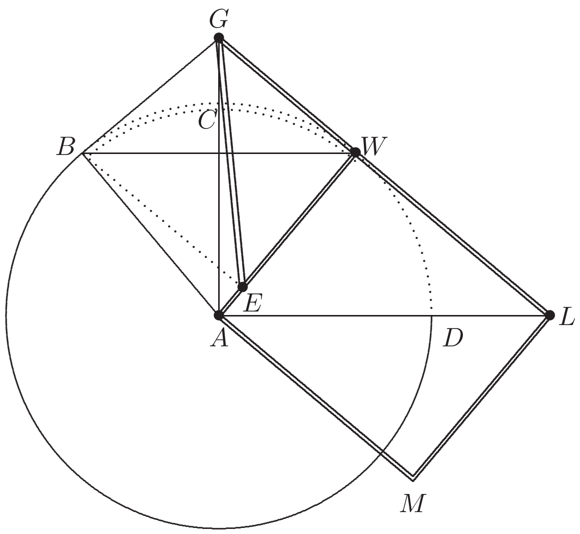
1 aream *erg.* *L* 1 rerum *(1)* lusu *(2)* harmonia *L* 2 fiet: *(1)*



[*Fig. 1a*]

Dato circuli segmento AFCA, *(a)* circulo *(b)* quod sit semicirculo minus; ad extrema eius puncta, A et F, tangentes AP, FP ducantur, quae sibi occurrant in P. Praeterea ex puncto alterutro A vel P, *(2)* [*Fig. 1*] *L*

6 GA, FA *erg.* *L* 8 tangens *(1)* arcus *(2)* complementi *L* 9 vocemus g. *(1)* Aio *(2)* Radius *L* 10 δ, *(1)* multiplicatum *(2)* quem *L*



[*Fig. 2*, *tlw. Blindzeichnung*]

Idem elegantius hoc quidem modo enuntiabitur: Proposito segmento $BWCB$, cuius arcus BCW non sit quadrante maior; si rectangulum sub radio AW et arcus WD seu complementi ipsius semiarcus CW tangente WL per numerum semper invariatum δ multiplicetur, ac productum ab EGW semirectangulo sub GW tangente ipsius semiarcus CW, et WE sinu verso arcus integri BCW subtrahatur; residuum erit area segmenti dati.

Vel ut vocabulis illis sero inter geometras receptis abstineamus:

Dato circuli segmento $BWCB$ ex centro duae educentur rectae inter se normales, AG, AL quarum altera ACG arcum datum bisecet in C, ducatur recta GWL quae utrique earum occurrat, et circulum in extremo segmenti W, (ab ea parte sumti in quam AL

2 enuntiabitur: *(1)* Dato segmento circuli, cuius arcus non sit quadrante maior; rectangulum sub radio et tangente complementi semiarcus per numerum δ, multiplicetur, ac productum a semirectangulo sub *(a)* radio *(b)* tangente ipsius semiarcus, et sinu verso arcus integri subtrahatur; *(2)* Proposito *L*
8 circuli *erg. L* 9 AG, AL *erg. L* 9 altera | ACG *erg.* | *(1)* circulum *(2)* arcum *L* 9 quae *(1)* simul et circu *(2)* utrique *L*

1 *Fig. 2*: Leibniz hat die Figur überarbeitet; es wird nur die Endfassung wiedergegeben.

ducta est) tangat. Ex altero extremo B, recta BE radio AW perpendiculariter occurrat in E. Iungatur EG tum AM ipsi AW, et LM, ipsi AM perpendiculariter incidant. Aio si rectangulum AL multiplex secundum numerum δ, adimatur triangulo GWE, differentiam fore aream segmenti $BWCB$.

Ex his facile intelligi potest, numerum δ, esse u n i t a t e imo et s e m i s s e minorem. Nam si BCW sit arcus quadrantis, erit $\square$ AL duplum $\triangle$ AW, sequitur et ex data quadratura circuli totius dari quadraturam quarumlibet partium quae geometrice abscindi possint. Et rursus vel unica eius portione quae geometrice abscindi possit quadrata, dari quadraturam caeterarum omnium, circulique totius.

Sed nunc deprehendo contemplationem istam, non quidem ex toto falsam, non tamen ab omni errore fuisse immunem, nam ex serie a me certa demonstratione inventa:

$+\frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a} - \frac{1}{5}\,\frac{b^5}{a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$, etc. hanc collegeram: $\frac{a^2}{3\gamma} - \frac{a^2}{5\gamma} + \frac{a^2}{7\gamma}$ etc. quod est falsum. At ego hinc collegeram, si per $\frac{a^2}{\gamma}$, omnia dividantur restare: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7}$ etc. hanc ergo summam $= \delta$ duci debere in $\frac{a^2}{\gamma}$, id est (γ posita $= \frac{GW}{a}$,) in $WL \frown a$, ducebam. Fundamentum autem collectionis seriei posterioris ex priori hoc erat, ponebam $\frac{a}{\gamma} = b$.

Ergo $\frac{1}{3}\,\frac{b^3}{a}$, dabit $\frac{\frac{a^3}{\gamma^3}}{3a} = \frac{a^2}{3\gamma^3}$ et $\frac{b^5}{5a^3}$, dabit: $\frac{\frac{a^5}{\gamma^5}}{5a^3} = \frac{a^2}{5\gamma^5}$ etc., fiet ergo series haec:

$$\frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9} \text{ etc.}$$

1 tangat. *(1)* Huic ex altero parallela *(2)* Ex *L* 1 recta | nimirum *gestr.* | BE *erg. L* 1 perpendiculariter *erg. L* 2 tum AM *(1)* parallela WL *(2)* perpendicularis *(3)* ipsi *L* 2 et LM, | parallela *gestr.* | ipsi *L* 2 Aio *(1)* rectangulum AL *(2)* segmentum BWC *(3)* si *L* 3 δ, *(1)* subtrahatur a triangulo GWE, residuum *(2)* adimatur *L* 13 falsum. *(1)* Sic ergo procedend *(2)* At *L* 14 $= \delta$ *(1)* multiplicari debere per *(2)* duci *L* 14 f. ducebam *(1)*, at inde non rectangulum, sed lineam tantum habuissem, volebam ergo ducere in AW, radium. Sed hoc sine causa. Rectius ergo sic procedemus: posita *(2)*. Fundamentum *L*

10–15 deprehendo: Leibniz knüpft an die *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A) an, wo die in Z. 15 erwähnte Setzung $\frac{a}{\gamma} = b$ auf *LH* 35 II 1 Bl. 241 v° gemacht wird.

Unde primum illud deduco, praeclarum, nihil opus esse, ut a ponatur $= 1$ dummodo talis ponatur, ut γ sit maior quam 1. Ideo si a ponatur $= b$ tunc γ erit $= 1$ quod fit in segmento, cuius arcus est quadrans. Eoque casu area figurae nostrae complementalis erit: $\frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9}$ etc. omisso γ cum suis potestatibus. Si γ sit maior quam 1, seu si b [minor] quam a semper crescent γ, et fractiones decrescent, tandemque negligi poterunt. Nunquam autem nostra quidem tractandi ratione γ erit minor.

At quid si alia facta suppositione ponamus $\gamma a = b$. Erit $\left[\frac{b^3}{3a}\right] = \frac{\gamma^3 a^3}{3a} = \left[\frac{\gamma^3 a^2}{3}\right]$. $\frac{b^5}{5a^3} = \frac{\gamma^5 a^5}{5a^3} = \frac{\gamma^5 a^2}{5}$ etc. De caetero si ponas $b = 1$ fiet: $\frac{1}{3a} - \frac{1}{5a^3} + \frac{1}{7a^5} - \frac{1}{9a^7}$ etc.

Porro valor huius seriei $\frac{1}{3a} - \frac{1}{5a^3} + \frac{1}{7a^5} - \frac{1}{9a^7}$ etc. in infinitum continuatae, utique finitus, semper est idem, quia a radius, est invariabilis, qualiscunque assumatur b, et si

---

6 *Links*: Semper effici potest, ut γ valeat 10. NB. quolibet valore, ipsi a dato, proportione.

7–277,16 *Nebenbetrachtung mit Nebenrechnungen*: $6 - 4 \frown a = b = 1$. Ergo $\frac{1}{6 - \sqrt{16}} = a$, et $\frac{a^2}{\delta} = \frac{1}{4\delta} = \frac{1}{36 + 16 - 12\sqrt{16}[, \frown \delta]}$. Posito iam $\langle \gamma = \rangle$ $6 - 4$ fiet $\frac{1}{36 + 16 - 12\sqrt{32}}$.

$$\begin{array}{rr} 32 & 2 \\ \underline{12} & \cancel{3}84 \\ 64 & \overline{1\ \ 2} \\ \underline{32} & \overline{\cancel{1}29} \\ 384 & \end{array}$$

---

2 sit *(1)* minor *(2)* maior *L* 4 potestatibus. *(1)* Si γ sit maior quam 1, seu si b sit minor quam a, *(2)* Imo semper sumi potest $\gamma = 1$ *(3)* Imo semper *(4)* Si *L* 5 maior *L ändert Hrsg.* 5 tandemque *(1)* ⟨etiam⟩ crescent *(2)* negligi *L* 7 $\frac{b^3}{a}$ *L ändert Hrsg.* 7 $\gamma^3 a^2$ *L ändert Hrsg.* 8 f. etc. *(1)* | et erit $\gamma = a$, *streicht Hrsg.* | fietque $\frac{a^5}{3} - \frac{a^7}{5} + \frac{a^9}{7} - \frac{a^{11}}{9}$ etc. *(2)* Porro *L* 10–277,1 si *(1)* autem *(2)* aliter *L* 14 , $\frown \delta$ *erg. Hrsg.*

aliter pro alia, aliave unitate, $b = 1$ assumta, exprimatur, appelletur autem $\dfrac{a^2}{\delta}$. Cum enim summa ista, sit aliquota ipsius quadrati radii, numerus secundum quem eius aliquota est, vocetur δ. Unde intelligitur, etsi expressio valoris ipsius $\dfrac{a^2}{\delta}$ semper mutetur, pro alia atque alia unitate seu b assumta; tamen mutationem illam influere tantum in a^2, seu valorem ipsius a, radii, exprimendum, ipso numero δ non valore tantum, sed et e x p r e s s i o n e, seu valore relativo, invariabili.

Hinc iam si BCW arcus segmenti dati, sit quadrans posito ut semper $b = GW$ esse 1, sequetur etiam $AW = a$, radium esse $= 1$ hoc quidem loco, quoniam rescissa radio aequalis est, si arcus est quadrans. Ergo, $\dfrac{a^2}{\delta} = \dfrac{1}{\delta}$. Erit ergo $\dfrac{1}{\delta} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{9}$ etc. et $\dfrac{a^2}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{\delta}$ seu f i g. h i c $GWA - \dfrac{1}{\delta}, =$ segmento quadrantis.

Si vero b sit semilatus octogoni regularis circumscripti, seu si arcus, sit octans (vide figuram calculumque in schedula separata ☿) ostendi ipsius b (DF) magnitudinem, radio posito a, esse $\sqrt{2a^2}, -a$ vel $a\sqrt{2}, -a$, vel $\llcorner\sqrt{2}, -1\lrcorner \frown a = b$. Ponatur $b = 1$ erit $\sqrt{2}, -1, \frown a = 1$ et erit $\dfrac{1}{a} = \sqrt{2}, -1$, vel $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}, -1}$. Ergo si b ponatur 1, erit $\dfrac{1}{2 + 1 - 2\sqrt{2}, \frown \delta} =$ differentiae inter triangulum in fig. schedulae NAF, et segmentum: ADA. (: Vide figuram schedulae dictae :). At vero nunc posito rursus $a = 1$ erit $b = \sqrt{2} - 1$, quod in locum 1, in invento $\dfrac{1}{2 + 1 - 2\sqrt{2}, \frown \delta}$, substituatur, fiet:

$$\frac{\sqrt{2}, -1}{2\sqrt{2} - 2\lrcorner + \sqrt{2} - 1\lrcorner - \llcorner\llcorner 2\sqrt{2} - 2\lrcorner \frown \sqrt{\llcorner 2\sqrt{2} - 2\lrcorner}\lrcorner\lrcorner\ \lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown \delta} = \frac{1}{2 + 1 - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2\lrcorner\lrcorner} \frown \delta}.$$

7 quadrans *(1)* erit *(2)* posito | ut semper *erg.* | b = GW *L* 9 f. et ... quadrantis. *erg.* *L* 11 sit *(1)* quadrans *(2)* octans *L* 15 in fig. schedulae *erg.* *L*

---

12 schedula: s. u. Beilage. 17 in locum 1: Die Substitution ist unzulässig. Leibniz rechnet konsequent weiter. In der Folge identifiziert er unzulässigerweise die Werte δ für den Quadranten und den Oktanten und erhält auf S. 280 Z. 4 schließlich einen algebraischen Wert für $\dfrac{1}{\delta}$. Leibniz erkennt die Unstimmigkeit und notiert am Rand „Nugae“.

Restat ut inveniamus in figura schedulae aream trianguli NAF, a quo subtracta quantitas proxime inventa relinquat ADA. Ac primum $AF = DF = b$ nota est, $= \sqrt{2}, -1$. Sed AN ita inveniemus, manifestum est esse $GA - GN = \underset{\overset{\wedge}{1}}{a} - GN$. Porro GN est $= ND$, quia $GA = AB$, et quia $GD = a = 1$, erit $GN = \sqrt{\dfrac{a^2}{2}} = \dfrac{a}{\sqrt{2}} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, eritque $AN = a - \dfrac{a}{\sqrt{2}}$, vel $1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Ergo ANF, triangulum vel $\dfrac{NA \frown AF}{2}$, vel $\dfrac{\sqrt{2} - 1, \frown 1 - \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2}$, erit $\dfrac{\sqrt{2} - 1 - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}}{2} = \sqrt{\dfrac{1}{2}} - 1 + \dfrac{1}{\sqrt{8}}$.

Ergo $\sqrt{\dfrac{1}{2}} + \sqrt{\dfrac{1}{8}} - 1 - \dfrac{1}{\llcorner\llcorner \underbrace{2+1}_{3} - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\lrcorner\lrcorner \frown \delta} = \odot$ aequatur ipsi ADA segmento octantis, quemadmodum ut supra ostensum est $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{\delta}$ aequatur segmento quadrantis. Sed et an sufficit considerare supplementa, pone enim esse $A - B$, et $C - D$, notamque esse rationem $\dfrac{A}{C}$, item $\dfrac{B}{D}$ quaestio est, an, inde inveniatur ratio $\dfrac{A - B}{C - D}$, sane datis $\dfrac{A}{C}$ et $\dfrac{B}{D}$ datur et: $\dfrac{\frac{A}{C}}{\frac{B}{D}} = \dfrac{AD}{BC}$. Item $\dfrac{AD + BC}{CD}$, item $\dfrac{\frac{AD+BC}{\cancel{C}D}}{\frac{AD}{\cancel{C}B}} = \dfrac{BAD + B^2C}{AD^2}$. Sed pono iam ipsos quoque terminos A, et C esse datos. Iam ergo cum data sit: $\dfrac{AD + BC}{CD}$, data erit quoque $\dfrac{D + B}{D}$, ergo et $\dfrac{B}{D}$ sed haec iam habebatur, caeterum dabitur et $\dfrac{AD}{B}$, item

7 *Links*: H o c n o t a b i l e

277,18–278,1 $= \dfrac{1}{2 + 1 - 2\sqrt{2\sqrt{2} - 2}\lrcorner\lrcorner\delta}$ $|= \odot$ *gestr.*$|$. Restat L 2 quantitas *(1)* $\dfrac{1}{\delta}$ rel *(2)* $\odot$ *(3)* proxime L 5 ANF, *(1)* rectangulum *(2)* triangulum L 9 et *(1)* ipsa supplici *(2)* an L

$\frac{D}{CB}$, sed quia nunquam ex his haberi potest $\frac{A}{D}$, vel BC, ideo nec $\frac{A}{C-D}$, nec $\frac{B}{C-D}$, ergo nec $\frac{A-B}{C-D}$. Haec ergo methodus minime sufficit.

Igitur tentandum est an possimus venire ad aequationem, qua nobis quantitas δ definiatur. Segmentis ergo hactenus inventis, sua addamus fulcra, et segmento quadrantis $\frac{1}{2}-\frac{1}{\delta}$, addamus fulcrum suum $\frac{1}{2}$, fiet $=1-\frac{1}{\delta}$ sector quadrantis. At fulcrum octantis ita inveniemus, (vide figuram schedulae), AD chorda octantis, seu latus octogoni inscripti est $\sqrt{AN^2+ND^2}$, iam $AN^2=1-\frac{1}{\sqrt{2}}, \square, =1+\frac{1}{2}-\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{2}}\right)\sqrt{2}=\frac{3}{2}-\sqrt{2}$ et $ND=GN=\frac{1}{\sqrt{2}}$ per superiora, erit $ND^2=\frac{1}{2}$ et $AN^2+ND^2=\frac{3}{2}-\sqrt{2}+\frac{1}{2}=2-\sqrt{2}$ eritque AD latus octogoni inscripti seu chorda octantis $=\sqrt{2-\sqrt{2}}$. Basis fulcri, cuius ut obtineatur et altitudo $[GP]$, effici utique potest quadrato $[AP]$, (dimidiae AD) a quadrato radii AG subducto residui enim quadrati latus erit $[GP]$ altitudo fulcri seu sinus complementi. Inde ducta $[AP]$ in $[GP]$, habebitur area fulcri. Sed praestat uti methodo quadam compendiosiore, atque elegantiore habendi aream huius fulcri, sine basi eius aut altitudine, seu chorda, aut sinu complementi, cognitis. Scilicet datur triangulum $GAB=\frac{1}{2}$ ab hoc adimatur area trianguli ADB, restabit fulcrum seu triangulum GAD, area autem trianguli ADB, facile habetur, nulla nova lineae investigatione, quia habetur eius basis $AB=1$, et altitudo $AN=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$, ergo eius area est $\frac{AB}{2} \frown AN = \frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}=\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{8}}$, auferatur a GAB $\nabla^{\text{lo}}=\frac{1}{2}$, restabit: $\frac{1}{\sqrt{8}}=$ fulcro octantis seu ∇^{lo} GAD, addatur ipsi ADA, segmento octantis, fiet sector octantis $DGAD=\left(\left(\sqrt{\frac{1}{2}}+\left(2\sqrt{\frac{1}{8}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{8}}\right)\sqrt{\frac{1}{2}}\right)\right)\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)\left(\sqrt{\frac{4}{2}}\right)\sqrt{2},-1-$

1 $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{CB}}$, *(1)* ergo et A *(2)* sed *L* 3 quantitas *(1)* $\frac{1}{\delta}$ *(2)* δ *L* 10–12 GF *bzw.* AF *L ändert Hrsg. fünfmal* 12 altitudo ... complementi *erg. L*

$$\left(\frac{1}{3-2\sqrt{2\sqrt{2}-2},\frown\delta}\right)\ \frac{1}{3\delta-\delta\sqrt{\sqrt{128}-8}.}$$

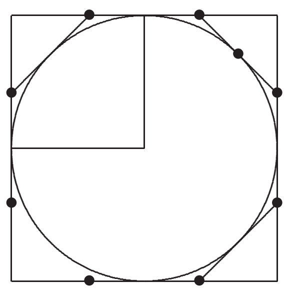
At sector quadrantis, aequatur sectori octantis duplicato, ergo:

$$\sqrt{8}-2-\frac{1}{\frac{3}{2}\delta-\delta\sqrt{\sqrt{8}-2}}=1-\frac{1}{\delta}.\ \text{Ergo}\ \frac{1}{\delta}-\frac{1}{\frac{3}{2}-\sqrt{\sqrt{8}-2}}\frown\frac{1}{\delta}=\underbrace{1+2}_{3}-\sqrt{8}.$$

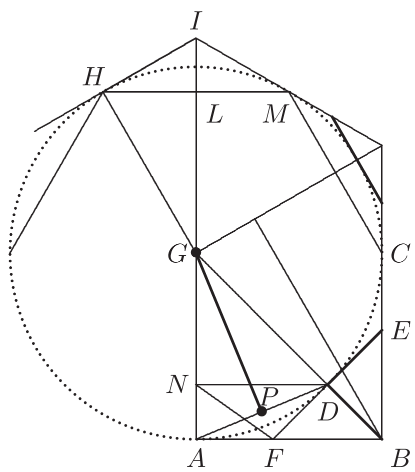
Unde fit $\frac{1}{\delta}=\dfrac{3-\sqrt{8}}{1-\dfrac{1}{\frac{3}{2}-\sqrt{\sqrt{8}-2}}}$ = segmenti quadrantis differentiae a suo fulcro, seu semiquadrato radii.

[*Beilage*]

☿. Referatur haec schedula ad eam semiplagulam, in qua demonstravi, quod $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$ etc., posito radio, $a=1$. aequentur differentiae inter segmentum quadrantis et eius fulcrum seu semiquadratum radii, $\frac{a^2}{2}=\frac{1}{2}$.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

5 *Links*: N u g a e

$$AB = a = GA = GD = GH \ [=] \ HM. \quad AF = FD = DE = EC = \frac{FE}{2} = DB.$$

Erit $GB = \sqrt{2a^2}$ et $DB = DF$, erit $\sqrt{2a^2} - a$. Erit $LG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$ eritque $\dfrac{HI}{\frac{a}{2} = HL} =$

$$\frac{HG = a}{GL}, \text{ seu } \frac{a^2}{\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}} = HI, \text{ seu } \frac{\cancel{a^2} \frown \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{\cancel{a^2} + \frac{\cancel{a^2}}{4}} \text{ seu } HI = \frac{4\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{5}.$$

$$1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

1 $=$ *erg. L*

---

2 $LG = \sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}$: Richtig wäre $\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}$. Nach einem weiteren Flüchtigkeitsfehler erhält Leibniz für HI den Wert $\dfrac{4\sqrt{a^2 + \frac{a^2}{4}}}{5}$ statt $\dfrac{2\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{4}}}{3}$.

25. DE SERIE AD SEGMENTUM CIRCULI
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 248–249. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 554.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus; es ist vermutlich kurz danach entstanden, da es direkte Bezüge zur bisher frühesten bekannten Abhandlung zur Kreisreihe, der *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), aufweist. Außerdem enthält N. 25 einen Verweis auf *De quadratura circuli et hyperb.* (Cc 2, Nr. 1237), das auf demselben Bogen steht wie N. 22 und nach diesem geschrieben ist. N. 25 ist also nach N. 22 enstanden.

[*Teil 1*]

Inventum est a me:

$\overbrace{\text{Prop. 1.}}$ Si dato quodam circuli segmento ⌓ ; cuius arcus non sit quadrante maior, radius ponatur esse $\underline{a}$, tangens semiarcus $\underline{b}$, sinus versus vero arcus integri $\underline{c}$, tunc seriei in infinitum productae $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. etc., summam, aequalem fore ipsi $\frac{bc}{2} -$ ⌓; seu residuo post segmentum datum ex semirectangulo tangentis semiarcus in sinum versum arcus ductu facto, subtractum.

Unde ante omnia consequentia ducitur eiusmodi:

$\overbrace{\text{Prop. 2.}}$ Posito radio $a, = 1$, erit: $\frac{bc}{2} -$ ⌓ $= \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc.

14 tunc *(1)* differentiam inter $\frac{\text{bc}}{2} -$ ⌓, *(a)* fore *(b)* erit = *(2)* seriem in infinitum productam *(3)* seriei *L* 16 seu *(1)* differentia resi *(2)* residuo *L*

---

12 Inventum est a me: *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo* (Cc 2, Nr. 563 u. 1233 A), LH 35 II 1 Bl. 241 r°.

Hinc statim habetur a p p r o p i n q u a t i o illa praeclara p e r p o t e s t a t e s. Modo enim a sit maior quam b, posito $a = 1$, erit $b, =$ fractioni cuidam. At fractiones quanto ad maiores assurgunt potestates, tanto sunt minores; adeo ut, si usum spectes, posteriores infinitae tuto negligi possint, sumtis tantum aliquot prioribus; et eo paucioribus quo minor est b quam a. Et vero potest b fieri quantumvis minor quam a, quia segmentum in alia minora aequalia bisectione arcus resolvi potest. Ut autem exactitudo appareat, accipe specimen:

$\overbrace{\text{Prop. 3.}}$ Si $\underline{a}$ sit plus quam decuplo maior ipsa $\underline{b}$ sumtis quatuor terminis prioribus reliqui omnes in infinitum, nondum aequant ipsius radii quadrati 1000$^{\text{mam}}$.

Ponatur enim esse $b = \dfrac{1}{10}$, ergo $\dfrac{b^{11}}{11}$, erit $\dfrac{1}{1100,000,000,000}$, sed omittamus fractiones, seu divisores, et pro $\dfrac{b^{11}}{11} + \dfrac{b^{15}}{15} + \dfrac{b^{19}}{19}$ etc. $-\dfrac{b^{13}}{13} - \dfrac{b^{17}}{17} - \dfrac{b^{21}}{21}$ etc. substituamus: $b^{11} + b^{15} + b^{19}$ etc., $-b^{13} - b^{17} - b^{21}$, etc. id enim manifeste maius priore. Huius autem seriei licet infinitae cum sit pure geometrica decrescens, haberi potest summa. Erit enim summa harum $b^{11} + b^{15} + b^{19}$ etc., $= A$, et A ad b^{11}, ut b^{11} ad $b^{11} - b^{15}$, seu $\dfrac{b^{22}}{b^{11} - b^{15}} = A$, seu $= \dfrac{b^{11}}{1 - b^4}$, vicissim $+ b^{13} + b^{17} + b^{21}$ etc., $= B$ et B ad b^{13}, ut b^{13} ad $b^{13} - b^{17}$. Ergo $B = \dfrac{b^{26}}{b^{13} - b^{17}} =$

1 praeclara *(1)*, qualis hactenus in hyperbola tantum extabat, at in circulo, undique surdis quantitatibus involuto, desperata habebatur. *(2)* p e r *L* 3 ut *(1)*, ad usum *(2)*, si *L* 4 prioribus; *(1)* pluribus paucior *(2)* et *L* 5 vero *(1)* si b *(2)* potest *L* 5 fieri *(1)* minus *(2)* quantumvis *L* 6 f. exactitudo | admirabilis *gestr.* | appareat *L* 8 b *(1)* sufficiunt quatuor termini priores *(2)* sumtis *L* 9 reliqui *(1)* enim *(2)* omnes *L* 9 aequant *(1)* $\dfrac{1}{10,000,000,000}$ *(2)* ipsius radii | quadrati *erg.* | *(a)* centesimam *(b)* 1000$^{\text{mam}}$ *L* 12 f. licet infinitae *erg.* *L* 13 decrescens *erg.* *L* 14 et A *erg.* *L*

1 a p p r o p i n q u a t i o: *a. a. O.*, LH 35 II 1 Bl. 91 r$^{\text{o}}$. 12 $-b^{13} - b^{17} - b^{21}$, etc.: Die Abschätzung der Differenz der beiden Reihen durch einen dem Betrag nach größeren Subtrahenden ist unzulässig.

$\frac{b^{13}}{1-b^4}$, ergo $A-B$, seu $b^{11}-b^{13}+b^{15}-b^{17}+b^{19}-b^{21}$, etc., erit $\frac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4}$. Iam $1-b^4$, $=$ $1-\frac{1}{10,000}$, $=\frac{10,000-1}{10,000}$ et $\frac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4} = \dfrac{\frac{1}{100,000,000\cancel{,000}} - \frac{1}{10,000,000,000\cancel{,000}}}{\frac{10,000-1}{(10\cancel{,000})}}$, vel: $\frac{10\cancel{,000}}{10,000\cancel{,000}} - \frac{1}{10,000,000} - \frac{10\cancel{,000}}{1000,000\cancel{,000}} + \frac{1}{1000,000,000}$ vel $\frac{1}{1000} + \frac{1}{1000,000,000} - \frac{1}{100,000} - \frac{1}{10,000,000}$. $\frac{1000,001,\cancel{000}}{1000,000,000,\cancel{000}} - \frac{10,100,\cancel{000}}{1000,000,000,\cancel{000}} = \frac{989,901}{1000,000,000}$. Ponatur esse: $\frac{1\cancel{000,000}}{1000,\cancel{000,000}}$ erit prope $\frac{1}{1000}$. Unde etsi termini sequentes seriei propositae omissi, sine fractionibus esse intelligantur, ac proinde multo maiores quam revera sunt; omnes tamen simul nondum ascendent ad $\left[\frac{1}{1000}\right]$. Unde error ipsis omissis nondum erit $\frac{1}{1000}$ seu unius millesimae. Unde et facile intelligi potest, quot alii termini adici debeant, quatuor assumtis, prout scilicet maior exactitudo desideratur, ut in astronomicis fieri solet.

2 $\frac{10,000-1}{10,000}$ $|= \frac{b^4-1}{b^4}$ *gestr.* | et *L* 5 $\frac{1\cancel{000,000}}{1000,\cancel{000,000}}$ *(1)* erit $= \frac{1}{10,000}$ *(2)* erit | prope *erg.* | $= \frac{1}{1000}$ *L* 5 etsi *(1)* in terminis sequentibus *(2)* termini *L* 6 proinde *(1)* sine comparatione *(2)* multo *L* 7 simul *(1)* vix ex *(2)* nondum *L* 7 ad | $\frac{1}{10,000}$ *ändert Hrsg.* |. *(1)* Quare sin *(2)* Unde *L* 7 f. erit *(1)* $\frac{1}{10,000}$ seu unius deciesmillesimae *(2)* $\frac{1}{1000}$ *L*

---

1 $\frac{b^{11}-b^{13}}{1-b^4}$: In Cc 2, Nr. 555 A berechnet Leibniz für den allgemeinen Fall den Wert $\frac{a^2b^{11}-b^{13}}{a^{11}-a^7b^4}$. 3 $\frac{10\cancel{,000}}{10,000\cancel{,000}} - \frac{1}{10,000,000} - \frac{10\cancel{,000}}{1000,000\cancel{,000}} + \frac{1}{1000,000,000}$: Leibniz multipliziert den Faktor $10,000-1$ in den Zähler statt in den Nenner und erhält als Ergebnis daher $\frac{1}{1000}$ anstelle von $\frac{1}{10,000,000,000}$.

Caeterum quoties arcus segmenti dati est quadrante minor, toties et tangens semiarcus, $= b$, ipso radio a minor est. Et quoties arcus est quadrans, toties, est $a = b$.

$\overbrace{\text{Prop. 5.}}$ Ergo si segmenti dati arcus sit quadrans peripheriae, erit: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3} - \frac{a^2}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{a^2}{9}$ etc.

Quoniam semper $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. unde posito hoc loco $a = b$, fiet, quod dixi.

Si vero a sit maior quam b, tunc potest b intelligi esse fractio, posito $a = 1$, et dici potest esse $\frac{a}{\gamma} = b$. Imo idem universaliter dici potest, sive a, sive b maior sit.

$\overbrace{\text{Prop. 6.}}$ Ergo initio assumta aequatio: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$ etc.; ita quoque exprimi potest: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$ etc.

$\overbrace{\text{Prop. 7.}}$ Contra potest fieri $a\lambda = b$, vel $a = \frac{b}{\lambda}$ (posito $\lambda = \frac{1}{\gamma}$), unde haberetur aequatio haec: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2\lambda^3}{3} - \frac{a^2\lambda^5}{5} + \frac{a^2\lambda^7}{7} - \frac{a^2\lambda^9}{9}$ etc.

Diversae hae suppositiones, quae in aliis usum haberent nullum, in his, ubi in infinitum itur, habent maximum, ut apparebit. Quemodmodum illud quoque maximi refert quem numerum uni eorum tribuas, id enim in arbitrio est, cum caeterarum valor varietur. Nam numerorum tantum rationumve, id est ipsorum valorum, absolutus est valor, caeterarum rerum respectivus, ita ut uni ex illis quemlibet pro arbitrio valorem tribuere possis, unde caeterarum quoque rerum valor varietur:

3 $\overbrace{\text{Prop. 5.}}$ *(1)* Ergo si radius, ut semper po *(2)* Ergo *L* 5 hoc loco *erg. L* 7 et *(1)* fiet *(2)* dici *L* 9 Ergo *(1)* series *(2)* initio *L* 11 vel $\mathrm{a} = \frac{\mathrm{b}}{\lambda}$ *erg. L* 16 valorum, *(1)* infinitus *(2)* absolutus *L*

3 $\overbrace{\text{Prop. 5.}}$: Zählung springt von 3 auf 5.

Primum ergo posito $a = 1$, iam supra prop. 2. ostensum est, fieri: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. ex $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc.

At posito $a = 1$, et praeterea $b = \frac{a}{\gamma}$, seu sumta serie prop. 6. quae erat: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^5} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$, fiet aequatio haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 8.}}\ \frac{bc}{2} - \frown = \frac{1}{3\gamma^3} - \frac{1}{5\gamma^5} + \frac{1}{7\gamma^7} - \frac{1}{9\gamma^9}, \text{ etc.}$$

At ex $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2\lambda^3}{3} - \frac{a^2\lambda^5}{5}$ etc., fiet aequatio haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 9.}}\ \frac{bc}{2} - \frown = \frac{\lambda^3}{3} - \frac{\lambda^5}{5} + \frac{\lambda^7}{7} - \frac{\lambda^9}{9} \text{ etc. posito } a = 1, \text{ et } \lambda = \frac{b}{a} = \frac{1}{\gamma}.$$

Quantitatem autem a, cur alteri cuidam numero, quam unitati aequalem ponamus, ratio nulla est. Illud prius videndum an caeteri termini, b, item γ vel λ aliquando sive pro unitate, sive pro aliquo numero arbitrio, ut denario inprimis sumi possint, quod nihil utique prohibet. Quoties enim ex data quadam quantitate alia haberi potest, reciproce; possumus quamlibet earum assumere velut radicem valoris, eique quamlibet tribuere quantitatem, dummodo eius suppositionis in toto processu calculi praesentis meminerimus.

Ac primum, ut a facillimo ordiamur, ponamus b seu tangentem semiarcus segmenti dati, $= 1, (1z)$ resumtaque serie sive aequatione prop. 1. Unde fiet haec:

$$\overbrace{\text{Prop. 10.}}\ \frac{bc}{2} - \frown \left(\frac{c}{2} - \frown\right) = \frac{1(z^3)}{3a} - \frac{1(z^5)}{5a^3} + \frac{1(z^7)}{7a^5} - \frac{1(z^9)}{9a^7} \text{ etc.}$$

5 $\overbrace{\text{Prop. 8.}}$ *(1)* Si a = 1, erit *(2)* $\frac{\text{bc}}{2}$ *L* 8 cuidam *(1)* quantitat *(2)* numero *L* 10 inprimis *(1)* assumi *(2)* sumi *L* 11 nihil *(1)* mea seu *(2)* utique *L* 11 ex *(1)* datis quibusdam qua *(2)* data *L* 11 alia *(1)* dari *(2)* haberi *L* 12 reciproce; *(1)* quotcunque earum da *(2)* nihil *(3)* possumus *L*

Utilius autem erit, uti ipso γ, nam, ipso λ, cum sit $\frac{1}{\gamma}$, separatim uti nihil attinet. Supra p r o p o s i t i o n e [6.] ostensa est aequatio haec: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5} + \frac{a^2}{7\gamma^7} - \frac{a^2}{9\gamma^9}$ etc. posito γ esse numerum, secundum quem a est multiplex ipsius b. Ponamus exemplum nobis oblatum esse, in quo sit $\gamma = 5$, vel $\frac{a}{5} = b$. Desiderari autem a nobis commodioris calculi causa, et ut logistica decimali uti liceat, ut γ valeat 10. Sed hoc obtineri non potest, ut cuivis rem accurate expendenti patebit. Unde nec γ vel λ possunt valere unitatem.

Sed ut clarius appareat, an, et quid inde queat duci, rem ad seriem finitam et numeros exempli gratia traducamus. Resumamus: $\frac{bc}{2} - \frown = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$, quasi nihil ultra sequeretur. Ponatur $\frac{a}{5} = b$. Ergo a posito 1 erit $b = \frac{1}{5}$, et fiet $\frac{1}{125 \frown 3 \ (1z)} - \frac{1}{3125 \frown 5 \ (1z^3)}$. Sed si poneretur $b = 1$, fieret $a = 5(1z)$ et haberemus $\frac{1(z^3)}{3 \frown 5 \ (1(z))} - \frac{1(z^5)}{5 \frown 125 \ (1(z^3))}$.

Ex his facile apparet, nihil inde duci posse universale posito $b = 1$, bene tamen $a = 1$ posito, quia a est invariabilis. Superest nunc ut in huius seriei: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. sum-

---

9–288,3 *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 25 \\ 5 \\ \hline 125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 125 \\ 25 \\ \hline 625 \\ 250 \\ \hline 3125 \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r} 13 \\ 13 \\ \hline 143 \\ 63 \\ \hline 80 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 63 \\ 15 \\ \hline 315 \\ 63 \\ \hline 945 \end{array}$$

$$16 - 1 \frown 64 - 1 = 16 \frown 64 - 16 - 64 + 1$$

1 f. attinet. *(1)* Sed non *(2)* Supra *(a)* ostensum est *(b)* p r o p o s i t i o n e |5. *ändert Hrsg.*| ostensa *L* 3 *b*. *(1)* Fingamus *(2)* Ponamus *L* 5 10. *(1)* Quod ut obineatur, *(a)* ponendum tantum est esse a $= 1$, $\frac{2\mathrm{a}}{10} = \mathrm{b}$ *(b)* $\gamma = \frac{10}{2}$ duplicetur *(2)* Sed *L* 9 Ponatur *(1)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}} = 5$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{5} = \mathrm{b}$ *L*

---

9 f. Leibniz verwendet die Potenzen von z sowohl um Potenzen von b (in der ersten Differenz in den Nennern, in der zweiten in den Zählern der Brüche) als auch um Potenzen von a (in der zweiten Differenz in den Nennern) zu kennzeichnen.

mam inquiramus $= \underset{3 \frown 5}{\dfrac{2}{15}} + \underset{7 \frown 9}{\dfrac{2}{63}} + \dfrac{2}{11 \frown 13 = 143}$ etc.

$$\frac{[96]}{15 \frown 63} \qquad \frac{[160]}{63 \frown 143} \qquad \text{etc.}$$

Si esset: $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. $= \frac{[2]}{15} + \frac{[2]}{35} + \frac{[2]}{63} + \frac{[2]}{99}$ [etc.] $= \frac{1}{3}$. Ergo $\frac{[2]}{15} + \frac{[2]}{63} + \frac{[2]}{143}$ etc. $= \frac{1}{3} - \frac{[2]}{35} - \frac{[2]}{99}$ etc.

Positum est supra esse $a = \frac{b}{\lambda}$. Ergo haec series: $\frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3} + \frac{b^7}{7a^5} - \frac{b^9}{9a^7}$ etc. elidendo a, dabit: $\frac{b^2\lambda}{3} - \frac{b^2\lambda^3}{5} + \frac{b^2\lambda^5}{7} - \frac{b^2\lambda^7}{9}$ etc.

Cum in hyperbola est $\frac{1}{1+b}$ et $b = a$, tunc eodem modo evanescunt omnia, et erit area spatii $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. Si vero sit $\frac{1}{1-b}$ et $b = a, = 1$, tunc fiet divisor infinite parvus, et dividendus infinite magnus: $\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$ etc. aequalis spatio hyperbolico asymptoto infinito.

Cumque alibi a me sit ostensum ex data hyp. quad. dari quad. circ. tunc conferendae istae series inter se.

Cum sector sit $\frac{bc}{2} -$ series + fulcrum quaerendum est an reperiri possint sectores, in quibus ea sit ratio ipsius $\frac{bc}{2} +$ fulcrum, unius ad idem alterius sectoris, quae est sectoris. Hinc enim daretur ratio serierum. Sed et sine seriebus, si darentur duo sectores, quorum fulcra essent ut segmenta haberetur ratio segmentorum, et proinde tetragonismus.

3 48 *L ändert Hrsg.* 3 80 *L ändert Hrsg.* 4 1 *L ändert Hrsg. viermal* 4 etc. *erg. Hrsg.* 5 1 *L ändert Hrsg. fünfmal.*

287,12–288,1 summam inquiramus: Leibniz führt die Überlegungen in Teil 3 anhand der Werte der halbierten Reihe in der Form $\frac{1}{16-1}, \frac{1}{64-1}, \frac{1}{144-1}$ etc. durch. 4 Si esset: Leibniz nimmt diese Überlegung in S. 298 Z. 13 wieder auf. 12 alibi: *De quadratura circuli et hyperb.* (Cc 2, Nr. 1237); vgl. auch *LQK* prop. XXXIV S. 81.

Antequam excedamus campo extrema tentanda sunt: aequatio esto cum serie finita $\frac{bc}{2} - ⌓ = \frac{b^3}{3a} - \frac{b^5}{5a^3}$. Ponatur $\frac{a}{\gamma} = b$, fiet $\frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5}$, ponatur $\gamma = 5$, fiet: $\frac{a^2}{3 \frown 125} - \frac{a^2}{5 \frown 625}$. Sed faciendum est ut sit $\gamma = 10$, quod ita fiet $\frac{ac}{2 \frown \gamma} - ⌓ = \frac{a^2}{3\gamma^3} - \frac{a^2}{5\gamma^5}$ (et $\gamma = 5$) ut vera fiat aequatio, $\frac{ac}{2 \frown 5} - ⌓ = \underbrace{\frac{a^2}{3 \frown 125} - \frac{a^2}{5 \frown 625}}_{\odot}$. Ergo $\frac{ac}{2 \frown 5} - \odot = ⌓$ vel $= \frac{ac}{2 \frown 5} + \frac{a^2}{5 \frown 625} - \frac{a^2}{3 \frown 125} =$ ⌓ positoque $a = 3$, et $c = 1$, fiet $⌓ = \frac{3}{10} - \underset{(375)}{\frac{9}{3 \frown 125}} + \frac{9}{5 \frown 625} = \frac{1035}{3750} + \frac{9}{5 \frown 625}$.

Ponamus iam potius esse $c = 2$, fiet: $a = 6$, et $\gamma = 10$, et habebimus: $\frac{12}{2 \frown 10} - ⌓ = \frac{36}{3 \frown 1000} - \frac{36}{5 \frown 100{,}000}$. Ut facilior sit calculus sumamus unum numerum tantum, esto $\frac{ac}{2\gamma} - ⌓ = \frac{a^2}{3\gamma^3}$.

2–4 *Nebenbetrachtung*: $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}\ \frac{3a - 2b}{6}$ $\qquad \frac{a^\gamma}{2} - \frac{a^\delta}{3} = \frac{3a^\gamma - 2a^\delta}{6}$

4 f. *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 125 \\ 3 \\ \hline 3750 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1250 \\ 125 \frown 9 \\ \hline 1125 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1125 \\ 90 \\ \hline 1035 \end{array}$$

3 $\gamma = 5$) *(1)*. *(a)* Igitur si initio ita fuisset a = 1, c = 3, et γ = 5, fieret *(b)* Ponatur 1 esse = 2 investigandum qualiter foret 1 *(2)* ut *L* 6 iam *(1)* unitatem hoc loco valere 2; seu esse 1 = 2r, seu fiet: a = 6, et c = 2, *(2)* potius *L*

11–13 Leibniz rechnet im mittleren Ausdruck $125 \cdot 9 = 1250 - 125 = 1125$.

Ponatur primum $a = 3l, c = 2l$ et $\gamma = 5$, et unitatem vocemus, proinde l, fiet: $\dfrac{6l^2}{10} - \dfrac{9l^2}{375} =$ ⌓. Quod si ponatur $l = 2g$, fiet $a = 6g, c = [4]g$. Unde apparet, l, unitatem, vel g, non ingredi ipsam γ. Aequatio prima fuit : $\dfrac{a}{5} = b$. Unde $\dfrac{a}{10} = \dfrac{b}{2}$, sed ita posito γ=10, non prodibit pure $\dfrac{a^2}{3\gamma^3}$ etc.

Si iam resumatur $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$, posito $b = 1$, iam a assurget ad altiores potestates, et quando adhibetur $\dfrac{a^2}{3\gamma}$, etc., ubi a ascendit tantum ad quadraticam, ibi vero non potest γ fieri $= 1$, quia est numerus.

Non omittenda hic observatio memorabilissima. Habes in hyperbola: $\dfrac{b}{1} + \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^4}{4}$ etc. Sed ipsa b rursus sunt: vel 1 vel 2 vel 3 vel 4. Hinc tabula:

---

8 f. *Nebenbetrachtung*:

$$\frac{1}{0}\quad \frac{2}{1}\quad \frac{4}{2}\quad \frac{8}{3}\quad \frac{16}{4}\quad \frac{32}{5}\quad \left[\frac{64}{6}\right]\quad \frac{128}{7}$$

$$\frac{1}{0}\quad \frac{3}{1}\quad \frac{9}{2}\quad \frac{27}{3}\quad \frac{81}{4}\quad \frac{243}{5}\quad \text{etc.}$$

$$\begin{array}{r} 8 \frown 16 \\ \underline{8} \\ 128 \\ \underline{16} \\ 768 \\ \underline{128} \\ 2048 \end{array}$$

$$\frac{8}{3}\qquad \frac{128}{7}\qquad \frac{2048}{11}$$

1 primum *(1)* a = 3, c = 2 et $\gamma = 5$, fiet ⌓ $= 3 \frown 2$ *(2)* a = 3l, c = 2l, et *(a)* $\gamma = 5$l, et unitatem vocemus, proinde l, fiet: $\dfrac{6l^2}{10l} - \dfrac{9l^2}{375l^3}$ *(b)* $\gamma = 5$ *L* 2 2 *L ändert Hrsg.* 11 $\dfrac{64}{6}$ *erg. Hrsg.*

---

3 Aequatio prima fuit: s. o. S. 287 Z. 4.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & 1 & + & \frac{1}{2} & + & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{5} & \text{etc.} \\[2ex]
 & 2 & + & \frac{4}{2} & + & \frac{8}{3} & + & \frac{16}{4} & + & \frac{32}{5} & \text{etc.} \\[2ex]
 & 3 & + & \frac{9}{2} & + & \frac{27}{3} & + & \frac{81}{4} & + & \frac{243}{5} & \text{etc.} \\[2ex]
 & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & \\[2ex]
\text{Sic} & \frac{c^2}{2} & + & \frac{c^3}{6} & + & \frac{c^4}{12} & + & \frac{c^5}{20} & + & \frac{c^6}{30} & \text{etc.}
\end{array}$$

Quaelibet series aequalis figurae ergo summa omnium serierum est summa omnium figurarum, seu momentum earum ex applicata maxima, seu basi portionis maximae, quod si ponatur maximae figurae altitudo aequalis ipsi a unitati seu lateri quadrati immutabilis, summa fiet $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}$ etc. Cuius vero seriei summa habetur $=1$, et tunc momentum quoque est aequale ipsi $a^2=1$. Sed etsi si terminus maximus assumtus sit maior quam a, et non a sed ipse ponatur esse unitas, tunc eodem modo proceditur quasi dividendus seu numerator fractionis $\frac{a^2}{1-y} = \left[\frac{a^2}{1-1}, \frac{a^2}{1-2}\right]$ esset 1 seu quasi esset $\frac{1}{1-y}$ productum autem tantum ducitur in a^2. Igitur necesse esset, ut ita summa ineatur maximam applicatam, si eam 1 esse vis pertingere ad asymptoton alioquin enim fit non $-$ sed $+$ unde alternatio summam turbans. Porro momentum ipsius figurae seu portionis spatii hyperbolici, citra asymptoton, differt a momento ex asymptoto, cylindro figurae cuius altitudo distantia $=d$ axis librationis, ab asymptoto. Ergo contra momentum illud seu

---

5 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{4}{2} & \frac{8}{6} & \frac{16}{12} & \frac{32}{20} & \frac{64}{30} \\[2ex]
 & 2 & \frac{4}{3} & \frac{8}{6} & \frac{16}{10} & \frac{32}{15}
\end{array}$$

9 $=1$ *erg. L* 12 fractionis *(1)* $\frac{a^2}{a-y} = \frac{a^2}{a-1}, \frac{a^2}{a-2}$ etc. *(2)* $\frac{a^2}{1-y} = | \frac{a^2}{a-1}, \frac{a^2}{a-2}$ *ändert Hrsg.* | esset *L* 17 $=$ d *erg. L*

$\frac{c^2}{2}+\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}+\frac{c^5}{20}$ etc. cyl. fig. seu $+\,cd+\frac{1}{2}c^2d+\frac{1}{3}c^3d+\frac{dc^4}{4}$ etc. $=ca$ seu momento figurae ex asymptoto. Summa ergo fractionum [quarum] numeratores [geometricae] nominatores [arithmeticae] progressionis, pendet a quad. hyperbolae.

Iam et si alternent signa, ut in aliis hyperbolae casibus et circulo videndum est ut $b-\frac{b^2}{2}+\frac{b^3}{3}+\frac{b^4}{4}$ etc. et b infinitis sumtis, numeroque variationum, c seu maximo $b=c$, fiet $\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}$ etc. Quod si ea sit a, nempe maxima $b=c=a=1$ fiet $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}-\frac{1}{20}$ etc.: momentum spatii hyperbolici cuius basis seu maxima latitudo a, et altitudo etiam, a, momentum inquam ex illo a. Differentia eius momenti a momento ex asymptoto $a^3=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}$ etc. erit $\frac{2}{6}+\frac{2}{20}$ etc. seu $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}$ etc. Ergo si quis summam exhibere potest huius seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{10}+\frac{1}{21}+\left[\frac{1}{36}\right]$ etc. seu fractionum triangularium per saltus, dabit q u a d r a t u r a m h y p e r b o l a e .

In circulo cum sit series $\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{11}$ etc. auferatur ab hyp. $\frac{1}{1}.\frac{1}{2}.\frac{1}{3}.\frac{1}{4}$ etc. Restabit $1+\frac{1}{2}+\frac{0}{3}+\frac{1}{4}+\frac{2}{5}+\frac{1}{6}+\frac{0}{7}+\frac{1}{8}+\frac{2}{9}$ etc. Ecce diff. inter circ. et hyp. De caetero seriei seu $\frac{b^3}{3}-\frac{b^5}{5}+\frac{b^7}{7}-\frac{b^9}{9}$ etc. summa fiet $\frac{c^4}{12}-\frac{c^6}{30}+\frac{c^8}{56}$ etc. momentum complem. fig. cissoeid. nov. ex basi, quod $=$ hyp. cuidam. Ergo ista series $=$ hyp. cuidam. Auferantur et ab hyp. interrupt.: $\frac{c^2}{2}-\frac{c^3}{6}+\frac{c^4}{12}-\frac{c^5}{20}$ etc. vel $\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$ etc. Unde eadem omissio et duplicatio alternatae.

1 seu $+$ *(1)* $\mathrm{c}+\frac{1}{2}\mathrm{c}^2+\frac{1}{3}\mathrm{c}^3$ *(2)* cd *L* 2 f. Summa *(1)* ista ita fit $\mathrm{c}+\mathrm{c}^2$ *(2)* ergo | quaerenda *gestr.* | fractionum | cuius *ändert Hrsg.* | numeratores | arithmeticae *ändert Hrsg.* | nominatores | geometricae *ändert Hrsg.* | progressionis *L* 7 momentum *(1)* figurae *(2)* spatii *L* 7 f. et *(1)* latitudo *(2)* altitudo *L* 10 $\frac{1}{28}$ *L ändert Hrsg.* 10 seu *(1)* pyram. numerorum in *(2)* fractionum *L* 14 momentum | complem. *erg.* | fig. *L* 16 eadem *(1)* interruptio *(2)* omissio *L*

[*Teil 2*]

$$\frac{2y^2a}{a^2+y^2} = \frac{2y^2a}{\begin{array}{c} a+y \frown a-y \end{array}}. \atop \qquad\qquad\qquad y+a \frown y-a$$

Si $\dfrac{y^2}{a+y} = x$. Ergo $y^2 = ax + yx$ vel $y^2 + \dfrac{x^2}{4} - yx = ax + \dfrac{x^2}{4}$. Ergo $\begin{array}{c} y-x \\ (x-y) \end{array} = \sqrt{ax + \dfrac{x^2}{4}}$.

Si $\dfrac{y^2}{a-y} = x$. Ergo $y^2 = ax - yx$. Ergo $y^2 + \dfrac{x^2}{4} + yx = ax + \dfrac{x^2}{4}$ vel $y + x = \sqrt{ax + \dfrac{x^2}{4}}$.

$$\frac{a^2}{\begin{array}{c} a-y \\ y-a \end{array}} = x. \quad \frac{a^2}{a+y} = x.$$

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+2y+1} = \frac{\cancel{a^5} + \cancel{a^3y^2} + 2a^3y + a^3 - \cancel{a^5} + \cancel{a^3y^2}}{a^4+2a^2y^2+y^4}.$$

$$\frac{y^2+2y+1 \frown a}{a^2+y^2+2y+1} - \frac{y \frown a}{a^2+y^2}$$

$$= a^3y^2 + \cancel{2}ya^3 + a^3, +y^4a + \cancel{2y^3a} + \cancel{y^2}a - \cancel{ya^3} - \cancel{y^3a} - \cancel{2}y^2a - ya$$

$$[=]\ y^4a + \cancel{y^3a} + y^2a^3 - \cancel{y^2}a + \cancel{ya^3} - \cancel{ya}$$

---

2 *Zum Gleichheitszeichen*: Error

10–294,1 = *erg. Hrsg. zweimal*

---

2 $\dfrac{2y^2a}{a^2+y^2}$: Leibniz zerlegt hier und in S. 294 Z. 2 den Term a^2+y^2 in die Faktoren $a+y$, $a-y$ und erkennt nachträglich seinen Irrtum. 10–294,1 Das Gleichheitszeichen steht hier nicht für algebraische Identität, sondern verbindet die sukzessiven Schritte einer Tangentenrechnung mit 1 als infinitesimaler Einheit. In Z. 6 wäre deshalb im Zähler der rechten Seite noch der Term $+a^3$ zu streichen. Denselben Ansatz berechnet Leibniz in *Differentiae figurae circulo homogeneae rationalis* (Cc 2, Nr. 608) und in N. 23 S. 266 Z. 1. In Z. 7 müßte im Zähler des zweiten Ausdrucks y^2 statt y stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 294 Z. 1.

$$[=]\frac{y^4a+y^2a^3}{a^4+2a^2y^2+y^4} \qquad \text{vel} \qquad \frac{ay^2+a^3, \frown y^2}{a^2+y^2 \quad \frown \quad a^2+y^2}$$

$$\begin{array}{ccc} a+y \frown a-y & & a\ +y \frown a-y \\ a-y,\square & \frown & a\ +y,\square \end{array}$$

etc.

$$\frac{a^2}{y^2+a^2}=\frac{a^2+\dfrac{a^4}{y^2}-\dfrac{a^4}{y^2}}{y^2+a^2}=\frac{a^2}{y^2}-\ \frac{a^4}{y^4+a^2y^2}.$$

$$-\ \frac{a^4}{y^4}+\frac{a^6}{y^6+a^2y^4}$$

[*Teil 3*]

NB. $\dfrac{[-1]}{b^2y^2-1}$ accedat $\dfrac{+b^2y^2}{b^2y^2-1}$, fiet $\dfrac{+b^2y^2-1}{b^2y^2-1}$. b^2 semper [16] seu $b=[4]$ at y variat per omnes numeros naturales possibiles. Infra omisso y pro eo substitutum est b.

---

1 *Zum linken Ausdruck*: Quadrab.

5 *Nebenbetrachtung*:

$$\frac{a^4}{y^4+a^2y^2}=\frac{a^4+\dfrac{a^4}{y^4}\frown a^2y^2-\ldots=\dfrac{a^6}{y^2}-\dfrac{a^6}{y^2}}{y^4+a^2y^2}. \qquad\qquad \frac{a^2}{y^2}+\frac{y^2}{a^2}=\frac{a^4+y^4}{y^2a^2}.$$

8 1 *L ändert Hrsg.* 8 4 *L ändert Hrsg.* 8 2 *L ändert Hrsg.*

---

6 Leibniz formt den letzten Term der darüberstehenden Gleichung um. 8 Leibniz setzt in Teil 3 Betrachtungen des Abschnitts S. 287 Z. 12 – S. 288 Z. 5 fort. 9 Infra omisso y: s. u. S. 297 Z. 1–8; Leibniz hat nachträglich b in y umbenannt. 12 Leibniz rechnet in der ersten Gleichung im Zähler des rechten Bruches fortlaufend.

$$\begin{array}{lll}
\dfrac{1}{16-1} & \dfrac{1}{64-1} & \dfrac{1}{144-1} \\
2 \frown 2, \square, -1 & 2 \frown 4, \square, -1 & 2 \frown 6, \square, -1 \\
4 \frown 1, \square, -1 & 4 \frown 2, \square, -1 & 4 \frown 3, \square, -1
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccl}
(4) & \dfrac{1}{16} & + & \dfrac{1}{16 \frown 16} & + & \dfrac{1}{16 \frown 16 \frown 16} & & \\
(8) & \dfrac{1}{64} & + & \dfrac{1}{64 \frown 64} & + & \dfrac{1}{64 \frown 64 \frown 64} & \text{etc.} & \\
(12) & \dfrac{1}{144} & + & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

$$\frac{1}{4 \frown 2, \square, -1} = \frac{1 - \dfrac{1}{4 \frown 2, \square} + \dfrac{1}{4 \frown 2, \square}}{4 \frown 2, \square, -1} = \frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{\dfrac{1}{4 \frown 2, \square}}{4 \frown 2, \square, -1} =$$

$$\frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{1}{4 \frown 2, \square\square, , -4 \frown 2, \square} \;[=]\; \frac{1}{4 \frown 2, \square} + \frac{1}{4 \frown 2, \square\square} \text{ etc.}$$

$$\begin{array}{cc}
\dfrac{1}{4 \frown 3, \square} & \dfrac{1}{4 \frown 3, \square\square} \\
\dfrac{1}{4 \frown 4, \square} & \dfrac{1}{4 \frown 4, \square\square} \\
\text{etc.} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$b = 4. \quad \frac{1}{16y^2 - 1} = \frac{1 - \dfrac{1}{16y^2} + \dfrac{1}{16y^2}}{16y^2 - 1} = \boxed{\frac{1}{16y^2}} + \frac{\dfrac{1}{16y^2}}{16y^2 - 1} = \frac{1}{16y^2} + \frac{1}{[256y^4 - 16y^2]}.$$

$$\frac{16y^2}{16y^2 - 1} = \frac{16y^2}{-1} \quad \left[\frac{+\,256y^4}{16y^2 - 1}\right].$$

8 $=$ *erg. Hrsg.* 12 $\dfrac{1}{16\mathrm{y}^2} + \mid \dfrac{1}{256\mathrm{y}^2 - 16\mathrm{y}}$ *ändert Hrsg.* $\mid \dfrac{1}{\begin{array}{c}256\mathrm{y}^2 - 16\mathrm{y}^2 \\ \mathrm{b}^4\mathrm{y}^2 - \mathrm{b}^2\mathrm{y}^2\end{array}}$ *gestr.* |. *L*

13 $\dfrac{-256\mathrm{y}^4 + 256\mathrm{y}^4}{16\mathrm{y}^2 -}$ *L erg. u. ändert Hrsg.*

$$\frac{b^2y^2}{\dfrac{\boxed{b^2y^2-1}}{-1+b^2y^2}} = \frac{b^2y^2\dfrac{+b^2y^2\frown b^2y^2}{-1}\;\dfrac{-b^2y^2\frown b^2y^2}{-1}}{-1+b^2y^2} = \frac{b^2y^2\dfrac{+b^4y^4}{-1}\;\dfrac{-b^4y^4}{-1}}{-1+b^2y^2} =$$

$$\frac{b^2y^2}{-1}\;\frac{\dfrac{-b^4y^4}{-1}}{-1+b^2y^2} = \frac{-b^4y^4}{+1-b^2y^2} = -b^2y^2\frac{+b^4y^4}{-1+b^2y^2} \text{ sed et sic } -b^2y^2\frac{-b^4y^4}{1-b^2y^2}.$$

Mirabile $\dfrac{b^2y^2}{b^2y^2-1} = -b^2y^2 - b^4y^4$ vel $-b^2y^2 + \dfrac{b^4y^4}{-1}$ etc. in infinitum.

$$\frac{1}{b^2y^2-1} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^2y^2-1} = \boxed{\frac{1}{b^2y^2}} + \frac{1}{b^4y^4-b^2y^2}.$$

$$\frac{1}{b^4y^4-b^2y^2} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^4y^4-b^2y^2} = \boxed{\frac{1}{b^4y^4}} + \frac{1}{b^6y^6-b^4y^4}.$$

$$\frac{1}{b^6y^6-b^4y^4} = \frac{1-\dfrac{1}{b^2y^2}+\dfrac{1}{b^2y^2}}{b^6y^6-b^4y^4} = \boxed{\frac{1}{b^6y^6}} + \frac{1}{b^8y^8-b^6y^6}. \quad \text{etc.}$$

Ergo $\dfrac{1}{b^2y^2-1} = \dfrac{1}{b^2y^2} + \dfrac{1}{b^4y^4} + \dfrac{1}{b^6y^6}$ etc.

$$\frac{1}{16y^2,-1} = \frac{1}{16y^2} + \frac{1}{256y^4} \text{ etc.}$$

$$\frac{1}{y^2-1} = 1 - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^4-y^2} \text{ etc.}$$

Idem sic quoque exprimi posset

8 *Daneben*: NB.

3 f. $= \dfrac{-b^4y^4}{+1-b^2y^2}$: Leibniz rechnet fortlaufend und formt nur den letzten Term um.

$$\frac{1}{16-1} = \frac{1}{9+6} = \frac{1}{y^2+2y} = \frac{1}{y+2} \smile y.$$
$$\frac{1}{64-1} = \frac{1}{49+14}$$
$$\frac{1}{144-1} = \frac{1}{121+22}$$

$$\frac{1}{y+2} = \frac{1+\cancel{\frac{y}{2}}-\cancel{\frac{y}{2}}}{y+2} = \frac{1}{2} - \frac{y}{2y+4}$$ duplicetur fiet: $$\frac{2}{y+2} = \frac{2-y+y}{y+2} = 1 - \frac{y}{y+2}$$

ut persequamur iam hoc: $\frac{2}{y+2}$, vel $\frac{y}{y+2}$.

$$\frac{y+\frac{y^2}{2}-\frac{y^2}{2}}{y+2} = \frac{y}{2} - \frac{y^2}{2y+4}. \quad \frac{y^2+\frac{2y^3}{4}-\frac{2y^3}{4}}{2y+4} = \frac{y^2}{4} - \frac{\frac{y^3}{2}}{2y+4} = \frac{y^2}{4} - \frac{y^3}{4y+8}.$$

Ergo: $\frac{y}{2} - \frac{y^2}{4} + \frac{y^3}{8} - \frac{y^4}{16}$ etc. divisisque omnibus per y, et multiplicatis per 2 fiet:

$$\begin{array}{lccccccccc}
 & 1 & - & \frac{y}{2} & + & \frac{y^2}{4} & - & \frac{y^3}{8} & & \text{etc.} \\
\text{Ergo} & 1 & & \frac{3}{2} & & \frac{9}{4} & & \frac{[27]}{8} & & \\
 & 1 & & \frac{7}{2} & & \frac{49}{4} & & \frac{[343]}{8} & & \\
 & 1 & & \frac{11}{2} & & \frac{121}{4} & & \frac{1331}{8} & & \\
 & \text{etc.} & & & & & & & & \\
 & \cdot & - & \cdot & + & \cdot & - & \cdot & &
\end{array}$$

9–11 *Nebenrechnungen*:

$$\frac{9}{4} - \frac{3}{2} = \frac{6}{8} \,\Big|\, \frac{3}{4} \qquad \frac{49}{4} - \frac{7}{2} = \frac{98-28}{8} = \frac{70}{8}$$

9 81 *L ändert Hrsg.* 10 729 *L ändert Hrsg.*

	1	1	1
	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$
	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$
	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{64}$
	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	$\frac{1}{125}$
	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{216}$
(1)	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{256}$	etc.
(2)	$\frac{1}{16 \frown 16}$	$\frac{1}{256 \frown 256}$	

$$\begin{array}{ccccccccccc}
30 & & 20 & & 12 & & 6 & & 2 & & 0 \\
 & & & 8 & & 6 & & 4 & & 2 & \\
 & & & & 2 & & 2 & & 2 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
294 & & 180 & & 100 & & 48 & & 18 & & 4 & & 0 \\
 & 114 & & 80 & & 52 & & 30 & & [14] & & 4 & \\
 & & 34 & & 28 & & 22 & & [16] & & 10 & & \\
 & & & 6 & & 6 & & 6 & & [6] & & &
\end{array}$$

Si esset $\frac{1}{15}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{63}\ \frac{1}{99}$ etc. seu $\frac{1}{16-1}\ \frac{1}{36-1}\ \frac{1}{64-1}\ \frac{1}{100-1}$, fieret

1–7 *Nebenrechnungen*: $4-2=2 \quad 9-3=6 \quad 16-4=12 \quad 25-5=20$ etc.
$8-4=4 \quad 27-9=18 \quad 64-16=48 \quad 125-25=100$

6 16 *L ändert Hrsg.* 7 14 *L ändert Hrsg.* 8 4 *L ändert Hrsg.*

12 Si esset: Leibniz nimmt die Überlegung von S. 288 Z. 4 f. wieder auf.

$$\left.\begin{array}{ccccccc}
\frac{1}{16} & + & \frac{1}{16 \frown 16} & + & \frac{1}{16 \frown 16 \frown 16} & & \text{etc.} \\
\frac{1}{36} & + & \frac{1}{36 \frown 36} & + & \frac{1}{36 \frown 36 \frown 36} & & \text{etc.} \\
\frac{1}{64} & + & \frac{1}{64 \frown 64} & + & \frac{1}{64 \frown 64 \frown 64} & & \text{etc.} \\
\text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.}
\end{array}\right\} = \left[\frac{1}{6}\right].$$

Unde videtur apparere progressiones has fore summabiles modo termini sint finiti. Sed quia numerus terminorum infinitus, adeo ut nec spatio aliquo finito exhiberi possit, eluditur opera, si tamen vocetur b, inde sequetur summa haec: $b - \frac{[b^2]}{4} + \frac{[b^3]}{12} - \frac{[b^4]}{32} + \frac{[b^5]}{80}$ etc. quod etsi b intelligatur numerus sine limitatione infinitus figurae nostrae aequale est. Unitas autem hoc loco est radii quadratum.

Mira haec contemplatio.

2 $\frac{1}{3}$ *L ändert Hrsg.* 5 *(1)* Iam sumto *(2)* Unde *L* 7 $2b^2$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^3$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^4$ *L ändert Hrsg.* 7 $2b^5$ *L ändert Hrsg.* 8 f. est. *(1)* Quae hic signi *(2)* Unitas *L*

26. DE APPROPINQUATIONE CIRCULI PER SERIEM I
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 80+124. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge 80 r°, 124 v°, 80 v°, 124 r°. Geringe Textverluste durch Ausrisse im Falz. Auf Bl. 124 r° rechts oben Notiz (Münzrechnung), vor Teil 4 geschrieben.
Cc 2, Nr. 556.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt. Das Stück ist vermutlich kurz nach der Entdeckung der Kreisreihe, jedoch vor der spätestens Mitte 1674 anzusetzenden Abhandlung Cc 2, Nr. 555 A und vor N. 34 (s. Erl. zu S. 355 Z. 2 u. S. 355 Z. 4) entstanden, welche die in N. 26 berechneten Werte für $\frac{b^3}{3}$ und $\frac{b^5}{5}$ — Cc 2, Nr. 555 A auch den Wert $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ — (s. S. 307 Z. 15 u. S. 308 Z. 12 u. S. 308 Z. 15) übernehmen.

[*Notiz*]

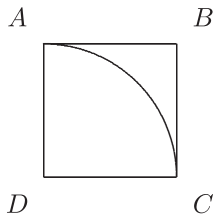
1 10	110	$\cancel{2}15$	$\cancel{f}$	$10\frac{15}{}$
$22\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	$\cancel{2}\cancel{0}0$		10 fr. 15.
$12\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$	2		
3	13			
$2\frac{1}{2}$	$2\frac{1}{2}$			
	5			
65	60			
$[215\frac{1}{2}]$	$1\frac{1}{2}$			
	$215\frac{1}{2}$			

20 $5\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

[*Teil 1*]

$$\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}+\frac{1}{15}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}-\frac{1}{21}+\frac{1}{23}-\frac{1}{25}.$$

$$\begin{array}{cccccc} \diagdown\!\diagup & \diagdown\!\diagup & \diagdown\!\diagup & \diagdown\!\diagup & \diagdown\!\diagup & \diagdown\!\diagup \\ \frac{2}{15} & \frac{2}{63} & \frac{2}{143} & \frac{2}{255} & \frac{2}{399} & \frac{2}{[575]} \end{array}$$



[*Fig. 1*]

$\frac{126+30}{945} = \frac{156}{945} \times \frac{2}{143} = \frac{24198}{135135} + \beta = ABCA$. Ergo $1 - \frac{24198}{135135}$ etc. $\beta = ADCA = \frac{110937}{135135}$ etc. Adde hanc seriem utcunque lubet in infinitum, nunquam attinget eius diffe-

---

2–302,1 *Nebenrechnungen:*

17	24	156	945	2835	135135
15	24	143	143	945	24198
$\overline{85}$	$\overline{96}$	$\overline{468}$	$\overline{2835}$	$\overline{3780}$	$\overline{110937}$
17	48	624	3780		
$\overline{255}$	$\overline{576}$	156	945		
		$\overline{22308}$	$\overline{135135}$		
		1890			
		$\overline{24198}$			

3 576 *L ändert Hrsg.* 5 etc. β *erg. L* 6 nunquam *(1)* excedes *(2)* attinget *L*

rentia ab 1, $\frac{6,283,800}{8,000,000}$. Imo nunquam attinget $\frac{628,318,53[3],600}{800,000,000,000}$.

Si radium ducas in octavam circumferentiae partem habes quadrantem circuli, qui aequatur differentiae seriei nostrae ab 1. posito radio 1.

Radio posito 1,000,000 circumferentia est inter $\frac{6,928,200}{6,000,000}$ vel inter $\frac{6,283,800}{6,282,720}$ vel radio posito 100,000,000,000 inter $\begin{cases}628,318,53[3],600\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 12,000\end{cases}$. Ergo ratio: $\frac{\text{rad.}}{\text{circ.}}$ $\frac{1,000,000}{\begin{cases}6,283,800\\ 6,282,720\end{cases}}$.

Ergo $\frac{\text{circ.}}{\text{rad.}} = \frac{\begin{cases}\ldots\ldots\\ \end{cases}}{\ldots\ldots}$. circ. $= \frac{\begin{cases}\ldots\ldots\\ \end{cases}}{\ldots\ldots} \frown$ rad. Ergo si rad. = 1. erit circumf.= $\begin{cases}\frac{\begin{cases}6,283,800\\ 6,282,720\end{cases}}{1,000,000}\end{cases}$.

Radio posito 1,000,00$\cancel{0}$ erit tangens 30. grad.: 577,35$\cancel{0}$. Ergo $\frac{\text{rad.}}{\text{tang.}} = \frac{100,000}{57735}$, seu

---

1 *Nebenbetrachtungen*:

$$\frac{\begin{cases}6,283,800\\ 6,282,720\end{cases}}{8,000,000} \qquad \frac{62838}{80000} \qquad \frac{31429}{40000} \qquad \begin{array}{l} \;857\\ \cancel{1}\cancel{9}\cancel{6}\cancel{8}9\\ \cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} ⨍ 1\\ \cancel{3}\cancel{4}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{9}\end{array} \qquad \begin{array}{l}31429 ⨍ 3\\ \underline{8579}\end{array} \qquad \frac{1}{1+\frac{8579}{31429}}$$

$$\frac{1429}{40000} \qquad \frac{143\cancel{0}}{4000\cancel{0}} \qquad \frac{142}{4000}\Big|\frac{71}{2000} \qquad \frac{7\cancel{0}}{200\cancel{0}} \qquad \frac{1}{30} \qquad \frac{3}{4}+\frac{1}{30}$$

1+5 5 *L ändert Hrsg. zweimal*

1–311,22 $\frac{6,283,800}{8,000,000}$: Die Näherungswerte 6,283,800, 628,318,533,600, 6,928,200, 6,282,720 und 628,318,512,000 für den Kreisumfang sowie unten der Winkelfunktionen tan 30° $= 0,57735$, tan 1° $=$ $0,017455$ und sin 1° $= 0,017452$ hat Leibniz vermutlich aus I. G. PARDIES, *Elémens de géométrie*, 1671, livre IX, articles 39–41 S. 114–116 entnommen. 10 f. $\frac{31429}{40000}$: Richtig wäre $\frac{31419}{40000}$; bei der Division unterläuft Leibniz ein weiterer Fehler (8579 statt 8571). Er rechnet konsequent weiter. Das Ergebnis der zweiten Abschätzung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

tang. $= \dfrac{57735}{100,000} \frown 1$ (rad.), posito rad. = 1. Ducatur ter in se ipsum fiet:

$$\begin{array}{ccc} & 0 & \quad 0 \\ 0 & \times & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{rr}
 & \cancel{5}\cancel{7}\cancel{7}35 \\
 & \underline{57735} \\
 & 288675 \\
 & 173205 \\
 & 404145 \\
 & 288675 \\
\hline
 & 331110225 \\
 & 57735 \\
\hline
 & 165555\cancel{1}\cancel{1}\cancel{2}\cancel{5} \\
 & \cancel{9}\cancel{9}33\cancel{3}0\cancel{6}75 \\
 & \cancel{2}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{1}\cancel{5}75 \\
 & 2317771575 \\
 & 1655551125 \\
\hline
3) & \cancel{1}\cancel{9}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{0}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{5} \\
 & \cancel{1}\cancel{2}\quad\cancel{1}\;\cancel{2}\quad\cancel{1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
288675 \\
173205 \\
404145 \\
404145 \\
288675 \\
\hline
3333330225
\end{array}$$

$$\sqcap \quad \frac{637\,22162\,80125}{1,00000,00000,00000}$$

---

1 *Nebenbetrachtung*:

$$\frac{57}{100} \qquad
\begin{array}{r}
57 \\
\underline{57} \\
399 \\
2\ 85 \\
\hline
3\ 249 \\
57 \\
\hline
22\ 743 \\
162\ 45 \\
\hline
185\ 193 \\
\hline
1{,}000{,}000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{l}
1,00,00,00 \\
\\
100,0000 \\
1 \\
1 \\
\\
\sqcap \ \dfrac{61\ 731}{1000,000}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & 3 & \quad 21 \\ 3 & \times & 7 \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & 6 & \quad 15 \\ 3 & \times & 5 \end{array}$$

---

6 Leibniz vergißt bei der Multiplikation, den Summanden 404145 zweimal anzuschreiben. Der Fehler wirkt sich aus bis Z. 15. Leibniz erkennt dies und setzt in Z. 4, rechte Spalte, neu an.

57735

3333330225

: : : : 288675

. . . 115470

. . 11547

1732050

173205

173205

173205

173205

173205

3)$\cancel{1}9\cancel{2}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{2}0\cancel{5}\cancel{4}0\cancel{3}\cancel{7}\cancel{5}$ ⨍ $\dfrac{6\cancel{4}\cancel{1}\cancel{4}\ \cancel{9}\cancel{9}\cancel{4}01\ \cancel{8}0\cancel{1}2\cancel{5}}{100000,00000,00000}$

$\cancel{1}\ \cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{1}\ \ \cancel{2}$

192449820540375

331110225

962249102701875

384899641080750

384899641080750

1924498205403750

192449820540375

192449820540375

577349461621125

577349461621125

6372210338033318783437 5

$\cancel{6}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{1}0\cancel{3}\cancel{3}\cancel{8}0\cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{8}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{5}$

5) $\cancel{1}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{1}\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\ \cancel{3}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{3}\cancel{2}$

6414994018012500000000000

prod. $\cancel{1}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{2}0\cancel{6}\cancel{7}\cancel{6}0\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{5}$

6287549811251833624331 25

10000000000000000000000000

[*Teil 2*]

$$\frac{a^2}{y^2+a^2} = \boxed{\frac{a^2}{y^2}} - \frac{a^4}{y^4+a^2y^2}. \quad -\frac{a^4}{y^4+a^2y^2} = \boxed{-\frac{a^4}{y^4}} + \frac{a^6}{y^6+a^2y^4} \text{ etc.}$$

$\dfrac{a}{y+a} = \dfrac{a}{y} - \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3} - \dfrac{a^4}{y^4}$ etc. $\dfrac{y}{y+a} = \dfrac{y}{a} - \dfrac{y^2}{a} + \dfrac{y^3}{a^3} - \dfrac{y^4}{a^4}$ etc. Iam $\dfrac{a}{y+a}$ est $= 1 - \dfrac{y}{y+a}$. Ergo $\dfrac{a}{y} - \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3} - \dfrac{a^4}{y^4}$ etc. $= 1 - \dfrac{y}{a} + \dfrac{y^2}{a^2} - \dfrac{y^3}{a^3} + \dfrac{y^4}{a^4}$ etc.

Et quoniam non tantum omnium paraboloeidum, sed etiam omnium hyperboloeidum summa datur, demta prima ideo harum summarum differentia dabit $\dfrac{a}{y}$. Et credo dabit alia fractionum serie. Hinc habebitur summa ipsius $\dfrac{a}{y}$; seu incipiendo ab asymptoto; expressa serie alternatim negante, cum alias non nisi alternatim affirmante haberi soleat. Sed an non inde sequitur spatium asymptoton non omni magnitudine infinitum? Imo est.

Si sic: $\dfrac{a}{y-a}$, tunc easdem partes quas ante per $+$ et $-$ alternatim, tractare iam potes per purum $+$. Ita ipsum y semper maius quam a, fit autem $\dfrac{a}{y} + \dfrac{a^2}{y^2} + \dfrac{a^3}{y^3}$ etc. Item si sit $\dfrac{y}{a-y}$ (complementum ipsorum $\dfrac{a}{a-y}$) fit $\dfrac{y}{a} + \dfrac{y^2}{a^2} + \dfrac{y^3}{a^3}$ etc. Conferenda ista omnia

---

304,14 *Links*: $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$ etc. $\dfrac{b^2}{a} - \dfrac{b^4}{a^3} + \dfrac{b^6}{a^5} - \dfrac{b^8}{a^7}$. 1 ∞ $\dfrac{b^2}{a^2}$, seu si maius est ut a^2, proxime minus est b^2.

10 $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{y-a}}$, | vel $\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{y-a}}$ *gestr.* | tunc *L* 10 per + | *(1)* iam *(2)* et − alternatim *erg.* |, tractare *L* 11 Ita *(1)* maximum y *(2)* ipsum *L* 11 f. Item *(1)* fit *(2)* si *L*

304,15 331110225: Leibniz rechnet mit dem von ihm zuvor als falsch erkannten Wert für 57735^2 weiter. Der Fehler beeinträchtigt das Ergebnis der Rechnung. Leibniz bricht ab und setzt in Teil 3 zu einer weiteren Kreisrechnung an.

in ipsis figuris. Ex quibus hic etiam usus ut videantur maiora spatia metiri posse, etiamsi non cum Wallisio ponamus $y = 1$ sed $a = 1$ ut alias semper.

[*Teil 3*]

Radio posito $1,000,000$ tangens 1. gradus. Ergo radio posito 1. tangens 1. gradus est: $\dfrac{17455}{1,000,000} = b$.

17			$\dfrac{17}{1000}$
17			
119			
17			
289			$1,000,000$
17			
2023			
289	$\cancel{1122}$		
4913	$\cancel{4913}$ $\cancel{f}$	$1637\frac{2}{3}$	$\vert 1,000,000,000$
289	$\cancel{333}$		
44217			
39304			
9826			
1419857	3)	$473285\frac{2}{3}$	$\vert 1,000,000,000,000,000$
4913000000		$1637,000,000$	$\frac{17}{2}000,000,000$
1419857		473 285	1 636, 526, 715
4911580143		1636 526 715	6, 363, 473, 285
[1, 000, 000, 000, 000, 000]			1, 000, 000, 000, 000, 000

---

5 *Nebenbetrachtung*: Sinus versus 2. grad. $\dfrac{1000-999}{1000} = \dfrac{1}{1000}$ ducatur in tang. 1. grad. dimid. $\left[\dfrac{8\frac{1}{2}}{1000}\right]$, fiet $\dfrac{8\frac{1}{2}}{1000,000}$.

4 17455
17455
87275
87275
69820
122185
17455
304677025 b^2
7 17455
1523385125
1523385125
1218708100
2132739175
304677025 0, 000, 000, 000, 000
1 1 3) $\cancel{5}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{1}\cancel{3}\cancel{7}\cancel{4}71375$ b^3 $\cancel{f}$ 1 772 712 490 458$\frac{1}{3}$ $\frac{b^3}{3}$
$\cancel{3}\cancel{2}$ $\cancel{2}$ $\cancel{0}\cancel{1}\cancel{2}$ $\cancel{1}\cancel{2}$
$\cancel{2}$

306,4 1, 000, 000 tangens *(1)* minuti *(2)* 1. gradus *L* 306,4 f. 1. tangens *(1)* minuti *(2)* 1. gradus *L* 306,7 dimid. | 17 *ändert Hrsg.* |, fiet *(1)* 1700 *(2)* $\frac{17}{2} = 8\frac{1}{2}$ *(3)* $\frac{8\frac{1}{2}}{1000,000}$ *L* 306,21 *mittlere Spalte* 3) 473285$\frac{2}{3}$ *erg. L* 306,22 *rechte Spalte (1)* 17000, 000, 000 *(2)* $\frac{17}{2}$000, 000, 000 *L* 306,24 *rechte Spalte (1)* 5, 363, 473, 285 *(2)* 6, 363, 473, 285 $\frac{1}{2}$ *(3)* 6, 363, 473, 285 *L* 306,25 1, 000, 000, 000, 000 *L ändert Hrsg.*

306,2 non cum Wallisio: Vgl. J. Wallis, *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris*, 1668, S. 755. 306,4 17455: S. Erl. zu Z. 302,1. 306,6 f. Leibniz berechnet eine Abschätzung für den Wert $z \cdot \frac{b}{2} - \left(\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}\right)$, wobei z = sinus versus 2°. Dabei unterlaufen ihm mehrere Flüchtigkeitsfehler. In Z. 7 vergißt er zunächst b zu halbieren und mit dem Faktor $\frac{1}{1000}$ zu multiplizieren. Er bemerkt den Fehler später und korrigiert hier und in S. 306 Z. 22–24, rechte Spalte, unvollständig. In S. 306 Z. 21 teilt er b^5 durch 3 statt durch 5, was das Ergebnis zusätzlich beeinträchtigt. Der in S. 306 Z. 22–24, linke Spalte, ermittelte Wert $b^3 - b^5$ wird nicht verwendet.

7
7 1 7 7

$$\begin{array}{rl}
5318137471375 & \\
304677025 & \\
\hline
26590687356875 & \\
10636274942750 & \\
372269622996250 & \\
37226962299625 & \\
31908824828250 & \\
21272549885500 & \\
159544124141250 & \\
\hline
16203143033195557659375 & b^5 \\
\cancel{1}\qquad\qquad \cancel{4}\;\; \cancel{2}\cancel{1}\; \cancel{4}\; \cancel{2} & \\
5)\ 3240628606639111531875 & \dfrac{b^5}{5} \\
\text{Ergo } 1772712490458000000000000 & \\
3240628606639111531875 & \\
\hline
1772388427597336088468125 & \\
\hline
1000,000,000,000,000,000,000,000,000,000 & \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^5}{5}
\end{array}$$

Iam ut sinum versum habeamus arcus 2. grad. quaerendus est eius sinus e, qui est $\dfrac{348995}{10,000,000}$. Unde facile habetur sinus versus, nam esto sinus versus z. est $\dfrac{z}{e = 348995} = \dfrac{b}{1} = \dfrac{\text{seu tang. semiarcus} = b}{\text{ad} \atop \text{rad.} = 1} = \dfrac{17455}{1,000,000}$. Ergo $z = b \frown e$ [,] qui z. ducendus in b, faciet $b^2 e$. Ergo

---

307,15 *Nebenbetrachtung*:

17455000,000,,000,000,,000,000	17455000,000,,000,000
1 772,712,,490,458	1772,712, 490,458
17454999,998,,227,287,,509,542	17453227,287, 509,542
180	180
139639999,985, 818,300, 076,3360	139625818,300, 076,3360
174549999 982 272 875 095 42	174532272 875 095 42
314189999 968 091 175 171 7560	314158091 175 171 7560

$$\begin{array}{r}
304\ 677\ 025 \\
348\ 995 \\
\hline
1\ 523\ 385\ 125\ \aleph \\
27\ 420\ 932\ 25 \\
274\ 209\ 322\ 5 \\
2\ 437\ 416\ 200 \\
12\ 187\ 081\ 00 \\
91\ 403\ 107\ 5 \\
\hline
10\cancel{6}\ \cancel{3}\cancel{3}0\ 7\cancel{5}\cancel{8}\ 3\cancel{3}\cancel{9}\ \cancel{8}\cancel{7}\cancel{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc} & 5 & \\ 7 & \times & 2 \\ & 5 & \end{array}\ 14$$

Imo ut supra sumseram tang. semiarcus seu unius gradus solum $\dfrac{17455}{1,000,000}$, non $\dfrac{174551}{10,000,000}$ ita hic non per 348995, sed per 34899 multiplicandum. Ergo subtrahatur a producto $\aleph$, nempe 1523385125.

$$\begin{array}{ccc} & 6 & \\ 7 & \times & 6 \\ & 6 & \end{array}\ 42$$

$$\begin{array}{r}
[10,000,000,000,000,000,000] \\
1\ 523\ 385\ 125 \\
\hline
[106\ 329\ 234\ 954\ 750,\ 000,000,000,00]
\end{array}$$

$$\frac{[106\ 329\ 234\ 954\ 750,\ 000,000,000,00]}{1,000,000,000,000,000,000,\ 000,000,000,000} = b^2e. \text{ Ab hoc subtrahatur } \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}.$$

$$\frac{1,772,388,427,597,\ 336,088,468,125}{} = \frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$$

$$104,556,846,527,152,\ 663,911,531,875 = \text{residuum, aequale segmento arcus}$$

cui addendum est fulcrum 2. graduum, et habebitur sector 2. grad. seu [180$^{\text{ma}}$] circuli portio. Fulcrum autem est triangulum, quod habet basin, chordam arcus 2. grad. seu duplicem sinum arcus 1. grad. et altitudinem sinum complementi unius grad.: Est autem $\dfrac{\text{rad.}}{\text{sin. compl.}} = \dfrac{\text{tang.}}{\text{sin.}}$ seu sin. compl. $= \dfrac{\text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{tang.}}$ et si rad. $= 1$. erit $= \dfrac{\text{sin.}}{\text{tang.}}$. Est

308,16 arcus 2. grad *erg. L* 308,18 $=$ *L ändert Hrsg.* 10 $100,000,000,000,000,000,000$ *L ändert Hrsg.* 12 106 329 234 954 750 000 000 000 000 *L ändert Hrsg.* 15 f. arcus *(1)* quo subtrahen *(2)* cui *L* 16 seu *(1)* sexagesima *(2)* | 30$^{\text{ma}}$*ändert Hrsg.* | circuli *L* 17 est triangulum, quod *erg. L* 18 complementi *(1)* arcum *(2)* unius *L*

308,21 Leibniz setzt in der linken Spalte den Wert für b um den Faktor 10^6 zu hoch an; er bemerkt den Fehler und setzt in der rechten Spalte neu an. 12 Ab hoc subtrahatur: Es müßte von $\dfrac{b^2e}{2}$ subtrahiert werden. Leibniz erkennt den Fehler und stellt eine neue Berechnung an.

autem sin 1. grad. $= \frac{17452}{1,000,000}$ et tang. eiusdem est $\frac{17455}{1,000,000}$, erit sin. compl. $= \frac{17452}{17455}$. Ducatur in semichordam seu sinum arcus 1^{mi} gradus, fiet $\frac{17452\square}{17455 \frown 1,000,000} = \frac{17452 - 3 \frown 1 - \frac{3}{17455}}{1,000,000}$ ⟨— —⟩.

Sed ne fractione decimali sit exeundum sumamus sinum complementi grad. 1. seu sinum grad. 89. ex tabulis, qui est 999847. Eum ducamus in sinum arcus primi gradus: 17452, fiet:

309,12 *Nebenbetrachtung*: Imo ad habendum sinum versum arcus 2. grad. tantum sinus compl. arcus 2. grad. subtrah. a radio

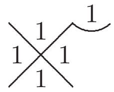
1,000,000	17455	cuius dimid.
999,390	610	5323775000,000,000,000,000,000
0,000,610	174550	1772388427,597,336,088,468,125
	104730	3551386372 402 663 911 531 875.
	10647550	
	1000,000,000,000	

2 gradus, *(1)* restituitur *(2)* fiet *L* 4 f. grad. 1. seu sinum grad. 89. *erg. L* 311,8–10 *(1)* | addatur $b^2e - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} = \frac{17{,}449{,}329{,}844|000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}{1{,}000{,}000{,}000{,}000|000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}$ 104,556,846,527,152,663,911,531,875 *streicht Hrsg.* | sector circuli, 2. grad. .... $\frac{1{,}847{,}086{,}690{,}527{,}152{,}663{,}911{,}531{,}875}{1{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000{,}000}$ *streicht Hrsg.* | *(a)* ductus in 180 dabit ipsum circulum, et ductus in 90 semicirculum *(b)* ductus in 30 *(2)* Addatur *(a)* fulcrum ex sin. rect. et sin. compl. 1. gr. factum *(b)* segmentum *L*

---

1 $\frac{17455}{1,000,000}$: S. Erl. zu S. 302 Z. 1.

999 847
17 452
1 999 694
49 992 35
399 938 8
6 998 929
9 998 47
$\cancel{17,449,329,844}$ | 000,000,000,000,000,000
1,000,000,000,000 | 000,000,000,000,000,000



Addatur segmentum quod est differentia inter rectangulum sub semisinu [verso] arcus 2. grad. et tang. 17,449,329,844,000,000,000,000,000,000

arcus 1. grad. [et $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$] fiet: 3,551,386,572,402,663,911,531,875

S e c t o r 2. g r a d. 17,452,881,230,572,402,663,911,531,875

Ducatur in 360, fit circulus duplicatus, 360

104,717,287,383,434,415,983,469,191,250,0
523 586 436 917 172 079 917 345 956 25

circulus duplicatus . . . 628 303 724 300 606 495 900 815 147 5000 ג

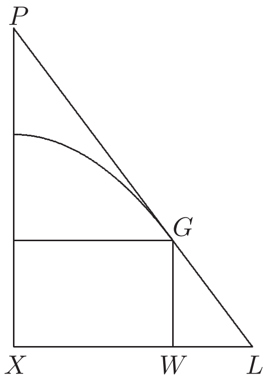
per radium 1. divisus 1,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000,,000,000 ב

dat circumf. en ergo eadem radio posito ב circumferentia erit ג. Iam scilicet ut appareat veritati consentire, posito tantum radio 1000,000, et sumto 360 vicibus tangente ⟨17455 et sinu⟩ 17452 unius gradus, illic dabitur 6283800, hic 6282720 illud circumferentia polygoni ⟨circumscripti, hoc⟩ [inscripti], illa maior, haec minor circumferentia circuli, et eius valore ⟨—⟩

12 verso *erg. Hrsg.* 13 1. grad. | et $\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5}$ *erg. Hrsg.* | *(1)* quae summa ducta in 180 facit *(2)* fiet: *L* 21 consentire, *(1)* tangens *(2)* posito *L* 23 hoc⟩ | circumscripti *ändert Hrsg.* | *(1)* inter qua *(2)* illud maius, hoc *(3)* illa *L*

[*Teil 4*]

$\langle 2ax \mp x^2 \rangle = y^2$. Ergo $2ap \mp 2xp = 2y^2$, seu $p = \dfrac{y^2}{a \mp x} = \dfrac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Quodsi iam ipsa ordinata, dividatur per p. oritur differentia:



$$\frac{PX}{XL} = \frac{GW}{WL}. \text{ Ergo } \frac{XL \frown GW}{PX} = WL := \frac{XL}{PX}[\frown GW].$$

[*Fig. 2*]

Iam $\dfrac{y}{p}$ hoc loco $= \dfrac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{2ax \mp x^2} \frown a \mp x = \dfrac{\sqrt{2ax \mp x^2} \frown a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x}, \frown \sqrt{2ax \mp x}} = \dfrac{a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$. Homog. $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax \mp x^2}} \mp \dfrac{xa}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$ quae quadrabilia. Iam $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax \mp x^2}} = y$. Ergo $\dfrac{x^2a^2}{2ax \mp x^2} = y^2$ fiet $\dfrac{xa^2}{2a \mp x} = y^2$, vel $xa^2 = 2ay^2 \mp xy^2$ seu $xa^2 \overline{\mp} xy^2 = 2ay^2$. Unde $x = \dfrac{2ay^2}{a^2 \overline{\mp} y^2}$ figura segmentorum.

---

8 *Nebenbetrachtung*: $2a^2y = a^2x + y^2x$ seu $2a^2y - y^2x = a^2x$.
$a \frown 2ay \quad - y^2 - a^2, \frown x = 0$.

4 $\frown$ GW *erg. Hrsg.* 7 $\mp \dfrac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} \mp \mathrm{x}^2}}$ |. Hae duae sunt applicatae eiusd. figurae, *erg. u. gestr.*| quae *L* 9 figura segmentorum *erg. L*

NB. Haec figura aequatur semper ei figurae, cuius differentiae sunt $\dfrac{2ay^2}{a^2 \mp y^2}$ seu homogeneae figurae segmentorum. Haec figura fingi potest dari ex data circuli quadratura, dabitur huius figurae etsi minus geometricae dimensio ex data huius $\dfrac{2ay^2}{a^2 \mp y^2}$ dimensione. Haec autem figura pendet ex dimensione alterius $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$ et vicissim, at haec pendet ex quadratura circuli (vel hyp.). Est enim f i g u r a a n g u l o r u m.

Ergo quadratura huius figurae, cuius differentiae sunt homogeneae figurae segmentorum, seu quae est quadratrix figurae segmentorum pendet ex circuli quadratura, videndum an hoc aliquem habet usum.

Porro differentiae sinuum circuli $\square^{\text{to}}$ addatur $\square^{\text{tum}}$ $\dfrac{a^2}{a^2}$, seu 1. fiet

$$\sqrt{\frac{a^2 + x^2 \mp 2ax}{2ax \mp x^2} + \frac{2ax[\mp]x^2}{2ax \mp x^2}} = \sqrt{\frac{a^2}{2ax \mp x^2}}$$ latus infinite parvum circuli vel hyperb. Ergo figura arcui circuli homogenea foret $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = y$ ut alibi demonstratum.

Notabile exemplum ex quo apparet unitatem addi, si modo fractionis cuiusdam numeratori addideris eius denominatorem.

1 f. seu... segmentorum *erg.* L   5 (vel hyp.) *erg.* L   9 f. fiet *(1)* $\sqrt{\frac{a^2 + x^2 \mp 2ax}{2ax \mp x^2} + \frac{a^2}{a^2}}$ *(2)* | $\sqrt{\frac{a^2 + x^2 \mp 2ax}{2ax \mp x^2} + \frac{2ax - x^2}{2ax \mp x^2}}$ *ändert Hrsg.* | $= \sqrt{\frac{a^2}{2ax \mp x^2}}$ *(a)*. Ergo figura *(b)* latus *(aa)* polygoni *(bb)* infinite L   10 vel hyperb. *erg.* L   11 foret *(1)* $\frac{a^2}{2ax - x^2} = \frac{y}{a}$ cuius aequatio $a^3 = 2axy - x^2y$ *(2)* $\sqrt{\frac{a^2}{2ax - x^2}}$ *(3)* $\frac{a^2}{\sqrt{2ax - x^2}} = y$ L

---

10 vel hyperb.: Die Behauptung gilt nicht für die Hyperbel, für welche sich bei Addition der Terme unter der Wurzel $\sqrt{\dfrac{a^2 + 4ax + 2x^2}{2ax + x^2}}$ ergibt.   11 alibi demonstratum: vgl. *De hyperbola* (Cc 2, Nr. 612).

Curva cuius latus $\frac{a}{x}$. Eius $\square$ est $\frac{a^2}{x^2}$, auferatur $1 = \frac{x^2}{x^2}$ fiet: $\frac{a^2 - x^2}{x^2}$, unde radix: $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$. Ergo $a^2 \frown a^2 - x^2 = y^2x^2$, vel $a^4 - a^2x^2 = y^2x^2$, vel $a^4 = y^2x^2 + a^2x^2$. Unde fiet: $\frac{a^4}{y^2 + a^2} = x^2$ seu $\frac{a^2}{\sqrt{y^2 + a^2}} = x$. Summa ergo huius figurae dabit figuram cuius curva sit spatio hyperbolico syntomos.

---

2 *Unter* $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$, *mit Hinweisstrich verbunden*: NB. Si multiplices per x fiet $\sqrt{a^2 - x^2} = y$ seu sinus circuli. Eius ergo summa dabit figuram aequalem isti nempe ipsi $\frac{a^2}{\sqrt{y^2 + a^2}}$ cuius curva spatio hyperbolico syntomos.

3 *Über* Summa ... dabit: At ego demonstravi, eiusdem cum circulari consensum.

1 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$. *(1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{x}}{\mathrm{x}} = \frac{\mathrm{a} - \mathrm{x}}{\mathrm{x}}$. Eius differentiae *(2)* Eius *L* 1 $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^2}$, *(1)* addatur *(2)* auferatur *L* 4 hyperbolico *(1)* symptotos *(2)* syntomos *L*

---

2 $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} = y$: Leibniz rechnet mit der Homogenitätsgröße a inkonsequent, an sich müßte es $\frac{y}{a}$ statt y heißen. 4 syntomos: Leibniz bezeichnet Kurvenbögen bzw. Flächen als syntomos, wenn ihre Abschnitte kontinuierlich gleich sind; vgl. *LSB* III, 1 N. 39 S. 142. 8 demonstravi: vgl. S. 313 Z. 9–11.

27. SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE I
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 247–248. 1 Bog. 2°. 2 S. Bl. 248 v° gegenläufig beschrieben. Bl. 247 v° u. Bl. 248 r° leer. Überschrift auf Bl. 248 v° ergänzt. Textfolge 248 v° untere drei Viertel, 247 r°, 248 v° oberes Viertel.
Cc 2, Nr. 1184

Datierungsgründe: Die Stücke N. 27 – N. 30 hängen eng zusammen: N. 28 und N. 30 stehen auf demselben Träger; das singuläre Wasserzeichen des Papiers ähnelt stark dem ebenfalls singulären Wasserzeichen von N. 27; möglicherweise bilden die beiden Zeichen ein Paar. Das Wasserzeichen des Papiers von N. 29 ist von August 1673 bis Juni 1674 belegt. In N. 28 berechnet Leibniz auf S. 323 Z. 4–22 die Werte der Fakultäten bis 10!; letzteren Wert verwendet er in N. 29 S. 333 Z. 20 als Anfangswert eines Differenzenschemas. Die Überlegungen von Teil 2 von N. 29 wiederum bilden die Grundlage der Konstruktion des harmonischen Dreiecks in Teil 2 von N. 30. Es läßt sich also vermuten, daß die Betrachtungen zur harmonischen Reihe mit N. 27 und N. 28 begonnen und mit N. 29 fortgesetzt wurden und schließlich in N. 30 in das harmonische Dreieck mündeten. N. 27 und N. 30 setzen die Entdeckung der Kreisreihe voraus. Die verwendete Notation deutet darauf hin, daß die vier Stücke spätestens bis Mitte 1674 entstanden sind.

[*Teil 1*]

Summa progress. harmon.

$\frac{ba^4}{1} + \frac{b^2a^3}{2} + \frac{b^3a^2}{3} + \frac{b^4a}{4} + \frac{b^5}{5}$ etc. $=$ … Ponatur $b = 3.$ *et* $a = 1.$ fiet:

$\frac{3}{1} + \frac{9}{2} + \frac{27}{3} + \frac{81}{4} + \frac{243}{5} + \frac{729}{6} +$ etc. et reducendo sub unum denominatorem,

$$\frac{3}{1} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{9}{2} = \frac{6+9}{2} = \boxed{\frac{15}{2}} + \frac{27}{3} = \frac{45+54}{6} = \boxed{\frac{99}{6}} + \frac{81}{4} = \frac{396+486}{24} = \boxed{\frac{882}{24}} + \frac{243}{5} =$$

21 $+\frac{729}{6}$ *erg. L*

22–316,17 Leibniz addiert die Brüche fortlaufend. In S. 316 Z. 3 unterläuft ihm ein Flüchtigkeitsfehler (im Zähler des fünften Bruches steht 29 statt 27), der sich auf beide Differenzenschemata auswirkt; diese werden außerdem durch Fehler in den S. 316 Z. 7 (16312 statt 12312) bzw. S. 316 Z. 12 (520 statt 540) beeinträchtigt.

$$\frac{[4410]+5832}{120} = \boxed{\frac{[10242]}{120}} + \frac{729}{6} = \frac{61452+87480}{720} = \frac{148932}{720}.$$

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{2}+\frac{27}{3}+\frac{81}{4}+\frac{243}{5}+\frac{729}{6}.$$

$$\frac{3}{1}+\frac{9}{2} = \frac{6+9}{2}+\frac{27}{3} = \frac{18+29+54}{6}+\frac{81}{4} = \frac{72+116+216+486}{24}+\frac{243}{5} =$$
$$\frac{360+580+1080+2430+5832}{120}+\frac{729}{6} = \frac{2160+3480+6480+14580+34992+87480}{720}.$$

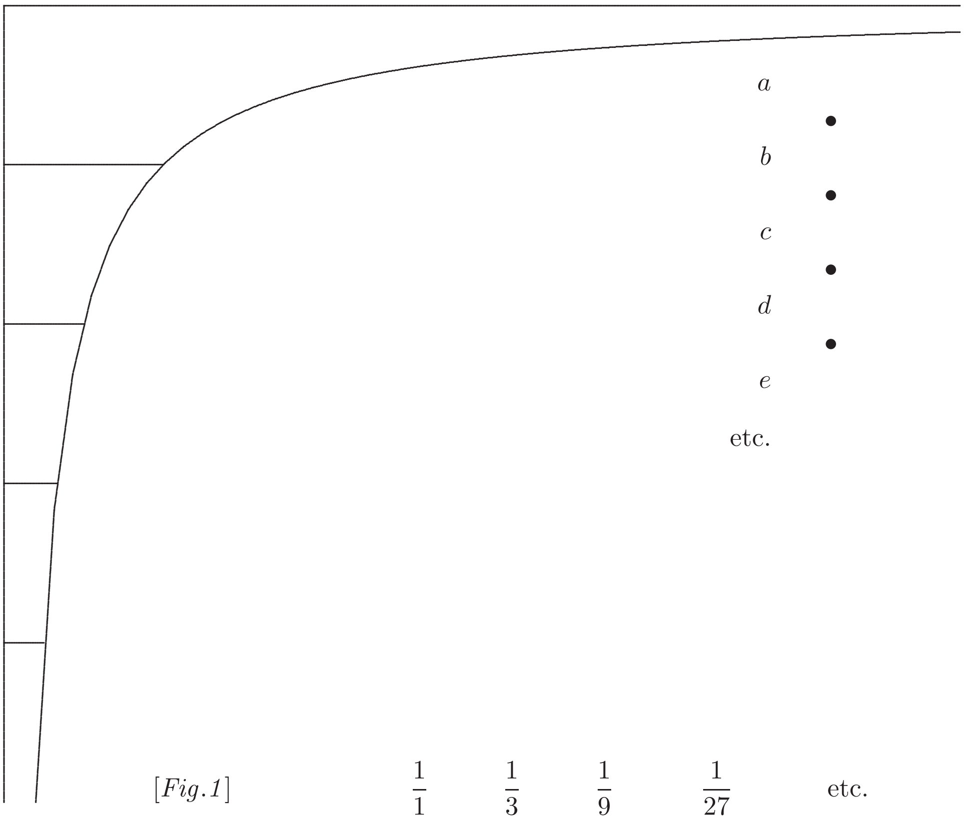
2160		3480		6480		14580		34992		87480
	1320		3000		8100		20412		52488	
		2680		5100		16312		32076		
			2420		11212		15764			
				8792		4552				
					−4240					

	2160		3480		6480		14580		34992		87480
12)	180		290		520		1215		2916		7290
		110		230		695		1701		4374	
			120		465		1006		2673		
				345		541		1667			
					196		1126				
						930					

315,22–316,1 $+\frac{243}{5} = |\ \frac{882}{24}+\frac{243}{5} =$ *streicht Hrsg.* $|\ \frac{4510+5832}{120} = \boxed{\frac{10342}{120}}$ *ändert Hrsg.* $|\ +\frac{729}{6}$

L

[*Teil 2*]



a

•

b

•

c

•

d

•

e

etc.

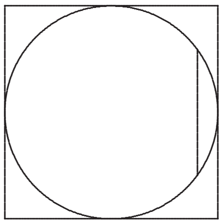
[*Fig. 1*]

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{27} \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{2}{3} \qquad \frac{2}{9} \qquad \frac{2}{27} \qquad \text{etc.}$$

$$\frac{z}{1} = \frac{1}{\frac{2}{3}} = z = \frac{1}{\frac{2}{3}} \text{ seu } z = \frac{3}{2}.$$

12 *Fig. 1*: Leibniz skizziert zum Differenzenschema Z. 2–11 eine Hyperbel, rechnet anschließend aber mit einer geometrischen Folge.



[*Fig. 2*]

$$\underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{35} + \frac{1}{99}}\ \text{etc.}$$

$$\begin{array}{llllll}
1 & 3 & 5 & 7 & 9 & \text{etc.} \\
\underline{2} & & & & & \\
2 & 6 & 10 & 14 & 18 & \\
4 & 36 & 100 & \text{etc.} & & \\
3 & 35 & 99 & & &
\end{array}$$

2–7 *Nebenbetrachtungen*:

$$\frac{a}{b+c} = \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2+cb}. \quad -\frac{ac}{b^2+cb} = [-]\frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3+cb^2}.$$

$$\frac{b^5}{6-1} = \frac{b^5}{6} + \frac{b^5}{36} + \frac{b^5}{216} \text{ etc.} = \frac{b^5}{4+1} = \frac{b^5}{4} - \frac{b^5}{16} + \frac{b^5}{64} \text{ etc.}$$

$$\frac{b^7}{8-1} = \frac{b^7}{8} + \frac{b^7}{64} + \frac{b^7}{512} \text{ etc.}$$

9 *Vorzeichen erg. Hrsg.*

2–319,5 Vgl. N. 31 S. 345 Z. 2 f. sowie *LQK* S. 78–91, insbesondere die prop. XXXI, XXXII, XXXV, XXXVII u. XLII.

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{35} \quad \frac{1}{99} \quad \frac{1}{195} \quad \frac{1}{323}$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} = \boxed{\frac{2}{15}}. \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{9} = \boxed{\frac{2}{63}}. \quad \frac{1}{11} - \frac{1}{13} = \boxed{\frac{2}{143}}.$$

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{12}{45}\Big|\frac{4}{9}. \quad \frac{1}{35} - \frac{1}{63} = \frac{28}{2205}\Big|\frac{4}{315}. \quad \frac{1}{99} - \frac{1}{63} = \frac{44}{6237} = \frac{4}{567}.$$

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11}, \text{ etc. } \text{——}1$$

$$1 - \frac{1}{3}, -\frac{1}{3} + \frac{1}{15} = 1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{15}. \quad \frac{2}{3} - \frac{1}{15} = \frac{27}{45}\Big|\Big[\frac{3}{5}\Big].$$

1–3 *Nebenrechnungen*:

14	18	63	143	99	$\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}$
14	18	35	99	63	$\cancel{6}\cancel{2}\cancel{3}\cancel{7}$ ⨍ 567
56	144	315	44	297	$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}$
14	18	189		594	$\cancel{1}\cancel{1}$
196	324	2205		6237	

5 ³ *L erg. Hrsg.*

---

3 $\frac{1}{99} - \frac{1}{63}$: Richtig wäre $\frac{1}{99} - \frac{1}{143} = \frac{44}{14157} = \frac{4}{1287}$. 4 Leibniz subtrahiert die Reihe von 1.

28. SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE II
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung:

L Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 245–246. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 245 r° u 246 v°. Auf Bl. 245 v° N. 30. Bl. 246 r° leer. Überschrift ergänzt. Isolierte Rechnung auf Bl. 246 v° rechts oben (= S. 326 Z. 2–7).
Cc 2, Nr. 1182

LiH Randbemerkung in Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665, Nr. VII *De numerorum continuorum productis*: *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 605, S. 13 (= S. 323 Z. 25–27; Druck der restlichen Marginalien in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 00.

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 27 (s. dort).

S u m m a p r o g r e s s. h a r m o n.

$$\begin{array}{ll}
1 & \\
2 & 2 \frown 2-1 \\
3 & 3,, \frown \llcorner 3-1 \lrcorner \frown 2-1 \\
 & \qquad\qquad 3-1, -1 \\
4 & 4 \frown 4-1 \frown 4-2 \frown 4-3 \\
5 & 5 \frown 5-1 \frown 5-2 \frown 5-3 \frown 5-4 \\
6 & \\
7 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
5 \frown & 5 \frown & 5 \frown & 5 \frown & 5 \\
5 \frown & 5-1 \frown & 5-2 \frown & 5-3 \frown & 5-4 \\
 & 4 \frown & 4-1 \frown & 4-2 \frown & 4-3 \\
 & & 3 \frown & 3-1 \frown & 3-2 \\
 & & & 2 \frown & 2-1 \\
 & & & & 1 \\
\hline
5 & 9-1 & 12-3 & 14-6 & 15-10 \\
5 \frown & 8 \frown & 9 \frown & 8 \frown & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r|c}
5 \frown 420 & 10 \\
4 \frown 312 & 6 \\
3 \frown 2\ 6 & 3 \\
2 \frown 1\ 2 & 1 \\
1 \frown 1\ 1 & \frac{1}{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccc}
5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
 & & 3 & 2 & 1 \\
 & & & 2 & 1 \\
 & & & & 1
\end{array}$$

25	64	81
5	8	9
3	[1]	

5	5 −1	5 −2	5 −3	5 −4
4	4 −1	4 −2	4 −3	4 −4
3	3 −1	3 −2	3 −3	3 −4
2	2 −1	2 −2	2 −3	2 −4
1	1 −1	1 −2	1 −3	1 −4
15	10 (−0)	6 (−1)	3 (−3)	1 (−6)
5 + 4 + 3 + 2 + 1	4 + 3+2 +1	3+2 +1	2 +1	1

Auferatur a producto triangularium.

5	6 ⌢	3 ⌢	1 ⌢	0	1	1		
							2	
4	7 ⌢	4 ⌢	2 ⌢	1	3	3		13
							15	
3	8 ⌢	5	3	1	6	18		[147]
							[162]	
2	9	6	3	1	10	180		[2358]
							[2520]	
1	10	6	3	1	15	2700		
		[24]	12	[4]				

3 2 *L ändert Hrsg.* 17 87 *L ändert Hrsg.* 18 92 *L ändert Hrsg.* 19 1428 *gestr. L ändert Hrsg.* 20 1520 *L ändert Hrsg.* 22 25 *bzw.* 3 *L ändert Hrsg.*

7	7 − 1	7 − 2	7 − 3	7 − 4	7 − 5	7 − 6
	6	6 − 1	6 − 2	6 − 3	6 − 4	6 − 5
		5	5 − 1	5 − 2	5 − 3	5 − 4
			4	4 − 1	4 − 2	4 − 3
				3	3 − 1	3 − 2
					2	2 − 1
						1
7	13 − 1	18 − 3	22 − 6	25 − 10	27 − 15	28 − 21
7	12	15	16	15	12	7

7		12		15		16
	5		3		1	
		2		2		
			0			

Haec differunt a prioribus.

Aliae plane proderint summae pro alia dispositione.

[Z. *17–28 Zusatz auf der gegenüberliegenden Seite, teilweise überschrieben*]

				5		3		11	
$1 \frown 7 \frown 2 \frown 6 \frown 3 \frown 5 \frown 4 \frown 1$	7		12		15		4
		4		2			
$1 \frown 6$ $\quad 2 \frown 5$ $\quad 3 \frown 4$	6		10		12		
		3		5			
$1 \frown 5$ $\quad 2 \frown 4$ $\quad 3 \frown 1$	5		8		3		
		2		6			
$1 \frown 4$ $\quad 2 \frown 3$ $\quad 3 \frown 0$	4		6		0		
		1					
$1 \frown 3$ $\quad 2 \frown 1$	3		2				
		2					
$1 \frown 2$	2		0				

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}\ \text{etc.} = \frac{1}{1} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{1}{3}\ \frac{3+1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{18\ 6\ 3}{18} + \frac{1}{10} = \frac{180\ 60\ 30\ 18}{180}.$$

Summam invenire fractionum quarum numerator unitas idem est quod invenire productos continuorum.

$$\begin{array}{rrr}
1 & 1 & 2 \\
2 & 3 & 4 \\ \cline{1-3}
2 & 3 & 8 \\
3 & & \\ \cline{1-1}
6 & 3 & 6 \\
4 & 5 & 8 \\ \cline{1-3}
24 & 15 & 48 \\
5 & & \\ \cline{1-1}
120 & 7 & 10 \\
6 & 9 & 12 \\ \cline{1-3}
720 & 63 & 120 \\
7 & & \\ \cline{1-1}
5040 & 11 & \\
8 & 13 & \\ \cline{1-2}
40320 & 143 & \\
9 & \text{etc.} & \\ \cline{1-1}
362880 & & \\
10 & & \\ \cline{1-1}
3628800 & &
\end{array}$$

---

2 f. *Randbemerkung in Leibniz' Handexemplar von Bl.* PASCAL, *Traité du triangle arithmétique, 1665*:
Producti continuorum cum progressione harmonica, plurimum habent connexionis. Sed hoc Pascalius non observavit. Nimirum: $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. est series progressionis harmonicae, reducendo omnes ad unum nomen fiet: $\frac{2,3,4+1,3,4+1,2,4+1,2,3}{1,2,3,4}$.

2 quarum ... unitas *erg. L* 25 continuorum *(1)* sunt progressionis harmonicae. *(2)* cum *L* 26 non *(1)* noverat *(2)* observavit *L*

---

23 f. *Bl.* PASCAL, *Traité du triangle arithmétique, 1665*: Nr. VII *De numerorum continuorum productis* S. 13 (*PO* III S. 528).

Ergo 1 3 8 15 48 63 120 143 etc. in se ducti continue dant etiam terminos progressionis harmonicae. Et si omnes sumantur termini, quadrati unitate minuti continue, fiet duplum puto harmonicae progressionis, demto ultimo etc. Hac eadem ratione etiam aliis modis per saltus continue productos assumere potes. Adde quae habet Paschalius *De continue productis*.

Si loco horum 1 2 3 4 5 6 etc. continue in se ductorum quadrati eorum continue in se ducti intelligantur pro $\begin{matrix}1\\2\end{matrix} > \begin{matrix}2\\2\end{matrix}$ 4 − 1. $\begin{matrix}3\\4\end{matrix} > \begin{matrix}4\\4\end{matrix}$ 16 − 1. etc. fient saltus nisi duplices, seu ita facias 1 2 2 3 3 4 4 5 5 6 etc. Hoc modo enim eruere potes omnes quadratos sed summam non duplicas, sed ducis in se ipsam. NB.

Caeterum ex his $\square^{\text{tos}}$ in se ductos facies: $\begin{matrix}1\\1\end{matrix}\!>\!1 \quad \begin{matrix}2\\2\end{matrix}\!>\!4 \quad \begin{matrix}3\\3\end{matrix}\!>\!9 \quad \begin{matrix}4\\4\end{matrix}\!>\!16.$

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{4}\qquad \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}$$

$$\frac{4+1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{36+9+4}{36}+\frac{1}{16}=\frac{\begin{matrix}576 & 144 & 64 & 36\\ (24) & (12) & (8) & (6)\end{matrix}}{576}\qquad \frac{1}{25}$$

4) $\underline{57600\ \ 14400\ \ 6400\ \ 3600}$

[=] $$\frac{\begin{matrix}14400 & 3600 & 1600 & 900 & 576\\ ([120]) & ([60]) & ([40]) & (30) & (24)\end{matrix}}{14400}$$

Radices horum quadratorum sunt progressionis harmonicae.

3 *Über* duplum puto: Imo quadratum summae.

16 = *erg. Hrsg.* 16 1200 *L ändert Hrsg.* 16 600 *L ändert Hrsg.* 16 400 *L ändert Hrsg.*

4 Paschalius: *a. a. O.*

576		900		1600		3600		14400		
										3600
	324		700		2000		10800			
									2000	
		376		1300		8800				
								1300		
			924		7500					
							924			
				[6576]						

Hinc collige illas differentias, vel differentiarum differentias, secundi gradus, pro quibus cubis etc. usus sum esse ipsas transversales. Et tertii gradus esse rursus easdem cum primis. Idque verum in omnibus seriebus.

Iungendae inter se series differentiarum, etc. addendo vel subtrahendo, item cum terminis et videndum an inde oriatur series differentiarum.

In harmonica $a \quad b \quad c \quad d \quad e$. $\dfrac{a-b}{b-c} = \dfrac{a}{c}$. $\dfrac{b-c}{c-d} = \dfrac{b}{c}$. Ergo

$$a-b \quad b-c \quad c-d \quad d-e$$

$b-c = \dfrac{ac-bc}{a} = c - \dfrac{bc}{a}$ et $b-c = \dfrac{bc-bd}{c} = b - \dfrac{bd}{c}$. Ergo $c - \dfrac{bc}{a} = b - \dfrac{bd}{c}$, vel $c^2a - bc^2 = bca - bda$. Ergo $c^2a - bca + bda = bc^2$. Ergo $a = \dfrac{bc^2}{c^2 - bc + bd}$. Item $bda = bca - c^2a + bc^2$. Ergo $d = \dfrac{bca - c^2a + bc^2}{ba} = c - \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{c^2}{a} = \dfrac{c^2}{c} - \dfrac{c^2}{b} + \dfrac{c^2}{a} = d$ memorabile theorema.

In omni serie etiam arithmetica quaerenda parameter, seu quantitas constans, qualem habet et harmonica progressio, et relatio ad quandam abscissam seu terminos progressionis arithmeticae.

9 1576 *L ändert Hrsg.*

---

15 $= \dfrac{b}{c}$: Richtig wäre $\dfrac{b}{d}$. Der Fehler beeinträchtigt die Überlegung bis Z. 19.

[*Isolierte Rechnung*]

$$\begin{array}{r} 99999 \\ 999 \\ \hline [899991] \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\ \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$$

2–7 (*1*) $\begin{array}{r} 999\,9\,9 \\ \langle\cdot\rangle 8 \\ \hline 7999\,9\,2 \\ \cdots\cdots \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$ (*2*) $\begin{array}{r} 99999 \\ 999 \\ \hline |799992 \\ \cdots\cdots \\ \cdots\cdots\ \\ \hline \cdots\cdots\cdots \end{array}$ *ändert Hrsg.*| *L*

29. DE PROGRESSIONE HARMONICA ET DE DIFFERENTIIS DIFFERENTIARUM

[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 251–252. 1 Bog. 4°. Ca 2 1/2 S. Bl. 251 v° leer. Überschrift auf Bl. 251 r° oben und auf freigebliebenem Raum rechts ergänzt. Textfolge 251 r° obere zwei Drittel, 252 r°, 252 v°, 251 r° unteres Drittel.
Cc 2, Nr. 1335

Datierungsgründe: Das Stück gehört zur Gruppe um N. 27 (s. dort).

Progress. harmon. item De differentiis et differentiis differentiarum per terminos exprimendis observatio singularis

[*Teil 1*]

$$\frac{a+x}{b+y} = \gamma. \text{ Ergo } \frac{a}{b+y} + \frac{x}{b+y} = \gamma. \text{ Ergo } \left.\begin{array}{l} \frac{a}{b} - \frac{ay}{b^2} + \frac{ay^2}{b^3} - \frac{ay^3}{b^4} \quad \text{etc.} \\ \\ + \frac{x}{b} - \frac{xy}{b^2} + \frac{xy^2}{b^3} - \frac{xy^3}{b^4} \quad \text{etc.} \end{array}\right\} = \gamma.$$

Sive $\frac{1}{b} - \frac{y}{b^2} + \frac{y^2}{b^3} - \frac{y^3}{b^4}$ etc. $\frown a+x = \gamma$.

Sed et $\frac{x}{b+y} = \frac{x}{y} - \frac{xb}{y^2} + \frac{xb^2}{y^3}$ etc.

$$+\frac{x}{y}\underset{-}{\overset{-}{\times}}\frac{y}{b^2} = \frac{xb^2-y^2}{yb^2}. \quad -\frac{xb}{y^2}\underset{-}{\overset{+}{\times}}\frac{y^2}{b^3} = \frac{-xb^4+[y^4]}{y^2b^3}.$$

---

13 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{lll} \frac{a}{b} - \frac{ay}{b^2+yb} & & \\ - \quad \frac{ay}{b^2} & + \frac{ay^2}{b^3+yb^2} & \end{array}$$

18 y^3 *L ändert Hrsg.*

Ergo $\frac{x}{b} + \frac{[xb^2 - xy^2]}{yb^2} + \frac{-xb^4 + [xy^4]}{y^2b^3}$ etc. $= \frac{2x}{b+y}$.

$$\left.\begin{array}{l} \qquad -\frac{ay}{b^2} + \frac{ay^2}{b^3} - \frac{ay^3}{b^4}\ [\text{etc.}] \\ +\frac{a}{b} \\ \qquad +\frac{x}{y} - \frac{xb}{y^2} + \frac{xb^2}{y^3}\ [\text{etc.}] \end{array}\right\} = \gamma.$$

seu $\quad \frac{a}{b} \quad \frac{-ay^2 + xb^2}{b^2y} \qquad \frac{+ay^4 - xb^4}{b^3y^2} \qquad [\text{etc.}] = \gamma.$

seu $\quad \frac{a}{b} \quad \frac{-a+x}{b} \frown \frac{y^2+b^2}{by} \quad \frac{+a-x}{b} \frown \frac{y^2+b^2}{by} \frown \frac{y^2-b^2}{by}$ etc. $= \gamma.$

$$= \frac{y}{b} + \frac{b}{y}$$

$$= \xi$$

seu $\quad \frac{a}{b} \quad \frac{-a+x}{b} \frown \llcorner \frac{b}{y} + \frac{y}{b} \lrcorner \quad \frac{+a-x}{b} \frown \llcorner \frac{b}{y} + \frac{y}{b} \lrcorner \frown \llcorner \frac{b}{y} - \frac{y}{b} \lrcorner$ etc. $= \gamma.$

$A \qquad B$

$\frac{a+x}{b+y}$ sive $\gamma = \frac{a}{b} \qquad A \qquad -A \frown \llcorner \frac{b}{y} + \frac{y}{b} \lrcorner \quad - B \frown \llcorner \frac{b}{y} - \frac{y}{b} \lrcorner \quad -C \frown \llcorner \frac{b}{y} + \frac{y}{b} \lrcorner$

$A \qquad B \qquad C \qquad D$

Est haec series ut apparet aliquid ex progressione geometrica deformata.

2–5 *Nebenrechnung*: $-\frac{ay}{b^2} + \frac{x}{y} = \frac{-ay^2 + xb^2}{b^2y}$

1 $\mathrm{xb - y^2}$ *L ändert Hrsg.* 1 $\mathrm{y^3}$ *L ändert Hrsg.* 2–5 etc. *erg. Hrsg. dreimal* 6+9 $= \gamma$. *(1)* seu $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} - \frac{\mathrm{-a+x}}{\mathrm{b}} \frown \xi \ \frac{\mathrm{+a-x}}{\mathrm{b}} - \xi^2$ *(2)* seu *L*

---

6 $\frac{-a+x}{b} \frown \frac{y^2+b^2}{by}$: Die Zerlegung ist unzulässig; weitere Versehen beeinträchtigen die Überlegung bis Z. 11.

[*Teil 2*]

A						
	$A-B$ $(=[B])$					
B		$A-B-B+C$ $(=C)$				
	$B-C$		$A-3B+3C-D$ $(=D)$			
C		$B-2C+D$		$A-4B+6C-4D+E$ $(=E)$		
	$C-D$		$B-3C+3D-E$		$A-5B+10C-10D+5E-F$ $(=F)$	
D		$C-2D+E$		$B\ C\ D\ E\ F$		$A-6B+15C-20D+15E-6F+G$ $(=G)$
	$D-E$		$C\ D\ E\ F$		$B\ C\ D\ E\ F\ G$	
E		$D-2E+F$		$C\ D\ E\ F\ G$		
	$E-F$		$D\ E\ F\ G$			
F		$E-2F+G$				
	$F-G$					
G						

3 A *L ändert Hrsg.*

In progressione harmonica ab 1. differentiae terminis aequales.

$$\left.\begin{array}{ccc}
 & \frac{1}{1} & A \\
\frac{1}{2} & & \\
 & \frac{1}{2} & B \\
\frac{1}{6} & & \\
 & \frac{1}{3} & C \\
\frac{1}{12} & & \\
 & \frac{1}{4} & D \\
\frac{1}{20} & & \\
 & \frac{1}{5} & E \\
\frac{1}{30} & & \\
 & \frac{1}{6} & F \\
\frac{1}{42} & & \\
 & \frac{1}{7} & G
\end{array}\right\} = \begin{array}{l}
A \\
A - B \\
A - 2B + C \\
A - 3B + 3C - D \\
A - 4B + 6C - 4D + E \\
A - 5B + 10C - 10D + 5E - F \\
A - 6B + 15C - 20D + 15E - 6F + G \\
\hline
7A - 21B \quad 35C \quad 35D \quad 21E \quad 7F \quad G
\end{array}$$

$$\frac{7}{1}-\frac{21}{2}+\frac{35}{3}-\frac{35}{4}+\frac{21}{5}-\frac{7}{6}+\frac{1}{7}=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}=x.$$

$$\frac{1}{1}-\frac{3}{2}+\frac{5}{3}-\frac{5}{4}+\frac{3}{5}-\frac{1}{[6]}+\frac{1}{49}=x.$$

$$\frac{3}{2}-\frac{2}{2}=\quad -\frac{1}{2}\quad+\quad\frac{5}{12}\quad+\quad\left[\frac{13}{30}\right]$$ [*bricht ab*]

[*Teil 3*]

$\dfrac{a^2}{b}+\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{a^2}{3b}+\dfrac{a^2}{4b}=x$. Quaeritur quanta sit x, ut non sit opus prolixa additione. vel $\dfrac{a}{1}+\dfrac{a}{2}+\dfrac{a}{3}+\dfrac{a}{4}=x$.

fiet : $\dfrac{4a}{1}+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{4a}{3}+\;a\;=4x\;=5a+\dfrac{4a}{2}+\dfrac{4a}{3}=4x$. Ergo et $\dfrac{15a}{4a}+\dfrac{12a}{2}=12x$. Ergo et

$$\begin{array}{r}30\\8\\12\end{array}\;a=24x. \text{ Eritque } x=\frac{30+8+12}{24}a.$$

2 f. *Nebenbetrachtung*: $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{7}=\dfrac{6}{7}$. $\dfrac{3}{2}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{15-6}{10}=\dfrac{9}{10}$. $\dfrac{5}{3}-\dfrac{5}{4}=\dfrac{5}{12}$. $\dfrac{5}{12}+\dfrac{1}{49}=\dfrac{245-12}{}=\dfrac{233}{588}$.

1 f. $=$ x. *(1)* $\frac{6}{1}-\frac{22}{2}+\frac{34}{3}-\frac{36}{4}+\frac{20}{5}-\frac{8}{6}+\frac{0}{7}$ *(2)* $\frac{1}{1}$ *L* 2 7 *L ändert Hrsg.* 2 f. $=$ x. *(1)* $\frac{1}{2}+\frac{2}{6}+\frac{3}{12}+\frac{4}{20}+\frac{5}{30}+\frac{7}{42}$ *(2)* Ex *(a)* data ultima differentia omnibus *(b)* datis *(3)* Cum differentiae hoc loco terminis coincidant igitur ex ultima differentia G caetera componemus: $\frac{1}{1}-\frac{3}{2}=$ *(4)* $\frac{3}{2}-\frac{2}{2}$ *L* 3 $\frac{16}{35}$ *L ändert Hrsg.*

2 Leibniz setzt die durch 7 dividierte Reihe ebenfalls gleich x.

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad \frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=x. \\ 2\left\{\begin{array}{l} 3\frown\left\{\begin{array}{l}4\frown 1\frown a+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=x\frown 4.\\ \\ \ldots\ldots\; a+4\frown\frac{a}{2}+\frac{4a}{3}\;\mathfrak{S}=x\frown 4\frown 3.\end{array}\right.\\ \\ \ldots\ldots\; 4\frown a+3\frown\frac{4a}{2}\;\mathfrak{S}\\ 3\frown 4\frown a\;\mathfrak{S}=x\frown 4\frown 3\frown 2.\end{array}\right.\end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l}2\frown 3\frown 4\\2\frown 3\\2\frown 4\\3\frown 4\end{array}\right\} a=x\frown 4\frown 3\frown 2.$$

$$\text{Ergo}\ \frac{2\frown 3\frown 4}{2\frown 3\frown 4}+\frac{2\frown 3}{4\frown 3\frown 2}+\frac{2\frown 4}{4\frown 3\frown 2}+\frac{3\frown 4}{4\frown 3\frown 2}\frown a=x.$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\frown a=x.$$

1–5 *Nebenbetrachtung zum rechten Schema*:

$$\begin{array}{ccc} 6 & & \\ & 2 & \\ 8 & & 2 \\ & 4 & \\ 12 & & 8 \\ & 12 & \\ 24 & & \end{array}$$

331,8–332,1 $\frac{30+8+12}{24}$ a. | $\frac{a}{1}+\frac{a}{2}+\frac{a}{3}+\frac{a}{4}=$ x. *streicht Hrsg.* | *(1)* $3\frown\left\{\begin{array}{l}4\frown 1a+\frac{4a}{2}+\frac{4a}{3}=x\\ \quad 1\end{array}\right.$ *(2)* $\frac{a}{1}$ *L*

---

9 f. Vgl. die in N. 28 S. 323 Z. 25–27 abgedruckte Randbemerkung zu Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665.

1 2 3 4 5 6

36288	0								
			40320						
40320	0				10080				
		....	50400			4320			
45360	0			....	14400		[2880]		
		....	64800			[7200]		[2880]	
51840	0			....	[21600]		[5760]		[4320]
		....	86400			[12960]		[7200]	
60480	0			....	34560		[12960]		
		....	120960			25920			
72576	0				60480				
		....	181440						
90720	0				120960				
		....	302400						
120960	0				[302400]				
		....	[604800]			907200			
181440	0				1209600				
		....	1814400						
362880	0								

2–20 *Nebenrechnungen*:

$$362880\cancel{0} : [10] \qquad \begin{array}{l} \quad\ \cancel{1} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \;\; \cancel{f} \;\; 403200[:9] \\ \ \ \cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}\cancel{9}9 \end{array}$$

6 380 *L ändert Hrsg.* 7 7400 *L ändert Hrsg.* 7 4480 *L ändert Hrsg.* 8 21800 *L ändert Hrsg.* 8 5360 *L ändert Hrsg.* 8 3320 *L ändert Hrsg.* 9 12760 *L ändert Hrsg.* 9 7800 *L ändert Hrsg.* 10 13160 *L ändert Hrsg.* 16 102400 *L ändert Hrsg.* 17 404800 *L ändert Hrsg.* 23 9 *L ändert Hrsg.* 23 : 9 *erg. Hrsg.*

20 3628800: Den Wert 10!= 3628800 berechnet Leibniz in N. 28 S. 323 Z. 4–22 *linke Spalte*.

362880
322560
40320
30240
10080
5760
4320
[1440]
[2880]
[0]
[2880]
[−1440]
[4320]

$$\begin{array}{l} \cancel{4}\ \cancel{4} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \\ \cancel{8}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8} \end{array}$$ ⨍ 453600 : 8

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\cancel{5}\cancel{2} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \\ \cancel{7}\cancel{7}\cancel{7}\cancel{7} \end{array}$$ ⨍ 518400 : 7

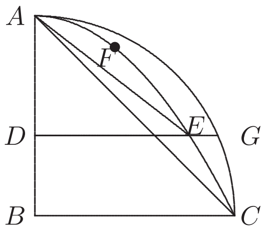
$$\begin{array}{l} \ \ \cancel{4} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \\ \cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6} \end{array}$$ ⨍ 604800 : 6

$$\begin{array}{l} \cancel{1}\ \cancel{3}\cancel{3} \\ \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{8}\cancel{8}00 \\ \cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5}\cancel{5} \end{array}$$ ⨍ 725760 : 5

907200 : 4
1209600 : 3
1814400 : 2

8 3940 *L ändert Hrsg.* 9 380 *L ändert Hrsg.* 10 −4100 *L ändert Hrsg.* 11 4480 *L ändert Hrsg.* 12 1160 *L ändert Hrsg.* 13 3320 *L ändert Hrsg.*

[*Teil 4*]



[*Fig. 1*]

Ponatur figura ABC lineis basi parallelis in quotcunque partes aequales geometrice secari posse. Quaeritur an aliqua inde lux ad eius quadraturam?

Ponatur a recta DE secta esse in duas partes aequales.

Ergo datur $\dfrac{AFED}{[AFCB]}$ datur et $\dfrac{AED}{ACB}$. Videndum an reperiri possit casus ubi rationes istae duae sint inter se aequales. Sed nihil tamen inde sequeretur. Figura haec secari potest, in data qualibet ratione commensurabili seu numeris expressa, v. g. ut portio sit $\dfrac{3}{4}$, inventa enim $\dfrac{1}{4}$ vel angulus in circulo, tantum duplicetur, triplicetur etc. angulus v. g. AG circuli AGC, et ex puncto invento ducatur ordinata, quae figuram in imperata ratione secabit; quadrari poterit portio inter figuram et circulum intercepta[,] modo figura non habet flexum continuum.

---

5 *Nebenbetrachtung, durch Umrahmung abgetrennt*: $AD = x$. $DE = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$. $DE^2 = \dfrac{a^2}{2ax - x^2}$.

3 geometrice *erg.* *L* 6 AFCD *L* *ändert Hrsg.* 6 $\dfrac{\text{AED}}{\text{ACB}}$. *(1)* Ergo *(2)* Si aliquas ⟨-⟩ *(3)* Videndum *L* 7 haec *erg.* *L* 9 $\dfrac{1}{4}$ *(1)* | tantum *streicht Hrsg.* | duplicetur, *(2)* vel *L* 10 puncto *(1)* anguli *(2)* invento *L* 11 poterit *(1)* figura in *(2)* portio *L*

---

13 $DE = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$: Die dem Quadranten einbeschriebene Kurve würde die Basis BC innen, also nicht im Punkt C schneiden.

30. DE TRIANGULO HARMONICO

[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 245–246, 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 245 v°. Auf Bl.245 r° u. 246 v° N. 28. Bl. 246 r° leer. Überschrift von Teil 2 am Rand ergänzt. Cc 2, Nr. 1183.

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 27 (s. dort).

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} & & \frac{1}{3} & - & \frac{1}{5} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{11} & - & \frac{1}{13} & \text{etc.} \\ \frac{1}{2} & - & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{9} & - & \frac{1}{11} & & & \\ & \frac{1}{6} & & + & & \frac{2}{35} & & + & & \frac{2}{99} & & & & \end{array}$$

$$\frac{1}{1+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{1+1}.\ \text{Ergo}\ \frac{1}{1+1} = 1-1+1-1+1-1\ \text{etc.}$$

$$/\backslash$$

$$[-]\frac{1}{1} + \frac{1}{1+1}$$

[*Teil 2*]

De triangulo harmonico.

Proprietas admirabilis numerorum progressionis harmonicae.

12 − *erg. Hrsg.*

8–10 Leibniz benutzt die Kreisreihe zur Berechnung des Quadrantensegments; vgl. N. 25 prop. 1.

$$\frac{1}{10}$$

$$\frac{1}{9} \quad \frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{8} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{360}$$

$$\frac{1}{7} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{252} \quad \frac{1}{840}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{504} \quad \left[\frac{1}{1260}\right]$$

$$\frac{1}{5} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{280} \quad \left[\frac{1}{630}\right] \quad \left[\frac{1}{1260}\right]$$

$$\frac{1}{4} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{140} \quad \frac{1}{280} \quad \frac{1}{504} \quad \frac{1}{840}$$

$$\frac{1}{3} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{60} \quad \frac{1}{105} \quad \frac{1}{168} \quad \frac{1}{252} \quad \frac{1}{360}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \quad \frac{1}{56} \quad \frac{1}{72} \quad \frac{1}{90}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{10}$$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{5}{6} \quad \frac{7}{12} \quad \frac{9}{20} \quad \frac{11}{30} \quad \frac{13}{42} \quad \frac{15}{56} \quad \frac{17}{72} \quad \frac{19}{90}$$

$$\frac{28}{12} \quad \frac{102}{72} \quad \frac{[248]}{240} \quad \frac{490}{600}$$

$$\frac{3}{2} \quad \frac{11}{6} \quad \frac{[50]}{24} \quad \frac{[274]}{120} \quad \frac{[1764]}{720}$$

$$1\frac{1}{2} \quad 1\frac{5}{6} \quad 2\left[\frac{2}{24}\middle|\frac{1}{12}\right] \quad 2\left[\frac{34}{120}\middle|\frac{17}{60}\right] \quad 2\left[\frac{324}{720}\middle|\frac{9}{20}\right]$$

5 $\frac{1}{980}$ *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{1}{830}$ *bzw.* $\frac{1}{980}$ *L ändert Hrsg.* 12 148 *L ändert Hrsg.* 13 53 *bzw.* 289 *bzw.* 1854 *L ändert Hrsg.* 14 $\frac{5}{24}$ *bzw.* $\frac{40}{120}\Big|\boxed{\frac{5}{15}}\,\frac{1}{3}$ *bzw.* $\frac{207}{260}$ *L ändert Hrsg.*

Nebenbetrachtungen und Nebenrechnungen zur Tabelle S. 337 Z. 1–10:

337,6–8

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \frac{16}{80}\Big|\frac{1}{5} & \frac{1}{30} & \frac{1}{105} & \frac{1}{280} & & & \\
 & \frac{9}{36}\Big|\frac{1}{4} & \frac{1}{20} & \frac{1}{60} & \frac{1}{140} & \frac{1}{280} & \frac{1}{504} & \frac{1}{840} & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{105} & \frac{1}{168} & \frac{1}{252} & \frac{1}{360} &
\end{array}$$

337,6 f. $\dfrac{40}{20\frown 60}\Big|\dfrac{1}{30}$ $\qquad \dfrac{80 = 20\frown 4}{60\frown 140 = 20\frown 7\frown 4\frown 15}$ $\qquad \begin{array}{r} 15 \\ 7 \\ \hline 105 \end{array}$

$40\frown 30$

$$\begin{array}{l} \;1 \\ \cancel{2}\cancel{2}4 \\ \;\cancel{7} \end{array} \Big\{ \; 32 \qquad\qquad \begin{array}{l} \cancel{1}2 \\ \cancel{5}\cancel{0}4 \\ \cancel{4}\cancel{4}4 \end{array} \Big\{ \; 126 \qquad\qquad \begin{array}{r} 126 \\ 5 \\ \hline 830 \end{array} \Big\{$$

$$\dfrac{224 = 32\frown 7}{280\frown \quad 504 = \quad 40\frown 7\frown 4\frown 126}\Bigg|\dfrac{1}{5\frown 126} \qquad \dfrac{1}{830}$$

$$\begin{array}{ccc} 280 & 504 & 40 \\ / \backslash & / \backslash & / \backslash \\ 40\frown 7 & 4\frown 126 & 5\frown 8 \\ / \backslash & & \\ 5\frown 8 & & \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 840 \\ 504 \\ \hline 336 \end{array}$$

$$\dfrac{336}{\begin{array}{l}2\\ \cancel{5}04\frown 840\\ 3\end{array}}\;\overset{3}{\Big|}\;\dfrac{112}{168\frown 840}\;\overset{8}{\Big|}\;\dfrac{18}{21\frown 840}\;\Bigg|\;\dfrac{6}{7\frown 840}\;\Bigg|\;\dfrac{1}{7\frown 140}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1}7 \\ \cancel{4}\cancel{2} \\ \cancel{8}\cancel{4}0 \\ \cancel{1}\cancel{8}8 \\ \;\cancel{1} \end{array} \Big\{ \; 45 \qquad\qquad \begin{array}{l} \cancel{2} \\ \cancel{8}\cancel{4}0 \\ \cancel{6}\cancel{6} \end{array} \Big\{ \; \begin{array}{r} 140 \\ 7 \\ \hline 980 \end{array}$$

337,8–11 Richtig wäre $126 \cdot 5 = 630$ und somit in der folgenden Zeile $\frac{1}{630}$ statt $\frac{1}{830}$.

337,7 f.

$$\begin{array}{l} 30 \\ \underline{12} \\ \dfrac{18}{360}\Big|\dfrac{2}{40}\Big|\dfrac{1}{20} \end{array} \qquad \frac{45}{60 \frown 105}\Big|\frac{15 \frown 3}{15 \frown 4 \frown 35 \frown 3}\Big|\frac{1}{[4 \frown]35} \qquad \begin{array}{c} 35 \\ \dfrac{4}{140} \end{array}$$

$$\frac{63}{168 \frown 105}\Big|\frac{7 \frown 3 \frown 3}{3 \frown 7 \frown 5, 3 \frown 56} \qquad \begin{array}{ll} 1 & \\ \cancel{1}\cancel{6}8 \not f\ 56 & \\ \cancel{3} & \\ & \overline{280} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 105 \not f\ 5 \\ 21 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 252 \\ 168 \\ \hline 84 \end{array} \quad \begin{array}{l} 84 \not f\ 7 \\ 12 \end{array} \quad \frac{84}{168 \frown 252}\Big|\frac{7 \frown 4 \frown 3}{3 \frown 7 \frown 8 \frown 4 \frown 63} = \frac{1}{8 \frown 63} \quad \frac{1}{7 \frown 8 \frown 9} \quad \begin{array}{ll} 1 & \\ \cancel{2}\cancel{5}2 \not f\ 63 & \\ \cancel{4} & 8 \\ & \overline{504} \end{array}$$

337,7–10

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
 & & & & \frac{9}{36}\big|\frac{1}{4} & & & & & & & & & & & & & & & \\
 & & \frac{4}{12}\big|\frac{1}{3} & & & & \frac{6}{72}\big|\frac{1}{12} & & \frac{8}{240}\big|\frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{105} & & \frac{1}{168} & & \frac{1}{252} & & \frac{1}{360} & \\
 & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{6} & & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{42} & & \frac{1}{56} & & \frac{1}{72} & & \frac{1}{90} \\
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & & \frac{1}{3} & & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{7} & & \frac{1}{8} & & \frac{1}{9} & \left[\frac{1}{10}\right]
\end{array}$$

337,8 *in Vorlage als Spalten geschrieben*:

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
3 & & 12 & & 30 & & 60 & & 105 & & 168 & & [252] & & 360 \\
 & 9 & & 18 & & 30 & & 45 & & 63 & & [84] & & [108] &
\end{array}$$

4 4 $\frown$ *erg. Hrsg.* 14 $_{10}$ *L erg. Hrsg.* 16 256 *L ändert Hrsg.* 17 98 *bzw.* 104 *L ändert Hrsg.*

338,16 Die falsche Kürzung durch 8 führt zu $\frac{1}{980}$ statt $\frac{1}{1260}$. 338,18–22 Die abgebrochene Überwärtsdivision 840 : 18 geht nicht in die weitere Rechnung ein.

337,8 f.

$$\begin{array}{r} 42\\ 30\\ \hline \cancel{1}\cancel{2}60\\ \cancel{1}\cancel{2}2\\ 1 \end{array} \ \not f\ 105 \qquad \begin{array}{r} 56\\ 42\\ \hline 112\\ 224\\ \hline 2352 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{1}\\ \cancel{3}\cancel{3}\\ \cancel{9}\cancel{1}\\ \cancel{2}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{2}\\ \cancel{1}\cancel{4}\cancel{4}4\\ \cancel{1}\cancel{1} \end{array} \ \not f\ 168$$

$$\begin{array}{c|c} 4 \frown 4 & \underline{1}\\ \hline 56 \frown 72 & \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72\\ 56\\ \hline 432\\ 360\\ \hline 4032 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \cancel{3}\\ \cancel{2}\cancel{8}\\ \cancel{4}\cancel{0}32\\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}6\\ \cancel{1}1 \end{array} \ \not f\ 252 \qquad \begin{array}{r} 36\\ 28\\ \hline 288\\ 72\\ \hline 1008 \end{array} \ \not f\ 504$$

$$\begin{array}{c} 9 \frown 2 = 18\\ \hline 72 \quad \frown \quad 90\\ 9 \frown 8 \qquad 45 \frown 2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 45\\ 8\\ \hline 360 \end{array}$$

337,13 f. *Nebenrechnungen*:

$$\frac{3}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{11}{6} \times \frac{1}{4} \quad \begin{array}{r} 44\\ 9\\ \hline \frac{53}{[24]} \end{array} \quad \frac{53}{24} \times \frac{1}{5} \quad \begin{array}{r} 265\\ 24\\ \hline \frac{289}{120} \end{array} \times \frac{1}{6} \quad \begin{array}{r} 289\\ 6\\ \hline 1734\\ 120\\ \hline 1854 \end{array}$$

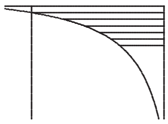
---

24 $\frac{1}{3}$ *(1)* $\frac{11}{9} \times \frac{1}{4}$ *(2)* $\frac{11}{6} \times \frac{1}{4}$ | $\begin{array}{r} 44\\ 9\\ \hline \frac{53}{36} \end{array}$ *ändert Hrsg.* | $\frac{53}{24} \times \frac{1}{4}$ $\begin{array}{r} 212\\ 24\\ \hline \frac{236}{96} \end{array}$ *streicht Hrsg.* | $\frac{53}{24} \times \frac{1}{5}$ *L*

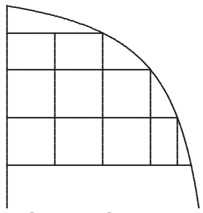
---

22 f. Richtig wäre $44 + 6 = 50$. Der Fehler wirkt sich auf die Berechnung der folgenden Terme aus.

[*Teil 3*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\frac{a^2}{y} = x.\ \frac{a^2}{y} \times \frac{a^2}{y-\beta} = \frac{a^2y - a^2\beta[-]a^2y}{y^2 - y\beta} = \frac{a^2\beta}{y^2 - y\beta}$$

$$\begin{array}{l} \quad 41 \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}4 \ \fint\ 2 \ \ \dfrac{414}{720}\Big|\dfrac{207}{\ }\Big|\dfrac{69}{\ } \ [\textit{bricht ab}] \\ \quad \cancel{7}\cancel{2}\cancel{0} \end{array}$$

3 + *L ändert Hrsg.* 5 2 $\dfrac{414}{720}\Big|$ *(1)* $\dfrac{207}{260}\Big|\dfrac{69}{8}$ *(2)* $\dfrac{207}{\ }\Big|\dfrac{69}{\ }$ *L*

3 $= \dfrac{a^2\beta}{y^2 - y\beta}$: Leibniz berechnet den absoluten Wert.

31. DE USU GEOMETRIAE PRO SERIEBUS INFINITIS
[Ende 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 32. 1/2 Bog. 4°. 1 S. auf Bl. 32 r°, 2 Figuren und quer geschriebene Rechnungen auf Bl. 32 v°.
Cc 2, Nr. 516

Datierungsgründe: Das Stück setzt die Entdeckung der Kreisreihe voraus. Reihen für den Vollkreis (s. S. 345 Z. 2) treten nicht in den frühesten Behandlungen der Kreisreihe auf (vgl. u. a. N. 24, 25, 26), sondern erst etwas später z. B. in N. 27 und am Ende von Cc 2, Nr. 555 A. Die verwendete Notation deutet auf eine Entstehung des Stückes vor dem Spätsommer 1674 hin.

Doctrina de seriebus infinitis arithmeticis, intervalla nimirum assignabilia habentibus, suapte natura intractabilis, non nisi ope geometriae provehi potest. Ope autem geometricarum demonstrationum innumerae in ea detegi possunt novae aequationes et harmoniae, eaeque forte inductione nobis multa admiranda daturae.

Cum geometrice dentur adscriptae multorum arcuum circumferentiae sygnotωn atque inter se; exprimantur duo sectores cuiusque seriebus istis infinitis. Cumque detur ratio sectorum, dabitur et ratio serierum, v. g. una alterius dupla, tripla; etsi hoc ex ipsis forte nemo mortalium sit agniturus.

Ex tangente semiarcus invenitur tangens arcus ipsius regula brevi a Pellio tradita.

14 dentur *(1)* multorum arcuum circumferentiae sygnotorum ideo *(2)* adscriptae *L*

---

18 a Pellio tradita: Die Regel von Pell, $Tan\ 2\alpha = \dfrac{2R^2 Tan\,\alpha}{R^2 - (Tan\,\alpha)^2}$ (R Radius, $Tan\ \alpha = R \cdot tan\ \alpha$, $0 \leq \alpha < \dfrac{\pi}{4}$), hat Leibniz vermutlich aus Fr. van SCHOOTEN, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II, S. 368, der auf Pell hinweist; vgl. *De problematis Geometriae Cartesii. De compositione rationem*, *LSB* VII,1 N. 110, S. 687; s. auch J. PELL, *Controversiae de vera circuli mensura* pars prima, 1647, S. 13.

Si $[a]$ sit $[1000]$, fiet $\dfrac{b^3}{3a} - \dfrac{b^5}{5a^3} + \dfrac{b^7}{7a^5} - \dfrac{b^9}{9a^7}$ etc. $\dfrac{\frac{1}{3}}{1000} - \dfrac{\frac{1}{5}}{1000,000,000} + \dfrac{\frac{1}{7}}{1000,000,000,000,000} - \dfrac{\frac{1}{9}}{1000,000,000,000,000,000,000}$ seu $\dfrac{\frac{a^6}{3} - \frac{a^4}{5} + \frac{a^2}{7} - \frac{1}{9}}{a^7} =$ $\dfrac{5a^6 - 3a^4}{15} + \dfrac{a^2}{7} = \dfrac{35a^6 - 21a^4 + 15a^2}{105} - \dfrac{1}{9} = \dfrac{315a^6 - 189a^4 + 135a^2 - 105}{945a^7}$.

$\dfrac{a}{l}\ \dfrac{b}{m}\ \dfrac{c}{n}\ \dfrac{d}{p}$. Ergo $\dfrac{a}{l} + \dfrac{b}{m} = \dfrac{am + bl}{lm} + \dfrac{c}{n} = \dfrac{amn + bln + clm}{lmn}$ etc.

Atque ita semper quilibet terminus in caeteros omnes ductus intelligetur, demto qui ei subscriptus est. Atque haec est compendiosa ratio reducendi quotcunque fractiones ad eundem denominatorem, nimirum termini omnes ducantur in se. Inde quot sunt termini

---

3 *Nebenrechnungen:*

350	210	150	105
35	21	15	9
315	189	135	945

---

1 b sit $\dfrac{1}{1000}$ *L ändert Hrsg.* 1 f. etc. *(1)* $\dfrac{\frac{1}{3}}{1000,000} - \dfrac{\frac{1}{5}}{1000,000,000,000,000} + \dfrac{\frac{1}{7}}{1000,000,000,000,000,000,000} - \dfrac{\frac{1}{9}}{1000,000,000,000,000,000,000,000,000}$ *(2)* $\dfrac{\frac{1}{3}}{1000}$ *L* 4 *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{d}} + \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} + \dfrac{\mathrm{g}}{\mathrm{h}} = \dfrac{\mathrm{ad} + \mathrm{bc}}{\mathrm{bd}} + \dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{f}} = \dfrac{\mathrm{adf} + \mathrm{bcf} + \mathrm{bde}}{\mathrm{bdf}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{l}}$ *L* 4 Ergo *erg. L* 7 Inde *(1)* tot ali *(2)* quot *L*

---

3 $\dfrac{5a^6 - 3a^4}{15}$: Leibniz berechnet zuerst den Zähler des Bruches und rechnet dabei fortlaufend.
4 Ergo $\dfrac{a}{l} + \dfrac{b}{m}$: Leibniz rechnet fortlaufend.

toties adhibeatur productus, aliquo termino alio atque alio minutus et residuum in eum numeratorem ducatur, qui est subtracti nominator, v. g.

$$\left.\begin{array}{ccc}
\frac{lmnp}{l} \frown a & & lmnp \frown \frac{a}{l} \\
\frac{lmnp}{m} \frown b & & lmnp \frown \frac{b}{m} \\
& \text{vel fiet} & \\
\frac{lmnp}{n} \frown c & & lmnp \frown \frac{c}{n} \\
\frac{lmnp}{p} \frown d & & lmnp \frown \frac{d}{p}
\end{array}\right\} \text{divisum per } lmnp. \qquad \begin{array}{c} amnp \\ blnp \\ \\ clmp \\ dlmn \end{array}$$

---

1 *Nebenrechnung zur Lesart:*

$$\begin{array}{rl}
1 & 720- \\
2 & \\
3 & \\
4 & \\
5 & \\
\underline{6} & \\
720 &
\end{array}$$

5 *Unter* divisum per *lmnp*: Ergo nihil hinc ducitur.

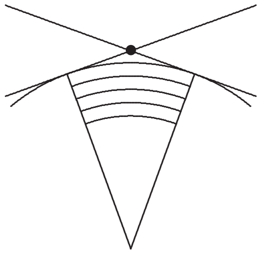
7 *Darunter:*

$$\begin{array}{llll}
2. \frown 3. \frown 4. & \textit{Rechts}: & a+b+c+d, & \frown l \\
1. \frown 3. \frown 4. & & a+b+c+ & \frown m \\
1. \frown 2. \frown 4. & & & \\
1. \frown 2. \frown 3. & & &
\end{array}$$

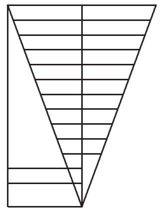
1 termino |alio atque alio *erg.*| minutus *(1)* v. g. lmnp − l ⌢ a lmnp − m ⌢ b lmnp − n ⌢ c lmnp − p ⌢ d. Atque ita praeclara habetur ratio, eaque universalissima inveniendi fractionum summas: F a c t u s n o m i n a t o r u m d u c a t u r i n s u m m a s n u m e r a t o r u m , a p r o d u c t o a u f e r a t u r s u m m a f a c t o r u m e x q u o l i b e t n u m e r a t o r e i n s u u m n o m i n a - t o r e m , e. g. $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}$ *(2)* et *L*

---

1 aliquo termino: Das angegebene Verfahren zur Addition von Brüchen ist nicht richtig. Leibniz bemerkt den Fehler, bessert das Schema aus und streicht das folgende Theorem, korrigiert den Text hier aber nicht.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\underbrace{\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}+\frac{2}{195}+\frac{2}{323}+\frac{2}{483}+\frac{2}{675}\text{ etc.}}$$

$$\frac{1}{3}\quad\left[\frac{1}{8}\right]\ \frac{1}{15}\quad\frac{1}{24}\quad\frac{1}{35}\qquad\text{etc.}$$

$$\frac{1}{1\,000\,000\,000}$$

$$\frac{abc^4+defg}{c^6}=\frac{\begin{array}{c}170000\\+4321\end{array}}{1000000}.\text{ Eius }\square\text{ est }=\frac{a^2b^2c^8+d^2e^2f^2g^2}{c^{12}}.$$

$$\frac{ac^5+bc^4+dc^3+ec^2+fc+g}{c^6}.\text{ Eius }\square\ =[\textit{Rechnung bricht ab}]$$

2 *(1)* $\frac{1}{3}+\frac{1}{35}+\frac{1}{99}+\frac{1}{195}+\frac{1}{323}+\frac{1}{483}+\frac{1}{675}$ *(2)* $\frac{2}{3}$ *L* 3 | 1 *gestr.* | $\frac{1}{3}$ *L* 3 $\frac{1}{8}$ *erg. Hrsg.* 5 | $\frac{\mathrm{a+b}}{\mathrm{c}}$. Ergo *gestr.* | $\frac{\mathrm{abc^4+defg}}{\mathrm{c^6}}$ *L* 6 *(1)* $\frac{\mathrm{ac^5+bc^4+defg}}{\mathrm{c^6}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{ac^5+bc^4+dc^3+ec^2+fc+g}}{\mathrm{c^6}}$ *L* 6 Eius □ = | $\mathrm{a^2c^{10}+2abc^9+2ade}$ *gestr.* | *L*

---

3 Zur Kreisreihe in der Form $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}$ etc. vgl. N. 27 S. 318 Z. 2 – S. 319 Z. 5; zu ihrem Zusammenhang mit der Reihe $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}$ etc. vgl. u. a. N. 38_2 S. 386 Z. 10–18 u. *LQK*, prop. XLII S. 88–91. 5 Eius □ est: Im Zähler fehlt der Term $+2abc^4defg$.

32. RADICUM EXTRACTIO PER SERIEM INFINITAM
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 119. Ca 2/5 Bog. 4°. 1 S. Rückseite leer. — Am unteren Rand gestrichene Gesprächsaufzeichnung über Salpetergewinnung (= S. 347 Z. 9 f.).
Cc 2, Nr. 1467

Datierungsgründe: Die folgenden drei Stücke sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben. Die verwendete Notation deutet auf eine Entstehung der Stücke etwa im Sommer 1674 hin: In N. 21 treten Formen kombinierter Doppelvorzeichen und vereinzelt der Waagebalken als Gleichheitszeichen auf, deren Gebrauch bei Leibniz ab dieser Zeit belegt ist. N. 32 und N. 33 befassen sich mit der Reihenentwicklung von Quadratwurzeln aus Binomen. In N. 32 verwendet Leibniz eine fehlerhafte Formel, ebenso in N. 38_{15} vom Oktober 1674 (s. Erl. zu S. 347 Z. 4). N. 34 setzt die Entdeckung der Kreisreihe und Rechnungen in N. 26 voraus (s. Erl. zu S. 355 Z. 2 u. S. 355 Z. 4).

Radicum extractio per seriem infinitam.

Omnis radicum extractio nobis novum quoddam genus offert seriei continue decrescentis cuius haberi potest summa. Et radicis quadratae extractio summam exhibet fractionum quarum numeratores sunt potestates numeri alicuius dati, exponentium geometrica progressione crescentium, ut si numerus ponatur esse $2, = b$ fient numeratores illi:

b	b^2	b^4	b^8	b^{16}	b^{32}	etc.
2	4	16	256	65536	65536×65536	

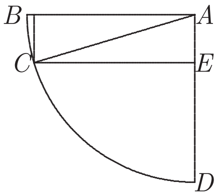
Unde patet si b ponatur $= \frac{1}{2}$ posteriores terminos fieri indicibiliter parvos.

Consule quae de eiusmodi progressione summanda annotavit Gerickius.

Hinc sequitur appropinquationes haberi posse radicum surdarum admirabiles quae ad quadraturas quoque figurarum transferri possunt.

14 *(1)* Series per radicum extractionem *(2)* Radicum *L* 17 alicuius *erg.* *L* 24 sequitur *(1)* nullas reperi *(2)* appropinquationes *L*

23 annotavit Gerickius: O. v. Guericke, *Experimenta nova*, 1672, S. 67 f.



[*Fig. 1*]

Esto quadrans circuli $ABCDA$ et abscissa quaelibet ex AD a centro, sit $AE = x$. et sinus rectus $CE = y$. Radius $AD = AC = a$. Patet esse: $y^2 = a^2 - x^2$. Ergo: $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. Hinc usus esse potest praeclarus extractionis sive evolutionis appropinquatoriae ad quadraturam appropinquatoriam admirabilem. Est enim radix composita ex terminis quorum 1^{mus} a, secundus $\frac{x^2}{a}$, tertius $\frac{x^4}{a^2 - x^2, \frown a}$ etc. quartus $\frac{x^8}{\ldots}$. Sed quia video etiam divisorem valde crescere, hinc metuo ne non satis lucremur.

---

8 *Darunter, gestrichen:* Mons. Blanchard m'a dit que le salpetre se fait du ⟨tophum⟩ en France. Mons. Rochas amy de M. Blanchard, son pere avoit esté [*bricht ab*]

---

4 evolutionis appropinquatoriae: Leibniz verwendet eine fehlerhafte Formel für die Reihenentwicklung der Quadratwurzeln aus Binomen wie in N. 38_{15} S. 519 Z. 6–9. Dort wie hier vergißt er den Faktor Zwei im Nenner der Rekursionsformel. 6 secundus $\frac{x^2}{a}$: Richtig wären $\frac{x^2}{2a}$ für den zweiten, $\frac{x^4}{4a(2a^2 - x^2)}$ für den dritten und $\frac{x^8}{16a(2a^2 - x^2)^3 - 8ax^4(2a^2 - x^2)}$ für den vierten Term. 9 f. Mons. Blanchard ... Mons. Rochas ... pere: nicht ermittelt.

33. DE RADICIBUS EX BINOMIIS QUANTITATIBUS EXTRAHENDIS SPECIMEN UNIVERSALE

[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 120–121. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 121 v° u. 120 r°. Bl. 120 v° u. 121 r° leer.
Cc 2, Nr. 1030

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 32 (s. dort).

De radicibus ex binomiis quantitatibus specimen universale, in quadrata radice

$\sqrt{a+b} = ...$

$\cancel{a}$	$+\cancel{b}+\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a}}-\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a}}+\cancel{\frac{b^4}{16a\frown\llcorner 4a^2+4ab+b^2\lrcorner}}-\frac{b^4}{16a\frown\llcorner 4a^2+4ab+b^2\lrcorner}$ ☿ $\left(\frac{b^4}{16a,\frown 2a+b\frown 2a+b}\right)$	
$+\sqrt{a}$	$+\frac{b}{2\sqrt{a}}$	$\boxed{-\frac{b^2\sqrt{a}}{8a^2+4ab}\text{(vel }\frac{b^2}{8a\sqrt{a}+4b\sqrt{a}}=\frac{b^2}{4\sqrt{a},\frown 2a+b}\text{ NB.)}}$ $-\frac{b^2}{4\sqrt{a},\frown 2a+b}$
$\cancel{\sqrt{a}}$	$2\sqrt{a}+\frac{b}{2\sqrt{a}}$ vel $\frac{4a+b}{2\sqrt{a}}$ multiplicetur per $\frac{b}{2\sqrt{a}}$ fiet: $\frac{4ab+b^2}{4a}$ seu $\cancel{b}+\frac{\cancel{b^2}}{\cancel{4a}}$	$2\sqrt{a}+\frac{b}{\sqrt{a}}$ vel $\frac{2a+b}{\sqrt{a}}-\frac{\frac{b^2}{4a}}{\frac{2a+b}{\sqrt{a}}}$ vel $\frac{2a+b}{\sqrt{a}}-\frac{b^2}{\sqrt{a},\frown 8a+4b}$ seu $\frac{4\frown 2a+b\frown 2a+b,,-b^2}{\sqrt{a},\frown 8a+4b=\sqrt{a},\frown 4\frown 2a+b}$ ducatur in $\frac{[-]b^2}{\sqrt{a},\frown 8a+4b}$ fiet: $\frac{-\llcorner\llcorner 4\frown 2ab^2+b^3\frown 2a+b\lrcorner\lrcorner+b^4}{a\frown 16\frown 4a^2+4ab+b^2}$ vel: $\frac{b^2,,,\frown b^2,,-4,\frown 4a^2+4ab+b^2}{a,\frown 16,\frown 4a^2+4ab+b^2}$ cuius quaeratur differentia a $-\frac{b^2}{4a}$ vel a $-\frac{b^2\frown 4\frown\llcorner 4a^2+4ab+b^2\lrcorner}{a^2\frown\underbrace{4\frown 4}_{16},\frown\llcorner 4a^2+4ab+b^2\lrcorner}$ est $\frac{-b^4}{a\frown 16\frown\llcorner 4a^2+4ab+b^2\lrcorner}$

11 ☿ (. . .) *erg. L* 16 − *erg. Hrsg.*

$-\boxed{\dfrac{b^4}{\llcorner\llcorner\llcorner\llcorner 2a+b, cub,, \frown 2,,, + b^2, \frown 2a+b\lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown 8\sqrt{a}}}$ $\dfrac{b^4}{2a+b,\square, \frown 2,, + b^2,,, \frown 8\sqrt{a}, \frown 2a+b}$	Porro $\dfrac{b^8}{2a+b,\square\square,, \frown 4,,, + b^4,,, + 2a+b \frown 4 \frown b^4,,,,}$ $\overline{64a, \frown 2a+b,\square \frown \text{ omnes priores radices duplas}}$
$2\sqrt{a} + \dfrac{b}{\sqrt{a}} - \dfrac{b^2}{\sqrt{a},\frown 8a+4b}$ ☽ vel $\dfrac{2a+b}{\sqrt{a}} +$ $\dfrac{\cancel{2}b^2}{\cancel{2}\sqrt{a},\frown 4a+2b}$ vel $\dfrac{\llcorner\llcorner 2a+b\lrcorner \frown 2 \frown \llcorner 2a+b\lrcorner\lrcorner + b^2}{2\sqrt{a}\frown 2a+b}$ ☽. Iam $-\dfrac{\dfrac{b^4}{16a\frown \llcorner 4a^2+4ab+b^2}}{\dfrac{2a+b}{\sqrt{a}}+\dfrac{b^2}{2\sqrt{a},\frown 2a+b}}\ \odot = \dfrac{\text{☿}}{\text{☽}}$ seu $-\dfrac{b^4\frown 2\sqrt{a},\frown 2a+b}{\llcorner 2a+b\lrcorner\square\square \frown 2,, + b^2 \frown 2a+b,\square,,, \frown 16a}$ vel $\odot - \dfrac{b^4}{2a+b,(cub)\frown 2,, + b^2\frown \llcorner 2a+b\lrcorner,,, \frown 8\sqrt{a}}$. Iam $\odot + \text{☽},\frown \odot,, - \text{☿}$, et $\odot = \dfrac{\text{☿}}{\text{☽}}$. Ergo fiet $\dfrac{\text{☿}}{\text{☽}} + \text{☽},\frown \dfrac{\text{☿}}{\text{☽}},, - \text{☿}$ sive $\dfrac{\text{☿}^2}{\text{☽}^2} + \text{☿} - \text{☿} = \dfrac{\text{☿}^2}{\text{☽}^2}$.	

Ecce ergo operationem tandem ita in compendium reductam, nempe, residuum operationis praecedentis appelletur ☿. duplum radicis appelletur ☽. Tunc radix nova $= \odot$ erit $= \dfrac{\text{☿}}{\text{☽}}$, residuum novum $\dfrac{\text{☿}^2}{\text{☽}^2} = \odot^2$, seu radicis novae quadratum.

11 Tunc *erg.* L

1–9 Dieser Teil des Schemas schließt in der Vorlage rechts an S. 348 Z. 12–19 an.

Et quia prima ☿ est b, prima ☽ $\boxed{\sqrt{a}}$, erit ergo secunda radix 2 ☽ $\boxed{\dfrac{☿}{2\,☽}}$, et residuum secundum seu dividendus tertius seu 2 ☿ erit $= \dfrac{☿^2}{4\,☽^2}$, et tertia radix erit

$$\frac{☿^2}{4\,☽^2, \frown 2, \frown \llcorner ☽ + \dfrac{☿}{2\,☽} \lrcorner} = \boxed{\frac{☿^2}{8\,☽^3 + 4☿\,☽}} \text{ et quarta erit}$$

$$\frac{☿^4}{64\,☽^6 + 64\,☽^4☿ + 16\,☿^2\,☽^2, \frown 2 \frown\ ☽ + \dfrac{☿}{2\,☽} - \dfrac{☿^2}{8\,☽^3 + 4☿\,☽}}.$$

---

1 *Zu* prima ☿ ... $\boxed{\sqrt{a}}$: $\boxed{\begin{array}{l} ☿ = b \\ ☽ = \sqrt{a} \end{array}}$

351,2–12 *Nebenrechnungen:*

38	38	228
<u>38</u>	<u>12</u>	<u>228</u>
304	76	1824
<u>114</u>	<u>38</u>	456
1444	456	<u>456</u>
<u>6</u>		51984
8664		
<u>6</u>		
51984		

1 f. est b, *(1)* erit ergo prima radix $\dfrac{☿}{2\,☽}$, et residuum primum *(2)* prima ... ergo | radix *streicht Hrsg.* | secunda ... et | residuum *gestr. u. erg.* | secundum | seu ... tertius *erg.* | seu *L* 2 et *(1)* secunda *(2)* tertia *L*

---

1 prima ☽ $\boxed{\sqrt{a}}$: Leibniz ändert den ursprünglichen Ansatz ☽ $= 2\sqrt{a}$ zu ☽ $= \sqrt{a}$. 1 f. radix 2 ☽ ... seu 2 ☿: Leibniz verwendet zweimal vorangestellte Ziffern zur Indexbezeichnung. 351,3–6 $-\dfrac{1}{1442}$: $-\dfrac{1}{328776 = 228 \cdot 1442}$ wäre richtig; der Fehler unterläuft Leibniz bei der Umformung des Doppelbruches in S. 351 Z. 5 der vorletzten Spalte und beeinträchtigt auch die letzte Spalte.

$$y + \frac{b}{2y} - \frac{b^2}{2,, \frown 4y^2, \frown y + \frac{b}{2y}} - \frac{b^4}{2 \frown, 4y^2,, \square,,, \frown \llcorner y + \frac{b}{2y}, \square\lrcorner,,,, \frown 2y, + \frac{b}{y} - \frac{b^2}{4y^2, \frown y + \frac{b}{2y}}}$$

$$\cancel{9} + \cancel{1} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{36}} - \frac{\cancel{1}}{\cancel{36}} + \cancel{\frac{1}{51984}} - \frac{1}{51984}$$

$$3 + \frac{1}{6} \qquad - \frac{1}{228} \qquad - \frac{1}{1442}$$

$$\cancel{3} \quad 6 + \frac{1}{6} \qquad \frac{\frac{1}{6}}{\cancel{1} + \frac{\cancel{1}}{\cancel{36}}}$$

$$6 + \frac{2}{6} \qquad \frac{\frac{1}{36}}{6 + \frac{2}{6} = \frac{38}{6}}$$

seu

$$\frac{\frac{1}{6}}{38} = \frac{1}{38 \frown 6}$$

seu $\frac{1}{228}$

$\frac{38}{6} + \frac{1}{38 \frown 6}$ seu $+\frac{38}{6} - \frac{1}{38 \frown 6},$ $\frown \frac{1}{38 \frown 6}$ fiet $-\frac{1}{36} + \frac{1}{51984}$

$$+\frac{38}{6} - \frac{2}{38 \frown 6}$$

Iam $\dfrac{-\frac{1}{38 \frown 6}, \frown \frac{1}{38 \frown \cancel{6}}}{\frac{38}{\cancel{6}} - \frac{2}{38 \frown \cancel{6}}} = \dfrac{\frac{1}{\cancel{6}} \frown \frac{1}{\cancel{6}}}{\frac{38 \frown 38}{\cancel{6}} - \frac{2}{\cancel{6}}}$

seu $\dfrac{1}{38 \frown 38, -2} = \dfrac{1}{1442}$

$$\frac{38}{6} - \frac{2}{38 \frown 6} - \frac{2}{38 \frown 38 - 2}$$

$$-\frac{\frac{1}{38, \square\square,, + 4,, - 38\square \frown 4}}{\frac{38}{6} - \frac{2}{38 \frown 6} - \frac{2}{38\square - 2}}$$

Si quantitati cuidam velut termino primo (a), alia (b) per primi duplam divisa velut terminus 2dus addatur (subtrahatur), et a summa subtrahatur (ad summam addatur) terminus tertius qui sit quadratum secundi a praecedentium terminorum duplo divisum; et a residuo rursus subtrahatur (ad residuum addatur) terminus quartus qui sit quadratum tertii a praecedentium terminorum duplo divisum; atque ita porro in infinitum continuatus intelligatur processus: Summa seriei huius infinitae aequabitur radici qua-

13 f. Si *(1)* termino *(2)* radici quadrat *(3)* quantitati cuidam | velut ... (a) *erg.* | , alia | (b) *erg.* | per *(a)* primam *(b)* primi ... divisa | velut ... 2dus *erg.* | addatur | (subtrahatur) *erg.* | et *L* 14 (ad ... addatur) *erg. L* 16 (ad ... addatur) *erg. L*

dratae binomii (residui), ex quantitatis primo assumtae a, quadrato, et altera quantitate b compositi seu $= \sqrt{a^2+b}$ $(= \sqrt{a^2-b})$.

Si hoc applicetur ad circulum cuius natura $\sqrt{a^2-x^2} = y$ fiet: $a - \dfrac{x^2}{2a} + \dfrac{x^4}{8a^3-[4]ax^2}$.

Quaerenda aequatio circulo symmetros cuius potestas statim ab initio alta.

$\dfrac{x^4}{a^3-x^2a} = y$. Ergo $x^4 = a^3y - ax^2y$: $[y] = \dfrac{x^4}{a^3} + \dfrac{x^6}{a^5-x^2a^3}$.

$\dfrac{a^2y^2}{4} + x^4 + x^2ay = a^3y + \dfrac{a^2y^2}{4}$. Ergo $\left[\dfrac{ay}{2}\right] + x^2 = \sqrt{a^3y + \dfrac{a^2y^2}{4}}$ seu $x = \sqrt{a\sqrt{a^{\cancel{3}}y + \dfrac{\cancel{a^2}y^2}{4}} - \left[\dfrac{ay}{2}\right]}$.

1 binomii | (residui) *erg.* | ex *(1)* termino *(2)* quadrato ter *(3)* quantitatis *(4)* quantitate *(5)* quantitatis *L* 3 f. $\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}} +$ | $\dfrac{\mathrm{x}^4}{8\mathrm{a}^3 - 2\mathrm{ax}^2}$ *ändert Hrsg.* | . *(1)* $8\mathrm{a} \frown \mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2$ *(2)* | $10\mathrm{ay} \frown \mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2 = \mathrm{x}^4$. *streicht Hrsg.* | Ergo *(3)* Quaerenda *L* 5 y *erg. Hrsg.* 6 f. ay *L ändert Hrsg. zweimal*

34. DE APPROPINQUATIONE CIRCULI PER SERIEM II
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 II 1 Bl. 246–247. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 247 r° rechts oben Figur ohne Bezug zum Haupttext, quer zur Schreibrichtung.
Cc 2, Nr. 778

Datierungsgründe: Das Stück gehört zu der Gruppe um N. 32 (s. dort).

[*Teil 1*]

$b =$ tangens arcus 1. gradus 174550 minor vero, radio posito 10,000,000

$$\begin{array}{rrl}
 & 174550 & \\
 & 17455\ \ 0 & \\
\hline
 & 8727500 & \\
 & 87275 & \\
 & 69820 & \\
 & 122185 & \\
 & 17455 & \\
\hline
b^2 & 304677025|00 & - \ \ 1) \\
 & 609354050|00 & - \ \ 2) \\
 & 914031075|00 & - \ \ 3) \\
 & 1218708100|00 & - \ \ 4) \\
 & 1523385125|00 & - \ \ 5) \\
 & 1828062150|00 & - \ \ 6) \\
 & 2132739175|00 & - \ \ 7) \\
 & 2437416200|00 & - \ \ 8) \\
 & 2742093225|00 & - \ \ 9) \\
\hline
\end{array}$$

23 2742093225|00 – 9)
| 30467933250|00 – 10) *gestr.* | *L*

$$
\begin{array}{rr}
 & 30467702500 \\
 & 17455\quad 0 \\
\hline
 & 1523385125 \\
 & 1523385125\cdot \\
 & 1218708100\cdot\cdot \\
 & 2132739175\cdot\cdot\cdot \\
 & 304677025\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\hline
 & 5205925261375 \\
 & 11221221 \\
\hline
b^3= & 5318137471375000 \\
 & (b^2)\ \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\quad 00 \\
\hline
 & 1523385125 \\
 & 2132739175\cdot \\
 & 91\cancel{4}031075\cdot\cdot \\
 & 304\cancel{6}77025\cdot\cdot\cdot \\
 & \cancel{2}\cancel{1}327\cancel{3}9175\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 12\cancel{2}\cancel{1}870\cancel{8}100\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & \cancel{2}1\cancel{3}\cancel{2}739\cancel{1}75\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & \cancel{9}1\cancel{4}031075\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 304\cancel{6}\cancel{7}702\cancel{5}\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 243\cancel{7}4\cancel{1}6200\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 304\cancel{6}7\cancel{7}025\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 9140\cancel{3}10\cancel{7}5\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
 & 15233851\cancel{2}5\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot \\
\hline
 & 1519182079095236448375 \\
 & 1\quad 1132224224321211 \\
\hline
b^5= & 1620314303319557659375000000
\end{array}
$$

$$\frac{b^3a^4}{a^7} = 531813747137[5]000,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000$$

$$\frac{b^3}{3} = 1772712490458333\frac{1}{3}$$

$$\frac{b^3a^4}{3a^7} = 17,727.1249,0458.333,3333.333,3333.333,3333.333,3333.333\frac{1}{3}$$

$$\frac{b^5}{5} = 32406286066391153187500000$$

1 471375 *L ändert Hrsg.* 4 $\frac{\mathrm{b}^5}{5} =$ *(1)* 34010476777318588645820 0,000 *(2)* 3240628606639115 3187500000 *L*

---

2 $\frac{b^3}{3}$: Leibniz berechnet den Wert in N. 26 S. 307 Z. 15–17. 4 $\frac{b^5}{5}$: Leibniz berechnet den Wert in N. 26 S. 308 Z. 10–12.

4 | 49
7 | 7
4 |

· · · · · · · · · · · · · ·3046770250,0
1620314303319557659375 00,000

· · · · · · · · · · · · · ·1523385125
· · · · · · · · · · · ·2132739175 ·
· · · · · · · · · · · ·914031075 · ·
· · · · · · · · · ·2742093225 · · ·
· · · · · · · · ·1523385125 · · · ·
· · · · · · · ·1828062150 · · · · ·
· · · · · · ·2132739175 · · · · · ·
· · · · · ·1523385125 · · · · · · ·
· · · · ·1523385125 · · · · · · · ·
· · · ·2742093225 · · · · · · · · ·
· · · ·304677025 · · · · · · · · · ·
· · ·914031075 · · · · · · · · · · ·
· ·914031075 · · · · · · · · · · · ·
9140310750 · · · · · · · · · · · · ·
1218708100 · · · · · · · · · · · · · · ·
304677025 · · · · · · · · · · · · · · · ·
914031075 · · · · · · · · · · · · · · · · ·
6093540500 · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
1828062150 · · · · · · · · · · · · · · · · · · ·
304677025 ·

48245131837812801764101714 8375
1122122312222243433333 21211

49367254150035045197433835937 5 000, 000 $= b^7$

7) 13436564543 23 51 5224 24 513 264

$$\frac{b^7}{7} = 7052.464,8785.764,3502.820,4833.705,3571.428\frac{4}{7}$$

Iam $+\frac{b}{1}$	174550,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000,0000.000
$+\frac{b^5}{5}$	.... 32.406,2860.663,9115.318,7500.000,0000.000,0000.000
$-\frac{b^3}{3}$	..... 17,7271.249,0458.333,3333.333,3333.333,3333.333,3333.333
$-\frac{b^7}{7}$	.... 7052.464,8785.764,3502.820,4833.705,3571,428
	174532,2761.156,5349.865,6997.221,0663,846,1832.961,3095.239

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{cc}
\frac{1}{1} & 1 \\[6pt]
\frac{1}{4} & 4 \\[6pt]
\frac{1}{9} & 9 \\[6pt]
\frac{1}{16} & 16 \\[6pt]
\frac{1}{25} & 25 \\[6pt]
\frac{1}{36} &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cl}
\frac{2}{1} & \underbrace{\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{8}\quad \frac{1}{16}\quad \frac{1}{}} \\[6pt]
\frac{3}{2} & \frac{1}{1}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{9}\quad \frac{1}{27}\quad \frac{1}{81} \\[6pt]
\frac{4}{3} & \frac{1}{1}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{16}\quad \frac{1}{64}
\end{array}$$

7–9 *Nebenbetrachtungen*: $\frac{1}{1-x} \sqcap 1 + \boxed{\frac{x}{1-x}} + x + \frac{x^2}{1[-x]}$

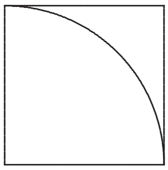
$1 - x + x$ [*bricht ab*] $\frac{x}{1-x}$ ⨍ $x - x^2+$ [*bricht ab*]

$\frac{x}{x-1} \quad \frac{2}{2-1} \quad \frac{2}{2-1=1} \quad 2 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3} \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{64}$ etc.

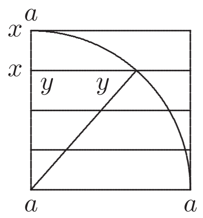
1 Iam *(1)* | $\frac{\mathrm{b}}{1}$ = *streicht Hrsg.* | 174550, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000, 0000000 *(2)* $+\frac{\mathrm{b}}{1}$ *L* 13 $-$x *erg. Hrsg.*

356,25 Leibniz fügt dem Ergebnis der Multiplikation eine Null zuwenig an. Dadurch wird das Ergebnis der abschließenden Summation ab der zwölften Stelle verfälscht.

[*Teil 3*]

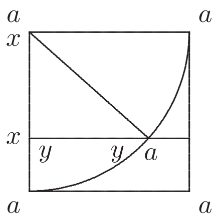


[*Fig. 1*]

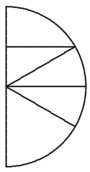


[*Fig. 2*]

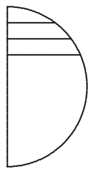
$2ax - x^2 = y^2$.
$\sqrt{2ax - x^2} = y$.
$\sqrt{2ax - x^2}$ ad a.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]



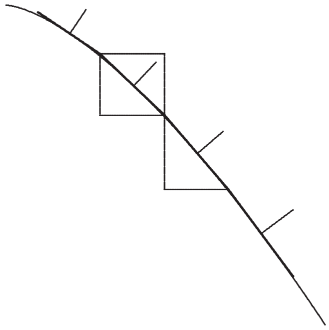
[*Fig. 5*]

$\sqrt{a^2 - x^2} = y$.
$a^2 + x^2 = y^2$.
$-$

$a^2 - x^2 = y^2$. $\sqrt{a^2 - x^2} = y$. Sinus $\odot^{\mathrm{i}}$ ad elementum $\square^{\mathrm{ti}}$ ut $\sqrt{a^2 - x^2}$ ad a. $1 - x^2$ ad $1^{\square}$. $\sqrt{1^{\square} - \frac{1}{3}}$. $\sqrt{1 - \frac{1}{3}}$. $\sqrt{\frac{2}{3}}$ ad 1. Si radius est 1, circulus erit $\boxed{1 - \frac{1}{3}}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$.

2–4 *Nebenbetrachtungen*: $2ax - x^2 = y^2$. $\sqrt{2ax - x^2} = y$. $\sqrt{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}$. $2ax + x^2 = y^2$.

11 circulus: Gemeint ist der Sinus.



[*Fig. 6*]

$$ax^2 = y^3.\ x^2 = \frac{y^3}{a}.\ x = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ \sqrt{x} = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ x = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ xa = \sqrt{y^3 a}.\ x^2 a = y^3.$$

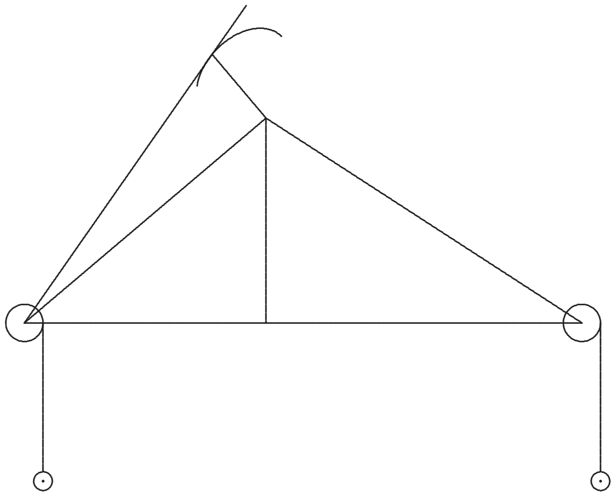
$$\begin{matrix}\sqrt{x}\\ \xi\end{matrix} = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ \frac{x}{\xi} = \frac{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}{\sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}}.\ \xi = \sqrt{\sqrt{\frac{y^3}{a}}}.\ \xi^2 = \sqrt{\frac{y^3}{a}}.\ \xi^4 = \frac{y^3a^2}{a}.\ \xi^4 = y^3 a.$$

---

2 *Nebenbetrachtung*: $x^2 = ay$. $\quad \frac{1}{3} \quad \frac{2}{3}$

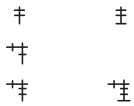
---

3 $\xi^4 = \frac{y^3a^2}{a}$: Leibniz rechnet ab hier wieder dimensionsgerecht und ergänzt daher den Faktor a^2 im Zähler.



[*Fig. 7, ohne Bezug zum Haupttext, quer zur Schreibrichtung*]

[*Notiz*]



1 *Fig. 7*: Eine ähnliche Figur überschrieben in *Data basi ... invenire triangulum. Tentamen tertium*, *LSB* VII, 1 N. 14_3 S. 146.

35. THEOREMA ARITHMETICAE INFINITORUM
[August/September 1674]

Überlieferung: *L* Reinschrift mit gestrichenem Zusatz: LH 35 III B 10 Bl. 1. 1 Bl. 2°, davon oben ein Streifen von ca. 1/5 abgerissen. 2 S. Reinschrift auf Bl. 1 r°, Zusatz auf Bl. 1 r° unten und auf Bl. 1 v°. — Teildr.: *LBG* S. 79 (= Z. 10 – S. 362 Z. 9).
Cc 2, Nr. 517

Datierungsgründe: Das verwendete Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin. Die lateinische Reinschrift des Theorems und der gestrichene Zusatz bilden die Vorlage für das französische Konzept N. 36, datiert September 1674. N. 35 dürfte also kurz zuvor entstanden sein.

Theorema arithmeticae infinitorum.

Binarius, est summa seriei infinitae fractionum, quarum numerator unitas, denominatores vero numeri triangulares inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum.

$$A \quad \text{series } \odot \qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21} \text{ etc. in infinitum} \quad \sqcap 2.$$

Demonstratio

Esto series infinita fractionum, quarum numerator unitas, nominatores vero sint numeri naturales inde ab unitate inclusa ordine crescentes in infinitum

$$B \quad \text{series } ☽ \qquad \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} \text{ etc. in infinitum.}$$

Exponatur et series $\odot$ dimidiata:

$$C \quad \text{series } ☿ \qquad \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42} \text{ etc. in infinitum.}$$

Quam aio esse $\sqcap$ 1.

11 Binarius, est *erg. L* 11 summa *(1)* fractionum infinitarum *(2)* seriei *L* 13–362,5 A, B, C, D, E *erg. L* 13 $\sqcap$ 2. *erg. L* 15 series *(1)* fractionum infinitarum *(2)* infinita *L* 20 Quam aio esse $\sqcap$ 1. *erg. L*

10–362,9 Theorema: vgl. N. 36 S. 368 Z. 1 – S. 369 Z. 4.

Nam auferatur series ☿ a serie ☽, singulae fractiones a singulis ordine respondentibus, restabit

$$D \qquad \frac{1}{2} + \frac{4}{12} + \frac{9}{36} + \frac{16}{80} + \frac{25}{150} + \frac{36}{252} \text{ etc.}$$

sive depressis fractionum terminis

$$E \text{ series ♀} \qquad \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} \text{ etc. in infinitum.}$$

Ab eadem serie ☽ auferatur 1. residua erit eadem series ♀. Ergo 1 et series ☿ sunt inter se aequales. Quia ab eadem serie ☽ ablatae, relinquunt idem. Ergo dupla series ☿ sive series ⊙ erit aequalis binario.

Quod demonstrandum sumseramus.

[*Zusatz, gestrichen*]

Sed hoc in infinitum eventurum debet demonstrari. Quod ita facio: terminus seriei ☽, v. g. $\frac{1}{3}$, ita exprimatur: $\frac{1}{y}$. supponendo y significare numerum quemlibet: triangulus ab y est $\frac{y^2+y}{2}$ v. g. $\frac{9+3}{2} \sqcap 6$. Ergo terminus seriei ⊙ ita exprimetur: $\frac{2}{y^2+y}$. v. g. $\frac{2}{9+3} \sqcap \frac{1}{6}$.

Terminus seriei ☿ erit $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{9+3} \sqcap \frac{1}{12}$. Auferantur termini seriei $\frac{1}{y^2+y}$, a terminis seriei $\frac{1}{y}$ fiet: $\frac{y^2+y-y}{y^3+y^2}$, sive $\frac{1}{y+1}$. v. g. $\frac{1}{3+1}$ sive $\frac{1}{4}$.

Lemma[:] La moitié d'une fraction triangulaire (c'est à dire dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire) estant ostée de la fraction naturelle qui

5 *Darunter:* ∗

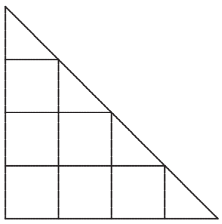
3 D | series ♀ *gestr.* | $\frac{1}{2}$ *L* 11 *(1)* Unum superest cuius forte demonstrationem exactior aliquis desideret, quod scilicet in infinitum futurum sit, *(2)* Sed *L* 17 Lemma *(1)* Les fr *(2)* Une fraction triangulaire *(3)* Si d'une *(4)* La moitié *L* 17 f. (c'est . . . triangulaire) *erg. L*

17–363,14 Vgl. N. 36 S. 367 Z. 1–18.

luy repond (c'est à dire ayant pour numerateur l'unité, et pour le nominateur le costé du triangle rectangle isoscele, dont le nombre triangulaire exprime l'aire) il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand.

Demonstration: Soit un nombre pris à discretion, y, v. g. 3. Le triangle qui luy repond sera $\frac{y^2+y}{2}$. $\frac{9+3}{2}$ ou $\sqcap$ 6. comme d'autres l'ont demonstré, outre que la demonstration en est fort aisée. Donc la fraction triangulaire sera $\frac{2}{y^2+y}$ v. g. $\frac{2}{9+3}$ ou $\frac{1}{6}$, et la moitié de la fraction triangulaire $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{9+3}$ ou $\frac{1}{12}$. Et la fraction naturelle qui luy repond sera $\frac{1}{y}$ v. g. $\frac{1}{3}$. De $\frac{1}{y}$ v. g. $\frac{1}{3}$ ostons $\frac{1}{y^2+y}$ v. g. $\frac{1}{12}$, c'est à dire ostons la moitié de la triangulaire de la naturelle, il restera $\frac{y^2+y-y}{y^3+y^2}$, ou $\frac{y^2}{y^3+y^2}$, ou $\frac{1}{y+1}$, v. g. $\frac{1}{4}$. Or $\frac{1}{y+1}$ est la fraction du nombre naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand, puisque son denominateur qui est le nombre naturel, n'est augmenté que de l'unité; estant par consequent le costé du triangle prochainement plus grand.

Donc si la moitié d'une fraction triangulaire est ostée de la fraction naturelle qui luy repond, il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand.



[*Fig. 1*]

1 repond *(1)* qui a *(2)* dont le numerateur est l'unité, et dont le nominateur est *(3)* (c'est *L* 3 naturelle *(1)* du triangle *(2)* qui repond *L* 4 Demonstration: *(1)* Soit la fraction triangulaire *(2)* Soit *L* 6 $\frac{1}{6}$, *(1)* et la fraction naturelle qui luy repond $\frac{1}{\text{y}}$ v. g. $\frac{1}{3}$ *(2)* et *L* 10 fraction *(1)* naturelle du *(2)* du *L* 11 puisque *(1)* elle n'est que la fraction naturelle du triangle *(2)* le nombre naturel *(3)* son *L*

5 d'autres: vgl. Bl. Pascal, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.] S. 11 (*PO* III, S. 463).

Definitions

F r a c t i o n   t r i a n g u l a i r e est, dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire, v. g. $\frac{1}{6}$.

N o m b r e   t r i a n g u l a i r e est icy, un nombre qui exprime l'aire d'un triangle rectangle dont [*bricht ab*]

1–5 Definitions ... dont *erg. L*

2 f. Vgl. N. 36 S. 366 Z. 4 f. 4 f. Vgl. *a. a. O.* S. 365 Z. 7–10.

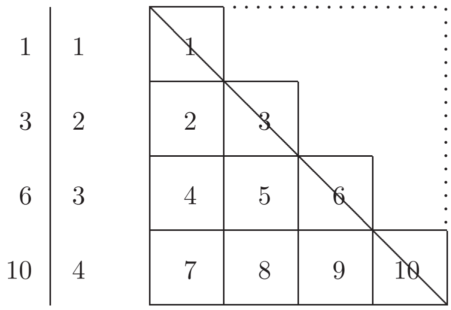
36. SUMMA FRACTIONUM A FIGURATIS, PER AEQUATIONES
September 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 5. 1 Bl. 2°. 2 S. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 755

S u m m a f r a c t i o n u m a f i g u r a t i s , per aequationes

Definitions.

N o m b r e t r i a n g u l a i r e est, qui exprime l'aire d'un triangle rectangle isoscele comme si le costé du triangle est exprimé par un nombre de pieds; par exemple 4, le nombre triangulaire exprimera le nombre des pieds quarrez, 10, dont ce triangle est composé.



[*Fig. 1*]

---

5 *Darüber:* Dudum ista inveneram, biennio abhinc, sed scripsi, ut amicis darem, 1674 Sept. Iam ante biennium Hugenio dixeram.

5 S u m m a *(1)* triangulorum pro *(2)* f r a c t i o n u m . . . aequationes *erg. L* 7 f. rectangle | isoscele *erg.* | *(1)* c'est à dire le nombre *(a)* des quelques petits quarrez *(b)* des unités qua *(2)* par exemple *(3)* comme *L* 10 f. composé. | Ces nombres sont : 1. 3. 6. 10. 15. 21. etc.
Et leur costés 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. *gestr.* | 1 *L*

7–10 vgl. N. 35 S. 364 Z. 4 f. 17 Hugenio: Zu Leibniz' Gespräch mit Huygens über die Summierung der reziproken Dreieckszahlen im Jahre 1672 s. Einleitung S. XXV.

On peut juger par là, en considerant la figure, cy-joincte, que le nombre du costé estant nommé y. le nombre triangulaire se pourra exprimer ainsi analytiquement $\dfrac{y^2+ya}{2}$ la lettre a representant l'unité.

Fraction triangulaire est dont le numerateur est l'unité, et le nominateur un nombre triangulaire. Son caractere analytique sera $\dfrac{2a^2}{y^2+ya}$.

Fraction naturelle est dont le numerateur est l'unité et le nominateur est la racine ou le costé de quelque nombre figuré, comme triangulaire ou quarré etc. qui luy repond, son caractère sera $\dfrac{a}{y}$.

$$\text{Fractions triangulaires :}\quad \frac{1}{1}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{10}\quad \frac{1}{15}\quad \frac{1}{21}\quad \text{etc.}$$

$$\text{Naturelles :}\quad \frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{6}$$

Triangle prochainement plus grand est, dont le costé n'est augmenté que de l'unité comme si le costé du triangle proposé est y celuy du prochainement plus grand sera, $y+a$.

A	1	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{21}$
B	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$
C	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{12}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{30}$	$\frac{1}{42}$
D	$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{12}$	$\frac{9}{36}$	$\frac{16}{80}$	$\frac{25}{150}$	$\frac{36}{252}$
E	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$

2 triangulaire *(1)* sera $\frac{\mathrm{y}^2+\mathrm{ya}}{2}$ ce qui est son caractère analytique à fin de le faire entrer dans le calcul en cas de besoin. *(2)* se *L* 4 *(1)* Fraction *(2)* Rang des fractions triangulaires *(3)* Fraction *L* 5 triangulaire *(1)* par exemple $\frac{1}{10}$ *(2)* comme *(3)* . Son *L* 8 repond, *(1)* par ex *(2)* son *L* 11–13 Triangle ... y + a. *erg. L* 14–18 *Tabelle erg. L*

4 f. Vgl. N. 35 S. 364 Z. 2 f.

Lemme:

La moitié d'une fraction triangulaire estant ostée de la fraction naturelle qui luy repond il reste la fraction naturelle qui repond au triangle prochainement plus grand ou la progression C estant ostée de la progression B, il restera la progression D, égale à la progression E, ou à la progression $B - 1$.

Par exemple la moitié de $\frac{1}{6}$, (c'est à dire $\frac{1}{12}$), estant ostée de $\frac{1}{3}$, il reste $\frac{1}{4}$.

Demonstration:

Puisque le costé ou nombre naturel, qui répond à un triangle estant nommé y, v. g. 3. le nombre triangulaire sera $\frac{y^2+ya}{2a^2}$ par ce que nous venons de remarquer dans la definition; il s'ensuit que la fraction naturelle estant $\frac{a}{y}$, $\frac{1}{3}$, la fraction triangulaire sera $\frac{2a^2}{y^2+ya}$, $\frac{2}{9+3}$ ou $\frac{1}{6}$ et sa moitié, $\frac{1}{9+3}$ ou $\frac{1}{12}$. De $\frac{a}{y}$ ostez $\frac{a^2}{y^2+ya}$, le reste sera: $\frac{y^2a+ya^2-ya^2}{y^3+y^2a}$, ou $\frac{y^2a}{y^3+y^2a}$ ou $\frac{a}{y+a}$, $\frac{1}{3+1}$ ou $\frac{1}{4}$.

Or y estant le costé d'un triangle rectangle, $y+1$. sera le costé du triangle prochainement plus grand, sçavoir en nombres entiers. Donc $\frac{a}{y+a}$ ou $\frac{1}{4}$ reste de la soubstraction susdite est la fraction naturelle qui répond au triangle prochainement plus grand.

Ce qu'il falloit demonstrer.

5–7 ou ... B − 1 *erg. L* 10 *(1)* Puisque un nombre tri *(2)* Un nombre *(a)* trian *(b)* pris à discretion *(3)* Puisque *L* 10 f. v. g. 3. *erg. L* 16 f. reste ... susdite *erg. L*

1 Vgl. N. 35 S. 362 Z. 17 – S. 363 Z. 14.

Theoreme de l'Arithmetique des Infinis

Le Binaire est la somme d'une progression infinie de fractions, dont le numerateur est l'unité, et les denominateurs sont tous les nombres triangulaires, depuis l'unité inclusivement, jusque à l'infini.

$$A \qquad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \text{ etc. égale à 2.}$$

Demonstration.

Soit exposée la progression infinie de fractions naturelles

$$B \qquad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \text{ etc.}$$

Item la progression des moitiéz des fractions triangulaires, ou la moitíé de la progression A

$$C \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{30} \quad \frac{1}{42} \text{ etc. égale à } \frac{A}{2}.$$

Ostez la progression C de la progression B, chaque terme de chaque terme qui luy repond, il en proviendra

$$D \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{4}{12} \quad \frac{9}{36} \quad \frac{16}{80} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{252} \text{ etc.}$$

Et deprimant les nombres des fractions de la progression D, vous aurez la progression E.

$$E \qquad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \text{ etc. à l'infini.}$$

par le lemme demonstré cy dessus.

De la même progression B ostez l'unité, et vous aurez aussi la progression E.

Donc $B - C$ estant égale à E.

Et $B - 1$ estant aussi égale à E.

Il s'ensuit que C est égale à 1.

---

1 *Darüber:* Voyez la page precedente.

1–369,4 Vgl. N. 35 S. 361 Z. 10 – S. 362 Z. 9.

Or C est égale à $\frac{A}{2}$.

Donc $\frac{A}{2}$ est égale à 1

et enfin A est égale à 2.

Ce qu'il falloit demonstrer.

Apres ce que je viens de dire, il est aisé de trouver la demonstration de mon theoreme general, sçavoir

La somme des fractions	triangulaires	infinies est égale à	$\frac{2}{1}$.
....	pyramidales	....	$\frac{3}{2}$.
....	triangulo-triangulaires	....	$\frac{4}{3}$.
	etc.	etc.	etc.

5 f. mon theoreme general: vgl. N. 5 S. 52 Z. 1 f. sowie *Accessio ad arithmeticam infinitorum, LSB* III, 1 N. 2, S. 1–20, v. a. S. 6–9.

37. DE PROGRESSIONIBUS CUBICIS

[September – Oktober 1674]

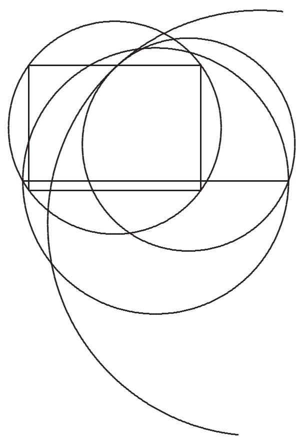
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 258–259. 1 Bog. 4°. 4 S. Goldschnitt. — Auf Bl. 258 r° vom Text Z. 16 – S. 371 Z. 3 und der Lesart zu S. 371 Z. 3 f. überschriebene Figur in Blindzeichnung.
Cc 2, Nr. 1036

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers und die verwendete Notation deuten auf eine Entstehung des Stückes in der zweiten Hälfte des Jahres 1674 hin. Teil 1 von N. 37 schließt inhaltlich an die Problemstellung am Ende von *De aequationibus ad circulum inveniendis* [September 1674] an; dies gilt auch für die überschriebene Figur in Blindzeichnung (vgl. *LSB* VII, 1 N. 130 S. 845 Z. 11). Auf S. 371 Z. 2 f. bemerkt Leibniz, daß Probleme, die durch zwei Kreise gelöst werden können, bereits mittels eines Kreises und einer Geraden lösbar sind. Diese Erkenntnis bildet den Ausgangspunkt der Überlegung des *Schediasma de constructione per curvam et lineam rectam*, datiert Oktober 1674 (*LSB* VII, 1 N. 138, s. insbesondere S. 884 Z. 9–11).

[*Teil 1*]

Esto aequatio ad circulum, $by - y^2 \sqcap x^2 + dx + ea$. et alia aequatio ad circulum, $fy - y^2 \sqcap x^2 + gx + ha$, pro $-y^2$ posterioris ponendo eius valorem ex priore, nempe

16–371,3 *Figur in Blindzeichnung überschrieben L*



$x^2 + dx + ea - by$, fiet: $fy - by + \cancel{x}^2 + dx + ea \sqcap \cancel{x}^2 + gx + ha$, ideoque $y \sqcap \dfrac{\begin{array}{l}-dx - ea\\ +g \quad +ha\end{array}}{f-b}$ seu $x \sqcap y\dfrac{\mu}{a} + \pi$. quae aequatio est ad lineam rectam. Unde patet quicquid duobus circulis solvi potest, id etiam uno circulo et linea recta solvi posse.

Una aequatio datarum, $by - y^2 - x^2, + dx + ea \sqcap 0$. multiplicetur per $y + c$, fiet:

$$by^2 - y^3 - yx^2 + dxy + eay, +bcy - cy^2 + cx^2 + cdx + eac \sqcap 0.$$

Pro x substituatur eius valor ex aequatione ad lineam rectam, nempe $x \sqcap y\dfrac{\mu}{a} + \pi$, et $x^2 \sqcap y^2\dfrac{\mu^2}{a^2} + \dfrac{2\mu\pi}{a}y + \pi^2$, fiet:

$$\begin{array}{cccccccc}
- & y^3 & - & \dfrac{2\mu\pi}{a}y^2 & - & \pi^2 y & + & c\pi^2 \sqcap \ 0. \\
- & \dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & + & b\ldots & + & d\pi\ldots & + & cd\pi \\
 & & + & d\dfrac{\mu}{a}\ldots & + & \dfrac{2\mu\pi c}{a}\ldots & & \\
 & & + & c\dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & + & ea\ldots & & \\
 & & - & c\ldots & + & bc\ldots & & \\
 & & & & + & \dfrac{cd\mu}{a}\ldots & &
\end{array}$$

2 ad *(1)* triangulum *(2)* lineam *L* 3 f. posse. *(1)* Sed aliter, veniamus ad radices attollendae aequationis causa; faciamusque $\sqrt{by - y^2 - \underbrace{ea + \frac{d^2}{4}}}\sqcap x+d$, vel $z+\underbrace{\mu + d}$. Imo et pro y substituamus $v+\lambda$, fiet $bv+b\lambda-v^2-2v\lambda-\lambda^2-ea+\frac{d^2}{4}$ et brevius $\sqrt{by - y^2 + ca} \sqcap x+d$, et alia aequatio $\sqrt{ey - y^2 + fa} \sqcap x$ fiet $\sqrt{by - y^2 + ca} \sqcap \sqrt{ey - y^2 + fa}+$ *(a)* x *(b)* d, et quadrando utrobique: $by - y^2 + ca \sqcap ey - y^2 + fa +$ *(aa)* $d^2 + 2d\sqrt{\ldots}$ *(aaa)* Multiplicetur utraque aequationis pars per y+ *(bbb)* Ergo antequam huc procedatur multipli *(ccc)* Multiplicetur utraque aequationis pars per $y + g \sqcap 0$, *(aaaa)* fiet: (*bbbb*) seu radices per $\sqrt{y^2 + 2gy + g^2}$, fiet: $\sqrt{by^3 + 2bgy + g^2by} - y^4 - 2gy^3$ *(bb)* omittatur d et multiplicetur utraque aequationis pars per $y + g$. fiet $by^2 - y^3 + cay + gby - gy^2 + gca \sqcap ey^2 - y^3$ etc. *(2)* Una *L*

Esto iam aequatio cubica pura

$$\begin{array}{rlcrl} - & 1y^3 & * & * - & 1a^2\xi \sqcap 0. \\ - & \dfrac{\mu^2}{a^2} & & - & \dfrac{\mu^2}{a^2} \end{array}$$

Conferenda cum factitia plana, ad cubicam sublata: fiet

$$c\pi^2 + cd\pi \sqcap a^2\xi \frown \begin{array}{l} -1 \\ -\dfrac{\mu^2}{a^2} \end{array}. \text{ caetera erunt } \sqcap 0.$$

Ergo $b \sqcap \dfrac{2\mu\pi}{a} - \dfrac{d\mu}{a} - \dfrac{c\mu^2}{a^2} + c$. quo valore ipsius in tertio termino inserto, fiet:

$$-\pi^2 + d\pi + \frac{2\mu\pi c}{a} + ea + \frac{2\mu\pi c}{a} \boxed{-\frac{d\mu c}{a}} - \frac{c^2\mu^2}{a^2} + c^2 \boxed{+\frac{cd\mu}{a}} \sqcap 0. \text{ adeoque}$$

$$d \sqcap \frac{-\pi^2 + \dfrac{4\mu\pi c}{a} + ea - \dfrac{c^2\mu^2}{a^2} + c^2}{-\pi \boxed{+\dfrac{\mu c}{a} - \dfrac{c\mu}{a}}}.$$

isque valor in termino ultimo inserendus.

Sed notandum est ipsam c nondum haberi, et metuendum, ne ad cubum assurgat, sed eius inquisitio in ultimam aequationem differatur; igitur eius valor substituendus, qui est: $c \sqcap \dfrac{-1 - \dfrac{\mu^2}{a^2}, \frown a^2\xi}{\pi^2 + d\pi}$. Imo possumus pergere ut ante substituendo valorem ipsius d in eius locum in aequatione ultima, fiet postrema aequatio haec:

371,3 f. *Zur Lesart, nicht gestrichen:* Male non ita assurgemus ad cubum, ergo sic potius.

6 termino | succedente *gestr.* | inserto *L* 9 *(1)* eoque valore in ultimo termino inserto, fiet: *(2)* isque *L*

371,4 Ab hier rechnet Leibniz nicht mehr mit $-dx-ea$, sondern mit $+dx+ea$. 371,5–373,2 Statt $+cx^2$ müßte es $-cx^2$ heißen. Bei der folgenden Substitution wird das Element $+eac$ vernachlässigt. Beide Fehler wirken sich bis S. 373 Z. 2 aus.

$$\begin{array}{llllllllll} -c\pi^2, & -c\pi^2 & +\dfrac{4\mu\pi c^2}{a} & +eac & -\dfrac{c^3\mu^2}{a^2} & +c^3 & \sqcap & +1 & \frown & a^2\xi. \\ & & & & & & & +\dfrac{\mu^2}{a^2} & & \end{array}$$

Unde sequeretur ex tot incognitis super c. π μ. e omnes demta una sumi posse pro arbitrio quod videtur absurdum, sane c non potest sumi pro arbitrio, alioqui posset cubus $a^2\xi$ habere radicem quamlibet. An forte hinc sequitur ipsam c esse radicem imaginariam et sequeretur in omni aequatione cubica simplice unam esse radicem imaginariam. Sed nihil referret tamen, nam et ope radicum imaginariarum possent deprimi aequationes, si cognoscerentur.

Breviori calculo eadem includam: aequatio est ad circulum $by - y^2 - x^2 + dx + ea \sqcap 0$. Pro x substituatur eius valor: $y\dfrac{\mu}{a} + \pi$, fiet

$$by - y^2 - y^2\frac{\mu^2}{a^2} - 2y\frac{\mu\pi}{a} - \pi^2 + \frac{d\mu}{a}y + d\pi + ea \sqcap 0.$$

sive:

$$\begin{array}{llllllll} + & 1y^2 & - & \dfrac{d\mu}{a}y & + & \pi^2 & \sqcap & 0. \\ + & \dfrac{\mu^2}{a^2}\ldots & - & b\ldots & - & d\pi & & \\ & & + & [2]\dfrac{\mu\pi}{a}\ldots & - & ea & & \end{array}$$

pro $\dfrac{-\dfrac{d\mu}{a} - b + [2]\dfrac{\mu\pi}{a}}{+1 + \dfrac{\mu^2}{a^2}}$ ponatur f. et pro $\dfrac{\pi^2 - d\pi - ea}{+1 + \dfrac{\mu^2}{a^2}}$ ponatur $[ga]$. fiet:

$y^2 + fy + ga \sqcap 0$. Multiplicanda per $y + c \sqcap 0$, fiet: $y^3 + fy^2 + gay, +cy^2 + cfy + cga \sqcap 0$, et ordinando:

$$\begin{array}{lllllllll} y^3 & + & fy^2 & + & gay & + & cga & \sqcap 0. & \text{Conferenda cum} \\ & + & c\ldots & + & cf\ldots & & & & \\ y^3 & & * & & * & + & a^2q & \sqcap 0. & \end{array}$$

12+15 $\sqcap$ 0. (*1*) multiplicetur per $y + c \sqcap 0$. *(2)* unitetur *(3)* pro $1 + \dfrac{\mu^2}{a^2}$, ponatur *(4)* pro *L*
14 f. 2 *erg. Hrsg. zweimal* 15 g *L ändert Hrsg.*

erit ergo $f + c \sqcap 0$. seu $c \sqcap -f$. Ergo $ga + cf \sqcap 0$. erit $ga - c^2 \sqcap 0$. unde denique $cga \sqcap c^3 \sqcap a^2q$. quod dudum satis sciebamus.

[*Teil 2*]

Si qua data sit progressio numerorum, huius aequationis e. g. $x^3 + fx^2 \sqcap N$. ita ut numero terminorum posito x, et f. 10 numerus sit N,

ut si x ponatur 1, erit $x^3 + fx^2 \sqcap 11$,

et si x ponatur 2, erit $x^3 + fx^2 \sqcap 48$.

Sed ponatur contra numerus esse datus, ut 40, et quaeri modum ita formandi progressionem, ut in eo reperiatur 40. progrediendo semper per numeros progressionis arithmeticae, et, quaeritur tunc vel unicus ex aliis numeris maioribus minoribusque, qui tunc in ea progressione reperirietur: eo enim habito daretur et dati radix; sumamus exemplum facilius:

$$\begin{array}{ccccccc} x - 3a & \frown & x + 4a & \text{fit :} & x^2 \quad -3x \quad -12a^2 & \text{sive} & x^2 + ax - 12a^2 \sqcap 0. \\ \sqcap 0 & & \sqcap 0 & & \qquad +4\ldots & & \end{array}$$

Ponatur a, non esse unitas, sed 1000. fiet: $x^2 + 1000x - 12000000 \sqcap 0$.

Iam fiat $x^2 + 1000x - N \sqcap 0$.

			0							
					1001					
Posito	$x \sqcap 1$	fiet	$N \sqcap 1001$	(c)			2			
					1003	(d)			0	
	$x \sqcap 2$		$N \sqcap 2004$	(f)			2	(e)		
					1005	(g)			0	
	$x \sqcap 3$		$N \sqcap 3009$	(h)			2			Differentiae
					1007	(i)			0	
	$x \sqcap 4$		$N \sqcap 4016$	(k)			2			
					1009	(n)				
	$x \sqcap 5$		$N \sqcap 5025$	(m)						

4 numerorum *erg. L* 5 f. 10 *(1)* et numero posito N, sit N datus quaeraturque *(2)* numerus *L*
10 ex *(1)* illis numeris, *(2)* aliis *L*

[Numeri] alicuius in ea serie sumti, ut $(5)x$, radix deminuatur unitate habetur numerus radicis x proxime minoris seu $(4)x$ ut

$$\begin{array}{ccccccc} x^2 & + & 1000lx & - & 5025l^2 & \sqcap 0. & \text{ponatur} \quad x \sqcap z+l, \quad \text{fiet} \\ z^2 & + & 2lz & + & l^2 & & \\ & + & 1000l... & + & 1000l^2 & & \\ & & & - & 5025l^2 & & \end{array}$$

Imo video hoc nihil ad rem pertinere, non enim fit aequatio pro termino priore, sed manet prior tantum involuta, ergo per differentias procedendum, seriei iam cognitae: de quo post, tantum considero hac arte novam haberi aequationem, etsi series in qua numerus datus reperitur, sit progressionis arithmeticae, tamen non procedit per unitates, nisi in serie unitatum reperiatur, quaeritur modus reperiendi intervallum huius arithmeticae progressionis.

Ponatur cognitum et esse $\sqcap$ v, erit terminus proxime minor $x-v$, fiet ergo eius aequatio

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & - & 2vx & + & v^2 & \sqcap \ (4)N. \\ & + & 1000l... & - & 1000vl & \\ & & & - & 5025l^2 & \end{array}$$

Cuius differentia a dato seu proximo maiore, seu $(5)N, \sqcap x^2 + 1000lx - 5025l^2$ est utique $-2vx + v^2 - 1000v$. Et ponendo $v \sqcap 1$, iam enim video id fieri posse (potest enim 1 vel l semper esse progressionis intervallum, etsi non sit eius terminus) fiet differentia $-2lx + l^2 - 1000l^2$ quod posito $x \sqcap 5$ est 1009.

Iam ut pergamus quaerenda etiam differentia inter $(4)N$ et $(3)N$. Nam radix ipsius $(3)N$ est $x - 2v$, unde fiet:

$$\begin{array}{cccccc} x^2 & - & 4vx & + & 4v^2 & \sqcap \ (3)N. \\ & + & 1000l... & - & 2000v & \\ & & & - & 5025l^2 & \end{array}$$

1 *(1)* Esto iam numerus datus 40, cuius radix seu x, in ea progressione quaeritur, vel quod idem est proxime minor qui reperitur in *(a)* aequatio *(b)* progressione, ita ut error non sit multo maior millesima unitatis ab initio datae, seu a, parte seu $\sqcap \dfrac{a}{1000}$. Iam considerandum differentiam inter duos numeros datos. v. g. (5)N et (1)N *(2)* Numerus aliquis in ea serie sumtus *(3)* | Numerus *ändert Hrsg.* | alicuius *L* 2 (4)x *(1)* ut $x^2 + ax - 12a^2 \sqcap 0$, ponatur $x \sqcap z + l$ fiet $\begin{array}{l} z^2 + 2lz + l^2 \\ \quad\ \ a \ + al \end{array}$ *(2)* ut *L* 3 z + l, | vel *gestr.* | fiet *L* 20 vel l *erg. L*

Et differentia inter $(3)N$ et $(4)N$ erit: $-\ 2vx\ +\ 3v^2\ -\ 1000v^2$ nempe $-\ 1007$. et differentia differentiarum erit $2v^2$, seu differentia differentiarum erit 2, ponendo $v \sqcap 1$.

Iam a differentia prima seriei differentiarum penultimarum (hoc loco primarum) subtrahatur ultima, seu quae respondet ipsi $(1)N$. At illam inquies ignoramus fateor, sed quantum ad appropinquationes perinde est ac si haberemus. Et potest sumi radix $(1)N$, esse 1. Fiet ergo $+2vx - v^2 + 1000v^2 - 1001$ seu $\dfrac{2\cancel{v}x - \cancel{3v^2 - 1} - 4}{2} \sqcap x\ -\ 2$. oritur ergo aequatio identica, ac proinde inutilis. Sed si $-\ 1001$ poneretur non dari, fieret aequatio: $\dfrac{2vx - v^2 + 1000v^2 - 1001wl}{2} \sqcap x - 2$.

Cumque semper necesse sit deleri sive destrui x in aequatione quadratica quia semper differentia quae restat tunc est 2, iam vero et multiplicatur per 2, ergo eo casu in quadraticis statim habetur terminus primus seu $(1)N$, nempe radix eius w. Imo male non habetur $1001w$, sed habetur eius homogenei valor seu terminus seriei primus, qui est $-\ w^2\ -1000w$, et aequatur $\dfrac{+w^2 + 1000lw}{2} \sqcap \dfrac{-1000v^2 + v^2}{2} - 2$.
Sed haec accuratius expendenda, succedunt autem tantum in aequationibus quadraticis ut dixi, quia differentia ultima potestatis est 2, et numerus radicem multiplicans in differentia differentiarum etiam 2, cum in cubis differentia potestatum sit 6, et multiplus radicis in differentia differentiarum [6], ut ante.

Hinc autem ducitur, quod inventa radice ipsius $(1)N$, geometrice haberi potest radix ipsius etiam datae aequationis. Huic iam aequationi $\dfrac{2lx - l^2 + 1000l^2 - w^2 - 1000lw}{2} \sqcap x\ -\ 2$, in qua duae incognitae (quia in cubis x non eliminatur, nec in potestatibus altioribus), iungenda est nova, ope eiusdem primi homogenei ut eius ope altera incognitarum inprimis w elidatur, et tentetur an veniri queat ad aequationem tractabiliorem ab initio proposita.

2 f. v $\sqcap$ 1. *(1)* Iam differentia prior, dividatur differentiam differentiarum: $\dfrac{-2\mathrm{vx} + \mathrm{v}^2 - 1000\mathrm{v}}{2\mathrm{v}^2}$ erit $\sqcap$ x *(2)* Iam *L*   10 et *(1)* dividitur per *(2)* multiplicatur *L*   15 differentia *(1)* quadratorum *(2)* ultima *L*   17 2 *L ändert Hrsg.*   17 f. ante. *(1)* Sed non video quid ex invento (1)N duci possit *(a)* nisi quod ad sola *(b)* nisi quod theorema sit memorabile, compendium etiam ni fallor inde ducatur, *(aa)* ut *(bb)* nisi *(2)* Hinc *L*   18 inventa *(1)* homogenei *(2)* radice *L*

6 Leibniz faßt die beiden Beziehungen in unzulässiger Weise zusammen, der Fehler wirkt sich bis Z. 23 aus.   8 Die Hilfsgröße w, die Leibniz ab hier verwendet, muß — ebenso wie vorher v — durchweg gleich 1 sein, was Leibniz im folgenden an mehreren Stellen auch selbst bemerkt.

$$\text{Nimirum[:]} \qquad f \sqcap c+d.$$

$$\text{et} \quad h \sqcap \underset{c+d}{f} + \underset{d+e}{g} \quad \text{seu} \quad h \sqcap c+2d+e.$$

$$\text{et} \quad k \sqcap \underset{\underset{d+e}{g+e}}{i} + \underset{c+2d+e}{h} \quad \text{sive} \quad k \sqcap c+3d+3e.$$

$$\text{et} \quad m \sqcap \underset{c+3d+3e}{k} + \underset{\underset{d+2e}{i+e}}{n} \quad \text{seu} \quad m \sqcap c+4d+6e.$$

Numeri triangulares

Rectius omittendo c, et ponendo $d \sqcap 1001$, caetera praeclare procedent, ponendo scilicet d esse numerum primum, vel quod idem differentiam primam, e differentiam differentiarum ultimam, ex quibus caetera componuntur. Eodem ergo modo etiam terminus ultimus ex tribus primis differentiis componi potest in cubicis, ut hic ex duobus in quadraticis, et ita de caeteris in infinitum. In cubicis et altioribus hoc quoque considerabile, quod cum priore aequatione differentia ultima, seu aequatio quadratica ipsius w, semper inventa sit per consequens w, in postrema, ubi triangulares numeri sunt, ipsam w eliminari posse, et fieri novam aequationem in qua x rursus est incognita; sed quaeritur an omnis x, an vero aliqua, tantum si aliqua non video cur una prae altera; si omnes nulli id usui ad geometricas constructiones.

Sed res ipsa tentanda. Sit aequatio cubica simplex $x^3 \sqcap a^2b$.

11 Rectius *(1)* ponendo (*a*) c $\sqcap$ 0. et o (*b*) 1000 id quod hic vocaveramus c et, | et d *gestr.* | *(2)* omittendo *L* 19 non *(1)* habet quam *(2)* video *L*

$$\begin{array}{ccccccccccc}
1 & & 8 & & 27 & & 64 & & 125 & & 216 \\
& 7 & & 19 & & 37 & & 61 & & 91 & \\
& & 12 & & 18 & & 24 & & 30 & & \\
& & & 6 & & 6 & & 6 & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
x \sqcap 1w & (1)N \sqcap w^3 & & & \\
& & 3lw^2 + 3l^2w + l^3 & & \\
\sqcap 2w & 8w^3 & & 9lw^2 + 3l^2w & \\
& & 12lw^2 + 6l^2w + l^3 & & [6lw^2] \\
\sqcap 3w & 27w^3 & & 15lw^2 + 3l^2w & \\
& & 27lw^2 + 9l^2w + l^3 & & [6lw^2] \\
\sqcap 4w & 64w^3 & & 21lw^2 + 3l^2w & \\
& & 48lw^2 + 12l^2w + l^3 & & \\
\sqcap 5w & 125w^3 & & & \\
\sqcap 6w & 216w^3 & & &
\end{array}$$

Sive sic:

$$\begin{array}{llllll}
0 & & & & & l \sqcap w \text{ hic.} \\
& w^3 & & & & \\
w^3 & & \boxed{3lw^2 + 3l^2w + l^3 - w^3} & & & \\
& 3lw^2 + 3l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
8w^3 & & 9lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 12lw^2 + 6l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
27w^3 & & 15lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 27lw^2 + 9l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
64w^3 & & 21lw^2 + 3l^2w & & 0 & \\
& 48lw^2 + 12l^2w + l^3 & & 6lw^2 & & \\
125w^3 & & 27lw^2 + 3l^2w & & & \\
& 75lw^2 + 15l^2w + l^3 & & & & \\
216w^3 & & & & &
\end{array}$$

$w + l$, cubice facit $w^3 + 3lw^2 + 3l^2w + l^3$. Ergo

prima differentia primi gradus dat $3lw^2 + 3l^2w + l^3$

2^{da} differentia primi gradus dat $12lw^2 + 6l^2w + l^3$ etc., fingendo tantum w valere in 2[do] $2w$, in tertio $3w$, etc. Ponendo $l \sqcap w$. patet ultimam differentiam esse $6w^3$ et incipi posse a 0, quia tunc $l^3 - w^3 \sqcap 0$. et ita poni potest primus terminus $\sqcap 0$.

Iam differentia prima primi gradus (termino primo posito 0) est w^3, secunda $6w^3$, tertia etiam $6w^3$, quas appellemus $c + d + (d)$.

N. num. DD diff. 2. gr.
D. diff. 1. gr. [DDD diff. 3. gr.]

$(1)N \sqcap$	$(1)D \sqcap c$	$(1)D \sqcap c$	$(1)DD \sqcap d$	$(1)DDD \sqcap (d)$
$(2)N \sqcap$	$c + (2)D$	$(2)D \sqcap (1)N + (1)DD$	$(2)DD \sqcap d + (d)$	
	$c + d$	$c\ +\ d$		
[seu]	$2c + d$			
$(3)N \sqcap$	$c, +c + d, ,$	$(3)D \sqcap c + d, +d + (d),$	$(3)DD \sqcap d + (d), +(d),$	
	$+c + d, +d + (d)$			
[seu]	$3c + 3d + (d)$			
$(4)N \sqcap$	$3c + 3d + (d),$	$(4)D \sqcap c + d, +d + (d), ,$		
	$+c + 3d + 3(d), ,$	$+d + (d), +(d)$		
seu	$4c + 6d + 4(d)$			

378,15–28 Hinc patet demonstratio cur differentiae cuborum gradus 3[tii] sunt senarii.

378,8+10 $6l^2w$ *L ändert Hrsg. zweimal* 378,14 f. $216w^3$ *(1)* Ex quo patet differentiam primam *(2)* Sive *L* 378,29 f. Ergo *(1)* 2[da] *(2)* altera *(3)* prima *L* 1 tantum w *(1)* quod *(2)* semper valer *(3)* valere *L* 3 f. $\sqcap$ 0. *(1)* Iam terminus *(a)* (1)N *(b)* (1)x fit *(2)* ergo iam *(a)* $0 \sqcap c$, *(b)* $w^3 \sqcap d, 3lw^2 + 3l$ *(3)* Iam *L* 7 DDD diff. 3. gr. *erg. Hrsg.* 11+13 seu *erg. Hrsg. zweimal*

378,15 f. Sive sic: Leibniz hat den Beginn der Tabelle zunächst gestrichen bzw. umrahmt, hat ihn aber aufgrund von Z. 1–3 wieder ergänzt und die Bemerkung $l \sqcap w$ hic hinzugefügt.

Ita

$(1) N \sqcap 1c \qquad (2) N \sqcap 2c + d \qquad (3) N \sqcap 3c + 3d + (d) \qquad (4) N \sqcap 4c + 6d + 4(d)$

$(2) N \sqcap 2c + 1d$

$(3) N \sqcap 3c + 3d + 1(d)$

$(4) N \sqcap 4c + 6d + 4(d)$

Vides primam seriem ipsorum c esse numerorum naturalium, seriem ipsorum d esse triangularium, ipsorum (d) esse pyramidalium, vel etiam ponendo $d \sqcap (d)$ fiet:

$$\begin{aligned} &(1) N \sqcap 1c \\ &(2) N \sqcap 2c + 1d \\ &(3) N \sqcap 3c + 4d \\ &(4) N \sqcap 4c + 10d \end{aligned}$$

Est autem $c \sqcap w^3$, et $d \sqcap 6w^3$.

Et numero ipsorum N, posito x, constat pyramidem esse trientem facti ex ductu numeri naturalis x in triangulum proxime maioris; iam triangulum proxime maioris est $\dfrac{x^2 + 2wx + w^2}{2} + \dfrac{x + w}{2}$, erit pyramis: $\dfrac{x^3 + 2wx^2 + w^2x + x^2l + wxl}{6}$. Sed quaeritur pyramis numeri proxime minoris numeri x, ergo sic[:] $x - w$, ducatur in $\dfrac{x^2}{2} + \dfrac{xl}{2}$, fiet

$$\frac{x^3 + x^2l - x^2w - xwl}{6}.$$

Eritque cubus numeri terminorum assumti,

$$x^{\overset{2}{\cancel{3}}}\ \cancel{w^3} \quad \sqcap \overset{1}{\cancel{x}}\cancel{w^3}, + \frac{x^{\overset{2}{\cancel{3}}} + x^{\cancel{2}}l - x^{\cancel{2}}w - \cancel{x}wl}{\cancel{6}} \frown \cancel{6}\cancel{w^3}.$$

Sed quia in hac aequatione duae sunt incognitae alia adhuc opus est aequatione, qualis est data $x^3 \sqcap a^2b$. Sed tentandum est an alia queat haberi, cuius ope w possit eliminari. Nimirum differentia postrema penultimi gradus demta prima eiusdem gradus, divisa per differentiam ultimi gradus [erit $\sqcap x$]. Verum identica fit aequatio, nisi differentia ista ul-

---

19 Aequatio identica ex qua sequitur esse $w \sqcap 1$.

19 f. $\cancel{6}\cancel{w^3}$. *(1)* unde denique *(a)* x *(b)* 0 $\sqcap$ *(2)* Sed *L*
21 f. eliminari. *(1)* $\dfrac{3x^2w^3 + 3xlw^3 - 6l^2w^3}{6lw^3} \sqcap$ x. *(2)* Nimirum *L* 23 erit $\sqcap$ x *erg. Hrsg.* 23 Verum *(1)* propositio rursus *(2)* identica *L*

tima penultimi gradus alio quodam valore habeatur quem tamen nullum reperio semper enim w divisione per w^3 hic evanescit. Quare id unum hinc discimus quod sane maximi momenti, quod hinc progressionis initium reperiatur dato termino aliquo, et contra, mirabili quadam imitatione verorum; ita enim quantitas w erit unitas quaedam repraesentatitia, id est eodem plane modo producet terminum datum, ut unitas cubum, totidem locis ab ea dissitum, seu huic cubo surdo, respondentem efficit. Magni momenti potest esse haec consideratio unitatis repraesentatitiae sane est plane nova. Imo rursus video eam aequationem evincere quod w semper ponenda $\sqcap$ 1.

7 f. video *(1)* esse eam quoque aequationem pure identicam, *(2)* eam *L*

38. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PLAGULAE QUINDECIM

Oktober 1674 und [Anfang 1678 – Ende 1679]

Die folgenden Stücke sind von Leibniz zu einer Gruppe zusammengefaßt worden, in der er bogenweise durch Überschriften fünfzehn (recte: sechzehn) Teile unterscheidet; die Überschrift Pars quarta erscheint doppelt. Der letzte Bogen enthält zusätzlich ein Einlegeblatt und trägt keine Überschrift. Die ersten drei Bögen sind mit dem Datum Oktober 1674 versehen.

In Hannover hat Leibniz einen Umschlag hinzugefügt, der eine erweiterte Überschrift und das Datum Oktober 1674 der Stücke trägt. Das Wasserzeichen des Umschlagbogens ist für die Jahre 1678/1679 belegt.

38_1. UMSCHLAG

[Anfang 1678 – Ende 1679]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 1+37. 1 Bog. 2°. Hannoversches Papier. 6 Zeilen auf Bl. 1 r°. Bl. 1 v° u. 37 r° leer. Auf Bl. 37 v° gegenläufig Notiz von Leibniz: „Gelieferte aber noch nicht bedungene bucher“.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Octob. 1674.

De serierum summis et de quadraturis plagulae quindecim. In his multa notabilissima, inter alia hic de trochoide parabolica hic primum inventa plag. 10. 11. Et de curva ellips. et hyperbolae; plag. 13. et modus hic primum a me et meo marte inventus exhibendi valorem radicis quadraticae per seriem infinitam eadem plagula 13.

---

20 plag. 10. 11.: N. 38_{12-13}. 21 plag. 13.: N. 38_{15}. 21 f. hic primum: Die Reihenentwicklung von Quadratwurzeln behandelt Leibniz auch in den wohl bereits kurz zuvor im Sommer 1674 enstandenen N. 32 (s. dort) und N. 33.

38_2. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS PRIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 2–3. 1 Bog. 2°. 4 S. Datum und Überschrift oben ergänzt.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Octob. 1674.

Schediasma de serierum summis, et seriebus quadratricibus item curv. ellips. et hyperb. Et notabilissima extractio radicis quadraticae irrationalis per seriem infinitam plagula 13.

$$\square \text{ hyp. } \underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}+\frac{1}{11}-\frac{1}{12}+\frac{1}{13}-\frac{1}{14}$$

$$\begin{array}{lccccccc} & \frac{1}{2} & \frac{1}{12} & \frac{1}{30} & \frac{1}{56} & \frac{1}{90} & \frac{1}{132} & \frac{1}{182} \\ [\text{dupli}] & \frac{1}{1} & \frac{1}{6} & \frac{1}{15} & \frac{1}{28} & \frac{1}{45} & \frac{1}{66} & \frac{1}{91} \end{array}$$

sunt triangulares per saltum. Nam series triangularium, est:

$$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{15}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{1}{28}\quad\frac{1}{36}\quad\frac{1}{45}\quad\frac{1}{55}\quad\frac{1}{66}\quad\frac{1}{78}\quad\frac{1}{91}.$$

$$\text{Ergo}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{10}\quad\frac{1}{21}\quad\frac{1}{36}\quad\frac{1}{55}\quad\frac{1}{78}$$

residua scilicet, pendent etiam a quadratura hyperbolae seu

$\frac{1}{1 \frown 3}\quad \frac{1}{2 \frown 5}\quad \frac{1}{3 \frown 7}\quad \frac{1}{4 \frown 9}$. Quae fiunt ex hac serie:

$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}-\frac{1}{5}+\frac{1}{3}-\frac{1}{7}+\frac{1}{4}-\frac{1}{9}$, seu reducendo ad originem:

6 quadratricibus *(1)* aliae hic miscentur de quadraturis figurarum, de trochoide parabolica etc. plag. 10. 11. *(2)* item *L* 11 dimidii *L ändert Hrsg.* 15 hyperbolae *(1)*. Fiunt au *(2)* seu *L*

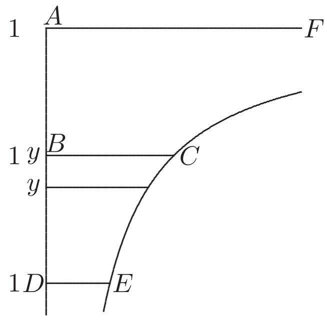
16 hac serie: Richtig wäre $1-\frac{2}{3}+\frac{1}{2}-\frac{2}{5}+\frac{1}{3}-\frac{2}{7}+\frac{1}{4}-\frac{2}{9}$ etc. Der Fehler und ähnliche, die Leibniz in den S. 387 Z. 1; S. 388 Z. 1–3 u. S. 388 Z. 9 f. unterlaufen, beeinträchtigen die weitere Überlegung nicht.

$\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^7}{7} + \frac{b^4}{4} - \frac{b^9}{9}$, quorum formulam indagabimus ita:

$\frac{b}{1} \quad + \frac{b^2}{2} \quad + \frac{b^3}{3}$ etc. fit ex summa omnium $\frac{1}{1-y}$, et

$\frac{b^3}{3} \quad + \frac{b^5}{5} \quad + \frac{b^7}{7}$ etc. fit ex summa [omnium] $\frac{y^2}{1-y^2}$.

Cuius aliunde scio dimensionem ex hyperbolae quadratura pendere vel ideo duobus modis sumendo eius momentum semper reditur ad quadraturam hyperbolae nempe multiplicando per $1+y$, et per $1-y$. Unde inter ea duo momenta differentia est cylinder figurae.



[*Fig. 1*]

Differentia ergo inter duo spatia hyperbolica aequatur cylindro figurae $\frac{1}{1-y^2}$, nam momentum eius multiplicati per $1+y$, est $\frac{1}{1-y}$ momentum figurae $BDEC$ ex AF. Si multiplicetur per $1-y$, fit $\frac{1}{1+y}$ momentum figurae $BCDE$ ex DE, ponendo AB.

1 $-\frac{b^9}{9}$, *(1)* quae fiunt ex *(a)* hac div *(b)* divisione huius formulae : x ⊓ $\frac{y}{a+}$ *(2)* quorum *L*

3 omnium *erg. Hrsg.* 3 f. $\frac{y^2}{1-y^2}$. *(1)* Cuius ut obiter dicam dimensio pendet ex quadratura hyperbolae, nam addendo $\frac{1}{1-y^2}$, idem est ac si adderetur 1, et *(a)* caetera, *(b)* $\frac{y^2}{1-y^2}$ duplicaretur *(aa)*. Iam *(bb)* quia $\frac{1}{1-y^2}$ est ⊓ ipsi *(2)* Cuius *L*

$BD \sqcap 1$. Denique multiplicando per y fiet: $\dfrac{y^3}{1-y^2}$ momentum eiusdem figurae $BDCE$ ex BC. Unde: $y^3 + y^5 + y^7$ [etc.]

Sed ut ad rem redeamus[,] iungantur inter se hae duae figurae: $\dfrac{1}{1-y}$ et $\dfrac{y^2}{1-y^2}$ auferendo seu fiat $\dfrac{1}{1-y} - \dfrac{y^2}{1-y^2}$, sive reducendo ad communem denominatorem fiet: $\dfrac{1+y-y^2}{1-y^2} \sqcap x$. quae figura proinde pendet ex quadratura hyperbolae, reducendo fiet: $1+y-y^2 \sqcap x - y^2x$. et ut quaeratur valor ipsius y fiet:

$$y^2 \, \frac{+y}{x-1} + \frac{1}{4x^2-8x+4} \sqcap \boxed{\frac{x-1}{x-1}} \, 1 + \frac{1}{4x^2-8x+4} \text{ sive } \sqcap \frac{4x^2-8x+5}{4x^2-8x+4}. \text{ Unde}$$

$y + \dfrac{[1]}{2x-2} \sqcap \dfrac{\sqrt{4x^2-8x+5}}{2x-2}$. sive $y \sqcap \left[\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+5}-1}{2x-2}\right]$. quae pendet ex quad. hyp.

Etiam uti licet radicibus irrationalibus, aliquando, ut si consentiat radix numeratoris et denominatoris, e. g. $\dfrac{\sqrt{1-y^2}}{1-\sqrt{1-y^2}}$ et summa proveniet rationalibus irrationalibus mixta, v. g. $\sqrt{1-y^2}$ (circulus) $+1-y^2+\underbrace{1-y^2, \frown \sqrt{1-y^2}}+\underbrace{1-y^2, \frown 1-y^2}$ [etc.] atque ita rationales atque irrationales habebuntur per intervalla unius interstitii. Eodem modo radices cubicae tractari possunt.

Sed si radices numeratoris et nominatoris non consentiant, vel si radix non sit in utroque, utique patet seriem totam fieri irrationalem. Omnes autem rationales sunt semper paraboloeides.

Nemo usus est hactenus hyperboloeidibus in dividendo, cum tamen res non minus succedat: sed nec adhibitae sunt divisiones; in quibus ipsi producti habent denominatores,

2 etc. *erg. Hrsg.* 3 redeamus[,] *(1)* patet hanc figuram *(2)* iungantur *L* 8 y+ | $\dfrac{y}{2x-2}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \dfrac{\sqrt{4x^2-8x+5}}{2x-2}$. *(1)* abiecto iam triangulo y, residua figura dabit y $\sqcap$ *(2)* sive y $\sqcap$ | $\dfrac{\sqrt{4x^2-8x+5}}{2x-1}$ *ändert Hrsg.* |. quae *L* 9 aliquando, ut *erg. L* 10 proveniet *(1)* rationalis, dividendo *(2)* rationalibus *L* 11 etc. *erg. Hrsg.* 12 interstitii *(1)*, quia radix quadratica, si *(2)*. Eodem *L* 15 patet *(1)* utrobique *(2)* seriem *L* 15 rationales *(1)* in casu praesenti *(2)* sunt *L*

nec adhibitae sunt irrationales. Imo non nisi unicum exemplum datum est; quod attulit Mercator. Methodus mea revocandi ad progressiones geometricas, commodior est altera Mercatoris per divisionem; quia, ita series qualescunque propositae etiam irregulares satis nec ordine procedentes, ad figuram convenientem, revocantur, qualis ista est: $\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^2}{2}$ etc. Variae aliae coniunctiones institui possunt, ut ista:

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{7} - \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} + \frac{1}{11} - \frac{1}{12} \text{ [etc.]}$$

$$\frac{3}{4} - \frac{1}{6} + \frac{3}{40} - \frac{1}{42} + \frac{3}{108} - \frac{1}{110} \text{ etc.}$$

Et ita semper novae erui possunt figurae. Sumtis seriebus fractionum quadraticarum unitate deminutarum:

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{8} + \frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48} + \frac{1}{63} + \frac{1}{80} + \frac{1}{99} + \frac{1}{120} + \frac{1}{143} + \frac{1}{168} + \frac{1}{195} + \frac{1}{224} \text{ [etc.]}$$

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
\cdot & \square & \cdot & \square & \cdot & \square & \cdot & \square & \cdot & \square & \cdot & \square & \cdot & \square \\
\circ & & & & \circ & & & & \circ & & & & \circ & \\
 & \frown & & & & \frown & & & & \frown & & & & \frown \\
 & & \infty & & & & \infty & & & & \infty & & & \\
 & & & \propto & & & & \propto & & & & \propto & &
\end{array}$$

Omnium terminorum punctatorum habetur summa; item omnium terminorum $\square$ notatorum; ac proinde et totius seriei; sed termini circulo notati pendent ex quad. circuli, termini $\frown$ notati ex quad. hyperb.

Sed quid termini $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{24}$ $\frac{1}{63}$ $\frac{1}{120}$ [etc.], sane sunt: $\frac{1}{1 \frown 3}$ $\frac{1}{4 \frown 6 \sqcap 3 \frown 8}$ $\frac{1}{7 \frown 9}$ $\frac{1}{10 \frown 12}$ [etc.]

6–387,2 etc. *erg. Hrsg. fünfmal* 17 notatorum; *(1)* item tot *(2)* ac *L* 17 seriei; *(1)* item *(2)* sed *L*

2 Mercator: *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV–XVII S. 28–33 [Marg.]. 10–13 Vgl. u. a. *LSB* III, 1 N. 39 S. 166 Z. 3–9 u. *LQK* prop. XLII S. 88. 16 f. Omnium . . . seriei: vgl. N. 15 S. 180 Z. 6 – S. 181 Z. 8.

$\frac{1}{1\frown 3}+\frac{1}{4\frown 6}\left[+\frac{1}{7\frown 9}\right]+\frac{1}{10\frown 12}$ etc. Unde $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}\left[+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}\right]+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}$ [etc.]

Unde $\frac{b}{1}-\frac{b^3}{3}+\frac{b^4}{4}-\frac{b^6}{6}+\left[\frac{b^7}{7}-\frac{b^9}{9}\right]+\frac{b^{10}}{10}-\frac{b^{12}}{12}$ etc. Ex summa omnium:

$1\ -y^2\ +y^3\ -y^5\ [+y^6\ \ -y^8]\ +y^9\ -y^{11}$ etc. Iam summa omnium

$1 \qquad +y^3 \qquad [+y^6] \qquad +y^9$ etc. fit ex $\frac{1}{1-y^3}$. Et summa omnium:

$y^2 \qquad y^5 \qquad [y^8] \qquad y^{11}$ etc. fit ex $\frac{y^2}{1-y^2}$.

Iam $1-y^2\frown 1+y \sqcap 1\ \boxed{-y^2+y^2}\ -y^3$. Fiet ergo $\frac{1-y^2-y^4}{1-y^3}\sqcap x$. aequatio figurae, cuius series quadratrix est: $\frac{1}{3}\ \ \frac{1}{24}\ \ \frac{1}{63}$ etc.

Eodem modo investigabitur figura, cuius series quadratrix: $\frac{1}{8}\ \frac{1}{35}\ \frac{1}{80}$ [etc.]

Restat investiganda series $\frac{1}{15}\ \ \frac{1}{63}\ \ \frac{1}{143}\ \ \frac{1}{255}$ quae vadit etiam per saltus tertianos, cuius terminos in serie ita notavi: ∞. Denominatores ita resolventur:

$\frac{1}{3\frown 5}\qquad\frac{1}{7\frown 9}\qquad\frac{1}{11\frown 13}\qquad\frac{1}{15\frown 17}$ [etc.] Unde fit series praeparata:

---

10 *Über* $\frac{1}{15}\ \ \frac{1}{63}\ \ \frac{1}{143}$:
$$\begin{array}{ccccc} & 4 & & 4 & \\ 4 & & 8 & & 12 \end{array}$$

1 $+\frac{1}{7\frown 9}$ *erg. Hrsg.* 1 $+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}$ *erg. Hrsg.* 3 $+\frac{b^7}{7}-\frac{b^9}{9}$ *erg. Hrsg.* 4 $+y^6-y^8$ *erg. Hrsg.* 5 $+y^6$ *erg. Hrsg.* 6 y^8 *erg. Hrsg.* 9 etc. *erg. Hrsg.* 10 f. tertianos *(1)* et eius figura pendet ex quadratura circuli et hyperbolae iunctis *(2)*, cuius *L* 12 etc. *erg. Hrsg.*

---

1 $1-\frac{1}{3}$: Richtig wäre $\frac{1}{2}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{18}+\frac{1}{20}-\frac{1}{24}$ etc.; s. o. Erl. zu S. 383 Z. 16. 6 $\frac{y^2}{1-y^2}$: Richtig wäre $\frac{y^2}{1-y^3}$. Leibniz rechnet mit dem Wert weiter und erhält als Folge weiterer Rechenfehler $\frac{1-y^2-y^4}{1-y^3}$ statt $\frac{1-y^2}{1-y^3}$.

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13} + \frac{1}{15} - \frac{1}{17} \text{ etc. Cuius origo est:}$$

$$\frac{b^3}{3} - \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9} + \frac{b^{11}}{11} - \frac{b^{13}}{13} + \frac{b^{15}}{15} - \frac{b^{17}}{17} \text{ etc. facta ex summis omnium:}$$

$$y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + y^{10} - y^{12} + y^{14} - y^{16} \text{ etc. } \sqcap \frac{y^2}{1+y^2}.$$

Quoniam autem series

$$\begin{array}{llllll l}
\frac{1}{3} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{63} & \frac{1}{99} & \frac{1}{143} & \text{etc. a me inventa est; et series} \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{99} & & \text{etc. pendet ex quadratura circuli, itaque series} \\
 & \frac{1}{15} & & \frac{1}{63} & & \frac{1}{143} & \text{[etc.] etiam pendebit ex quadratura circuli.} \\
\frac{1}{3} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{99} & & \text{[etc.] resoluta dant:} \\
\frac{1}{1 \frown 3} & & \frac{1}{5 \frown 7} & & \frac{1}{9 \frown 11} & & \text{etc., cuius seriei origo est} \\
\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} & + & \frac{b^5}{5} - \frac{b^7}{7} & + & \frac{b^9}{9} - \frac{b^{11}}{11} & & \text{etc. facta ex summis omnium:} \\
1 - y^2 & + & y^4 - y^6 & + & y^8 - y^{10} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Idem plane evenit, examinatis duabus alteris ad hyperbolam seriebus, $\propto$ et $\frown$; ut non sit opus immorari. Videamus quid fiat, ademtis:

---

3 f. $\frac{y^2}{1+y^2}$. *(1)* Eodem modo sumatur series, alia per saltus tertianos, quam ita notavi $\propto$. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{35}$ $\frac{1}{99}$ *(2)* Quoniam autem *(a)* constat seriem *(3)* series *L* 7–389,6 etc. *erg. Hrsg. fünfmal* 7 f. circuli. *(1)* Miror autem eandem ex una quam ex altera serie prodire figuram. Nam *(2)* $\frac{1}{3}$ *L* 9 etc., *(1)* unde *(2)* quorum *(3)* cuius *L* 13 fiat, *(1)* additis | vel ademtis *erg. L, streicht Hrsg.* | *(2)* ademtis *L*

1–3 $\frac{1}{3} - \frac{1}{5}$: Richtig wären $\frac{1}{6} - \frac{1}{10} + \frac{1}{14} - \frac{1}{18}$ etc., $\frac{b^3}{6} - \frac{b^5}{10} + \frac{b^7}{7} - \frac{b^9}{9}$ etc. und $\frac{y^2}{2} - \frac{y^4}{2} + \frac{y^6}{2}$ etc. $= \frac{y^2}{2(1+y^2)}$; s. o. Erl. zu S. 383 Z. 16. 5 inventa: N. 15 S. 180 Z. 6 – S. 181 Z. 8; vgl. auch *LSB* III, 1 N. 39 S. 166 Z. 6 u. *LQK* prop. XXXVI S. 82. 9 origo: Richtig wären $\frac{1}{2}\left(\frac{b}{1} - \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} \text{ etc.}\right)$ und $\frac{1}{2}\left(1 - y^2 + y^4 \text{ etc.}\right)$; s. o. Erl. zu S. 383 Z. 16.

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{3}\ \frac{1}{8}, & \frac{1}{35}\ \frac{1}{48}, & \frac{1}{99}\ \frac{1}{120}, & \frac{1}{195}\ \frac{1}{224}, \text{[etc.]}\\[1ex]
\frac{5}{24} & \frac{13}{35\frown 48} & \frac{21}{99\frown 120} & \text{etc.; auferatur}\\[1ex]
\frac{1}{24} & \frac{1}{35\frown 48} & \frac{1}{99\frown 120} & \text{[etc.] fiet:}\\[1ex]
\frac{1}{3\frown 2} & \frac{1}{35\frown 4} & \frac{1}{99\frown 6} & \text{etc., cuius seriei momentum ex vertice, pendet}
\end{array}$$

ex summa seriei quadratricis circuli. Unde patet seriem summatricem huius ipsius seriei $\frac{1}{3\frown 2}\ \frac{1}{35\frown 4}$ [etc.] ex quad. circuli summandam esse.

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{1\frown 2\frown 3\frown 4} & \frac{1}{5\frown 6\frown 7\frown 8} & \frac{1}{9\frown 10\frown 11\frown 12}\\[1ex]
\frac{1}{24} & \frac{1}{35\frown 48} & \frac{1}{99\frown 120}\ .
\end{array}$$

Unde series quadratrix differentiarum inter circulum et hyperbolam, est:

$$\begin{array}{llllll}
 & \frac{5}{1,2,3,4} & \frac{13}{5,6,7,8} & \frac{21}{9,10,11,12} & \text{etc.} & \text{Unde si auferatur,}\\[1ex]
\odot & \frac{3}{1,2,3,4} & \frac{3}{5,6,7,8} & \frac{3}{9,10,11,12} & \text{etc.} & \text{restabit:}\\[1ex]
 & \frac{2}{1,2,3,4} & \frac{10}{5,6,7,8} & \frac{18}{9,10,11,12} & \text{etc.,} & \text{vel}\\[1ex]
☽ & \frac{2}{2\frown 3\frown 4} & \frac{2}{6\frown 7\frown 8} & \frac{2}{10\frown 11\frown 12} & \text{etc.} &
\end{array}$$

Atqui habetur summa huius seriei:

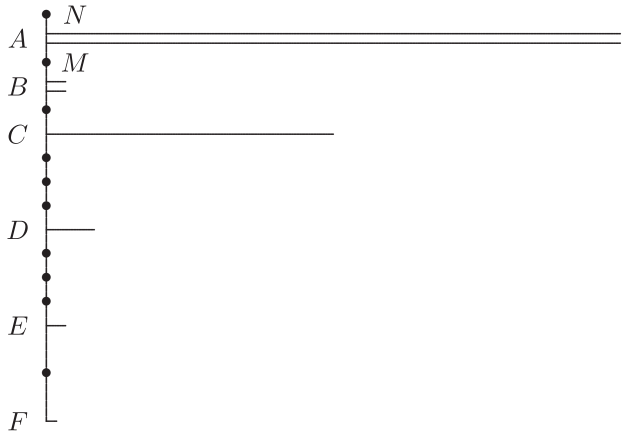
$$\frac{1}{1,2,3}\quad \frac{1}{2,3,4}\quad \frac{1}{3,4,5}\quad \frac{1}{4,5,6}\quad \frac{1}{5,6,7}\quad \frac{1}{6,7,8}\ \text{etc.}$$

Hinc patet rursus iri per saltus tertianos ut series habeatur quaesita. Series autem huius quoque seriei habetur in

$\frac{1}{1,2,3,4}\quad \frac{1}{2,3,4,5}\quad \frac{1}{3,4,5,6}\quad \frac{1}{4,5,6,7}\quad \frac{1}{5,6,7,8}$ [etc.] unde rursus per saltus tertianos ut series habeatur quaesita.

5 patet *(1)* differentias seriei summatricis eius *(2)* seriem *L* 9 series *(1)* differentiarum inter quad. circuli *(2)* quadratrix *L* 16 ut ... quaesita *erg. L* 18 etc. *erg. Hrsg.*

Si series ☉ triangulo-triangularium ducatur in distantias a vertice, 1, 5, 9. fient respondentes saltus tertiani pyramidalium; et si ☽ ducatur in distantias a vertice fient respondentes saltus triangularium.



[*Fig. 2*]

$$\begin{array}{ccccccc} & C & D & E & F & & \\ ♀ & \frac{1}{1,2} & \frac{1}{3,4} & \frac{1}{5,6} & \frac{1}{7,8} & \frac{1}{9,10} & \frac{1}{11,12} \end{array}$$ etc. pendent a quadratura hyperbolae. Ducantur in distantias a vertice, A, nempe 2.4.6.8.10.12. (vel quod eodem redit, duplicando productum, 1.2.3.4) fiet: 1 $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{5}$ $\frac{1}{[7]}$ etc. momentum seriei ex A. Ducantur in distantias a B, fiet: $\frac{1}{2}. \frac{1}{4}. \frac{1}{6}. \frac{1}{8}. \frac{1}{10}$, seu [duplum] $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{5}$ etc.

Unde sequitur, quod et patet, differentiam duorum momentorum aequari seriei summae.

Esto series: $$\begin{array}{ccccc} & C & D & E & F \\ ☿ & \frac{2}{2,3,4} & \frac{2}{6,7,8} & \frac{2}{10,11,12} & \frac{2}{14,15,16} \end{array}$$ etc.

1 Si *(1)* figura *(2)* series ☉ | triangulo-triangularium *erg.* | ducatur *L* 2 si *(1)* saltus pyrami *(2)* ☽ *L* 8 6 *L ändert Hrsg.* 9 seu *(1)* dimi *(2)* duplum *(3)* | dimidium *ändert Hrsg.* | $\frac{1}{1}$ *L*

Si ducantur in 2.4.6.8. etc. distantias a vertice A, fiet haec series:

$$\frac{1}{2 \frown 3} \qquad \frac{1}{6 \frown 7} \qquad \frac{1}{10 \frown 11} \qquad \frac{1}{14 \frown 15},$$ etc. quae pendent ab his:

$$\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - \frac{1}{7} + \frac{1}{10} - \frac{1}{11} + \frac{1}{14} - \frac{1}{15}$$ [etc.], cuius origo

$\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{b^3}{3} + \dfrac{b^6}{6} - \dfrac{b^7}{7}$ etc. seu summa omnium, $y - y^2 + y^5 - y^6 + y^9 - y^{10}$ etc. seu $y + y^5 + y^9$ etc. demta $y^2 + y^6 + y^{10}$ etc. Quarum prior fit ex figura, cuius ordinata est: $\dfrac{y}{1-y^4}$, posterior ex figura, cuius ordinata est: $\dfrac{y^2}{1-y^4}$. Unde figura totalis $\dfrac{y-y^2}{1-y^4}$, quae dividi potest per $1 - y$; fiet: $\dfrac{y}{y^3+y^2+y+1}$, cuius figurae series quadratrix est $\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6} - \dfrac{1}{7}$ etc.

Hac arte comparari possunt eiusdem figurae series quadratrices diversae, prout scilicet instituitur divisio diverso modo. Deinde methodo geometrica cum figurae diversae ex se invicem pendeant hinc rursus multae series quadratrices diversae inter se conferri possunt.

Notabile est hoc loco theorema: $y^3 + y^2 + y + 1$. ducta in $y - 1$, dant $y^4 - 1$.

Unde patet momentum eiusmodi figurae cuius ordinata $y^3 + y^2 + y + 1$. absolute haberi posse ex axe aequilibrii transeunte per punctum quod sit infra punctum a quo incipit y, recta constante.

---

7 *Nebenrechnung*:

$$\frac{1-y^4}{1-y} \sqcap \overset{-y^3+y^3}{\frac{\cancel{y^4}-1}{\cancel{y}-1}} \fint y^3, + \overset{-\cancel{y^2}+y^2}{\frac{\cancel{y^3}-1}{\cancel{y}-\cancel{1}}} \fint y^2, + \frac{y^2-1}{y-1} \fint y+1$$

1 fiet *(1)*: dimidium huius seriei *(2)* haec *L* 15 ex *(1)* puncto quod *(2)* axe *L* 15 punctum *(1)* verticis recta *(2)* quod *L*

---

13 theorema: Sluse gibt eine allgemeine Formulierung und das Beispiel $(y^3 - x^3) : (y - x) = y^2 + yx + x^2$ im Nachtrag zu seiner Tangentenregel, die Leibniz S. 415 Z. 26 erwähnt; s. *Philosophical Transactions* VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059.

Hinc, si ducatur idem in y; fiet $y^4+y^3+y^2+y$, cuius figurae solidae summa, differet a cylindro figurae y^3+y^2+y+1. per cylindrum figurae y^4-1. sub recta constante quam appellamus 1. Cylinder autem figurae y^4-1. habetur absolute seu cubari potest. Ergo figura $y^4+y^3+y^2+y$. pendet a figura y^3+y^2+y+1. adeoque a figura y^3+y^2. Sed etsi haec iam tum habeantur haec tamen inquisitio ad alia quoque imo et ad ista de seriebus demonstranda, in numeris quoque utilis esse potest.

Porro si series ipsarum ☿ $C.D.E.F.$ ducatur in 1.3.5.7. fiet: $\frac{1}{3,4}\quad\frac{1}{7,8}\quad\frac{1}{11,12}$ [etc.] Quorum duorum momentorum $\frac{1}{6}\quad\frac{1}{42}\quad\frac{1}{[110]}$ etc. et $\frac{1}{12}\quad\frac{1}{56}\quad\frac{1}{132}$ [etc.] differentia aequatur cylindro seriei. At eorundem summa aequatur seriei $\frac{1}{2,3}\quad\frac{1}{3,4}\quad\frac{1}{6,7}\quad\frac{1}{7,8}\quad\frac{1}{10,11}\quad\frac{1}{11,12}$ [etc.]

Differentia autem inter summam et differentiam aequatur duplo minoris, et summa summae et differentiae aequatur duplo maioris.

Quod si interstitiola inter CD, DE, non tantum in 2, sed in 4 partes subdividantur, ut una partium v. g. sit BM vel NA, ponderando ab N, ex serie ☿ fiet aliud momentum nempe $\frac{1}{[1\frown 2]}\quad\frac{1}{3\frown 4}\quad\frac{1}{5\frown 6}$ [etc.] quod rursus a prioribus cylindro figurae certo modo sumto differt. Omnium serierum, quae in distantias ab aequilibrii axe ductae summari possunt, etiam series summatrices summari possunt.

$\frac{1}{1}\quad\frac{1}{4}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{16}$ etc. Habentur autem $\frac{1}{4-1}\quad\frac{1}{9-1}\quad\frac{1}{16-1}$. Unde summa harum: $\frac{4}{4-1}\quad\frac{9}{9-1}\quad\frac{16}{16-1}$. Habentur $\frac{4+1}{4-1}\sqcap{}^{2+1}$ [*bricht ab*]

---

11 f. *Nebenrechnungen*: $\begin{array}{r} -a+b+b+a \\ a+b-b+a \end{array}$

1 si *(1)* recta alia suma *(2)* ducatur *L* 1 solidae *erg. L* 2 a *(1)* summa *(2)* cylindro *L* 7–15 etc. *erg. Hrsg. viermal* 8 99 *L ändert Hrsg.* 9 seriei *(1)* supra expositae ♀ $\frac{1}{1,2}\quad\frac{1}{3,4}$ *(2)* $\frac{1}{2,3}$ *L* 13 tantum in *(1)* 4, sed in 8 *(2)* 2, *L* 15 $2\frown 3$ *L ändert Hrsg.* 16 differt. *(1)* Quandocunque *(2)* Omnium *L* 16 ductae *(1)* quadrari *(2)* summari *L*

38_3. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS SECUNDA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S. Datum u. Überschrift auf Bl. 4 r° oben ergänzt.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Octob. 1674.

De serierum summis et seriebus quadratricibus, pars 2$^{\text{da}}$.

Urgenda sunt quae de seriebus summandis, et figuris ea ratione quadrandis, a me dicta sunt.

Habetur series ista:

$$(1)\qquad \frac{1}{4-1}\qquad \frac{1}{9-1}\qquad \frac{1}{16-1}\qquad \frac{1}{25-1}\qquad [\text{etc.}]$$

ut alibi a me demonstratum est.

Auferatur, a

$$(2)\qquad \frac{4}{4-1}\qquad \frac{9}{9-1}\qquad \frac{16}{16-1}\qquad \frac{25}{25-1}\qquad [\text{etc.}]$$

restabit:

$$1\qquad 1\qquad 1\qquad 1\qquad [\text{etc.}]$$

Hinc in terminis finitis, saltem facile ope seriei 1, habetur series 2.

Addantur series 1, et 2, fiet:

$$(3)\qquad \frac{4+1}{4-1}\qquad \frac{9+1}{9-1}\qquad \frac{16+1}{16-1}\qquad \frac{25+1}{25-1}\qquad \text{etc.}$$

Auferatur adhuc alia series

$$(4)\qquad \frac{4}{4-1}\qquad \frac{6}{9-1}\qquad \frac{8}{16-1}\qquad \frac{10}{25-1}\qquad \text{etc.}$$

fiet:

$$(5)\qquad \frac{4-4+1}{4-1}\qquad \frac{9-6+1}{9-1}\qquad \frac{16-8+1}{16-1}\qquad \frac{25-10+1}{25-1}\qquad [\text{etc.}]$$

et dividi poterunt omnes per

$$(6)\qquad 2-1\qquad 3-1\qquad 4-1\qquad 5-1\qquad [\text{etc.}]$$

10–394,6 etc. *erg. Hrsg. siebenmal*   11 f. est. *(1)* Habetur *(2)* Auferatur *L*   12 f. $\frac{25}{25-1}$ | restabit: *streicht Hrsg.* | restabit *L*   16 f. etc. *(1)* sive *(2)* sive divisis omnibus per $2-1$ fiet *(3)* addatur *(4)* Auferatur *L*   18 f. etc. *(1)* Cuius seriei ut obiter dicam habetur summa, quia pendet a *(2)* fiet *L*

11 alibi: N. 15 S. 180 Z. 6 – S. 181 Z. 8; vgl. *LQK* prop. XLI S. 88.

fietque series ab unitatibus harmonicae differens

$$(7)\qquad \frac{2-1}{2+1} \qquad \frac{3-1}{3+1} \qquad \frac{4-1}{4+1} \qquad \frac{5-1}{5+1} \qquad \text{etc.}$$

Si addas seriem 4, fiet:

$$(8)\qquad \frac{4+4+1}{4-1} \qquad \frac{9+6+1}{9-1} \qquad \frac{16+8+1}{16-1} \qquad \frac{25+10+1}{25-1} \qquad \text{[etc.]}$$

et divisis omnibus per

$$(9)\qquad 2+1 \qquad 3+1 \qquad 4+1 \qquad 5+1 \qquad \text{[etc.]}$$

fiet series etiam ex harmonica pendens

$$\frac{2+1}{2-1} \qquad \frac{3+1}{3-1} \qquad \frac{4+1}{4-1} \qquad \frac{5+1}{5-1} \qquad \text{etc.}$$

Momentum seriei $\dfrac{y^2+1}{y^2-1}$ seu series ducta in $y-1$ dat $\dfrac{y^2+1}{y+1}$, quae pendet ex serie harmonica, nam $\dfrac{y^2+1+2y}{y+1} \sqcap y+1$. Unde patet si seriei $\dfrac{y^2+1}{y+1}$ addatur series ex harmonica pendens: $\dfrac{2y}{y+1}$ fieri seriem finite summabilem.

Momentum eiusdem seriei seu $\dfrac{y^2+1}{y^2-1}$ ductum in $y+1$, est $\dfrac{y^2+1}{y-1}$, differentia autem inter: $\dfrac{y^2+1}{y+1}$ et $\dfrac{y^2+1}{y-1}$ erit $\dfrac{y^2+1}{y-1} - \dfrac{y^2+1}{y+1}$, seu $\dfrac{y^3+y^2+y+1-y^3+y^2-y+1}{y^2-1}$ seu $\dfrac{2y^2+2}{y^2-1}$.

---

13 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{r} y^2+1 \\ y\ \ -1 \\ \hline y^3+y-y^2-1 \end{array}$$

1 series *(1)* harmonica *(2)* ab *L* 8 f. etc. *(1)* Si a serie 4. dimidiata auferas seriem 1. duplicatam, fiet series harmonica pura, seu naturalis. Nam $\dfrac{2}{4-1} - \dfrac{1}{-}$ *(2)* Momentum *L* 9 seu series *erg. L* 12 y + 1, *(1)* dat y *(2)* est *L*

Sed hinc video ex ipso semper in his calculo patere, quod differentia momentorum aequetur [cylindro] seriei, nec proinde quicquam inde magnopere duci posse.

$\frac{y^2-1}{y^2-1} \sqcap 1$. Habetur $\frac{1}{y^2-1}$ ergo et habetur $\frac{y^2}{y^2-1}$. Ad $\frac{y^2}{y^2-1}$ cognitam addatur $\frac{y}{y^2-1}$, fiet: $\frac{y^2+y}{y^2-1} \sqcap \frac{y}{y[-]1}$. Ergo si inveniatur $\frac{y}{y^2-1}$, invenietur et series harmonica. Hinc patet $\frac{y}{y^2-1}$ pendere ex serie harmonica.

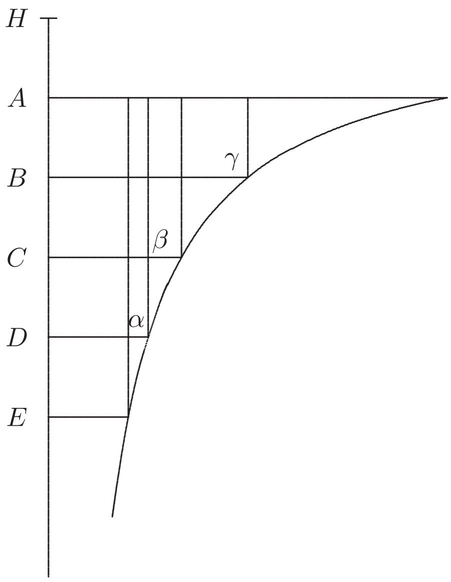
$\frac{1}{z^2+2z}$, est series quadratorum unitate diminutorum ponendo $y \sqcap z+1$, cuius seriei manifestum est haberi summam, cum sit triangularis.

Iam pro $\frac{y}{y^2-1}$ faciamus $\frac{z+1}{z^2+2z}$. Patet in duas dissolvi series, $\frac{1}{z+2}$, et $\frac{1}{z^2+2z}$, ex quibus posterioris habetur summa, prior est harmonica.

$\frac{1}{a+z}\quad \frac{1}{a+2z}\quad \frac{1}{a+3z}\quad \frac{1}{a+4z}\quad \frac{1}{a+5z}$.

$\frac{1}{z}\ [-]\ \frac{1}{z+1} \sqcap \frac{z+1-z}{z^2+z} \sqcap \frac{1}{z^2+z}$. Ducantur differentiae in z fiet: [*bricht ab*]

1 in his *erg. L* 2 cylindro *erg. Hrsg.* 2 f. posse. *(1)* Sed hoc notabile est, quod diff *(2)* $\frac{y^2-1}{y^2-1}$ *L* 3 $\frac{y^2}{y^2-1}$. *(1)* Si *(a)* a serie $\frac{y^2+2y+1}{y+1}$, auferatur *(b)* seriei $\frac{y^2+2y+1}{y+1}$, addatur $\frac{-4y}{y+1}$ fiet: *(2)* Ad $\frac{y^2}{y-1}$ |cognitam *erg.*| addatur *L* 4 + *L ändert Hrsg.* 4 f. harmonica. *(1)* Sed $\frac{y}{y+1 \frown y-1} \sqcap y^2+y$ *(2)* Quaerendae sunt duae quantitates b et c, ita ut b, $\frown$ y + 1, −, c $\frown$ y − 1 $\sqcap$ y *(3)* Hinc *L* 9 f. harmonica. *(1)* $\frac{1}{z+1}\ \frac{1}{z+2}\ \frac{1}{z+3}\ \frac{1}{z+4}$ *(2)* $\frac{1}{a+z}$ *L* 11 − *erg. Hrsg.* 11 differentiae *erg. L* 11 z |vel in z + 1 *gestr.*| fiet: *L*



[*Fig. 1*]

Notabile est in serie harmonica, quod altitudo HC in diff. $\beta \sqcap C\beta$ in β seu in 1. Ergo $HC \sqcap \dfrac{C\beta \frown 1}{\beta}$.

Datur momentum seriei harmonicae ex vertice; quod si iam et quadrata terminorum huius seriei dentur $\dfrac{1}{1}\quad\dfrac{1}{4}\quad\dfrac{1}{9}\quad\dfrac{1}{16}\quad\dfrac{1}{25}$ dabitur centrum gravitatis cuiusdam portionis.

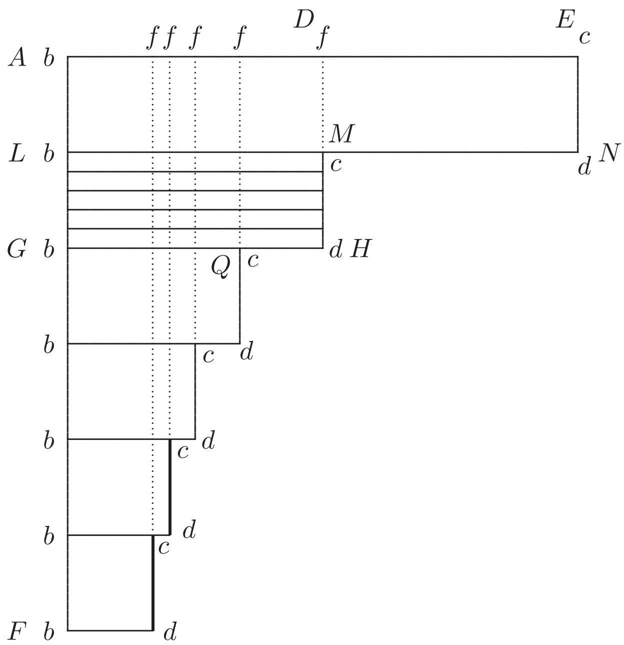
Semiquadrata abscissarum ducta in differentias aequantur figurae momento ex vertice. Momentum autem seriei harmonicae ex A, est rectangulum: semiquadrata abscissa-

2 altitudo *erg. L* 2 diff. *erg. L* 3 f. $\dfrac{\mathrm{C}\beta \frown 1}{\beta}$. *(1)* Datur autem summa omnium HC, ergo et omnium $\dfrac{1}{\mathrm{z}}$ divisorum per $\dfrac{1}{\mathrm{z}^2+\mathrm{z}}$ *(2)* Datur *L* 4 vertice; *(1)* datur et *(2)* quod *L*

2 diff. β: Leibniz bezeichnet mit diff. β die Ordinatendifferenz, anschließend mit $\beta = 1$ die Abszissendifferenz.

rum sunt $\frac{y^2}{2}$ fiet: $\frac{y^2}{2} \frown \frac{1}{y^2+y}$ sive $\frac{y}{2y+[2]}$. Quorum haberi potest summa. Eodem modo abscissae ductae in ordinatas [et differentias] aequantur ordinatarum semiquadratis.

Sed ne erremus in duabus istis regulis sane maximi momenti ad sequentia futuris.



[*Fig. 2*]

In figura hic exposita patet

(1) momentum seriei ex vertice AE, aequari summae ordinatarum bc, in unitatem cd, et distantiam a vertice AE, seu abscissam ductarum.

(2) Patet etiam momentum seriei ex axe AF aequari summae ipsarum bc, semiquadratorum in unitatem cd ductorum. Iam ex punctis c, ducantur in axem AE, aliae rectae cf punctis designatae. Unde patet

---

4 *Unter Fig. 2*: NB. In hac figura utile est fingi $AE \sqcap cd$, seu unitati.

1 1 *L ändert Hrsg.* 2 in *(1)* ordinatarum differentias aequantur *(2)* unitatem *(3)* ordinatas | et differentias *erg. Hrsg.* | aequantur *L* 8 ex *(1)* vertice *(2)* axe *L* 8 summae *erg. L*

(3^tio^) momentum seriei ex vertice, aequari summae solidorum quae fiunt ex semiquadratis abscissarum $cf \sqcap bA$ in differentias ordinatarum cd ductis. Patet et

(4^to^) momentum seriei ex axe, aequari summae solidorum, quae fiunt ex ordinatis, abscissis, et differentiis ordinatarum.

Sed video adhuc aliquid subesse difficultatis. Sume rectangulum $LGHM$. Eius momentum ex ipsa LM, est eius dimidium prisma, seu $LGHM$, ductum in dimidiam unitatem, seu posita unitate $\sqcap b$. et $GH \sqcap x$. erit $\dfrac{xb^2}{2}$. Ergo momentum eius ex AE, erit Ab abscissa, in ipsum rectangulum ducta, ipsa $\dfrac{xb^2}{2}$ [minuta]: seu $yxb - \dfrac{xb^2}{2}$, seu $y - \dfrac{b}{2}$ in xb. Ergo

(1) momentum seriei ex vertice componitur solidis ex rectangulo unitatis seu differentiae abscissarum et ordinatae ducto [in] abscissam dimidia unitate seu dimidia abscissarum differentia minutam.

Et pari iure

(2) momentum seriei ex axe, componitur solidis ex rectangulo differentiae ordinatarum et abscissae ducto in ordinatam dimidia ordinatarum differentia minutam. Deinde

(3) momentum seriei ex axe componitur solidis ex semiquadratis ordinatarum, in unitatem seu differentiam abscissarum. Et pari iure

(4) momentum seriei ex vertice, componitur solidis ex semiquadratis abscissarum in differentiam ordinatarum. Ergo

(5) summa solidorum quae fiunt ex rectangulis sub unitate seu differentia abscissarum et ordinata; in abscissam dimidia unitate minutam ductis aequatur summae solidorum quae fiunt ex semiquadratis abscissarum in differentias ordinatarum.

1 summae *erg. L* 3 axe, *(1)* fieri ex *(a)* du *(b)* solidis *(2)* aequari *L* 8 $\dfrac{\mathrm{xb}^2}{2}$ | aucta *ändert Hrsg.* |: *(1)* seu $\mathrm{yxb} + \dfrac{\mathrm{xb}^2}{2}$, seu $\mathrm{y} + \dfrac{\mathrm{b}}{2}$ *(2)* seu *L* 10 vertice | *(1)* demta sequenti ordinata *(2)* demto rectangulo sequentis ordinatae in praesentem abscissam *erg. u. gestr.* | *(a)* est *(aa)* rect *(bb)* solidum ex rectangulis *(b)* componitur *L* 10 f. seu differentiae abscissarum *erg. L* 11 ordinatae *(1)* ducta in dimidium *(2)* ducto | in *erg. Hrsg.* | abscissam *L* 12 differentia *(1)* auctam *(2)* minutam. 14 axe, *(1)* est solidum ex rectangulis et differentiae ordinatarum et abscissae ductum *(2)* componitur *L* 15 differentia *(1)* auctam *(2)* minutam *L* 16 axe *(1)* est solidum *(2)* componitur *L* 18 vertice, *(1)* est solidum ex semiquadratis ordinata *(2)* componitur *L* 20 (5) *(1)* solidum ex rectangulo unitatis seu differentiae *(2)* summa *L* 21 unitate *(1)* auctam *(2)* minutam *L*

(6) Summa solidorum quae fiunt ex rectangulis sub differentia ordinatarum et abscissa, in ordinatam dimidia ordinatarum differentia minutam; aequatur summae solidorum quae fiunt ex semiquadratis ordinatarum in unitates seu differentias abscissarum.

(7) Summa rectangulorum sub abscissis et differentiis ordinatarum, aequatur summae rectangulorum sub ordinatis et unitatibus vel differentiis abscissarum sive aequatur summae seriei.

Series numerorum figuris geometriae in eo sunt intractabiliores, quod in numeris non licet mutare abscissam in ordinatam et vicissim; nec alium pro alio axem sumere, saltem regulariter.

Esto iam e. g. $AG \sqcap y$, et $GH \sqcap \frac{1}{y}$ et ita de caeteris. Differentia ordinatarum erit $\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{1}{y^2+y}$. Momentum seriei ex axe, erit summa omnium $\frac{1}{2y^2}$; quae aequabitur summae omnium: $y, \frown \frac{1}{y^2+y}, \frown \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2+2y}$, fiet: $\frac{1}{y+1} \frown \frac{1}{y} - \frac{1}{2y^2+2y} \sqcap$ $\frac{2y\boxed{+2-1}+1}{2y^2+2y} \frown \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{y}{2y^2+2y} \frown \frac{1}{y+1} + \frac{1}{2y^2+2y} \sqcap \frac{1}{2y^2+4y+2} + \frac{1}{2y^2+2y}$. Quorum summa aequari debebit summae omnium $\frac{1}{2y^2}$.

Sed iam video aliquid ad nostras regulas addendum esse; nimirum differentiarum ordinatarum summae.

Imo video duas priores, et per consequens et 5^{tam} 6^{tamque} plane vacillare. Videamus tamen: Manifestum est momentum rectanguli LAE esse ipsum rectangulum ductum in abscissam, 1, dimidiatam. Et momentum rectanguli GLM ex AE, esse rectangulum

2 differentia *(1)* auctam *(2)* minutam *L* 4 (7) *(1)* Abscissae in differentias ordinatarum, *(2)* Summa *L* 5–7 aequatur *(1)* portioni fig *(2)* summae seriei. *(a)* Nota: in seriebus *(b)* Series *L* 7 in numeris *erg. L* 8 sumere, *(1)* nisi qui sit dato parallelus *(2)* saltem *L* 10 f. caeteris. | Differentia *(1)* abscissarum *(2)* ordinaturum, erit $\frac{1}{\mathrm{y}} - \frac{1}{\mathrm{y}+1} \sqcap \frac{1}{\mathrm{y}^2+\mathrm{y}}$. *erg.* | Momentum *(a)* figurae *(b)* seriei *L* 12 summae *(1)* horum solidorum, x $\frown$ *(2)* omnium: *L* 15 $\frac{1}{2\mathrm{y}^2}$. *(1)* Proba quaedam veritatis ita statim haberi potest, si duo prima absolute aequentur. Quod cum non fiat, patet errorem esse in regulis, qui sic corrigetur. Si primum momentum $\frac{1}{\mathrm{y}^2}$, aequetur *(2)* Sed *L*

17 Imo video: vgl. aber unten S. 400 Z. 13.

GLM, ductum in rectam AL, abscissam suam unitate minutam, et praeterea ipsum rectangulum in dimidiam unitatem ductum. Appellando ergo abscissam y, ordinatam x, fiet: $xb, \frown y-b, , +\frac{b^2x}{2} \sqcap xyb-\frac{b^2x}{2}$. Ita momentum figurae $ALGHME$ est $\frac{1}{2}+1-\frac{1}{4} \sqcap \frac{5}{4}$ ex aequilibrii axe scilicet AE.

Item momentum, rectanguli LE, ex AE, librati, fit etiam ex differentia ordinatarum *e* hoc loco $\frac{1}{2}$, [ducta] in semiquadratum abscissae $AL \sqcap y$, $\frac{y^2}{2}$, fit $\frac{y^2}{4}$ addito praeterea eodem semiquadrato AL in minimam ordinatarum LM ducto.

Si spatium propositum sit, brevius: abscissae semiquadratum ducitur in differentias ordinatarum, et si nulla sequitur, in minimam ordinatam, quia enim nulla sequitur[,] ipsa differentia est inter se ipsam et nihil, quod sequitur. Hinc $ALGHME$ momentum fit ex $MN \sqcap \frac{1}{2}$ in $\frac{b^2}{2} \sqcap \frac{1}{2}$ seu $\frac{1}{4}$; et praeterea $GH \sqcap \frac{1}{2}$, ducta in 2, semiquadratum ipsius AG quod est $\frac{1}{2}$, unde 2 in $\frac{1}{2}$ dat 1[,] fit ergo $\frac{1}{4}+1$. seu $\frac{5}{4}$. ut ante.

Regulae ergo 6 superiores verae sunt absolute, nec opus habent correctione modo illud intelligatur; ultimam ex differentiis ordinatarum, esse ipsam ordinatam ultimam, minimam, si a vertice decrescitur, aut maximam si crescitur. Eodem modo inter differentias abscissarum, ultra unitates esse abscissam primam, quae scilicet revera est unitas, ut Ed, quando ad axem aequilibrii assurgit figura. Itaque in semiquadratis ordinatarum haec nihil turbant.

Illud tantum notandum est, quod dixi differentiis ordinatarum connumerandam esse ultimam ordinatam, id verum esse simpliciter non tantum de earum semiquadratis.

Nunc calculum resumamus: Momentum figurae nostrae ex axe, est $\frac{1}{2y^2}$, summa scilicet semiquadratorum ordinatarum. Quod aequatur summae horum:

2 ergo *(1)* ordinatam y, abscissam *(2)* abscissam *L* 4 ex *(1)* axe rect *(2)* aequilibrii *L* 5 momentum, *(1)* fit ex semiquadrato abscissae ducto *(2)* rectanguli *L* 5 f. differentia *(1)* abscissarum *(2)* ordinatarum *L* 6 ductam *L ändert Hrsg.* 14 ultimam, *erg. L* 15 modo *(1)* ultimam ex differentiis *(2)* inter *L* 16 abscissam *(1)* minimam uni *(2)* primam, *L* 17 quando *(1)* ad verticem sci *(2)* ad *L* 18 f. turbant. *(1)* His ita positis resumendus est calculus, nempe in casu nostro, momentum figurae ex axe, est summa omnium $\frac{1}{2y^2}$. seu semiquadratorum in unitatem: Idem vero momentum etiam est summa *(2)* Illud *L* 20 ordinatam *erg. L*

$\boxed{\frac{1}{y}-\frac{1}{y+1}}\ \frac{1}{y^2+y}, \frown y,, \frown \frac{1}{y}-\frac{1}{2y^2+2y}$, sive $\frac{1}{y^2+y}, \frown \frac{1}{1}-\frac{1}{2y+2}$. Iam $1-\frac{1}{2y+2} \sqcap \frac{2y+2-1}{2y+2} \sqcap \frac{2y+1}{2y+2}$, fiet, $\frac{1}{y^2+y},, \frown \frac{2y+1}{2y+2}$, sive $\boxed{\frac{1}{y^2+y} \frown \frac{y}{2y+2}}\ \frac{1}{2y^2+4y+2}, + \frac{1}{y^2+y} \frown \frac{y+1}{2y+2}$, sive denique $\frac{1}{y+1,\square,\frown 2}+\frac{1}{y^2+y,\frown 2}$.

Quod si ergo summae omnium $\frac{1}{y+1,\square \frown 2}+\frac{1}{y^2+y,\frown 2}$ addatur novissimae ordinatae $\frac{1}{y}$ semiquadratum $\frac{1}{2y^2}$ in novissimam abscissam ductum, seu $\frac{1}{2y}$ habebitur quantitas aequalis summae omnium $\frac{1}{2y^2}$. Quod si verum est dabitur modus inveniendi summam fractionum quadraticarum, etiam infinitarum.

Sumamus: $\underbrace{\frac{1}{1}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}}_{\frac{820}{576}}$, quorum dimidium $\frac{410}{576}$, sed relinquamus totum.

8–402,3 *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{rrrr}
16 & 16 & 16 & 9\\
9 & 9 & 4 & 4\\
\hline
144 & 144 & 64 & 36\\
4 & 1 & 1 & 1\\
\hline
576 & 144 & 64 & 36
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
576\\ 144\\ 64\\ 36\\ \hline 820
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
144\\ 64\\ 36\\ \hline 244
\end{array}$$

$$\frac{820}{576} \sqcap 1+\frac{244}{576}$$

$$\begin{array}{rlr}
 & \cancel{2} & \\
 & \cancel{6}100 \ \ \cancel{\ \ } & 1525\\
4) & \cancel{4}\cancel{4}4 & 144\\
\cline{3-3}
 & & 1669
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lr}
\cancel{2} & \\
\cancel{1}\cancel{4}\cancel{4}00 \ \ \cancel{\ \ } & 3600\\
\cancel{4}\cancel{4} &
\end{array}$$

5 semiquadratum *(1)* in *(a)* diff *(b)* abscissam novi *(2)* $\frac{1}{2y^2}$ *L* 5 habebitur *(1)* series *(2)* sum *(3)* quantitas *L*

---

6 dabitur: Die Folgerung ist nicht richtig.

Iam et summam ineamus omnium $\frac{1}{[y]+1,\square}$, seu $\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{25}$.

$\frac{244}{576}\ \overset{4}{\smile|}\ \frac{61}{144}$, addatur $\frac{1}{25}$, fiet: $\frac{25\frown 61+144}{144\frown 25} \sqcap \frac{1669}{3600}$ addantur $\frac{1}{y^2+y}$ seu $\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$ $+\frac{1}{20}$ id est differentia inter 1 et $\frac{1}{5} \sqcap \frac{4}{5}$.

---

2 *Nebenrechnungen zur Stufe (1) der Lesart, gestrichen*:

$$\begin{array}{rrrrrr}
2 & 5 & 2 & 2 & 2 & 850 \\
5 & 10 & 10 & 5 & 5 & 340 \\
\overline{10} & \overline{50} & \overline{20} & \overline{10} & 10 & 170 \\
10 & 17 & 17 & 17 & \overline{100} & 100 \\
\overline{100} & \overline{850} & \overline{340} & \overline{170} & & \overline{1460} \\
17 & & & & & \\
\overline{1700} & & & & &
\end{array}$$

2 f. *Nebenbetrachtung, gestrichen*: $\frac{1}{y} - \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{y+1-y}{y^2+y}$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & \\
& 1 & & 3 & & 6 & & 10 & 15 \\
& 1 & & 4 & & 10 & & 20 & 35
\end{array}$$

1 y^2 *L ändert Hrsg.* 2 $\frac{1}{2}+$ *(1)* $\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{17}$. Ergo $\frac{1669}{3600}+\frac{1460}{1700} \sqcap \frac{820}{\quad}$ *(2)* Hinc addatur novissimae $\frac{1}{4}$ quadratum $\frac{1}{16}$ in novissimam abscissam *(3)* $\frac{1}{6}$ *L*

1+3 seu $\frac{1}{4}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{16}\ \frac{1}{25}$: Leibniz summiert mit $\frac{1}{25}$ und im folgenden mit $\frac{1}{20}$ jeweils einen Term zuviel auf und verfehlt dadurch die Verifikation; er erkennt die Fehlerhaftigkeit der Rechnung, klärt aber die Ursache nicht.

Denique addatur novissimae ordinatae $\frac{1}{4}$, quadratum $\frac{1}{16}$ in novissimam abscissam 4, ductum, fiet $\frac{1}{4} \sqcap \frac{900}{3600}$, fiet $\frac{2569}{3600}$.

Error in calculo haud dubie. Sed nihil ista inquisitio ad rem pertinet, quia nihil contribuit ad summas quadratorum.

$$\frac{1}{y+1} \sqcap \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} + \frac{\frac{1}{y^4}}{y+1}.$$

Methodus ista Mercatoris ad summas numerorum non aeque facile ac ad summas linearum accommodari potest.

$$\frac{y}{1+y} \sqcap + y - \left[y^2 + y^3 - y^4 + \frac{y^5}{1+y}\right].$$

Si subtractiones et additiones alternae continuentur in infinitum, et y sit numerus, patet duarum infinitarum serierum differentiae dari posse numerum fractum aequalem si y sit fractio ut $\dfrac{\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}} \sqcap \frac{1}{2}$ [− etc.], idem intelligi potest, et series quaelibet tam affirmativa quam negativa erit decrescens.

8 $\mathrm{y}^3 + \mathrm{y}^4 - \mathrm{y}^5 + \frac{\mathrm{y}^6}{1+\mathrm{y}}$ *L ändert Hrsg.* 11 − etc. *erg. Hrsg.*

6 Mercatoris: *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XIV – XVII S. 28–33 [Marg.].

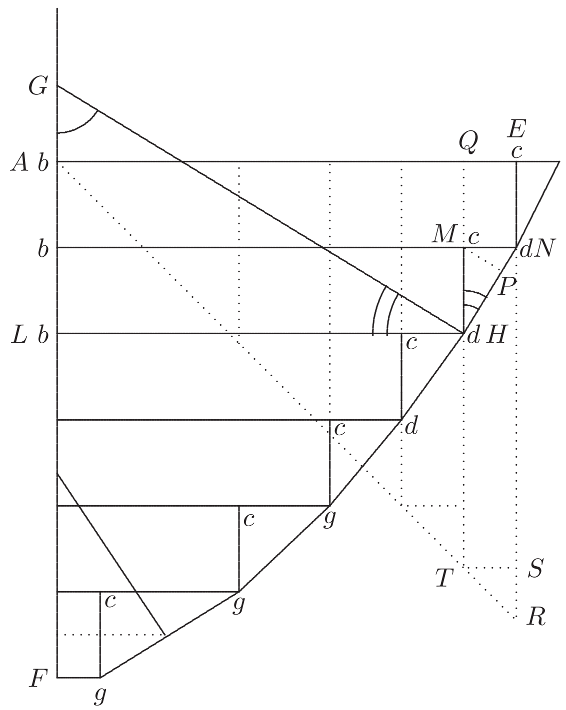
38_4. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS TERTIA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 3 S. — Auf Bl. 7 v° verworfene Nebenbetrachtung zu N. 38_5.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Octob. 1674

Pars 3^{tia} schediasmatis de summis serierum.

Videndum est an quaedam transformationes geometricae applicari possint seriebus numerorum, praeter centrobarycas iam explicatas.



[*Fig. 1*]

Exposita serie instar figurae iungantur puncta extremitatum, ductis quasi quibusdam tangentibus seu polygoni lateribus. Ordinatae bc[,] differentiae earum cd, latera polygoni *dd*. Ducantur perpendiculares ut GH, dum axi AF producto si opus occurrat in G. Cum GHN sit rectus, erit triangulum GLH simile ∇^{lo} NMH, nam recta MP ipsi GH parallela. Ergo angulus M aequalis angulo G, ergo et angulus MHN aequalis angulo LHG.

Hinc $\dfrac{LH}{GL} \sqcap \dfrac{MH}{MN}$. Ergo $LH \frown MN \sqcap GL \frown MH$. Sed LH perpetuo differentiis ordinatarum ut MN, in axe ut EQ sumtis applicatae dant triangulum rectangulum semiquadratum quale est AER. Unde summa omnium $LH \frown MN$ aequatur semiquadrato maximae LH, modo inde summa omnium semiquadratillorum ipsarum $TS \sqcap SR \sqcap MN$ auferatur. Quare semper haberi poterit summa omnium GL, modo et quadrata differentiarum seriei datae haberi possint.

Sumamus exemplum in quo quadrata differentiarum habentur. Sit figura proposita trilineum concavum parabolicum arithmeticum, quod procedit, ut quadrata, differentiae procedunt ut triangula, seu ut numeri impares, horum ergo quadratorum haberi poterit summa. Ordinatae v. g. y^2, differentiae duarum ordinatarum $\boxed{y^2}\ +2y+1\ \boxed{-y^2}$ unde series differentiarum $2y+1$. Iam $GL \sqcap \dfrac{LH \frown MN}{1} \sqcap 2y+1, \frown y^2$. Horum ergo habetur summa.

In serie harmonica differentiae $\dfrac{1}{y^2+y}$, ducantur in $\dfrac{1}{y}$ fiet: $\dfrac{1}{y^3+y^2}$, cuius quantitatis summa pendet a quadratis triangularium. Unde patet, si hinc summae ipsarum $GL \frown MH$, illinc seriei ipsarum $LH \frown MN$, addantur semiquadratilla differentiarum, fieri ex his triangulum, ex illis seriem absolute triangulo aequalem. Ideoque regulam generalem hanc

5 GL ⌢ MH. *(1)* Hinc summa *(2)* Sed *L* 7 omnium *(1)* GL ⌢ MH, *(2)* LH ⌢ MN aequatur *(a)* rectangu *(b)* triangu *(c)* semiquadrato *L* 18 triangularium. *(1)* Et summa *(2)* Unde *L* 20 illis *(1)* quantitatem *(2)* seriem *L*

---

20 regulam generalem: Der folgende Satz entspricht der Formel $\sum_{i=0}^{n-1} x_i(x_{i+1}-x_i) + \sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{2}(x_{i+1}-x_i)^2 = \frac{1}{2}(x_n^2 - x_0^2)$. Leibniz setzt stillschweigend den Anfangswert $x_0 = 0$ voraus. In den anschließenden Beispielrechnungen übersieht er, daß bei der Differenzenbildung auf Vorzeichen zu achten ist; weitere Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Überlegungen bis S. 406 Z. 14. In N. 38₇ S. 438 Z. 9 nimmt Leibniz die Betrachtung wieder auf.

condere possum. *In qualibet serie si differentiae terminorum in ipsos terminos respondentes ducantur factis addantur differentiarum semiquadrata; summa omnium erit aequalis termini maximi semiquadrato.*

Ideo haec series $\dfrac{1}{y^3+y^2}+\dfrac{1}{y^4+2y^3+y^2} \sqcap \dfrac{1}{2b^2}$ ponendo b esse maximam y seu $\dfrac{y^2+y+y}{y^5+2y^4+y^3} \sqcap \dfrac{y+2}{y^4+2y^3+y^2}$ cuius seriei habetur summa. Tractabiliores hoc casu series erunt si pro $\dfrac{1}{y^2+y}$ sumatur $\dfrac{1}{y^2-y}$.

Ex hac regula et haec sequitur pari iure:

Si unitates in abscissas respondentes ducantur factis addantur unitatum semiquadrata; summa omnium erit aequalis abscissae maximae semiquadrato.

Sed hoc dudum notum per se.

Si faciamus $\dfrac{1}{y-1}-\dfrac{1}{y}$, fiet: $\dfrac{\boxed{y-y}+1}{y^2-y}$, ducatur in $\dfrac{1}{y-1}$ fiet: $\dfrac{1}{y^2-2y+1,\frown y}$, addatur $\dfrac{1}{y^2-2y+1,\frown y^2}$ fiet: $\dfrac{y+1}{y^2-2y+1,\frown y^2}$. Huius vel superioris seriei, quarum datur summa, figuras geometricas quaeramus: $\dfrac{2}{1\boxed{-2+2},\frown 1}+\dfrac{3}{\boxed{4-4}+2,\frown 2}+\dfrac{4}{\boxed{9-6}+2,\frown 3}$.
3

Notandum hic ut obiter dicam, satis difficile fore propositam numerorum seriem: v. g. hoc loco $\dfrac{2}{1}+\dfrac{3}{4}+\dfrac{4}{15}$ etc. revocare ad regulam seu aequationem. Esset haec quasi portio quaedam artis faciendi hypotheses sive artis decyphrandi.

Investigemus paulo accuratius quot modis fieri possit, ut seriei cuiusdam differentiae dent alias series.

Sit: $\dfrac{y\textcircled{v}}{\boxed{\textcircled{v}}\,y}-\dfrac{y+1\textcircled{v}}{y+1\boxed{\textcircled{v}}}$, unde $\dfrac{y\textcircled{v},\frown y+1\boxed{\textcircled{v}},,,-,,y\boxed{\textcircled{v}},\frown y+1\textcircled{v}}{\boxed{\textcircled{v}}y,\frown y+1\boxed{\textcircled{v}}}$.

6 summa *(1)* si ad $\dfrac{y^2+2y}{y^5+2y^4+y^3}$ adiecissem *(2)*. Tractabiliores *L* 7 f. $\dfrac{1}{y^2-y}$. *(1)* Eodem modo si un *(2)* Ex *L* 9 ducantur *(1)* summae *(2)* factis *L* 13 f. datur *(1)* quadratura, *(2)* summa *L* 17 f. decyphrandi. *(1)* Nunc tantum dicam: *(2)* Investigemus *L*

$\circledvee$ significat regulam qua y tractanda est, $\boxed{\circledvee}$ significat aliam regulam. Casus quosdam percurramus. Primus esto, cum nullus extat denominator, et fiet: $y\circledvee - y+1\circledvee$. Eo casu $y\circledvee$ vel continet signa radicalia in quibus sit y vel [non] continet, si nulla contineat signa radicalia in quibus sit y, tunc etiam differentia non habebit incognitam neque in denominatore, neque in vinculo, atque ita differentia componetur ex meris paraboloeidibus inter se compositis, quarum cum habebitur summa, non est ut huic casui immoremur; si radicem ingrediatur incognita et simplicem quidem v. g. si sit $\sqrt{y\circledvee} - \sqrt{y+1,\circledvee} \sqcap z$. fiet:

$y\circledvee - 2\sqrt{y\circledvee,, \frown\, y+1,\circledvee} + y+1,\circledvee \sqcap z^2$, sive $-2\sqrt{\ldots} \sqcap z^2, -y\circledvee, -y+1,\circledvee$. Unde fiet:

$4,\frown\, y\circledvee \frown\, y+1\circledvee \sqcap z^4 - 2z^2y\circledvee - 2z^2 \frown\, y+1\circledvee + y\circledvee,^2 + 2y\circledvee,\frown\, y+1\circledvee, + y+1,\circledvee^2$.

Caeterum ut $\circledvee$, non nihilo distinctius explicetur, ponendum est notatos esse a nobis casus, quibus tractatio variat, ut cum y est in denominatore, et cum est in vinculo, caetera explicabuntur per expressas potestates, v. g.

$ay^3 + by^2 + cy + d + n\sqrt{ey^3+fy^2+gy+h} + p\sqrt{ky^2+ly+m} + q\sqrt{ry+s} \sqcap x$.

Unde pro differentia ponendo $y+\beta$ in locum y habetur differentia generalis, et nunc has nunc illas literas, ponendo aequales nihilo, aut datae quantitati, variae figurae aut series speciales habentur quarum data sit series; vel quadratura.

Sed ne prolixo nimis calculo nos induamus suffecerit neglectis caeteris, hanc sumi seriem unius tantum irrationalis, et denominatore carentem nempe:

$$\left.\begin{array}{lllll}
\boxed{-ay^3} & \boxed{-\ by^2} & \boxed{-cy} & \boxed{-d} & -n\sqrt{ey^3 \ + \ fy^2 + gy + h} \\
\boxed{+ay^3} & \boxed{+\ by^2} & \boxed{+cy} & \boxed{+d} & +n\sqrt{ey^3 \ + \ fy^2 + gy + h} \\
..3ay^2\beta & +2b\beta y & +c\beta & & + \quad 3ey^2\beta + 2f\beta y + g\beta \\
..3a\beta^2 y & + \ b\beta^2 & & & \qquad 3ey\beta^2 + \ f\beta^2 \\
..\ a\beta^3 & & & & \qquad e\beta^3
\end{array}\right\} \sqcap z.$$

Hinc statim patet, universaliter verum esse in figuris geometricis, quod termini in quibus β assurgit ad quadratum et ultra reici possint: nam si dicas fieri posse, ut servari

3 non *erg. Hrsg.* 4 in ... y *erg. L* 13 nihilo *(1)* rectius *(2)* distinctius *L* 13 est *(1)* totos *(2)* notatum *(3)* notatos *L* 16 v. g. *(1)* omnia signa y^3 + *(2)* ay^3 *L* 24+27 $\sqcap$ z. *(1)* Subscribamus denominatorem sed radice carentem: *(2)* Hinc *L* 28 β *(1)* excedit *(2)* assurgit *L*

debeant β^2, quia omnes β simplices evanescant; respondeo tunc $a.$ $b.$ $c.$ fore, quodlibet $\sqcap$ 0. ergo et β^2 et β^3 evanescere. In seriebus autem arithmeticis servari debent. Nunc [ordinanda] aequatio est, ut tolli possint radices, sed antequam hoc faciamus, fingamus simplicioris calculi causa, primum $a.$ $b.$ esse nihil, fiet:

$$\begin{array}{llllll}
\boxed{n^2ey^3}\boxed{+n^2fy^2}\boxed{+n^2gy}\boxed{+n^2h} & +2n^2ey^3 & +2n^2fy^2 & +2n^2gy & +2n^2h & -z^2 \ \sqcap \\
 & n^2 3ey^2\beta & +n^2f\ \ \beta y & +n^2g\ \ \beta & & +2c\beta z \\
 & n^2 3ey\beta^2 & +n^2f\ \ \beta^2 & & & -\beta^2c^2 \\
 & n^2e\ \ \beta^3 & & & &
\end{array}$$

$$+2n^2\sqrt{\begin{array}{ll||ll||ll||ll}
\boxed{e^2y^6} & \boxed{efy^5} & \boxed{fey^5} & \boxed{f^2y^4} & \boxed{gey^4} & \boxed{gfy^3} & \boxed{hey^3} & \boxed{hfy^2} \\
\boxed{3e^2y^5\beta} & \boxed{2ef\beta y^4} & 3fey^4\beta & \boxed{+2f^2\beta y^3} & \boxed{3gey^3\beta} & \boxed{2gf\beta y^2} & \boxed{3hey^2\beta} & \boxed{+2hf\beta y} \\
\boxed{3e^2y^4\beta^2} & \underline{\boxed{ef\beta^2y^3}} & 3fey^3\beta^2 & \boxed{+\ \underline{f^2\beta^2y^2}} & \boxed{3gey^2\beta^2} & \underline{gf\beta^2y} & \boxed{3hey\beta^2} & \boxed{+\ \underline{hf\beta^2}} \\
\underline{\boxed{e^2y^3\beta^3}} & \boxed{egy^4} & fe\beta^3y^2 & \boxed{fgy^3} & \underline{\boxed{gey\beta^3}} & \boxed{g^2y^2} & \underline{\boxed{he\beta^3}} & \boxed{+\ hgy} \\
 & \underline{\boxed{eg\beta y^3}} & & \underline{\boxed{fg\beta y^2}} & & \boxed{g^2\beta y} & & \underline{\boxed{hg\beta}} \\
 & \boxed{ehy^3} & & \boxed{fhy^2} & & \boxed{ghy} & & \boxed{h^2}
\end{array}}$$

Ergo quadrando prius aequationis latus, fiet:

2 f. debent. *(1)* Nunc ut per partes eamus *(2)* Nunc | ordinata *ändert Hrsg.* | *(a)* aequatione fiet: *(b)* aequatio *L*

$\boxed{4n^4e^2y^6}$	$\boxed{8n^4efy^5}$	$\boxed{8n^4egy^4}$	$-\ 4n^2z^2ey^3$	$\boxed{4n^4f^2y^4}$	$\boxed{8n^4fhy^2}$
$\boxed{12n^4e^2y^5\beta}$	$12n^4efy^4\beta$	$\boxed{12n^4egy^3\beta}$	$-\ 6n^2z^2ey^2\beta$	$+8n^4f^2y^3\beta$	$\boxed{8n^4fhy\beta}$
$\boxed{12n^4e^2y^4\beta^2}$	$12n^4efy^3\beta^2$	$\boxed{12n^4egy^2\beta^2}$	$-\ 6n^2z^2ey\beta^2$	$4n^4f^2y^2\beta^2$	$\underline{\underline{\boxed{4n^4fh\beta^2}}}$
$\underline{\boxed{4n^4e^2y^3\beta^3}}$	$\underline{\underline{4n^4efy^2\beta^3}}$	$\underline{\boxed{4n^4egy\beta^3}}$	$\underline{-\ 2n^2z^2e\beta^3}$	$4n^4f^2y^2\beta^2$	$-4n^2fy^2z^2$
$9n^4e^2y^4\beta^2$	$\boxed{8n^4efy^4\beta}$	$\boxed{4n^4egy^3}\beta$	$+\ 8n^2cey^3z\beta$	$\underline{4n^2f^2y\beta^3}$	$-4n^2fyz^2\beta$
$18n^4e^2y^3\beta^3$	$8\,\boxed{12}\,n^4efy^3\beta^2$	$6n^4egy^2\beta^2$	$+12n^2cey^2z\beta^2$	$\underline{n^4f^2\beta^4}$	$\underline{-2n^2fz^2\beta^2}$
$\underline{6n^4e^2y^2\beta^4}$	$12n^4efy^2\beta^3$	$6n^4egy\beta^3$	$+12n^2ceyz\beta^3$	$\boxed{8n^4fgy^3}$	$+8n^2fcy^2z\beta$
$9n^4e^2y^2\beta^4$	$\underline{4n^4efy\beta^4}$	$\underline{\underline{2n^4eg\beta^4}}$	$\underline{+\ 4n^2cez\beta^4}$	$\boxed{8n^4fgy^2\beta}$	$+8n^2fcyz\beta^2$
$\underline{6n^4e^2y\beta^5}$	$4n^4efy^3\beta^2$	$\boxed{8n^4ehy^3}$	$-\ 4n^2ec^2y^3\beta^2$	$\underline{4n^4fgy[\beta^2]}$	$\underline{+4n^2fcz\beta^3}$
$\underline{\underline{n^4e^2\beta^6}}$	$6n^4efy^2\beta^3$	$\boxed{12n^4ehy^2\beta}$	$-\ 6n^2ec^2y^2\beta^3$	$\boxed{4n^4fgy^2\beta}$	$-4n^2c^2fy^2\beta^2$
	$6n^4efy\beta^4$	$\boxed{12n^4ehy\beta^2}$	$-\ 6n^2ec^2y\beta^4$	$4n^4fgy\beta^2$	$-4n^2c^2fy\beta^3$
	$\underline{\underline{[2]n^4ef\beta^5}}$	$\underline{\underline{\boxed{4n^4eh\beta^3}}}$	$\underline{\underline{-\ 2n^2ec^2\beta^5}}$	$\underline{\underline{2n^4fg\beta^3}}$	$\underline{\underline{\underline{-2n^2c^2f\beta^4}}}$

$\boxed{4n^4g^2y^2}$	$\underline{\boxed{4n^4h^2}}$	z^4
$\boxed{4n^4g^2y\beta}$	$-4n^2hz^2$	$-4z^3c\beta$
$\underline{\underline{n^4g^2\beta^2}}$	$+8n^2hcz\beta$	$\underline{+2z^2c^2\beta^2}$
$\boxed{8n^4ghy}$	$\underline{\underline{\underline{-4n^2hc^2\beta^2}}}$	$4c^2\beta^2z^2$
$\underline{\underline{\boxed{4n^4gh\beta}}}$		$\underline{-4c^3\beta^3z}$
$-4n^2gyz^2$		$+\beta^4c^4$
$\underline{-2n^2g\beta z^2}$		
$+8n^2cgyz\beta$		
$\underline{+4n^2cgz\beta^2}$		
$-4n^2c^2y\beta^2$		
$\underline{\underline{\underline{-2n^2c^2g\beta^3}}}$		

9 β^3 *L ändert Hrsg.* 12 2 *erg. Hrsg.*

Unde patet omnes terminos irrationales evanescere post quadrationem.

Et habetur tabula generalis serierum, et si omnia per β^2 et ultra multiplicata destruantur, figurarum quadrabilium, quae variant, pro varia explicatione cognitarum.

Termini pro figuris geometriae excerpti sequenti plagula parte schediasmatis huius quarta continebuntur. Omittendi et in quibus z. ascendit ultra quadratum.

Retinendi termini z^2. β^2. $z\beta$. NB. caeteris omnibus reiectis.

2 et ultra *erg. L* 5 ascendit *(1)* ad *(2)* ultra *L*

38_5. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS QUARTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 8–9. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 7 v° verworfene Nebenbetrachtung. 2/5 S.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Pars IV$^{\text{ta}}$ schediasmatis de seriebus et summis quadraturisque.

Ex tabula proposita excerpantur iam termini geometrici. Nullus autem reperitur terminus in quo sit z. simplex sine β. et β. simplex sine z: Ideo retentis terminis $z^2, \beta^2, z\beta$. caeteri omnes reiciantur, et pro β. substituatur a, velut unitas, vel etiam β^2, plane ascribi negligatur, fiet:

$$\left.\begin{array}{l} 9n^4e^2y^4 + 12n^4efy^3 + 6n^4egy^2 - 4n^2ec^2y^3 + 4n^4f^2y^2 \left\{\begin{array}{l} +[8]n^4fgy \\ -\,4\,n^2c^2gy \end{array}\right. - 4n^2c^2fy^2 \\ {[-4n^2ec^2y^3]} - 4n^2fz^2y^2 - 4n^2gyz^2 - 4n^2hz^2 + 8n^2cey^3z + 8n^2fcy^2z \\ +8n^2cgyz + 8n^2hcz + n^4g^2 - 4n^2hc^2 \end{array}\right\} \sqcap 0. ☽$$

Quod si iam ponamus $e \sqcap 0$. evanescet y^4. et y^3. et ponendo praeterea $n^4g^2 - 4n^2hc^2 \sqcap 0$. restabit:

$$4n^4f^2y^2 + \begin{array}{l}[8]n^4fg\,y \\ -\,4\,n^2c^2g..\end{array} - 4n^2c^2fy^2 - 4n^2fz^2y^2 - 4n^2gyz^2 - 4n^2hz^2 + 8n^2fcy^2z + 8n^2cgyz +$$

$8n^2hcz$. cui formulae rursus quaedam adimere possemus, ut ponendo $4n^4f^2y^2 - 4n^2fz^2y^2 \sqcap 0$. nullus restabit terminus y^2. Si vero potius f. ponas $\sqcap 0$. fiet:

$-4n^2c^2gy - 4n^2gyz^2 - 4n^2hz^2 + 8n^2cgyz + 8n^2hcz$. cuius figurae quadratrix erit:

$$cy + \sqrt{gy + \frac{g^2}{4c^2}} \sqcap x.$$

6 geometrici *(1)*, restabit: *(2)*. Nullus *L* 8 reiciantur, *(1)* ita fiet: *(2)* et *L* 8 unitas, *(1)* habebimus: *(2)* vel *L* 10 4 *L ändert Hrsg.* 11 $+4n^4ez^2y^3$ *L ändert Hrsg.* 11 ☽ *erg. L* 15 4 *L ändert Hrsg.* 18 f. fiet: *(1)* $-4n^2gyz^2 - 4n^2hz^2 + 8n^2cgyz + 8n^2hcz$. et divisis omnibus per $4n^2z$, restabit: $-gyz - hz + 2cgy + 2hc \sqcap 0$. quae aequatio est ad hyperbolam, et quia *(a)* g^2, posuimus *(b)* h posuimus $\sqcap \frac{g^2}{4c^2}$, substituendo eius valorem: fiet $-\cancel{g}yz - \frac{g^{\cancel{2}}}{4c^2}z + 2c\cancel{g}y + \frac{2g^{\cancel{2}}}{4c} \sqcap 0$. Unde si nullus insit error calculo habebitur quadratura hyperbolae. *(2)* $-4n^2c^2gy$ *L*

11 ☽: Von hier Verweisstrich zu S. 420 Z. 1 – S. 422 Z. 2. 19 quadratrix: Leibniz setzt wie in der Lesart zu Z. 18 f. $h = \frac{g^2}{4c^2}$ sowie $n = 1$.

Quod an verum sit statim examinare possumus. Nam differentia duarum x, erit:

$$\boxed{cy} + c\beta + \sqrt{gy + g\beta + \frac{g^2}{4c^2}}\,\boxed{-cy} - \sqrt{gy + \frac{g^2}{4c^2}} \sqcap z.$$

Unde $2gy + g\beta + \frac{2g^2}{4c^2}\boxed{+gy}\boxed{+\frac{g^2}{c^2}} - z^2 + 2c\beta z - c^2\beta^2 \sqcap 2\sqrt{\boxed{g^2y^2}\boxed{+g^2\beta\ y}\boxed{+\frac{g^3\beta}{4c^2}}\left[\boxed{+\frac{2g^3}{4c^2}}\,..\,\boxed{+\frac{g^4}{16c^4}}\right]}$

$$\sqcap - \frown \left\{ \begin{array}{lll} [z] & \frown 1,\square,, & +2gy + g\beta. \\ -[c\beta] & & \frac{2g^2}{4c^2} \end{array} \right.$$

Et quadrando posterior aequationis pars dabit:

$$\begin{array}{lllll} \cancel{z^4} - \cancel{4z^3c\beta} + \cancel{6z^2c^2\beta^2} - \cancel{4zc^3\beta^3}\cancel{+c^4\beta^4}, & -4gy \frown & z^2 & \cancel{-2g\beta} \frown & z^2 \\ & & -2c\beta z & & \cancel{-2c\beta z} \\ & & +c^2\beta^2 & & \cancel{+c^2\beta^2} \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} -\frac{4g^2}{4c^2} \frown & z^2 & \boxed{+4g^2y^2} & \boxed{+4g^2\beta\ y} & +g^2\beta^2\,; \\ & -2c\beta z & & \boxed{+8\frac{g^3}{[4]c^2}..} & \boxed{+4\frac{g^3\beta}{[4]c^2}} \\ & +c^2\beta^2 & & & \boxed{+\frac{4g^4}{[16]c^4}} \end{array}$$

et delendo $+g^2\beta^2 - \frac{4g^2}{4c^2} \frown c^2\beta^2$. quae figura est rationalis simul ac quadrabilis et dabit: $y \sqcap \frac{-\frac{g^2}{c^2}z^2 + \frac{2g^2}{c}z}{z - c,\square,, \frown [4g]}$, et [dividendo] per $\frac{g^2}{c} \smile [4g]$. fiet $y \sqcap \frac{-\frac{z^2}{c} + 2z}{z - c,\square}$, et multiplicando

4 $\boxed{+\frac{2g^2}{c^2}}\,..\,\boxed{+\frac{g^4}{4c^4}}$ *L ändert Hrsg.* 5 z^2 *L ändert Hrsg.* 6 $c\beta z$ *L ändert Hrsg.* 12 4 *erg. Hrsg. zweimal* 13 16 *erg. Hrsg.* 14 delendo *(1)* $+g^2\beta^2$, contra *(2)* $+g^2\beta^2 - \frac{4g^2}{4c^2} \frown c^2\beta^2$ *(a)* divisisque omnibus *(b)*. quae *L* 15 $-4g$ *L ändert Hrsg. zweimal* 15 multiplicando *L ändert Hrsg.*

per c, fiet: $y \sqcap \dfrac{-z^2+2cz}{z-c,\square}$, auferatur $\dfrac{c^2}{z-c,\square}$, quae figura est quadrabilis. Iam quadrabilis addita quadrabili dat quadrabilem, erit ergo quadrabilis: $y \sqcap \dfrac{-z^2+2cz-c^2}{z-c,\square}$, et fit $y \sqcap -1$. Unde patet nos nihil magnopere egisse quadrando hanc figuram cum sit hyperbola cubica. Calculi interea veritatem quodammodo comprobavimus.

Aliam eodem plane modo formulam fieri operae pretium est pro seriebus irrationali carentibus, sed contra habentibus fractionem; ubi hoc etiam commodi habebimus, quod litera z. non assurget ultra simplicem exponentem.

$$\left.\begin{array}{ll}
-\;cy^4-\;dy^3-\;ey^2-fy-g,\smile & hy^4+\;ly^3+\;my^2+ny+p \\
+\;cy^4+\;dy^3+\;ey^2+fy+g\;\smile & hy^4+\;ly^3+\;my^2+ny+p
\end{array}\right\} \sqcap z.$$

$$\begin{array}{ll}
4\,c\beta y^3+\,3d\beta y^2+2e\beta y\;+f\beta & 4h\beta y^3+\,3l\beta y^2+2m\beta y\;+n\beta \\
6c\beta^2y^2+3d\beta^2y\;+e\beta^2 & 6h\beta^2y^2+3l\beta^2y\;+m\beta^2 \\
4c\beta^3y\;+\;d\beta^3 & 4h\beta^3y\;+\;l\beta^3 \\
+c\beta^4 & +\;h\beta^4
\end{array}$$

Et multiplicando per crucem, fiet:

$$\begin{array}{ccccc}
chy^8 & cly^7 & cmy^6 & cny^5 & cpy^4 \\
4ch\beta y^7 & 4cl\beta y^6 & 2\,4cm\beta y^5 & 3\,4cn\beta y^4 & 4cp\beta y^3 \\
6ch\beta^2y^6 & 6cl\beta^2y^5 & 3\,6cm\beta^2y^4 & 6cn\beta^2y^3 & 6cp\beta^2y^2 \\
4ch\beta^3y^5 & 4cl\beta^3y^4 & 4cm\beta^3y^3 & 4cn\beta^3y^2 & 4cp\beta^3y \\
ch\beta^4y^4 & cl\beta^4y^3 & cm\beta^4y^2 & cn\beta^4y & cp\beta^4 \\
\hline
\boxed{dhy^7} & \boxed{dly^6} & \boxed{dmy^5} & \boxed{dny^4} & \boxed{dpy^3} \\
\boxed{3dh\beta y^6} & \boxed{3dl\beta y^5} & 3dm\beta y^4 & 2\,3dn\beta y^3 & 3dp\beta y^2 \\
\boxed{3dh\beta^2y^5} & 3dl\beta^2y^4 & 3dm\beta^2y^3 & 3dn\beta^2y^2 & 3dp\beta^2y \\
dh\beta^3y^4 & dl\beta^3y^3 & dm\beta^3y^2 & dn\beta^3y & dp\beta^3 \\
\hline
\boxed{ehy^6} & \boxed{ely^5} & \boxed{emy^4} & \boxed{eny^3} & \boxed{epy^2} \\
\boxed{2eh\beta y^5} & \boxed{2el\beta y^4} & 2\boxed{em\beta y^3} & 2en\beta y^2 & 2ep\beta y
\end{array}$$

1 $\dfrac{-\mathrm{z}^2+2\mathrm{cz}}{\mathrm{z}-\mathrm{c},\square}$, *(1)* et mutatis signis: $\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{z}\frown\mathrm{z}-\mathrm{c}}{\mathrm{z}-\mathrm{c},\square}$. Ergo $\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{z}-\mathrm{c}}$: *(2)* addatur *(3)* auferatur *L*

3 f. cum ... cubica *erg. L*   5 pro *(1)* curvis ratio *(2)* seriebus *L*

$eh\beta^2y^4$	$el\beta^2y^3$	$em\beta^2y^2$	$en\beta^2y$	$ep\beta^2$
$\boxed{fhy^5}$	$\boxed{fly^4}$	$\boxed{fmy^3}$	$\boxed{fny^2}$	$\boxed{fpy}$
$fh\beta y^4$	$\boxed{fl\beta y^3}$	$\boxed{fm\beta y^2}$	$\boxed{fn\beta y}$	$fp\beta$
$\boxed{ghy^4}$	$\boxed{gly^3}$	$\boxed{gmy^2}$	$\boxed{gny}$	$\boxed{gp}$
$-\ hcy^8$	$-\ hdy^7$	$-\ hey^6$	$-\ hfy^5$	$-\ hgy^4$
$-\ 4hc\beta y^7$	$-\ 4hd\beta y^6$	$-\ 2\,4he\beta y^5$	$-\ 4hf\beta y^4$	$-\ 4hg\beta y^3$
$-\ 6hc\beta^2y^6$	$-3\,6hd\beta^2y^5$	$-\ 6he\beta^2y^4$	$-\ 6hf\beta^2y^3$	$-6hg\beta^2y^2$
$-\ 4hc\beta^3y^5$	$-3\,4hd\beta^3y^4$	$-\ 4he\beta^3y^3$	$-\ 4hf\beta^3y^2$	$-4hg\beta^3y$
$-\ hc\beta^4y^4$	$-\ hd\beta^4y^3$	$-\ he\beta^4y^2$	$-\ hf\beta^4y$	$-\ hg\beta^4$
$-\ lcy^7$	$-\ ldy^6$	$-\ ley^5$	$-\ lfy^4$	$-\ lgy^3$
$-\ 3lc\beta y^6$	$-\ 3ld\beta y^5$	$-\ 3le\beta y^4$	$-\ 2\,3lf\beta y^3$	$-\ 3lg\beta y^2$
$-\ 3lc\beta^2y^5$	$-\ 3ld\beta^2y^4$	$-\ 3le\beta^2y^3$	$-\ 3lf\beta^2y^2$	$-\ 3lg\beta^2y$
$-\ lc\beta^3y^4$	$-\ ld\beta^3y^3$	$-\ le\beta^3y^2$	$-\ lf\beta^3y$	$-\ lg\beta^3$
$-\ mcy^6$	$-\ mdy^5$	$-\ mey^4$	$-\ mfy^3$	$-\ mgy^2$
$-\ 2mc\beta y^5$	$-\ 2md\beta y^4$	$-\ 2me\beta y^3$	$-\ \boxed{2}mf\beta y^2$	$-\ 2mg\beta y$
$-\ mc\beta^2y^4$	$-\ md\beta^2y^3$	$-\ me\beta^2y^2$	$-\ mf\beta^2y$	$-\ mg\beta^2$
$-\ ncy^5$	$-\ ndy^4$	$-\ ney^3$	$-\ nfy^2$	$-\ ngy$
$-\ nc\beta y^4$	$-\ nd\beta y^3$	$-\ ne\beta y^2$	$-\ nf\beta y$	$-\ ng\beta$
$-\ pcy^4$	$-\ pdy^3$	$-\ pey^2$	$-\ pfy$	$-\ pg$

Dividenda per factum ex duobus denominatoribus:

h^2y^8	lhy^7	mhy^6	nhy^5	phy^4
$4h^2\beta y^7$	$4lh\beta y^6$	$4mh\beta y^5$	$4nh\beta y^4$	$4ph\beta y^3$
$6h^2\beta^2y^6$	$6lh\beta^2y^5$	$6mh\beta^2y^4$	$6nh\beta^2y^3$	$6ph\beta^2y^2$
$4h^2\beta^2y^5$	$4lh\beta^3y^4$	$4mh\beta^3y^3$	$4nh\beta^3y^2$	$4ph\beta^3y$
$h^2\beta^4y^4$	$lh\beta^4y^3$	$mh\beta^4y^2$	$nh\beta^4y$	$ph\beta^4$
hly^7	l^2y^6	mly^5	nly^4	ply^3
$3hl\beta y^6$	$3l^2\beta y^5$	$3ml\beta y^4$	$3nl\beta y^3$	$3pl\beta y^2$
$3hl\beta^2y^5$	$3l^2\beta^2y^4$	$3ml\beta^2y^3$	$3nl\beta^2y^2$	$3pl\beta^2y$

$$\begin{array}{rrrrr}
\underline{hl\beta^3y^4} & \underline{l^2\beta^3y^3} & \underline{ml\beta^3y^2} & \underline{nl\beta^3y} & \underline{pl\beta^3} \\
hmy^6 & lmy^5 & m^2y^4 & nmy^3 & pmy^2 \\
2hm\beta y^5 & 2lm\beta y^4 & 2m^2\beta y^3 & 2nm\beta y^2 & 2pm\beta y \\
\underline{hm\beta^2y^4} & \underline{lm\beta^2y^3} & \underline{m^2\beta^2y^2} & \underline{nm\beta^2y^3} & \underline{pm\beta^2} \\
hny^5 & lny^4 & mny^3 & n^2y^2 & pny \\
\underline{hn\beta y^4} & \underline{ln\beta y^3} & \underline{mn\beta y^2} & \underline{n^2\beta y} & \underline{pn\beta} \\
hpy^4 & lpy^3 & mpy^2 & npy & p^2
\end{array}$$

Unde iam excerpendo eas tantum quantitates, quae ad figuras geometricas notandas servire possint, et proinde abiectis illis omnibus in numeratore, in quibus $\beta.$ assurgit ad quadratum et ultra, et abiectis omnibus in nominatore in quibus est β, fiet formula reformata $\odot$.

$$\left.\begin{array}{ccccccccc}
 & cly^6 & +2cm\,y^5 & 3nc\,y^4 & 4cp\,y^3 & & & & \\
 & -hd\,.. & & dm\,.. & 2dn.. & 3dpy^2 & & & \\
 & & -2he\,\,.. & -el\,.. & * & en.. & 2epy & & \\
 & & & [-3fh..] & -2fl\,.. & -mf.. & * & fp & \\
 & & & & -4gh.. & -3gl\,.. & [-]2gm\,.. & [-]ng & \\
\hline
h^2y^8 & 2\,hl\,\,y^7 & 2hmy^6 & 2hny^5 & 2hpy^4 & & & & \\
 & & l^2.. & 2lm.. & 2ln\,.. & 2pl\,\,y^3 & & & \\
 & & & & m^2\,\,.. & 2mn\,.. & 2mpy^2 & & \\
 & & & & & & n^2.. & 2npy & \\
 & & & & & & & & p^2
\end{array}\right\} \sqcap z.\ \odot$$

12–21 Nota huius seriei progressus in numeratore multipli ipsarum $c.\,d.\,e.\,f.\,g.$ per numeros arithmeticae progressionis multiplicati sunt, v. g. multipli ipsius $e.$ per $-2-1$ ǂ $0+1+2$.
Videndum an inde regula duci possit, quae serviat ad regressum item, an etiam ad series arithmeticas quiddam tale applicare liceat, quia illis regula Slusiana accommodari non potest.

9 omnibus | in *(1)* denominatore *(2)* numeratore *erg.* |, in *L* 10 ultra, *(1)* fiet *(a)* regula reformat *(b)* formula reformata $\odot$ *(2)* et *L* 15 −3fh.. *erg. Hrsg.* 16 − *erg. Hrsg. zweimal*

Figurae ergo omnes, quarum aequatio ex cognitarum huius formulae generalis explicatione nasci potest, quadrari possunt. Possunt autem explicationes ita institui, ut numerator et nominator per divisores communes deprimantur.

Sed et termini quidam literaeve quaedam possunt poni nihilo aequales vel quantitati datae. Si e. g. ponas h, et l et $c \sqcap 0$. et $m \sqcap 0$. [fiet:]

$$\frac{\begin{array}{lllll} \boxed{dmy^4} + 2dny^3 + & 3dp & y^2 & + \ 2ep \ y & fp \\ & & en & .. \ \boxed{[-]2gm} & .. [-ng] \\ & \boxed{+ \ mf} & .. & & \end{array}}{n^2y^2 + 2npy + p^2} \sqcap z.$$

Tentandum ergo an ita explicari possit numerator iste, ut dividi possit per $ny + p$, quo dividi potest nominator,

---

9 NB. quando geometrice quaeruntur differentiae, semper notandum est in denominatore differentiae, sumendum tantum nominatoris figurae cuius differentiae sunt quadratum.

1 omnes, *(1)* quae huius formul *(2)* quarum *L* 1 f. explicatione *(1)* fieri *(2)* nasci *L* 5–9 et l *(1)* ⊓ 0. *(2)* et c ⊓ 0. *(a)* fiet: *(b)* et m ⊓ 0. | fiet: *erg. Hrsg.* | ... ⊓ z. *L* 7 + *L ändert Hrsg.* 7 $\boxed{\text{ng}}$ *L ändert Hrsg.* 14 nominatoris *erg. L*

415,26 regula Slusiana: s. *An Extract of a Letter from the Excellent Renatus Franciscus Slusius*, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/1673 S. 5143–47 (Nachtrag in VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059). Leibniz hat einen Auszug aus diesem Artikel angefertigt, *Methodus ducendi tangentes ad omnis generis curvas* (Cc 2, Nr. 616). 5 Si . . . ponas: Leibniz vereinfacht in zwei Schritten. Im ersten setzt er $h = l = c = 0$ und schreibt die Gleichung an. Im zweiten setzt er auch $m = 0$ und umrahmt die zu eliminierenden Terme.

$$2\cancel{dny^3}+3\cancel{dpy^2} \quad +\cancel{2epy} \quad fp \quad ⨍ \quad 2dy^2\,\frac{\begin{cases}+3dpy\\ +\;en..\\ \boxed{-\;2dp..}\end{cases}}{n} \quad \frac{\begin{cases}+2epn\\ -\;dp^2\\ \boxed{-\;enp}\end{cases}}{n^2}$$

$$\cancel{+\;en..} \qquad [-]ng$$

$$\boxed{\dfrac{ny+p}{2\cancel{dny^3}+2\cancel{dpy^2}}}$$

$$+\cancel{2dp}..$$

$$-\cancel{2dp}..$$

$$\boxed{\dfrac{ny+\quad p}{\begin{matrix}\cancel{3dpy^2}\\ +\;\cancel{en}..\\ -\cancel{2dp}..\end{matrix}\quad \dfrac{\begin{cases}3\;\cancel{dp^2y}\\ \cancel{+enp}..\\ \boxed{-\;2dp^2..}\end{cases}}{n}}}$$

$$\frac{\begin{cases}+\;\cancel{dp^2y}\\ \cancel{+enp}..\end{cases}}{\cancel{n}}$$

$$\cancel{\frac{\begin{cases}-\;dp^2..\\ -\;enp..\end{cases}}{n}}$$

$$\frac{ny \qquad + \qquad p}{\cancel{\dfrac{\begin{cases}epn..\\ dp^2..\end{cases}}{n}} \qquad \dfrac{\begin{cases}ep^2n\\ -\;dp^3\end{cases}}{n^2}}$$

Unde iam patet ut divisio exacte procedere possit, tantum poni debere

2 – *erg. Hrsg.*

1–21 Leibniz markiert die Streichungen im zweiten Rechenschritt teilw. mit hier nicht wiedergegebenen Zählstrichen.

$f\ p \sqcap \dfrac{ep^2n - dp^3[+]n^3g}{n^2p}$ et fiet: $\dfrac{\begin{array}{c}2dn^2y^2 + dpn\,y + epn\\ + en^2\ ..\ - dpp\end{array}}{[n^2, \frown\ ny + p]} \sqcap z$. Quae aequatio est ad hyperbolam, siquidem ulterius deprimi non potest, quod superest ut experiamur, hoc modo:

$$\begin{array}{llll}
2dn^2y^2 & dpn\,y & epn & \qquad +2dny + dp + en - 2dp\\
 & en^2\ .. & -dp^2 & \\
\hline
\boxed{ny\ +\ \ p} & & & \\
 & -\,2dnp\ .. & & \\
 & \boxed{\begin{array}{r} n\,y + \qquad p\\ \hline -dp^2\\ -enp\\ +2dp^2\end{array}} & &
\end{array}$$

2 f p $\sqcap$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{ep^2n - dp^3}}{\mathrm{n^2p}}$, sive fn $\sqcap$ en−dp sive f $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{en - dp}}{\mathrm{n}}$ et fiet: 2dy²+ *(2)* $\dfrac{\mathrm{ep^2n - dp^3}|\ -\ \textit{ändert Hrsg.}\ |\mathrm{n^3g}}{\mathrm{n^2p}}$ *(a)* et ponendo e *(b)* et *L* 2 n²y + p *L ändert Hrsg.* 4 +en *(1)* −2dnp *(2)* −2dp *L* 11 *(1)* +2dnp² *(2)* +2dp² *L*

Unde patet divisionem procedere et fieri aequationem ad lineam rectam, quare nihil inde pro hyperbola duci potest.

---

1 *Kontrollbetrachtung zur Lesart, nicht gestrichen*:

Methodo Slusii $3dy^2t + 2eyt\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l} enp^2\ t\ \boxed{+\,g} \\ -\ \ dp^3\,.. \\ +\,n^2g\ \ .. \end{array}\right.}{np} \sqcap my^2x + nyx + px$

ponendo t. intervallum tangentis ab ordinata. Iam ut t ad x, ita β ad z. Erit $z \sqcap \dfrac{tx}{\beta}$.

Iam $t \sqcap \dfrac{my^2x + nyx + px}{3dy^2 + 2ey\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l} +enp^2 \\ -dp^3 + n^2g \end{array}\right.}{np}}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{my^2x^2 + nyx^2 + px^2}{3dy^2 + 2ey\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l} +enp^2 \\ -dp^3 + n^2g \end{array}\right.}{np}}$. pro x. ponendo

eius valorem $x \sqcap \dfrac{dy^3 + ey^2\,\dfrac{\left\{\begin{array}{l} enp^2\,y \ \ +\ \ g \\ -\ \ dp^3\,.. \\ +\,n^2g\ \ .. \end{array}\right.}{n}}{my^2 + ny + p}$.

Sed haec quo minus fallamur summa cum exactitudine resumi operae pretium est.

1 divisionem *(1)* universaliter non procedere, nisi sit aequatio inter $-\mathrm{dp}^2$ et $\mathrm{dp}^2 - 2\mathrm{dnp}^2$ seu inter 1 et n. Quodsi ergo nullus inest error calculo, sequetur hinc absoluta hyperbolae quadratura. Quod facile experiri licet methodo Slusii. *(2)* procedere *L* 8 ponendo ... ad z. *erg. L*

---

4 Methodo Slusii: s. o. Erl. zu S. 415 Z. 26. — Leibniz vergißt auf der linken Seite der Tangentengleichung die Terme $-2mxyt - nxt$ und übersieht außerdem, daß er zuvor bereits $m = 0$ gesetzt hat. In Z. 7 müßte $z = \dfrac{\beta x}{t}$ stehen, der Fehler beeinträchtigt die weitere Kontrollrechnung zusätzlich. Ab Z. 8 wird β als „unitas constructionis“ gleich 1 gesetzt; vgl. S. 411 Z. 8. Leibniz bricht schließlich ab und nimmt die Betrachtung in N. 38_7 S. 432 Z. 10 wieder auf.

Tentandum an aequatio ad ellipsin vel hyperbolam $-2az \mp \frac{a}{b}z^2 + y^2, \sqcap 0.$ per aliam

---

1 *Nebenbetrachtung zur Lesart, nicht gestrichen*: $y^2 + z^2 - 2az \sqcap 0.$ ducatur in $\frac{p}{a}y + qz + r.$

1–421,3 *Nebenbetrachtung auf Bl. 7 v°, verworfen*:
Nihil deest.
$a^2 + \frac{a}{b}\omega^2 \sqcap z^2$. Ergo $p^2 \sqcap a^2 + \frac{a}{b}\omega^2 + v^2$ vel $v^2 + \frac{a}{b}\omega^2 \begin{array}{l} +a^2 \\ -p^2 \end{array} \sqcap 0.$ et faciendo

$$v \sqcap x + c, \text{ et } \omega \sqcap y + d. \text{ fiet: } x^2 + 2cx + \boxed{c^2} + \frac{a}{b}y^2 + \frac{2a}{b}dy \boxed{+\frac{a}{b}d^2} + \begin{array}{l} a^2 \\ -p^2 \\ +c^2 \\ +\frac{a}{b}d^2 \end{array} \sqcap 0.$$

Multiplicetur haec aequatio per aliam, scilicet per $x + \frac{r}{a}y - s \sqcap 0.$ fiet:

$$\frac{r}{b}y^3 + x^3 + \frac{r}{a}x^2y + \frac{a}{b}y^2x + 2cx^2 + \frac{2rd}{b}y^2 + \frac{2ad}{b}xy \qquad \sqcap 0.$$

$$\begin{array}{ccc} -\ s.. & -\frac{a}{b}s\ .. & \frac{2rc}{a}.. \end{array}$$

$$a\odot\left\{\begin{array}{l} +\ a^2x \\ -\ p^2.. \\ +\ c^2.. \\ +\frac{a}{b}d^2.. \end{array}\right. \qquad r\odot\left\{\begin{array}{l} \quad ray \\ -\ \frac{r}{a}\ p^2.. \\ +\ \frac{r}{a}\ c^2.. \\ +\ \frac{r}{b}\ d^2.. \end{array}\right. \qquad \odot as\left\{\begin{array}{l} -\ sa^2 \\ +\ sp^2 \\ -\ sc^2 \\ -\frac{sa}{b}d^2 \end{array}\right.$$

$$-\ 2cs.. \qquad -\frac{2a}{b}ds\ ..$$

1 ad *(1)* circulum $2az - z^2$ *(2)* ellipsin *L*

---

1 Tentandum: Von hier Verweisstrich auf die Gleichung ☽ S. 411 Z. 10–12. — Vgl. auch *Schediasma de superficiebus conoeidum et sphaeroeidum. Item de curva ellipsis et hyperbolae* (Cc 2, Nr. 773), datiert 3. Okt. 1674.

quandam multiplicata, qualis est py^2+qy+s, reddi possit similis propositae formulae generali ☽, fiet enim

$$+\,py^4 \mp \frac{pa}{b}y^2z^2 - 2apzy^2 + qy^3 \mp \frac{aq}{b}yz^2 - 2aqyz + sy^2 \mp \frac{a}{b}sz^2 - 2azs \sqcap 0.$$

Sed video addendum esse $+y^3$. et aequationem ad hyperbolam vel ellipsin ponendam esse completam: $y^2+bz^2+cz+dy+e \sqcap 0$. ducendam in $ty^3, +\,py^2+qy+rz+s+\omega yz$. Sed quia ita inevitabiliter prodit ty^5, quae in formula generali non reperitur, ideo necesse est formulam generalem multiplicari per $ly+mz+n$. Sed cum semper quaedam difficultates sint obstiturae, ideo multiplicata formula generali per $ly+mz+n$. ut loca eius quantum licet repleantur; particularis ad conicam datam, multiplicanda erit per formulam completam; unde sub exitum calculi statim apparebit, quae elidi possint aut conferri.

Esto $x \sqcap \dfrac{bv^2}{a^2 \mp v^2}$, sive $a^2x \mp v^2x - bv^2 \sqcap 0$, explicatis x et v, et aequatione proveniente, multiplicata per $ly+mz+q+\omega yz$.

Prior autem explicata stabit: $a^2z \mp y^2z + byz + cy^2 + dy + e \sqcap 0$. quae ducta in $ly+mz+q+pyz$, dabit terminos omnes praeter y^4.

Generaliter omnes figurae quarum aequationes aut earum multipli, formulae huic aut eius multiplo aequari possunt sunt quadrabiles.

Exemplo etiam opus est formulae pro figuris aequationum affectarum quadrandis.

Ope formulae ☽, sed ipsis β^3 etc. nondum expunctis, haberi potest modus quo summae haberi possunt numerorum irrationalium finitorum pariter atque infinitorum, quod hactenus potuit nemo.

Inquirendum est in methodum similem a priori sive per synthesin, cuius ope appareat quaenam series habeant differentias in fine exhaustas, differentias inquam vel differentias differentiarum cuiuscunque gradus. Sane manifestum est ultimam differentiam esse rectangulo homogeneam. Ergo penultima, erit triangulo, antepenultima, parabolae, et

2 ☽ *erg.* *L* 7 +n. *(1)* quo facto *(2)* Sed *L* 12 et v, *(1)* ductisque omnibus in *(2)* ductaque *(3)* et *L* 17 f. quadrabiles. *(1)* Exemplum etiam opus est sive formulae pro aequationibus affectis quadrandis. Ope seriei ☽ habentur *(2)* Exemplo *L* 25 Ergo *(1)* praecedens erit *(2)* penultima *L*

22 Inquirendum: Die folgende Überlegung wird in N. 38₇ ab S. 434 Z. 6 wieder aufgenommen, das Schema S. 422 Z. 3–17 wird in erweiterter Form wiederholt.

caeterae paraboloeidibus, patet ergo hoc fieri non posse nisi in iis quae procedunt per potestates.

$$\begin{array}{ccccc}
E & & & & \\
a & & & & \\
 & F & & & \\
 & a-b & & & \\
M & & G & & \\
b & & a-2b+c & & \\
 & N & & H & \\
 & b-c & & a-3b+3c-d & \\
 & & P & & L \\
c & & b-2c+d & & a-4b+6c-4d+e \\
 & & & Q & \\
 & c-d & & b-3c+3d-e & \\
d & & c-2d+e & & \\
 & d-e & & & \\
e & & & &
\end{array}$$

Iam si ponamus ipsam seriem primarum differentiarum $E.\ F.\ G.\ H.\ L.$ procedere per potestates, videndum quales inde oriantur series, ut si series:

$$a \quad a-b \quad a-2b+c \quad a-3b+3c-d \quad a-4b+6c-4d+e \text{ etc.}$$

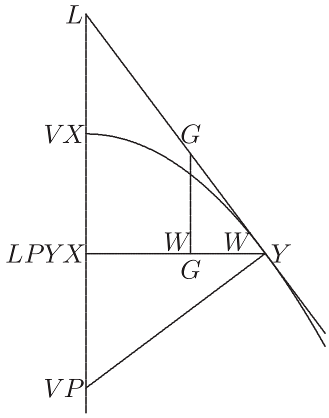
ponatur esse progressionis arithmeticae, ut sit $a, -, a-b$ $b \sqcap a-b, -a+2b-c$, fiet $c \sqcap 0$. ac proinde ista non procedunt in progressionibus decrescentibus puto tamen in ascendentibus. a ademta ab $a+b$, relinquit b, $a+b$ ademta ab $a+2b+c$, relinquit $b+c$. atqui non potest esse $b \sqcap b+c$. fiet enim rursus $c \sqcap 0$. Ideoque ista non procedunt: $a-a+b \sqcap b$. $a-b, -a+2b-c \sqcap b-c$. $a\ -2b\ +c\ -a + 3b - 2\,3c + d \sqcap b-2c+d$. Unde patet differentias seriei $E.\ F.\ G.\ H.\ L.$ esse seriem $M.\ N.\ P.\ Q.$

38_6. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS QUARTA BIS

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 10–11. 1 Bog. 2°. 3 S. u. 4 Z. auf Bl. 11 v°. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

P a r s q u a r t a s c h e d i a s m a t i s d e s e r i e b u s e t s u m m i s q u a d r a t r i c i b u s .

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

Si in figura praesenti, curva X, Y ponatur esse parabola, cuius axis sit X, PYX, P, et aequatio: $2ax \sqcap y^2$. fiet: $2al \sqcap 2y^2$, aut $al \sqcap y^2$, aut $l \sqcap \dfrac{y^2}{a}$, aut $l \sqcap 2x$. et quia $pl \sqcap y^2$, erit $2px \sqcap y^2$, aut $2px \sqcap 2ax$, aut $p \sqcap a$.

Quid si iam propositum sit, investigare figuram in qua p, sit recta constans, a. ponendo $X, P \sqcap v$. erit $p \sqcap v - x \sqcap a$. fiet: $v^2 - 2vx + x^2 \sqcap a^2 \sqcap p^2$, et $y^2 \sqcap s^2 - a^2$. vel

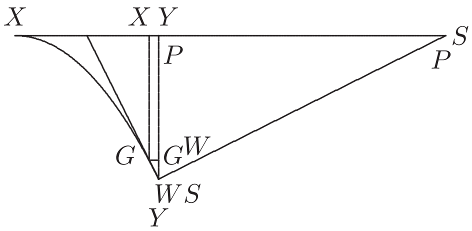
12 f. constans, a. *(1)* vocando X, P, *(2)* ponendo *L*

5 P a r s q u a r t a : Zählung wiederholt sich.

$y^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2 + s^2$. Haec novissima aequatio determinanda est ad duas radices aequales utriusque incognitae x. et s. Inde pro s. habebitur eius valor. Et vero id est in quaestione, an ab ista aequatione generali curvis omnibus communi inchoari possit calculus, eaque determinari ad duas utriusque incognitae radices aequales. Id vero fieri posse non puto.

Quando ergo quaestiones adeo simplices proponuntur, ut sint ne tractabiles quidem, mutandae sunt in compositiores. Porro $\dfrac{l}{y}$ seu $\dfrac{2x}{\sqrt{2ax}}$ est $\sqcap \dfrac{g}{w}$. Ergo $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{2x}$. sive $w^2 \sqcap \dfrac{2ax[\beta^2]}{4x^2}$, sive $w^2 \sqcap \dfrac{a\beta^2}{2x}$, sive pro w. ponendo z, figura ipsis w. homogenea erit: $2z^2x \sqcap a^3$.

Quod si iam quaeramus figuram, in qua w. valeat $\dfrac{\beta\sqrt{2ax}}{2x}$. seu $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{2x} \sqcap \dfrac{y}{l}$. Ergo $\dfrac{2ax}{4x^2} \sqcap \dfrac{y^2 \sqcap pl}{l^2}$. Unde $\dfrac{a}{2x} \sqcap \dfrac{p}{l}$. Sed satis ex his patet alia opus esse arte, ad regressum.



[*Fig. 2*]

8 β^2 *erg. Hrsg.* 10 $\dfrac{\beta\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x}}$. *(1)* erit $\dfrac{\mathrm{l}}{\mathrm{y}} \sqcap \dfrac{\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x}}$. sive $2\mathrm{xl} \sqcap \mathrm{y}\sqrt{2\mathrm{ax}}$, sive $4\mathrm{x}^2\mathrm{l}^2 \sqcap 2\mathrm{y}^2\mathrm{ax}$. sive $2\mathrm{xl}^2 \sqcap 2\mathrm{y}^2\mathrm{a}$. Iam $\mathrm{y}^2 \sqcap$ pl. fiet: $\cancel{2}\mathrm{xl} \sqcap \cancel{2}\mathrm{ap}$ *(2)* seu *L*

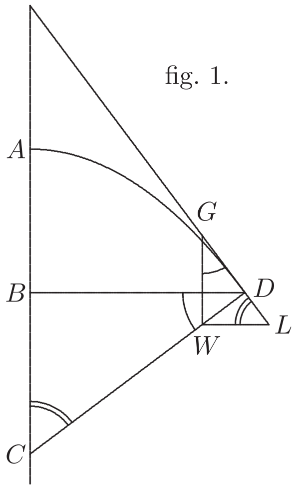
1 f. duas radices aequales: vgl. die Tangentenmethode von Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40 bis 50 [Marg.] (vgl. *DO* VI S. 413–424). 7 $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{2x}$: Leibniz geht hier stillschweigend von g zu β über, in S. 425 Z. 3 setzt er sie explizit gleich. 12 *Fig. 2*: Leibniz vertauscht in der Fig. 2 gegenüber dem Vorhergehenden die x- und y-Achse, behält aber die Parabelgleichung $2ax = y^2$ unverändert bei. Dadurch wird die folgende Überlegung bis S. 425 Z. 12 beeinträchtigt.

Sumamus exemplum differentiarum inter ordinatas parabolae ad tangentem, $2ax \sqcap y^2$. Unde $2ax \sqcap 2yl$, sive $l \sqcap \dfrac{ax}{y}$. sive pro ax ponendo $\dfrac{y^2}{2}$ fiet: $l \sqcap \dfrac{y^2}{2y}$. Ergo $l \sqcap \dfrac{y}{2}$.

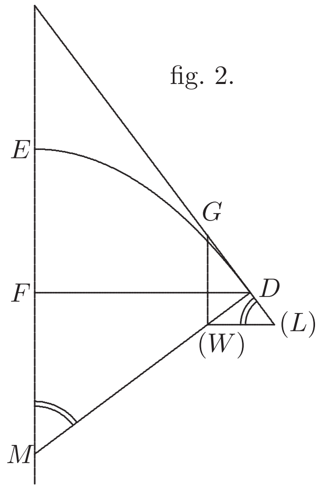
Iam $\dfrac{l}{x} \sqcap \dfrac{g \sqcap \beta}{w}$. Erit $w \sqcap \dfrac{x\beta}{l}$, sive $\dfrac{y^2\beta}{2al}$ sive $\dfrac{y^2\beta}{ay}$, sive $\dfrac{y\beta}{a} \sqcap w$. Triangulum ergo differentiis ordinatarum parabolae ad tangentem verticis homogeneum est. Sumta iam aequatione generali: $s^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2 + y^2$, est autem $\dfrac{\cancel{\beta a}}{\cancel{y\beta}} \sqcap \dfrac{y}{v-x}$. erit $va - xa \sqcap y^2$, sive $v \sqcap \dfrac{y^2 + xa}{a}$, et $v^2 \sqcap \dfrac{y^4 + 2y^2xa + x^2a^2}{a^2}$ et $a^2s^2 \sqcap y^4 \boxed{+2y^2xa}\,\boxed{+x^2a^2}\,\boxed{-2y^2xa}\,\boxed{-2x^2a^2}\,\boxed{+x^2a^2} + y^2a^2$ et fit: $s \sqcap \dfrac{y\sqrt{y^2 + a^2}}{a}$. Sed quoniam hoc modo altera ex incognitis, evanescit, alia adhibenda est via, nimirum $G, YW, \sqcap \sqrt{\dfrac{\beta^2a^2 + \beta^2y^2}{a^2}}$. Est autem $\dfrac{G, YW}{\beta} \sqcap \dfrac{s}{y}$. Ergo $s \sqcap \dfrac{y}{a}\sqrt{a^2 + y^2}$, et $s^2 \sqcap \dfrac{y^2a^2 + y^4}{a^2}$, et fiet ex aequatione generali, pro s^2 substituendo eius valorem, aequatio haec: $\boxed{y^2a^2} + y^4 \sqcap a^2v^2 - 2vxa^2 + x^2a^2\ \boxed{+y^2a^2}$. et $y^2 \sqcap \mp av \pm ax$. Quoniam iam haec est methodus tangentium inversa, si multiplices y^2 per $\dfrac{1}{2}$, et x per 1, et av per 0, fiet: $\dfrac{y^2}{2} \sqcap ax$. sive $y^2 \sqcap 2ax$. Sed an hoc alias quoque succedat, videndum est. Et vero id non puto semper succedere posse.

---

2 *Am Rande*: Iam $pl \sqcap x^2$. Ergo $\dfrac{p\cancel{y}}{2} \sqcap \dfrac{y^{\cancel{4}3}}{4a^2}$.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

$\frac{BC}{BD} \sqcap \frac{WL}{GW}$. erit $BC \frown GW$ seu summa omnium BC, aequalis $BD \frown WL$ seu summae omnium BD ad basin. Summa autem omnium BD ad basin est ipsius maximae BD semiquadratum.

Porro manifestum est summam omnium WL esse ipsam maximam BD.

Proposita iam esto figura cuius ordinatae sunt e. g. $\sqrt{a^2 - x^2}$. Quaeritur figura in qua faciant functionem ipsarum BC, eius figurae ordinata erit summa omnium $\sqrt{a^2 - x^2}$.

Quaeritur et alia figura, in qua $\frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$ faciant functionem ipsarum WL. Summa earum erit FD ordinata figurae quae homogenea sit semiquadratis ipsarum BD.

Hinc patet momentum ipsarum BD ex axe, esse homogeneum figurae quadratrici ipsarum FD. Porro ut ad calculum veniamus, in fig. 1. patet esse: $\frac{BD}{\sqrt{a^2 - x^2}} \sqcap \frac{GW}{WL} \sqcap \frac{\beta}{WL}$. sive $BD \frown WL \sqcap \beta\sqrt{a^2 - x^2}$.

In aequatione generali: $BD^2 + BC^2 \sqcap CD^2$, vel $y^2 + BC^2 \sqcap p^2$, substituatur pro BC^2, eius valor, $a^2 - x^2$, fiet: $y^2 + a^2 - x^2 \sqcap p^2$. determinanda ad duas radices aequales, ut elidatur p.

6 $\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2}$. *(1)* Quod si *(2)* Quaeritur *L* 10 momentum *(1)* figurae *(2)* ipsarum BD ex axe, esse *(a)* homogeneum figurae FD *(b)* homogeneum *(aa)* quadratrici ipsius figurae *(bb)* figurae *L*

In altera figura $\frac{GW}{WL}$ seu $\frac{a}{\sqrt{a^2-x^2}} \sqcap \frac{FD}{FM} \sqcap \frac{z}{FM}$. et erit $FM \sqcap z\frac{\sqrt{a^2-x^2}}{a}$. Eumque valorem inserendo in aequatione generali, fiet: $z^2 + \frac{z^2a^2 - z^2x^2}{a^2} \sqcap s^2$. ponendo $FD \sqcap z$. et $FM \sqcap s$. Est autem $z \sqcap \frac{y^2}{2a}$, et fiet: $\frac{y^4}{4a^2} + \frac{\frac{y^4a^2}{2a^2} - \frac{y^4x^2}{4a^2}}{a^2} \sqcap s^2$. sive $3a^2y^4 - y^4x^2 \sqcap 4s^2a^4$, et fiet: $2sa^2 \sqcap y^2\sqrt{3a^2-x^2}$.

Habemus quidem iam duas aequationes, ex quibus quaelibet est trium incognitarum, sed malum est, quod in iis duae etiam incognitae s. et p.

Methodus tangentium inversa, videtur esse eadem, cum methodo inveniendi planum quod superficiem cuiusdam solidi tangat in puncto dato. Ita enim fit, ut aequatio trium incognitarum determinetur ad duas, eo ipso, quia quaelibet ex incognitis duas habet radices aequales. Verum iam video discrimen aliquod subesse a methodo tangentium inversa, quia in ea tres quidem sunt incognitae, sed duae tantum ex illis habent duos valores aequales.

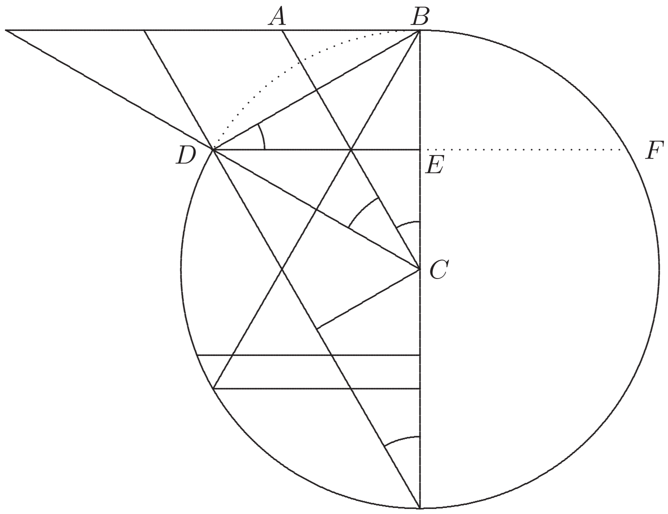
Methodus autem ducendi planum tangens ad superficiem, videtur coincidere cum methodo ducendi rectam tangentem ad curvam in solido quodam spatio sive extra planum constans divagantem; quam obiter innuit Cartesius, sub libri secundi finem.

Porro considerandum est has duas $s \sqcap MD$. et $p \sqcap CD$. plurimum habere affinitatis. Nondum tamen rationem invenio alterutram earum eliminandi. Nec vero hac quidem methodo facile eo perveniri posse arbitror.

2 f. ponendo ... FM ⊓ s. *erg. L* 8 ut *(1)* duae *(2)* aequatio *(a)* duarum incognitarum *(b)* trium *L* 9 incognitis *(1)* du *(2)* tres ha *(3)* duas *L* 11 ea *(1)* duae *(2)* tres *L* 15 quam *(1)* sane curvam *(2)* obiter *L* 16 f. affinitatis *(1)*; quoniam etiam FD | fig. 2. *erg.* | sunt homogeneae ipsarum WL. fig. 1. scilicet $\frac{\text{p}}{\text{BC}} \sqcap \frac{\text{p}}{\frac{\text{WL} \frown \text{a}}{\beta}}$ *(2)*. Nondum *L*

15 Cartesius: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 65 f. (vgl. *DO* VI S. 440 f.). 16 $s \sqcap MD$: Im Vorhergehenden benutzte Leibniz $s = FM$.

[*Teil 2*]



[*Fig. 5, teilweise in Blindtechnik*]

Triangula CBA, et DEB similia sunt. Angulus enim BDE insistens arcui BF, aequali arcui BD dimidius est anguli [BCD], ideoque aequalis angulo BCA.

4 est *(1)* arcus *(2)* anguli | BD *ändert Hrsg.* |, ideoque *L*

[*Teil 3*]

$$
\begin{array}{l}
1\quad \overset{2\text{ ad }1}{\underbrace{\frac13 \qquad \frac16}_{\displaystyle\frac12}} \quad \overset{3\text{ ad }2}{\underbrace{\frac1{10} \qquad \frac1{15}}} \qquad \overset{4\text{ ad }3}{\underbrace{\frac1{21} \qquad \frac1{28}}} \quad \frac1{36}\quad \frac1{45}\quad \frac1{55}\quad \frac1{66}\quad \frac1{78}\\[2ex]
\qquad\qquad \frac5{30}\underbrace{\left(\frac16\right) \qquad 2\text{ ad }1 \qquad \frac7{84}}_{\displaystyle\frac14}\left(\frac1{12}\right)
\end{array}
$$

$$
\underbrace{\frac13 \quad + \quad \frac1{10}}_{\displaystyle\frac{13}{30}} + \underbrace{\frac1{21} \quad + \quad \frac1{36}}_{\displaystyle\frac{57}{21\frown 36}} + \underbrace{\frac1{55} \quad + \quad \frac1{78}}_{\displaystyle\frac{133}{66\frown 78}}, \qquad \text{etc.}
$$

auferendo 1 a numeratoribus fiet:

$$
\frac{12}{30}\Big|\frac25 \qquad\qquad \frac{56}{21\frown 36}\Big|\frac{8}{3\frown 36}\Big|\frac2{27} \qquad\qquad \frac{12}{6\frown 78}\Big|\frac2{78}. \qquad \text{pendet}
$$

a quadratura hyperbolae ni fallor.

3–431,10 *Nebenrechnungen*:

3+430,2+431,10 [*Z. 13–15 in der Vorlage als Spalten geschrieben*]

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
	1	3	6	10	15	21	28	36	45	55	66	78	91	105	120
	1	4	10	20	35	56	84	120	165	220	286				

3 $\dfrac{28+21 \sqcap 49}{21\frown 28} \sqcap \dfrac{7}{84}\Big|\dfrac{1}{[12]} \qquad \dfrac16 + \dfrac1{12} \sqcap$ [*bricht ab*]

9 1

$\cancel{1}\cancel{3}2$ ⨍ 11

$\cancel{1}\cancel{2}\cancel{2}$

$\cancel{1}$

9 $\frac{2}{78}$. *(1)* Unde quadratura hyperbolae *(2)* pendet *L* 16 14 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 2\text{ ad }1 & 3\text{ ad }2 & 4\text{ ad }3 & 5\text{ ad }4 & 6\text{ ad }5 & 7\text{ ad }6 & 8\text{ ad }7\\
1 & \underbrace{\frac{1}{3}\quad\frac{1}{6}} & \underbrace{\frac{1}{10}\quad\frac{1}{15}} & \underbrace{\frac{1}{21}\quad\frac{1}{28}} & \underbrace{\frac{1}{36}\quad\frac{1}{45}} & \underbrace{\frac{1}{55}\quad\frac{1}{66}} & \underbrace{\frac{1}{78}\quad\frac{1}{91}} & \underbrace{\frac{1}{105}\quad\frac{1}{120}}\\
 & \frac{3}{6}\Big|\frac{1}{2} & \frac{25}{150}\Big|\frac{1}{6} & \frac{49}{21\frown 28}\Big|\frac{1}{12} & \frac{81}{36\frown 45}\Big|\frac{1}{20} & \frac{121}{55\frown 66}\Big|\frac{1}{30} & \frac{169}{78\frown 91}\Big|\frac{1}{42} & \frac{225}{105\frown 120}\Big|\frac{1}{56}\\
 & A & \alpha & a & & & &
\end{array}$$

$$\underbrace{\alpha \qquad a}_{\displaystyle \frac{3}{12}\Big|\frac{1}{4} \atop B} \qquad \underbrace{\frac{81}{36\frown 45}\Big|\frac{1}{20} \qquad \frac{121}{55\frown 66}\Big|\frac{1}{30}}_{\displaystyle \frac{50}{600}\Big|\frac{1}{12} \atop \beta} \qquad \underbrace{\frac{169}{78\frown 91}\Big|\frac{1}{42} \qquad \frac{225}{105\frown 120}\Big|\frac{1}{56}}_{\displaystyle \frac{98}{42\frown 56}\Big|\frac{1}{6\frown 4}\Big|\frac{1}{24} \atop b}$$

$$\underbrace{\beta \qquad\qquad b}_{\displaystyle \frac{3}{24}\Big|\frac{1}{8} \atop C}$$

---

3 f. *Nebenrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 13\\ 13\\ \hline 39\\ 13\\ \hline 169 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 1\\ \cancel{7}8 \;\not\,\; 6\\ \cancel{1}3 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 2\\ \cancel{9}1 \;\not\,\; 7\\ \cancel{1}3 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 15\\ 7\\ \hline 105 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 56\\ 42\\ \hline 98 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{2}\\ \cancel{9}\cancel{8} \;\not\,\; 14\\ \cancel{7}\cancel{7} \end{array}$$

Patet seriem $A.B.C.$ esse geometricam, seriem $A.\alpha.a.$ etc. esse dimidiam datae, seriem $B.\beta.b.$ etc. esse dimidiam ipsius $A.\alpha.a.$

Hanc methodum, qua series fractionum triangularium abit in progressionem [geometricam] duplam invenit Hugenius. Unde deduxit fractiones triangulares aequari binario seu $\frac{2}{1}$. Ego cum aliter idem et praeterea invenissem, pyramidales aequari $\frac{3}{2}$, et triangulo-triangulares $\frac{4}{3}$ etc. et ita pyramidales summae progressionis geometricae triplae, triangulo-triangulares quadruplae, dixi ei, videri mihi similem fieri posse in aliis quoque ad geometricas reductionem quod nunc tentabo.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
[4 \text{ ad } 1 & & 2 \text{ ad } 1 & & 8 \text{ ad } 5 & & 10 \text{ ad } 7] & & & & \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \frac{1}{56} & \frac{1}{84} & \frac{1}{120} & \frac{1}{165} & \frac{1}{220} & \frac{1}{286}
\end{array}$$

$$\underbrace{\frac{1}{10} \quad \frac{1}{20} \quad \frac{1}{35}}_{} \qquad \frac{[5]}{28} + \frac{1}{56} \sqcap \left[\frac{11}{56}\right]$$

1 [*bricht ab*]

10–12 *Nebenrechnung, gestrichen*: $\frac{3}{20} + \frac{1}{35} \sqcap \; 105+20 \; \sqcap \frac{125}{20 \frown 35} \Big| \frac{5 \frown 5}{4 \frown 7}$ [*!*]

3 qua *(1)* res *(2)* series *L* 3 f. progressionem | arithmeticam *ändert Hrsg.* | | duplam *erg.* |, | primus *gestr.* | invenit *L* 5 aliter ... praeterea *erg. L* 9 4 ... 7 *gestr. L, erg. Hrsg.* 11 25 *L ändert Hrsg.* 11 $\frac{50}{56} + \frac{1}{28} \sqcap \frac{52}{56} \Big| \frac{26}{28} \Big| \frac{13}{14}$ *L ändert Hrsg.* 13 *(1)* $\frac{5}{20} + \frac{3}{20} \sqcap \frac{8}{20} \Big| \frac{4}{5}$ *(!)* *(2)* $\frac{3}{20}$ *L*

4 f. Hugenius: Zur Lösung von Huygens s. *HO* XIV S. 144–150. — Ego: vgl. N. 2 sowie die *Accessio*, *LSB* III, 1 N. 2 S. 5–9.

38_7. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS QUINTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 12–13. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringer Textverlust durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Pars V^ta^ schediasmatis de seriebus et summis quadratricibus etc.

Esto $y^3 + y^2 + y + 1 + \dfrac{1}{y} \sqcap z$.

Multiplicetur per y, fiet $y^4 + y^3 + y^2 + y + 1 \sqcap yz$. facile ergo haberi potest summa omnium yz. Sed non ideo fateor summa omnium z habebitur.

Exemplo, formulam $\odot$ denuo comprobemus, resumto calculo, ponendo $h.\,l.\,c.\,m. \sqcap 0$.

Esto figura: $\dfrac{dy^3 + ey^2 + fy + g}{ny + p} \sqcap x$. fiet:

$$\left.\dfrac{-dy^3 - ey^2 - fy - g}{ny + p} + \dfrac{\begin{array}{rcrcrcl} dy^3 & + & ey^2 & + & fy & + & g \\ 3dy^2\beta & + & 2ey\beta & + & f\beta & & \\ 3dy\beta^2 & + & e\beta^2 & & & & \\ d\beta^3 & & & & & & \end{array}}{\begin{array}{c} ny + p \\ n\beta \end{array}}\right\} \sqcap \text{ eius differentiae } z.$$

et multiplicando per crucem:

6 $+\dfrac{1}{\text{y}}$ | omniumque summa *gestr.* | $\sqcap$ z *L* 10 Esto … $\sqcap$ x. *erg.* *L*

9 formulam $\odot$: Leibniz nimmt die Überlegungen von N. 38_5 S. 415 Z. 12 u. S. 419 Z. 4–16 wieder auf.

$$\begin{array}{lll}
\boxed{-ndy^4}\ \boxed{-ney^3}\ \boxed{-nfy^2}\ \boxed{-gny} & & \boxed{+ndy^4 \quad +ney^3 \quad +nfy^2 \quad +ngy} \\
\boxed{-ndy^3\beta - ney^2\beta - nfy\beta} - gn\beta & & 2\,3ndy^3\beta \ +2ney^2\beta\ \boxed{+nfy\beta}\ \boxed{+pg} \\
\boxed{-pdy^3 \quad -pey^2}\ \boxed{-fpy}\ \boxed{-gp} & & 3ndy^2\beta^2\ \underline{+\ ney\beta^2}\ \ \boxed{+pfy} \\
 & & \underline{ndy\beta^3}\ \ \boxed{+\ pey^2}\ \ \underline{\underline{+pf\beta}} \\
 & & \boxed{pdy^3}\ \ +2pey\beta \\
 & & 3pdy^2\beta\ \ \underline{\underline{+\ pe\beta^2}} \\
 & & 3pdy\beta^2 \\
 & & \underline{\underline{pd\beta^3}}
\end{array}$$

dividenda per $\begin{array}{l} n^2y^2 + n^2y\beta + pn\beta. \\ \quad +pny \ \ +p^2 \\ \quad +pny \end{array}$ Unde fiet : $\dfrac{\begin{array}{l} 2ndy^3 + \ ney^2 + 2epy + pf \\ \qquad\quad 3pd.. \qquad [-]ng \end{array}}{n^2y^2 + 2pny + p^2} \sqcap z.$

Ponamus $f \sqcap \dfrac{-ep^2n - dp^3 - [n^3]g}{np}$, dividi poterit fractio per $ny + p$. Nam:

$$\begin{array}{lllll}
2ndy^3 + ne\,y^2 \quad +2epy + \quad pf & \not f & 2dy^2 & \left\{\begin{array}{l} +ne\,y \\ +pd.. \end{array}\right. & \left\{\begin{array}{l} +2epn \\ \quad \boxed{-enp} \\ - \ \ dp^2 \end{array}\right. \\
\qquad +3pd\ .. \qquad\qquad [-]\ ng & & & \overline{\quad n \quad} & \overline{\quad n^2 \quad} \\
\boxed{ny \quad + \ p} \qquad \boxed{ny \quad + \quad p} & & & & \\
\quad \boxed{-2dp\ ..} & & & & \\
\qquad \boxed{ny \quad + \quad p} & & & & \\
\qquad\quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} -nep.. \\ -p^2d.. \end{array}\right.}{n}\ \dfrac{\left\{\begin{array}{l} -\ ep^2n \\ +\ dp^3 \end{array}\right.}{n^2} & & & &
\end{array}$$

10 + *L ändert Hrsg.* 14 n² *L ändert Hrsg.*

Unde patet, ut divisio sit exacta debere $n^2pf[-]n^3g - ep^2n + dp^3$ esse $\sqcap$ 0. et erit $f \sqcap \dfrac{ep^2n - dp^3[+]n^3g}{n^2p}$.

Recte divisus est, sed iam video productum $\dfrac{\begin{array}{l} 2dn^2y^2 + n^2ey + epn \\ \qquad\quad + npd \quad - dp^2 \end{array}}{ny \quad + p[, \frown n^2]} \sqcap z$. rursus dividi posse per $ny + p$. ideoque nullam inde aequationem ad hyperbolam oriri.

Etsi nulla series habeat differentias exhaustibiles, nisi quae sit paraboloeidum aut ex illis compositarum:

433,15–22 *Kontrollrechnung*: Proba haec est, multiplicando

$$2dy^2 \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +ne\,y \\ +pd\,.. \end{array}\right.}{n} \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +epn \\ -dp^2 \end{array}\right.}{[n^2]}$$

$$\begin{array}{lll} \text{per} & & \qquad n \;\; y \quad + \quad p \\ \hline \text{fiet} & +2dpy^2 & \left\{\begin{array}{l} +\,p\cancel{n}e\;y \\ \boxed{\dfrac{+\,p^2d\;..}{n}} \end{array}\right. \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +ep^2n \\ -\,dp^3 \end{array}\right.}{[n^2]} \\ & & \left\{\begin{array}{l} \quad ep\cancel{n}\cancel{^2}\;.. \\ \boxed{\dfrac{-\,dp^2\;..}{n}} \end{array}\right. \end{array}$$

[*bricht ab*]

433,16+434,1 + *L ändert Hrsg. zweimal* 2 − *L ändert Hrsg.* 4 , ⌢ n^2 *erg. Hrsg.* 11+15 n *L ändert Hrsg. zweimal*

---

6 differentias exhaustibiles: Leibniz nimmt die Überlegung von N. 38₅ S. 421 Z. 22 – S. 422 Z. 26 wieder auf.

$$\begin{array}{ccccc}
E & & & & \\
a & & & & \\
 & F & & & \\
 & a-b & & & \\
M & & G & & \\
b & & a-2b+c & & \\
 & N & & H & \\
 & b-c & & a-3b+3c-d & \\
 & & P & & L \\
c & & b-2c+d & & a-4b+6c-4d+e \\
 & & & Q & \\
 & c-d & & b-3c+3d-e & \\
d & & c-2d+e & & \\
 & d-e & & c-3d+3e-f & \\
e & & d-2e+f & & \\
 & e-f & & & \\
f & & & &
\end{array}$$

Videndum est an ipsarum differentiarum transversalium series possint exhaustibiles esse, ut $E.\ F.\ G.\ H.$ et patet eam seriem non posse esse arithmeticam, foret enim $E-F$, seu $\boxed{a-a}+b \sqcap F-G$. seu $a-b, [-a+2b-c]$. seu foret $b \sqcap b[-]c$. quod est absurdum.

Videamus an possit esse quadratica; tunc erit

$$\begin{array}{ccccccc}
\llcorner E-F \lrcorner & - & \llcorner F-G \lrcorner & \sqcap & \llcorner G-H \lrcorner & - & \llcorner H-L \lrcorner. \\
b & & b[-]c & & b+d-2c & & b-3c+3d-e
\end{array}$$

Sed hoc duo aequari absurdum est, et demonstratio generalis in promtu est, cur sit impossibile ullam seriem differentiarum transversalium exhauriri posse, posito, seriem $a.\,b.\,c.\,d.$ in infinitum extendi, quia seriei $E.\ F.\ G.\ H.\ L.$ differentiae sunt $M.\ N.\ P.\ Q.$ etc. et huius rursus, seriei sequentis termini, et ita in infinitum.

In progressione harmonica series $a.\ b.\ c.\ d.\ e.$ etc. eadem seriei $F.\ G.\ H.\ L.$ et per consequens etiam series $M.\ N.\ P.\ Q.$ seriei $b-c.\ \ c-d.\ \ d-e.$ etc.

434,7–435,18 compositarum: . . . *(1)* Differentiarum autem transversalium ut EFGH seriem impossi *(2)* Videndum *L* 20 a + 2b + c *L ändert Hrsg.* 20+23 + *L ändert Hrsg. zweimal*

$$1-\frac{1}{1}\quad 2-\frac{1}{2}\quad 3-\frac{1}{3}\quad 4-\frac{1}{4}\quad \text{dant :}\quad 0\quad +\frac{3}{2}\quad +\frac{8}{3}\quad +\frac{15}{4}\quad +\frac{24}{5}$$

$$\frac{3}{2}\qquad \frac{7}{6}\qquad \frac{13}{12}\qquad \frac{21}{20}\qquad \text{etc.}$$

Sed talis series componitur ex duabus summabilibus: fractionum triangularium, et potestatum.

Si a serie quadam auferatur eius series summatrix sed uno gradu inferior, ut

$b, -a+b \qquad c, -b+c \qquad d, -c+d$ fiet:

inde $2b-a \qquad 2c-b \qquad 2d-c$ fiet series composita ex data $b.\ c.\ d$; et differentiis $b-a \quad c-b \quad d-c$ etc.

Idem est si in unum addas:

$$a\boxed{-b,b}-c \quad \underbrace{a-2b+c,b-2c+d}_{a-b-c+d} \quad \underbrace{a-3b+3c-d,+b-3c+3d-e}_{a-2b*c+2d-e} \quad \text{etc.}$$

quorum differentiae:

$a-c \qquad -b+d \qquad -b+c+d-e$

[*Hier folgt das Schema auf der gegenüberliegenden Seite.*]

$$\underset{A}{\frac{1}{y^2}}-\frac{1}{y^2+2y+1}\ \underset{B}{\sqcap}\ \frac{\boxed{y^2}+2y+1\boxed{-y^2}}{y+1,\frown y,,\square}\ \text{quorum habetur summa. Ergo}\ \frac{2y}{y+1,\frown y,,\square}\ \sqcap$$

$\frac{2}{y+1,\square,\frown y}$ et $\frac{1}{y+1,\frown y,,\square}$ pendent alterum ex altero.

Data serie quadam videndum an ei addi vel adimi possit alia series, ita ut post ablationem vel additionem producta series sit eadem sed uno tantum gradu superior vel inferior additae[,] ademtae, tunc enim ea series erit propositae quadratrix.

8 differentiis *erg. L* 15 f. altero. *(1)* Addatur ad *(2)* Ad $\frac{2y+1}{y+1,y,,\square}$ addatur $\frac{y,\square}{y+1,\frown y,,\square}$ $\sqcap\ \frac{1}{y+1,\square}$, fiet: $\frac{1}{y^2}$ *(3)* Data *L* 18 additae *erg. L*

11 $*\ c$: c hat den Koeffizienten 0.

$$\begin{array}{ccc}
\frac{1}{1} & & \\
& \frac{3}{4} & \\
\frac{1}{4} & & \frac{88}{144} \\
& \frac{5}{36} & \\
\frac{1}{9} & & \\
& \frac{7}{9 \frown 16} & \\
\frac{1}{16} & & \\
& \frac{9}{16 \frown 25} & \\
\frac{1}{25} & & \\
& \frac{11}{25 \frown 36} & \\
\frac{1}{36} & & \\
& \frac{13}{36 \frown 49} & \\
\frac{1}{49} & & \\
& \frac{15}{49 \frown 64} & \\
\frac{1}{64} & & \\
& \frac{17}{64 \frown 81} & \\
\frac{1}{81} & & \\
& \frac{19}{81 \frown 100} & \\
\frac{1}{100} & &
\end{array}$$

Ad $\dfrac{2y+1}{y+1,\frown y,,\square}$ addatur $\dfrac{1}{y+1,\frown y,,\square}$. $\dfrac{2y+2}{y+1,\frown y,,\square}$, fiet: $\dfrac{2}{y+1,\frown y^2}$, sive $\dfrac{2}{y+1,\frown y,\frown y}$.

Ita tres ergo series: $\dfrac{1}{y+1,\square,\frown y}$. $\dfrac{1}{y+1,y,,\square}$. $\dfrac{1}{y+1,y^2}$ pendent a se invicem, ita ut una inventa et reliquae habeantur. Iam secundae momentum ex y. dat primam; eiusdem secundae momentum ex $y+1$. dat tertiam. Tertia ergo differt a [prima] cylindro mediae, quod et per se patet, quia et ordinatae extremarum differunt ⟨ordinata mediae⟩.

Fiat series, ipsarum p, ita ut $\dfrac{p}{w[\sqcap]\text{ diff. ord.}}$ $\sqcap$ $\dfrac{\text{ord.}}{1}$, fiet p $\sqcap$ $\dfrac{\text{ord.}\frown\text{diff. ord.}}{1}$. Cui si addantur triangula semiquadrata [differentiarum] ordinatarum, habebitur series summabilis. Unde: si ordinatae $\dfrac{1}{y}$. differentiae ordinatarum $\dfrac{1}{y^2+y}$. fiet $p \sqcap \dfrac{1}{y^3+y^2} \sqcap \dfrac{1}{y+1,\frown y^2}$. addatur $\dfrac{1}{y+1,y,\square,2}$. summa huius seriei erit [semiquadratum]. Itaque se-

---

3 *Über* $\dfrac{1}{y+1,y,,\square}$, *mit Hinweisstrich verbunden*: Haec series media est fractionum triangularium quadratarum.

10 *Über* addatur: Imo subtrahi debet, haec causa erroris porrecti usque ad signum ☽.

436,18–438,1 quadratrix. *(1)* A serie *(2)* Differentia differentiae: $\dfrac{2y+1}{y+1,\frown y,,\square}-$ *(3)* Ad *L*

4 Iam *(1)* primae *(2)* secundae *L* 5 f. a | prima *ändert Hrsg.* | cylindro mediae *(1)*. Ergo summa seriei $\dfrac{1}{y+1,\frown y^2}-\dfrac{1}{y+1,\square,\frown y}$ seu $\dfrac{y+1-y}{y+1,\text{cub},y^4}$ *(2)*, quod *L* 7 $\sqcap$ *erg. Hrsg.* 7 f. $\dfrac{\text{ord.}\frown\text{diff. ord.}}{1}$ *(1)* , horum summa habetur triangulo semiquadrato ordinatae maximae *(2)*. Cui *L* 8 differentiarum *erg. Hrsg.* 8 habebitur *(1)* figura *(2)* series *L* 10 quadratum *L ändert Hrsg.*

---

9 si ordinatae $\dfrac{1}{y}$: Leibniz nimmt die Überlegung von 38_4 S. 404 Z. 5–8 wieder auf. 11 f. fractionum triangularium quadratarum: Im Nenner stehen die Quadrate der verdoppelten Dreieckszahlen; der Fehler tritt in S. 439 Z. 13, in N. 38_8 S. 445 Z. 14 und in N. 38_9 S. 460 Z. 10 f. wieder auf.

ries $\dfrac{1}{y^3+y^2}$, etiam [ex] quadratis triangularium pendet. Habemus ergo quatuor series, quarum una habita, caeterae omnes habentur, nempe:

$$\underset{A}{\frac{1}{y+1,\square,y}} \qquad \underset{B}{\frac{1}{y+1,y,\square}} \qquad \underset{C}{\frac{1}{y+1,y^2}}.$$

$C - A \sqcap B$. $\dfrac{B}{2} + C \sqcap \underline{cognito}$. Ergo $2C - A \sqcap \underline{cognito}$.

Iam $2A + B$ aequatur $\underline{\underline{cognito}}$ per superiora.

Ergo $C - A \sqcap \underline{\underline{cognito}} - 2A$. Ergo $C \sqcap \underline{\underline{cognito}} - A$.

At idem A aequatur $2C - \underline{cognito}$. Ergo $C \sqcap \underline{\underline{cognito}} - 2C + \underline{cognito}$.

Ergo $3\,C \sqcap \dfrac{\underline{\underline{cognito}} + \underline{cognito}}{3}$. Unde sequitur has tres series repertas.

Data serie summatrice, seriei C, necesse est et seriei summatricis eius dari summam, quia, momentum seriei C. ex y. datur.

Data summa seriei C, dabitur et summa omnium $\dfrac{1}{y^2}$, quod ita ostendo, momentum seriei C seu $\dfrac{1}{y+1,y^2}$ ex y, habetur; est enim summa fractionum triangularium. Momentum autem seriei C, ex $y+1$. est $\dfrac{1}{y^2}$. quod a priore differt cylindro seriei C.

Operae ergo pretium est, ut ista nonnihil resumamus.

---

14 *Am Rande*: ☽

1 ex *erg. Hrsg.* 1 ergo *(1)* quinque *(2)* quatuor *L* 9 f. repertas. *(1)* Reperta serie C *(2)* Data *L* 14 cylindro *(1)* figurae *(2)* seriei *L*

---

5 $2C - A \sqcap \underline{cognito}$: Richtig wäre $3C - A = 2\,\underline{cognito}$. Leibniz rechnet konsequent weiter. Die Überlegung wird dadurch bis Z. 9 zusätzlich beeinträchtigt. 13 fractionum triangularium: s. o. Erl. zu S. 438 Z. 11 f.

$\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+2y+1} \sqcap\!\sqcap$ *cognitis* $d \sqcap \dfrac{1}{b^2}$. Ergo $\dfrac{\boxed{y^2}+2y+1\boxed{-y^2}}{y+1,y,\square} \sqcap\!\sqcap \dfrac{1}{b^2}$. ponendo b esse minimam abscissarum, y[,] et $\dfrac{1}{b^2}$ maximam ordinatarum, in nostro casu.

Ergo $\underbrace{\dfrac{2}{y+1,\square,y}}_{2A} + \underbrace{\dfrac{1}{y+1,y,\square}}_{B} \sqcap\!\sqcap \dfrac{1}{b^2}$. Ad $\underbrace{\dfrac{2y+1}{y+1,y,\square}}_{2A+B \sqcap\!\sqcap \frac{1}{b^2}}$ addatur $\underbrace{\dfrac{1}{y+1,y,\square}}_{B}$ fiet:

$$2A+2B \sqcap \frac{2y+2}{y+1,y,\square} \sqcap\!\sqcap \frac{1}{b^2} + B \sqcap\!\sqcap \frac{2}{y+1,y^2} \sqcap 2C.$$

Ergo $\dfrac{1}{b^2} \sqcap\!\sqcap 2C - B \sqcap 2A + B$. Ergo vel una ex his tribus seriebus separatim data caeterae habentur, unde rursus patet, vel unica ex his seriebus data haberi ipsam $\dfrac{1}{y^2}$. Sed nunc pergamus:

Sumatur iam series harmonica $\dfrac{1}{y}$, differentia ordinatarum $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{y+1} \sqcap \dfrac{\boxed{y}+1\boxed{-y}}{y^2+y} \sqcap \dfrac{1}{y+1,y}$. Fiat terminus seriei cuiusdam alterius qui sit, $\underbrace{\dfrac{1}{y} \frown \dfrac{1}{y+1,y}}_{C}$: auferatur ab eo semiquadratum differentiae, seu $\dfrac{1}{y+1,y,\square,2} \sqcap \dfrac{B}{2}$. summa erit $\dfrac{1}{2b^2}$ semiquadratum ab $\dfrac{1}{b}$ ordinata maxima. Erit $C - \dfrac{B}{2} \sqcap\!\sqcap \dfrac{1}{2b^2}$. seu $2C - B \sqcap\!\sqcap \dfrac{1}{b^2}$, ut ante. Nondum ergo ipsa vel C, vel B, vel A, habetur. Superest ut ostendam ex data C, et per consequens aliqua alia, quas dixi dari $\dfrac{1}{y^2}$.

1 f. ponendo ... casu. *erg. L* 9 series *(1)* $\dfrac{1}{y^2}$, differentia ordinatarum *(a)* $\dfrac{1}{y^2+2y+1}$ *(b)* $\dfrac{2}{y}$ *(c)* $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+2y+1} \sqcap y^2+2y+1-y^2$ *(2)* harmonica *L* 12 f. semiquadratum ... maxima *erg. L*

Nam momentum ipsius C, ex y, est $\dfrac{1}{y^2+y}$ quod est $\sqcap\!\sqcap\ \dfrac{1}{b}$. Momentum ipsius C, ex $y+1$, est $\dfrac{1}{y^2}$. Ergo differentia inter $\dfrac{1}{y^2}$, et $\dfrac{1}{y^2+y}$ erit C. Nam $\dfrac{y^2+y-y^2}{y^2 \frown y^2+y} \sqcap \dfrac{1}{y+1, y^2}$.

Ergo $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{b} \sqcap\!\sqcap C$. Ergo $\dfrac{1}{by^2} - \dfrac{1}{b^2} \sqcap\!\sqcap \left[\dfrac{C}{b}\right] \sqcap\!\sqcap \dfrac{1}{by^2} + B - 2C$. Unde $C \sqcap\!\sqcap \dfrac{\dfrac{1}{by^2}+B}{\left[\dfrac{1}{b}\right]+2}$.

Aliquando ex hac aequationum inter summas combinatione aliquid elici poterit.

Series autem $\dfrac{1}{2y^2}$ est momentum seriei $\dfrac{1}{y}$ ex axe. Idem momentum vero et aliter per regulam superiorem haberi potest, (vide part. 2. huius schediasmatis et ibi fig. pag. eius plagulae 2.). Nimirum rectangula ut MNE vel QHP sub abscissa figuram complent. Ergo

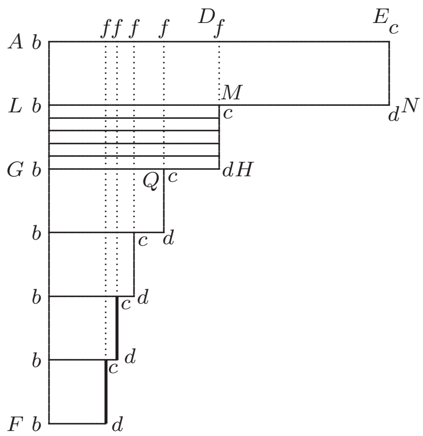
---

4 *Am Rande*: Adde infra schediasm. part. VII. pag. eius plagulae 3. sub fin.

3 Cb *L ändert Hrsg.* 3 b *L ändert Hrsg.* 7 abscissa *(1)* constituunt figuram, ergo *(2)* figuram *L*

---

6 vide: N. 38₃ Fig. 2:



8 infra: s. u. N. 38₉ S. 461 Z. 2–5.

et figurae momentum componitur ex rectangulorum momentis, rectanguli autem cuiusque momentum fit ex ductu ipsius rectanguli in distantiam eius centri gravitatis, ab axe AG. Nimirum ordinata AE vel LN fit rectangulum $ALEN$ esto $\frac{1}{1}$, abscissa eius 1. AL. Differentia huius ordinatae a sequenti, est rectangulum MNE, sed si n u l l a sequatur, in computo, seu si is hic terminetur, tunc ipsa ordinata censebitur eius differentia ab ultima 0 seu zero.

Semper ergo momentum figurae v. g. [$AGHMNE$] ita habebitur[,] differentia ordinatarum, quae hoc loco unica est $MN[\sqcap]\frac{1}{2}$ ducatur in abscissas hoc loco in $AL, \sqcap 1$ fient rectangula ut hoc loco $MNE \sqcap 1 \frown \frac{1}{2} \sqcap \frac{1}{2}$. ducatur quodlibet rectangulum in ordinatam suam hoc loco MNE in $LN \sqcap MN$. sed dimidia PE, minutam, seu $LN - \frac{PE}{2} \sqcap \frac{3}{4}$ hoc loco fiet $\frac{3}{8}$. Summae omnium horum solidorum addatur momentum ipsius GHP scilicet ultima ordinatarum GH, hoc loco $\sqcap \frac{1}{2}$ ducta in suam abscissam 2, fiet rectangulum $GHP \sqcap 1$. cuius momentum fit si ducatur in $\frac{GH}{2}$ dimidiam ordinatam, $\sqcap \frac{1}{4}$ erit eius momentum, $\frac{1}{4}$. Addatur $\frac{3}{8} + \frac{2}{8}$ fiet $\frac{5}{8}$, sive $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$ quod est figurae momentum. Idem autem provenit, si sumas semiquadrata ordinatarum nempe $\frac{1 \frown 1}{2}, + \frac{\frac{1}{2} \frown \frac{1}{2}}{2}$ seu $\frac{1}{2} + \frac{1}{[8]}$. Sic ergo generaliter:

---

15 *Am Rande*: $\frac{1}{2} + \frac{1}{8}$

2 ipsius *erg. L* 3 Nimirum *(1)* abscissa AE *(2)* ordinata AE vel LN | *(a)* seu rectangulum *(b)* fit rectangulum ALEN *erg.* | esto *L* 4 ordinatae *(1)* a praecedente, est ipsamet ordinata *(2)* a *L* 7 AHGHMNE *L ändert Hrsg.* 8 loco *(1)* unica *(2)* duae *(3)* unica est. *(a)* Rectangulum MNE *(b)* MN | $\sqcap$ *erg. Hrsg.* | $\frac{1}{2}$ *(aa)* ductis, in *(bb)* et GH, ordinata ultima, $\frac{1}{2}$ *(aaa)* ductis in *(bbb)* ducantur in abscissas, prior in AL $\sqcap$ 1, posterior in AG $\sqcap$ 2, fiunt rectangula MNE $\sqcap$ $\frac{1}{2}$, et GHP $\sqcap$ 1 *(c)* ducatur *L* 8 f. AL, $\sqcap$ 1 *(1)* eorum summa hoc loco *(a)* triangula *(b)* fient *(2)* fient rectangula | ut hoc loco *erg.* | MNE *L* 10 sed *(1)* abscissa *(2)* dimidia *L* 11 momentum … scilicet *erg. L* 12 hoc loco *erg. L* 15 4 *L ändert Hrsg.*

$\frac{x^2}{2} \sqcap\!\sqcap ywx - \frac{yw^2}{2} + \frac{e^2b}{2}$, ponendo y abscissam, x ordinatam, w differentiam [ordinatarum], e ultimam ordinatam[,] b ultimam abscissam. Quae est reg. [6.] schediasm. part. 2.

Unde duci potest corollarium semper haberi summam seriei $\frac{x^2 + yw^2 - 2ywx}{\cancel{2}} \sqcap \frac{e^2b}{\cancel{2}}$. Quod ut exemplo nostro applicemus fiet $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+1,\square,y} - \frac{2}{y^2+y} \sqcap\!\sqcap e^2b \sqcap \frac{1}{b}$. Iam $\frac{2}{y^2+y} \sqcap\!\sqcap \frac{2}{b}$. Ergo (1) $\frac{1}{y^2} + \underset{A}{\frac{1}{y+1,\square,y}} \sqcap\!\sqcap e^2b + \frac{2}{b}$. Iungamus duas aequationes supra inventas: (2) $\frac{1}{b^2} \sqcap\!\sqcap 2C - B \sqcap 2A + B$ (3). ☿ Ergo (4) $C \sqcap A + B$ et (5) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b} \sqcap C$. Ergo (6) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b} \sqcap A + B$ per 5. et 4. Iam $B \sqcap \frac{1}{b^2} - 2A$. per 2. et 3. Ergo $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{b} \sqcap\!\sqcap \boxed{A} + \frac{1}{b^2} - \boxed{2}A$. Iam $-A \sqcap \frac{1}{y^2} - e^2b + \frac{2}{b}$ per aeq. 1. et fiet: $\boxed{\frac{1}{y^2}} - \frac{1}{b} \sqcap \frac{1}{b^2} \boxed{+\frac{1}{y^2}} - e^2b + \frac{2}{b}$.

Error calculi in eo quod scilicet ordinatam primam quae differentiarum summa est, cum ultima, confudi. Aequatio, in qua ultima ordinata adhibetur ut ubi est e^2b servit tantum ad finite productarum serierum inveniendas summas.

---

8 *Zu* ☿ *am Rande*:

$$\begin{array}{ll} A & \frac{1}{y+1,\square,y} \\ B & \frac{1}{y+1,y,\square} \\ C & \frac{1}{y+1,y^2} \end{array}$$

1 Quae est reg. | 2. *ändert Hrsg.* | schediasm. part. 2. *erg. L* 1 f. abscissarum *L ändert Hrsg.* 10 per aeq. 1. *erg. L* 12 ut | ut *streicht Hrsg.* | ubi *L*

---

2 reg. [6.]: s. o. N. 38₃ S. 399 Z. 1–3.

Ergo appellando ordinatas inconstantes x. abscissas inconstantes y. abscissam b. maximae ordinatae, e. abscissam d. minimae ordinatae, h. fient regulae:

$\frac{x^2}{2} \sqcap\!\!\sqcap ywx - \frac{yw^2}{2} + \frac{d^2h}{2}$. Et pari iure $\frac{y^2w}{2} + \frac{d^2h}{2} \sqcap\!\!\sqcap xy - \frac{x}{2}$. $e - h \sqcap\!\!\sqcap w$. $xw \sqcap\!\!\sqcap \frac{e^2}{2} - \frac{w^2}{2}$. $yw \sqcap x$. in decrescentibus. Nam in ascendentibus, seu crescentibus $yw \sqcap\!\!\sqcap eb - x$.

Variandae hae regulae nonnihil prout series crescunt aut decrescunt, item omitti poterat mentio minimae ordinatae; intelligendo eam semper esse ultimam w. Contra ubique inseri etiam potest, ubi ipsarum w, mentio est.

Omnes series hactenus inventae per unam ex his regulis habentur; exceptis seriebus potestatum, quae habentur per differentias exhaustas. Excutiendum adhuc hoc argumentum, quando in numeris mutare licet abscissam in ordinatam et contra. Ita $x \sqcap \frac{1}{y}$. Unde $y \sqcap \frac{1}{x}$. Harmonica series ab utroque latere similis, ut si semper procederet ista inversio, posset haberi summa irrationalium.

$\sqrt{y+1} - \sqrt{y} \sqcap z$. Unde: $y + 1 \; -y - 2\sqrt{y^2+1} \sqcap z^2$. Ergo $z^4 - 2z^2 \; +1 \sqcap 4y^2 \; +1$. et fiet $z\sqrt{z^2-2} \sqcap 2y$. Pro z. pone $v + \frac{1}{2}$. fiet $\sqrt{z^2-2} \sqcap \sqrt{v^2+1+\frac{1}{4}-2}$. sive $\sqrt{v^2-1+\frac{1}{4}} \sqcap v - \frac{1}{2}$, et fiet: $v^2 - \frac{1}{4} \sqcap 2y$. eritque $v \sqcap \sqrt{y+\frac{1}{4}}$. Sumta ergo serie numerorum irrationalium $\sqrt{9}\ \sqrt{8}\ \sqrt{7}\ \sqrt{6}\ \sqrt{5}\ \sqrt{4}\ \sqrt{3}\ \sqrt{2}\ \sqrt{1}$. et alia $\sqrt{8+\frac{1}{4}}\ \sqrt{7+\frac{1}{4}}\ \sqrt{6+\frac{1}{4}}\ \sqrt{5+\frac{1}{4}}\ \sqrt{4+\frac{1}{4}}\ \sqrt{3+\frac{1}{4}}\ \sqrt{2+\frac{1}{4}}\ \sqrt{1+\frac{1}{4}}$. summa erit $2.\ (\sqrt{3} - \sqrt{1}) - \frac{1}{2} \sqcap \frac{3}{2}$ [*bricht ab*]

---

3 *Über der ersten Gleichung*: Reg. 6. plagulae 2^{dae}.

13 *Darüber*: Error calculi

13–17 Der Abschnitt weist eine Reihe von Rechenfehlern auf. Leibniz ändert den Ansatz zweimal durch Überschreiben in $\sqrt{y-1} - \sqrt{y}$ bzw. $\sqrt{y-1} + \sqrt{y}$, erkennt aber, daß dies nicht zum Erfolg führt. Er vermerkt die Fehlerhaftigkeit und beginnt im folgenden Teilstück von neuem. 18 Reg. 6.: s. o. N. 38_3 S. 399 Z. 1–3.

38_8. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS SEXTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 14–15. 1 Bog. 2°. 4 S. tlw. zweispaltig. Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Schediasmatis de serierum summis pars VI[ta].

Cogitandum est de summis irrationalium ineundis: $\sqrt{y+1} - \sqrt{y} \sqcap z$. fiet: $y+1, + \, y - 2\sqrt{y^2+y} \sqcap z^2$. sive $2y+1-z^2 \sqcap 2\sqrt{y^2+y}$. et rursus quadrando: $\boxed{4y^2} + 4[y] - 4yz^2 + 1 - 2z^2 + z^4 \sqcap \boxed{4y^2} + 4y$. et fiet:

$$\begin{array}{l} z^4 - \;2\,z^2 \sqcap [-1]. \text{ sive } z \sqcap \sqrt{2y+1-2\sqrt{y^2+y}}. \\ \quad -4y.. \end{array}$$

Huius seriei finitae, quoniam iniri potest summa, poterit etiam summa inveniri serierum aliarum finitarum, quae constant summis differentiisque aliarum serierum summabilium cum hac.

Sed: antea videamus an haec series reddi possit simpliciter, assumta tali valore ipsarum y, ut ex $\sqrt{y^2+y}$ extrahi possit radix seu sumtis illis tantum numeris triangularibus, qui sunt quadrati. Qualis est 36.

$\boxed{y^2} + y$. aequandus quadrato $\boxed{y^2} \mp 2ym + m^2$. fiet $y \pm 2ym \sqcap m^2$. et $y \sqcap \dfrac{m^2}{1 \pm 2m}$, sive ut denominator sit affirmativus et m integer, $\dfrac{m^2}{1+2m}$ et dividendo

---

15 *Daneben, in der Vorlage als Spalten geschrieben:*

1	2	3	4	5	6	7	8	9
1	3	6	10	15	21	28	36	

4 pars *(1)* 5[ta] *(2)* VI[ta] *L* 7 y *erg. Hrsg.* 8 4y − 5 *L ändert Hrsg.* 10 finitae *erg. L*
16 $+\mathrm{m}^2$. *(1)* erit $3\mathrm{y} \sqcap \mathrm{m}^2$ et $\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{m}^2}{3}$. Sumantur ergo omnes *(2)* fiet *L*

---

14 numeris triangularibus: Leibniz führt die Überlegung irrtümlich für die verdoppelten Dreieckszahlen y^2+y durch, wie er in der Anmerkung zu S. 446 Z. 4–11 erkennt, korrigiert den Text aber nicht.

$$\begin{array}{lll} & -\dfrac{m}{2} & \\ \dfrac{m^2 \quad * \qquad *}{\boxed{2m+1}} & \smallint \dfrac{m}{2} - \dfrac{1}{4} & \\ & \boxed{2m+1} & \end{array}$$

$\dfrac{m^2}{1 \ddagger 2m} \sqcap p$. integro. Ergo $\dfrac{m^2}{p} \sqcap 1 \ddagger 2m$. Ponamus $m \sqcap pq$. fiet: $\dfrac{p^2q^2}{p} \sqcap 1 + 2pq$. Ergo $q^2p \sqcap 1 + 2pq$. $q^2p - 2pq \sqcap 1$. Unde $qp - 2p \sqcap \dfrac{1}{q}$ integer fracto, quod est impossibile.

Eodem modo: $m^2 \sqcap p \ddagger 2mp$. Ergo $\dfrac{m^2}{p} \sqcap 1 \ddagger 2m$. Ergo m^2, divisibilis per p. ita tamen ut radix eius non sit divisibilis per p. Deinde $m^2 \dagger 2mp \sqcap p$, erit $m \dagger$ [2]$p \sqcap \dfrac{p}{m}$. Ergo p divisibilis per m. Ergo resumta aequatione pro p ponendo mn, fiet: $\dfrac{m^2}{1 \ddagger 2m} \sqcap mn$. Ergo $\dfrac{m}{1 \ddagger 2m} \sqcap n$. Unde: $m \sqcap n \ddagger 2mn$, et $m \dagger 2mn \sqcap n$. Ergo $1 \dagger 2n \sqcap \dfrac{n}{m}$. Ergo n, divisibilis per m. Ponamus ergo $n \sqcap mh$, fiet resumta aequatione $\dfrac{\cancel{m}}{1 \ddagger 2m} \sqcap \cancel{m}h$. et fiet $\dfrac{1}{1 \ddagger 2m} \sqcap h$. Ergo si m sit integer h, necessario est fractus.

4–447,12 Valde notabilia hic dicta sunt de integris investigandis per duplicem methodum.

4–11 Ex ratiocinatione ista patet impossibile esse ut numerus triangularis duplicatus fiat unquam quadratus.

5 +2pq. *(1)* | Sed *streicht Hrsg.* | non ita exitus an ita: *(2)* $q^2p - 2pq$ *L* 7 2 *erg. Hrsg.*

---

4 $\dfrac{m^2}{1 \ddagger 2m}$: Leibniz hat die Rechnung bis Z. 5 zunächst mit dem Ansatz $\dfrac{m^2}{1+2m}$ durchgeführt und nachträglich nicht durchgehend verallgemeinert.

$$\begin{array}{rrrrl}
 & 1 & \pm\ 2m & & \frown\ sm + r \sqcap m^2. \\
 & sm & + & r & \\
\cline{2-4}
 & r & \pm\ 2mr & & \\
sm & \pm\ 2sm^2 & & & \\
\hline
\pm\ 2sm^2 & \pm\ 2mr & + & r \sqcap m^2 & \text{sive } \pm\ 2sm^2 \pm 2rm + r \sqcap m^2. \\
 & +\ sm & & & \qquad\qquad + s\,..
\end{array}$$

NB. ista dividendi methodus in numeris non ita procedit, ut in incognitis etiamsi ipsi numeri debeant esse incogniti seu generales ut hoc loco m, ponendo $\pm s \sqcap \dfrac{1}{2}$ fiet: $\boxed{m^2} \pm 2rm + r \sqcap \boxed{m^2}$. et $m \sqcap \dfrac{-r}{\pm 2r \pm \dfrac{1}{2}}$ sive $m \sqcap \dfrac{-2r}{\pm 4r \pm 1} \sqcap \dfrac{2r}{\mp 4r \mp 1}$. Invertendo $\pm\dfrac{1}{2}$ .. $\dfrac{\mp 4mr \mp m}{2r}$ $[\sqcap]$ $1 \sqcap \mp 2m \mp \dfrac{m}{2r}$. tantum ergo opus est sumi m, multiplum ipsius $2r$. et poterit m^2, dividi per $1 \pm 2m$. id est fiet: $1 \sqcap \mp 4rt \mp t$. et erit $\dfrac{1}{\mp 4r \mp 1} \sqcap t$. seu $1 \sqcap \mp 4r \mp 1$. Ergo $r \sqcap 0$. Si r debet esse integer esse debet $m \sqcap 0$.

Ut ergo redeamus ad scopum, quia summa haberi potest huius seriei, $z \sqcap \sqrt{2y + 1 - 2\sqrt{y^2 + y}}$ et ponendo $y \sqcap \dfrac{m^2}{1 \pm 2m}$ fit $\sqrt{y^2 + y} \sqcap y \mp m$. seu $\dfrac{m^2}{1 \pm 2m} \mp m$. fiet $z \sqcap \sqrt{2y + 1\boxed{-y}} \pm m$ sive $z \sqcap \sqrt{\dfrac{m^2}{1 \pm 2m} + 1} \pm m$ sive $\sqrt{\dfrac{2m^2 + 1 \pm 2m\boxed{+m^2}}{1 \pm 2m}}$, sive

---

1–12 N o t a b i l i s   h a e c   m e t h o d u s   h a b e n d i   n u m e r o s   i n t e g r o s ,   i n   e x e m p l u m , etsi alioquin hic exitum non dederit.

14 *Neben* ponendo: Error ab hoc signo ⊙ usque ad sequens ☽.

5+7 +r ⊓ m² *(1)* et ponendo s ⊓ n + 1. fiet: 2nm² *(2)* NB. *L*   10 ⊓ *erg. Hrsg.*

---

14 ponendo $y \sqcap \dfrac{m^2}{1 \pm 2m}$: Der folgende Ansatz, bei dem m die natürlichen Zahlen durchläuft, ist verfehlt; Leibniz erkennt dies ab S. 451 Z. 12 und markiert den ungültigen Abschnitt.   15 fiet z: Leibniz vergißt bei der Ersetzung von $2\sqrt{y^2 + y}$ den Faktor 2 und im Zähler des dritten Wurzelausdrucks den Term $\pm\ m$. Die Rechnung wird dadurch bis S. 448 Z. 9 beeinträchtigt, Leibniz setzt anschließend neu an.

$z \sqcap \dfrac{\sqrt{2m^2 \ddagger 2m+1}}{1 \ddagger 2m}$. Sumtis ergo m numeris naturalibus; summa quotcunque irrationalium huius naturae haberi potest. Mutando signum in $+$, fiet $z \sqcap \sqrt{\dfrac{2m^2+2m+1}{2m+1}}$, sive $z \sqcap \sqrt{\dfrac{2m^2}{2m+1}+1}$.

Ergo $\sqrt{\dfrac{2}{2+1}+1}$ $\sqrt{\dfrac{8}{4+1}+1}$ $\sqrt{\dfrac{18}{6+1}+1}$ $\sqrt{\dfrac{32}{8+1}+1}$ summari possunt. Eorum enim summa est differentia inter maximam seu potius proxime maiorem et minimam $\sqrt{y}$. Maxima est exclusa, minima inclusa.

Iam $y \sqcap \dfrac{m^2}{1 \ddagger 2m}$ seu $\dfrac{m^2}{1+2m}$. fiet $\sqrt{y} \sqcap \dfrac{m}{\sqrt{1+2m}}$. Proxime maior ergo y est $\dfrac{25}{1+10} \sqcap \dfrac{25}{11}$, cuius radix $\dfrac{5}{\sqrt{11}}$. minima autem est $\dfrac{1}{3}$, seu $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$. Ergo $\dfrac{5}{\sqrt{11}} - \dfrac{5}{\sqrt{3}}$ aequantur summae horum quatuor irrationalium.

Res ob momentum sui resumenda est:

$$\frac{m+1}{\sqrt{\underset{3}{\boxed{1}}+2m\boxed{+2}}} - \frac{m}{\sqrt{1+2m}} \sqcap z.$$

Ergo $\dfrac{m^2+2m+1}{\underset{3}{\boxed{1}}+2m\boxed{+2}} + \dfrac{m^2}{1+2m} - 2 \frown \dfrac{m^2+m}{\sqrt{\begin{array}{l}3+2m\\ \hline \dfrac{+2m+4m^2}{3+4m+4m^2}\end{array}}} \sqcap z^2$.

Ergo $\dfrac{m^2+2m+1}{3+2m} + \dfrac{m^2}{1+2m} - z^2 \sqcap \dfrac{+2m^2+2m}{\sqrt{3+4m+4m^2}}$ in quo patet esse errorem.

Resumatur res ab ovo: $\sqrt{y+1} - \sqrt{y} = z$.

1 numeris *(1)* arithmet *(2)* naturalibus *L* 5 enim *(1)* summa est: $\sqrt{\mathrm{y}+1} - \sqrt{\mathrm{y}}$. *(a)* ita mut *(b)*. Est autem *(c)* si *(2)* summa *L* 5 seu ... maiorem *erg. L* 6 $\sqrt{\mathrm{y}}$. *(1)* Est autem maxima ex *(2)* Maxima est *(a)* inclusa *(b)* exclusa *L*

13 $+2m+4m^2$: Richtig wäre $+6m+4m^2$. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit in der nächsten Zeile und setzt neu an.

Ergo $y+1+y-2\sqrt{y^2+y} \sqcap z^2$. Ergo $z \sqcap \sqrt{2y+1-2\sqrt{y^2+y}}$. Pone $y^2+y \sqcap y^2-2ym+m^2$, fiet: $y \sqcap \frac{m^2}{1+2m}$. Quare resumendo fiet: $\sqrt{\frac{m^2}{1+2m}+1}-\sqrt{\frac{m^2}{1+2m}} \sqcap z$. Ita NB. cum abscissae sint y, erunt quidem progressiones arithmeticae, nam differunt unitatibus. Sed prima earum vel minima, non erit unitas, sed $\frac{1}{1+2} \sqcap \frac{1}{3}$. Ordinatae autem erunt harum abscissarum radices. Si m sit 4. $\sqrt{\frac{m^2}{1+2m}}$ erit $\frac{[4]}{3}$.

$$\frac{2m^2}{1+2m}+1\boxed{-2\sqrt{\frac{m^4}{1+4m+4m^2}+\frac{m^2}{1+2m}}}-2\sqrt{\frac{m^4+m^2+2m^3}{1+4m+4m^2}} \sqcap z^2 .$$

Iam ex hac quantitate signo affecta potest extrahi radix, fiet ergo $\frac{2m^2}{1+2m}+1-2\frown\frac{m^2+m}{1+2m} \sqcap z^2$, fietque $1-\frac{2m}{1+2m} \sqcap z^2$, sive $\frac{1\boxed{+2m-2m}}{1+2m}$. et fiet $z \sqcap \sqrt{\frac{1}{1+2m}}$. quod conferendum superiori $z \sqcap \sqrt{2y+1-2\sqrt{y^2+y}}$, sive $z \sqcap \sqrt{\boxed{\frac{2m^2}{1+2m}}+1\boxed{-\frac{2m^2}{1+2m}}-2m}$. Rursus error in calculo.

Quem ut corrigamus videndum: $\frac{m^2}{1+2m}+1, \frown \frac{m^2}{1+2m}$, facit $\frac{m^4}{1+2m,\square}+\frac{m^2}{1+2m}$, vel $\frac{m^4,+m^2 \frown 1+2m}{1+2m,\square}$ vel $\frac{m^4+m^2+2m^3}{1+2m,\square}$ vel $\frac{m^2+m}{1+2m},\square$.

Ergo $-2\sqrt{\frac{[m^2]}{1+2m}+1 \frown \frac{m^2}{1+2m}}$ facit: $-2\sqrt{\frac{m^2+m}{1+2m},\square} \sqcap -2 \frown \frac{m^2+m}{1+2m}$.

Ergo $-2\ \sqrt{y^2+y} \sqcap \frac{-2m^2-2m}{1+2m}$ et $\sqrt{y^2+y} \sqcap \frac{m^2+m}{1+2m}$. Quod debet esse $y-m$. seu $\frac{m^2}{1+2m}-m$ seu $\frac{\boxed{m^2}-m-2m^2}{1+2m}$. Sola ergo in signis differentia est. Quodsi ergo ponamus $m-y$, fiet $\frac{-m^2+m+2m^2}{1+2m}$ sive $\frac{m^2+m}{1+2m}$. Quod et faciendum est nam quia

4 vel minima *erg. L* 5 2 *L ändert Hrsg.* 13 m^2+1 *L ändert Hrsg.*

$y \sqcap \dfrac{m^2}{1+2m}$ ideo y est minor quam m. Concors ergo hoc modo fit calculus. Quia ergo $\sqrt{y^2+y} \sqcap \dfrac{m^2+m}{1+2m}$. ideo pro $z \sqcap \sqrt{2y+1-2\sqrt{y^2+y}}$. fiet:

$z \sqcap \sqrt{\boxed{\dfrac{2m^2}{1+2m}}+1\boxed{-\dfrac{2m^2}{1+2n}}-\dfrac{2m}{1+2m}}$, et vel $z \sqcap \sqrt{1-\dfrac{2m}{1+2m}}$, sive

$z \sqcap \sqrt{\dfrac{1+2m-2m}{1+2m}}$, sive $z \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{1+2m}}$.

Quod si pro $\sqrt{y^2+y}$ ponamus radicem, $\dfrac{m^2}{1+2m}-m$, quod in nostra potestate est, fiet: $z^2 \sqcap \boxed{\dfrac{2m^2}{1+2m}}+1\boxed{-\dfrac{2m^2}{1+2m}}+2m$, et erit $z \sqcap \sqrt{1+2m}$.

Hinc sequitur radices numerorum imparium supra unitatem summari posse, quantocunque sint numero, per compendium regulae generalis.

Sed hinc sequeretur et diversas ipsarum z. significationes habere summas inter se invicem aequales, quod est absurdum. Itaque radix $\sqrt{y^2+y}$ non debet aequari quantitati negativae, alioquin, foret $-\sqrt{y^2+y}$ additio potius quam subtractio, ac proinde idem ac si sumsissemus non $\sqrt{y+1}-\sqrt{y}$ sed $\sqrt{y+1}+\sqrt{y}$. Posterior ergo acceptio non procedit, nec z valere potest $\sqrt{1+2m}$.

Quod si faciamus y^2+y, a $y^2+2yn+n^2$. fiet $y \sqcap \dfrac{n^2}{1-2n}$. ac proinde ponendo y esse quantitatem affirmativam, fiet: duplum ipsius n, minus unitate et fiet $z^2 \sqcap \boxed{\dfrac{2n^2}{1-2n}}+1$ $\boxed{-\dfrac{2n^2}{1-2n}}-2n$ et $z \sqcap \sqrt{1-2n}$.

Atque ita sumendo seriem ipsarum n, arithmeticae progressionis, sed ita, ut maxima non perveniat ad $\dfrac{1}{2}$. summa earum iniri potest.

Ut sciamus an ope alicuius seriei haberi possit summa infinitarum eius differentiarum, ecce notam[:] Si minima seriei ordinata assignari potest; tunc series differentiarum non

8 f. generalis. *(1)* Tantum superest experiamur, quid fiat *(2)* Sed *L*

nisi finita haberi potest, v. g. si minima $\sqrt{y}$ seu minima $\sqrt{\dfrac{m^2}{1+2m}}$ ut habeatur, ponamus $m \sqcap$ quantumlicet parvam, et postea paulo maiorem. Si ipsius m seu quantitatis naturalis, minutio minuet, auctio auget ordinatam, tunc series est crescens, et habetur minima ordinata; sin contra; series est decrescens et haberi ea non potest. Si series habet flexum contrarium, quasi duae concipiendae sunt series, inter se per flexum contrarium divisae, quantum ad nostrum scopum.

Nota etsi dixi 2 debere esse minus quam n, attamen si ab initio sumsissemus, non $\sqrt{y+1} - \sqrt{y}$, sed $\sqrt{y+a} - \sqrt{y}$, explicando v. g. a per 1000. seu $\sqrt{y+1000} - \sqrt{y}$. fiet: $\sqrt{y+a} - \sqrt{y} \sqcap z$. et $2y + a - 2\sqrt{y^2+ay} \sqcap z^2$. et ponendo $y^2 + ay \sqcap y^2 + 2ny + n^2$, fiet $y \sqcap \dfrac{n^2}{a-2n}$. et $-2\sqrt{y^2+ay} \sqcap -2y - 2n \sqcap \dfrac{-2n^2}{a-2n} - 2n$. et fiet $z^2 \sqcap \boxed{\dfrac{2n^2}{a-2n}} + a \boxed{-\dfrac{2n^2}{a-2n}} - 2n$. sive $z \sqcap \sqrt{a-2n}$. Posito ergo $a \sqcap 1000$, sufficit n esse infra 500.

Sed hinc iam video id fieri non posse, nam necesse est n, esse invariabiles; alioquin non potest differentia duarum diversarum ordinatarum esse: $\sqrt{\dfrac{n^2}{a-2n} - a}, -\sqrt{\dfrac{n^2}{a-2n}}$, idem est supra de ipsis m. quare falsa sunt omnia quae de seriebus variabilibus $\dfrac{1}{\sqrt{1+2m}}$, vel $\sqrt{a-2n}$. ineundis diximus: Nec proinde valor ipsius y explicari debet et quaerendus est casus, in quo valor cuiusdam quantitatis in valorem incognitae proximae, eodem modo formatae ductus, det quadratum. Eiusque casus ope simplicium radicum haberi poterit summa:

Aliter ponendo x ordinatam, et ξ proxime minorem ordinatam faciendoque $x - \xi \sqcap z$, et $x^2 - 2x\xi + \xi^2 \sqcap z^2$. Si iam $2x\xi$ est quadratus, vel quod vix putem eventurum destrui

12 *Am Rande:* ☽

2 f. naturalis, *(1)* | minutio *streicht Hrsg.* | auget *(2)* minutio *L* 6 f. scopum. *(1)* Habemus ergo duo inventa admiranda: Compen *(2)* Nota *L* 15 f. est *(1)* quasi *(2)* casus, in quo *(a)* ordinatae qua *(b)* quadratum ordinatae in quadratum ordinatae proximae ductum det quadrat *(c)* quan *(d)* formula quaedam in *(e)* valor *(aa)* quanti *(bb)* cuiusdam *(aaa)* incognitae *(bbb)* quantitatis *L* 19 Aliter *(1)* si efficiatur ut *(a)* $\sqrt{\mathrm{y}}$ *(b)* $\sqrt{\mathrm{x}} \frown \mathrm{x}$ pro *(2)* ponendo *(a)* $\sqrt{\mathrm{x}}$ ordinatam et $\sqrt{\mathrm{x}+\mathrm{w}}$. ordinatam | proximam *streicht Hrsg.* |, *(aa)* si $-2\mathrm{x} + \mathrm{xw} - 2\mathrm{xw} + \mathrm{x}^2 +$ *(bb)* | si sit *streicht Hrsg.* | $\mathrm{x} + \mathrm{w} - \mathrm{x}$, *(aaa)* et qu *(bbb)* $\sqcap$ z ($\sqcap$ w.) | et inde *streicht Hrsg.* | $\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{xw} + \mathrm{w}^2 + \mathrm{w}^2 - 2\mathrm{wx} \sqcap \mathrm{z}^2$. *(b)* x ordinatam *L*

potest, radicum simplicium haberi potest summa. Ut $x\xi$ sit quadratus necesse est inveniri posse seriem numerorum non quadratorum, ita tamen ut quilibet ex ipsis ductus in proximum det quadratum.

$$\begin{array}{ccccccccc} a & & b & & c & & d & & e \\ & ab \sqcap l^2 & & bc \sqcap m^2 & & cd \sqcap n^2 & & de \sqcap p^2 & \end{array}$$

Ergo $a \sqcap \dfrac{l^2}{b}$, et $b \sqcap \dfrac{m^2}{c}$, et $c \sqcap \dfrac{n^2}{d}$, et $d \sqcap \dfrac{p^2}{e}$. Ergo $c \sqcap \dfrac{n^2e}{p^2}$, et $b \sqcap \dfrac{m^2p^2}{n^2e}$, et $a \sqcap \dfrac{l^2n^2e}{m^2p^2}$.

$\dfrac{3}{1}\quad \dfrac{4}{3}\quad \dfrac{27}{4}\quad \dfrac{[64]}{27}\quad \left[\dfrac{27 \frown 25}{64}\right]$ etc. Eodem modo incipi poterat a $\dfrac{2}{1}$ et fieret:

$\dfrac{2}{1}\quad \dfrac{4}{2}\quad \dfrac{18}{4}$ etc.

Vide partem VII$^{\text{am}}$ seu plag. seq.

2 ut *(1)* duo *(2)* duo *(3)* quilibet *L* 8 100 *L ändert Hrsg.* 8 $\dfrac{27 \frown 36}{100}$ *L ändert Hrsg.*

38_9. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS SEPTIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 16–17. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringer Textverlust durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Schediasmatis de serierum summis pars VII^ma^.

Esto series eiusmodi:

$$\frac{f}{y^2}.\qquad \frac{y^2,\frown y^2\pm 2y\beta+\beta^2}{f}.\qquad \frac{f,\frown y^2\pm 4y\beta+4\beta^2}{y^2,\frown y^2+2y\beta+\beta^2}.$$

$$\frac{y^2,\frown y^2\pm 2y\beta+\beta^2,\frown y^2\pm 6y\beta+9\beta^2}{f,\frown y^2\pm 4y\beta+4\beta^2}.\ \text{etc.}$$

Necesse est autem f esse quantitatem non quadratam.

Si $\pm$ significat $+$ series crescit si $\pm$ significet $-$ series decrescit, contrarium evenit si ex serie exposita aliam facias invertendo terminos quoslibet, faciendo numeratorem ex nominatore et contra, ut sit:

$$\frac{y^2}{f}.\qquad \frac{f}{y^2,\frown y^2\pm 2y\beta+\beta^2}.\qquad \frac{y^2,\frown y^2+2y\beta+\beta^2}{f,\frown y^2\pm 4y\beta+4\beta^2}.$$

$$\frac{f,\frown y^2\pm 4y\beta+4\beta^2}{y^2,\frown y^2\pm 2y\beta+\beta^2,\frown y^2\pm 6y\beta+9\beta^2}.$$

Non recte formavi, ne opus sit mutare formam, seu numeros, rectius sic fiet:

$\dfrac{b^2\frown y^2}{f}.\ \dfrac{f,\frown y^2\pm 2y\beta+\beta^2}{b^2\frown y^2}.$ Ecce duo termini quibus expositis exponitur tota series, nam intelligi debet, tertium fieri ex secundo, ut secundus fit ex primo. Sed mutanda nonnihil formula est, ut omnia comprehendat et fiet ita:

---

19 f. *Zur Streichung:* Error

5 f. pars *(1)* VI^ta^ *(2)* VII^ma^. | Inveni tandem methodum, qua haberi possit *(a)* series num *(b)* summa seriei numerorum irrationalium, simplicium, tam finitorum quam infinitorum. *gestr.* | Esto *L*

14 f. $\dfrac{\mathrm{f},\frown \mathrm{y}^2\pm 4\mathrm{y}\beta+4\beta^2}{\mathrm{y}^2,\frown \mathrm{y}^2\pm 2\mathrm{y}\beta+\beta^2,\frown \mathrm{y}^2\pm 6\mathrm{y}\beta+9\beta^2}$. *(1)* Sit alia *(2)* Sint aliae *(a)* radices *(b)* series duae *(3)* | Sint aliae duae series radicum ab his terminis: *streicht Hrsg.* | *(4)* Imo r *(5)* Non *L* 15 numeros *(1)* sufficit *(2)*, rectius *L* 17 primo. *(1)* Hoc uno tantum adiecto quod formulae ipsi commode inseri non potest. *(2)* Sed *L*

$$\frac{A \sqcap \Box}{B \sqcap \text{non } \Box} \qquad \frac{C \sqcap B \frown y^2}{D \sqcap A} \qquad \frac{E \sqcap D \frown y^2 \ddagger 2y\beta + \beta^2}{F \sqcap C}$$

Si iam seriem continuare velis, tertius pro primo sumendus, quartus pro secundo, quintus pro tertio. Idem est, si omnes terminos invertas.

Posito seriem directam esse decrescentem, ob $\ddagger$ non potest tamen decrescere in infinitum, nam infra primum y descendi non potest in numeris. Contrarium est in serie inversa.

Nunc ut veniam ad summam irrationalium, utar numeris

$$\sqrt{\frac{1}{2}} \qquad \sqrt{\frac{2}{1}} \qquad \sqrt{\frac{4}{2}} \qquad \sqrt{\frac{18}{4}} \qquad \sqrt{\frac{64}{18}} \qquad \sqrt{\frac{450}{64}} \quad \text{etc.}$$

$$0 \qquad \sqrt{\frac{1}{2}} \qquad -\sqrt{\frac{1}{18}}$$

Series autem differentiarum inter has radices, ita habebuntur: $\sqrt{\frac{4}{2}} - \sqrt{\frac{2}{1}} \sqcap w$, fiet: $w^2 \sqcap \frac{4}{2} + \frac{2}{1} - 2\sqrt{\frac{4 \frown 2}{2 \frown 1}} \sqcap \frac{4}{2} + \frac{2}{1} - 4 \sqcap 0$. Ergo $w \sqcap \sqrt{0}$. Eodem modo: $\sqrt{\frac{18}{4}} - \sqrt{\frac{4}{2}} \sqcap w$.

8–455,2 *Nebenbetrachtungen und Nebenrechnungen:*

8

$$\begin{array}{r} 25 \\ \underline{18} \\ 200 \\ 25 \\ \overline{450} \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{8}\cancel{0}0 \;\not\int\; 450 \\ \cancel{4}\cancel{4} \end{array}$$

9 $\frac{3}{2}\sqrt{2}, -\frac{4}{3}\sqrt{\frac{4}{2}}$

2 sumendus, *(1)* secundus *(2)* quartus *L* 4 directam *erg. L* 4 ob $\ddagger$ *erg. L*

et $w^2 \sqcap \frac{18}{4}+\frac{4}{2}-2\boxed{\sqrt{\frac{18,4}{4,2}}},\frown 3$. Ergo $w \sqcap \sqrt{\frac{1}{2}}$. Eodem modo: $w^2 \sqcap \boxed{\frac{64}{18}}\ \underset{4+\frac{1}{2}}{\boxed{+\frac{18}{4}}}\ -2\frown$ $4\boxed{+\frac{72}{18}}-\frac{8}{18}\sqcap\frac{1}{18}$. Ergo $w\sqcap\sqrt{\frac{1}{18}}$. Ita $\boxed{\frac{450}{64}}\boxed{+\frac{64}{18}}\boxed{-2\frown 5}+\overset{\boxed{5}}{\boxed{\frac{90}{18}}}-\frac{16}{18}\boxed{+5}+\frac{130}{18}\sqcap\frac{114}{18}$.

---

1 $\quad \frac{18}{4}+\frac{4}{2}-2\frown 3\sqcap\frac{1}{2} \qquad \frac{64}{18}+\frac{18}{4}\sqcap\frac{64\frown 4+18\frown 18}{18\frown 4} \qquad \frac{64}{18}+\frac{18}{4}-2\frown 4 \sqcap 8$

$$\begin{array}{rr}
18 & \\
18 & \\
\hline
144 & \\
18 & \\
\hline
324 & \\
256 & 72 \\
\hline
580 & 8 \\
\underline{576} & \overline{576} \\
4 &
\end{array}$$

2 $\quad \frac{450}{64}\quad\frac{64}{18}-\cancel{2}\frown 10\sqcap$

450	64	64	8100	4
18	64	18	4096	$\cancel{5}8$
360	256	512	12196	$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{5}20$ ⨍ 17
45	384	64	11520	$\cancel{6}\cancel{7}66$
8100	4096	11520	676	67

18	64	450	130
5	5	320	16
90	320	130	114

---

2 $-\frac{16}{18}\ldots+\frac{130}{18}$: Richtig wäre $-\frac{26}{18}+\frac{130}{64}=\frac{169}{288}$.

Generaliter $\sqrt{\dfrac{f}{y^2}} - \sqrt{\dfrac{y^2, \frown y^2+2\beta y+\beta^2}{f}} \sqcap w$. Ergo $w^2 \sqcap \dfrac{f}{y^2} + \dfrac{y^2, \frown y^2+2\beta y+\beta^2}{f} - 2\sqrt{y^2+2y\beta+\beta^2}$ seu $-2 \frown y+\beta$. Ergo $w^2 \sqcap \dfrac{f}{y^2} + \dfrac{y^2, \frown y^2+2\beta y+\beta^2}{f} - 2y - 2\beta$. sive $\dfrac{f^2 + \quad y^4, \frown y^2+2\beta y+\beta^2, \quad -2fy^3-2y^2\beta f}{y^2 f}$. Sed hinc iam video istam seriem reapse non esse seriem irrationalium, sed seriem rationalium, per quandam constantem $\sqrt{f}$ divisam, nam ex $\sqrt{\dfrac{f^2 + \quad y^4, \frown y^2+2y\beta+\beta^2 \quad -2fy^3-2fy^2\beta}{y^2 f}}$ per $\sqrt{f}$ multiplicata, radix extrahi potest, fiet enim eius radix $\dfrac{f, [-]y^2 \frown y+\beta}{y}$.

Nondum ergo methodum video, per quam summae iniri possint irrationalium simplicium seu naturalium.

$$\frac{1}{1,2} \quad \frac{1}{2,3} \quad \frac{1}{3,4} \quad \frac{1}{4,5} \quad \frac{1}{5,6} \quad \text{etc. seu } \frac{1}{y \frown y+1}.$$

Momentum eorum ex y. est series omnium $\dfrac{1}{y+1}$. Momentum eorum ex $y+1$. est series omnium $\dfrac{1}{y}$. Momentum autem ex $y+1$. a momento ex y. differt serie in y. seu seriei cylindro. At series omnium $\dfrac{1}{y}$ excedit seriem omnium $\dfrac{1}{y+1}$ maxima $\dfrac{1}{y}$. Ergo maxima $\dfrac{1}{y} \sqcap$ seriei omnium $\dfrac{1}{y, \frown y+1}$.

---

8 *Am Rande, gestrichen:* Hactenus nihil egi in summis irrationalium simplicibus investigandis. Sed iam esto series haec: $\genfrac{}{}{0pt}{}{\sqrt{2}.}{\sqrt{2}} + 2\sqrt{2}.$

4 quandam *(1)* rationalem *(2)* constantem *L* 6 + *L ändert Hrsg.* 10 f. series omnium *erg. L zweimal* 11 differt *(1)* figura *(2)* serie *L* 12 cylindro. *(1)* Differentia ergo inter *(2)* At idem moment *(3)* At *L* 12 maxima *(1)* serierum *(2)* $\frac{1}{y}$. Ergo *L*

Eadem methodo omnium habetur dimensio quae sunt eiusmodi v. g. $\dfrac{1}{y, \frown y+1, \frown y+2}$. Nam momentum eorum ex y. est $\dfrac{1}{y+1, \frown y+2}$, momentum eorum ex $y+2$. est $\dfrac{1}{y, \frown y+1}$, ergo quae duo momenta differunt duplo seriei cylindro; differunt vero et cognito seu termino seriei $\dfrac{1}{y, \frown y+1}$, qui non continetur in terminis seriei $\dfrac{1}{y+1, \frown y+2}$, id est primo.

Sed et praeterea, momentum ex $y+1$, est $\dfrac{1}{y, \frown y+2}$. Quod momentum a priori ex $y+2$. cedit figurae cylindro simplici. Quem invenimus.

Datur vero et momentum ex $y+2$. absolute, seu $\dfrac{1}{y, \frown y+1}$. Ergo datur et series omnium $\dfrac{1}{y, \frown y+2}$ seu $\dfrac{1}{1,3}\ \dfrac{1}{2,4}\ \dfrac{1}{3,5}\ \dfrac{1}{4,6}\ \dfrac{1}{5,7}$ etc. Pro 1. pone β habetur series: (1) $\dfrac{1}{y, \frown y+\beta}$. Et series (2) $\dfrac{1}{y, \frown y+\beta, \frown y+2\beta}$ et (3) $\dfrac{1}{y, \frown y+2\beta}$.

Datur vero et series: (4) $\dfrac{1}{y, \frown y+\beta, \frown y+2\beta, \frown y+3\beta}$. Dabitur ergo et series:

(5) $\dfrac{1}{y, *, \frown y+2\beta, \frown y+3\beta}$, ut $\dfrac{1}{1,3,4}\quad \dfrac{1}{2,4,5}\quad \dfrac{1}{3,5,6}\quad \dfrac{1}{4,6,7}$.

$$\dfrac{1}{12}\quad \dfrac{1}{40}\quad \dfrac{1}{90}\quad \dfrac{1}{168}$$

Ex hac autem inventa rursus eodem ratiocinandi modo, datur (6) $\dfrac{1}{y, \frown y+3\beta}$ seu $\dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{10}\ \dfrac{1}{28}$ per datas 3. et 1.

2 $\dfrac{1}{\mathrm{y}, \frown \mathrm{y}+1, \frown \mathrm{y}+2}$ *(1)* $-\dfrac{1}{\mathrm{y}^2}$ *(2)*. Nam cylinder eorum ex *(a)* y est $\dfrac{1}{\mathrm{y}+1, \frown \mathrm{y}+2}$. *(b)* y + 2. est $\dfrac{1}{\mathrm{y}, \frown \mathrm{y}+1}$. Cylinder eorum ex y + 1. est $\dfrac{1}{\mathrm{y}, \frown \mathrm{y}+2}$ *(3)* Cylinder eorum ex y + 2. est $\dfrac{1}{\mathrm{y}, \frown \mathrm{y}+1}$ *(4)* Nam *(a)* cylinder *(b)* momentum *L* 2 $\dfrac{1}{\mathrm{y}+1, \frown \mathrm{y}+2}$, *(1)* cylinder *(2)* momentum *L* 4 et *(1)* recta *(2)* cognito *L* 6 praeterea, *(1)* idem mo *(2)* momentum *L* 7 y + 2, *(1)* differet *(2)* cedit *(a)* etiam *(b)* figurae *L*

Ex data 4. eodem modo quo 5. dabitur et series $\dfrac{1}{y,\frown y+\beta,*,\frown y+3\beta}$, seu

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{1,2,4} & \dfrac{1}{2,3,5} & \dfrac{1}{3,4,6}. \\ \dfrac{1}{8} & \dfrac{1}{30} & \dfrac{1}{72} \end{array}$$

Generaliter ergo dici potest, omnes series quarum numeratores sunt constantes, nominatorum vero factores arithmetice excedunt perpetua progressione factores nominatoris fractionis praecedentis, esse summabiles.

Quid ergo in hac serie
$$\begin{array}{ccc} \dfrac{1}{3} & \dfrac{1}{35} & \dfrac{1}{99} \\ \dfrac{1}{1,3} & \dfrac{1}{5,7} & \dfrac{1}{9,11} \\ \dfrac{1}{y\frown y+2\beta} & \dfrac{1}{y+4\beta, y+6\beta} & \end{array}$$
cuius seriei ut investigemus summam, conemur eam reducere ad eas quas habemus.

Ut uno termino exprimamus, ponendo β. semper esse terminum constantem, per quem crescunt ipsae y. fiet: $\dfrac{1}{y,\frown y+\frac{1}{2}\beta}$, ponendo β. esse 4. sive $\dfrac{2}{y,\frown 2y+\beta}$, cuius dimidium $\dfrac{1}{y,\frown 2y+\beta}$.

Adhibeamus ergo alias series, ut: $\dfrac{1}{y,\frown y+\frac{1}{2}\beta,\frown y+\beta}$. Eius momentum ex $y+\dfrac{1}{2}\beta$. datur sed caetera eius momenta non dantur.

---

7 *Am unteren Rand, mit Verbindungsstrich zu* hac serie: Mylord Brouncker dedit summam huius seriei: $\dfrac{1}{2,3,4}$ $\dfrac{1}{4,5,6}$ $\dfrac{1}{6,7,8}$ in *Transact.* num. 34. pag. 646.

10 summam, *(1)* et 2β. *(2)* conemur *(a)* terminos *(b)* eam *L* 10 f. habemus. *(1)* Pro 2β. ponamus *(2)* Ut *L* 11 constantem *erg. L* 12 esse 4. *(1)* quare duplicata tota serie fiet: *(2)* sive *L* 15 datur *(1)*. Datur et eius momentum ex *(2)* sed *L*

---

16 Brouncker: *The Squaring of the Hyperbola, by an Infinite Series of Rational Numbers, Philosophical Transactions* III Nr. 34 vom 13./23. April 1668, S. 645–649.

Si figura sit: $\dfrac{1}{y, \frown 2y+\beta}$ eius momentum ex y. est $\dfrac{1}{2y+\beta}$, v. g. $\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{5}\ \dfrac{1}{7}$. si β. sit 1. Eius momentum ex $2y+\beta$, est $\dfrac{1}{1}\ \dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{3}$. Ipsa autem series $\dfrac{1}{y, \frown 2y+\beta}$ est $\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{10}\ \dfrac{1}{21}$. nempe triangulares per intervalla.

A serie $\dfrac{1}{2}\ \dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{4}\ \dfrac{1}{5}\ \dfrac{1}{6}\ \dfrac{1}{7}$ auferendo $\dfrac{1}{3}\ \dfrac{1}{5}\ \dfrac{1}{7}$, residuum erit figurae momentum ex y. etc. sed nihil hinc novi nisi hoc unum, quod series $\dfrac{1}{3} * \dfrac{1}{10} * \dfrac{1}{21}$ pendeat ex quad. circuli.

Iam $\dfrac{1}{1}\ \dfrac{1}{6}\ \dfrac{1}{15}\ \dfrac{1}{28}$ fit $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{6}$ duplicata, quae pendet ex quadratura hyperbolae. Summa autem utriusque habetur, itaque hinc videtur sequi quadraturam circuli pendere ex quad. hyperbolae et contra. Sed hoc postea examinabimus, nunc cogitationem subortam persequar: $\dfrac{1}{y, \frown y^2+2y\beta+\beta^2, -y^3}$ potest intelligi facta ex $\dfrac{1}{y, 2y+\beta, \beta}$ ac proinde haec pendet etiam ex circuli dimensione.

Si sint iam series eiusmodi: $\dfrac{1}{y^2, \frown y^2+2\beta y+\beta^2}$, vel $\dfrac{1}{y^2, \frown y^2+2\beta y+\beta^2, \frown y^2+4\beta y+4\beta^2}$, videamus. Momentum prioris ex y dat: $\dfrac{1}{y, y+\beta, y+\beta}$ cuius valorem primo investigemus. Eius momentum ex y

---

12 *Neben* videamus: Momentum prioris ex $y+\beta$ dat: $\dfrac{1}{y^2, \frown y+\beta}$ cuius dimensio pendet ex $\dfrac{1}{y^2}$.

5 f. circuli *(1)* $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}$ *(2)*. Iam *L* 6 duplicata *erg. L* 9 $\dfrac{1}{\mathrm{y}, \frown \mathrm{y}^2+2\mathrm{y}\beta+\beta^2, -\mathrm{y}^3}$ *(1)* . *(a)* Haec ducta *(b)* Horum momen *(2)* potest *L* 10 f. dimensione. *(1)* Ergo differentia inter *(2)* Si *L*

---

5 pendeat: Leibniz verwechselt die Reihe $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}$ etc. mit der Kreisreihe in der Form $\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}$ etc. Die Überlegung wird dadurch bis Z. 10 beeinträchtigt. 8 postea: s. u. S. 462 Z. 3.

est $\frac{1}{y+\beta,\square}$. Eius momentum ex $y+\beta$, est $\frac{1}{y^2+\beta y}$ quae habetur. Patet ergo has duas figuras $\frac{1}{y,,\ y+\beta,\square}$ et $\frac{1}{y+\beta,\square}$ pendere ex se invicem.

Si sit series: $\frac{1}{y, y+\beta, y-\beta}$, momentum eius ex y. est $\frac{1}{y^2-\beta^2}$, quod habetur. Momentum eius ex $y-\beta$. etiam habetur. Quare habetur ipsa series: $\frac{1}{y, y+\beta, y-\beta}$. Hinc patet ipsas $y-\beta$. ipsis $y+\beta$. tuto immisceri posse, hac serie: $y-\beta, y, y+\beta$. Ita enim servatur arithmeticus ordo.

Iam in seriem: $\frac{1}{y^2-\beta^2}$ ducatur: $\frac{1}{y+\beta}$, fiet $\frac{1}{y-\beta,,\frown y+\beta,\square}$, quae pendet ex ista $\frac{1}{y^2}$. Nam momentum eius ex $y+\beta$. habetur, momentum vero eius ex $y-\beta$. est $\frac{1}{y+\beta,\square}$, vel $\frac{1}{y^2}$. $y^2-\beta^2 \frown y^2+\beta^2$ facit $y^4-\beta^4$. $y^2-\beta \frown y^2+\beta$ dabit $y^4-\beta^2$.

Videamus an non $\frac{1}{y^2,\frown y+\beta,\square}$, possit haberi absolute, quadrata scilicet triangularium. Eius momentum ex y est $\frac{1}{y,\frown y+\beta,\square}$, eius momentum ex $y+\beta$, est $\frac{1}{y^2, y+\beta}$. Horum differentia est cylinder seriei. Porro huius $\frac{1}{y+\beta,\square, y}$, momentum ex $y+\beta$, est series triangularis, momentum eiusdem ex [y], est $\frac{1}{y+\beta,\square}$. Ergo ser. $\triangle^{\text{lar.}} - \frac{1}{y+\beta,\square} \sqcap \frac{1}{y,,y+\beta,\square}$. Alterius vero: $\frac{1}{y^2, y+\beta}$, momentum ex y est series triang. ex $y+\beta$. est $\frac{1}{y^2}$. Ergo $\frac{1}{y^2}$ – ser. $\triangle^{\text{lar.}} \sqcap \frac{1}{y^2, y+\beta}$.

1 ergo *(1)* momentum *(2)* has *L* 9 vel $\frac{1}{\mathrm{y}^2}$. *(1)* Momentum eius ex *(2)* $\mathrm{y}^2-\beta^2 \frown \mathrm{y}^2+\beta^2$ *L* 13 $\frac{1}{\mathrm{y}}$ *L ändert Hrsg.* 13 Ergo *(1)* $\frac{1}{\mathrm{y}, \mathrm{y}+\beta}$ *(2)* ser. $\triangle^{\text{lar.}}$ *L*

10 f. quadrata ... triangularium: s. o. Erl. zu N. 38_7 S. 438 Z. 11 f.

Iam, ex dictis: $\frac{1}{y^2, y+\beta} - \frac{1}{y,,y+\beta,\square} \sqcap \frac{1}{y \frown y+\beta,\square}$. Ergo substitutis valoribus: $\frac{1}{y^2}$ − ser. $\triangle^{\text{lar.}}$, − ser. $\triangle^{\text{lar.}} + \frac{1}{y+\beta,\square} \sqcap \frac{1}{y \frown y+\beta,\square}$. Iam supra plag. huius schediasm. 5. $\frac{1}{y^2} \sqcap C + \frac{1}{b}$. et $C \sqcap \frac{1}{2b^2} + \frac{B}{2}$. et B est $\frac{1}{y,\frown y+\beta,,\square}$. Ergo $\frac{\cancel{1}2}{y^2} \sqcap \frac{1}{\cancel{2}b^2} + \frac{B}{\cancel{2}} + \frac{\cancel{1}2}{b}$. Iam $\frac{1}{y^2} + \frac{1}{y+\beta,\square} \sqcap \frac{2}{y^2} - \frac{1}{b^2}$. ergo $B \sqcap [-]2$ ser. $\triangle^{\text{lar.}} + \frac{[2]}{y^2} - \frac{1}{b^2}$. quo in aequatione praecedente novissima, pro B substituto fiet: 2 ser. $\triangle^{\text{lar.}} \sqcap \frac{2}{b}$. quod dudum constat. Indicium ⟨calculi recti.⟩

$\frac{1}{y^2 \frown y^2-\beta^2}$ puto haberi posse. Nam: eius momentum ex $y+\beta$, est $\frac{1}{y^2, y-\beta}$. Eius momentum ex $y-\beta$, est $\frac{1}{y^2, y+\beta}$. Ergo $\frac{1}{y^2, y-\beta} - \frac{1}{y^2, y+\beta} \sqcap \frac{2}{y^2, y^2-\beta^2}$ (1). Iam: $\frac{1}{y^2, y-\beta}$ ex $y-\beta$, dat $\frac{1}{y^2}$, ex y dat $\frac{1}{y, y-\beta}$. Ergo $\frac{1}{y, y-\beta} - \frac{1}{y^2} \sqcap \frac{1}{y^2, y-\beta}$ (2).

Eodem modo: $\frac{1}{y^2, y+\beta}$ per $y+\beta$ dat $\frac{1}{y^2}$, per y dat $\frac{1}{y, y+\beta}$. Ergo (3) $\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y, y+\beta} \sqcap \frac{1}{y^2, y+\beta}$. Ergo in aeq. 1. substitutis valoribus ex aeq. 2. et 3. fiet:

$$\frac{1}{y, y-\beta} - \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y, y+\beta} \quad \sqcap \frac{2}{y^2, y^2-\beta^2}, \text{ sive:}$$

$$\frac{2}{y, y+\beta} + \frac{1}{b+\beta, b+2\beta} - \frac{2}{y^2} \quad \sqcap \frac{2}{y^2, y^2-\beta^2}. \text{ Hinc illud saltem ducimus:}$$

$$\frac{2}{y^2, y^2-\beta^2} + \frac{2}{y^2} \boxed{-\frac{2}{y, y+\beta}} - \frac{2}{b} \sqcap \frac{1}{b+\beta, b+2\beta}, \text{ sive}$$

---

7 *Über* haberi posse: Imo non.

4 − *erg. Hrsg.* 4 1 *L ändert Hrsg.*

---

2 supra: s. o. N. 38₇ S. 441 Z. 1–3 bzw. die Gleichungen (2) und (5) S. 443 Z. 8. 8–11 Leibniz setzt im Zähler der rechten Seite der Gleichungen (1)–(3) stillschweigend $\beta = 1$.

$\frac{2}{y^2, y^2-\beta^2} + \frac{2}{y^2} \sqcap$ cognito $\frac{1}{b+\beta, b+2\beta} + \frac{2}{b}$. Habemus ergo:

$\frac{2y^2,, + 2y^2, y^2-\beta^2}{y^2, y^2-\beta^2, y^2}$ seu $\frac{2,, + 2, y^2-\beta^2}{y^2, y^2-\beta^2} \sqcap$ cognitae $\frac{1}{b+\beta, b+2\beta} + \frac{2}{b}$.

Superest, ut quae de circulo et hyperbola dicta sunt, perficiamus.

Series: $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{35}$. $\frac{1}{99}$. etc. pendet ex quadratura circuli, et aequatur rationi quadrantis circumferentiae ad diametrum. Ea sic enuntiabitur analytice: $\frac{1}{y, y+\frac{1}{2}\beta}$, ponendo, y. esse arithmetice crescentes; et β. esse incrementum. Primam autem y esse $\sqcap$ 1. et ipsam β. incrementum constans esse 4. Habita autem summa unius $\frac{1}{y, y+\frac{1}{2}\beta}$, secundum hanc quam dixi explicationem, habebitur et summa cuiuslibet, quomodocunque prima seu minima y, et intervallum constans ipsarum y, explicentur.

Quod ita ostendo: series ex quadratura circuli pendens ita erit in numeris:

$$\frac{1}{1, 1+\frac{4}{2}} \qquad \frac{1}{1+4, 1+4+\frac{4}{2}} \qquad \frac{1}{1+8, 1+8+\frac{4}{2}} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{3} \qquad \frac{1}{35} \qquad \frac{1}{99}$$

Haec series quadruplicata redibit ad hanc:

$$\frac{1}{\frac{1}{4}, \frac{1}{4}+\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{\frac{1}{4}+1, \frac{1}{4}+1+\frac{1}{2}} \qquad \frac{1}{\frac{1}{4}+2, \frac{1}{4}+2+\frac{1}{2}}.$$

Quae a serie $\frac{1}{y, y+\frac{1}{2}\beta}$ in qua prima $y \sqcap 1$. et $\beta \sqcap 1$. seu

4 aequatur *(1)* circumferentiae, ponendo radium esse unitatem *(2)* rationi *L* 10 ostendo: *(1)* primam y, *(a)* voce *(b)* quaecunque sit vocemus *(2)* Unitatem appellemus γ. Reducamus ad unitatem, quam iam seriem *(3)* series *L* 15 prima *erg. L*

13 quadruplicata: Leibniz teilt beide Faktoren der Nenner der Folgenglieder durch vier, multipliziert also in Wirklichkeit mit 16. Die Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

$\dfrac{1}{1,1+\dfrac{1}{2}}\qquad \dfrac{1}{2,2+\dfrac{1}{2}}\qquad \dfrac{1}{3,3+\dfrac{1}{2}}$ in eo tantum differt, quod prima y. sumta est non 1. sed $\dfrac{1}{4}$. Auferantur a se invicem, sane: $\dfrac{1}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta}-\dfrac{1}{y+\dfrac{3}{4},y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}$ fiet:

$$\frac{y+\dfrac{3}{4},y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta,-\;y,y+\dfrac{1}{2}\beta}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta\left[,y+\dfrac{3}{4}\right],y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}\sqcap\frac{\begin{array}{l}\boxed{y^2}+\dfrac{3}{4}y\boxed{+\dfrac{1}{2}\beta y}+\dfrac{9}{16},\boxed{-y^2-\dfrac{1}{2}\beta y}\\ \quad+\dfrac{3}{4}..\qquad\quad+\dfrac{3}{8}\beta\end{array}}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta\left[,y+\dfrac{3}{4}\right],y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}\text{ sive}$$

$$\frac{\dfrac{3}{4}y,,+\dfrac{3}{4}\frown y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta\left[,y+\dfrac{3}{4}\right],y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}\sqcap\frac{\dfrac{3}{4}}{y+\dfrac{1}{2}\beta\left[,y+\dfrac{3}{4}\right],y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}+\frac{\dfrac{3}{4}}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta\left[,y+\dfrac{3}{4}\right]}$$

$$\sqcap\frac{1}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta}-\frac{1}{y+\dfrac{3}{4},y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}.$$

Habenda est ergo series ista: $\dfrac{1}{y+\dfrac{1}{2}\beta,y+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}\beta}$. Fiet $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{2},1+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}}$ seu $\dfrac{1}{\dfrac{9}{4}+\dfrac{9}{8}}$ seu $\dfrac{8}{27}$; et $\dfrac{1}{\underbrace{2+\dfrac{1}{2}}_{\dfrac{5}{2}},2+\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{2}}$ sive $\dfrac{1}{\dfrac{25}{4}+\dfrac{15}{8}}\quad\dfrac{8}{50+15}$ etc. sed haec progressio parum tractabilis.

2 sane: *(1)* $\dfrac{1}{\dfrac{1}{4},\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}}$ *(2)* ponendo z pro y et γ pro β | quando non significant 1, fiet: *streicht Hrsg.* | $\dfrac{1}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta}-\dfrac{1}{z,z+\dfrac{1}{2}\gamma}$ *(3)* $\dfrac{1}{y,y+\dfrac{1}{2}\beta}$ *L*   5 f. $,y+\dfrac{3}{4}$ *erg. Hrsg. fünfmal*

$\frac{1}{1} \quad - \quad \frac{1}{3} \quad + \quad \frac{1}{5} \quad - \quad \frac{1}{7} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad - \frac{1}{11}$ etc. ex circulo.

$\frac{1}{2} \quad - \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{6} \quad - \quad \frac{1}{8}$ [etc.] ex hyperbola. Huius duplum

$\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6}$ etc. Ex qua auferatur praecedens ad circulum, fiet:

$* - \frac{1}{2} + \frac{2}{3} - \frac{1}{4} \quad * - \frac{1}{6} + \frac{2}{7} \quad - \frac{1}{8} \quad * \quad - \frac{1}{10} + \frac{2}{11}$ etc. Si contra addatur, fiet:

$\frac{2}{1} - \frac{1}{2} \quad * - \frac{1}{4} + \frac{2}{5} - \frac{1}{6} \quad * \quad - \frac{1}{8}$ etc.

$$\begin{array}{llcccccccccl}
 & \text{Si ab} & 1 & - & \frac{1}{3} & + & \frac{1}{5} & - & \frac{1}{7} & \text{etc.} & & \\
\text{auferas} & & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{6} & - & \frac{1}{8} & \text{etc.} & & \\
\text{fiet :} & & \frac{1}{2} & - & \frac{1}{12} & + & \frac{1}{30} & - & \frac{1}{56} & \text{etc.} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccccccl}
\text{Porro} & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{42} & \frac{1}{56} & \frac{1}{72} & \text{etc.} & \text{habentur.} \\
 & \frac{1}{2} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{56} & & & \text{habetur ex quad. hyp.} \\
 & 1 - \frac{1}{2} & & & & \frac{1}{5} - \frac{1}{6} & & & \frac{1}{9} - \frac{1}{10}. & &
\end{array}$$

Iam 1. $\frac{1}{5}$. $\frac{1}{9}$ etc. $\sqcap \frac{b^1}{1} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^9}{9} \sqcap \frac{1}{1+y^4}$. Vid. seq. plagulam VIII.

2 etc. *erg. Hrsg.*

12 $\sqcap \frac{1}{1+y^4}$: Leibniz will sagen, daß die Summe der $\frac{1}{1+y^4}$ mit der linken Seite gleich ist; richtig wäre $\frac{1}{1-y^4}$, s. u. N. 38₁₀ S. 465 Z. 11–13.

38_{10}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS OCTAVA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 18–19. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Schediasmatis de serierum summis pars VIII.

$\frac{1}{2}\quad \frac{1}{6}\quad \frac{1}{12}\quad \frac{1}{20}\quad \frac{1}{30}\quad \frac{1}{42}\quad \frac{1}{56}\quad \frac{1}{72}\quad \frac{1}{90}\quad \frac{1}{110},$ etc. habentur absolute $\sqcap 1$.

$\frac{1}{2}\qquad \frac{1}{12}\qquad \frac{1}{30}\qquad \frac{1}{56}\qquad \frac{1}{90}$ [etc.] ex quad. hyperbolae.

$\frac{1}{2} - \frac{1}{12} + \frac{1}{30} - \frac{1}{56} + \frac{1}{90}$ etc. exhibent differentiam circuli et hyperbolae seu residuum quadrantis, detracto spatio hyperbolico dimidiato.

Quare si inveniretur separatim $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ [etc.], tunc data quad. hyperbolae, daretur circuli quadratura. Iam $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ etc. resolvemus in $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10}$ etc. Cuius seriei quadratricis quaeratur figura. Quaeramus primum figuram seriei quadratricis; $\frac{1}{1}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{9}$ [etc.] sive: $\frac{b}{1} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^9}{9}$ etc. quae fit ex summis omnium: $1 + y^4 + y^8 + y^{12}$ etc. quarum quaelibet aequalis huic ordinatae: $\frac{1}{1-y^4}$.

Eodem modo series quadratrix $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}$ etc. originem habet $\frac{b^2}{2} + \frac{b^6}{6} + \frac{b^{10}}{10}$ etc. quae est summa ordinatarum, $y + y^5 + y^9$ etc. $\sqcap \frac{y}{1-y^4}$. et figura cuius series quadratrix est $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ etc., erit $\frac{1-y}{1-y^4} \sqcap x$. Sed $1 - y^4$, dividi potest per $1 - y^2$, et $1 + y^2$; et

6–12 etc. *erg. Hrsg. dreimal* 8 f. hyperbolae | seu residuum *(1)* circuli *(2)* circumferentiae in unitatem, *(3)* quadrantis ... dimidiato *erg.* |. Quare *L* 13–16 ordinatae: *(1)* $\frac{1}{1+\mathrm{y}^4}$ ... $\mathrm{y} + \mathrm{y}^5 + \mathrm{y}^9$ etc. $\sqcap \frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}^4}$ ... erit $\frac{1-\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}^4}$ *(2)* $\frac{1}{1-\mathrm{y}^4}$ *L* 16 per *(1)* $1-\mathrm{y}$, et provenit, $1-\mathrm{y}^3$, *(2)* $1-\mathrm{y}^2$, et *(a)* $1-\mathrm{y}^2$ *(b)* $1+\mathrm{y}^2$ *L*

$1-y^2$, dividi potest per $1-y$, et fit $1+y$. Ergo ducendo $1+y^2$, in $1+y$, fit: $\dfrac{1}{y^3+y^2+y+1} \sqcap \dfrac{1}{1+y^2 \frown 1+y}$. Sed missa figura $\dfrac{1}{1+y^2, 1+y}$, videamus figuram $\dfrac{1}{1-y,, 1+y, \square}$. Eius figurae momentum, ex $1-y$, est $\dfrac{1}{1+y, \square}$ cuius habetur dimensio cum sit hyperbola cubica. Eius momentum ex $1+y$, est $\dfrac{1}{1-y^2}$. horum duorum momentorum summa aequatur duplo figurae cylindro. Habetur ergo huius figurae dimensio, ex data dimensione huius figurae $\dfrac{1}{1-y^2}$.

Opus est ergo ut huius figurae dimensionem quaeramus, quod eadem methodo egregie fiet: nam momentum eius ex $1+y$ dabit $\dfrac{1}{1-y}$, quod est cylinder spatii hyperbolici. Eiusdem momentum ex $1-y$ dabit $\dfrac{1}{1+y}$, qui est alius cylinder spatii hyperbolici, horum duorum momentorum summa, dabit duplum cylindrum ipsius figurae $\dfrac{1}{1-y^2}$. Ergo ut omnia in unum colligamus, cylindri hyperbolici, unus $\dfrac{a^3}{a-y}$ alter $\dfrac{a^3}{a+y}$, aucti cylindro hyperbolae cubicae, $\dfrac{a^3}{a^2+2ay+y^2}$ dant cylindrum figurae $\dfrac{1}{1-y,, \frown 1+y, \square}$, seu

---

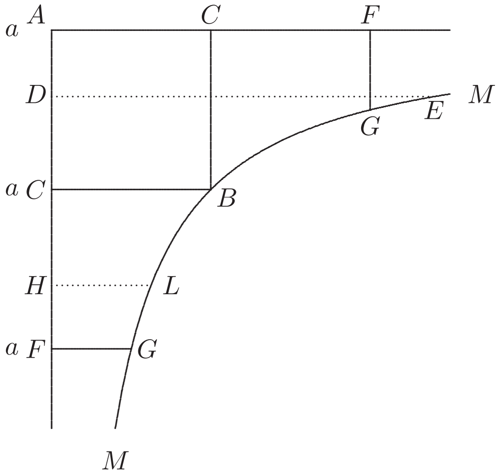
1 *Zur Lesart, gestrichen:* Error.
Error usque ad finem paginae.

1 ducendo *(1)* $1-y^2$, in $1+y$, fit: *(a)* $\dfrac{1-y^2+y-y^3}{1-}$ *(b)* $\dfrac{1}{1-y^2+y-y^3} \sqcap \dfrac{1}{1-y^2, 1+y} \sqcap \dfrac{1}{1-y,, 1+y, \square}$. Cuius figurae momentum, *(aa)* est $\dfrac{1}{1-y}$ *(bb)* ex $1-y$, *(2)* $1+y^2$ *L* 3 f. hyperbola *(1)* qua *(2)* cubica *L* 5 duplo *erg. L* 10 duplum *erg. L* 12–467,1 dant *(1)* summam *(a)* figurae, *(b)* cylindri *(2)* cylindrum figurae $\dfrac{a^5}{a^3+ya^2+y^2a+y^3}$ cuius area aequatur summae $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{30}$ $\dfrac{1}{90}$ etc. Ergo $\dfrac{1}{1-y}+\dfrac{1}{1+y}+\dfrac{1}{1+y, \square} \sqcap \dfrac{1}{2}$ *(3)* cylindrum figurae *(a)* $\dfrac{1}{1+y,, \frown 1+y, \square}$, seu $\dfrac{1}{1+2y+y^2, +y+2y^2+y^3}$ seu $\dfrac{1}{y^3+3y^2}$ *(b)* $\dfrac{1}{1-y,, \frown 1+y, \square}$ *L*

$\frac{1}{1+2y+y^2,-y-2y^2-y^3}$ seu $\frac{1}{-y^3-y^2+y+1}$. (NB. Iam $\frac{1}{y^3+y^2+y+1}$ pendet ex circulo et hyp. simul.) Addendo fiet:

$$\frac{\boxed{y^3+y^2}+y+1\boxed{-y^3-y^2}+y+1}{1+y^2 \frown 1+y \frown 1+y,\square,1-y} \sqcap \frac{2}{1+y^2,1+y,1-y} \sqcap \frac{2}{1+y^2 \frown 1-y^2} \sqcap \frac{2}{1-y^4}.$$

Cum hoc sit maximi momenti, erroris vitandi causa de integro assumere operae pretium erit.



[*Fig. 1*]

Esto GBE. hyperbola, cuius centrum A. vertex B. Radius ut ita dicam AC. vel $CB \sqcap a$. CD. vel CH. vel $CF \sqcap y$. $AD \sqcap a-y$. AF vel $AH \sqcap a+y$. $DE \sqcap \frac{a^2}{a-y}$. $HL \sqcap \frac{a^2}{a+y}$. Ergo posita $a \sqcap 1$. erit $DE \sqcap 1+y+y^2+y^3+y^4$ etc. et summa

---

3 *Nebenrechnung:* $\frac{1}{1-y^2} + \frac{1}{1+2y+y^2} \sqcap \frac{1+2y\boxed{+y^2},+1\boxed{-y^2}}{1-y,,1+y,\text{cub.}}$ sive $\frac{2}{1-y,,1+y,\square}$.

466,14 usque ad finem paginae: Bis zur Stufe *(3) (a)* der Lesart zu S. 466 Z. 12 – Z. 1   6 [*Fig. 1*]: Leibniz hat die Strecken HL und FG getrennt gezeichnet. Dem Text gemäß müßten die Punkte H und F und damit auch L und G zusammenfallen.

omnium DE, applicatarum ad AC, erit: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}$ etc. $\sqcap$ spatio in infinitum producto, $ACBEM$.

Sed $HL \sqcap \dfrac{1}{1+y} \sqcap 1-y+y^2-y^3+y^4-y^5$ etc. et summa omnium HL. ad CF. applicatarum erit:

$$\underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{30}} \text{ etc. } \sqcap \text{ spatio } CFGLB.$$

Auferatur spatium $CFGLB$, a spatio $ACBEM$, fiet:

$\frac{1}{1}\left(-\frac{1}{1}\right)+\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{4}\left(+\frac{1}{4}\right)$ etc. sive $\frac{2}{2}\ \frac{2}{4}\ \frac{2}{6}$ etc. $\sqcap 1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. Quod satis mirabile est, et ostendit, summam ipsius seriei $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.$ etc. esse infinitam, et proinde et aream spatii $ACBGM$. quandoquidem finita $CBGF$, ei ademta, idem relinquit, seu nihil notabile adimit.

Hoc argumento concluditur, infinitum non esse totum; nec nisi fictionem, alioqui enim foret pars aequalis toti.

Si ad $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.$ etc. addas $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ etc. fiet $2+\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+\frac{2}{7}$ [etc.] quod aequatur spatio $GFCAMBLG$. Huius duplo[,] sumta scilicet et opposita hyperbola, $4+\frac{4}{3}+\frac{4}{5}+\frac{4}{7}$ etc. auferatur area circuli, cuius radius CF. quae est: $4-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}+\frac{4}{9}$ etc. fiet inde differentia haec: $\frac{8}{3}+\frac{8}{7}+\frac{8}{11}$ etc. et si addatur potius illi spatio area circuli eiusdem fiet: $8+\frac{8}{5}+\frac{8}{11}$ etc.

Si diameter sit 1. circumferentia est: $\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}-\frac{4}{7}$ etc. Ergo si diameter 2. seu si radius 1. erit circumferentia $\frac{8}{1}-\frac{8}{3}+\frac{8}{5}-\frac{8}{7}$ [etc.] ergo semicircumferentia, $\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$ etc.

1 $+\frac{1}{5}$ etc. *(1)* Posita *(2)* $\sqcap$ spatio *L*   6 ACBEM, *(1)* restabit: $2 \frown \frac{1}{2} * 2 \frown \frac{1}{4} * 2 \frown \frac{1}{6}$, *(2)* fiet: *L*   14 ad *(1)* spatium *(2)* $1.\ \frac{1}{2}.\ \frac{1}{3}.\ \frac{1}{4}.$ etc. *L*   14–469,12 etc. *erg. Hrsg. sechsmal*   15 sumta ... hyperbola, *erg. L*

quae ducta in radium 1. dat circulum, ergo circulus $\frac{4}{1}-\frac{4}{3}+\frac{4}{5}$ etc. ergo quadrans circuli $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$ etc. Fiet: $1-\underbrace{\frac{1}{3}}_{\frac{2}{3}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}_{\frac{2}{35}}+\underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}_{\frac{2}{99}}.$

Spatium $FCBG$ dimidietur, fiet: $\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}}_{\frac{2}{8}}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}}_{\frac{2}{48}}+\underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}}_{\frac{2}{120}}$ [etc.]

$$\begin{array}{cccccccccccccccl}
\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} & \frac{1}{48} & \frac{1}{63} & \frac{1}{80} & \frac{1}{99} & \frac{1}{120} & \frac{1}{143} & \frac{1}{168} & \frac{1}{195} & \text{etc.} & \sqcap & \frac{3}{4}. \\
\frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{15} & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \frac{1}{63} & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \frac{1}{143} & \cdot & \frac{1}{195} & \text{etc.} & \sqcap & \frac{1}{2}. \\
\cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \frac{1}{24} & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \frac{1}{80} & \cdot & \frac{1}{120} & \cdot & \frac{1}{168} & \cdot & \text{etc.} & \sqcap & \frac{1}{4}. \\
\frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{195} & \text{[etc.]} & \sqcap & \text{semiquadranti.} \\
\cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{120} & \cdot & \cdot & \cdot & \text{[etc.]} & \sqcap & \text{quartae parti}
\end{array}$$

spatii $FCBG$.

Ad $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+\frac{1}{7}-\frac{1}{8}+\frac{1}{9}-\frac{1}{10}$ [etc.] $\sqcap$ spatio $FCBG$

addatur $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}$ etc. $\sqcap$ quadranti

fiet: $2-\frac{5}{6}+\frac{8}{15}-\frac{11}{28}$ etc. sed nihil inde.

Auferatur, fiet: $*-\frac{1}{6}+\frac{2}{15}-\frac{3}{28}+\frac{4}{45}$ etc. quae series proinde pendet ex iunctis circulari et hyperbolica.

Sed omnium optima auferendi ratio haec videtur:

2 $-\frac{1}{7}$ etc. *(1)* Auferatur quadrans circuli | a spatio CFGB. *streicht Hrsg.* | *(a)* restabit *(b)* restabit *(c)* restabit: *(2)* Fiet: *L* 4 *(1)* Hyperbola *(2)* Spatium FCBG *(a)* dupletur *(b)* dimidietur *L* 11 f. FCBG. *(1)* A ... spatio FCBG auferatur *(2)* Ad *L* 15 $+\frac{4}{45}$ etc. *(1)* cui si addatur *(2)* quae *L*

Ab $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}+\frac{1}{13}-\frac{1}{15}+\frac{1}{17}-\frac{1}{19}$ [etc.] $\sqcap$ quadranti auferatur $\frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\frac{1}{18}-\frac{1}{20}$ [etc.] $\sqcap$ dimidio spatio $FCBG$.

Restabit: $\frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}-\frac{1}{56}+\frac{1}{90}-\frac{1}{132}$ etc.

$$\text{Iam } \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\frac{1}{6}}+\underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}+\underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{\frac{1}{20}}+\underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{30}}+\underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}_{\frac{1}{42}} \text{ etc.}\quad \frac{1}{56}\quad \frac{1}{72}\quad \frac{1}{90}\quad \frac{1}{110} \text{ etc.} \sqcap 1.$$

$$\text{Et } \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\frac{1}{2}}\qquad \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\frac{1}{12}}\qquad \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\frac{1}{30}}\qquad \underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{\frac{1}{56}}\qquad \underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}_{\frac{1}{90}}\qquad \text{etc.} \sqcap$$

spatio $FCBG$.

Ergo recolligendo spat. $FCGB \sqcap \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{12}\cdot\frac{1}{30}\cdot\frac{1}{56}\cdot\frac{1}{90}$ etc.

et quadrans $-\dfrac{\text{spat. } FCBG}{2} \sqcap \frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}-\frac{1}{56}+\frac{1}{90}$ etc.

$$\text{Ergo } \frac{\text{semicirculus } -\frac{1}{2}-\frac{1}{12}-\frac{1}{30}-\frac{1}{56}-\frac{1}{90}\text{[etc.]}}{2} \sqcap \frac{1}{2}-\frac{1}{12}+\frac{1}{30}-\frac{1}{56}+\frac{1}{90} \text{ etc.}$$

$$\text{sive semicirculus} \sqcap \underbrace{\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}\right)}_{\frac{3}{2}}\underbrace{\left(-\frac{1}{6}+\frac{1}{12}\right)}_{-\frac{1}{12}}\underbrace{\left(+\frac{1}{15}+\frac{1}{30}\right)}_{+\frac{3}{30}}\underbrace{\left(-\frac{1}{28}+\frac{1}{56}\right)}_{-\frac{1}{56}} \text{ etc.}$$

Unde sequitur semicirculum excedere triplam differentiam dimidii spatii hyperbolici a quadrante duplo huius seriei, $\frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132}$, vel semicirculum excedere differentiam quadrantis a spatio dicto, duplicata serie: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$.

1–11 etc. *erg. Hrsg. dreimal* 9 spat. FCBG *(1)* $\sqcap \frac{1}{6}\ \frac{1}{20}\ \frac{1}{42}\ \frac{1}{72}\ \frac{1}{100}$ etc. *(2)* $\sqcap \frac{1}{2}$ *L*
14 semiculum *(1)* esse *(2)* aequari *(a)* triplae differentiae dimidii spatii hyperbolici et quadrantis *(aa)* demto *(bb)* si duplo huius seriei, $\frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132}$ sit minutum, *(b)* deficere *(c)* a tripla differentia dimidii spatii hyperbolici et quadrantis *(aa)* differre *(bb)* deficere *(3)* excedere *(4)* excedere *(5)* excedere *L*

Esto semicirc. $\sqcap S$. differentia dicta $\sqcap D$, series $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90} \sqcap L$. series $\frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132} \sqcap M$, erit $S \sqcap 3D + 2M$. et idem $S \sqcap D + 2L$. Ergo $3D + 2M \sqcap D + 2L$. Ergo $D \sqcap L - M$. quae calculi probatio est elegans.

Quoniam ergo semicirculus $S \sqcap 3D$+[$2M$] duplo seriei huius $\left[M\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132}\right]$ minutus triplo differentiae D qua quadrans dimidium spatium hyp. dictum excedit, aequatur; et idem semicirculus duplo huius seriei $\left[L\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}\text{ minutus}\right]$ ipsi differentiae D aequatur, $S \sqcap D$[$+2L$] ideo vel seriem L. vel seriem M. utramlibet earum separatim per circulum vel hyperbolam inveniri sufficit. Quod tamen ut clarius appareat, efficiendum est:

Series $\frac{1}{2}\ \frac{1}{12}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{90}$ etc. habetur ex data hyperbolae quadratura, quod si iam etiam $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ [etc.] habetur ex eadem, tunc etiam $\frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132}$ [etc.] ex quad. hyp. habebitur.

$L + M \sqcap c$. quam c. suppono cognitam ex quad. hyp. Ergo si $L \sqcap d$. cognitae etiam ex $\square$ hyp. erit $M \sqcap c - d$. et $L - M \sqcap d - c + d$. Ergo $L - M \sqcap 2d - c$. Iam $L - M \sqcap e - f$. posito e. haberi ex quad. circ. seu esse quadrantem, et f. esse dimidium spatium hyperbolicum, $FCBG$. eritque $2d - c \sqcap e - f$. Eritque e. quadrans $\sqcap 2d - c + f$. cognitis ex hyperbolae quadratura. Tantum ergo superest ut seriem L, $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ etc. ex sola hyperbolae quadratura ducere tentemus. Figura autem cuius series quadratrix L, est $\frac{1}{y^3 + y^2 + y + 1}$, sive $\frac{1}{1 + y^2, \frown 1 + y}$, sive $\frac{1 - y}{1 - y^4}$ ut initio huius plagulae dixi. Cuius figurae quadraturam ex quadratura hyperbolae superest ut deducamus si licet. Eius momentum ex $1 + y$ est $\frac{1}{1 + y^2}$, quae pendet ex quad. circuli; ita ut summa totius illius

4 2L *L ändert Hrsg.* 4 L $\frac{1}{2}\ \frac{1}{30}\ \frac{1}{90}$ *L ändert Hrsg.* 6 M $\frac{1}{12}\ \frac{1}{56}\ \frac{1}{132}$ auctus *L ändert Hrsg.* 7 −2M *L ändert Hrsg.* 11 etc. *erg. Hrsg. zweimal* 11 f. hyp. | pura *gestr.* | habebitur *L* 18 quadratura *(1)* ducamus *(2)* ducere *L* 19 ut ... dixi *erg. L* 20 si licet *erg. L*

19 initio: s. o. S. 465 Z. 15 f.

figurae aequetur quadranti, e. Eius momentum ex y est: $\frac{y}{1+y^2, \frown 1+y}$. Ergo $\frac{1}{1+y^2} - \frac{y}{1+y^2, 1+y} \sqcap \frac{1}{1+y^2, 1+y}$. Iam: $\frac{y}{1+y^2, 1+y}$ momentum ex $1+y$ habet $\frac{y}{1+y^2}$, seu $\frac{f}{2}$ spatium scilicet hyperbolicum dimidiatum; momentum ex y, habet: $\frac{y^2}{1+y^2, 1+y}$. Ergo $\frac{y}{1+y^2} - \frac{y^2}{1+y^2, 1+y} \sqcap \frac{y}{1+y^2, 1+y}$. Iam $\frac{y^2}{1+y^2, 1+y}$ ex $1+y$ habet momentum $\frac{y^2}{1+y^2}$ ex quad. circ. et ex y, habet $\frac{y^3}{1+y^2, 1+y}$ et ex $y-1$ habet $\frac{y^3-y^2}{1+y^2, 1-y^2} \sqcap \frac{y^3-y^2}{1-y^4}$. quae omnes proinde pendent ex circuli et hyperbolae coniunctorum quadratura; sed nihil inde ad quadraturam circuli ex hyperbola vel contra duci potest.

$\frac{a^2}{a^2+y^2} \sqcap x$. Ergo differentia duarum $x \sqcap \frac{a^2}{a^2+y^2} - \frac{a^2}{a^2+y^2+2y\beta+\beta^2} \sqcap$ $\frac{\boxed{a^2}\boxed{+y^2}+2y\beta+\beta^2,, \frown a^2, \boxed{-a^4}\boxed{-a^2y^2}}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ fiet: $\frac{2y}{a^2+y^2, a^2+y^2} \sqcap w$, cuius figurae habetur quadratura.

Si sit: $\frac{a^3}{a^2-y^2-2y\beta-\beta^2} - \frac{a^3}{a^2-y^2}$. unde $\frac{\boxed{a^3, \frown a^2-y^2}, -,, a^3, \frown \boxed{a^2-y^2} - 2y\beta - \beta^2}{a+y, \square, a-y, \square}$. Haec figura ergo $\frac{\cancel{2}ya^4}{a+y, \square, a-y, \square}$ est qua-

4 $\sqcap \frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}^2, 1+\mathrm{y}}$ *(1)* vel $\frac{1}{1+\mathrm{y}^2} - \frac{\mathrm{y}}{1+\mathrm{y}^2, 1+\mathrm{y}} \sqcap$ *(2)*. Iam *L* 7 f. potest. *(1)* $2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$, investigando intervallum tangentium $\cancel{2}\mathrm{al} - \cancel{2}\mathrm{xl} \sqcap \cancel{2}\mathrm{y}^2$, sive $\mathrm{l} \sqcap \frac{\mathrm{y}^2}{2\mathrm{a}-\mathrm{x}}$ *(!)*, sive $\mathrm{l} \sqcap \frac{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}-\mathrm{x}}$. Est autem $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{y}} \sqcap \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{w}}$. Ergo $\mathrm{w} \sqcap \frac{\mathrm{ya}, \frown 2\mathrm{a}-\mathrm{x}}{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2}$. Ergo $\mathrm{w} \sqcap \frac{\mathrm{a}\sqrt{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2} \frown 2\mathrm{a}-\mathrm{x}}{\sqrt{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2} \frown \sqrt{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2}}$. Ergo $\mathrm{w} \sqcap \frac{2\mathrm{a}^2-\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2}}$. Iam *(a)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2}} \sqcap$ *(b)* $\frac{\mathrm{a}^4}{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{y}^2$ *(aa)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}} \sqcap$ *(bb)* $\frac{\mathrm{a}^4}{2\mathrm{ax}-\mathrm{x}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *L* 11 sit: *(1)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2} - \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2-2\mathrm{y}\beta-\beta^2} \sqcap \mathrm{w}$. Unde *(a)* $\frac{\mathrm{a}^2, \frown \boxed{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2} - 2\mathrm{y}\beta\boxed{-\beta^2},, \boxed{-\mathrm{a}^2, \frown \mathrm{a}^2\boxed{-\mathrm{y}^2}}}{}$ *(b)* $\frac{\mathrm{a}^3, \frown \boxed{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2} - 2\mathrm{y}\beta\boxed{-\beta^2},, \boxed{-\mathrm{a}^3, \frown \mathrm{a}^2\boxed{-\mathrm{y}^2}}}{}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2-\mathrm{y}^2-2\mathrm{y}\beta-\beta^2}$ *L*

drabilis. Eius momentum ex $a+y$, est $\dfrac{\cancel{2}y}{a+y, a-y, \square}$. Eius momentum ex $a-y$, est $\dfrac{\cancel{2}y}{a^2-y^2, a+y}$.

$\dfrac{y}{1+y,,1-y,\square} + \dfrac{y}{1+y, 1-y^2}$ aequatur $\dfrac{2y}{1+y, 1-y,,\square}$. ideoque haec summa quadrabilis. Investigemus iam: $\dfrac{y}{a+y,,a-y,\square}$. Eius momentum ex $a+y$, est $\dfrac{y}{a-y,\square}$, eius momentum ex $a-y$, est $\dfrac{y}{a^2-y^2}$.

$\dfrac{y}{1-y,\square} + \dfrac{y}{1-y^2} \sqcap \dfrac{2y}{1+y,,1-y,\square}$. Investigemus: $\dfrac{y}{1-y,\square}$. addatur $\dfrac{1}{1-y,\square}$ quae habetur absolute. $\dfrac{1-y}{1-y,\square} \sqcap \dfrac{1}{1-y}$. quae pendet ex quad. hyp. Ergo $\dfrac{y}{1-y,\square}$ pendet ex quad. hyp. Investigemus et $\dfrac{y}{1-y^2}$, [eius] momentum ex $1+y$, est $\dfrac{y}{1-y}$, quae pendet ex quad. hyp. Eiusdem momentum ex $1-y$, est $\dfrac{y}{1+y}$, quod etiam pendet ex quad. hyp. Ergo habetur et tertium momentum $\dfrac{y^2}{1-y^2}$, ergo et $\dfrac{1}{1-y^2}$ ex ead. quad. hyp.

$\dfrac{1+y^2+y^4+y^6}{1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7}}$. Ergo $1+\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{13}$ [etc.], vel $\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{7}+\dfrac{1}{11}$ etc. pendent ex quad. circ. et hyp. simul: Ergo $\dfrac{1}{1-y^4}$ pendet ex quad. circ. et hyperb. simul. Hoc obiter. Ergo $\dfrac{y}{1+y,,1-y,\square}$ pendet ex $\square$ hyp.: Ergo et $\dfrac{y}{a^2-y^2, a+y}$ pendet ex quad. hyp. Quod an

1 a + y, est *(1)* latus *(2)* $\dfrac{\cancel{2}y}{a+y, a-y, \square}$ *L* 2 f. $\dfrac{\cancel{2}y}{a^2-y^2, a+y}$. *(1)* Differentia ergo inter $\dfrac{y}{a+y,,a-y,\square} - \dfrac{y}{a+y, a^2-y^2}$ aequatur *(a)* cylindro fi *(b)* $\dfrac{\cancel{2}y}{a+y, a-y,,\square}$ *(2)* $\dfrac{y}{1+y,,1-y,\square}$ *L* 6 Investigemus: $\dfrac{y}{1-y,\square}$. *(1)* Eius *(2)* Haec pendet ex quad. hyp. *(3)* addatur *L* 8 ex *L ändert Hrsg.* 11 etc. *erg. Hrsg.*

472,11–473,2 Leibniz verwendet punktuell die Homogenitätsfaktoren a^3 bzw. a^4 und streicht dreimal den für die Aussage belanglosen Faktor 2.

aliunde pateat videamus: eius momentum ex $a - y$, est $\dfrac{y}{a + y, \square}$. quod habetur absolute. Eius mom. ex $a + y$, est $\dfrac{y}{a^2 - y^2}$. quod etiam habetur ex quad. hyp. Sed satis de his. Sequitur plagula IX.

38_{11}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS NONA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 20–21. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Schediasmatis de seriebus et quadraturis pars IX.

Quoniam sub finem praecedentis plagulae ostensum est differentias ipsarum $\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$ esse $\dfrac{2y}{a^2+y^2,\square}$. ductis ergo ipsis in distantias a vertice, fiet: $\dfrac{2y^2}{a^2+y^2,\square}$, quae figura aequatur ipsi figurae $\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$ et proinde pendet ex quad. circuli. Quodsi ei addatur $\dfrac{a^2}{a^2+y^2,\square}$, momentum ipsarum $\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$ ex asymptoto, quod ideo etiam ex quad. circuli pendet, fiet: $\dfrac{a^2+y^2}{a^2+y^2,\square}$, sive $\dfrac{1}{a^2+y^2}$, quae pendet ex quad. circuli. Ergo differentia ipsarum $\dfrac{a^2}{a^2-y^2}$[,] $\sqcap$ $\dfrac{2y}{a^2-y^2,\square}$ $\sqcap$ $\dfrac{2y}{a+y,a-y,\square}$ quae figura quadrari potest. Ergo $\dfrac{\cancel{2}y}{a+y,\square,a-y}+\dfrac{\cancel{2}y}{a-y,\square,a+y}$ quadrari potest. Item: $\dfrac{y^2}{a+y,a-y,\square}+\dfrac{y}{a+y,\square,a-y}$, quadrari potest. Item $\dfrac{y}{a-y,\square,a+y}-\dfrac{y^2}{a+y,a-y,\square}$.

Subit animum nova quaedam materia inquirendi, e.g. ope huiusmodi calculorum quadrari possunt figurae quaedam non geometricae, e.g. hyperbola est $\dfrac{1}{1\mp y}$, eius momentum haberi potest. Haberi ergo et potest dimensio figurae, quae sit quadratrix hyperbolae.

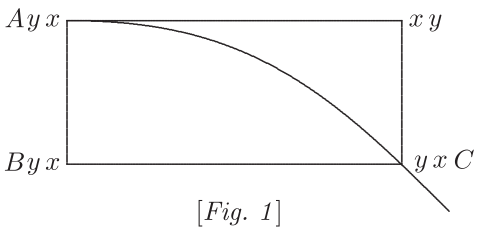
6 a vertice *erg. L* 7 aequatur *(1)* complemento figurae *(2)* ipsi *L* 8 $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ ex *(1)* basi, *(2)* asymptoto *L* 12 f. $-\dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}+\mathrm{y},\mathrm{a}-\mathrm{y},\square}$. *(1)* Ope huius meth *(2)* In *(3)* Subit *L* 13 e.g. *(1)* differentiae *(2)* ope *L* 14 e.g. *(1)* sit hyperbola *(2)* circulus est *(3)* hyperbola *L*

11 Leibniz streicht den für die Aussage belanglosen Faktor 2 im Zähler der beiden Summanden.

Haec figura etsi non sit geometrica, tamen poterit forte describi eo modo quo cycloeides; et volutae, et helices; et ita eiusmodi figurarum non geometricarum, quadratura absoluta saepe haberi hac methodo poterit. Ita, circulus $\sqrt{a^2 - x^2}$, multiplicetur per $a + x$, sive per $\sqrt{a + x, \square}$ fiet: $\sqrt{a + x, \text{cub.}, a - x}$ cuius figurae dimensio dabit dimensionem figurae circuli quadratricis. Itaque videndum an generaliter hoc solvi possit: Propositis figuris non geometricis, geometricas symmetros invenire. Quod foret maximi momenti problema generale.

$\dfrac{y}{a} - \dfrac{a}{y} \sqcap \dfrac{y^2 - a^2}{ay}$, quae figura est quadrabilis. Differentia ordinatarum $\dfrac{y^2 + 2\beta y + \beta^2 - a^2}{ay + a\beta} - \dfrac{y^2 - a^2}{ay} \sqcap \dfrac{ay^3 + 2a\beta y^2 + a\beta^2 y - a^3 y, -ay^3 - a\beta y^2 + a^3 y + a^3\beta}{a^2y^2 + a^2 y\beta}$, sive: $\dfrac{a\cancel{\beta} y^2 + a^3\cancel{\beta}}{a^2y^2}$, quae est quadrabilis.

Aliter:



[*Fig. 1*]

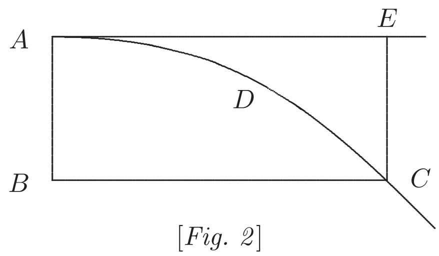
Exposita esto figura, cuius aequatio sit $\dfrac{ya^2}{a^2 + y^2} \sqcap x$. Momentum ipsarum ordinatarum huius figurae ex y, est $\dfrac{y^2 a}{a^2 + y^2}$. Quaeritur valor ipsarum y. ex aequatione $\dfrac{ya^2}{a^2 + y^2} \sqcap x$, fiet: $a^2x + xy^2 \sqcap ya^2$. Unde $y^2 - \dfrac{a^2}{x}y + \dfrac{a^4}{x^2} \sqcap \dfrac{a^4}{x^2} - a^2$. sive $\mp y \pm \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{a\sqrt{a^{\cancel{4}2} - x^2\cancel{a^2}}}{x}$. et

5 Itaque *(1)* propositis lineis *(2)* videndum *L* 10 f. quadrabilis. *(1)* | Hinc *streicht Hrsg.* | *(2)* Ascribere operae pretium est modum, quo demonstrari potest figurae $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2}$ dimensio pendens a circulari: *(3)* Aliter *L*

15–477,2 Unde: Bei der quadratischen Ergänzung addiert Leibniz $\dfrac{a^4}{x^2}$ statt $\dfrac{a^4}{4x^2}$ zu beiden Seiten der Gleichung und verfehlt so die richtige Lösung. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis S. 477 Z. 2. Analoge Fehler treten in den S. 477 Z. 10 u. S. 478 Z. 5 auf und wirken sich bis S. 479 Z. 3 aus.

$y \sqcap \dfrac{\mp a\sqrt{a^2-x^2}+a^2}{x}$. Quadrata omnium y, seu momentum complementi figurae ABC, dat: $\dfrac{a^4-a^2x^2+a^4 \mp 2a^3\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ quae figura pendet ex q. circuli.

Resumemus:



[*Fig. 2*]

Esto curva ADC. $AB \sqcap x \sqcap EC$. $BC \sqcap y \sqcap AE$. Esto aequatio: $a^2y \sqcap a^2x+y^2x$. Erit $x \sqcap \dfrac{a^2y}{a^2+y^2}$ quae pendet a quad. hyp., et $x^2 \sqcap \dfrac{a^4y^2}{a^2+y^2,\Box}$, quorum summa est momentum figurae $AECDA$ ex axe aequilibrii AE. At summa omnium $\dfrac{a^2y^2}{a^2+y^2}$, quae pendet ex quad. circuli est momentum figurae $AECDA$ ex axe aequilibrii AB.

Iam ut quaeramus y, ita procedendum est, ex aequatione figurae fiet: $y^2x-a^2y \sqcap -a^2x$, sive $y^2-\dfrac{a^2}{x} \sqcap -a^2$, sive $y^2-\dfrac{a^2}{x}y+\dfrac{a^4}{x^2} \sqcap \dfrac{a^4-a^2x^2}{x^2}$, unde $\mp y \pm \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x}$. [Unde patet ut obiter dicam figuram $\dfrac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{x}$, pendere a quad. hyperbolae. Nam ipsae y pendent a quad. hyp. aufer inde ipsas $\dfrac{a^2}{x}$ quae pendent a quad. hyp. etiam

1 y $\sqcap$ $\dfrac{\mp a\sqrt{a^2-x^2}+a^2}{x}$. *(1)* Momentum *(2)* et momentum omnium x, *(3)* Quadrata *L*

1 f. complementi *(1)* omnium *(2)* figurae *(a)* y, yx, yx *(b)* ABC, *(aa)* est *(bb)* dat *L* 6 quae ... hyp. *erg. L* 7 f. aequilibrii *erg. L zweimal* 7 f. quae ... circuli *erg. L*

10+478,5 $+\dfrac{a^4}{x^2}$ u. $+\dfrac{y^4}{a^2}$: s. o. Erl. zu S. 476 Z. 15 – Z. 2. 11+478,9 Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

$\dfrac{a\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ pendebit a quad. hyp. Eius vero centrum gravitatis pendet a quad. circuli, nam si ducatur in x, fiet: $a\sqrt{a^2-y^2}$, quae est homogenea circulo, si ducatur in se, fiet: $\dfrac{a^4-a^2x^2}{x^2}$, quae habetur absolute: Habito ergo figurae centro gravitatis ex data circuli quadratura, quaeramus alteram eius indeterminatam, fiet: $a^4-a^2x^2 \sqcap y^2x$, unde ordinando $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}x+\dfrac{y^4}{a^2} \sqcap \dfrac{y^4+a^4}{a^2}$. Unde $x+\dfrac{y^2}{a} \sqcap \dfrac{\sqrt{y^4+a^4}}{a}$ ((quae figura patebit ex quad. hyperbolae. Ergo et $\dfrac{\sqrt{y^4+a^4}}{a}$, pendebit ex quad. hyp. Ergo $a^4 \sqcap a^2x^2-y^4$ ex quad. hyp. sive $a^4 \sqcap ax-y^2, \frown ax+y^2$. Unde $a\sqrt{a^2-x^2} \sqcap y^2$. momentum ergo omnium y ex axe eorum ex quad. circuli. Sed $\sqrt{a\sqrt{a^2-x^2}} \sqcap y$. quae figura pendet ex quad. hyperbolae. Sed $x\sqrt{a\sqrt{a^2-x^2}}$ pendet ex quadratura circuli.))] Invenimus ut ad figuram nostram redeamus in ea momentum figurae $AECDA$ ex AB pendere ex quad. circuli quia $xy \sqcap \dfrac{a^2y^2}{a^2+y^2}$. Momentum vero figurae [$ABCDA$], ex AE, pendet etiam ex quadratura circuli, quia $xy \sqcap \text{ǂ}\, a\sqrt{\sqrt{a^2-x^2}}+a^2$, quia inventa est $y \sqcap \dfrac{\text{ǂ}\, a\sqrt{a^2-x^2}+a^2}{x}$. Ideoque centrum gravitatis figurae propositae pendet ex quad. circuli; ergo $\dfrac{a^4y^2}{a^2+y^2, \square}$, item $\dfrac{a^4-a^2x^2 \;\text{ǂ}\; 2a^3\sqrt{a^2-x^2}+a^4}{x^2}$, et per consequens $\dfrac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{x^2}$ ex quad. circuli pendebit.

---

6 *Daneben:* Vide plag. 10. pag. ult.

8 f. *Dazu am Rande:* Contra potius .

7 $\sqcap$ y². *(1)* cuius ordinata ex qu *(2)* momentum *L* 10 ea *(1)* BC, esse *(2)* momentum figurae *(a)* ex *(aa)* AE *(bb)* AB *(b)* AECDA ex *(aa)* AE *(bb)* AB *L* 11 ex ABCDE *L ändert Hrsg.*

---

16 Vide: s. u. N. 38₁₂ S. 495 Z. 3–5.

Huius figurae [quadrati ordinatarum] y^2, habentur absolute, sed y, ex x, dant $\frac{a^2\sqrt{a^2-x^2}}{x} \sqcap y$. Unde $a^6 - a^4x^2 \sqcap y^2x^4$. Unde $x^4 + \frac{a^4x^2}{y^2} + \frac{a^8}{y^4} \sqcap \frac{a^8}{y^4} + \frac{a^6}{y^2}$ et $x^2 + \frac{a^4}{y^2} \sqcap \frac{\sqrt{a^8+a^6y^2}}{y^2}$, et $x \sqcap \frac{\sqrt{\sqrt{a^8+a^6y^2}-a^4}}{y}$.

Data figura curvam ei homogeneam invenire, elegantissimum est, atque utilissimum problema, ita enim ope curvae huius evolutae, secari potest figura proposita, in ratione data, et cuilibet eius portioni dari rectilineum aequale. Methodus autem id quaerendi haec est:

A quadrato ordinatae figurae datae auferatur quadratum unitatis; quodsi iam residui radix est ordinata figurae quadrabilis, satisfieri potest postulato.

Ut esto figura circulus: eius ordinata $\sqrt{2ax-x^2}$, eius quadratum $2ax-x^2$, auferatur inde a^2, fiet: $\sqrt{2ax-x^2-a^2}$. Unde patet ad hanc curvam habendam ipsius circuli opus esse quadratura. Sed quodsi eius quadratum sit minus quadrato unitatis id utique inde auferri non poterit, et tunc nulla dabitur curva illis homogenea, eo quidem ordinatarum sensu, ut in circulo, ab $a^2 - y^2$, si auferas a^2 restabit $-y^2$, cuius radix est impossibilis.

In hyperbola, sit a^2+y^2, aufer inde a^2 fiet y^2, cuius radix y. Unde sequeretur figuram ipsarum y quadratricem seu omnium $\frac{y^2}{2}$ quae est parabola cuius aequatio: $y^2 \sqcap 2ax$. habere curvam homogeneam figurae hyperbolae. Hinc si aliter assumas ordinatas figurae hy-

---

14 *Dazu am Rande:* Imo ab $a^2 - y^2$, auferri debet b^2, et res procedet.

478,15–479,1 pendebit. *(1)* Eius momentum *(2)* Huius figurae | quadrati ordinatarum *gestr. erg. Hrsg.* | y^2 *L* 3 f. $x \sqcap \frac{\sqrt{\sqrt{a^8+a^6y^2}-a^4}}{y}$. *(1)* Sed ista exitum *(2)* Data *L* 5 ope *(1)* fili *(2)* curvae *L* 7 f. est: *(1)* A *(2)* Datae figur *(3)* Quadratum ordinatae figurae datae aufe *(4)* A *L* 9 f. postulato *(1)*, ex notis *(2)*. Ut *L* 12 quadratura. *(1)* | Aliter, *streicht Hrsg.* | *(a)* $a^2 - y^2 \sqcap$ *(b)* $2a^2$ *(c)* $a^2 - y^2 - a$ *(2)* Sed *L* 14 cuius *(1)* ordinatae *(2)* radix *L* 14 f. impossibilis. *(1)* In hyp *(2)* In parabola: *(3)* In *L* 16 $\frac{y^2}{2}$ *(1)* | esse *streicht Hrsg.* | hyperbola *(2)* quae *L* 16 f. $y^2 \sqcap 2ax$. *(1)* esse homogeneam curvae *(2)* habere *L*

---

2 $\sqcap y^2x^4$: Richtig wäre y^2x^2. Der Fehler und die falsche quadratische Ergänzung beeinträchtigen das Ergebnis in Z. 3.

perbolicae, figura ipsis homogenea semper eveniri poterit, quia enim semel inveniri potuit, invenietur semper, prorsus quemadmodum centro gravitatis ab uno latere reperto, datur id ex aliis omnibus. Esto ergo aequatio $2ax + x^2$, inde auferatur a^2, fiet: $\sqrt{2ax + x^2 - a^2}$ cuius figurae quaeritur summa, quae summa est quadratrix ipsius hyperbolae. Itaque iam video applicatis hyperbolae ad axem, ad abscissas ex vertice; homogeneam curvam non posse haberi nisi supposita ipsa hyperbolae quadratura, nam pro x ponendo $z - a$, fiet: $\sqrt{\boxed{2az} - 2a^2 + z^2 \boxed{-2az} \boxed{+a^2 - a^2}}$, unde fiet $\sqrt{z^2 - 2a^2}$. Ad asymptoton hoc modo: $\dfrac{a^4}{x^2} - a^2$. fiet: $\sqrt{\dfrac{a^4 - a^2x^2}{x^2}}$ sive $\dfrac{a}{x}\sqrt{a^2 - x^2}$ quae pendet a quadratura hyperbolae; ut iam quaeratur figura homogenea circulo: ab $a^2 - y^2$, auferatur alia recta constans: b^2, fiet: $\sqrt{a^2 - b^2 - y^2}$ quae rursus est ad circulum.

Ab anonymae $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ quadrato, auferatur a^2, fiet: $\dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2}$ seu $\dfrac{a^2x}{2a - x}$, unde auferatur a^2, fiet: $\dfrac{a^2x[-]2a^3 + a^2x}{}$, sive $\sqrt{\dfrac{[-]2a^3 + 2a^2x}{2a - x}}$ figura ergo $\dfrac{[-]2a^3 + 2a^2x}{2a - x} \sqcap y^2$, sed si iussissem auferri: $a\gamma$. fiet: $\sqrt{\dfrac{a^2x - 2a^2\gamma + xa\gamma}{2a - x}}$ et γ. ita explicanda iam est ut numerator dividi possit per $2a - x$, nempe

$$\begin{array}{l} + \quad a^2x - 2a^2\gamma \ \not{f} - a^2 - a\gamma. \\ \underline{+ \ a\gamma \qquad\qquad\quad} \\ \quad - \ x + 2a \end{array}$$

Et fiet: $-2a^3 - 2a^2\gamma \sqcap -2a^2\gamma$ quod est impossibile, non ergo procurari potest divisibilitas. Saepe vero poterit hac arte procurari.

Iam si rursus a $\sqrt{\dfrac{a^2x - 2a^2\gamma + xa\gamma}{2a - x}}$ quadrato, auferas alterius constantis v. g. $\sqrt{a\delta}$, quadratum nempe $a\delta$, fiet alia iterum figura.

Nimirum verum est, figurae ex hac quadrati vel rectanguli constantis ablatione [factae] radicum, summam dare curvam syntomon figurae datae, sed non inde patet, hanc

4 quae *(1)* figura *(2)* summa *L* 6 quadratura *(1)* | sed *streicht Hrsg.* | hanc *(2)*. Imo potest explicando x *(3)*, nam *L* 9 circulo: *(1)* sinus circuli sunt *(2)* ab *L* 12 + *L ändert Hrsg.* 12 − *erg. Hrsg. zweimal* 12 $\sqcap$ y², *(1)* pendebit ex quad. circuli *(2)* sed *L* 19 f. figura. *(1)* Sed video me lapsum *(2)* Nimirum *L* 20 est, *(1)* | a *streicht Hrsg.* | figurae ex hac quadrati vel rectanguli constantis | ablatione facti *ändert Hrsg.* | quadratura pendere radicum summa *(2)* figurae *L* 21 patet, *(1)* figuram *(2)* hanc *L*

summam a quadratura figurae pendere cui syntomos quaeritur. Notabile autem est, quadratum constans, quod aufertur esse arbitrarium; et proinde aliquando tale sumi posse, ut figura inde proveniens sit alia atque alia, v. g. si sit $a^2 - x^2 + bx \sqcap y^2$, quae est ad circulum, ut ei quaeratur homogenea, fiet: $\sqrt{a^2 - x^2 + bx - a\gamma}$. cuius figurae quadratura habetur curva elementis circuli homogenea. Sed haec figura est modo circulus modo hyperbola. Imo erro: est semper circulus.

Interim in alio casu fieri potest ut alia ita fiat figura, v. g. sit: $\sqrt{b^2 - 2ax + x^2}$, quae est ad hyperbolam, eius ordinatis quaeratur homogenea, fiet $\sqrt{b^2 - 2ax + x^2 - a\gamma}$, pone $b^2 - a\gamma \sqcap a^2$, fiet $\sqrt{a^2 - 2ax + x^2} \sqcap \mp a \pm x$. ac proinde haberi potest homogenea hyperbolae.

Idem in infinitis aliis fieri poterit: tum radicum extractiones tum divisiones reddendo possibiles,: v. g. sit curva cuius aequatio: $\dfrac{b^2 - x^2}{a - x} \sqcap y^2$. Ab y^2, auferatur γa, fiet: $\dfrac{b^2 - x^2 - \gamma a^2 + \gamma ax}{a - x}$. Iamque ita licebit explicare arbitrarias, ut procedat divisio.

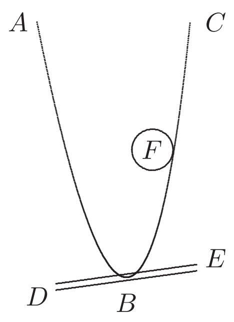
Haec valde notabilia sunt, et plane nova.

Duae figurae syntomi eiusdem curvae sunt syntomi inter se; duae curvae syntomi eiusdem figurae, sed diverso modo sumtae non sunt quidem syntomi inter se, attamen sunt symmetri, seu data dimensione unius datur et dimensio alterius.

Hinc multa nova ac plaeclara de symmetriis duci possunt. Data qualibet figura potest describi semigeometrice curva ei homogenea. Quem in finem notandum est trochoeidem cuiuslibet figurae esse homogeneam quadratrici eius figurae, quae sit curvae eius homogenea. Exempli causa: trochoeides parabolae est homogenea quadratrici hyperbolae ac proinde descripta trochoeide parabolae habebitur constructio logarithmorum geometrica et sectio rationis in data ratione. Ut autem haec trochoeides describatur necesse est laminam parabolicam sive zonam ex cono scilicet sectam arcte immissam inter duos asseres coniugatos, ut non nisi vi ibi moveri possit, ac ne recta quidem propelli, neque attolli,

5 habetur *(1)* figura circulo homogenea. Atqui huius figurae quadratura *(2)* curva *L* 5 Sed *(1)* haec *(2)* huius figurae quadratura est *(3)* haec *L* 9–11 homogenea *(1)* cir *(2)* hyperbolae. *(a)* Hinc manifest *(b)* Ponamus *(c)* Er *(d)* Idem *L* 13 ita *(1)* assumere *(2)* licebit *L* 14 f. nova. *(1)* Esto nostra ad circulum: *(a)* $\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}}$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2 + \mathrm{y}^2}$, eius quadratum $\dfrac{\mathrm{y}^4}{\mathrm{b}^4 + 2\mathrm{b}^2\mathrm{y}^2 + \mathrm{y}^4}$. *(2)* Duae *L*
17 dimensione *(1)* circuli *(2)* unius *L* 19 ei *(1)* syntomos *(2)* homogenea *L* 20 f. eius *(1)* symmetros *(2)* homogenea *L*

sed concava in parte innitendo, provolvi. Quem in finem utile erit maximi ponderis esse zonam vel suapte natura vel adiectione. Intus erit globus, et ipse gravis quantum satis est. Intus inquam, id est in concavo zonae.



[*Fig. 3*]

Zona parabolica est ABC, duo asseres sibi pene iuncti relicto pro zona nonnihil commissura, intrante interstitio, erunt DBE, inclinentur asseres ad horizontem; et globus F provolutus inclinabit zonam parabolicam quae interim stylo in ipsa defixo describet in pariete trochoidem. Sumenda est parabola plurimum differens a recta, et inprimis portio eius maxime curva. Idem est si asseres sunt horizonti paralleli, et trochoeides tum ista coarctatione tum pondere maximo imposito, non nisi mechanica ope vectis moveri possit, sed tunc aliud malum. Quod scilicet saepe circa punctum fixum rotabitur, nec progredietur. Eadem curva NB. describetur etiam si zona ponatur immobilis, sed DE circa ipsam moveantur nunc cum pariete ipsis asseribus DE affixo, sed tunc idem malum quod aliquando regredietur, et tunc non asseres sed ipsius zonae convexum habebit incisuram in qua vectis DE moveatur. Sed et iam video obiectionem ne ipsius curvae portio aliqua per idem punctum plani decurrat; non videri forte, ne quidem si zona moveatur, cum nullum sit centrum circa quod. Posteriore modo non potest fieri ut idem punctum vectis seu plani respondeat diversis curvae. Priore modo hoc quidem evenire potest. Sed non calcemus imo forte utrumque. Sed iam remedium tale satis elegans. Electo posteriore modo, hoc reddito: vectis B tendens suo pondere a C, versus E, nihilominus, manu in E premente D versus C, recolligat in se et in lineam rectam chordam ipsi BC curvae

14 aliquando *(1)* pro *(2)* regredietur *L* 16 decurrat; *(1)* cessare *(2)* non *L* 21 premente *(1)* sursum quodammodo agatur *(2)* per ipsa *(3)* D versus *L*

circumplicatam. Interea ipse pondere suo perpetuo filum tendet nec regressus ei possibilis ob filum tenens, nec progressus ob pondus renitens.

Eadem methodo et cycloeides optime describetur, paries vero vel tabula in qua designanda est curva ipsi BE affixa cum eo movebitur, stylus vero erit immobilis. Ausim dicere hanc descriptionem non fore multo difficiliorem quam parabolae secundi generis descriptionem a Cartesio propositam ad construenda problemata sursolida. Filum ipsi B infixum. Incisura in vecte, instar fossae, nisus arctioris. Duae acies eius duae acies fossae vel latitudinem incisurae ipsius zonae implebunt vel si mavis duas in ea incisuras parvas parallelas.

Vid. plag. X.

---

6 Cartesio: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67 f. (vgl. *DO* VI S. 442–444).

38_{12}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS DECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 22–23. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift erg. Fig. 1 u. 2 stark überarbeitet.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Schediasmatis de summis serierum et quadraturis figurarum pars X.

Ope huius curvae inveniri poterunt, quotcunque mediae proportionales: Imo quod est longe maius, et quod alioquin geometrice fieri non potest: Si id omne geometricum est, quod exactum est, fatendum est has constructiones fore exactas: nam linea ista tam exacte describi poterit, quam parabola secundi generis a Cartesio proposita. In quo longe differt a spiralibus quas exacte non describas, ob duos motus, a se invicem independentes, alterum in circulo, alterum in radio, quorum certa debet proportio, quam dare non est in nostra potestate, adeo ut spirales illae non nisi divina arte describi possint, ope intelligentiae, cuius cogitationes distinctae fiant in tempore minore quolibet dato; quod nec de angelis verum puto.

Quod secus est in linea nostra: Eadem linea continuo describitur motu; non per puncta invenitur.

P. Pardies, ingeniosissimus utique vir, tractatum de linea logarithmica moliebatur, descripta per medias proportionales ad rectam aequalibus intervallis applicatis; sed praeterquam quod non nisi per puncta, ac proinde non tota exacte linea describatur; intermediis punctis vacuis futuris, praeter hoc inquam quis non videt has mediarum proportionalium inventiones, aliunde esse sumendas; idque vel qualitercunque, quod non est

10 differt *(1)* ab helicibus *(2)* a spiralibus *L* 20 videt *(1)* quantae *(2)* has *L*

6 Ope huius curvae: Diese Worte befinden sich auf dem vorhergehenden Bogen, Bl. 21 v°. Leibniz hat zunächst fortlaufend geschrieben und den Bogen Bl. 22–23 erst nachträglich mit einer eigenen Überschrift versehen. 9 Cartesio: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 36–38 (vgl. *DO* VI S. 407–411); Leibniz setzt sich mit den daran anschließenden Bemerkungen von Descartes über die in der Geometrie zulässigen Kurven auseinander; sein Handexemplar weist auf S. 39 eine Unterstreichung auf. 17 Pardies: Die Abhandlung über die logarithmische Kurve wurde wohl nicht vollendet; vgl. *LSB* III,1 N. 9 S. 43 Erl. zu Z. 1–6; Pardies hat die logarithmische Kurve auch in den *Élémens de geométrie*, 1671 u. ö., livre VIII, articles 16–31 S. 86–93 behandelt.

geometrice sive exacte agere; vel per totidem operationes quot puncta in curva designare vult; et ille tamen ab ea linea plurimum usus publico pollicebatur.

Ecce ergo lineam geometricam quae id omne praestat quod a logarithmica exacte si possibile esset, descripta posset expectari.

Fateor si ferenda est definitio geometricarum quam dedit nobis Cartesius, nostra talis non erit: sed quemadmodum ille veteres iure culpat, quod a geometricarum numero conicas, aut certe quos vocabant lineares locos, exclusissent; ita; ille rursus culpandus est, quod geometricarum nomine ad analyticas coarctato; scientiam auxilio necessario privat; causam credo habens unicam in arcanis, ut scilicet iactare posset, omnium curvarum geometricarum a se methodum tangentesque traditas. Sane quo ille argumento utitur in veteres, eo ego in illum: quicquid exactum, id inquit geometricum est. Recte. Velim ergo ostendat, in quo descriptio evolutae circularis, vel trochoeidum nostrarum exacta non sit. Sane tam exacte descriptas esse certum est quam ullam geometricam aeque compositam. Culpat veteres, quod agnita helicum et spiralium imperfectione conchoeides quoque et cissoeides cum ipsis confusas exclusissent. Ita ego illum, quod cum helicibus et spiralibus, trochoeides et evolutas confudit. Obicit lineis quas non geometricas vocat, quod a duobus diversis motibus dependeant, quorum proportionem exacte servare non liceat. Recte illud quidem in helices vel spirales: at non recte dicitur in trochoeides nostra methodo descriptas et evolutas. Obicies; ergo habetur circuli quadratura. Nego haberi qualis quaeritur. At inquies ope trochoeidis circularis vel evolutae exacte habetur recta circumferentiae aequalis. Quis neget. Si recte descriptae, habetur ergo et geometrice. Ita certe: nam si exacte, certe geometrice. Ergo habetur et quadratum circulo aequale. Fateor. Ergo quadratura circuli. Fateor, sed non qualis quaeritur; quaeritur enim non geometrica tantum, sed et analytica: id est quaeritur ratio circuli ad quadratum inscriptum, quaeritur ratio diametri ad circumferentiam.

1 totidem *(1)* instrumenta separata, quot sunt *(2)* num *(3)* operationes *L* 7 certe *(1)* sursolidas *(2)* quas *L* 8 f. privat; *(1)* ideo *(2)* ex uno credo causam haben *(3)* causam *L* 14 quod *(1)* cognita *(2)* agnita *L* 20 ope *(1)* cycloeidis vel tro *(2)* trochoeidis circularis | vel evolutae *erg.* | exacte *L* 21 si ... descriptae *erg. L*

5–16 definitio: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 20 f. (vgl. *DO* VI S. 392 f.); culpat: *a. a. O.* S. 17–19 (vgl. *DO* VI S. 388–390) u. *Lettres*, Bd. 3, 1667, S. 354 (*DO* II S. 313); Obicit: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 18 f. (vgl. *DO* VI S. 390).

Eodem argumento, quo ille utitur in nos, veterum sectatores, et Vieta utebantur in sententiam Cartesii, usi ut Cartesiani quadratura circuli; ita illi duplicatione cubi. Nam Vieta; si lineae conicae in geometriam recipiendae sunt; habemus ergo iam duplicationem cubi, geometricam. Ita est; et duas medias proportionales exacte, fateor; ergo et hoc geometrice; ita sane oportet ex datis. Quid ergo cur quaesivere geometrae quod habebant. Facilis responsio est; quemadmodum magnitudinem circuli non tantum geometrice, sed et analytice; ita duplicationem cubi non tantum analytice, sed et plane per lineas scilicet simplicissimas rectam et circulum desiderabant. Recte ergo Cartesius lineas alias non negligendas monet ob praeclaras opticas, staticas, aliasque proprietates. Ita ego eas quae analyticae non sunt, non minus geometricas esse contendo, non tantum quod exactae sint, sed et quod praeclaros habeant usus; ut cycloeides primaria inventos ab Hugenio, secundaria observatos a Romero; trochoeides parabolica sive curva mesolaba, detectos a me.

Ita ergo distinguendum censeo; lineae omnes aut geometricae sunt aut mechanicae. Geometricae sunt, quae uno tractu descriptae intelliguntur, mechanicae quae per puncta. Unde patet lineas geometricas posse describi per puncta ut ellipsin, et contra lineas mechanicas posse describi geometrice a natura rerum; aut intelligentia directrice. Nam omnes lineae quae modo certa regula constent; omnia eorum puncta concernente, geometricae sunt, natura sui, aut ratione rerum autoris; potest etiam fieri, ut quae lineae nobis geometricae non sunt, ut logarithmica fiant aliquando, reperta eas describendi ratione; quemadmodum et evenire potest, ut lineae non analyticae fiant analyticae, quem-

5 cur | veteres *gestr.* | quaesivere *L* 9 praeclaras *(1)* in *(a)* conicis *(b)* opticis, in mechanicis, ut *(2)* opticas, | mechanicas, *gestr.* | staticas, *(a)* geom *(b)* aliasque *L* 11 primaria *erg. L* 16 puncta. *(1)* Uno tractu descriptae sunt aut *(a)* arte *(b)* in nostra potestate, aut tantum in contemplatione *(2)* Unde *L* 16 lineas | sua natura *gestr.* | geometricas *L* 17 lineas | sua natura *gestr.* | mechanicas *L* 17 aut *(1)* angelo *(2)* intelligentia *L* 20 f. ratione; *(1)* inventa *(2)* quemadmodum trochoeides *(a)* parabolica cubica *(b)* parabolicae cubicae; *(3)* quemadmodum *L*

1 Vieta: *Supplementum geometriae*, 1593 (*VO* S. 240–257). — Fr. v. Schooten erwähnt die Ansichten von Viète in den *Commentarii in R. Descartes Geometriam*, *DGS* I, S. 169. 8 Cartesius: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 38 f. [Marg.] u. 50 (vgl. *DO* VI S. 412 u. 424). 11 f. Hugenio: *Horologium oscillatorium*, 1673; Romero: Leibniz wußte um O. Rømers Forschungen u. a. zu epizykloidisch geformten Rädern; vgl. *LSB* III,1 S. LXVII.

admodum; trochoeides parabolae quadrato-cubicae cuius dimensionem invenit Heuratius, analytica non erat ante quam ille curvae illius dedisset dimensionem.

Lineae ergo omnes a nobis descriptae geometricae aut mechanicae sunt. Geometricae aut analyticae aut tetragonisticae; analyticae sunt, quae sub calculum cadunt, ita ut relatio ordinatarum ad abscissas aequatione exprimi possit. Tetragonisticae, quae ad calculum tum demum revocari poterunt, cum dimensiones aut quadraturae quorundam curvilineorum invenientur. Analyticae sunt simplex (recta), quadraticae[,] cubicae, si aequationes ipsarum aestimes; in quibus scilicet duae incognitae quantitates eaedem aut diversae, altera in alteram ducuntur; cubicae etc. Tetragonisticae cuius gradus sint incertum est; (si impossibilis esset quadratura, essent nullius), tales sunt: trochoeides; evolutae; tetragonisticae aut sunt aut non sunt in nostra potestate, sunt evolutae et trochoeides, quas describere possumus; non sunt spirales; mechanicae sunt quae per puncta descriptae intelliguntur; ubi ne quidem rationem continuam describendi i n t e l l i g i m u s ; ut in logarithmica.

Aliter dividi poterat, lineas esse aut geometricas, aut physicas et mechanicas; geometricae, quorum descriptio a nobis intelligi pariter et fieri potest; physicae, quas describi intelligimus; ut a natura aut mente; mechanicae, quarum descriptionem neque posse possumus neque habemus. Sufficit interea geometricas a me appellari, quas uno tractu describi intelligimus; mechanicas, quas per puncta; analyticas esse eas geometricas, quae sub calculum cadunt. Unde intelligi potest non esse notam lineam [mechanicam] sub calculum cadere, nam logarithmicae quodlibet punctum analytice determinari potest; et tamen geometrica non est; cum nunquam revera, nec nisi ad sensum describi possit.

De trochoeidibus notandum est quandocunque curva alicuius figurae dimensioni analyticae subiecta est et trochoeidem eius fieri analyticam. Et tamen fatebitur mihi aliquis

1 parabolae *(1)* cubicae *(2)* quadrato-cubicae *L* 8 scilicet *(1)* rectangulum ne *(2)* duae *L* 10 f. sunt: *(1)* cycloeides, *(2)* trochoeides; evolutae; *(a)* mechanicae rursus duorum sunt generum, *(b)* tetragonisticae *L* 13 ne *(1)* comminisci quidem rationem continuam describendi possumus, ut in logarithmica *(2)* quidem *L* 15 f. geometricae, *(1)* quae a nobis intelliguntur et describuntur; physicae quae intelliguntur non describuntur *(2)* quarum *L* 17 posse *erg. L* 19 esse *(1)* eam speciem geometricarum *(2)* speciem earum geometricarum *(3)* eas *L* 20 non geometricam *L ändert Hrsg.* 21 punctum *(1)* geometrice *(2)* analytice *L*

1 parabolae: Leibniz meint die in H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520, als erstes Beispiel für die Rektifikationsmethode angeführte, heute als semikubisch bezeichnete Parabel $ay^2 = x^3$. 24 aliquis: z. B. Leibniz selbst; s. N. 39 S. 557 Z. 16–20.

descriptionem per constructionem tetragonisticam in illis casibus plerumque praelatum iri etiam analyticis etsi haberentur certe, etiamsi haberemus quadraturam circuli et omnium eius partium et sectionem angulorum universalem, quo facto cycloeidis descriptionem analyticam haberemus; mallemus tamen profecto volatione ista tam facili quam aliis regularum forte compositioribus describere.

Nota trochoeides parabolica dat sectionem rationis, et cycloeides linea dat sectionem anguli in data ratione; quae sunt illa duo magna geometriae desiderata.

Notabile est, cycloeidis ordinatarum differentias geometrice describi posse, est enim figura angulorum, quam voco. Si Cartesiani obiciunt fila vel chordas non per minima flecti, certe nec ellipsis descriptio ope fili geometrica erit. Et vero nulla plane regula perfecte recta haberi potest; nec tamen ideo regulam et lineam rectam repudiamus.

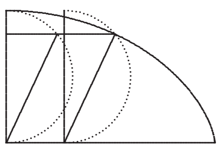
Data curva invenire aliam cuius sit trochoeides est invenire curvam differentiis figurae propositae homogeneam, imo paulo amplius quam homogeneam nimirum aequalem. Itaque quandocunque curva dimensionis capax est, eius trochoeidem habemus. Itaque generaliter data curva non habemus statim eius trochoeidem. Etsi data evolutionali habeamus evolutam. Ita habemus figuram cuius trochoeides sit parabola, ea est scilicet quadratrix parabolae cubicae Heuratianae.

Videndum an paraboloeides aut hyperboloeides eae, in quibus exponentes non sunt numeri rationales intelligi possint geometricae, v.g. $y^{\sqrt{2}} \sqcap x$. Non certe nisi ope trochoeidis meae.

Hyperbola est figura rationum; et $\dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$ figura angulorum; et $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ figura segmentorum.

---

22 *Nach* segmentorum, *ohne Bezug zum weiteren Text:*

Cycloeides est 

1 constructionem *(1)* analyticam *(2)* tetragonisticam *L* 11 f. repudiamus. *(1)* Recte ipse Cartesius; *(2)* Data *L*

---

10 ellipsis descriptio ope fili: R. DESCARTES, *Dioptrique*, 1637, S. 90 bzw. *Dioptrice*, 1644, S. 150 (vgl. *DO* VI S. 166 bzw. S. 623). 17 parabolae cubicae Heuratianae: s. o. Erl. zu S. 487 Z. 1.

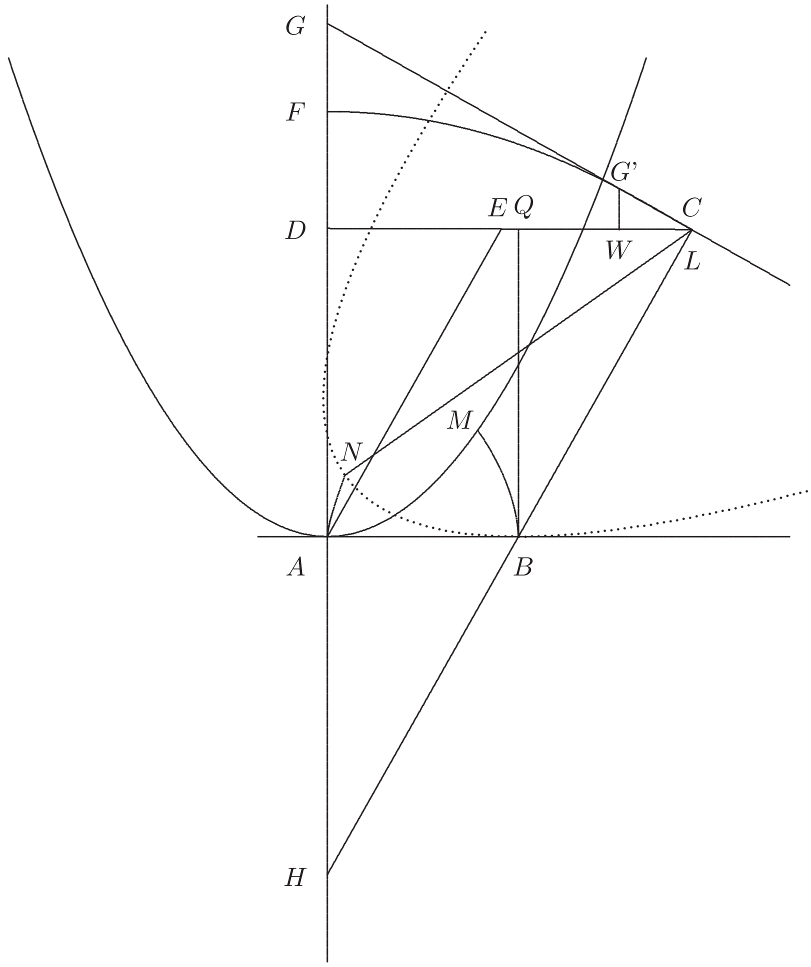


fig. 1.

Esto parabola tangens planum vertice A, eius axis $ADFG$. Sumto in axe puncto F. (forte utile erit AF. aequari lateri recto) describatur trochoeides; ex cuius puncto C.

1 fig. 1.: Leibniz verwendet in der Vorlage den Buchstaben G zur Bezeichnung von zwei verschiedenen Punkten. Zur besseren Unterscheidung wird der zweite in der Figur und im Text mit G' benannt.

ordinata in axem immobilem consideratum, parabolae in prima statione existentis AF, demittatur; iungatur et [BC.] punctum quo parabola nunc tangit planum, iuncta BC. erit perpendicularis ad curvam. $\dfrac{G\text{'}W}{WL} \sqcap \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}} \sqcap \dfrac{GD}{DC} \sqcap \dfrac{DC}{DH} \sqcap \dfrac{ED \sqcap CQ}{AD}$. Sumta ergo $FA \sqcap b$, et $FD \sqcap x$. erit $AD \sqcap b-x$. et fiet $ED \sqcap \dfrac{ba-ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$. EC. autem aequalem curvae parabolae BM, appellare poterimus ψ fiet $CD \sqcap \dfrac{ba-ax}{\sqrt{a^2+x^2}} + \psi$. Sed inesse video errorem, [ratio $G\text{'}W$.] ad WL. non habetur. Omnia paulo consideratius agenda.

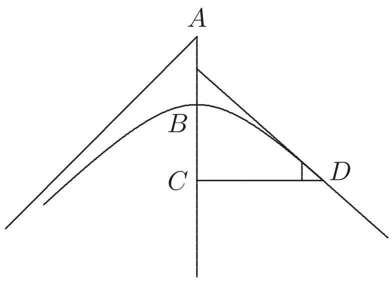


fig. 2.

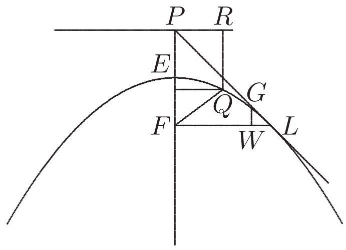


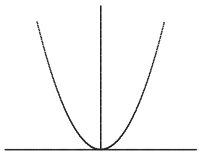
fig. 3.

$AC \sqcap y$. $CD \sqcap x$. A. centrum hyperbolae BD, cuius vertex B. erit $y \sqcap \sqrt{a^2+x^2}$. Esto alia curva EL, cuius axis EF. cuius tangens GL. infinite parva, recta autem GL. ducta in constantem quandam a, aequetur ipsi [AC.] ductae in GW. Patet rectangulum sub curva EL, et recta a. comprehensum aequari spatio BCD. GW, infinite parvam

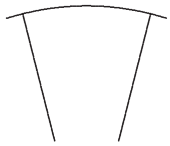
2 BD. *L ändert Hrsg.* 3 $\dfrac{\mathrm{G'W}}{\mathrm{WL}} \sqcap$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}}$ *L* 6 rationem G. *L ändert Hrsg.* 8 f. $\mathrm{y} \sqcap \sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}$. *(1)* GW $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2}$ *(2)* Esto *L* 10 CD. *L ändert Hrsg.* 11 GW, *(1)* licet *(2)* infinite *L*

3 $\dfrac{G\text{'}W}{WL} \sqcap \dfrac{a}{\sqrt{a^2+x^2}}$: Die Gleichsetzung ist nicht zulässig. Leibniz erkennt den Fehler und setzt neu an.

appellemus 1. Ponamus $GL \frown a \sqcap \sqrt{a^2+x^2}$. ergo $GL \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2+x^2}}{a}$. ergo $GL^2 \sqcap \dfrac{a^2+x^2}{a^2}$, unde si auferatur $GW^2 \sqcap 1$. restabit $\dfrac{x^2}{a^2}$, et erit $WL \sqcap \dfrac{x}{a}$. Summa autem omnium WL. aequatur FL. at summa omnium $\dfrac{x}{a}$[,] $\sqcap \dfrac{[x^2]}{2a}$. Ergo $FL \sqcap \dfrac{[x^2]}{2a}$. Ergo EL. curva est parabolica, cuius latus rectum $2a$. aequatur lateri recto hyperbolae transversum et rectum aequalia habentis.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

Porro quoniam iam quaestio est, an punctum quod trochoeidem parabolicam describere debet in curva an in axe sumendum sit, video naturalissimum videri, ut sumatur in axe, neque enim video cur in curva aliud pro alio sumatur; praeterea, non inciperet ita trochoeides ab ipso axe, si punctum sumeretur in curva; itaque naturalissimum arbitror in ipso axe sumere parabolae focum. Ita enim mirabilis naturae orietur linea continuabilis in infinitum, sed involuta, et serpentina, ubi scilicet punctum parabolae foco oppositum praeterierit. Antea perpendicularis ad curvam ex puncto parabolae semper ducetur versus sinistrum, quando punctum foco oppositum in parabola, planum attigerit, tunc neque dextra erit neque sinistra sed perpendicularis; postea tendet in [dextrum]; unde habebit ibi flexum contrarium curva, si non involuta est.

In producto axe parabolae, fig. 3. sumatur $EP \sqcap$ quartae parti lateris eius recti $\sqcap$ EF. erit $FP \sqcap a$. Et sumto in curva parabolae puncto quolibet Q. fiet $QR \sqcap QF \sqcap \dfrac{1}{2}a+y$

3 y^2 *L ändert Hrsg. zweimal* 4 aequatur *(1)* lateri tr *(2)* diametro *(3)* lateri *L* 7 iam *(1)* AN *(a)* $\sqcap$ *(b)* in fig. 1 $\sqcap$ $\surd$ *(2)* quaestio *L* 13 Antea *(1)* curvae punctum semper erit a latere *(2)* perpendicularis ad curvam | ex puncto parabolae *erg.* | semper *L* 15 sinistrum *L ändert Hrsg.* 18 et *(1)* sumta in curva parabolae recta *(2)* sumto *L*

11 focum: Die folgenden Aussagen über die Gestalt der Kurve, die sich an fig. 1 orientieren, gelten nicht für die Trochoide des Brennpunktes, die eine nach oben offene Kettenlinie darstellt.

quae in fig. 1. $\sqcap AE \sqcap BC$ posita $AD \sqcap y$. in dicta fig. 1. eritque $AE^2 \sqcap \dfrac{a^2}{4} + ay + y^2$, unde si auferatur $AD^2 \sqcap y^2$, restabit: $\sqrt{\dfrac{a^2}{4} + ay}$ quae est applicata parabolae dimidii lateris transversi, nam pro $\dfrac{a}{4} + y$. posito z. fiet $\sqrt{az}$. cui si addatur curva parabolica $\sqcap \psi \sqcap EC$, fiet DC ordinata $\sqcap \sqrt{az} + \psi$.

Quemadmodum series inaequabiles non ideo negamus esse arithmeticas, quia calculo explicari possunt, etsi non aequatione; ita figurae quoque inaequabiles, quales sunt cycloeides et mesolaba, cum descriptione accurata exhiberi possint, non est negandum geometricas esse, etsi sub aequationem non cadant.

Veteres constructionem aliam esse geometricam dicebant, aliam organicam; hanc Cartesius recte explosit cum constet regulam et circulum organa quoque esse, etsi minus composita. Quicquid ergo organicum est, id geometricum est, modo supposita organi exactitudine, etiam lineam quandam veram seu geometricam, apparenti oppositam sequi necesse sit.

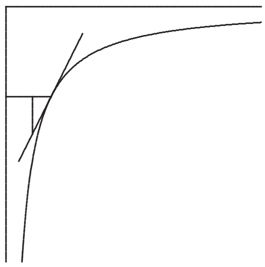
Si lineas eas appellamus geometricas, quarum ordinatae ad abscissas relationem habent calculo explicabilem; utique et logarithmica Renaldini ex eius et Gregorii et P. Pardies sententia erit geometrica, et curva quadratrix Wallisii: Sin ait Cartesius eas ideo non sufficere, ut calculo explicentur, sed ut aequatione, quod fieri non potest: Afferat distinctionis causam. Nam et series arithmeticae ut dixi non semper aequatione explicari possunt, v. g. progressio geometrica. Sin rationem affert; quod hae lineae quae sub calculum cadunt describi tamen nisi aequationis sint capaces nequeant: videt ergo non

2 applicata *(1)* eiusdem parabolae, ad aliam licet diametrum *(2)* parabolae *L* 5 Quemadmodum *(1)* figuras *(2)* series *L* 5 esse *(1)* geometricas *(2)* arithmeticas, *(a)* ita *(b)* quia *L* 13 f. sit. *(1)* Si C *(2)* Si *(a)* cum Cartesio *(b)* lineas *L* 20 capaces *(1)* ope calculi, *(2)* nequeant *L*

10 Cartesius: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 17–19 (vgl. *DO* VI S. 388–390). 15 f. logarithmica Renaldini: J. Gregory erwähnt in seiner Verteidigung der Logarithmuskurve, *Geometriae pars universalis*, 1668, Prooemium, die Mediceischen Kurven von Renaldini, bei denen es sich jedoch um spezielle Kurven zur Gleichungslösung handelt; Leibniz bezieht sich vermutlich auf die mißverständliche Darstellung des Sachverhalts durch die Rezension von Gregorys Werk in den *Philosophical Transactions* III Nr. 35 vom 18./28. Mai 1668 S. 685–688, insbesondere S. 685 f. — P. Pardies: *Élémens de géométrie*, 1671, préface. — curva quadratrix Wallisii: *Arithmetica infinitorum*, 1656, Scholium nach prop. 194 S. 196 (*WO* I S. 477).

calculum, sed describendi potestatem lineas reddere geometricas; et quasdam analyticas describi non posse, ac proinde non esse geometricas, vicissim quasdam geometricas calculari non posse atque adeo non esse analyticas.

$2ax \sqcap y^2$. $\cancel{2}al \sqcap \cancel{2}y^2$. Ergo $l \sqcap x$. Iam $\frac{l}{y} \sqcap \frac{\beta}{w}$. Ergo $w \sqcap \frac{y\beta}{x} \sqcap \frac{\beta\sqrt{2ax}}{x}$. eius quadrato addatur 1. fiet: $\frac{\sqrt{2ax+x^2}}{x}$. quae curva proinde pendet ex quad. hyp. Unde $2a\cancel{x} + x^{\cancel{2}} \sqcap \frac{x^{\cancel{2}}y^2}{a}$ sive: $\frac{2a^3}{y^2-a^2}$. Porro et $2ax \sqcap 2yl$. et $\frac{ax}{y} \sqcap l$. et pro x. ponendo $\frac{y^2}{2a}$. fiet: $\frac{ay^2}{2ay} \sqcap \frac{y}{2}$. Iam $\frac{l}{x} \sqcap \frac{\beta}{w}$. erit $w \sqcap \frac{2x\beta}{y} \sqcap \frac{2y^2}{2ay} \sqcap \frac{y}{a}$. et cuius quadrato addendo 1. fiet $\frac{y^2+a^2}{a^2}$. cuius radix $\frac{\sqrt{y^2+a^2}}{a}$. homogenea ordinatae hyperbolae et exprimens curvam parabolae. Interea valde notabile est, quod ita detexi eandem curvam diversis figuris homogeneam esse posse.

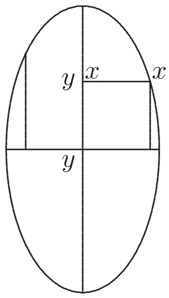


[*Fig. 6*]

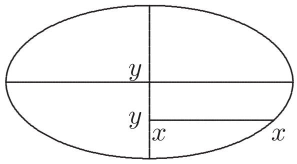
Hyperbola: $a^2 \sqcap xy$. Unde $-\cancel{x}y \sqcap \cancel{x}l$. Iam $\frac{x}{l} \sqcap \frac{w}{\beta}$. Ergo $\frac{x\beta}{-y}$ seu $\frac{a^2\beta}{-y^2} \sqcap w$. cuius quadratum $\frac{a^4\beta^2}{y^4}$. Addatur β^2. fiet: $\sqrt{\frac{a^4\beta^2+\beta^2y^4}{y^4}}$. seu $\frac{\beta}{y^2}\sqrt{a^4+y^4}$. homogenea curvae hyperbolicae $\mp a^2 + x^2 \sqcap y^2$. Unde $\cancel{2}xl \sqcap \cancel{2}y^2$. Unde $l \sqcap \frac{y^2}{x} \sqcap \frac{\mp a^2+x^2}{x}$. Iam

1 describendi *(1)* possibilitat *(2)* potestatem *L* 7 $\sqcap \frac{y}{a}$. *(1)* Unde auferendo a^2 *(2)* et *L*

$w \sqcap \dfrac{y\beta}{l} \sqcap \dfrac{y\beta}{\frac{y^2}{x}} \sqcap \dfrac{x\beta}{y} \sqcap \dfrac{x\beta}{\sqrt{\text{ǂ}a^2+x^2}}$. Ad $\dfrac{x^2}{\text{ǂ}a^2+x^2}$ addatur 1. fiet: $\dfrac{x^2 \,\text{ǂ}\, a^2+x^2}{\text{ǂ}a^2+x^2}$, et $\sqrt{\dfrac{2x^2 \,\text{ǂ}\, a^2}{\text{ǂ}a^2+x^2}} \sqcap \sqrt{1 \; \dfrac{[+x^2]}{\text{ǂ}a^2+x^2}}$. homogenea curvae hyperbolicae. Ope huius inventi semper plurium curvarum quadraturae alterius ad alteram reduci possunt.



[*Fig. 7*]



[*Fig. 8*]

Ellipsis $a^2 - \dfrac{a}{b}y^2 \sqcap x^2$. Unde $-\dfrac{\cancel{2}a}{b}yl \sqcap \cancel{2}x^2$. sive $l \sqcap -\dfrac{bx^2}{ay} \sqcap \dfrac{-ba^2+ay^2}{ay}$. Iam $w \sqcap \dfrac{y\beta}{l}$. Ergo $w \sqcap \dfrac{y^2\beta a}{-ba^2+ay^2}$, sive cum est explicanda prius y. addatur 1. ad eius quad. fiet: $\sqrt{\dfrac{2y^4a^2+b^2a^4-2ba^3y^2\boxed{+a^2y^4}}{b^2a^4-2ba^3y^2b+a^2y^4}} \sqcap \dfrac{\sqrt{2y^4a^2+b^2a^4-2ba^3y^2}}{\text{ǂ}ba^2 \,\text{‡}\, ay^2}$, sive $\dfrac{\sqrt{2y^4+b^2a^2-2bay^2}}{y+\sqrt{ba} \frown y-\sqrt{ba}}$. Hinc puto inveniri posse tandem dimensionem curvae ellipticae. Additis iis quae de momento curvae ellipticae dicta sunt.

Curvae hyperbolicae valor pariter ex ellipticae quaeratur et explicata recta x. item sumta hac aequatione: $2av \,\text{ǂ}\, \dfrac{a}{b}v^2 \sqcap z^2$. Quia curva hyperbolica est $\sqrt{\dfrac{2x^2 \,\text{ǂ}\, a^2}{\text{ǂ}a^2+x^2}}$. ducatur in $\sqrt{\text{ǂ}a^2+x^2}$, eius momentum ex axe erit: $\sqrt{2x^2 \,\text{ǂ}\, a^2}$. quod pendet ex quad. hyp. Iam

2 ǂa² *L ändert Hrsg.* 6 cum ... prius y. *erg. L* 9 f. sunt. *(1)* Momentum curvae hyperbolicae quaeratur *(2)* Curvae *L*

eadem curva et sic exprimitur: $\dfrac{\sqrt{a^4+y^4}}{y^2}$. Eius momentum ex asymptoto est: $\dfrac{\sqrt{a^4+y^4}}{y}$. Cuius momentum ex y. est $\sqrt{a^4+y^4}$. Momentum ex axe est $\dfrac{a^4}{y^2}+y^2$. Quod habetur pure. Iam $\dfrac{a^4+y^4}{y^2} \sqcap x^2$. Unde $y^4-x^2y^2+x^4 \sqcap x^4-a^4$. Unde $y^2 \sqcap \ddagger\sqrt{x^4-a^4}+x^2$. Quod momentum pendet ex quad. hyp. quia $\sqrt{x^4+a^4}$ pendet ex quad. hyp. ut ostendi plagula 9. pag. 2. huius schediasmatis. Iam puto has duas figuras $\sqrt{x^4-a^4}$, et $\sqrt{x^4+a^4}$ non differre, sed esse eandem, ut $\sqrt{x^2+a^2}$, et $\sqrt{x^2-a^2}$ non differunt. Cum ergo hoc modo tria habeamus momenta, figurae huius quae curvae hyperbolicae homogenea est, sequitur credo haberi ipsam figuram, et proinde et curvam, ex quad. hyp. Ipsae autem figurae ordinata y. erit $\sqcap \sqrt{\ddagger\sqrt{x^4-a^4}+x^2}$. In spem ex his venio dandae dimensionis curvae ellipticae et hyperbolicae. Memini Iac. Gregorium asserere, se dare centrum gravitatis curvae parabolae ex quad. circuli et hyperbolae; idem dicit Wallisius. Ego vero id dare possum ex sola quad. hyp. Hinc si non erramus aliquis dabit quad. circ. ex data quad. hyp. In eandem pene spem ex curvae ellipticae dimensione et momento erigor.

6 differunt. *(1)* Et y $\sqcap$ *(2)* Porro y $\sqcap \sqrt{\ddagger\sqrt{\mathrm{x}^4-\mathrm{a}^4}+\mathrm{x}^2}$ quae *(3)* Cum *L* 7 habeamus *(1)* curvae *(2)* momenta *L* 9 $\sqrt{\ddagger\sqrt{\mathrm{x}^4-\mathrm{a}^4}+\mathrm{x}^2}$. *(1)* Iam quaeramus eius differentiam a $\sqrt{+\sqrt{\mathrm{x}^4-\mathrm{a}^4}-\mathrm{x}^2}$ *(2)* In *L*

3 $y^4-x^2y^2+x^4$: Leibniz erweitert bei der quadratischen Ergänzung mit x^4 statt mit $\dfrac{x^4}{4}$. Der Fehler wirkt sich auf die folgenden Gleichungen aus, jedoch nicht auf die grundsätzliche Überlegung. 4 ostendi: s. o. N. 38₁₁ S. 478 Z. 6 f. 10 Iac. Gregorium: *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Postscriptum S. 60. 11 Wallisius: Die für die Berechnung des Kurvenschwerpunkts erforderlichen Werte der Bogenlänge der Parabel und der Oberfläche ihres Drehkörpers bestimmt Wallis erstmals in *Tractatus duo*, 1659, S. 97–99 (*WO* I S. 554–556). Leibniz bezieht sich vermutlich — wie in *De hyperbola* (Cc 2, Nr. 612) — auf *Mechanica*, 1670–71, pars 2 cap. 5 prop. 31 S. [544]–555 und das Scholium S. 747 bis 753 (*WO* I S. 916–930).

Curva $\dfrac{a^2}{a^2+y^2} \sqcap x^2$. pendet ex quad. circuli. Est enim momentum anonymae lineae ex basi. Ergo et $\dfrac{y^2}{a^2+y^2} \sqcap x^2$. Earum summa: $\dfrac{a+y}{\sqrt{a^2+y^2}} \sqcap z$. et quadrando: $\dfrac{a^2+y^2+2ay}{a^2+y^2}$ [*bricht ab*]

---

2 *Über* Ergo et $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}$:

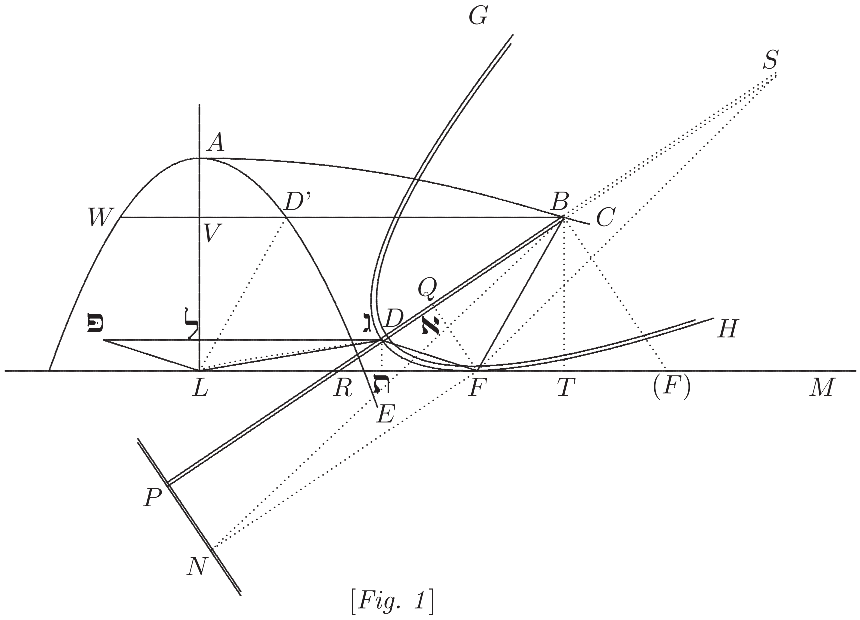
3 *Am Rande, gestrichen:* $\sqrt{\dfrac{a^2\beta^2}{y^2}-\beta^2} \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2\beta^2-\beta^2y^2}}{y}$. Quadratum ergo est momentum hyperbolae ex diametro coniugata, et habebitur curva logarithmorum. $a^2-y^2 \sqcap x^2$. Ergo $y^2 \sqcap x^2+a^2$ [*!*]. Quadrata ergo omnium invenienda sunt. Ea vero habentur; habetur ergo curva quae sit homogenea elementis hyperbolae. Atque ita perfectam habebimus logarithmorum descriptionem.

8 ergo *(1)* momentum hyperbolae *(2)* curva *L*

38_{13}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS UNDECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 24–25. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Plagula XI. schediasmatis de seriebus et summis.



[*Fig. 1*]

Veniunt in mentem res tanti momenti, circa curvam constructricem generalem, sive trochoeidem parabolicam, ut non possim non persequi.

7 parabolicam, | ut *streicht Hrsg.* | ut *L*

5 *Fig. 1*: Die flüchtig skizzierte Figur der Handschrift bildet die tatsächlichen Lage- und Größenverhältnisse nur stark verzerrt ab. Da Leibniz dies im Text kommentiert und punktuell korrigiert, wird die Figur möglichst vorlagengetreu wiedergegeben. — Zwei verschiedene Punkte, die Leibniz beide mit dem Buchstaben *D* bezeichnet, werden *D* u. *D*' benannt.

Descripta intelligatur trochoeides nostra, $[ABC]$. Parabola genitrix in situ descriptionis, $GDFH$. tangens planum LM. in puncto F. eius vertex D. umbilicus curvam ABC. describens $[B]$. FB. perpendicularis ad curvam. $D'L$. ipsi aequalis et parallela quia $D'B$. aequalis et parallela ipsi LF. Et FN. aequalis utrique ex proprietate parabolae, posito BP. esse eius latus rectum dimidium.

Et quia LM. tangit parabolam, ideo erit $DQ \sqcap DR$. seu QR. dupla ipsius QD. Axis DB. producatur in S. dum QS. fiet aequa ipsi BP. et ex nota parabolae proprietate SF. erit ipsi perpendicularis in F, et proinde angulus SFM. rectus et anguli SFL. et SFM. aequales, quamquam figura id non ita ferat, sed provideri talia ab initio tumultuaria descriptione non potuere. Ergo recta SF. parallela rectae AL. Iungatur BN. erit $BN \sqcap FS$. et triangula BPN. et SQF. aequalia et similia.

Ergo triangula SQF, (vel BPN.) et FQR. et BTR. erunt similia. Sunt autem BT. et SF. parallelae. Ex tot proprietatibus innumera poterunt duci theoremata memorabilia, sed et quadraturae (applicando ordinatas nunc ad axem parabolae, nunc ad axem trochoeidis,) et solidorum ac superficierum dimensiones. Sed quoniam nunc non nisi curvae aequationem quaerimus; illa in aliud tempus differemus.

Iam datur BR, posita enim $DQ \sqcap x \sqcap DR$, erit $BR \sqcap x + \frac{a}{2}$. ponendo latus rectum parabolae, $2a$.

Hinc iam facile habetur $FT \sqcap VD'$. Nam habetur $BF \sqcap QP \sqcap BR \sqcap \frac{a}{2} + x$.

---

11 *Am Rande:* Etiam FB. vel FN. vel QP. $\sqcap BR$

1 nostra, | ACD *ändert Hrsg.* |. *(1)* Descripta sit et parabola, genitricis dimidium habens latus rectum, AD'E. *(2)* Parabola *L* 2 GDFH. *(1)* eius axis *(2)* tangens *L* 2 f. umbilicus *(1)* B. describ *(2)* curvam ABC. describens | C *ändert Hrsg.* |. FB. perpendicularis *L* 6 QD. *(1)* Cumque rectae sint parallelae *(2)* Axis *L* 10 potuere. *(1)* Perpetuo *(2)* Ergo *(a)* anguli *(b)* triangula *(3)* Ergo *L* 10 f. BN $\sqcap$ FS. *(1)* et ei parallela *(2)* et *L* 15 f. quoniam *(1)* satis *(2)* nunc *(a)* nis *(b)* non nisi curvae *(a)* descriptionem quaerimus *(b)* aequationem quaerimus; *(aa)* ista *(bb)* missa *(cc)* ita *(dd)* illa *L* 17 datur *(1)* BT ad TR *(2)* BR, *(a)* quae est *(b)* posita *L* 18 f. 2a. *(1)* Iam $\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{BR} \sqcap \mathrm{x} + \frac{\mathrm{a}}{2}} \sqcap \frac{\mathrm{FQ} \sqcap \sqrt{2\mathrm{ax}}}{\mathrm{QR} \sqcap 2\mathrm{x}}$. Erit BT $\sqcap \frac{\mathrm{x} + \frac{\mathrm{a}}{2} \frown \sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x}}$. FT $\sqcap$ TV*(!)*. Nam habetur FB *(2)* Hinc *L* 19 FT $\sqcap$ VD'. *(1)* Nam habetur VD' $\sqcap$ *(2)* Nam *L*

---

16 differemus: vgl. *De trochoeidibus et relationibus reductarum ad ordinatas* (Cc 2, Nr. 828), datiert 24. Dezember 1674.

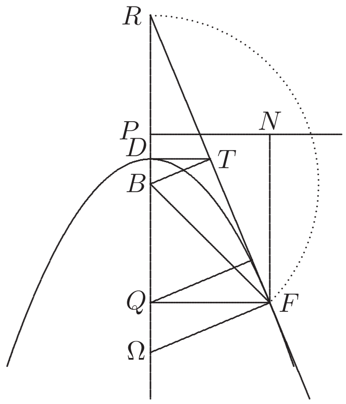


fig. 2.

$Q\Omega \sqcap 2DB \sqcap BP$.
Angulus $BFT \sqcap [NFT]$.

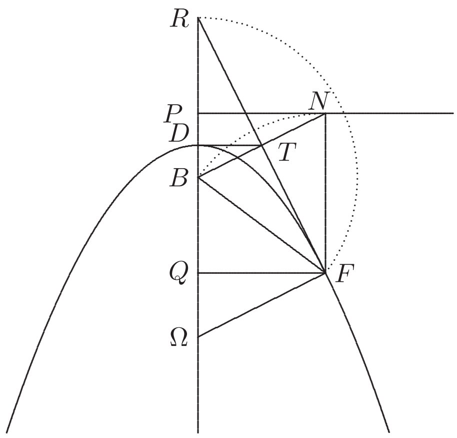
Iam sciendum est F potius cadere debere ibi ubi parenthesi (F) inclusum, et erit triangulum, RBF, isosceles, et $RT \sqcap TF$. Verus situs est in fig. 2. Tunc enim $BR \sqcap BF \sqcap FN \sqcap PQ \sqcap \frac{a}{2} + x$. Ergo DT parallela QF. Porro ut RF ad $[QR]$, id est, ut $\sqrt{4x^2 + 2ax}$ ad $2x$. ita $BF \sqcap BR \sqcap [RN] \sqcap PQ \sqcap D'L$ ad $RT \sqcap TF \sqcap D'V$ seu $\frac{a}{2} + x$. ad quartam. Ergo $\frac{\sqrt{4x^2 + 2ax}}{2x} \sqcap \frac{\frac{a}{2} + x}{D'V}$, et $D'V \sqcap \frac{ax + 2x^2}{\sqrt{4x^2 + 2ax}}$. Unde $\frac{a^2x^{\cancel{2}} + 4ax^{\cancel{3}2} + 4x^{\cancel{4}3}}{4x^{\cancel{2}} + 2a\cancel{x}} \sqcap D'V^2$.

498,19+499,4 $\sqcap \frac{\mathrm{a}}{2} + \mathrm{x}$ *(1)*, eius quadratum est $\mathrm{x}^2 + \mathrm{ax} + \frac{\mathrm{a}^2}{4}$. Unde auferatur quadratum ipsius BT. *(a)* fiet: *(b)* nempe $\frac{\mathrm{x}^2 + \mathrm{ax} + \frac{\mathrm{a}^2}{4}, \frown \cancel{2}\mathrm{a}\cancel{\mathrm{x}}}{2\cancel{4}\mathrm{x}^{\cancel{2}}}$ fiet: $\frac{2\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{ax}^2 + \frac{\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{2} - \mathrm{ax}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{x} - \frac{\mathrm{a}^3}{4}}{2\mathrm{x}}$ sive $\frac{2\mathrm{x}^3 + \mathrm{ax}^2 + \frac{\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{4} - \frac{\mathrm{a}^3}{4}}{2\mathrm{x}}$ $\sqcap$ quadrato ipsius FT. Sed suspicor calculi errorem, cum enim sit BF semper maior quam BT, | aut saltem aequalis *erg.* | hoc calculo posset fieri minor. *(2)* Nimirum *(3)* Iam *L* 2 NFB *L ändert Hrsg.* 5 fig. 2. *(1)* Unde et ratio patet erroris *(2)* Tunc *L* 6 ut *(1)* RQ $\sqcap$ 2x ad $\sqrt{2\mathrm{ax}} \sqcap$ QF *(2)* RF ad | QF *ändert Hrsg.* |, id *L* 7 BN *L ändert Hrsg.* 8 D'V $\sqcap \frac{\mathrm{ax} + 2\mathrm{x}^2}{\sqrt{4\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{ax}}}$. *(1)* Quae *(2)* Unde $\frac{\mathrm{a}\cancel{\mathrm{x}} + 2\mathrm{x}^{\cancel{2}}}{4\mathrm{x}^{\cancel{2}} + 2\mathrm{a}\cancel{\mathrm{x}}} \sqcap \mathrm{y}^2$. *(3)* Unde $\mathrm{ax}^2 + 2\mathrm{x} \sqcap 4\mathrm{xy}^2 + 2\mathrm{ay}^2$, et $\mathrm{x} \sqcap 2\mathrm{ay}^2$ *(4)* Unde *L* et quia dividi potest, per $2x+a$, fiet: $x \frown a+2x \sqcap 2D'V^2$, quae est aequatio ad hyperbolam. Unde patet RF esse velut diagonalem semiquadrati RBF. Iam si $\frac{a^2}{4}+ax+x^2$, auferatur: $\frac{xa}{2}+x^2$, restabit: $\frac{a^2}{4}+\frac{ax}{2}$, sive $\frac{a^2+2ax}{4}$ et $\frac{\sqrt{a^2+2ax}}{2} \sqcap LV \sqcap BT$. Iam LV, vocando y. fiet $4y^2 \sqcap a^2+2ax$, et erit $\frac{4y^2-a^2}{2a} \sqcap x$. quem valorem ipsius x. inserendo in $D'V^2 \sqcap \frac{xa+2x^2}{2}$, fiet: $D'V^2 \sqcap \dfrac{\frac{4y^2-a^2}{2\cancel{a}} \frown \cancel{a} + \frac{16y^4-8a^2y^2+a^4}{2\cancel{4}a^2} \frown \cancel{2}}{2}$ sive $[4a^2]\ D'V^2 \sqcap 4y^2a^2 \boxed{-a^4} + 16y^4 - 8a^2y^2 \boxed{+a^4}$. et fiet: $D'V \sqcap \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}a}\sqrt{[4]y^2-a^2}$.

Habemus ergo naturam curvae nostrae, quantum licet aequatione expressam, nam abscissa LV, posita y, erit ordinata $[VB] \sqcap \frac{y\sqrt{[4]y^2-a^2}}{a} \mp$ (puto $+$, sed examinandum in vero situ) $D'B$. $D'B$ autem iam aequetur curvae parabolicae. DF explicari analytice non potest, nisi per seriem numerorum.

1 potest, | fiet *streicht Hrsg.* | per *L* 2 patet *(1)* quadratum ipsius R *(2)* RF esse velut diagonalem *(a)*, et D' *(b)* quadrati *(c)* semiquadrati *L* 6 $4a^2$ *erg. Hrsg.* 6 f. D'V $\sqcap \frac{\cancel{2}y}{\cancel{2}a}$ | $\sqrt{2y^2-a^2}$ *ändert Hrsg.* | *(1)* quae facile in aliam transmutan *(2)* sive D'V $\sqcap \frac{y}{a}\sqrt{y\sqrt{2}+a, \frown y\sqrt{2}-a}$ et $y\sqrt{2}-a$ vocando *(3)*. Habemus *L* 8 D'C *L ändert Hrsg.* 8 2 *L ändert Hrsg.*

2 semiquadrati RBF: RBF ist nur für den Spezialfall $x=\frac{a}{2}$ ein halbes Quadrat. 8 ordinata: Für die Trochoide des Brennpunkts gilt $VB=-D'V+D'B$.



[*Fig. 3*]

Inspice figuram hic ascriptam, in ea: $Q\Omega \sqcap BP \sqcap a$. $DP \sqcap DB \sqcap \frac{a}{2}$. $DR \sqcap DQ \sqcap x$. $2DT \sqcap QF \sqcap \sqrt{2ax}$. $FB \sqcap FN$. Ergo $BT \sqcap TN$. et recta $[RTF]$, angulum BFN bissecat. Iam $FN \sqcap x + \frac{a}{2} \sqcap FB$. et $BR \sqcap DR$ seu $x, +DB$ seu $\frac{a}{2}$. ergo $FB \sqcap FN \sqcap BR \sqcap x + \frac{a}{2}$. Porro ad $QF^2 \sqcap 2ax$, addatur $Q\Omega^2 \sqcap a^2$, fiet: $\sqrt{a^2 + 2ax}$ $[\sqcap \Omega F]$. Et quia QD dimidia ipsius QR. seu DT. ipsius QF. erit TF dimidia ipsius RF,

500,10–501,2 numerorum. *(1)* Tantum addam AL aequari BD$(\sqcap \frac{\mathrm{a}}{2}) \sqcap$ D'L. Ergo circulum *(a)* per *(b)* centro L; radio LD' descriptum transire per (A) locum ipsius A verum. Ergo iam invenio: *(2)* Unum iam superest monendum nempe BT *(a)* aequari *(b)* sive LV, aequari BQ et proinde quod optabam DQ abscissam parabolae, aequari AV, abscissae trochoeidis respondenti, ac proinde, *(aa)* descripta *(bb)* semiparabola DFH, translata in AW, nempe D in A, et F in W erectaque WVD'B, *(aaa)* curvam *(bbb)* rectam D'B fore curvae AW aequalem. *(aaaa)* Rectius *(bbbb)* Utilius ergo pro VL, incognitam *(aaaaa)* sumemus *(bbbbb)* abscissam sumemus AV, aequalem abscissae parabolicae x. Unum optarem, ut et VD' fieret $\sqcap$ VW. Sed hoc calculus negat, experiar denuo; a quadrato D'L $\sqcap \frac{\mathrm{a}^2 + 4\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}{4}$, | auferatur *streicht Hrsg.* | auferatur quadratum VL seu $\frac{\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}{4}$, restabit $\frac{8\mathrm{ax}}{4}$, seu 2ax. Ergo D'V $\sqcap \sqrt{2\mathrm{ax}}$, $\sqcap$ VW. quod est verissimum. Est ergo AD', vel AW, ipsa parabola generatrix. Huc usque ergo plane satisfactum est voto. — Sed iam incipio vereri, ne error sit in illa suppositione, quod scilicet DQ $\sqcap$ AV, DF $\sqcap$ VD', et BQ $\sqcap$ VL $\sqcap$ BT. *(3)* Inspice *L* 3 BTN *L ändert Hrsg.* 5 f. $\sqrt{\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ax}}$ | $\sqcap \Omega$F *erg. Hrsg.* | *(1)*, eiusque dimidium *(2)*. Et *L* et BT ipsius ΩF. Ergo $BT \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2+2ax}}{2}$ quae in figura prima primae paginae $\sqcap$ $[LV]$. Eius quadratum $\dfrac{a^2+2ax}{4}$ auferatur a quadrato ipsius BF, quod est $\dfrac{4x^2+4ax+a^2}{4}$, restabit: $\dfrac{4x^2+2ax}{4} \sqcap \dfrac{2x^2+ax}{2} \sqcap TF^2$ ut supra. Item a BF^2, seu $\dfrac{4x^2+4ax+a^2}{4}$ auferatur $QF^2 \sqcap \dfrac{8ax}{4}$, fiet: $\dfrac{4x^2+4ax-8ax+a^2}{4}$, $\sqcap BQ^2$, et erit $BQ \sqcap \dfrac{\mp 2x \pm a}{2}$ sive erit BQ. differentia inter x et $\dfrac{a}{2}$, quod et dudum constat[,] est enim utique BQ differentia inter DQ et DB. Unde satis apparet non esse BT aequale ipsi BQ nec ideo in figura primae paginae prima $AV \sqcap DQ$. Quare nec AD' curva est parabolica generatrici eadem; ut in cycloide evenit.

Nunc BT appellando y, fiet:

$\dfrac{a^2+2ax}{4} \sqcap y^2$. et $x \sqcap \dfrac{4y^2-a^2}{2a}$. et $x^2 \sqcap \dfrac{16y^4-8a^2y^2+a^4}{4a^2}$, inseratur valori ipsius TF^2, fiet: $\dfrac{16y^4-8a^2y^2\boxed{+a^4}}{[4]a^2} + \dfrac{4y^2\boxed{-a^2}}{[4]} \sqcap \dfrac{16y^4-4a^2y^2}{[4]a^2}$ ut supra.

1 f. paginae $\sqcap$ | AV. *ändert Hrsg.* | *(1)* Ab eius quadrato $\dfrac{\mathrm{a}^2+2\mathrm{ax}}{4}$ auferatur quadratum ipsius DB, quod est $\dfrac{\mathrm{a}^2}{4}$ *(2)* Eius *L*   8 f. evenit. *(1)* Si ab $\mathrm{x}+\dfrac{\mathrm{a}}{2}$ auferatur TF *(2)* Nunc *L*   11 fiet: | $\dfrac{16\mathrm{y}^4-8\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2+\boxed{\mathrm{a}^4}}{2\mathrm{a}^2}$ *ändert Hrsg.* | *(1)* $+4\mathrm{y}^2\boxed{-\mathrm{a}^2} \sqcap \dfrac{16\mathrm{y}^4}{2\mathrm{a}^2}$ et erit TF $\sqcap \dfrac{4\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}\sqrt{2}}$ sive $\sqcap \dfrac{2\mathrm{y}^2\sqrt{2}}{\mathrm{a}}$; unde aequatio: $\mathrm{y}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{aTF}}{2\sqrt{2}}$ *(a)* cuius latus *(b)* quae indicat curvam AD'E in fig. 1 pagina prima huius plagulae esse parabolam quidem, sed cuius latus *(aa)* transversum *(bb)* rectum $\dfrac{\mathrm{a}}{2\sqrt{2}}$. est ad 2a latus rectum parabolae generatricis, $\dfrac{\mathrm{a}}{4\sqrt{2}}$ ut 1 ad $4\sqrt{2}$, seu ut 1 ad Rq 32. Cumque omnis parabola alteri sit similis, modo et similiter posita sit, (quod secus est in ellipsi et hyperbola latus rectum transversumque aequalia habente) ac proinde omnis parabola possit ita collocari, ut alteri parallela reddatur, seu ut omnis recta uni perpendicularis producta etiam sit alteri perpendicularis; ideoque intelligi potest hanc novam parabolam eodem, cum genitrice trochoeidis, seu data parabola, tempore describi posse; quod utile est, ne diversae descriptiones turbent exactitudinem. *(2)* | $+\dfrac{4\mathrm{y}^2\boxed{-\mathrm{a}^2}}{2} \sqcap \dfrac{16\mathrm{y}^4-4\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2}{2\mathrm{a}^2}$ *ändert Hrsg.* | ut *L*

3 ut supra: S. 500 Z. 1.   11 ut supra: S. 500 Z. 5.

Ergo ut concludamus ut ante: abscissa LV posita y, ordinata trochoeidis parabolicae seu $[VB]$ erit $\sqcap\ \dfrac{y}{a}\ \sqrt{[4y^2 - a^2]} + D\aleph F$ posito $D\aleph F$ esse curvam parabolicam et nota $D'V$ esse $\sqcap \sqrt{\dfrac{y, y, 4y + 2a, 4y - 2a}{[4]a^2}}$.

Hactenus de trochoeide nostra quae describitur ab umbilico. Superest, ut consideremus an commodior illa futura sit, quae describitur a parabolae vertice, qualis est LגD ad quam recta FD erit perpendicularis unde ordinata ducatur לג producenda dum ipsi Lפ parallelae ad FD, occurrat in פ erit Dפ arcui $D\aleph F$ aequalis. Ordinata ergo Dל erit curva minuta recta [לפ] cuius superest ut quaeramus valorem.

Habetur valor ipsius FD. Nam QD posita x, fiet $FD \sqcap \sqrt{x^2 + 2ax}$. Porro ל$L \sqcap D$ת. facile habetur, nam ut $RF \sqcap \sqrt{4x^2 + 2ax}$, ad QF seu $\sqrt{2ax}$ ita $RD \sqcap x$, ad Dת. Ergo $\dfrac{D\text{ת}}{x} \sqcap \sqrt{\dfrac{2ax}{4x^2 + 2ax}}$ et fiet: Dת $\sqcap \sqrt{\dfrac{2ax^2}{4x + 2a}} \sqcap x\sqrt{\dfrac{\cancel{2}a}{2\cancel{4}x + \cancel{2}a}} \sqcap y$. ponendo Dת $\sqcap y$. et fiet: $x^2a \sqcap 2y^2x + ay^2$. et fiet: $x^2 - \dfrac{2y^2}{a}x + \dfrac{y^4}{a^2} \sqcap \dfrac{y^4}{a^2} + y^2$ et erit $\mp x \pm \dfrac{y^2}{a} \sqcap \dfrac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2}$, sive $x \sqcap \mp\dfrac{y}{a}\sqrt{y^2 + a^2} + \dfrac{y^2}{a}$.

1 ante *(1)* recta *(2)* abscissa *L* 2 $y^2 - 2a^2$ *L ändert Hrsg.* 2 D'C *L ändert Hrsg.* 3 2 *L ändert Hrsg.* 8 Lפ *L ändert Hrsg.* 9 posita x, | fiet: *streicht Hrsg.* | fiet *L* 10 f. Ergo $\dfrac{D\text{ת}}{x} \sqcap$ *(1)* $\sqrt{\dfrac{2\cancel{4}x^{\cancel{2}} + \cancel{2}a\cancel{x}}{\cancel{2}a\cancel{x}}}$ vel D ת $\sqcap$ x$\sqrt{\dfrac{2x + a}{a}} \sqcap$ y ponendo | igitur *gestr.* | Dת $\sqcap$ y. Itaque $2x^3 + ax^2 \sqcap ay^2$. Iam Lל$^2 \sqcap \dfrac{2x^3 + ax^2}{a}$ subtrahatur a לפ^2 seu a $x^2 + 2ax$, residui quadratum (videndum ne error calculi insit, nam videtur aliquando id quadratum minus nihilo fieri posse) *(2)* $\sqrt{\dfrac{2ax}{4x^2 + 2ax}}$ *L*

1 ut ante: vgl. Erl. zu S. 500 Z. 8.

Porro פל $\sqcap \dfrac{-2ax^2}{4x+2a} + x^2 + 2ax$ (seu $FD^2[-]D$ת^2) $\sqcap$ $\dfrac{-2ax^2 \ +4x^3 \ [+\ 4a^2x \ +2ax^2 \ +8ax^2]}{4x+2a}$; in quo si substituatur valor ipsius x, habebitur itaque aequatio satis composita, explicans valorem ipsarum פל per ipsas Lל abscissas. Ut proinde satius tandem videatur trochoeide uti ab umbilico descripta. Poterit tamen examinis causa describi utraque, quoniam id fit eodem tempore.

Descriptio autem ope fili ex materia non facile distendibili, in asseris zonam parabolicam tangentis incisuram se indentis, ponderis appensi tendentisque vi; assere interea et tabulam fixam in quam stylus agit, circumferente; perfectissime describetur; cum eadem opera et evolutionalis parabolica in pariete fixo a stylo asseri infixo possit describi. Stylus autem acicula esse potest in materia molluscula lineam inscribens.

Sed satis de descriptione veniamus ad usum. Ubi unum ante adiciem lineam istam pantometram aut similem esse absolute necessariam ad perfectionem geometriae[,] sunt enim problemata analytice soluta, seu quae calculo fieri possunt, et quorum tamen constructio geometrica per lineas analyticas non datur; qualia sunt: rationem secare in ratione duorum numerorum irrationalium. Haec autem problemata impossibile est solvi geometrice nisi per lineas non analyticas. Fatenda est ergo necessitas linearum non analyticarum in geometria. Praeterea [impossibile] est lineam inveniri analyticam quae sit omnium graduum simul; qualis ista est: itaque tot opus est curvis Cartesiana construendi methodo, quot sunt genera aequationum, cum linea pantometra sola sufficiat omnibus.

Vid. part. XII.

1 f. (seu FD^2| $+\,\mathrm{D}$ת^2) $\sqcap \dfrac{-2\mathrm{ax} + 4\mathrm{x}^3 + 2\,4\,\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{4\mathrm{x}+2\mathrm{a}}$ *ändert Hrsg.* |; *(1)* et fiet: פל $\sqcap$ *(2)* in *L*

17 Praeterea | impossibilis *ändert Hrsg.* | est lineam inveniri *(1)* geometricam *(2)* analyticam *L*

18 f. Cartesiana construendi methodo: *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 84 f. u. 105 f. (vgl. *DO* VI S. 463 f. u. 485).

38_{14}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS DUODECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 26–27. 4 S. Fig. 1, 2, 4, 6 mit Vorstufen und Korrekturen.
Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Pars XII schediasmatis de quadraturis figurarum et summis serierum.

Nunc ad usum figurae nostrae pantometrae veniamus. Vide hic fig. 1.

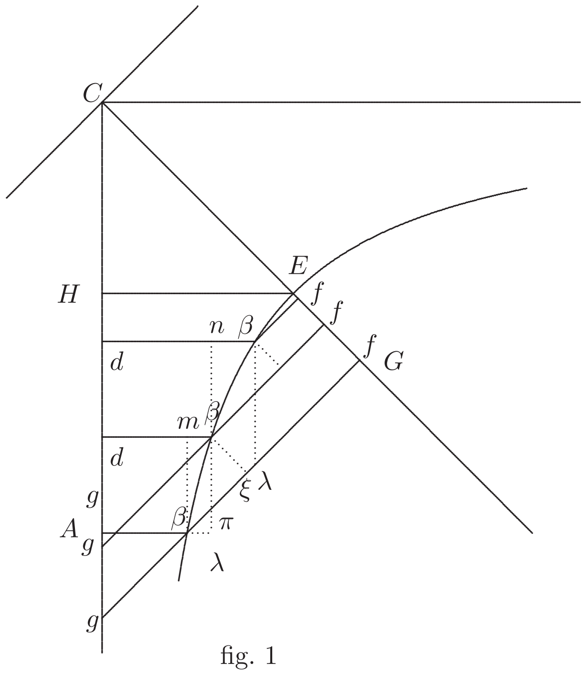


fig. 1

Si Ad sint inter se ut numeri, spatia $Ad\beta$. erunt inter se ut eorum logarithmi per inventa Gregorii a S. Vincentio. Sit centrum C. vertex E. axis Cf. Ducantur ordinatae βf. ad axem. Et eaedem producantur dum asymptotis occurrant in g.

9 axis *(1)* | EF. *streicht Hrsg.* | *(2)* Cf. *L*

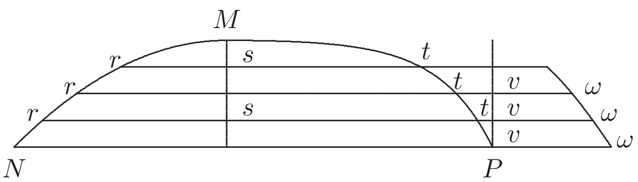
7 fig. 1: Leibniz hat eine erste Fassung der Figur gestrichen und in der zweiten Punktbezeichnungen geändert, den Text aber nicht konsequent angepaßt. Es wird an die Bezeichnungen der gültigen Figur angeglichen. 9 S. Vincentio: *Opus geometricum*, 1647, Buch VI prop. 125–130 S. 594–597.

Spatium $\beta Ad\beta$. est rectangulum $Ad\beta$. demto curvilineo $\beta\lambda\beta$. Esto dd. vel $dA \sqcap b$. $[AC] \sqcap z$. $CH \sqcap a$. erit $[dm] \sqcap \dfrac{a^2}{z}$. et $[Adm.]$ rectangulum erit: $\dfrac{ba^2}{z}$.

Investiganda quin quantitas ipsius f. Patet triangulum gfC. esse simile triangulo $gA\beta$. Ergo $\dfrac{gA}{A\beta \sqcap \dfrac{a^2}{z}} \sqcap \dfrac{gf}{fC}$. Imo $Ag \sqcap A\beta$. et $gf \sqcap Cf$. et $g\beta \sqcap \sqrt{\dfrac{2a^4}{z^2}} \sqcap \dfrac{a^2}{z}\,\sqrt{2}$. et $gf \sqcap \dfrac{a^2}{z}\,\sqrt{2} + \beta f$. At $\beta f \sqcap \sqrt{2a^2+x^2}$. ponendo $CE \sqcap a\,\sqrt{2}$. et $Cf \sqcap x$. ut constat.

Eritque: $\dfrac{a^2}{z}\sqrt{2} + \sqrt{2a^2+x^2} \sqcap a\sqrt{2}, + x$. Adeoque z. habetur absolute $\sqcap \dfrac{a^2[\sqrt{2}]}{a\sqrt{2}+x-\sqrt{2a^2+x^2}} \sqcap z$. Contra si x. investigare velis, retenta z, fiet: $\sqrt{2a^2+x^2} \sqcap a\sqrt{2}+x-\dfrac{a^2}{z}\sqrt{2}$. Unde $\boxed{2a^2}\boxed{+x^2} \sqcap \boxed{2a^2}+2ax\sqrt{2}\boxed{+x^2}$, $\boxed{-\dfrac{2a^2\sqrt{2}\sqrt{2}}{z}}-\dfrac{4a^2}{z}-\dfrac{2a^2x\sqrt{2}}{z}+\dfrac{2a^4}{z^2} \sqcap 0$. sive: $2axz^2\sqrt{2}-4a^2z-2a^2xz\sqrt{2}+a^4 \sqcap 0$. et $x \sqcap \dfrac{4a^2z-a^4}{2az^2\sqrt{2}-2a^2z\sqrt{2}}$. Iam pro z. pone $z-b$. fiet: $\dfrac{4a^2z-4a^2b-a^4}{2az^2-4azb\sqrt{2}+2ab^2-2a^2z\sqrt{2}+2a^2b\sqrt{2}}$. quarum duarum x. differentia utique est ff.

Iam spat. $\beta Ad\beta \sqcap \square A\lambda\beta -$ spat. $\beta\lambda\beta$. sed spatium $\beta\lambda\beta \sqcap$ spat. $\beta ff\beta - \square\, ff\xi - \triangle\, \beta\xi\pi + \triangle \pi\lambda\beta$. Ergo spat. $\beta Ad\beta \sqcap \square\, A\lambda\beta -$ spat. $\beta ff\beta + \square\, ff\xi + \triangle\beta\xi\pi - \triangle\pi\lambda\beta$.

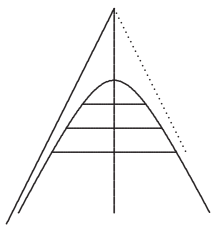


[*Fig. 2*]

2 AG *L ändert Hrsg.* 2 gm *L ändert Hrsg.* 2 Agm *L ändert Hrsg.* 7 $\sqrt{2}$ *erg. Hrsg.*

5 $\sqrt{2a^2+x^2}$: Richtig wäre $\sqrt{x^2-2a^2}$. Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter; hinzu kommen Flüchtigkeitsfehler in Z. 8, Z. 9 u. Z. 10, welche die Rechnung bis Z. 10 beeinträchtigen.

Quod si iam inveniri potest linea curva cuius elementa rr procedunt ut ff. Et ordinatae trochoeidis (quae figura superflua diminuta sit) st, procedant ut summae elementorum, seu ut curvae portiones Mr tunc procedent etiam ut spatia $Eff\beta\beta E$. Sed hoc loco contrarium postulatur ut procedant ut spatia $Gff\beta\beta G$, sciendum ergo hoc modo procedere trochoeidis huius complementa tv. Atque ita id praeterea eveniet praeclarissimum, ut ordinatae tv sint purae et simplices aequales curvae, est enim $tv \sqcap Nr$ nulla extraneae figurae alioquin trochoeidem turbantis intermixtione. Iam ad tv adiungantur $v\omega$ quae scilicet procedant ut differentiae $Add\beta\beta A$ et $Gff\beta\beta G$ quod utique fieri potest, quoniam earum differentiarum progressio opinor erit constans et aequatione exprimi poterit; ideoque $t\omega$ procedent ut logarithmi numeris naturalibus prout procedentibus non quidem ut Pv, vel Gf attamen ut Ad.



[*Fig. 3*]

Ponamus iam istam ita descriptam haberi curvam cuius ordinatim applicatae, alterius curvae descriptae ordinatim applicatis auctae procedant ut logarithmi. Sane ita facile erit rationem secare in data ratione; sed quaeritur a me quiddam maius. Nempe constructio omnium aequationum etiam affectarum, quod videamus esto $\dfrac{b}{a+\dfrac{cx}{a}} \sqcap \dfrac{x^2}{d}$. Id est, quaerenda est linea ex asymptoto hyperbolae quo dixi modo abscissae [Ad] seu logarithmica $t\omega$ ut differentia inter logarithmum rectae cognitae b, et logarithmum rectae a, logarithmo c, et x summa auctum, et logarithmo ipsius a minutum, aequetur logarithmi dupli ipsius x, differentiae a logarithmo d, ipso minore quae ut pateant clarius aequatio analytica convertatur in logarithmicam, ponendo literas $b.\,a.\,c.\,x.\,d.$ significare iam non ipsas lineas seu numeros sed eorum logarithmos, et fiet: $b\boxed{-a}-c\boxed{+a}-x \sqcap 2x-d$, fietque $x \sqcap \dfrac{b-c+d}{[3]}$. Sed videtur hic subesse error; nam [logarithmi] ipsius

1 cuius *(1)* ordinatae procedunt ut spatia Efβ *(2)* elementa *L* 5 huius *(1)* elementa *(2)* complementa *L* 7 f. ad *(1)* vω *(2)* tv adiungantur vω *(a)* necessariae scilicet ut solae *(b)* vel etiam ab altero *(c)* necessariae scilicet *(d)* quae *L* 8 Gff$\beta\beta$G *(1)* et tot *(2)* quod *L* 11 vel Gf *erg. L* 13 applicatae *(1)* sunt homo *(2)* utut *(3)* alterius *L* 19 abscissae | AG *ändert Hrsg.* | seu ... tω *erg.* | ut *L* 19 inter *(1)* ordinatam *(2)* logarithmum *L* 19 b, | et *streicht Hrsg.* | et *L* 24 2 *L ändert Hrsg.* 24 error; *(1)* logarithmus enim non *(2)* nam *(a)* logarithmus inveniendus est *(b)* | logarithmus *ändert Hrsg.* | ipsius *L*

b et d habentur; sed logarithmus non sumendus est ipsius $a.\,c.\,x.\,a.$ separatim, sed logarithmus quaerendus est ipsius totius $a + \frac{cx}{a}$. Nimirum ex logarithmis partium non componitur logarithmus totorum. Nisi velis numeros illos invenire quorum logarithmi sint ipsi naturales; quorum numerorum potestates eo modo invenies. Sed hoc nihil ad rem pertineret.

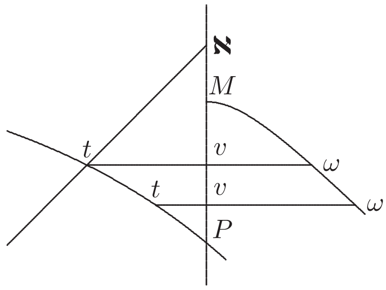
An ita? Pro x naturali cuius logarithmica quaeritur seu ex quaesitis Ad, et $t\omega$, rem eo reducamus, ut quaeratur fg et vt, eodem modo et b, et d, reducamus et $a + \frac{c}{a}x$, et x, reducendo numero naturales et eorum logarithmos: ad numeros artificiales et eorum quasi logarithmos; quod una semper methodo constante fit, quo facto aequatio habebitur correcta: $\boxed{b} - \boxed{a + \frac{c}{a}x} \sqcap \boxed{2x} - \boxed{d}$. Numeris inclusis, propositorum quasi logarithmos significantibus; additis scilicet vel subtractis antea illis superfluis nempe rectis $v\omega$, quae calculo semper haberi possunt vel sic[:] ipsius b, ipsam $v\omega$, appellemus (β), ipsius $a + \frac{c}{a}x$, appellemus $\alpha + \frac{\kappa}{\alpha}\xi$, et ipsius d, vocemus δ, et fiet aequatio correcta:

$$b - \beta - \underbrace{a + \frac{c}{a}x} + \boxed{a + \frac{c}{a}x} \sqcap 2x - 2\xi - d + \delta.$$

Ubi patet incognitas esse quatuor: $\underbrace{a + \frac{c}{a}x}$, $\boxed{a + \frac{c}{a}x}$, x, ξ, logarithmos partim supplementa logarithmica. Et video si aequationem initio propositam in aliam mutare velis analogiam[,] multiplicari rursus incognitas. Non ergo sic exitus.

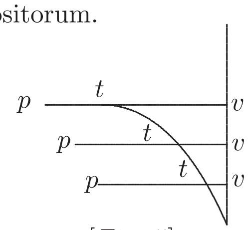
An ita[:] rectam ducamus $\aleph t$ quae secet curvam Pt in t, ipsa ωt, per lineam rectam ex sumta Ad incognita, habebit valorem quendam explicabilem, quia ipsa tv ordinata trianguli, et $v\omega$ ordinata curvae analyticae. Eadem recta iam habet et alium valorem, ut sit logarithmus ipsius Ad.

10 $-\boxed{\mathrm{d}}$. *(1)* eritque x $\sqcap$ *(2)* Numeris *L* 15 patet *(1)* tres fieri incognitas x, $\boxed{\mathrm{a} + \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}}$ *(2)* incognitas *L* 16 logarithmica. *(1)* Quare aequatio initio proposita mutetur in hanc: *(2)* Et *L* 18 f. rectam *(1)* ex sumta P *(2)* ex *L* 19 ipsa tv *(1)* recta cognita, et *(2)* ordinata *L*



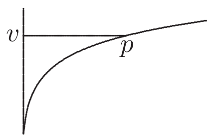
[*Fig. 4*]

Ecce ergo aequationem factitiam inter logarithmum, et alias quasdam cognitas, cuius ope videndum an possint solvi problemata; sed dubito, quia non eam intrant logarithmi quales $a + x$. terminorum compositorum.

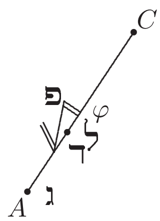


[*Fig. 5*]

Videndum ergo illud est an non fieri possit, ut linea vp fiat perfecte logarithmica, quod fieret retroagendo nonnihil ipsam parabolam genitricem inter volvendum id est re ad nostram descriptionem applicata, prorsum seu dextrorsum agendo separato motu, tabulam in qua logarithmica describi debet, retroagetur vero quantum postulat summa spatiorum complementalium, idque per applicationes regularum constantium, eo scilicet modo aliae quoque curvae describuntur. Qui motus ab ipso evolutionis motu pendebit.



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

1 *Fig. 4*: Leibniz hat eine erste Fassung der Figur gestrichen und in der zweiten Punktbezeichnungen geändert, den Text aber nicht konsequent angepaßt. Es wird an die Bezeichnung der gültigen Figur angeglichen. 6 linea *vp*: Leibniz meint die Kurve mit der Ordinate *vp*.

Ponamus ergo haberi lineam vp vere logarithmicam; resumta aequatione superiore $b - \underbrace{a + \frac{c}{a}x} \sqcap 2x - d$. vel $d + b - \underbrace{a + \frac{c}{a}x} \sqcap [2]x$. In adiuncta hyperbolae asymptoto cuius initium arbitrarium A, centrum C sumatur דג $\sqcap a$. Praeterea ex ג ducatur recta פג angulum ad asymptoton faciens talem ut פד posita x, ipsa דφ sit $\frac{c}{a}x$. et ipsa גφ erit $a + \frac{c}{a}x$. eique respondens vp vel $t\omega$ erit logarithmus $a + \frac{c}{a}x$. Iam ipsa ד translata cogitetur in ipsam AC, et ד incipere ab A, et פ esse etiam in recta AC v. g. פד translatam in Aל.

Itaque si regula sit ex A, versus C tendens indefinita mobilis in fixo assere AC. et in φ fixus sit palus circa quem chorda ita ut dum regula alia פφ mobilis in ipsius פד assere descendit, regula Aל eodem motu etiam descendat, dum autem descendent aliarum regularum applicationibus signabuntur earum logarithmi aut potius a datis logarithmis differentiae; et quando eveniet, ut concurrant duae regulae in unum, ibi vero habebitur aequationis radix.

Sed quid si esset: $\dfrac{b}{e + xa + \frac{c}{a}x^2} \sqcap \dfrac{x^2}{d}$. Eo casu id profecto non ita succederet, quomodo enim logarithmum ipsius x^2, per regulam designabimus. Consideranda aequatio proposita: $x^4 + ax^3 + ex^2 - bd$, ut quantitas composita ex rectarum quarundam differentiis ab ipsa x vel eius summis: sed nec hoc procedit, quia ipsa x universalis est quantitas imaginaria.

An ita: quaerendae sunt quatuor lineae naturales quarum logarithmorum summa bd, ipsarum linearum summa a: summa numerorum naturalium logarithmo cuilibet logarithmis duorum quorumlibet combinatis aequali respondentium sit e. sed difficiliora sunt ista, quam ut spes sit vinci posse; nisi quadam arte artibus Vietae simili utamur; ut

2 2 *erg. Hrsg.* 2 f. cuius ... centrum C *erg. L* 10 logarithmi *(1)* intersectione quarundam regularum et rectae p *(2)* aut potius *(a)* cum datis *(b)* a *(c)* a datis *L* 14 designabimus *(1)*, nisi ita addendo *(2)*. *(a)* Ista ergo difficillima *(b)* Videndum, an *(c)* Consideranda *L* 18 sunt *(1)* tres lineae, *(2)* quatuor lineae *(a)* in logarithmis, *(b)* naturales *L* 19 f. summa a: *(1)* summa logarithmorum duorum quorumlibet *(2)* summa numerorum naturalium | logarithmo cuilibet *erg.* | logarithmis duorum quorumlibet *(a)* aequali *(b)* combinatis *L*

21 Vietae: *De numerosa potestatum*, 1600 (*VO* S. 162–228).

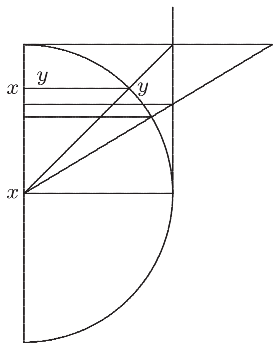
scilicet quia ut ille ab extractione incipit, caetera multiplicationibus subtractionibus et additionibus peragit; ita nos incipiendo a divisione logarithmorum, caetera additionibus etc. Sed video nec hoc procedere, nam in numeris fiet semper ob alias causas tractabilior.

Malum omne ex eo quod ut logarithmi repraesentant quidem extractionem radicum, divisione; multiplicationem additione et divisionem substractione ipsorum; sed nihil habent, quo repraesentent additionem et subtractionem naturalium. Quemadmodum naturales nihil habent quo repraesentent extractionem radicum ex logarithmis.

Sumantur numeri quorum logarithmi sint ipsi naturales; hi naturales naturalium, multiplicantur additione naturalium, et involvuntur additione logarithmorum.

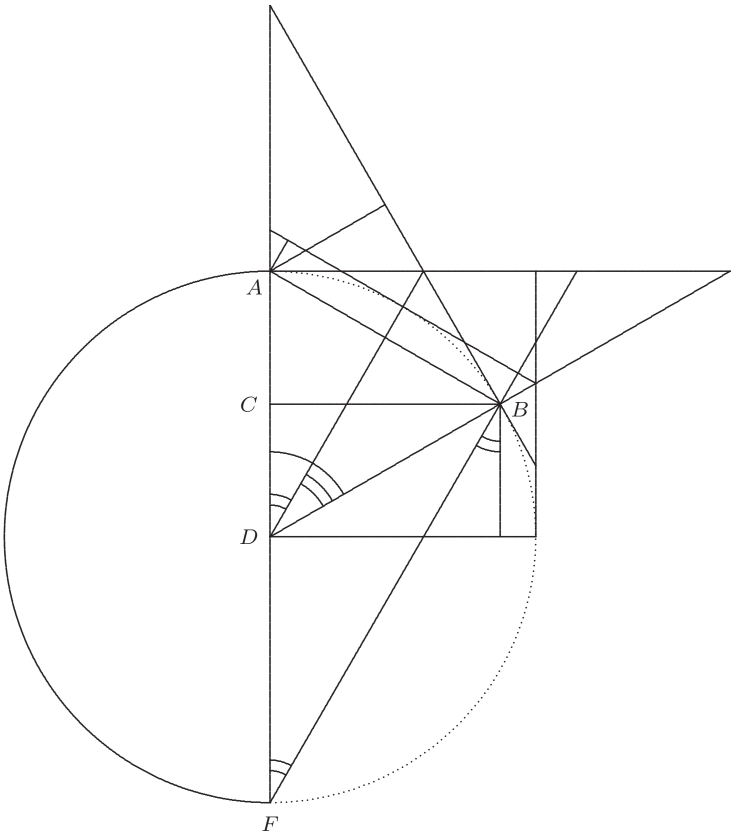
Itaque si detur $\dfrac{b}{a+\dfrac{c}{a}x} \sqcap \dfrac{x^2}{d}$, et horum loco aequatio similis fiat inter logarithmos; faciendo: $b - \underbrace{a+\frac{c}{a}x} \sqcap 2x - d$.

Si invenire posset curva ipsis elementis hyperbolae ad asymptoton homogenea haberetur descriptio curvae logarithmorum; nempe $\dfrac{a^2-x^2}{x^2}, \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}}{x}$ cuius quaeritur dimensio seu quadratura: aequatio est: $a^2 - [x^2] \sqcap x^2y^2$. quae pendet ex quadratura circuli.



[*Fig. 8*]

4 quidem *(1)* additionem *(2)* extra *(3)* extractio *(4)* extractionem *L* 5 additione *erg. L* 7 repraesentent *(1)* additionem *(2)* extractionem *L* 9 involvuntur *(1)* multiplicatio *(2)* additione *L* 14 a^2x^2 *L ändert Hrsg.* 15 circuli. | Quemadmodum series inaequabiles non *gestr.* | *L*



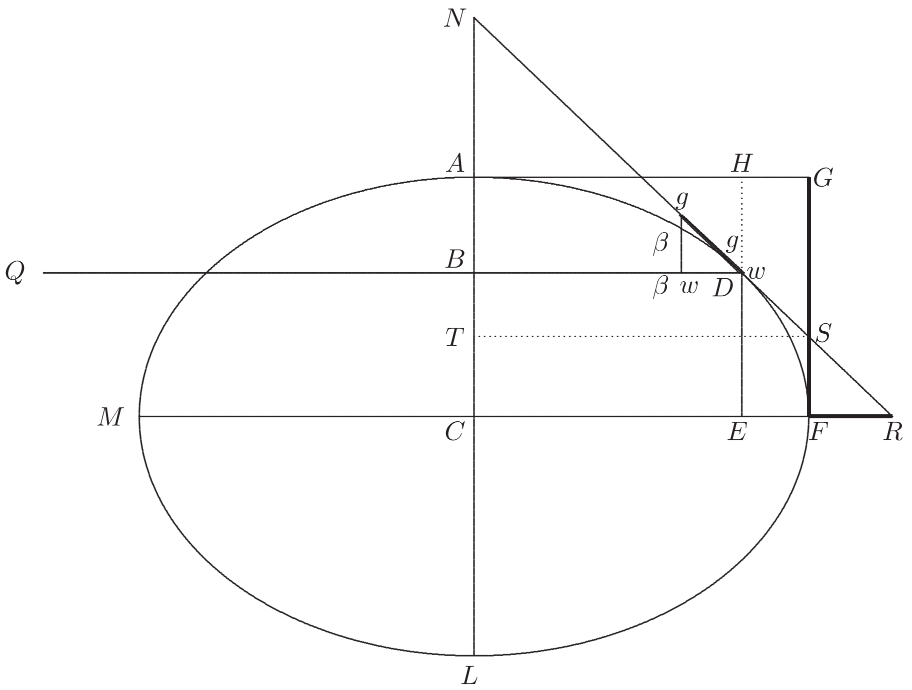
[*Fig. 9, tlw. Blindzeichnung*]

38_{15}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS TERTIA DECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 28–29. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Pars XIII. de seriebus et summis.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

$CB \sqcap y$. $BD \sqcap x$. $AB \sqcap z$. Erit $2az - \frac{a}{b}z^2 \sqcap x^2$. ponendo $AL \sqcap 2b$. latus transversum; et $2a$ latus rectum. Pro z substituendo $b - y$ fiet $z^2 \sqcap b^2 - 2by + y^2$. et

$\dfrac{2ab^2 - 2aby - ab^2 + 2aby - ay^2}{b} \sqcap x^2$. sive $ab - \dfrac{a}{b}y^2 \sqcap x^2$, sive erit $ab^2 - ay^2 \sqcap bx^2$, sive $\dfrac{a}{b} \sqcap \dfrac{x^2}{b^2 - y^2}$[,] sive $b^2 - y^2 \sqcap \dfrac{b}{a}x^2$, sive $b^2 - \dfrac{b}{a}x^2 \sqcap y^2$, ponendo abscissam x esse CE, et applicatam y esse ED.

Quod si relatio fiat non ad axem AL. sed ad axem MF. tunc FE. appellando v et MF. appellando $2c$, et latus rectum ad eum pertinens appellando d, fiet: $2dv - \dfrac{d}{c}v^2 \sqcap y^2$. et pro $EF \sqcap v$, ponendo $c - x \sqcap CE$, fiet: $2dc - 2dx, -\dfrac{d}{c}c^2 + 2\dfrac{d}{c}cx - \dfrac{d}{c}\,x^2 \sqcap y^2$. sive $\underset{\mathit{II}}{\boxed{2}}\,dc^2\,\boxed{-2dcx}\,\underset{\mathit{II}}{\boxed{-\,dc^2}}\,\boxed{+2dcx} - dx^2 \sqcap cy^2$, sive $c^2 - x^2 \sqcap \dfrac{c}{d}y^2$.

Iam ut curvae ellipseos elementa investigemus: primum ex aequatione $2az - \dfrac{a}{b}z^2 \sqcap x^2$. quaeramus BN. posito ND. esse tangentem, nempe BN. appellata l, fiet: $\cancel{2}al - \dfrac{\cancel{2}a}{b}zl \sqcap \cancel{2}x^2$, sive $l \sqcap \dfrac{x^2}{a - \dfrac{a}{b}z}$. et pro x^2, substituendo eius valorem, nempe $2az - \dfrac{a}{b}z^2$, fiet: $\dfrac{2az - \dfrac{a}{b}z^2}{a - \dfrac{a}{b}z} \sqcap l$. Fiat $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{\sqrt{2az - \dfrac{a}{b}z^2} \frown a - \dfrac{a}{b}z}{2az - \dfrac{a}{b}z^2} \sqcap \dfrac{y}{l}$ fiet: $w \sqcap \dfrac{\beta, \frown a - \dfrac{a}{b}z}{\sqrt{2az - \dfrac{a}{b}z^2}}$

8 ut *(1)* curvam hype *(2)* curvae *L* 8 f. $\sqcap$ x^2. *(1)* et pro z. ponendo z $-\ \beta$. fiet: 2az$-$ *(2)* quaeramus *L* 10 $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}}$. *(1)* Et faciendo ND $\sqcap \dfrac{\mathrm{x}^4}{\mathrm{a}^2 - \dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z} + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\mathrm{z}^2}-$ *(2)* et *L* 11 $\sqcap$ l. *(1)* cuius quadratum est $\dfrac{4\mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 - 4\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^3 + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\mathrm{z}^4}{\mathrm{a}^2 - \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}\mathrm{z} + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\mathrm{z}^2}$ *(a)*, fiat *(b)* $\sqcap \dfrac{\mathrm{az},, + \mathrm{az} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2,,,\square}{\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z},\ \square}$ a quo si auferatur BD^2, $\sqcap 2\mathrm{az} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2$, fiet: $\dfrac{\mathrm{az},, + \mathrm{az} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2,,,\square,,,, - \mathrm{az},, - \mathrm{az} + \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2,,, \frown \mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z},\square}{\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z},\square}$ et liberando numeratorem a vinculis, fiet: $4\mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 - 4\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^3 + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}\mathrm{z}^4,, - 2\mathrm{a}^3\mathrm{z} + \dfrac{4\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2 - \dfrac{2\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}^2}\mathrm{z}^3, + \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2$ *(2)* Fiat *L*

cuius quadrato, $\dfrac{\beta, \frown a - \frac{a}{b}z,,\square}{2az - \frac{a}{b}z^2}$ addatur β^2, fiet: $\dfrac{\beta^2,, \frown a - \frac{a}{b}z, \square + 2az - \frac{a}{b}z^2}{2az - \frac{a}{b}z^2}$, eritque

$\beta\sqrt{\dfrac{a^2 - \frac{2a^2}{b}z + \frac{a^2}{b^2}z^2 + 2az - \frac{a}{b}z^2}{2az - \frac{a}{b}z^2}} \sqcap g$. Quae g repraesentat momentum c u r v a e e l l i p s e o s.

Invenienda est ergo dimensio figurae, cuius elementa sint: g. et habebitur dimensio curvae ellipseos. Sed quia ea figura satis intractabilis videtur ultra pergendum est. Nimirum quaeratur curvae momentum ex AC, axe; ducantur elementa in $\sqrt{2az - \frac{a}{b}z^2}$ distantiam ab axe; fient elementa momenti curvae haec:

$$\begin{array}{l}\beta\sqrt{a^2 - \frac{2a}{b}\,z\ + \frac{a^2}{b^2}z^2} \\ \qquad + 2a\ ..\ - \frac{a}{b}\ ..\end{array}$$

quae est ad ellipsin si b maior quam a, quia tunc etiam $\frac{a}{b}$ maior quam $\frac{a^2}{b^2}$, sed ad hyperbolam, si a maior quam b. Est autem b minor quam a in nostro exemplo cum ordinata ad axem minorem applicata est, et proinde momentum curvae ex axe AL minore, est ad hyperbolam. Contra si pro a substituas d, pro b substituas c, et pro z substituas v, fiet:

$$\begin{array}{l}\beta\sqrt{d^2 - 2\frac{d}{c}v + \frac{d^2}{c^2}v^2} \\ \qquad + 2d\ ..\ - \frac{d}{c}\ ..\end{array}$$

quae est ad ellipsin, quia c est maior quam d; momentum ergo curvae ellipticae ADF ex axe minore AL, dependet ex quadratura hyperbolae, ex axe vero maiore dependet ex quadratura ellipseos vel circuli.

Summa omnium NS. applicatarum in BQ, aequatur rectangulo sub curva ADF, et recta CF. comprehenso. Nam $\dfrac{NS}{g} \sqcap \dfrac{TS \sqcap c}{\beta}$ ergo $NS \sqcap \dfrac{cg}{\beta}$. Nullus ergo novus hinc

3 f. e l l i p s e o s . *(1)* Inventa est cu *(2)* Invenienda est ergo *(a)* cu *(b)* dimensio *(aa)* curvae *(bb)* figurae *L* 8 ad *(1)* hyperbolam *(2)* ellipsin, si a ma *(3)* ellipsin *L* 10 autem *(1)* b maior quam a, si *(2)* b *(a)* maior *(b)* minor *L* 16 ADF *(1)* pendet ex axe maiore *(2)* ex *L* 18 BQ, *(1)* ducta in CF, *(2)* aequatur *L*

ducitur calculus, porro g relata ad axem maiorem MR, eundem habet valorem, quem ad axem minorem, nisi quod ut dixi, pro a. b. z. aliae quas dixi lineae, d. c. v. substituendae sunt.

Nunc eadem aequatione $2az - \frac{a}{b}z^2 \sqcap x^2$, inverse utamur; nempe sumta AH pro abscissa[,] $DH \sqcap z$ pro ordinata, et quaeramus $D\lambda$ pro intervallo tangentis quam vocabimus λ nempe fiet $\cancel{2}az - \frac{\cancel{2}a}{b}z^2 \sqcap \cancel{2}x\lambda$ et $\lambda \sqcap \dfrac{az - \frac{a}{b}z^2}{x}$, huius aequationis priori iunctae ope tollamus terminum z. Nempe primum z^2, pro $-\frac{a}{b}z^2$, substituendo in posteriore eius valorem ex priore, qui est $x^2 - 2az$, et fiet: $\boxed{az} + x^2 - \boxed{2}az \sqcap x\lambda$. et erit $z \sqcap \dfrac{x^2 - x\lambda}{a}$, et $z^2 \sqcap \dfrac{x^4 - 2x^3\lambda + x^2\lambda^2}{a^2}$, quibus valoribus in prima aequatione substitutis, fiet:

$$\frac{2a^{\cancel{2}}x^{\cancel{2}} - 2a^{\cancel{2}}\cancel{x}\lambda - \frac{\cancel{a}}{b}x^{\cancel{4}3} + \frac{2\cancel{a}}{b}x^{\cancel{3}2}\lambda - \frac{\cancel{a}}{b}x^{\cancel{2}}\lambda^2}{a^{\cancel{2}}} \sqcap x^{\cancel{2}},$$ qua aequatione exprimitur valor ipsius λ aequatione tali: $2a[x]\ -2a\lambda - \dfrac{x^3}{b} + \dfrac{2x^2\lambda}{b} - \dfrac{x\lambda^2}{b} \sqcap ax$.

Sed brevius forte ita rem obtinebimus: $z^2 - 2bz + b^2 \sqcap b^2 - x^2$, et $\mp z \pm b \sqcap \sqrt{b^2 - x^2}$, et $z \sqcap \mp\sqrt{b^2 - x^2} + b$. Pro x substituendo $x + \beta$. fiet: proxima $z \sqcap \mp\sqrt{b^2 - x^2 - 2x\beta - \beta^2} + b$. Auferatur illa ab hac, fiet: $\mp\sqrt{b^2 - x^2 - 2x\beta - \beta^2} \pm \sqrt{b^2 - x^2} \sqcap (w)$. Unde

$$+b^2 - x^2 - 2x\beta - \cancel{\beta^2} - 2\sqrt{b^2 - x^2 - 2x\beta \cancel{-\beta^2}, \frown\ b^2 - x^2} + b^2 - x^2 \sqcap w^2.$$
$$2b^2 - 2x^2 - 2x\beta\ -2\sqrt{\ldots} \sqcap w^2, \text{ sive :}$$
$$2b^2 - 2x^2 - 2x\beta\ -w^2 \qquad \sqcap 2\sqrt{\ldots}, \text{ et quadrando utrobique}$$
$$\boxed{4b^4}\boxed{-8b^2x^2}\ -8b^2x\beta\ -4b^2w^2\boxed{+4x^4} + 8x^3\beta + 4x^2w^2, +4x^2\beta^2 + 4x\beta w^2 + w^4 \sqcap$$
$$\boxed{4b^4}\boxed{-8b^2x^2}\boxed{+4x^4} - 8b^2\beta x + 8x^3\beta.$$

6 $\lambda \sqcap \dfrac{\mathrm{az} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}\mathrm{z}^2}{\mathrm{x}}$, *(1)* sive $\lambda^2 \sqcap$ *(2)* sive λ *(3)* huius *L* 11 x^2 *L ändert Hrsg.*

11 f. $\sqcap$ ax. *(1)* Ita efficia *(2)* Sed *L* 14 f. Unde *(1)* $\boxed{+\mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2} - 2\mathrm{x}\beta - \cancel{\beta^2} - 2\sqrt{\mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}\beta - \cancel{\beta^2}, \frown\ \mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2}\boxed{+\mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{w}^2$. sive $\mathrm{w}^2 + 2\mathrm{x}\beta, \square \sqcap \mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2 - 2\mathrm{x}\beta, \frown\ \mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2$, sive: $\mathrm{w}^4 + 4\mathrm{x}\beta\mathrm{w}^2 + 4\mathrm{x}^2\beta^2 \sqcap \mathrm{b}^4 - 2$ *(2)* $+\mathrm{b}^2$ *L*

Quod si iam ad w^2 addatur β^2, radix summae repraesentabit etiam elementa ellipseos, sed haec quoque compositiora quam velim. Ope tamen ipsius λ facilius habetur exitus, quia ibi λ habetur pura.

Satius ergo erit ad reliquas progredi aequationes. Sumamus scilicet aequationem: $b^2 - \frac{b}{a}x^2 \sqcap y^2$. et quaeramus $ER \sqcap \varsigma$. ponendo $CE \sqcap x$ pro ordinata; et $ED \sqcap y$ pro abscissa nempe fiet:

$-\frac{\cancel{2}b}{a}\varsigma \sqcap \cancel{2}y^2$, et $\varsigma \sqcap -\frac{b^2 - \frac{b}{a}x^2}{\frac{b}{a}x}$, fiat $\frac{w}{\beta} \sqcap \frac{\sqrt{b^2 - \frac{b}{a}x^2}}{b^2 - \frac{b}{a}x^2} \frown \frac{b}{a}x$, sive $w \sqcap \frac{\beta\frac{b}{a}x}{\sqrt{b^2 - \frac{b}{a}x^2}}$. eius quadrato $\frac{\beta^2\frac{b^2}{a^2}x^2}{b^2 - \frac{b}{a}x^2}$, addatur β^2, producti radix fiet: $\beta\sqrt{\frac{\cancel{\beta^2}\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2\cancel{\beta^2} - \frac{b\beta^2}{a}x^2}{b^2 - \frac{b}{a}x^2}} \sqcap g$. Superest ergo ut huius figurae dimensionem tentemus.

Nimirum aequatio fit: $\frac{b^2g^2 - \frac{b}{a}x^2g^2}{\beta^2} \sqcap \frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 - \frac{b}{a}x^2$.

$$\boxed{-\frac{b}{a}\,..}$$

Huius figurae g^2 habentur ex quadratura hyperbolae: fit enim $g^2 \sqcap \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2 + b^2 - \frac{b}{a}x^2}{b^2 - \frac{b}{a}x^2}$ $\sqcap \frac{\frac{b^2}{a^2}x^2}{b^2 - \frac{b}{a}x^2} + 1$. quae pendent ex quad. hyp. At x^2, fit $\sqcap \frac{b^2g^2}{\underbrace{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}} + \frac{b}{a}g^2} - \frac{[b^2]}{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a} + \frac{b^2}{a^2}g^2}$ quae pendent ex quad. vel circuli si $\underbrace{\frac{b^2}{a^2} - \frac{b}{a}}$ est quantitas affirmativa, vel hyperbolae

9 huius *(1)* curvae *(2)* figurae *L* 11 *Umrahmung erg. Hrsg.* 12 figurae *(1)* momenta g^2 habentur ex quadratura hyperbolae. Eiusdem x^2, etiam habentur ex quadratura hyperbolae *(2)* g^2 *L* 13 $\frac{b}{a}g^2$ *L ändert Hrsg.*

si negativa. Duo ergo momenta habemus figurae ipsarum g. Ducantur g in $b + x\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ fiet: momentum omnium g ex puncto versus verticem, symmetrum summae ipsarum x^2, id tanquam fiet: $\sqrt{\dfrac{\dfrac{b^2}{a^2}x^2,, + b + x\sqrt{\dfrac{b}{a}} \frown b - x\sqrt{\dfrac{b}{a}},,, \frown b + x\sqrt{\dfrac{b}{a}}}{b - x\sqrt{\dfrac{b}{a}}}}$. Curvae hyperbolicae homogenea est haec figura: $\dfrac{\sqrt{a^4 + y^4}}{y^2}$. Item haec $\sqrt{\dfrac{2x^2 \pm a^2}{\pm a^2 + x^2}}$. quae posterior similis facile reddi potest homogeneae curvae ellipticae dividendo per $\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. cognitam: Elementa curvae hyperbolicae ex posteriore etiam sic enuntiari possunt: $\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{\pm a^2 + x^2}}$. Utamur si licet extractione per partes: $\sqrt{1 + \dfrac{x^2}{\pm a^2 + x^2}} \sqcap 1 + z$ ponendo $2z + z^2 \sqcap \dfrac{x^2}{\pm a^2 + x^2}$. Sed ut progressio fiat in infinitum, ita procedemus:

$$\begin{array}{llllll}
\sqrt{\cancel{1} \quad + \quad \dfrac{x^2}{\cancel{\pm a^2} + x^2} \quad + \dfrac{x^4}{\cancel{\pm a^2} + x^2, \square} - \dfrac{x^4}{\pm a^2 + x^2, \square}} & & & & & \\
\hline\hline
1 & \dfrac{x^2}{\pm a^2 + x^2,, \frown 2} & & \dfrac{-x^4}{\pm a^2 + x^2, \cancel{\square}} & \smile & \dfrac{\pm 2a^2 + 3x^2}{\cancel{\pm a^2 + x^2}} \\
\hline\hline
\cancel{1} & \dfrac{x^2}{\cancel{\pm a^2} + x^2} & + \dfrac{x^4}{\cancel{\pm a^2} + x^2, \square} & & & \\
\hline
\dfrac{\pm 2a^2 + 2x^2 + x^2}{\pm a^2 + x^2} & & & & & \\
\hline
\end{array}$$

1 ergo *(1)* |curvae *streicht Hrsg.*| *(a)* huius momenta habemus *(b)* momenta habemus ipsarum g *(2)* momenta *L* 2 ex *(1)* verti *(2)* puncto *(a)* ultra verticem *(b)* versus *L* 8 fiat *(1)* in infinitum faciemus ita: $\sqrt{1 + \dfrac{\mathrm{x}^2}{\pm \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2}} \sqcap 1+$ *(2)* in *L*

9 Bei der quadratischen Ergänzung unter der Wurzel vergißt Leibniz den Faktor 4 im Nenner der letzten zwei Terme, was die Berechnung der weiteren Terme des Schemas beeinträchtigt.

$$\begin{array}{llll}
\multicolumn{4}{l}{\cancel{a^2} + \cancel{bc} + \dfrac{b^2\cancel{c^2}}{\cancel{4a^2}} - \dfrac{b^2\cancel{c^2}}{\cancel{4a^2}} + \cancel{\dfrac{b^4c^2}{2a^2+bc,4,,\square}} - \dfrac{b^4c^2}{2a^2+bc,4,\square}} \\
\hline\hline
a \;\Big\|\; \dfrac{bc}{2a} & \dfrac{-b^2c^2}{2a^2+bc,,4} & \dfrac{-b^4c^2}{2a^2+bc,\square,4,, \frown 2a^2+bc,4,-b^2c^2} & \text{etc.} \;\sqcap \\
 & & & \sqrt{a^2+bc} \\
\hline\hline
a \quad \dfrac{bc}{2a} & \dfrac{2a+bc}{2a} \Big) & \dfrac{2a^2+bc,, \frown 2a^2+bc,4,-b^2c^2}{2a^2+bc,4} \Big) & \\
\hline
\multicolumn{4}{l}{\quad bc + \dfrac{b^2c^2}{4a^2} - \dfrac{b^2\cancel{c^2}}{\cancel{4a^2}} + \cancel{\dfrac{b^4c^2}{2a^2+bc,4,\square}}} \\
\hline
\end{array}$$

Regula continuandi haec est, ut numerator termini sequentis sit quadratum a numeratore proxime praecedentis, nominator autem eius sit numerator fractionis factae ex praecedentibus terminis omnibus ad commune nomen redactis, ductus in nominatorem ultimi.

Esto radix extrahenda ex 2. seu ex $\sqrt{1+1}$, fiet:

10–520,2 *Nebenrechnungen:*

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{12} \sqcap \frac{18-1}{12} \qquad \begin{array}{r} 17 \\ 12 \\ \hline 34 \\ 17 \\ \hline 204 \end{array}$$

$$204\left\{\begin{array}{l} 2 \\ \\ \\ 102 \end{array}\right. \qquad 12\left\{\begin{array}{c} 2 \\ \\ 6 \end{array}\right\}12 \quad \left\{\begin{array}{l} \\ 17 \end{array}\right.$$

1–5 In den Zählern der letzten zwei Terme der ersten Zeile des Schemas müßte b^4c^4 stehen, im Nenner des dritten Terms der zweiten Zeile fehlt der Faktor a; beides beeinträchtigt die Berechnung der weiteren Terme. 8 f. ductus in nominatorem ultimi: Leibniz vergißt, mit dem Faktor 2 zu multiplizieren. Vgl. N. 32 S. 347 Z. 3–7. 10 $\sqrt{1+1}$: Leibniz rechnet ab dem dritten Term der Reihendarstellung mit der fehlerhaften Regel, ein Schreibfehler in einer Nebenrechnung verzerrt das Ergebnis zusätzlich.

$\frac{3}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{204} - \frac{1}{22432} - \frac{1}{167611904}$ etc. Ergo ratio diagonalis ad latus in quadrato, est ut $\frac{3}{2} - \frac{1}{12} - \frac{1}{204} - \frac{1}{22432} - \frac{1}{167611904}$ etc. ad 1.

Eodem modo per extractionem radicis cubicae de 2. in infinitum continuatam, exprimi potest ratio lateris cubi dupli ad latus cubi dati; id est duplicatio cubi.

Quod si vero iam quaelibet harum fractionum ex quibus componitur numerus irrationalis, resolvatur in integros, patet in infinitas paraboloeides resolvi posse figuram quamlibet. Eadem etiam ad radicum altiorum radices applicari possunt; addo id servire ad radices cognitas etiam ex affectis extrahendas.

Sed superest alia quoque ratio resolvendi radicem in infinitas alias quantitates, sed in quas ni fallor ipsa radix ingreditur:

$$
\begin{array}{r}
17 \\
6 \\
\hline
102
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
102 \\
3 \\
\hline
\dot{3}\dot{0}6 \\
17 \\
\hline
289 \\
1 \\
\hline
288
\end{array}
\;\; -17-1, \frown 204
\qquad
\begin{array}{r}
208 \\
204 \\
\hline
832 \\
2160 \\
\hline
22432
\end{array}
\;[!]\quad
\begin{array}{r}
208 \\
17 \\
\hline
1456 \\
208 \\
\hline
3536
\end{array}
\quad
\begin{array}{r}
\underline{1\dot{1}\dot{2}16} \\
3536 \\
208 \\
3744 \\
\hline
7472
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
22432 \\
7472 \\
\hline
44864 \\
157024 \\
89728 \\
157024 \\
\hline
167611904
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
 & 8 & \quad 8 \\
4 & & 2 \\
 & 3 &
\end{array}
$$

6 f. cubi. *(1)* Sed aliam *(2)* Quod *L* 8 posse *(1)* quantitatem *(2)* figuram *L*

Ut esto: $\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} \sqcap a \text{ǂ} z$. Erit $\boxed{a^2} \text{ǂ} 2az + z^2 \sqcap \boxed{a^2} \text{ǂ} bc$; et pro z substituendo eius valorem, fiet: $z^2 \sqcap \text{ǂ}\ bc - 2a\sqrt{a^2[\text{ǂ}]bc} + 2a^2$ et $z \sqcap \sqrt{\text{ǂ}\ bc - 2a\sqrt{a^2[\text{ǂ}]bc} + 2a^2}$. Nam $z \sqcap \text{ǂ}\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} \ddagger a$, ex hypothesi. Ergo $\text{ǂ}\ 2az \sqcap 2a\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} - 2a^2$. Ergo $z^2 \sqcap \text{ǂ}\ bc - 2a\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} + 2a^2$. Et $z \sqcap \sqrt{2a^2 \text{ǂ} bc - 2a\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc}}$. Et $\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} \sqcap a \text{ǂ} \sqrt{2a^2 \text{ǂ} bc - 2a\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc}}$.

Haec methodus duo habet praeclara supra priorem; nam neque fractos introducit, ubi non iam tum adsunt, et quod superior non potest, finiri potest ubilibet, et servit ad alias figuras ad alias reducendas; ponendo $\text{ǂ} \sqcap -$ et $bc \sqcap x^2$ fiet $+\sqrt{2a^2 - x^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2}} \sqcap -y + a$, et fiet quadrando:

$2a^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap y^2 + 2ya \boxed{+a^2}$. Unde $2a\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap a^2 - y^2 - 2ya$. et rursus quadrando: $3\,4a^4 - 4a^2x^2 \sqcap \boxed{a^4}\ \boxed{-2a^2y^2} - 4a^3y + y^4 + 4y^3a + 2\,4y^2a^2$. Sed calculo errorem inesse iudico, nam in $2a\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap a^2 - y^2 - 2ya$ substituendo pro $\sqrt{a^2 - x^2}$ eius valorem y, fit y aequalis quantitati determinatae, quod est absurdum. Error ergo in calculo, resumamus.

$\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap a - z$. Ergo $\boxed{a^2} - x^2 \sqcap \boxed{a^2} - 2az + z^2$. Iam ex hypothesi $z \sqcap a - \sqrt{a^2 - x^2}$. Ergo $-x^2 \sqcap -2a^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2} + z^2$. sive $z \sqcap \sqrt{+2a^2 - x^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2}}$ ut ante $\sqcap a - \sqrt{a^2 - x^2}$. Unde $\sqrt{a^2 - x^2} \sqcap a - \sqrt{2a^2 - x^2 - 2a\sqrt{a^2 - x^2}}$. Et videndum est an radix haec posterior possit esse impossibilis seu imaginaria, etsi prior sit realis, nimirum ponamus $a \sqcap x + e$. et $2a^2 + f \sqcap x^2 + 2a\sqrt{a^2 - x^2}$. Videamus an non ex hac hypothesi sequatur absurdum. Pro x pone $a - e$. Unde $2a^2 + f \sqcap \boxed{a^2} - 2ae + e^2 + 2a\sqrt{\boxed{a^2 - a^2} + 2ae - e^2}$.

2 $z^2 \sqcap$ *(1)* $bc \,\text{ǂ}\, 2a\sqrt{a^2 + bc}$ et $z \sqcap \sqrt{bc \ddagger 2a\sqrt{a^2 + bc}}$. | Ergo *(a)* $\sqrt{a^2 + bc} \sqcap a \boxed{+\sqrt{bc \ddagger 2a\sqrt{a^2 + bc}}}$ *(b)* $\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} \sqcap a \,\text{ǂ}\, \underbrace{\sqrt{bc \ddagger 2a\sqrt{a^2 + bc}}}_{\sqrt{bc} + \sqrt{2a\sqrt{}}}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\text{ǂ}bc -$ | $2a\sqrt{a^2 + bc} + 2a^2$ et $z \sqcap \sqrt{\ddagger bc - 2a\sqrt{a^2 + bc} + 2a^2}$. *ändert Hrsg.* | *(a)* Nam $z \sqcap \text{ǂ}\sqrt{a^2 \text{ǂ} bc} \ddagger a \sqcap \sqrt{\text{ǂ}\quad}$ *(b)* Nam *L* 5 priorem; *(1)* etsi enim in eo inferior *(2)* nam *L* 15 f. $\sqcap a - \sqrt{a^2 - x^2}$ *(1)*, quod statim probari potest nam *(2)*. Unde *L*

8 fiet quadrando: Auf der linken Seite der Gleichung fehlt der Term $-x^2$, auf der rechten müßte $-2ya$ stehen. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit und setzt neu an.

et transponendo et $a^2+f+2ae-e^2$ ducendo in se fiet: $a^4+2a^2f+4a^3e-2a^2e^2,+f^2+4aef-2fe^2,+4a^2e^2-4ae^3+e^4 \sqcap 8a^3e-4a^2e^2$. Sed hoc prolixius, manifestum aliunde est radicem eam fieri posse imaginariam, $f \sqcap x^2+2a\sqrt{a^2-x^2}-2a^2$. Optime id patebit, ponendo x talem ut radix extrahi possit ex quadrato a^2-x^2. Pone $x \sqcap 3$. $a \sqcap 5$. fiet $f \sqcap 9+40-50$. Ergo $f \sqcap -1$. eoque casu radix realis manet: $a^2-x^2 \sqcap d^2$, pone $a \sqcap x+g$. fiet $\boxed{x^2}+2gx+g^2\boxed{-x^2} \sqcap d^2$. et $\dfrac{d^2-g^2}{2g} \sqcap x$. Pone $d \sqcap hg$, erit $x \sqcap \dfrac{h^2g-g}{2}$, et pro g ponendo $2m$ fiet: $x \sqcap h^2m-m$. $d \sqcap 2hm$. et $a \sqcap h^2m\boxed{-m}+\boxed{2}m$.

Pone $h \sqcap 2$ et $m \sqcap 10$, fiet $a \sqcap 50$. et $x \sqcap 30$, et $a^2-x^2 \sqcap 2500-900$ seu $\begin{array}{r} 2500 \\ 900 \\ \hline 1600 \end{array}$

Ponendo $h \sqcap 10$ et $m \sqcap 10$ fiet $a \sqcap 1000+10$. et $a^2 \sqcap$ $\begin{array}{r} 100010 \\ 100010 \\ \hline 1000100 \\ 100010000 \\ \hline 10002000100 \end{array}$ [!].

$h \sqcap 3$ fiet: $90+10 \sqcap 100 \sqcap a$. et $x \sqcap 80$. et $a^2-x^2 \sqcap 10000-6400 \sqcap \begin{array}{r} 10000 \\ 6400 \\ \hline 3600 \end{array}$. Unde

$f \sqcap 6400+\underbrace{2 \frown 100 \frown 60}_{12000}-20000$.

Pone $h \sqcap \dfrac{1}{2}$. fiet $a \sqcap \dfrac{10+40}{4}$. et $x \sqcap \dfrac{-30}{4}$. fiet $2500-900 \sqcap 1600$.

In aequatione $f \sqcap x^2+2a\sqrt{a^2-x^2}-2a^2$ substituendo valores inventos fiet:

$\boxed{h^4m^2}\boxed{-2h^2m^2}\boxed{+m^2}+\underbrace{2h^2m+2m,, \frown 2hm,}_{4h^3m^2+4hm^2}-\boxed{2}h^4m^2-\left[6\boxed{4}\right]h^2m^2-\boxed{2}m^2$ et

$\dfrac{f}{m^2} \sqcap 4h^3+4h-h^4-6h^2-1$.

8 Pone *(1)* h $\sqcap$ 10, et m $\sqcap$ 100, fiet: a $\sqcap$ 100000 *(!)* +100 $\sqcap$ 100100 et $a^2 \sqcap$ $\begin{array}{r} 10010000 \\ 1001 \\ \hline 10010000 \\ 100100 \\ \hline 10020010000 \end{array}$ *(2)* h $\sqcap$ 2 *L*

22 4$\boxed{2}$ *L ändert Hrsg.*

Nam si $x \sqcap 3.$ et $a \sqcap 5.$ erit $g \sqcap 2.$ et $m \sqcap 1.$ et $h \sqcap 2.$ Ita enim $\dfrac{h^2g-g}{2} \sqcap 3.$ et $h^2g+g \sqcap 5.$

$$\begin{array}{ccccccc} 4h^3 & + & 4h & - & h^4 & - & [6]h^2 \\ & & & & & & \quad -1 \\ 32 & + & 8 & - & 16 & - & [24] \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \boxed{h^4m^2} & \boxed{-2h^2m^2} & \boxed{+m^2} & +4h^3m^2 & +\ 4hm^2 & -2h^4m^2 & -\ 6\,4h^2m^2 & -2m^2 \\ 16 & -8 & +1 & +32 & +8 & -32 & -16 & -2 \end{array}$$

$$\underbrace{+32 \quad +8}_{40} \qquad \underbrace{-32 \quad -16 \quad -2}_{-50}$$

$$\underbrace{\underbrace{+32 \ + \ 8}_{40} \qquad \underbrace{-16 \quad -24 \quad -1}_{-40-1}}_{-\ 1}$$

Restat ergo examinandum an ita possibile sit f esse quantitatem affirmativam, nam si potest, radix realis imaginarie exprimi potest, instar cubicarum Cardani radicum ageometricarum.

Sed iam video id fieri non posse, quia mutatis omnibus signis et ordinando, fiet $-f \sqcap h^4 - 4h^3 + 6h^2 - 4h + 1.$ quae est quantitas quadrato quadratica ab $h-1$, ac proinde non potest esse negativa, nec proinde f affirmativa. Itaque de radicibus imaginariis aliter exprimendis parum hinc spero.

Valde notabile est ex progressione aliqua in infinitum continuata non semper sequi seriem esse termino ex quo fit aequalem; nisi demonstrari possit in infinitum continuando ultimum fore aequalem nihilo. Idque patet in posteriore meo extrahendi modo; ubi patet continuo radicem extrahi posse, ita ut extractas partes non ingrediatur bc; sed tantum a.

Generaliter quandocunque datur appropinquatio terminorum in infinitum accedentium; datur series infinita aequalis quantitati quaesitae. Nimirum sumendo omnium ter-

3 4 *L ändert Hrsg.* 5 16 *L ändert Hrsg.* 13–15 radicum *(1)* non *(2)* ageometricarum. *(a)* Scilicet: fiet *(b)* Sed *L*

22 non ingrediatur bc: Leibniz berücksichtigt nicht, daß er in S. 521 Z. 7 bc durch x^2 ersetzt hat.

minorum accedentium differentias; eorum summa si quidem termini accedentes crescunt (ut polygona inscripta v. g.) est aequalis termino quaesito. At si decrescunt summa eorum aequatur excessui termini maximi super ignotam quantitatem.

Si recta secatur in extrema et media ratione observatum est, a quibusdam, hanc seriem seu rationem numerorum,

$$1 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{3}{5} \qquad \frac{5}{8} \qquad \frac{8}{13}$$

continue accedere ad rationem minoris termini ad maiorem.

Ego addo eius diff.

$$\frac{1}{2} \quad -\frac{1}{6} \quad +\frac{1}{15} \quad -\frac{1}{40} \quad +\frac{1}{104}$$

quarum habetur summa aequalis rationi portioni minoris ad maiorem.

[*Teil 2*]

$$\mp\ \frac{\frac{b}{a}y^2+cy+da}{\frac{e}{a}y^2+fy+ga}\ \ddagger\ \frac{\begin{array}{l}\frac{b}{a}y^2 \quad +cy \quad +da\\ \frac{2b}{a}y\beta \ +c\beta\\ \frac{b}{a}\beta^2\end{array}}{\begin{array}{l}\frac{e}{a}y^2 \quad +fy+ga\\ \frac{2e}{a}y\beta \ +f\beta\\ \frac{e}{a}\beta^2\end{array}}\quad \sqcap$$

10 *Nach* maiorem:

3 f. quantitatem. *(1)* Differentiae autem *(2)* Si *L*

4 a quibusdam: z. B. von J. KEPLER, *Strena*, 1611, S. 12 (*KW* IV S. 270) u. *Harmonice mundi*, 1619, S. 76 f. u. 183 (*KW* VI S. 175 f. u. 294) sowie A. Girard in S. STEVIN, *L'arithmétique*, 1634, S. 169 f.

10 portioni: Die Partialsummen der Differenzenreihe ergeben die Folge $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{13}$ etc.

$$\left.\begin{array}{llllll}
\frac{eb}{a^2}\,y^4 & \boxed{\frac{2eb}{a^2}\beta\,y^3} & \boxed{\frac{eb}{a^2}\beta^2 y^2} & & & \\
 & \frac{ec}{a}\;.. & \text{ǂ}\,\frac{2ec}{a}\beta\;.. & \text{ǂ}\,\frac{ec}{a}\beta^2\;y & & \\
 & & \frac{ed\cancel{\phi}}{\cancel{\phi}}\;.. & \text{ǂ}\,\frac{2eda}{a}\beta\;.. & \text{ǂ}\,\frac{eda}{a}\beta^2 & \\
 & \frac{fb}{a}\;.. & \boxed{\frac{fb}{a}\beta\;..} & & & \\
 & & cf\;.. & \boxed{fc\beta\;..} & & \\
 & & & fda\;.. & \text{ǂ}\,fda\beta & \\
 & & \frac{gab}{a}\;.. & gac\;.. & gda^2 & \\
\frac{eb}{a^2}\;.. & \boxed{\frac{2eb}{a^2}\beta\;..} & \boxed{\frac{eb}{a^2}\beta^2\;..} & & & \\
 & \frac{ec}{a}\;.. & \boxed{\frac{ec}{a}\beta\;..} & & & \\
 & & \frac{eda}{a}\;.. & & & \\
 & \frac{fb}{a}\;.. & \text{‡}\,\frac{2fb}{a}\beta\;.. & \text{‡}\,\frac{fb}{a}\beta^2\;.. & & \\
 & & fc\;.. & \boxed{fc\beta\;..} & & \\
 & & & fda\;.. & & \\
 & & \frac{gab}{a}\;.. & \text{‡}\,\frac{2gab}{a}\beta\;.. & \text{‡}\,\frac{gab}{a}\beta^2 & \\
 & & & gac\;.. & \text{‡}\,gac\beta & \\
 & & & & gda^2 &
\end{array}\right\}\text{ divisa per}$$

1–526,9 NB. In hac fractione y^2 et y tolli possunt ex numeratore ut inde fiat fractio cuius [numerator] constans et restabunt in nominatore quantitates arbitrariae; quarum ope videndum est an nominator possit accipere formam quadrato-quadrati aut etiam quadrati.

17 hac *(1)* serie *(2)* fractione *L* 17 ex *(1)* denomi *(2)* numeratore *L* 18 nominator *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{llllll}
\frac{e^2}{a^2}y^4 & +\frac{2e^2}{a^2}\beta\, y^3 & +\frac{e^2}{a^2}\beta^2\ \ y^2 & & & \\
 & +\frac{ef}{a}\quad .. & +\frac{ef}{a}\beta\ \ .. & & & \\
 & & +\frac{ega}{a}\ \ .. & & & \\
 & \frac{fe}{a}\quad .. & +\frac{2fe}{a}\beta\ .. & +\frac{fe}{a}\beta^2\ \ y & & \\
 & & f^2\quad .. & f^2\beta\quad .. & & \\
 & & & fga\quad .. & & \\
 & & \frac{gae}{a}\quad .. & \frac{2gae}{a}\beta\ .. & \frac{gae}{a}\beta^2 & \\
 & & & gaf\quad .. & gaf\beta & \\
 & & & & g^2a^2 &
\end{array}$$

Si ex producto facere velis figuras geometricas, reice in numeratore omnia multiplicata per β^2, et in nominatore omnia in quibus est β, fiet: $\dfrac{\begin{array}{l}\text{ǂ}\,\frac{ec}{a}y^2\ \text{ǂ}\,2edy\ \text{ǂ}\,fda\\ \text{‡}\,\frac{fb}{a}..\ \ \text{‡}\,2gb..\ \text{‡}\,gac\end{array}}{\frac{e}{a}y^2+fy+ga,\square}$. Et proinde omnes figurae quae ordinatam habent valoris puri rationalis, qui ad hunc reduci potest, sunt quadrabiles. Hinc data aliqua serie, cuius terminus est valoris puri rationalis, sed in qua abscissa y ingreditur denominatorem, ille denominator multiplicandus est per proxime maiorem, multiplicando totam fractionem per ipsam. Inde numerator cogitandus est compositus ex duabus partibus; altera multipla nominatoris initio dati, altera multipla proxime maioris. Multipla inquam per aliam quantitatem, ita ut ea per quam multipla est nominatoris sit proxime maior ea per quam multipla est proxime maioris [numerator] quantitatis.

Pro figuris geometricis, fractio ordinatae valorem exhibens multiplicetur per denominatorem, denominator fiet quadratus. Si opus est videbitur adhuc fractio per aliam

14 aliqua *(1)* figura, cuius ordinata *(2)* serie *L* 15 denominator, *(1)* radicandus est quadratus *(2)* multiplicandus *L* 17 f. multipla *(1)* radicis *(2)* nominatoris | initio dati *erg.* | altera *(a)* multiplum eiusdem radicis sed *(b)* multipla proxime maioris. *(aa)* Sed ita ut quantitas multipla ra *(bb)* Multipla *L* 19 est *(1)* radix *(2)* nominatoris *L* 19 f. est proxime *(1)* maior radix *(2)* maioris | nominatore *ändert Hrsg.* | quantitatis *L*

quantitatem quadratam multiplicari posse. Ac postea numerator quoque resolvendus. Sed ut hoc fiat facilius utile erit, continuatis eiusmodi tabulis constantem quendam progressum notare, tum ut in altioribus non sit opus calculatione tabulae, sed ut scribi statim possit; tum ut inde lux ad regressum habeatur. Praeterea, crediderim ita formula data tandem iudicari posse an eam aptari tali seriei possibile sit, an vero id sit impossibile, utcunque per formulas arbitrarias q u a d r a t a s multiplicetur. In numeris semper pro quadratis formulis sunt quasi triangulares, quantitatis in proxime maiorem.

Unum restat indagandum an possibile sit inveniri series inaequabiles, quarum differentiae sint aequabiles. Sunt autem inaequabiles aliae, quia in ipsis crescunt exponentes, aliae, quia non ex numero solo naturali componi possunt. Credibile est figuras geometricas quae non sunt quadrabiles per aequabilem, ut figura angulorum, esse per inaequabilem, ratione exponentium ut puto, sed aequabilitati mixtam. Figurae logarithmorum differentiae sunt applicatae hyperbolae.

5 an *(1)* in infinitum *(2)* eam *L*

38_{16}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS QUARTA DECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 30–31. 1 Bog. 2°. 4 S. Isolierte Rechnung auf Bl. 31 v° rechts unten, schräg geschrieben (= S. 538 Z. 12–16) — Berechnung der Größen e, g, h, l auf LH 35 XII 2 Bl. 62 r° (Cc 2, Nr. 00 = S. 537 Z. 12–14). 4 Z. Auf dem Rest des Blattes Cc 2, Nr. 543 (Druck in einem späteren Band der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 775 A tlw., 00.

Pars XIV schediasmatis de seriebus et summis.

Si in formula sub finem tabulae praecedentis ponas e, et b nihilo aequales fiet $\dfrac{[\text{ǂ}]fda \underline{\pm}\, gac}{\begin{array}{l} f^2y^2 + \ f^2\beta y\ +\ gaf\beta \\ \quad +2fga..\ +\ g^2a^2 \end{array}}$. Si iam nominatorem huius formulae cum ista conferas: $f^2y^2 + 2mafy + m^2a^2$ fiet: $\beta f + 2ga \sqcap 2ma$, sive $m \sqcap \dfrac{\beta f + 2ga}{2a}$. Ergo quia $a^2m^2 \sqcap gaf\beta + g^2a^2$ fiet: $\dfrac{\beta^{\cancel{2}} f^{\cancel{2}} + 4\cancel{\beta}\cancel{f}ga + 4g^2a^2}{4} \sqcap ga\cancel{f}\beta\boxed{+g^2a^2}$, vel $\beta f \sqcap 0$.

Quod cum sit contra propositum, quia f posita $\sqcap 0$. in nominatore restabit tantum g^2a^2, contra propositum, quia quaerimus quantitatem variantem. At β poni $\sqcap 0$. non licet, quia differentia alioquin quae quaeritur erit infinite parva seu nulla, quod non nisi in geometricis ordinatarum seriebus locum habet.

Hinc colligo seriem ipsarum $\dfrac{1}{y^2}$ summatricem non posse habere terminorum sive ordinatarum valorem purum, in qua y, ultra y^2 non ascendat in nominatore. Quare necesse esse ut ascendat altius; sed ut postea divisione etc. deprimatur differentia ad habendas $\dfrac{1}{y^2}$.

Videamus iam an quadrata unitate minuta, per saltum assumta, quae ita exprimi potest: $\dfrac{1}{z \frown, z + \frac{1}{2}\beta}$. ponendo β esse per quam crescunt ipsae z. Quod si ponatur β aequale

10 ǂ *erg. Hrsg.*

---

9 formula: N. 38_{15} S. 526 Z. 11 f.

ipsi 4 erit series circuli quadratrix. Quam formulam, ut conferamus superiori, dividamus nominatorem superioris per f^2, fiet: $y^2\ \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\ f^{\cancel{2}}\beta y \\ +\,2\cancel{f}ga.. \end{array}\right.}{f^{\cancel{2}}}\quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +gaf\beta \\ +\,g^2a^2 \end{array}\right.}{f^2}$ et conferenda: $z^2+\dfrac{1}{2}\beta z$. explicando y, fiet $y \sqcap z+d$. et fiet:

$$\underbrace{\sqcap \qquad z^2\ \dfrac{\left\{\begin{array}{ll} +\,2df & z \\ +\,f\beta & .. \\ +\,2ga & .. \end{array}\right.}{f} \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,d^2f^2 \\ +\,f^2\beta d \\ +\,2fgad \\ +\,gaf\beta \\ +\,g^2a^2 \end{array}\right.}{f^2}}_{\displaystyle \sqcap}$$
$$\overbrace{z^2+\frac{1}{2}\beta z \qquad\qquad *}$$

Iam si $\dfrac{2df+f\beta+2ga}{f} \sqcap \dfrac{1}{2}\beta$. erit $4df+2f\beta+4ga \sqcap \boxed{f\beta}$. ac proinde $4df+f\beta+4ga \sqcap 0$. et $g \sqcap \dfrac{-4df-f\beta}{4a}$. et $g^2 \sqcap \dfrac{4d^2f^2+8f^2d\beta+f^2\beta^2}{16a^2}$. et inserendo hos valores,

$$\frac{\boxed{4d^2f^2a^2}+\boxed{4f^2\beta da^2}-16\,32\,f^2d^2a^2-12\,8\,f^2\beta da^2}{\cancel{16a^2}} \qquad \frac{\boxed{-16df^2a^2\beta}-3\,4\,f^2a^2\beta^2}{\cancel{16a^2}}$$
$$\frac{\boxed{+4d^2f^2a^2}\boxed{+8f^2d\beta a^2}\boxed{+f^2\beta^2a^2}}{\cancel{16a^2}} \sqcap 0.$$

sive $16\cancel{f^2}d^2\cancel{a^2}-12\cancel{f^2}\beta d\cancel{a^2}-3\cancel{f^2}\cancel{a^2}\beta^2$ sive $16d^2-3\beta \frown 4d+\dfrac{9\beta^2}{4} \sqcap \dfrac{12\beta^2+9\beta^2}{4} \sqcap \dfrac{21}{4}\beta^2$. sive $\ddagger 4d \pm \dfrac{3\beta}{2} \sqcap \dfrac{\beta}{2}\sqrt{21}$. sive $d \sqcap \ddagger\dfrac{\beta\sqrt{21}+3\beta}{8}$. Quodsi ergo nullus error in calculo, videtur haberi exitus.

Quod cum sit magni momenti repetemus calculum:

1 Quam *(1)* seriem *(2)* formulam *L*

---

13 $g^2 \sqcap \dfrac{4d^2f^2+8f^2d\beta+f^2\beta^2}{16a^2}$: Der erste Term im Zähler müßte $16d^2f^2$ lauten; in Z. 14 müßten die beiden ersten Koeffizienten 16 lauten. Dieser Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 16. Leibniz überprüft anschließend das Ergebnis durch eine korrekte Kontrollrechnung.

$$\mp\frac{cy+da}{fy+ga}\pm\frac{\begin{array}{l}cy+c\beta\\ \quad\;+da\end{array}}{\begin{array}{l}fy+f\beta\\ \quad\;+ga\end{array}}\sqcap\frac{\begin{array}{lll}\boxed{\begin{array}{l}\mp cf\,y^2\\ \\ \\ \pm cf\,..\end{array}} & \begin{array}{l}\boxed{\mp fda\,y}\\ \boxed{\begin{array}{l}\mp f\beta c\,..\\ \mp gac\,..\end{array}}\\ \boxed{\pm fc\beta\,..}\\ \boxed{\pm fda\,..}\\ \boxed{\pm gac\,..}\end{array} & \begin{array}{l}\mp f\beta da\\ \boxed{\mp ga^2d}\\ \pm gac\beta\\ \boxed{\pm ga^2d}\\ \\ \end{array}\end{array}}{\begin{array}{lll}f^2y^2 & +2fga\,y & +g^2a^2\\ & +f^2\beta\,.. & +f\beta ga\end{array}}$$

sive $\dfrac{\mp fda\beta\pm gac\beta}{\begin{array}{l}f^2y^2+2fgay+g^2a^2\\ \quad+f^2\beta\,..+f\beta ga\end{array}}$ ut ante, diviso nominatore per f^2, fiet nominator,

$y^2\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2gay\\ +f\beta\;..\end{array}\right.}{f}\quad\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+g^2a^2\\ +f\beta ga\end{array}\right.}{f^2}$. Unde faciendo $\dfrac{2ga+f\beta}{f}\sqcap\dfrac{1}{2}\beta$, sive $4ga+2f\beta\sqcap\boxed{f\beta}$ fiet:

$g\sqcap\dfrac{-f\beta}{4a}$ et $g^2\sqcap\dfrac{+f^2\beta^2}{16a^2}$. Iam $g^{\cancel{2}}a^{\cancel{2}}+f\beta\cancel{ga}\sqcap0$ fiet $g\sqcap-\dfrac{f\beta}{a}$. quod contradicit priori, quare ut haberi possit exodus quemadmodum paulo ante feci, explicanda est y, et ponenda $y\sqcap z+d$.

Unde ex formula $y^2\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2fgay\\ +f^2\beta\;..\end{array}\right.}{f^2}\;\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+g^2a^2\\ +f\beta ga\end{array}\right.}{f^2}$ ponendo $y\sqcap z+d$, et $y^2\sqcap z^2+2dz+d^2$,

16 ex *(1)* aequatione *(2)* formula *L*

9 ut ante: S. 528 Z. 10; dort ist im Zähler $\beta=1$ gesetzt. 13 contradicit priori: S. 529 Z. 13. 14 paulo ante: S. 529 Z. 3–11.

$$\text{fiet: } z^2 \;\; \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,2df^2z \\ +\,2fga.. \\ +\,f^2\beta\;.. \end{array}\right.}{f^2} \;\; \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,d^2f^2 \\ +\,2fgad \\ +\,f^2\beta d \\ +\,g^2a^2 \\ +\,f\beta ga \end{array}\right.}{f^2} \quad \text{comparanda cum formula:}$$

$$z^2 \qquad +\frac{1}{2}\beta z \qquad\qquad * \qquad .$$

Ergo $\dfrac{2df^{\cancel{2}}+2\cancel{f}ga+f^{\cancel{2}}\beta}{f} \sqcap \dfrac{1}{2}\beta$. sive $4df+4ga+2f\beta \sqcap \boxed{f\beta}$. Ergo $g \sqcap \dfrac{-4df-f\beta}{4a}$. et $g^2 \sqcap \dfrac{+16d^2f^2+8df^2\beta+f^2\beta^2}{16a^2}$. Quos valores inserendo in posteriore collatitia, fiet:

$$16d^2f^2\cancel{a^2}-32f^2d^2\cancel{a^2}-8f^2\cancel{a^2}d\beta+16f^2\beta d\cancel{a^2}+16d^2f^2\cancel{a^2}+8df^2\beta\cancel{a^2}+f^2\beta^2\cancel{a^2}$$
$$-16f^2\beta d\cancel{a^2}-4f^2\beta^2\cancel{a^2} \sqcap 0,$$

$$\text{sive } \boxed{\begin{array}{l} +\,16d^2f^2 \\ \\ +\,16d^2f^2 \\ -\,32d^2f^2 \end{array}}\boxed{\begin{array}{l} -\;\;8f^2d\beta \\ \\ +\,16f^2\beta d \\ +\;\;8df^2\beta \\ -\,16f^2\beta d \end{array}}\left.\begin{array}{l} +\;\;f^2\beta^2 \\ \\ -\,4f^2\beta^2 \end{array}\right\} \sqcap 0 \text{ quod est impossibile. Hac ergo methodo}$$

solvi problema non potest. Unde patet explicationem y per $z+d$. nihil contulisse.

Si z explicassemus per $y+h$, et z^2 per $y^2+2hy+h^2$, fieret:

$$\begin{array}{llll} y^2 & + & 2hy & +\,h^2 \\ & + & \frac{1}{2}\beta.. & +\,\frac{1}{2}\beta h \end{array}$$

$$\text{conferenda cum } y^2 \;\; \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,2fgay \\ +\;\;f^2\beta.. \end{array}\right.}{f^2} \;\; \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,g^2a^2 \\ +\,f\beta ga \end{array}\right.}{f^2} \quad .$$

Unde $g \sqcap \dfrac{2hf^{\cancel{2}}\boxed{+\frac{1}{2}f^2\beta-f^2\beta}-\frac{1}{2}f^{\cancel{2}}\beta}{2\cancel{f}a} \sqcap \dfrac{4hf-f\beta}{4a}$ et $g^2 \sqcap \dfrac{16h^2f^2-8hf^2\beta+f^2\beta^2}{16a^2}$. Et his valoribus in ultima aequatione collatitia insertis, fiet:

$$\boxed{f^2h^2} + \frac{1}{2}\beta h f^2 \sqcap \frac{\boxed{16h^2f^2} - 8hf^2\beta + f^2\beta^2}{16} + \frac{4f^2\beta h - f^2\beta^2}{4}$$

seu $\boxed{\begin{matrix} + \ 8\beta h f^2 \\ + \ 8hf^2\beta \\ - 16f^2\beta h \end{matrix}} \sqcap f^2\beta^2 - 4f^2\beta^2 \sqcap 0.$ quod est absurdum.

Scilicet generaliter: ipsi y^2 $\dfrac{\left\{\begin{matrix} 2fgay \\ f^2\beta \ \ .. \end{matrix}\right.}{f^2}$ $\dfrac{\left\{\begin{matrix} + g^2a^2 \\ + f\beta ga \end{matrix}\right.}{f^2}$ aequentur $y^2 + ly + ma$. et sumendo l, et m, quasi cognitas, fiet:

$g \sqcap \dfrac{fl - f\beta}{2a}$. et $g^2 \sqcap \dfrac{f^2l^2 - 2f^2l\beta + f^2\beta^2}{4a^2}$, quo valore in posteriore collatitia inserto, fiet: $\cancel{f^2}l^2\boxed{-2f^2l\beta}\boxed{+f^2\beta^2}, \boxed{+2f^2\beta l} - 2\cancel{f^2}\beta^2 \sqcap \cancel{f^2}ma$. et deletis caeteris arbitrariis, fit aequatio: $l^2 - \beta^2 \sqcap ma$. Unde fit ut quandocunque ma. abest, fiat $l \sqcap \beta$. id est fiat progressio triangularis. Posita autem ma, adesse, series haberi poterit: $\dfrac{1}{y^2 + ly + l^2 - \beta^2}$ sumtis l. et β. pro arbitrio sed constantibus, et β. differentia abscissarum. Quodsi l. et β. aequales oritur series triangularis, si inaequales, v. g. ponendo $l \sqcap 2$. et $\beta \sqcap 1$. fiet:

$$\frac{1}{1+2+4-1} \quad \frac{1}{4+4+4-1} \quad \frac{1}{9+6+4-1} \quad \frac{1}{16+8+4-1} \quad \frac{1}{25+10+4-1} \quad \frac{1}{36+12+4-1} \quad \text{etc.}$$

$$\frac{1}{6} \quad \frac{1}{11} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{38} \quad \frac{1}{51}$$

Si potius malis $l \sqcap 1$. et $\beta \sqcap 2$. tunc $\dfrac{1}{y^2 + ly + l^2 - \beta^2}$ dabit:

$$\frac{1}{1+1-3} \quad \frac{1}{4+2-3} \quad \frac{1}{9+3-3} \quad \frac{1}{16+4-3} \quad \frac{1}{25+5-3}$$

$$\frac{1}{-1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{17} \quad \frac{1}{27} \quad \text{etc.}$$

Generaliter fractionum iniri poterit summa, si a nominatoribus triangularium fractionum constans quaedam quantitas subtracta intelligatur. Non perinde si addita.

2–5 absurdum. *(1)* Scilicet 2fga + f$^2\beta$, et g^{2}a^2 + fβga *(2)* Scilicet *L* 12 abscissarum. *(1)* | Itaque seriei huiusmodi: *streicht Hrsg.* | $\dfrac{1}{1+1+1-1} + \dfrac{1}{4+2+1-1} +$ *(2)* Quodsi *L* 19 si *(1)* ad nominatores triangularium fractionum constans quaedam quantitas addita vel ab iis *(2)* a nominatoribus *L*

Generalius omnium fractionum iniri potest summa, quarum numerator unitas, nominatores vero, quadrati numerorum arithmetice crescentium, aucti ipsis radicibus suis per datam multiplicatis et praeterea excessu quadrati datae, super quadratum intervalli ipsius arithmeticae progressionis. Qui excessus nihilo minor esse potest, cum data minor est intervallo; et nihilo aequalis est, cum data et intervallum aequales, quo postremo casu res redit ad seriem fractionum triangularium.

Sed ut videamus an non aequatio: $y^2 + \frac{1}{2}\beta y$ altiorem seriem, v. g. ad y^4 assurgentem habeat summatricem, ideo multiplicando per $\frac{e^2}{a^2}y^2 + hy + la$ fiet:

$$\begin{array}{ccccccc} \frac{e^2}{a^2}y^4 & + & \frac{1}{2}\beta\frac{e^2}{a^2}y^3 & + & \frac{1}{2}h\beta y^2 & + & \frac{1}{2}la\beta y \quad * \\ & + & h \quad .. & + & la \quad .. & & \end{array}$$

conferenda cum facto ex $\frac{e}{a}y^2 + fy + ga$ in seipsum, et praeterea in $\begin{array}{l} \frac{2e}{a}\beta y + \frac{e}{a}\beta^2 \\ \qquad\qquad + f\beta \end{array}$

1–6 *Am Rande, zweite und dritte Spalte gestrichen:*

1	3	
		3
2	6	
		3
3	9	
		3
4	12	

2 crescentium, *(1)* ipsis radicibus suis per datam multiplicati, *(2)* aucti *L* 3 praeterea *(1)* differentia inter huius datae, et *(2)* excessu *(3)* excess *(4)* residuo quadrati d *(5)* excessu *L* 4 potest, cum *(1)* quadratum datae *(2)* data *L*

$$\text{fiet:}\qquad\begin{array}{ccccccccc}
\dfrac{e^2}{a^2}y^4 & + & \dfrac{2e}{a}f\ y^3 & + & \dfrac{2e}{a}\ ga\ y^2 & + & 2\ fga\,y & + & g^2a^2\\
 & & & + & f^2\ .. & & & & \\
 & + & \dfrac{2e^2}{a^2}\beta\ .. & + & \dfrac{2e}{a}\ f\beta\ .. & + & \dfrac{2e}{a}\ \beta ga\ .. & & \\
 & & & + & \dfrac{e^2}{a^2}\ \beta^2\ .. & + & \dfrac{e}{a}\ f\beta^2\ .. & + & \dfrac{e\beta^2}{a}ga\\
 & & & + & \dfrac{e}{a}\ \beta f\ .. & + & f^2\ \ \beta\ \ .. & + & f\beta ga
\end{array}$$

Conferendo terminos ultimos fiet: $g^{\cancel{2}}a^2 + e\beta^2\cancel{g} + f\beta\cancel{g}a \sqcap 0.$ et $g \sqcap \dfrac{-e\beta - fa,\frown\beta}{a^2}.$

Conferendo penultimos, fiet, $l \sqcap \dfrac{2fga + 2e\beta g + \frac{e}{a}f\beta^2 + f^2\beta}{\frac{1}{2}a\beta}$ quo valore ipsius l, in antepenultimorum aequatione inserto, fiet:

$$h \sqcap \frac{\dfrac{2e}{\cancel{a}}g\cancel{a} + f^2 + \dfrac{2e}{a}f\beta + \dfrac{e^2}{a^2}\beta^2 + \dfrac{e}{a}\beta f - \dfrac{2fga + 2e\beta g + \frac{e}{a}f\beta^2 + f^2\beta}{\frac{1}{2}\beta}}{\frac{1}{2}\beta}.$$

Unde novissima aequatio haec erit ex terminis secundis collatis:

$$\frac{1}{2}\beta\frac{e^2}{a^2} + \frac{2eg + f^2 + \dfrac{2e}{a}f\beta + \dfrac{e^2}{a^2}\beta^2 + \dfrac{e}{a}f\beta - \dfrac{2fga + 2e\beta g + \frac{e}{a}f\beta^2 + f^2\beta}{\frac{1}{2}\beta}}{\frac{1}{2}\beta} \sqcap +\frac{2ef}{a} + \frac{2e^2}{a^2}\beta.$$

et explicando g. multiplicandoque omnia per $a^2\beta^2$, et omnino fractiones tollendo fiet:

$$\underset{\mathit{IIII}}{\boxed{\beta^3e^2}} - 7\underset{\mathit{IIII}}{8}\beta^3e^2\underset{\mathit{V}}{\boxed{+4f^2a^2\beta}}\underset{\mathit{III}}{\boxed{+8efa\beta^2}}\underset{\mathit{I}}{\boxed{+4e^2\beta^3}}\ \underset{\mathit{II}}{\boxed{+4ef\beta^2a}} - 16fga^3 - 16e\beta ga^2$$

$$\underset{\mathit{III}}{\boxed{-8ef\beta^2a}} - 4\underset{\mathit{V}}{8}f^2\beta a^2 \sqcap \underset{\mathit{II}}{\boxed{4efa\beta^2}}\underset{\mathit{I}}{\boxed{+4e^2\beta^3}}$$ et fiet denique:

$+7\beta^3e^2 + 16fga^3 + 16e\beta ga^2 + 4f^2\beta a^2 \sqcap 0.$ et explicando ipsam g. fiet:

---

12 fiet: Leibniz vergißt auf der linken Seite der folgenden Gleichung den Term $-8efa\beta^2$, was das Ergebnis der Umformung beeinträchtigt. Die folgende Kontrollrechnung ist, wie Leibniz selbst bemerkt, fehlerhaft.

$\underset{II}{\boxed{7\beta^3e^2}} - 32\underset{III}{16}fae\beta^{\cancel{2}} - 12\underset{I}{16}f^2a^2\cancel{\beta} - 9\underset{II}{16}e^2\beta^{\cancel{3}2}\underset{III}{\boxed{-16e\beta^2fa}}\underset{I}{\boxed{+4f^2\beta a^2}} \sqcap 0.$ sive $+32fae\beta + 12f^2a^2 + 9e^2\beta^2 \sqcap 0.$

Operae pretium est eundem calculum bis facere ob eius momentum quae melior probandi ratio est, et sane expeditissima.

$y^2 + \frac{1}{2}\beta y$, multiplicetur per $\frac{e^2}{a^2}y^2 + hy + la$, fiet:

$$\begin{array}{lllll} \frac{e^2}{a^2}y^4 & +\ \frac{1}{2}\beta\frac{e^2}{a^2}y^3 & +\ \frac{1}{2}\beta hy^2 & +\ \frac{1}{2}\beta lay & \quad * \\ & +\ \ h\ \ .. & +\ \ la\ .. & & \end{array}$$

conferenda cum formula sequente:

$$\begin{array}{llllll} \frac{e^2}{a^2}y^4 & +\ \frac{2e}{a}f\ \ y^3 & +\ \ 2eg\ y^2 & +\ 2fga\ y & +\ g^2a^2 & \quad \odot \\ & +\ \frac{2e^2}{a^2}\beta\ .. & +\ \ f^2\ .. & +\ 2e\beta g\ .. & +\ e\beta^2g & \\ & & +\ \frac{3\,2\,e}{a}f\beta\ .. & +\ \frac{ef\beta^2}{a}\ .. & +\ f\beta ga & \\ & & +\ \frac{e^2}{a^2}\beta^2\ \ .. & +\ f^2\beta\ \ .. & & \\ & & \boxed{+\ \frac{e}{a}\beta f\quad ..} & & & \end{array}$$

Has duas formulas inter se conferendo, quia ultima posterioris nihilo seu loco vacuo prioris aequalis est, fiet:

$g \sqcap \dfrac{-e\beta^2 - f\beta a}{a^2}$ et conferendo penultimos terminos, fiet:

$l \sqcap \dfrac{4fga^2 + 4e\beta ga + 2ef\beta^2 + 2f^2\beta a}{\beta a^2}$ et conferendo antepenultimos, fiet:

$$h \sqcap \frac{\boxed{4ega^2\beta}\boxed{+2f^2a^2\beta} + 6eaf\beta^2 + 2e^2\beta^3 - 8fga^3 - 4\,8\,e\beta ga^2 - 4ef\beta a^2 - 2\,4\,f^2\beta a^2}{\beta^2a^2}$$

et conferendo secundos, fiet:

---

18 *Über* $-4ef\beta a^2$: Hinc ob positam βa^2, pro β^2a, error in sequentibus.

$\beta^2e^2\underset{\text{IIII}}{\boxed{+8ega^2\beta}}\underset{\text{III}}{\boxed{+4f^2a^2\beta}}\underset{\text{II}}{\boxed{+12eaf\beta^2}}\underset{\text{I}}{\boxed{+4e^2\beta^3}}-16fga^3-8\underset{\text{IIII}}{16}e\beta ga^2\underset{\text{II}}{\boxed{-8ef\beta a^2}}-$ $4\,8\,f^2\beta a^2 \sqcap \underset{\text{II}}{\boxed{4efa\beta^2}}\underset{\text{I}}{\boxed{+4e^2\beta^3}}$, sive,

$\beta^3e^2-16fga^3-8e\beta ga^2-4f^2\beta a^2 \sqcap 0$. et explicando g, fiet:

$\beta^3e^2+16fae\beta^2+12\underset{\text{I}}{16}f^2\beta a^2+8e^2\beta^3+8e\beta^2af\boxed{-4f^2\beta a^2}$ sive

$9\beta^{\cancel{3}2}e^2+32fae\beta^{\cancel{2}}+12f^2\cancel{\beta}a^2 \sqcap 0$. prorsus ut supra, ut adeo de hoc calculo possimus esse certi.

Unde $\beta^2e^2+\dfrac{32}{9}fae\beta+\dfrac{32\frown 32}{81,\frown 4}f^2a^2 \sqcap \dfrac{32,32}{81,4}f^2a^2-\dfrac{12f^2a^2}{9}$.

Unde $\mp\beta e\mp\dfrac{32fa}{18} \sqcap fa\sqrt{\dfrac{32,32,,-12,9,4}{81,4}} \sqcap \dfrac{fa\sqrt{592}}{18}$. sive $e \sqcap \dfrac{fa}{18\beta}\frown -32\mp\sqrt{592}$, sive $e \sqcap \dfrac{fa}{\beta}\frown\dfrac{-32\mp\sqrt{592}}{18}$. Unde patet e esse quantitatem negativam. Hic valor $e \sqcap \dfrac{-32fa\mp fa\sqrt{592}}{18\beta}$, inseratur valori g, erit $g \sqcap \dfrac{+32fa\beta^2\pm fa\beta^2\sqrt{592}-f\beta^2a}{\beta a^2}$, sive $g \sqcap \dfrac{31f\beta\pm f\beta\sqrt{592}}{a}$.

---

6 *Neben* certi: Imo inest error.

7–11 *Nebenrechnungen und Nebenbetrachtungen:*

32	81	36	1024
32	4	12	432
64	324	72	592
96		36	
1024		432	

10–537,1 g $\sqcap \dfrac{31f\beta\pm f\beta\sqrt{592}}{a}$. *(1)* Ita *(2)* Sed quoniam tota fractio *(3)* Multiplicando *L*

---

5 ut supra: S. 535 Z. 2. 10 erit g: Konsequent wäre $g \sqcap \dfrac{32fa\beta^2\pm fa\beta^2\sqrt{592}-18f\beta^2a}{18\beta a^2} \sqcap \dfrac{14f\beta\pm f\beta\sqrt{592}}{18a}$. 13 error in sequentibus: Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 11 sowie in N. 38₁₇.

Multiplicando autem per $\dfrac{e^2}{a^2}y^2 + hy + la$ fractionis $\dfrac{1}{y^2 + \frac{1}{2}\beta y}$ non tantum nominatorem, ut iam praestitimus, sed et numeratorem fiet:

$$\frac{1}{y^2 + \frac{1}{2}\beta y} \sqcap \frac{\dfrac{e^2}{a^2}y^2 + hy + la}{\begin{array}{l}\dfrac{e^2}{a^2}y^4 + \dfrac{1}{2}\beta\dfrac{e^2}{a^2}y^3 + \dfrac{1}{2}\beta h y^2 + \dfrac{1}{2}\beta l a y \quad * \\ \qquad + \quad h\ ..\ + \ la\ ..\end{array}} \quad \begin{array}{l}☽ \\ ☽\end{array},$$

cuius nominatorem cum nominatori fractionis generalis summam seriei recipientis contulerimus cum successu, unum superest, ut si licet eadem felicitate et numeratores conferamus. Quod antequam faciam, repetendus est calculus, quo fractionis generalis numerator habitus est.

M a l o e n i m b i s i d e m a g e r e , q u a m s e m e l n i h i l.

Setzung: $ǂ \sqcap \dfrac{p}{a}$. $\sqrt{592} \sqcap \dfrac{q}{a}$.

Berechnung der Größen e, g, l, h auf LH 35 XII 2 Bl. 62 r°:

$e \sqcap \dfrac{-32fa^2 + fpq}{18\beta[a]}$ $\qquad g \sqcap \dfrac{31f\beta[a^2] - [f]p\beta q}{[a^3]}$

$l \sqcap \dfrac{4fga^2 + 4e\beta ga + 2ef\beta^2 + 2f^2\beta a}{\beta a^2}$

$h \sqcap \dfrac{6eaf\beta^2 + 2e^2\beta^3 - 8fga^3 - 4e\beta ga^2}{}$ [*bricht ab*]

12 a *erg. Hrsg.* 12 $\dfrac{31f\beta a - p\beta q}{a}$ *L ändert Hrsg.* 14 *(1)* h $\sqcap$ $\dfrac{-4ega^2\beta - 2f^2a^2\beta + 6eaf\beta^2 + 2e^2\beta^3 - 8fga^3}{}$ *(2)* h $\sqcap$ … *L*

---

2 praestitimus: S. 535 Z. 6 f.

$$\text{Fractio composita erat: } ‡\,\frac{\frac{b}{a}y^2+cy+da}{\frac{e}{a}y^2+fy+ga}\,‡\;\frac{\begin{array}{l}\frac{b}{a}\;\;y^2+cy+da\\ \frac{2b}{a}\beta y\;+c\beta\\ \;\frac{b}{a}\beta^2\end{array}}{\begin{array}{l}\frac{e}{a}\;\;y^2+fy+ga\\ \frac{2e}{a}\beta y\;+f\beta\\ \frac{e}{a}\beta^2\end{array}}$$

Unde multiplicando nominatorem per nominatorem habuimus nominatorem illum signo ☉. cum altero signo ☽. hactenus collatum: restat ut numeratorem multiplicatione per crucem coniunctis productis factum, sub finem plagulae praecedentis positum, et sub initium sequentis repetito calculo examinandum cum numeratore signi ☽. conferamus.

Vid. plag. seq.

1–5 *Daneben isolierte Rechnung, schräg geschrieben:*

$$\begin{array}{r}30\\2\\\hline 60\\8\\\hline 480\end{array}$$

---

3 erat: N. 38_{15} S. 524 Z. 12–16. 7 signo ☉: S. 535 Z. 9–13. 8 praecedentis: N. 38_{15} S. 525 Z. 1–16. 9 sequentis: N. 38_{17} S. 539 Z. 7 – S. 540 Z. 16.

38_{17}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS QUINTA DECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 32–33. 1 Bog 2°. Ca 2 1/2 S. Bl. 33 v° leer. Cc 2, Nr. 775 A tlw.

Pars XV

Nimirum fiet ordinando:

$$\begin{array}{lrl}
\text{formula multiplicanda} & & \dfrac{e}{a}\,y^2 + \dfrac{2e}{a}\,\beta y + \dfrac{e}{a}\,\beta^2 \\
& & \quad + \quad f \,..\, + f\beta \\
& & \qquad\qquad + ga \\
\text{per formulam} & \ddagger, & \left\{ \dfrac{b}{a}\,y^2 + \quad cy + da \right. \\
\hline
\end{array}$$

$$\ddagger\left\{\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{edy^2} & 2e\beta dy & e\beta^2 d \\
 & & & \boxed{fda\,..} & f\beta da \\
 & & & & \boxed{ga^2 d} \\
 & \boxed{\dfrac{e}{a}\,cy^3} & \dfrac{2e}{a}\beta c\,.. & \dfrac{e}{a}\beta^2 c\,.. & \\
 & & \boxed{fc\,..} & \boxed{f\beta c\,..} & \\
 & & & \boxed{gac\,..} & \\
\boxed{\dfrac{eb}{a^2}\,y^4} & \boxed{\dfrac{2e\beta b}{a^2}\,..} & \boxed{\dfrac{e\beta^2 b}{a^2}\,..} & & \\
 & \boxed{\dfrac{fb}{a}\,..} & \boxed{\dfrac{f\beta b}{a}\,..} & & \\
 & & \boxed{gb\,..} & &
\end{array}\right.$$

Hoc productum concordat cum superiore sub finem plagulae praecedentem praecedentis, itaque dubitandum non est de calculi veritate.

Eodem modo fiet ordinando,

$$\text{formula multiplicanda}\ \left.\begin{array}{lll} \dfrac{b}{a}\,y^2 & \dfrac{2b\beta}{a}\,y & \dfrac{b}{a}\,\beta^2 \\ & c\,.. & c\beta \\ & & da \end{array}\right\}\ \ddagger$$

$$\text{per formulam: } \frac{e}{a}\,y^2 + \quad f\,.. + \quad ga$$

$$\left.\begin{array}{ccccc}
 & & \boxed{bgy^2} & 2b\beta gy & b\beta^2 g \\
 & & & \boxed{cga\,..} & c\beta ga \\
 & & & & \boxed{dga^2} \\
 & \boxed{\dfrac{b}{a}\,fy^3} & \dfrac{2b\beta f}{a}\,.. & \dfrac{b}{a}\,\beta^2 f\,.. & \\
 & & \boxed{cf\,..} & \boxed{c\beta f\,..} & \\
 & & & \boxed{daf\,..} & \\
\boxed{\dfrac{be}{a^2}\,y^4} & \boxed{\dfrac{2b\beta e}{a^2}\,..} & \boxed{\dfrac{b\beta^2 e}{a^2}\,..} & & \\
 & \boxed{\dfrac{ce}{a}\,..} & \boxed{\dfrac{c\beta e}{a}\,..} & & \\
 & & \boxed{\dfrac{d\cancel{a}e}{\cancel{a}}\,..} & &
\end{array}\right\}\ \ddagger$$

Hoc productum rursus convenit cum superiore quod est sub finem plagulae praecedentem praecedentis possumusque de hac quoque calculi parte securi esse.

---

1 f. praecedentem praecedentis: N. 38[15] S. 525 Z. 1–7 17 f. praecedentem praecedentis: N. 38[15] S. 525 Z. 8–16

Et quoniam haec duo producta contrariis signis afficiuntur, destruantur quae conveniunt.

A b s o l u t i s   e r g o   d e s t r u c t i o n i b u s ,   r e s t a b i t   n u m e r a t o r   t o t a l i s ,

$$\text{nempe}\left\{\begin{array}{lll} \mp\dfrac{e}{a}\,\beta c y^2 & \mp\ 2e\beta d y & \mp\ e\beta^2 d \\ \pm\dfrac{b}{a}\,\beta f .. & \mp\dfrac{e}{a}\,\beta^2 c\,.. & \mp f\beta d a \\ & \pm\ 2b\beta g\,.. & \pm\ b\beta^2 g \\ & \pm\dfrac{b}{a}\beta^2 f\,.. & \pm\ c\beta g a \end{array}\right.$$

in quo literae, a. β. cognitae: literae autem e. et g, h. pendent a f. ac proinde explicanda, si f. quaerimus. Denique, $b.\,c.\,d.$ sunt indeterminatae a se invicem independentes: quas tentemus determinare, conferendo cum superiore numeratore, seu formula:

$$e^2y^2 \qquad +ha^2y \qquad +la^3$$

ubi h. et l. quoque pendent ab f. Tamdiu ergo differemus quaerere f. quamdiu non cogemur.

Ex prima collatione fiet $b \sqcap \pm\dfrac{e^2a+e\beta c}{\beta f}$.

Ex secunda: $\mp 2e\beta d a f \mp e\beta^2 c f + 2e^2a^2g \pm 2e\beta a c g + 2e^2 a\beta f \pm 2e\beta^2 c f \sqcap h a^3 f$ et fiet $c \sqcap \dfrac{ha^3 f \pm 2e\beta d a f - 2e^2a^2g - 2e^2a\beta f}{\mp e\beta^2 f \pm 2e\beta a g \pm 2e\beta^2 f}$.

Ex tertia: $\mp e\beta^2 d \mp f\beta d a \pm b\beta^2 g \pm c\beta g a \sqcap la^3$, sive $\mp e\beta^2 d \mp f\beta d a + \dfrac{e^2a\beta^2 g \pm e\beta^3 c g}{\beta f} \pm c\beta g a \sqcap la^3$.

5–8 *Neben dem Schema*: $\dfrac{p}{a} \sqcap \mp$.

13 f. Tamdiu ... cogemur. *erg. L*

---

20 $\dfrac{p}{a} \sqcap \mp$: vgl. N. 38₁₆ S. 537 Z. 10.

Quoniam vero quaerimus d, et in $c.$ latet d, ideoque $c.$ per brachylogiam ita exprimemus: $c \sqcap \dfrac{ma^4 \ddagger 2e\beta daf}{na^3}$, adeoque

$\mp e\beta^2 dna^3\beta f \mp f\beta dana^3\beta f + e^2 a\beta^2 gna^3 \ddagger e\beta^3 ma^4 g + 2e\beta^3 e\beta dafg \ddagger ma^4\beta ga\beta f + 2e\beta daf\beta ga\beta f \sqcap la^3na^3\beta f$ eritque

$$d \sqcap \frac{la^3na^3\beta f - e^2a\beta^2gna^3 \mp e\beta^3ma^4g \mp ma^4\beta ga\beta f}{\mp e\beta^2na^3\beta f \mp f\beta ana^3\beta f + 2e\beta^3e\beta afg + 2e\beta af\beta ga\beta f}.$$

Posito ergo $f.$ esse quamlibet cognitam pro arbitrio sumtam, etiam $e.g.h.m.n.$ cognitae erunt, et satisfactum est collationi.

Quoniam patet superesse f supernumerariam, nec tamen ab ea possit oriri variatio, cum problema sit determinatum, ideoque necesse est eam destrui. Quod ut videamus, utile est quamlibet literam quae f continet, explicari; eatenus saltem, quatenus f continet, itaque pro g ponemus $\dfrac{\gamma f}{a}$, pro e ponemus: $\dfrac{Ef}{a}$, pro h ponemus $\dfrac{Hf^2}{a}$, pro l ponemus $\dfrac{\lambda f^2}{a^2}$, pro m ponemus $\dfrac{\mu f^3}{a^3}$, et pro $n \sqcap \dfrac{Nf^2}{a^2}$, sed hoc credo sub exitum sufficere, ubi destruendi f tempus erit.

Antequam autem explicemus $d,\ c,\ b$, explicabimus distincte l, et h:

$$\beta a^2 l \sqcap 4fa^{\overset{1}{\cancel{2}}}, +4\beta\cancel{a} \frown \llcorner\frac{-32fa \mp fa\sqrt{592}}{18\beta}\lrcorner,,, \frown \frac{31f\beta \ddagger f\beta\sqrt{592}}{\cancel{a}},,,$$

$$\frac{-64f^2a\beta^2 \mp 2f^2a\beta^2\sqrt{592}}{18\beta} + 2f^2\beta a$$

$$\text{sive } l \sqcap \frac{\begin{array}{c}18\beta 4fa31f\beta \ddagger 18\beta 4faf\beta\sqrt{592} - 4\beta 31fa31f\beta \mp 4\beta 32faf\beta\sqrt{592}\\ \mp 4\beta fa\sqrt{592}, 31f\beta - 4\beta fa\sqrt{592}, f\beta\sqrt{592} - 64f^2a\beta^2 \mp 2f^2a\beta^2\sqrt{592} + 18\beta 2f^2\beta a\end{array}}{18\beta^2a^2}$$

14 l, et h *(1)*, est autem *(a)* l $\sqcap$ 128f^{2}aβ *(b)* l $\sqcap$ 124fβa $\ddagger$ 4fβa$\sqrt{592}$ *(2)*: *(a)* Sed ut hoc quoque tutius procedat, utile arbitror, numeros adhibere, quo facilius error vitetur *(b)* βa^{2}l *L*

14 l, et h: Leibniz verwendet für g den falschen Wert aus N. 38₁₆ S. 536 Z. 11; konsequent gerechnet, müßte in Z. 17 der dritte Term des Zählers $-4\beta 32fa31f\beta$ lauten. Leibniz vermutet schließlich einen Fehler und beginnt eine Kontrollrechnung.

Unde $l \sqcap \dfrac{-4008f^2 \mp 182f^2\sqrt{592}}{18a}$.

Cum vero etiamnum verear, ne aliquis in ipsa denominatorum collatione error insit, resumere placet tertia vice, et quidem adhibitis numeris, necesse est enim, ut me assuefaciam usui numerorum in calculo analytico. Esto $a \sqcap 1$. $\beta \sqcap 4$. $f \sqcap 2$. $e \sqcap 3$. et fiet $\dfrac{-2f4\beta a - 3e16\beta^2 + 57\lambda a}{[a^2]} \sqcap g$.

$$70l \sqcap \frac{\overset{\cancel{8}}{\boxed{4}}\,2fga^2 + \overset{\cancel{3}}{\boxed{4}}\,3e4\beta ga + \overset{\cancel{3}}{\boxed{2}}\,3e2f16\beta^2 + \overset{\cancel{5}}{\boxed{2}}\,4f^2 4\beta a}{4\beta a^2}$$

$$78h \sqcap \frac{\overset{\cancel{3}}{\boxed{4}}\,3ega^2 + \overset{\cancel{8}}{\boxed{2}}\,4f^2a^2 + \overset{\cancel{9}}{\boxed{6}}\,3e2f4\beta a + \overset{\cancel{9}}{\boxed{2}}\,9e^2 16\beta^2 - \overset{\cancel{4}}{\boxed{2}}\,70la^3}{4\beta a^2}$$

---

1 *Nebenrechnungen:*

18	−592	−31	$\cancel{2}$	ǂ 32	ǂ2	‡18	ǂ31
4	4	31	$\cancel{2}\ \cancel{4}\ 4$	4		4	4
72	−2368	31	$\cancel{4}\ \cancel{0}\ \cancel{0}\ 8\ \cancel{1}\ 2\ 2\ 2$	ǂ128		‡72	ǂ124
31		93	$\cancel{1}\ \cancel{8}\ \cancel{8}\ 8$				ǂ128
72		961	$\cancel{1}\ 1$				ǂ 2
216		4					ǂ254 $\sqrt{592}$
+ 2232		−3844					‡ 72 $\sqrt{592}$
+ 36		−2368					ǂ182 $\sqrt{592}$
+ 2268		− 64					
− 6276		−6276					
− 4008							

5 fiet *(1)* g $\sqcap \dfrac{-2\text{f}4\beta\text{a} - 3\text{e}16\beta^2}{\text{a}}$ *(2)* | $\dfrac{-2\text{f}4\beta\text{a} - 3\text{e}16\beta^2 + 57\lambda\text{a}}{\text{a}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ g *L*

---

5 $+57\lambda a$: Leibniz verwendet für g zunächst den Wert der Stufe *(1)* der Lesart, dann addiert er im Zähler $57\lambda a$, um für die Kontrollzahl von g den Wert $1 = \dfrac{-56+57}{1}$ zu erhalten.

et pro 70 l substituendo eius valorem inventum multiplicandoque omnia per $4\beta a$, ut et communem hunc divisorem habere possint fiet

$$\overset{\text{VI}}{78h} \sqcap \frac{\begin{gathered}\overset{\text{III}}{\boxed{4}3ega^24\beta} + \overset{\text{V}}{\boxed{2}4f^2a^24\beta} + \boxed{2}\boxed{6}\overset{\text{IX}}{3e2f16\beta^2a} + \overset{\text{IX}}{\boxed{2}9e^264\beta^3}\\ -\overset{\text{II}}{\boxed{8}2fga^3} - \boxed{4}\boxed{8}\overset{\text{III}}{3e4\beta ga^2} - \overset{\text{III}}{\boxed{4}3e2f16\beta^2a} - \boxed{2}\boxed{4}\overset{\text{VIII}}{4f^24\beta a^2}\end{gathered}}{\overset{\text{VII}}{16\beta^2a^2}}$$

sive $\overset{\cancel{6}}{78h} \sqcap \dfrac{\overset{\cancel{3}}{\boxed{2}}3e2f16\beta^2a + \overset{\cancel{9}}{\boxed{2}}9e^264\beta^3 - \overset{\cancel{2}}{\boxed{8}}2fga^3 - \overset{\cancel{6}}{\boxed{4}}3e4\beta ga^2 - \overset{\cancel{4}}{\boxed{2}}4f^24\beta a^2}{16\beta^2a^2}$ et conferendo terminos secundos, fiet:

$4\beta 9e^2 + \boxed{2}78ha^2 \sqcap \boxed{4}3ea2f + \boxed{3}\boxed{4}9e^24\beta + 24\,\mu a^2$ sive explicata h, fiet:

$\boxed{4}3e2f16\beta^2a + \boxed{4}9e^264\beta^3 - \overset{\cancel{4}}{\boxed{16}}2fga^3 - \overset{\cancel{3}}{\boxed{8}}3e4\beta ga^2 - \overset{\cancel{8}}{\boxed{4}}4f^24\beta a^2 \sqcap$

$\boxed{4}16\beta^23ea2f + \boxed{3}16\beta^29e^24\beta + \overset{\cancel{6}}{16\beta^2}24\,\mu a^2.$

Dividi autem possunt omnia per β. Porro ordinando ut radix extrahi possit seu haberi e absolute; fiet:

2–4 fiet *(1)* | $78\mathrm{h} \sqcap \dfrac{\begin{gathered}\overset{\cancel{\text{III}}}{\boxed{4}3\mathrm{ega}^24\beta} + \overset{\cancel{\text{V}}}{+\boxed{2}4\mathrm{f}^2\mathrm{a}^24\beta} + \boxed{4}\boxed{6}\overset{\cancel{\text{IX}}}{3\mathrm{e}2\mathrm{f}16\beta^2\mathrm{a}} + \overset{\cancel{\text{IX}}}{\boxed{2}9\mathrm{e}^264\beta^3}\\ -\overset{\cancel{\text{II}}}{\boxed{8}2\mathrm{fga}^3} - \boxed{4}\boxed{8}\overset{\cancel{\text{III}}}{3\mathrm{e}^4\beta\mathrm{ga}^2} - \overset{\text{III}}{\boxed{4}3\mathrm{e}2\mathrm{f}16\beta^2\mathrm{a}} - \overset{\cancel{\text{VIII}}}{\boxed{4}4\mathrm{f}^24\beta\mathrm{a}^2}\end{gathered}}{16\beta^2\mathrm{a}^2}$. *(!) streicht Hrsg.* | Porro $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{a}^2}$ *(2)* $\overset{\text{VI}}{78}$ h *L* 8 $-\overset{\cancel{4}}{\boxed{16}}2\mathrm{fga}^3$ *erg. L*

---

4 $\overset{\text{VI}}{78h} \sqcap$: Leibniz führt die Neunerprobe vor dem Reduzieren der Terme im Zähler durch.

8 $-\overset{\cancel{4}}{\boxed{16}}2fga^3$: Leibniz hatte den Term zunächst vergessen. Nach dem Einfügen korrigiert er die durch weitere Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigte Rechnung nicht mehr, sondern setzt auf dem nächsten Bogen neu an. Die Teilbarkeitsbemerkung hinsichtlich β trifft nach der Ergänzung nicht mehr zu.

$$9e^2 - \boxed{8}\,\frac{ga^2}{16\beta^2}3e + \frac{g^2a^4}{\boxed{4}\,256\beta^4} \sqcap \frac{g^2a^4 + \boxed{16}\,4f^2a^2 16\beta^2 + \boxed{4}\,4\beta 24\,\mu a^2 16\beta^2}{\boxed{4}\,256\beta^4}$$

sive $\mp 3e \pm \dfrac{ga^2}{\boxed{2}\,16\beta^2} \sqcap \dfrac{\sqrt{g^2a^4 + \boxed{16}\,\beta^2 4f^2a^2 + \boxed{4}\,4\beta 24\,\mu a^2 16\beta^2}}{\boxed{2}\,16\beta^2}$

---

2 *Nebenrechnungen:*

24	*Dazu gestrichen :*	16
16	1 3	16
144	$\cancel{6}\cancel{2}09$	256
24	7 7	4
384	$\cancel{4}\cancel{9}49$ [*!*]	1024
4	1	6144
1536		1
4	*Zur ersetzten Lesart,*	7169
6144	*nicht gestrichen :*	
64	1 2	7
1	$\cancel{6}\cancel{1}61$	$\cancel{7}\cancel{1}69$
6209	7 9	8
	$\cancel{4}\cancel{9}49$	$\cancel{6}\cancel{4}6$
	1	1
		[*Rechnung bricht ab*]

12–15 *linke Spalte* *(1)* 6144 16 1 6161 *(2)* 6144 64 1 6209 *L*

38_{18}. DE SERIERUM SUMMIS ET DE QUADRATURIS PARS SEXTA DECIMA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 4 Bl. 34–36. 1 1/2 Bog. 2°. Ca 3 1/2 S. Bl. 35 v° u. 36 v° leer. Textfolge Bl. 34 r°, 34 v°, 36 r°, 35 r°.
Cc 2, Nr. 775 B, C.

[*1. Ansatz*]

(1) $g \sqcap \dfrac{-e\beta^2 - f\beta a}{a^2}$ ex ultimis terminis collatis.

(2) $l \sqcap \dfrac{4afga + 4ae\beta g + 2ef\beta^2 + 2af^2\beta}{\beta a^2}$ ex penultimis collatis.

(3) $h \sqcap \dfrac{\boxed{4a^2eg\beta}\boxed{+2a^2f^2\beta} + 2\,6\,aef\beta^2 + 2e^2\beta^3 \quad -8fga^2 - 4\,8\,e\beta ga^2 \boxed{-4ef\beta^2a} - 2\,4\,f^2\beta a^2}{\beta^2a^2}$ ex antepenultimis collatis et destructis destruendis:

(4) $h \sqcap \dfrac{2aef\beta^2 + 2e^2\beta^3 - 8fga^3 - 4e\beta ga^2 - 2f^2\beta a^2}{\beta^2a^2}$.

Iam ex secundis collatis, fiet:

(5) $\beta^3e^2 \boxed{+4aef\beta^2}\boxed{+4e^2\beta^3} - 16fga^3 - 8e\beta ga^2 - 4f^2\beta a^2 \sqcap \boxed{4ef\beta^2a}\boxed{+4e^2\beta^3}$ et destructis destruendis, atque ordinando fiet:

(6) $e^2 - \dfrac{8ga^2}{\beta^2}\,e + \dfrac{16\,64\,g^2a^4}{4\,\beta^4} \sqcap \dfrac{16g^2a^4 + 16fga^3\beta + 4f^2\beta^2[a^2]}{\beta^4}$ et extracta radice:

(7) $\mp e \pm \dfrac{4ga^2}{\beta^2} \sqcap \dfrac{\sqrt{16g^2a^4 + 16fga^3\beta + 4f^2\beta^2[a^2]}}{\beta^2}$ sive

16–547,1 *a L ändert Hrsg. dreimal*

7 ex ultimis terminis collatis: Leibniz wertet die Gleichungen N. 38_{16} S. 535 Z. 6–13 aus.

(8) $e \sqcap \dfrac{+4ga^2 \mp \sqrt{16g^2a^4 + 16fga^3\beta + 4f^2\beta^2[a^2]}}{\beta^2}$.

Sed iam video non fuisse ad extrahendam radicem accedendum ante explicatam g, quia in ea est e, resumenda ergo est aequatio quinta, et in ea explicanda g, et g^2, est autem $g^2 \sqcap \dfrac{e^2\beta^4 + 2efa\beta^3 + f^2\beta^2a^2}{a^4}$ quare tota aequatio quinta per a^4 multiplicanda est, et fiet:

(9) $\boxed{\beta^3e^2a^4} + 24\,16\,fe\beta^2a^5 + 12\,16\,f^2\beta a^6 + 9\,8\,e^2\beta^3a^4\,\boxed{+8e\beta^2fa^5}\,\boxed{-4f^2\beta a^6} \sqcap 0$.

destructisque destruendis et ordinando divisis prius omnibus per βa^4, fiet:

(10) $9e^2\beta^2 + 4af \frown 2 \frown 3e\beta + 16a^2f^2 \sqcap \boxed{16a^2f^2 - 12f^2a^2}\,4a^2f^2$ et extracta radice,

(11) $3e\beta + 2\,4\,af \sqcap \boxed{2af}$ sive

(12) $e \sqcap \dfrac{-2af}{\beta}$.

Ergo aequationi 12. iungendo aeq. 1. fiet:

(13) $g \sqcap \boxed{\dfrac{+2\cancel{a}f\beta - 3f\beta\cancel{a}}{3a\cancel{2}}}\;\dfrac{-f\beta}{3a}$.

(14) Et eg, erit $\dfrac{+2f^2\beta}{9\beta}$ sive $\dfrac{2f^2}{9}$. quibus valoribus 12. 13. 14. in aequatione 2. substitutis, multiplicandus est totus valor ipsius aequationis 2. per $9\beta a$, ut omnia dividi possint per $[\beta a^2] \frown 9\beta a$. Nimirum omnes termini multiplicandi per 3, excepto uno, ubi est eg; omnes termini in quibus est e multiplicandi per $-6a^2f$, omnes termini in quibus est g, multiplicandi per $-3\beta^2f$, et eg per $2f^2a\beta$, fiet:

(15) $\dfrac{-12a^2f^2\beta^2 + 4a^2\beta^2f^2 - 12f^2\beta^2a^2 + 18a^2\beta^2f^2}{9\beta^2a^2} \sqcap l \sqcap \dfrac{-2f^2}{9a}$.

---

18 *Über der gestrichenen* 4 *von* $4a^2\beta^2f^2$: Error. Debet esse 8.
Über dem durch + *ersetzten Minuszeichen von* $-2f^2$: Debet esse +. Ergo in seqq. erratum.

1 f. e ⊓ ... *(1)* et pro g substituendo eius valorem, item pro g^2 qui est: $+e^2\beta^4 + 2ef$ *(2)*. Sed *L*
15 βa *L ändert Hrsg.*

Eodem modo quaeremus valorem ipsius h ex aequatione 5^{ta}, ubi cum ingrediatur et $e^2 \sqcap \dfrac{4a^2f^2}{9\beta^2}$, ideoque multiplicanda sunt omnia per $9\beta^2 a$, et fiet:

(16) $h \sqcap \dfrac{-2af\beta^2 2af3a\beta + 2\beta^3 4a^2f^2a + 8fa^3f\beta 3\beta^2 - 4\beta a^2 2f^2\beta^2 a - 2f^2\beta a^2 9\beta^2 a}{9\beta^4 a^3}$

$\sqcap \dfrac{-2f^2}{3\beta}$.

Valores ergo ipsarum e, g, l, h. invenimus sane simplicissimos, nempe

$e \sqcap \dfrac{-2af}{3\beta}$ $\qquad g \sqcap \dfrac{-f\beta}{3a}$ $\qquad l \sqcap \dfrac{-2f^2}{9a}$ $\qquad h \sqcap \dfrac{-2f^2}{3\beta}$.

Hoc ergo sucessu animati ad reliquas aequationes collatitias progrediamur, ubi collatis primis nominatorum terminis, fiet:

(17) $b \sqcap \dfrac{\pm e^2a + e\beta c}{\beta f}$ sive explicata e, fiet: $\dfrac{\pm 4a^2f^2a - 2af\beta c 3\beta}{9\beta^3 f}$, sive

(18) $b \sqcap \dfrac{\pm 4a^3f - 6a\beta^2 c}{9\beta^3}$ collatis porro secundis, fiet:

---

3 *Kontrollrechnung:*

$$\begin{array}{r} 8 \\ \underline{24} \\ \underline{32} \\ -\ 12 \\ -\ 8 \\ \underline{-\ 18} \\ \underline{-38} \\ -\ 6 \end{array}$$

7 f. collatis ... fiet: *erg. L*

547,18–552,6 (15): Im zweiten Term des Zählers unterläuft Leibniz ein Koeffizientenfehler, der die weitere Rechnung beeinträchtigt. Konsequent gerechnet müßte in Gleichung (19) vor dem letzten Term der linken Seite $\pm$ stehen; in Gleichung (23) fehlt in den letzten beiden Termen der linken Seite der Faktor 9. In Gleichung (26) steht im zweiten Term der zweiten Zeile der Faktor 7 statt 4. Leibniz bemerkt schließlich den ersten Fehler, markiert den beeinträchtigten Bereich und setzt in S. 552 Z. 8 neu an.

(19) $\dagger 2e\beta d9\beta^3 a \dagger e\beta^2 c9\beta^3 + 2\beta g4a^3 fa \dagger 2\beta g6a\beta^2 ca + \beta^2 f4a^3 f - \beta^2 f6a\beta^2 c \sqcap -2f^2a^2 3\beta^2 a$ sive explicando e, per 12, fiet

(20) $\ddagger 4afd3\beta^3 a \ddagger 2af\beta c3\beta^3 - \dfrac{2\beta 4a^3 f^2\beta \ddagger 2\beta 6\beta^2 caf\beta}{3} + \beta^2 f4a^3 f - \beta^2 f6a\beta^2 c \sqcap - 2f^2a^2 3\beta^2 a$ sive multiplicatis omnibus per 3, et divisis per $f\beta^2 a$, fiet:

(21) $\ddagger 36d\beta a \ddagger 30\,18\,\beta^2 c\ \boxed{-8a^2 f}\ \boxed{\ddagger 12\beta^2 c}\ \boxed{+4\,12\,a^2 f} - 18\beta^2 c \sqcap -22\,18\,fa^2$, ac destructis destruendis, fiet, $c \sqcap \dfrac{-22fa^2 \dagger 36d\beta a}{\ddagger 30\beta^2 - 18\beta^2}$ sive

(22) $c \sqcap \dfrac{11fa^2 \ddagger 18d\beta a}{\dagger 15\beta^2 + 9\beta^2}$.

Superest ut veniamus ad aequationem collatitiam ultimam, quam cum ingrediantur, e, b, c, ideoque multiplicanda erit tota illa aequatio per $\dagger 135\beta^3 + 81\beta^3$, itaque fiet:

(23) $-\beta^2 d45\beta^2 2af \ddagger \beta^2 d27\beta^2 2af + f\beta da135\beta^3 \dagger f\beta da81\beta^3, \dagger \beta^2 g15, 4a^3 f + \beta^2 g15, 6a\beta^2 c + \beta^2 g9, 4a^3 f \dagger \beta^2 g9, 6a\beta^2 c \ddagger \beta ga11fa^2\beta + \beta ga18d\beta a\beta \sqcap \ddagger 2f^2a^2 15\beta^3 - 2f^2a^2 9\beta^3$.

Pro g, et c, substituamus eorum valorem, et tota aequatio 23, multiplicanda erit per $\dagger 15\beta^2 a + 9\beta^2 a$, sed prius dividemus omnia per βa, itaque sufficit multiplicari omnia per $\dagger 15 + 9$, et fiet:

(24) $\ddagger 15\beta^2 d45\beta^2 2af - 9\beta^2 d45\beta^2 2af - 15\beta^2 d27\beta 2af \ddagger 9\beta^2 d27\beta 2af \dagger 15f\beta da135\beta^3 + 9f\beta da135\beta^3 + 15f\beta da81\beta^3 \dagger 9f\beta da81\beta^3,, -5f\beta\beta^2 15, 4a^2 f \ddagger 3f\beta\beta^2 15, 4a^2 f,, - 3\beta^2 f\beta 15, 6, 11fa^2 \dagger 3\beta^2 f\beta 15, 6, 18d\beta a,, \ddagger 5\beta^2\beta f9, 4a^2 f - 3\beta^2\beta f9, 4a^2 f,, \ddagger 3\beta^2 f\beta 9, 6, 11fa^2 + 3\beta^2 f\beta 9, 6, 18d\beta a,, +5f\beta\beta^2 11, 4a^2 f \dagger 3f\beta\beta^2 11, 4a^2 f,, \ddagger 5\beta^2 f18d\beta^2 a - 3\beta^2 f18d\beta^2 a \sqcap -30f^2a^2 15\beta^3 \ddagger 18f^2a^2 15\beta^3 \ddagger 30f^2a^2 9\beta^3 - 18f^2a^2 9\beta^3$.

Sed ut error, qui in calculum tam prolixum, quam est postremus, irrepere potuit, vitetur; tandem aequationem 23 aliter enuntiabimus:

4 – $2f^2a^2 3\beta^2 a$ *(1)* adeoque (21) $c \sqcap 18f^{\cancel{2}}a^{\cancel{3}2}\cancel{\beta^2} \dagger 36\cancel{f}da^{\cancel{2}}\beta^{\cancel{3}} - 8\cancel{\beta^2}a^{\cancel{3}2}f^{\cancel{2}} \ddagger 12\beta^{\cancel{4}2}c\cancel{a}\cancel{f} + 12\cancel{\beta^2}f^{\cancel{2}}a^3 - 18\beta^{\cancel{4}2}\cancel{f}\cancel{a}c \sqcap -18f^{\cancel{2}}a^{\cancel{3}2}\cancel{\beta^2}$, explicata g. divisisque omnibus per $fa^2\beta^2$, hunc denique habebimus valorem ipsius c, (22) $c \sqcap$ *(2)* sive *L* 14 $\dagger 15\beta^2 a + 9\beta^2 a$, *(1)* et fiet: $\ddagger \beta^2 d45\beta^2 2af15\beta^2 a - \beta^2 d45\beta^2 2af9\beta^2 a - \beta^2 d27\beta^2 2af15\beta^2 a \ddagger \beta^2 d27\beta^2 2af9\beta^2 a$ *(2)* sed *L*

$$\text{ǂ}49$$

$$(25)\quad \boxed{-45,2}\,\beta^4 daf \quad \boxed{\text{ǂ}15,4}\,\beta^2 a^{\cancel{3}2} fg \quad \boxed{\begin{matrix}+15\\ \text{ǂ}\ \ 9\end{matrix}}\,,\ 6\beta^{\cancel{4}\,2}\,\cancel{d}gc \ +18\beta^3 da^{\cancel{2}}g \ \sqcap\ \text{‡}2,15f^2a^2\beta^2$$

$$\begin{array}{llllll}
\boxed{\text{‡}27,2}\ \ldots\ldots & +\,9,4\ \ldots\ldots & \text{ǂ}\ 9,\ 6\ \ldots\ldots & & & -2,\ 9\ \ldots\ldots \\
+\boxed{135}45\ \ldots\ldots & \boxed{\text{‡}11}\ \ldots\ldots & \text{ǂ}1 & & \dfrac{-f\beta}{3\cancel{d}} & \\
\text{ǂ}\boxed{81}27\ \ldots\ldots & & & \dfrac{-f\beta}{3\cancel{d}} & & \\
& \dfrac{-f\beta}{3\cancel{d}} & & & &
\end{array}$$

$$\frac{11fa^2\ \text{‡}\ 18d\beta a}{\boxed{\text{ǂ}15\beta^2+9\beta^2}}$$

$$\text{sive }(26)\quad \begin{array}{lll}
3,+\,45\ \cancel{\beta^4}\,d\cancel{d}\cancel{f}\ \ldots & \text{‡}\quad 49\ \cancel{\beta^3}\cancel{a^2}\cancel{f^2} & \sqcap\ 0.\\
3,\ \text{ǂ}\ 27\ \ldots\ldots & -\ \ 9,7\ \ldots & \\
6,+\,18\ \ldots\ldots & \text{‡}6,11\ \ldots & \\
-18\quad\ldots\ldots & \text{ǂ}6,15\ \ldots & \\
 & +\ \ 6,9\ \ldots &
\end{array}$$

$$\text{sive }(27)\ \begin{matrix}+225\beta d\\ \text{ǂ}\ \ 81\,..\end{matrix}\ \sqcap\ \begin{matrix}\text{ǂ}25af,\\ +\ \ 9\,..\end{matrix}\qquad \text{sive }(28)\ d\ \sqcap\ \frac{\begin{matrix}\text{ǂ}\ 25af\\ +\ \ 9\,..\end{matrix}}{\begin{matrix}+225\beta d\\ \text{ǂ}\ \ 81\,..\end{matrix}}.$$

Habita d, facile habetur c, fiet enim ex aeq. 22 iuncta 28

$$(29)\ c\ \sqcap\ \frac{11,\overset{25}{\cancel{225}},fa^2\ \text{ǂ}\ 11,\overset{9}{\cancel{81}},fa^2-\overset{2}{\cancel{18}},25a^2f\ \text{‡}\ 18,\cancel{9}a^2f}{\text{ǂ}15,\underset{25}{\cancel{225}}\beta^2+15,\underset{9}{\cancel{81}}\beta^2+\cancel{9},225\beta^2\ \text{ǂ}\ \cancel{9},81\beta^2}$$

8–12 *Nebenrechnungen:*

18	45	ǂ27	ǂ15	‡ 49	−63
5	3	3	6	.. 66	+54
90	135	ǂ81	ǂ90	‡115	− 9
	90			ǂ 90	
	225			‡ 25	

$$\text{sive (30) } c \sqcap \frac{\begin{array}{l} +9,\quad 25fa^2 \\ \dagger \qquad 81\ \ldots \end{array}}{\begin{array}{l} \dagger 3 \frown 125\beta^2 \\ \qquad 27\ .. \\ +3 \frown \ 45\ .. \\ \qquad 75\ .. \end{array}} \sqcap \frac{\begin{array}{l} +3 \frown 25fa^2 \\ \dagger 3 \frown \ 9\ \ldots \end{array}}{\begin{array}{l} \dagger 125\,\beta^2 \\ ..\ 27\ .. \\ +\ 45\ .. \\ ..\ 75\ .. \end{array}} \sqcap \frac{\begin{array}{l} +3 \frown 25fa^2 \\ \dagger\ ..\quad 9\ \ldots \end{array}}{\begin{array}{l} \dagger\ [152]\,\beta^2 \\ +\ 120\ .. \end{array}}\ .$$

$$\text{Ac denique erit (31) } b \sqcap \frac{\begin{array}{ll} -4,125a^3f & -6,3,25a^3f \\ ..\,..\quad 27\ldots & \ddagger\ ..\ ..\quad 9\ldots \\ \ddagger\ ..\quad 45\ldots & \\ ..\,..\quad 75\ldots & \end{array}}{\begin{array}{l} \dagger\ 9,125\beta^3 \\ ..\ ..\quad 27\,.. \\ +\ ..\quad 45\,.. \\ ..\ ..\quad 75\,.. \end{array}}\ \text{, seu } b \sqcap \frac{\begin{array}{l} \ddagger\ 642fa^3 \\ -\ 602\ldots \end{array}}{\begin{array}{l} \dagger 1368\beta^3 \\ +1080\,.. \end{array}}\ .$$

550,15–551,5 *Nebenrechnungen:*

zu Z. 15:

$$\begin{array}{ll} 4 & 15 \frown 25 \\ \cancel{2}\cancel{2}5 \cancel{+} 25 & \\ \cancel{9}9 & 9 \frown 9 \end{array}$$

zu Z. 1–5:

$$\begin{array}{rrr} +9,25\ \dagger 99 & \dagger 3 \frown 125 & 9 \frown 15 \\ \underline{\ddagger 18} & \underline{\dagger 3 \frown \ \ 27} & \underline{9 \frown 25} \\ \dagger 81 & 3 \frown \dagger 152 & 3 \frown 45 \\ & & 3 \frown 75 \end{array}$$

6–12 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrrrr} & \ddagger 45 & 125 & 18 & 152 & 45 \\ & \underline{\ddagger 75} & \underline{27} & \underline{25} & \underline{9} & \underline{75} \\ \ddagger 18 & 120 & 152 & 90 & 1368 & 120 \\ \underline{9} & \underline{\frown 4} & \underline{450} & \underline{36} & & \underline{8} \\ \ddagger 162 & \ddagger 480 & -602 & 450 & & 1080 \\ & \underline{\ddagger 162} & & & & \\ & \ddagger 642 & & & & \end{array}$$

2+552,5 125 *L ändert Hrsg. zweimal*

---

9 (31): Leibniz vergißt den Faktor 4 aus den ersten zwei Summanden im Zähler des Wertes von b, wie die zugehörige Nebenrechnung zeigt. Der Fehler überträgt sich auf die quadratische Gleichung in y im Zähler des Bruches S. 552 Z. 4–6.

Inventis ergo tandem valoribus omnium incognitarum ex quibus primario quaesitae sunt, b, c, d, e, f, g; f autem pro arbitrio sumi potest, cum qualiscunque supponatur evanescat; fractionem quaesitam $\dfrac{\frac{b}{a}y^2+cy+da}{\frac{e}{a}y^2+fy+ga}$ habebimus inventam, fiet enim:

$$\frac{\begin{array}{lll} \ddagger\ 642fa^2 & +3,25fa^2 & \dagger\ 25fa^2 \\ \dfrac{-\ 602\ldots}{\dagger 1368\beta^3}\,y^2 \;+ & \dfrac{\dagger\ ..\ 9\ \ldots}{\dagger\,[152]\,\beta^2}\,y \;+ & \dfrac{+\ 9\ldots}{+225\,\beta} \\ +1080\,.. & +\ \ 120\ \ .. & \dagger\ \ \ 81\,.. \end{array}}{\dfrac{-2f}{3\beta}\,y^2 \;+\qquad f\ \ y \qquad \dfrac{-f\beta}{3}}.$$

[*2. Ansatz*]

(1) $g \sqcap \dfrac{-e\beta^2 - f\beta a}{a^2}$.

(2) $l \sqcap \dfrac{+4fga^2 + 4e\beta ga + 2ef\beta^2 + 2f^2\beta a}{\beta a^2}$.

(3) $h \sqcap \dfrac{\begin{array}{c} \boxed{4ega^2\beta}\ \boxed{2f^2a^2\beta} + 2\,6\,ef\beta^2 a + 2e^2\beta^3 \\ -8fga^3 - 4\,8\,e\beta ga^2\ \boxed{-4ef\beta^2 a} - 4\,2f^2\beta a^2 \end{array}}{\beta^2 a^2}$

(4 - 5 - 6 - 7 - 8) $\beta^3 e^2\boxed{+4ef\beta^2 a}\ \boxed{+4e^2\beta^3} - 16fga^3 - 8e\beta ga^2 - 4f^2\beta a^2 \sqcap \boxed{+4e\beta^2 af}$ $\boxed{+4e^2\beta^3}$ et explicando g,

6 *Darunter*: Error fuit in calculo.

8 *Darüber*: Calculus iste probus est.

15 probus: s. u. Erl. zu S. 554 Z. 5 f.

(9) $\boxed{\beta^3e^2} + 24\,16\,fe\beta^{\cancel{2}}a + 12\,16\,f^2\cancel{\beta}a^2 + 9\,8\,e^2\beta^{\cancel{3}2}\boxed{+8e\beta^2fa}\ \boxed{-4f^2\beta a^2} \sqcap 0$. et ordinando ad extrahendam radicem,

(10) $9e^2\beta^2 + 4fa \frown 2, 3e\beta + 16f^2a^2 \sqcap \boxed{16f^2a^2 - 12f^2a^2}4f^2a^2$. Et extrahendo:

(11) $3e\beta + 2\,4\,af \sqcap \boxed{2af}$, sive, ut obtineamus tandem valorem ipsius e,

(12) $e \sqcap \dfrac{-2af}{3\beta}$. Eumque valorem substituendo in valorem ipsius g, fiet:

(13) $g \sqcap \dfrac{+2af\beta - 3af\beta}{3a^2} \sqcap \dfrac{-\beta f}{3a}$.

Hos valores ipsarum e, et g, repertos inseramus in valore ipsius h, aeq. 3. ubi reperitur et

(14) $eg \sqcap \dfrac{+2f^2}{g}$, insertis ergo valoribus fiet:

(15) $h \sqcap \dfrac{-2f\cancel{\beta^2}\cancel{a}2\cancel{a}f3\cancel{a}\cancel{\beta} + 2\cancel{\beta^3}4\cancel{a^2}f^2\cancel{a} + 8f\cancel{a^3}\cancel{\beta}f3\cancel{\beta^2} - 4\cancel{\beta}\cancel{a^2}2f^2\cancel{\beta^2}\cancel{a} - 2f^2\cancel{\beta}\cancel{a^2}9\cancel{\beta^2}\cancel{a}}{9\beta^{\cancel{4}}\cancel{a^2}}$

sive $h \sqcap \dfrac{-12\boxed{+8} + 24\boxed{-8} - 18}{9\beta}f^2 \sqcap \dfrac{-6f^2}{9\beta} \sqcap \dfrac{-2f^2}{3\beta}$. Ergo denique

(16) $h \sqcap \dfrac{-2f^2}{3\beta}$.

Nunc ad reliquas collationes pergendum est.

(17) $\pm 3\beta^2c2af \pm b\beta f9\beta^2 \sqcap 4a^2f^2a$, et proinde (18) $b \sqcap \dfrac{\pm 4a^3f^{\cancel{2}} - 6\beta^2ca\cancel{f}}{9\beta 3\cancel{f}}$.

(19) $[a^2\beta]\, l \sqcap \dfrac{-4fa\beta f}{3} + \dfrac{8f^2\beta a}{9} - \dfrac{4af^2\beta}{3} + 2f^2\beta a$ seu

$[9a^2\beta]\, l \sqcap -24\,12\,f^2\beta a\boxed{+8f^2\beta a}\ \boxed{-12f^2\beta a} + 26\,18\,f^2\beta a$. Ergo $l \sqcap \dfrac{2f^2\beta a}{9\beta a^2} \sqcap \dfrac{2f^2}{9a}$.

15 (19) *(1)* $\pm 2d2af9\beta^2 \pm \beta cf3\,9\,\beta^2 + 2g4a^3f \mp 2g\beta^2ca\boxed{+f4a^2f\beta}\boxed{\mp\beta f6\beta^2c}$ $\sqcap$ *(a)*$-a^2 2f^2 9$ *(b)* $-a^2 2f^2 5\,9\,\beta$. $\pm 108da\beta^{\cancel{2}}\cancel{f} \pm 11\,9\,\beta^{\cancel{3}2}c\cancel{f}\boxed{+8a^2f\beta f}\boxed{\pm 2\beta^2c\beta f} \sqcap -22\,30\,a^2f^{\cancel{2}}\beta$. Unde $c \sqcap \dfrac{\mp 22a^2f - 108da\beta}{11\beta^2}$. Sed quia *(aa)* haec ra *(bb)* hic valor ipsius c dissentit ab eo quem superiore calculo inveni, ideo repetendus est calculus aeq. 18. *(2)* | $a^2\beta$ *erg. Hrsg.* | $l \sqcap$ *L* 16 $9a^2\beta$ *erg. Hrsg.*

19 inveni: s. Gleichung (22) S. 549 Z. 7.

(20) $\mp 2e\beta da \mp e\beta^2 c \pm 2b\beta g\cancel{a} \pm b\beta^2 f \sqcap ha^3$

$$\frac{-2af}{3\beta} \qquad \frac{-2af}{3\beta} \qquad \frac{-\beta f}{3\cancel{a}} \qquad \frac{-2f^2}{3\beta}$$

(21) $\pm 4a^2 f\beta d \pm 2af\beta^2 c \mp 2b\cancel{\beta^3} f \pm 3b\cancel{\beta^3} f \sqcap -2f^2 a^3$

$$\frac{\pm 4a^3 f - 6\beta^2 ca}{9\cancel{\beta^3}}$$

(22) $\pm 36a^{\cancel{2}}\cancel{f}\beta d \pm 12\,18\,\cancel{a}\cancel{f}\beta^2 c\,\boxed{+4a^3f^2}\ \boxed{\mp 6\beta^2 caf} \sqcap -22\,18\,f^{\cancel{2}}a^{\cancel{3}2}$. Adeoque $c \sqcap \dfrac{\mp 11fa^2 - 36a\beta d}{12\beta^2}$.

Porro $\mp e\beta^{\cancel{2}} d \mp f\beta da \pm b\cancel{\beta^2} g \pm c\cancel{\beta} g\cancel{a} \sqcap la^{\cancel{3}2}$.

$$\frac{-2af}{3\cancel{\beta}} \qquad \frac{\pm 4a^{\cancel{3}2} f - 6\beta^2 c\cancel{a}}{9\cancel{\beta^3}} \qquad \frac{-\cancel{\beta} f}{3\cancel{a}} \qquad \frac{-\cancel{\beta} f}{3\cancel{a}} \qquad \frac{2f^2}{9\cancel{a}}$$

$$\frac{\mp 11fa^2 - 36a\beta d}{12\cancel{\beta^2}}$$

(23) $\boxed{\pm 2,3,12af\beta d}\ \boxed{\mp 3\,9,12af\beta d} - 4,4a^2f^2 \pm 6,4\beta^2 cf + 11,3f^2a^2 \pm 2\,3,36a\beta df \sqcap 2,12f^2a^2$ sive

$\pm 24\beta^2 c\cancel{f} \pm 72a\beta d\cancel{f} \sqcap 7f^{\cancel{2}}a^2$, sive explicando c, fit
$-22fa^2\,\boxed{\mp 72a\beta d \pm 72a\beta d} \sqcap 7fa^2$.

Quae aequatio est impossibilis. Unde consequitur exitum sic quidem reperiri non posse.

---

5 f. Adeoque $c \sqcap$: Im ersten Term des Zählers steht irrtümlich 11 statt 22. Der Fehler pflanzt sich bis zum Ende der Rechnung fort.

39. DE PROGRESSIONIBUS ET GEOMETRIA ARCANA ET METHODO TANGENTIUM INVERSA

Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 3–4. 1 Bog. 1°. 4 S. Textfolge Bl. 4 r°, 4 v°, 3 r°, 3 v°. Datum und Überschrift auf Bl. 4 r° oben ergänzt. Geringe Textverluste an einer Ecke und im Falz sind ergänzt.
Cc 2, Nr. 820

Xb. 1674

De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa

Progressiones magnitudinum per crementa infinite parva increscentium aut decrescentium figuris quibusdam geometricis continuo quodam motu descriptibilibus repraesentare interest ad mechanicen quoque; nam et vires et motus, sive temporum spatiorumque relationes crementa habent infinite parva: in quo differunt hae progressiones a progressionibus numericis illis, quae exacte per geometriam repraesentari non possunt.

Exempli causa progressio numerorum triangularium est arithmetica, nam geometrice exprimi non potest; et si tentaveris comperies degenerare in progressionem numerorum quadratorum. At progressio numerorum quadratorum geometrica est simul et arithmetica, nam parabolae ordinatis ad tangentem verticis accurate repraesentatur.

---

9 f. *Rechts*: Adde *Schediasma de calculo elastico*, item schediasma *Methodi tangentium inversae exemplum*, omnia eodem mense.

8 *(1)* No *(2)* Xb. *L* 11 Progressiones *(1)* figurarum *(2)* magnitudinum *L* 13 vires et *erg.* *L* 15 illis *erg.* *L* 18 est *(1)*, quia *(2)* simul *L* 22 item schediasma *(1) De (2) Methodi L*

---

17 f. degenerare in progressionem numerorum quadratorum: Die Darstellung der Dreieckszahlen als Parabel $y + \frac{1}{8} = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{2}\right)^2$ führt auf die halben Quadratzahlen. 20 f. *Schediasma de calculo elastico*: Cc 2, Nr. 822; schediasma *Methodi tangentium inversae exemplum*: Cc 2, Nr. 832. Auf das vorliegende Stück verweist Leibniz jedoch (außer in Cc 2, Nr. 822) in *De methodo tangentium inversa exemplum* (Cc 2, Nr. 823); alle sind auf Dezember 1674 datiert.

Progressio omnis per regulam quandam constituitur plus minusve simplicem. Quod si geometrica est, extremitates terminorum progredientium desinere intelligentur in locum quendam sive lineam, sive superficiem, sive corpus. Qui locus variis saepe modis exprimi potest, quos interest notari, et ex iis ad descriptionem lineae vel superficiei vel corporis motu continuo faciendam, eligi simplicissimos. Regula progressionis continet vel unam indeterminatam, praeter eam quae ipsos progressionis terminos refert; quo casu locus est ad lineam, vel duas, quo casu est ad superficiem, vel tres, quo casu est ad solidum.

Porro ut nunc de progressionibus ad lineam tantum loquamur: Ordinatae seu termini progressionis ad locum seu lineam desinentes ab una parte, ex altera parte desinunt vel ad rectam, vel ad curvam; idque certa aliqua anguli determinatione; quae infinitis fieri potest modis.

Nimirum rectae ordinatae (nam de curvis ordinatis hoc loco non loquor et si id quoque aliquando usum habere possit) definito initio et magnitudine et positione seu inclinatione, ad quandam aliam figuram positione datam definuntur. Sane si dicas omnes rectas datae magnitudinis eiusdem ex puncto uno ductas terminari in circuli circumferentiam non est opus nisi duabus conditionibus quia tertia hoc casu sequitur; nempe rectam illam esse perpendicularem ad curvam ad quam terminatur. Si vero dicas omnes rectas ex puncto dato ductas triangulorum instar crescentes terminari debere in curvam quandam nondum satis dixisti, nisi explices aliud quiddam, scilicet ad quam rectam referas, aut quo angulo velis occurrere vel ipsi curvae, vel alteri lineae in quam certa lege productae

---

10 *Über* rectam: punctum

12 *Über* curvis ordinatis: NB.

1 omnis | geometrica *erg. u. gestr.* | per *L* 1 constituitur *(1)*; quae regula aut aequatione aliqua exprimi potest, aut non potest. Si aequatione potest exprimi, figura modo geometrica sit, eo ipso describi potest; potest *(2)* plus *L* 5 faciendam | est *streicht Hrsg.* |, eligi *L* 5 vel *(1)* nullam indeterminatam *(2)* unam *L* 7 lineam, vel *(1)* plures, quo casu est ad superficiem vel corpus. Na *(2)* duas *L* 8 loquamur: *(1)* Lineae a *(2)* Ordinatae *L* 10 punctum *erg. L* 10 curvam; *(1)* angulo aliquo dato, vel eodem si ad rectam, vel vario et *(2)* neque enim explicabo cum ad superficiem hinc ad lineam illinc *(3)* angulo aliquo dato, quare *(4)* idque *L* 11 f. modis. *(1)* Sane si omnes ad unum punctum *(a)* des *(b)* terminantur hinc ad unam lineam illinc, *(aa)* non est *(bb)* opus est ut vel *(2)* Nimirum *(a)* rectarum ordinatarum termino definito *(b)* rectae *L* 15 in *(1)* differentiam, *(2)* circuli *L* 19 explices *(1)*, curvam *(2)* aliud *L* 20 alteri *(1)* rectae *(2)* lineae *L*

terminarentur. Sed et fieri potest, ut non enunties unum angulum, sed ut angulus ipse certo quodam modo varietur; quod est sine dubio complicatissimum sed rarum.

Inter difficillimos etiam casus habendum est, cum postulatur, ut ipsae ordinatae faciant angulum quendam certum aut certo modo crescentem, ad curvam ad quam terminari debent. Exempli causa, si ex puncto quodam ductae ad curvam perpendiculares debeant progredi instar elementorum ∇^{li}; quaeritur curva: Sed rursus hoc diversis modis concipi potest pro diversis scilicet modis dividendi curvam in partes, prout scilicet dividitur curva in partes aequales; aut in partes aequalibus axis partibus per ordinatas (parallelas aliasque) abscissis, respondentes. Porro si calculo explicanda sit relatio, fiet vel per aequationem quandam constantem determinati gradus, aut de gradu in gradum ascendentem, ita tamen ut saltem exponentes sint determinati gradus. Vel denique fiet [per] progressionem replicatam, in qua sequens ordinata supponit praecedentem; continue; et hae progressiones sunt omnium maxime difficiles cum calculo utcunque continuato ne puncto quidem progrediamur, et si figuram per puncta describere velimus futurus sit calculus terminis parumper productis horrendae prolixitatis.

Porro ex omnibus progressionibus eae maxime utiles sunt, quibus commode describuntur figurae geometricae, quales non eae tantum sunt, quibus ordinatae communes explicantur, sed inprimis illae, in quibus poli quidam aut centra adhibentur; aut foci. Sed omnes illae progressionum expressiones quibus describi potest figura analytice ad certam reduci possunt aequationem [ordinatarum] communium et abscissarum.

Fieri potest ut figura geometrice describi possit analytice non possit ut cycloeides; quod tunc sufficit, quando figura analyticam expressionem uniformem respuit, nam etsi circulus et omnes eius partes quadrari possent, cycloeides tamen commodius quam nunc non describeretur; imo contra non aliter describetur methodo uniformi seu motu continuo. Hos ergo describendi modos voco semi-analyticos, quos scilicet ad analyticos reduci pendet a methodo tangentium inversa.

Data ergo quacunque expressione sive progressione per incrementa infinite parva, quaerendus est modus describendi geometricus sive analyticus, sive semi-analyticus. Et

6 instar *(1)* applicatarum trianguli *(2)* elementorum *L* 12 vel *L ändert Hrsg.* 19 figura *(1)* modo *(2)* motu *(3)* solis rectarum *(4)* motum *(5)* a motibus ab unico *(6)* | solis *streicht Hrsg.* | rectarum *(a)* rectili *(b)* linearum intersectionibus *(7)* ad eam reduci possunt quibus *(8)* reduci possunt ad aequationem *(9)* analytice *L* 20 ordinariarum *L ändert Hrsg.* 21 f. non possit *(1)* cum scil *(2)* ut cycloeides; *(a)* et tunc res saepe redibit ad *(aa)* alteram *(bb)* eum methodi casum, *(b)* quod *L* 22 expressionem *(1)* respuit *(2)* perpetuam resp *(3)* uniformem *L* 25 semi-analyticos *(1)*. Nihi *(2)* pendet *(3)*, quos *L*

ex problematibus eiusmodi transcendentibus sunt quaedam quae pendent ex quadraturis et imprimis sunt quae pendent ex curvarum in rectas extensionibus. Itaque tentandum est eo reducere problemata irregularia ut pendeant ex curvarum, v. g. circuli, parabolae, aliarumve in rectas extensionibus; ita solvi poterunt geometrice; seu continuo motu construi loca quorum constructione solvantur. Qualia sunt problemata interpolationum Wallisiana, problemata serierum quarundam convergentium Iac. Gregorii; constructio logarithmorum geometrica Gregorii a S. Vincentio; quae omnia geometrice fieri possunt evolutionibus curvarum aut applicationibus ad plana. NB. aliasve curvas ut si circulum ponas volvi non super plano, sed super curva parabolica; etc. si ponas stylum circumferentiae circuli evolutae non in plano sed superficie sphaerae curvam describere. Adde et superficies in rectum extensas; et corpora, quibus tamen non aeque lubenter ac curvis ad constructiones utar; nisi extrema iubeat necessitas. Quaerenda est ergo ratio problemata irregularia huc semper reducendi; quemadmodum isochronismum penduli ad cycloeidem reduxit Hugenius; et ego mesolabum generale ad trochoeidem parabolicam, cuius unius ope quotcunque inveniri possunt mediae proportionales geometrice, et omnia de rationum compositionibus et divisionibus problemata solvi.

Possunt aliqua problemata adeo esse difficilia, ut utile sit ea certis quibusdam curvis [solvi], quae physica in usum adhibita describuntur, ut vi elastica arcus tensi se restituentis, aliisque id genus artibus. Quomodocunque enim dummodo accurate uno tractu fiat descriptio; immensi calculi et horrendae alioquin necessariae operationes geometricae evitantur. Et vel hinc utile est doctrinam de figuris arcus tensi, de velorum, deque funium

1 transcendentibus *(1)* sive irregu *(2)* sunt *L* 3 f. circuli, | hyperbolae, *gestr.* | parabolae *L* 6 quarundam *erg. L* 9 ponas *(1)* agi circa *(2)* volvi *L* 13 semper *(1)* referendi *(2)* reducendi *L* 15 possunt *(1)* methodi propo *(2)* mediae *L* 18 solvis *L ändert Hrsg.* 19 artibus. *(1)* Ita enim qui *(2)* Quomodocunque *L* 19 accurate *(1)* per omn *(2)* uno

5 interpolationum: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 132–146, 161–165, 193–196 (*WO* I, S. 439–447, 458–460, 476–478) sowie Wallis, *Commercium epistolicum*, 1657, S. 51 (*WO* II, S. 786). 6 serierum: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, u. a. S. 15 ff. u. 23 ff. u. 56 ff. [Marg.]. 6 constructio: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch VI, Prop. 125–130, S. 594–597. 14 reduxit Hugenius: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil 3, prop. VI, S. 67 [Marg.] (*HO* XVIII, S. 201); Leibniz' Handexemplar enthält in der Figur auf der prop. VI gegenüberliegenden S. 66 Ritzspuren und ergänzte Punktbezeichnungen; ego: N. 38_{12} u. *Schediasma de constructione* (Cc 2, Nr. 827), datiert Dezember 1674. 21 de figuris arcus tensi: vgl. u. a. *De vitandis erroribus geometricis in re mechanica* (Cc 2, Nr. 835), datiert Dezember 1674.

intensionibus ad geometriam reduci; ut hinc appareant exempla casuum per synthesin, ut in aliis oblatis per analysin quaerantur describendi modi. Ita inquiram aliquando exactius in methodum qua demonstravit P. Greg. a S. Vincentio logarithmos esse spatiis [hyperbolicis] proportionales: eadem enim opera aliae methodi ostendentur in casibus similibus problemata irregularia revocandi ad geometricas quasdam constructiones.

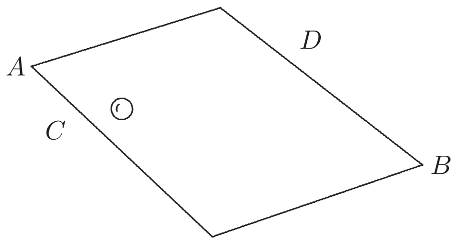
San Vincentius revocavit logarithmos ad spatia hyperbolica; (: videndum quod dent circularia, vel elliptica eadem methodo tractata :) Heuratius hyperbolam ad curvam parabolicam; ego curvae sectiones in plano conservo ope trochoidis parabolicae. Ergo iunctis omnibus illis inventionibus inter se inventa est repraesentatio logarithmorum geometrica in plano, ope trochoeidis parabolicae. Horum exemplo igitur quaerenda est aliorum quoque problematum irregularium constructio ope curvarum geometricarum neque enim nunc quidem ad rem pertinet an sit analytica, quando eas construendi rationes profecto analyticis etsi inventae essent praeferremus.

Huc pertinent extensiones in rectum superficierum cylindricarum per plana angulo semirecto aliterque truncatarum, (exemplum in figura sinuum) unde rursus varia curvarum genera; quae omnia ad constructiones adhibita intelligi possunt, quando operae pretium est. Denique ubi variae sunt construendi rationes adhiberi possunt simplicissimae, neque enim refert [an] magis minusve sint analyticae; vel etiam geometricae. Certe si physicae essent, ut fit adhibito elaterio non ideo minus ad usum sufficient; hoc consilio haud dubie spiram ex recto circularique motu compositam ad quadrandum circulum adhibuit Archimedes; et si parabola ope gravis descendentis proiecti describatur, non minus erit utilis, quam si aliter descripta esset, imo erit simplicior et forte exactior.

3 Vincentio *(1)* reduci *(2)* logarithmos *L* 4 parabolicis *L ändert Hrsg.* 5 ad *(1)* casus ex quibus pendent *(2)* geometricas *L* 5 f. constructiones. *(1)* Gregorius *(2)* San *L* 8 ego *(1)* curvas illas in plano *(2)* curvae *L* 18 an *erg. Hrsg.* 20 dubie *(1)* helicem *(2)* spiram *L* 21 proiecti *erg. L*

---

3 demonstravit P. Greg. a S. Vincentio: s. o. Erl. zu S. 558 Z. 5. 7 Heuratius: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659 (*DGS* I, S. 517–520); ego: N. 38_{11-14} u. Cc 2, Nr. 827–829, alle datiert Dezember 1674. 9 repraesentatio logarithmorum: *a. a. O.* vor allem Cc 2, Nr. 827. 20 f. adhibuit Archimedes: Archimedes, *De lineis spiralibus*, prop. 24; Leibniz erwähnt die archimedische Kreisquadratur mittels der Spirale auch in der *Praefatio opusculi de quadratura circuli arithmetica* (*LMG* V S. 93 f.).



[*Fig. 1*]

Esto tabula inclinata marmorea polita, pone pilam bene tornatam ex C versus D directo ictu proici; pondere autem suo descendere durante motu, curva quam vestigiis suis in tabula nonnihil pulvere aut humore respersa relictis, aliterve signatis describet, sive parabola sit, sive alia, erit multo profecto descripta exactius quam eadem curva descripta instrumento. Inprimis autem descriptiones quae per opticen fieri possunt utiles erunt exacte, cum radii lucis lineas describant perfecte rectas. Operae autem pretium est ex tot variis inquisitionibus edi specimina quaedam prae caeteris utiliora.

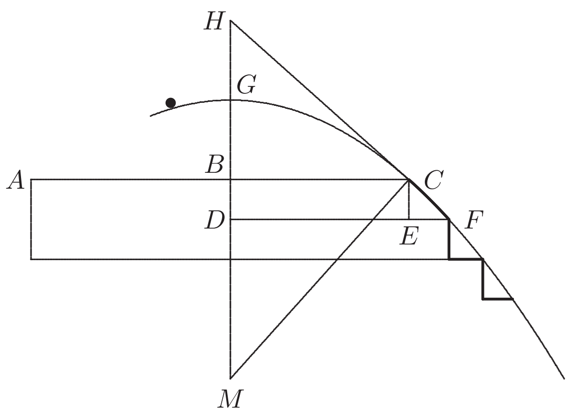
Etiam cum curva quaedam vel superficies in rectum extenditur; considerari potest, quam durante extensionis motu punctum aliquod in ea sumtum describat lineam. Ita inquiri etiam potest, data figura arcus invenire figuram ad quam data tensione reduci possit, et contra, idque saltem in exemplis illustribus.

Separata est summaeque difficultatis doctrina de progressionibus in se replicatis, ubi in valorem unius ordinatae sequentis ingreditur antecedens, et proinde in valorem unius ordinatae ingrediuntur omnes; (: evenit hoc etiam in seriebus convergentibus :).

Cuius ecce exemplum: pone in temporis puncto aliquo seu spatio infinite parvo, B vim adesse quamlibet ut BC sequenti autem temporis spatio BD vim praeter priorem

2 polita *erg. L* 4 aut humore *erg. L* 16 in *(1)* tempore GB vim quaesitam adesse ut *(a)* AB *(b)* AC ⊓ $\alpha + \beta$. posito AB ⊓ α et BC infinite parvam ⊓ β. *(2)* temporis *L*

2 tabula inclinata: vgl. *De descriptionibus curvarum* (Cc 2, Nr. 831), datiert Dezember 1674. 6 descriptiones ... per opticen: vgl. *Methodi tangentium inversae exemplum* (Cc 2, Nr. 832) u. *De Cartesii ovalibus* (Cc 2, Nr. 833), beide datiert Dezember 1674.



[*Fig. 2*]

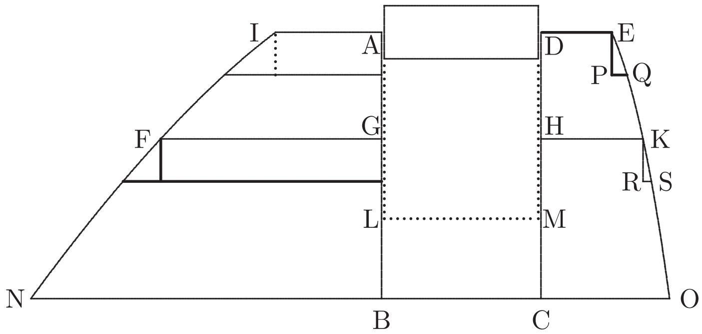
accedere novam, EF eiusmodi ita ut incrementum sit ad vim quandam primam, qua coeptus scilicet est motus $\sqcap \beta$, in reciproca ratione vis praesentis BC, ad β, seu ut β ad BC. Idemque cum in reliquis punctis rectae BD continuatae dici possit; et omnes BC, DF, et sequentes in curvam quandam terminentur, omnes huius curvae ordinatas nomine generali appellemus y, erit ordinata quaelibet sequens $y + \dfrac{\beta^2}{y}$. Quaeritur qualis sit ista curva, et quomodo continuo tractu describi possit; in qua scilicet crementa sint ordinatis reciproce proportionalia. Id ita inquiremus: tangens C axi BD producto occurrat in H. Iam BH appelletur l. et crementum v. g. EF appelletur c. Constat crementum EF

---

8 *Am oberen Rand der Rückseite, mit Hinweisstrich verbunden*: Solutum hic analytice problema: Invenire figuram in qua crementa ordinatis reciproce proportionalia.

2 novam, *(1)* quae sit *(a)* ad vim | proxime *erg.* | praecedentem *(bb)* proxima parte in reciproca ratione *(aaa)* quantitatis β a *(bbb)* summae virium in *(b)* ad vim β, *(aa)* ut *(bb)* in reciproca ratione summae virium *(2)* EF *L* 2 incrementum | infinite parvum, *gestr.* | sit ad vim quandam primam | infinite parvam *gestr.* |, qua *L* 4 punctis *(1)* omnibus dici possit, *(a)* appellando *(b)* ordinatam huius figurae quamlibet *(2)* rectae *L* 5 et *(1)* similes *(2)* sequentes *L* 6 f. ista *(1)* figura, et *(2)* curva *L* 8 producto *(1)* occurrat in *(2)* si opus, *(3)* occurrat *L*

esse ad ordinatam $BC \sqcap y$ ut pars axis $\alpha \sqcap BD, \sqcap CE$, ad productam $BH \sqcap l$. Ergo $\frac{c}{y} \sqcap \frac{\alpha}{l}$. Ergo $c \sqcap \frac{\alpha y}{l}$. Iam idem $c \sqcap \frac{\beta^2}{y}$. Ergo $\frac{\beta^2}{y} \sqcap \frac{\alpha y}{l}$ et $l \sqcap \frac{y^2\alpha}{[\beta^2]}$. Iam ex puncto C ducatur perpendicularis CM, quae axi BD reducto si opus occurrat in M, rectam BM appellemus p. Constat generaliter esse $p \sqcap \frac{y^2}{l}$, seu $\frac{BC^2}{BH}$ ob angulos CBM, et HCM rectos. Iam $l \sqcap \frac{y^2\alpha}{[\beta^2]}$. ergo $p \sqcap \frac{y^2}{\frac{y^2\alpha}{[\beta^2]}} \sqcap \frac{[\beta^2]}{\alpha}$. Hinc sequitur ipsam BM reductam esse perpetuo eandem, ubicunque sumatur punctum in curva; ac proinde curvam CF esse parabolam; quod et verum esse calculus ostendet per synthesin. Nam reperietur: crementa ordinatarum parabolae ad axem esse ipsis ordinatis reciproce proportionalia quod desiderabatur.



[*Fig. 3*]

---

5 *Nebenbetrachtung:* $\frac{y^2}{\alpha} \sqcap l.\ \alpha + \beta + \frac{1}{y}$

10 *Unter Fig. 3*: Vide huc pertinentia *Schediasmate de calculo elastico* Xb. 1674.

1 ut *(1)* recta quaedam constans CE $\sqcap$ *(2)* pars *L* 2 β *L ändert Hrsg.* 5 β *L ändert Hrsg. dreimal.*

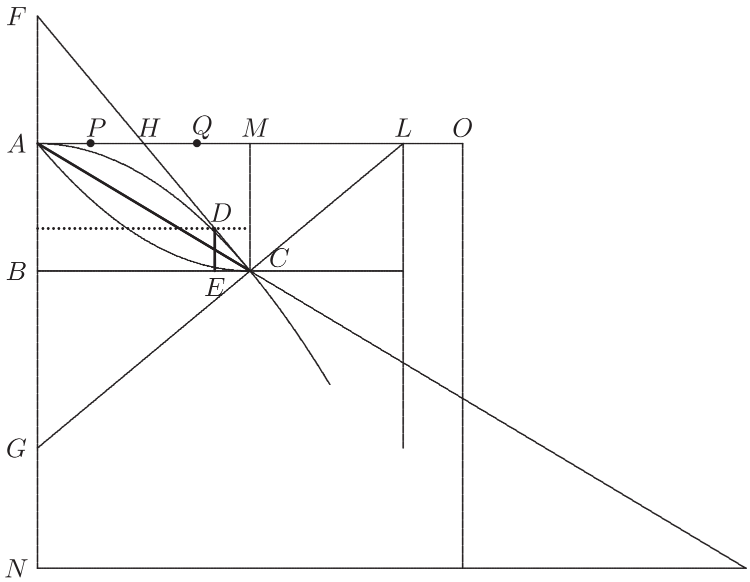
---

10 *Fig. 3*: Die (nicht wiedergegebene) Verbindungslinie DR hat Leibniz gestrichen. 12 *Schediasmate de calculo elastico*: Cc 2, Nr. 822.

Eodem modo inveni subtilissimo (ausim dicere) calculo vim si in vas cylindricum $ADBC$ embolus exacte respondens concavitati oris vasculi ita intrudatur, ut aer qui antea totum vas repleverat intrudatur in spatium $LBCM$ posteaque emota vi intrudente libertas aeri detur restituendi sese; et in quolibet restitutionis loco ut GH vis elaterii qua porro nititur, tum ab ipso elaterio perseverante orta, tum et acceleratione genita recta FG curvae cuiusdam IFN, virium quaesitarum in quolibet spatii puncto progressionis repraesentantis; ordinata esse intelligatur; inveni inquam curvam eius fore naturae, ut ordinatae sint quadratorum suorum crementis reciproce proportionales, sive si alia descripta intelligatur figura EKO cuius ordinatae DE, HK etc. sint proportionales [quadratis] ordinatarum respondentium AI, GF, seu in ratione ordinatarum respondentium duplicata. Crementa autem ordinatarum DE, HK etc., nempe PQ, RS, sint ipsis AI, GF reciproce proportionales; curva ergo IFN, quae hoc praestabit, erit quaesita. Unde intelligi potest, quanti sit momenti haec inquisitio. Curva autem ista qualis sit, et an omnino analytica sit, ex earum scilicet numero, quarum puncta omnia relatione ad certam quandam rectam assumtam calculo expressa definiri possint; nondum definire possum. Est autem ista inquisitio pars methodi tangentium inversae.

Esto curva AC, tangens $CDHF$, ordinata BC, crementum EC, producta (axis dum tangenti ocurrat[)] BF, producta reciproca [HM], curvedo CD perpendicularis CG, perpendicularis reciproca CL, tangens reciproca CH, ordinata reciproca MC, abscissa AB, abscissa reciproca AM, directrix AN indefinita; DE intervallum[,] directrix reciproca, AO, indefinita. Iam generaliter abscissa est aequalis ordinatae reciprocae et contra. Crementum est aequale intervallo reciproco et contra. $\frac{CM}{HM} \sqcap \frac{AF}{AH} \sqcap \frac{FB}{BC}$. Ergo $CM, \frown BC \sqcap FB, \frown HM$ ergo rectangulum sub abscissa et ordinata aequatur rectangulo sub producta et producta reciproca.

1 f. si *(1)* vas cylindricum aëre *(2)* in vas cylindricum *(a)* aer *(b)* ADBC *(aa)* operculum exacte ostium implens *(bb)* embolus *L* 4 vis *(1)* aeris *(2)* elaterii *L* 5 tum *(1)* a novo *(2)* ab *L* 5 genita *(1)* ordinata FG *(2)* recta *L* 7 f. ut *(1)* crementa ordinatarum sint ipsis ordina *(2)* ordinatae sint *(a)* differentiis *(b)* quadratorum ipsarum ordinatarum crementis recipro *(c)* quadratorum *L* 8 proportionales, *(1)* seu *(a)* $\frac{PQ}{R}$ *(b)* $\frac{PQ}{RS} \sqcap A$ *(2)* sive *L* 9 f. EKO *(1)* quadratis *(2)* cuius ordinatae *(a)* sint proportionales ordinatis *(b)* DE, HK etc. sint proportionales | quadratis *erg. Hrsg.* | ordinatarum *L* 10 ratione ordinatarum *(1)* duplicata *(2)* dictarum qua *(3)* respondentium *L* 12 quaesita. *(1)* Breviter ergo quaerenda est curva, in qua *(a)* crementa *(b)* ordinatae sint in *(2)* Unde *L* 18 CH *L ändert Hrsg.* 21 DE intervallum *erg. L*



[*Fig. 4*]

Innumera alia id genus theoremata condi possunt, maximo usu ad geometriam, dum scilicet ex quibusdam datis aliae investigantur, quot licet modis, variisque modis inde ortae aequationes transformantur. Porro ex data relatione inter abscissam et ordinatam caeterae omnes facile calculantur. Itaque id unum agitur ut ex data alia relatione detur relatio abscissae et ordinatae. Data relatione ⟨productae⟩ ad ordinatam datur relatio productae reciprocae ad ordinatam reciprocam seu ad abscissam. Dari relationem AH ad HM idem est quod dari relationem productae reciprocae ad ordinatam. In nostro exemplo data relatione BG ad BC quaeritur figura seu curva, seu relatio BC ad AB. Datur ergo et relatio FB ad BC. Ergo relatio DE rectae constantis ad crementum EC, nempe in nostro casu $BG \sqcap \dfrac{1}{BC}$. Iam $\dfrac{BG}{BC} \sqcap \dfrac{CE}{1}$. Ergo $\dfrac{BG}{\cancel{BC}} \sqcap \dfrac{CE}{BG \frown \cancel{BC}}$. Ergo $CE \sqcap \dfrac{BG^2}{1}$. Ergo

4 ex *(1)* datis abscissa et ordinata *(2)* data *L* 5 ex *(1)* datis aliis relationibus dentur relationes *(2)* data *L*

1 *Fig. 4*: Den von ihm zunächst mit N bezeichneten Schnittpunkt der Verlängerung von AC mit der Grundlinie hat Leibniz später gestrichen, ebenso die hier wiedergegebene Parallele zu AG durch L; im Bereich der unteren Hälfte dieser Linie ist die Handschrift schadhaft.

pro BG substituendo $\sqrt{CE}$, fiet $CE \sqcap \frac{\sqrt{CE}}{BC}$ sive $CE^2 \sqcap \frac{CE}{BC^2}$, sive $CE \sqcap \frac{1}{BC^2}$. Unde demonstratur crementa figurae propositae esse in ordinatarum ratione reciproca duplicata; at differentiae semiquadratorum ordinatarum ($\sqcap BG$) sunt in ordinatarum ratione reciproca ut initio dixi; videamus ergo an iunctis his duobus theorematis inter se, exitus haberi possit: Nimirum sunto duae ordinatae: BC, et $BC+CE$ sive BC et $BC+\frac{1}{BC^2}$[,] semiquadratum ab uno $\frac{BC^2}{2}$, semiquadratum ab altero $\frac{BC^2+2BC \frown \frac{1}{BC^2}+\frac{1}{BC^4}}{2}$, sive $\frac{BC^2}{2}+\frac{1}{BC}+\frac{1}{BC^4}$[,] crementum semiquadratorum $\frac{1}{BC}+\frac{1}{BC^4} \sqcap BG \sqcap \frac{1}{BC}$ absurdum. Foret enim $\frac{1}{BC^4} \sqcap 0$. Error ergo admissus inter calculandum. Satis tamen manifestum est his inter se iunctis theorematis non posse sic quidem exitum haberi, cum nondum calculum ingressa sit abscissa, ad quam tamen relatio ipsius BC quaeritur. Resumto calculo $BG \sqcap \frac{a^2}{BC}$ ex hypothesi deinde $\frac{BG}{BC} \sqcap \frac{CE}{ED \sqcap \beta}$. (Nam adicere $BG \sqcap \frac{BC^2+2BC \frown CE+CE^2}{2}$ inutile, satis enim video hic restitui debere quae in condendo eiusmodi theoremate negliguntur, quoties calculo ad infinite parva descenditur. Unde patet NB. non sufficere aliquando nosse theoremata ad calculum, nisi et eorum origo nota sit.) Nihil autem novi hinc deduci posse, sed aequationem sub finem fore identicam patet, quia alioqui tribus aequationibus duae ex incognitis tollerentur, tertiaque

1 $\frac{1}{\mathrm{BC}^2}$ *(1)* quod est id quod dixi crementa esse *(2)*. Unde *L* 4 ut initio dixi *erg. L*

5 ordinatae: *(1)* y. et *(a)* $\mathrm{y}+\beta$. *(b)* $\mathrm{y}+\gamma$. *(2)* BC *L* 11 hypothesi | deinde *erg.* | $\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{BC}} \sqcap \frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{ED} \sqcap \beta}$. *(1)* ac denique $\mathrm{BG} \sqcap \frac{\mathrm{BC}^2+2\mathrm{BC} \frown \mathrm{CE}+\mathrm{CE}^2-\mathrm{BC}^2}{2} \sqcap \frac{\mathrm{BC} \frown \mathrm{CE}+\mathrm{CE}^2}{2}$ quae duae posteriores aequationes sunt generales et locum habent in figura qualibet: Quod si ergo *(a)* quaeramus valorem ipsius *(b)* elidere velimus: BG et BC. restabit sola CE, itaque $\frac{\alpha^2}{\mathrm{BC}^2} \sqcap \frac{\mathrm{CE}}{\beta}$. item $\frac{\alpha^2}{\mathrm{BC}} \sqcap \mathrm{BC} \frown \mathrm{CE}, +\frac{\mathrm{CE}^2}{2}$. Ex priore fiet: *(2)* (Nam *L*

---

7 $+\frac{1}{BC^4}$: Richtig wäre $+\frac{1}{2BC^4}$; der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung nicht.

residua absolute explicari posset, neque esset indeterminata quod est absurdum: Cumque relatio ipsius BG ad ipsam AB quaeratur, iudicatu facile est, sic haberi non posse, cum AB non ingrediatur calculum. Tentandum ergo an aliqua arte effici possit, ut in calculum intret.

Nimirum ut AB ad BC, ita FA seu $FB - AB$ ad AH. Demonstratum est a me alibi summam omnium AH aequari segmento $ACDA$ duplicato. Ergo summa omnium HM aequatur spatio exteriori $AMCDA$, itaque si ad omnes HM addantur omnes $PH (\sqcap \frac{AH}{2})$ idem est ac si spatio $AMCDA$ adderetur segmentum $ACDA$ unde fiet triangulum AMC vel ABC seu semirectangulum sub abscissa et applicata. Igitur $PM \sqcap BC - \frac{AH}{2}$ ducta in $DE \sqcap \beta$, seu βPM, aequatur differentiae inter $\frac{AB \frown BC}{2}$, et $\frac{AB - DE, \frown BC - EC}{2}$ sive $\beta \frown PM \sqcap \frac{\boxed{AB \frown BC - AB \frown BC} - DE \frown BC, -AB \frown EC + DE \frown EC}{2}$. Iam $PM \sqcap BC - \frac{AH}{2}$. et $DE \sqcap \beta$. Ergo $2\beta BC - \beta AH \sqcap -\beta BC - AB \frown EC + \beta EC$, cumque $\beta \frown EC$ negligi possit, fiet: $-3\beta BC + \beta AH \sqcap AB \frown EC$. Est autem $\frac{AH}{FB - AB} \sqcap \frac{BC}{AB}$. sive $AH \sqcap \frac{BC, \frown FB - AB}{AB}$. et $FB \sqcap \frac{BC^2}{BG}$. Ergo $AH \sqcap \frac{BC}{AB}, \frown \frac{BC^2}{BG} - AB$. Idemque $AH \sqcap \frac{AB \frown EC + 3\beta BC}{\beta}$. fiet ergo aequatio inter $\frac{BC^3, -AB^2 \frown BG}{AB \frown BG}$ et $\frac{AB \frown EC + 3\beta BC}{\beta}$, sive inter: $BC^3\beta - AB^2, BG, \beta \sqcap AB^2, EC, BG + 3\beta BC, AB, BG$. Pro BG substituatur $\frac{a^2}{BC}$. fiet: $BC^3\beta - AB^2, \frac{a^2}{BC}, \beta \sqcap AB^2, EC, \frac{a^2}{BC} + 3\beta BC, AB, \frac{a^2}{BC}$ sive multiplicatis omnibus per BC fiet: $BC^4\beta - AB^2, a^2\beta \sqcap AB^2, EC, a^2 + 3\beta BC, AB, a^2$.

---

5 ut AB ad BC: Richtig wäre $FB : BC = FA : AH$; der Fehler tritt in Z. 13 wieder auf und beeinträchtigt zusammen mit weiteren Fehlern in Z. 11 (beim Ergebnis der Subtraktion sind die Vorzeichen vertauscht) u. Z. 15 (statt $BC^3 - AB^2 \cdot BG$ müßte $BC^3 - AB \cdot BC \cdot BG$ im Zähler des mittleren Bruches stehen) sowie in S. 567 Z. 4 (beim Term $-a^2y^3x$ fehlt der Faktor 3) u. S. 567 Z. 15 (im Nenner des Bruches fehlt der Term $+a^2y^3x$) die Überlegung bis S. 567 Z. 18. 5 Demonstratum est: vgl. u. a. *LQK*, prop. VII, S. 33–35; zur Entstehungsgeschichte des Transmutationssatzes im Anschluß an Cc 2, Nr. 545/6 vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926 S. 34–37 und die Erl. zu *Inventa aliquot mea geometrica*, [Sommer 1674], *LSB* III, 1 N. 29 S. 115.

Iam supra $CE \sqcap \frac{\beta BG}{BC}$ ergo $CE \sqcap \frac{\beta a^2}{BC^2}$. Unde inserendo hunc valorem fiet: $BC^6\beta - AB^2, a^2\beta, BC^2 \sqcap AB^2\beta a^4 + 3\beta BC^3 ABa^2$. Unde BC appellando y, et AB appellando x, fiet:

$y^6 - a^2y^3x - a^2y^2x^2 - a^4x^2 \sqcap 0$.

Ut facilius appareat an dividi possit, ordinetur secundum a, fiet:

$a^4 + \frac{y^3 + y^2x}{x}a^2 - \frac{y^6}{x^2}$.

Necesse est ergo dividi posse aut per $a^2 \mp \frac{y^4}{x^2}$, aut per $a^2 \mp \frac{y^3}{x}$. Sin ordinetur secundum y, necesse est si dividi potest dividi posse per $y^4 \mp a^2x^2$, vel $y^3 \mp a^2x$ vel denique si ordinatur secundum x, fiet: $x^2 \quad \frac{+y^3\cancel{a^2}}{\cancel{a^2}y^2 + a^{\cancel{4}2}}x \quad \frac{-y^6}{a^2y^2 + a^4}$ quo casu solus ex prioribus divisoribus tentandis restat: $x \mp \frac{y^3}{a^2}$. Multiplicetur per $x + b$. fiet: $x^2 \mp \frac{y^3}{a^2}x \mp \frac{y^3b}{a^2}$. Unde conferendo:
$+\,b$ ..
$b \sqcap \pm\frac{y^3}{y^2 + a^2}$ et fiet: $\frac{\mp\cancel{y^3}}{a^2} \pm \frac{\cancel{y^3}}{y^2 + a^2} \sqcap \frac{\cancel{y^3}}{y^2 + a^2}$, sive $\mp y^2 \boxed{\mp a^2 \pm a^2} \sqcap a^2$. Quod est absurdum. Ergo nullum habet aequatio inventa divisorem rationalem. Aequatione ergo ad tangentes ordinata fiet:

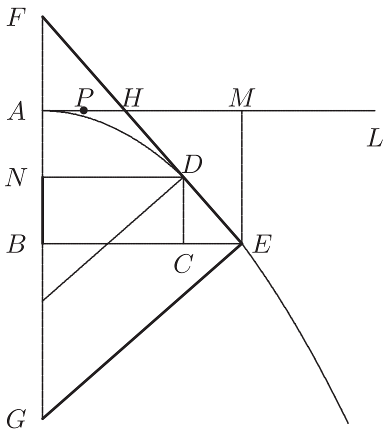
$$6y^6 - 3a^2xy^3 - 2a^2x^2y^2 \sqcap + \quad 2a^4xl + a^2y^3xl, \text{ et fiet : } l \sqcap \frac{6y^6 - 3a^2xy^3 - 2a^2x^2y^2}{2a^4x + 2a^2y^2x}.$$
$$+\,2a^2y^2..$$

Iam $l \sqcap \frac{y^4}{a^3}$ unde fieret $6y^4a - 3a^3xy - 2a^3x^2 \sqcap 2a^2xy^2 + 2y^4x$. quae aequatio eadem esse deberet cum superiore $y^6 - a^2y^3x - a^2y^2x^2 - a^4x^2 \sqcap 0$. quod cum sit absurdum, signum est calculi falsi. Ut tamen appareat an methodus ista valeat ad methodum tangentium

4 f. $\sqcap$ 0. *(1)* Dividatur per y^2 *(2)* Ut *L* 8 si dividi potest *erg. L* 9 secundum x, *(1)* necesse est dividi posse per *(2)* fiet: *L*

1 Iam supra: s. o. S. 565 Z. 11. 5 Ut facilius appareat: Das Verfahren zur leichteren Ermittlung der Wurzeln einer Gleichung durch wiederholtes Umordnen wird in *Schediasma de divisionibus*, dat. Dez. 1674 (*LSB* VII, 1 N. 143) aufgegriffen.

inversam; ideo aliud exemplum quaeram, in quo constat de solutione: Nimirum quaeramus figuram, in qua crementa ordinatis reciproce proportionalia; inventum est figuram esse parabolicam, sed investigandum hoc per eam qua nunc usus sum, analysin.



[*Fig. 5*]

$CE \sqcap \frac{a}{BE}\beta \cdot \frac{FB}{BE} \sqcap \frac{\beta}{CE} \sqcap \frac{\beta}{\frac{\alpha\beta}{BE}} \sqcap \frac{BE}{a}$. Ergo $FB \sqcap \frac{BE^2}{a}$. Iam $\underbrace{FB - AB}_{FA}$ ad $AH \sqcap FB$ ad BE. fiet: $\frac{BE^2}{a} - AB$ ad $AH \sqcap \frac{BE^2}{a}$ ad $BE \sqcap BE$ ad a, sive $AH \sqcap \dfrac{a, \frown \frac{BE^2}{a} - AB}{BE} \sqcap BE - \frac{ABa}{BE}$. Iam $2PM\beta \sqcap AB \frown BE,, -, BE - CE, \frown AB - \beta$ sive $\sqcap$ $\boxed{AB \frown BE - BE, AB} + BE\beta + CE, AB - CE\beta$, sive $2PM\beta \sqcap BE\beta + \frac{aAB\beta}{BE} - \boxed{\frac{a\beta^2}{BE}}$

1–3 *Dazu, später ergänzt:* $d\overline{y} \sqcap \frac{a}{y}$. Ergo $yd\overline{y} \sqcap a$. Ergo $y^2 \sqcap xa$. $\frac{y}{y+\beta} \sqcap$ [*bricht ab*]

---

2 inventum est: vgl. Cc 2, Nr. 832 (s. o. Erl. zu S. 555 Z. 20 f.).

sive $2PM$, $BE \sqcap BE^2 + aAB$. et $PM \sqcap \dfrac{BE^2 + aAB}{2BE}$. Iam $PM \sqcap \dfrac{2BE - AH}{2}$. et $AH \sqcap \dfrac{BE^2 - ABa}{BE}$ ergo $PM \sqcap \dfrac{2BE^2 - BE^2 + ABa}{2BE} \sqcap \dfrac{BE^2 + ABa}{2BE}$ quae aequatio identica est, et forte servire potest ad theorema nostrum non detecta origine demonstrandum. Sed ad methodum tangentium inversam nihil inde opis esse video saltem in hoc exemplo[,] an tamen in alio res procedere possit, non determino, quia scio esse aliquas methodos quae in parabola ob nimiam eius simplicitatem non procedant. Imo repetito brevius calculo superiore, vidi sic quoque rediri denique ad identitatem. Nam retenta figura novissima $BG \sqcap \dfrac{a^2}{BE}$. Iam $\dfrac{CE}{DC \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BG}{BE} \sqcap \dfrac{a^2}{BE^2}$ sive $CE \sqcap \dfrac{a^2\beta}{BE^2}$. Pone $ML \sqcap BE$. Constat ex superioribus summam omnium HL aequari rectangulo $ABEM$ (quia omnes HM aequantur figurae $AMEDA$ et omnes ML seu BE, figurae $ABEDA$). Ergo $HL \sqcap BE + HM \sqcap$ differentiae inter $BE \frown AB$, et BC vel $[ND] \frown AN$. Est autem $\dfrac{HM}{EM \sqcap x \sqcap AB} \sqcap \dfrac{BE}{FB} \sqcap \dfrac{BG}{BE} \sqcap \dfrac{a^2}{BE^2}$. Ergo $HM \sqcap \dfrac{a^2x}{BE^2}$ ergo $BE\beta + \boxed{HM\beta} \sqcap BEx$ demto $BE - \dfrac{a^2\beta}{BE^2}$,

$$\frac{a^2x\beta}{BE^2}$$

$\frown x - \beta$ seu demto $BEx - \dfrac{a^2\beta}{BE^2}x - BE\beta + \boxed{\dfrac{a^2\beta^2}{BE^2}}$. Ergo fiet $BE\beta + \dfrac{a^2x\beta}{BE^2} \sqcap \boxed{BEx - BEx} + \dfrac{a^2\beta x}{BE^2} + BE\beta$ quae aequatio identica est signum elegans veritatis theorematum quibus usi sumus; sed nihil inde novi duci potest. Habet problema propositum illud praeterea difficillimum ut ne quidem ad aequationem quatuor incognitarum quae determinatione duplici ad duas radices aequales reducatur ad duas denique indeterminatas, resolvi possit. Una ergo superest via tentanda, quam nunc exponam.

3 est, *(1)* neque inde quicquam duci posse putem, *(2)* et *L* 4 f. an *(1)* forte *(2)* tamen *L* 6 procedant. *(1)* Sed *(2)* Tamen *(3)* Imo *L* 9 f. HM | aequantur *streicht Hrsg.* | aequantur *L* 11 BD *L ändert Hrsg.* 16 Habet *(1)* hoc theorema *(2)* problema *L* 17 aequationem *(1)* trium *(2)* quatuor *L* 18 duplici *erg. L*

6 f. calculo superiore: s. o. S. 565 Z. 11.

⟨In⟩ problemate proposito quaeritur figura, cuius ordinatis appellatis y. productae sint $\dfrac{y^3}{a^2}$. An autem possibile sit figuram analyticam reperiri quae satisfaciat, ita indagabimus: Sumamus aequationem generalem, quae in infinitum continuata comprehendat figuras analyticas possibiles omnes; continuemus nunc quidem usque ad 4$^{\text{tum}}$ gradum, ut sit:

$bx^4 + cx^3y + dx^2y^2 + exy^3 + fy^4 + agx^3 + ahx^2y + akxy^2 + aly^3 + a^2mx^2 + a^2nxy + a^2py^2 + a^3qx + a^3ry + a^4s \sqcap 0.$

et ordinando ad tangentes fiet:

$$\begin{array}{llllcllll}
4bx^3t+ & 3cyx^2t+ & 2dy^2xt+ & ey^3t & \sqcap & -4fy^4- & 3ex\ \ y^3- & 2dx^2y^2- & cx^3y \\
 & +\ 3ag\ldots+ & 2ahy\ ..+ & aky^2. & & & -3al\ \ldots & -2akx\ ..- & ahx^2\ . \\
 & & +2a^2m\ ..+ & a^2ny\ . & & & & -2a^2p\ ..- & a^2nx\ . \\
 & & & & & & & - & a^3r\ .
\end{array}$$

$$\text{eritque } t \sqcap \frac{y^3}{a^2} \sqcap \begin{array}{llll}
-4fy^4-3ex\ y^3- & 2dx^2y^2- & cx^3y \\
-3al\ldots- & 2akx\ ..- & ahx^2\ . \\
 & -\,2a^2p\ ..- & a^2nx\ . \\
 & - & a^3r\ .
\end{array} \smile \begin{array}{lll}
4bx^3+3cyx^2+ & 2dy^2x+ & ey^3 \\
+3ag..+ & 2ahy\ .+ & aky^2 \\
 & +2a^2m\ .+ & a^2ny
\end{array}$$

quae aequatio reducta eadem esse debet cum prima. Quodsi fieri non potest, ut singulis terminis cum singulis comparatis et literis quibusdam destructis, ut similes reddantur aequationes potest per multa examina iudicari. Tunc sequitur figuram quaesitam neque primi neque secundi neque tertii neque quarti gradus esse posse. Si t. ponatur $\sqcap$ $\dfrac{y^2}{a}$. non difficulter invenietur figuram esse parabolam. Sed si sit $\dfrac{y^3}{a^2}$. omnia difficiliora. Duo hic inquirenda sunt, primum an compendiose definiri queant figurae aptae si quae sunt, ne

1 f. productae *(1)* sint axis *(2)* sint *L* 2 figuram *(1)* geometricam *(2)* analyticam *L* 5 f. sit: *(1)* $\mathrm{ax^4 + bx^3y + cx^2y^2 + rdx^3 + rex^2y + rfxy^2 + r^2gx^2 + r^2hxy + r^2ky^2 + r^3lx + r^3my + r^4n \sqcap 0.}$ | Unde ordinando ad productam axis x, fiet: *streicht Hrsg.* | $\begin{array}{llll} \mathrm{4ax^3p+} & \mathrm{3byx^2p+} & \mathrm{2cy^2xp+} & \mathrm{rfy^2p} \\ & \mathrm{+\,3rd\ \ldots+} & \mathrm{2rey\ ..+} & \mathrm{r^2hy.} \\ & & \mathrm{+\,2r^2g\ ..+} & \mathrm{r^31\ .} \end{array}$ *(2)* $\mathrm{bx^4 + cx^3y + dx^2y^2 + exy^3, +afx^3 + agx^2y + ahxy^2, +}$ *(3)* $\mathrm{bx^4}$ *L* 13+17 $+\mathrm{ey^3}$ *(1)* et multiplicando per crucem *(2)* quae *L* 19 figuram *(1)* datam *(2)* quaesitam *L* 20 posse. *(1)* Et videnda hic *(2)* Si *L* 21 omnia | paulo *gestr.* | difficiliora. *(1)* Quod *(2)* Duo *L*

nimis multis opus sit examinibus; deinde an ratione quadam certa diudicari possit; si in his gradibus res non procedit, processura sit in altioribus. Interim in iis fateor exemplis, in quibus methodus tangentium inversa per determinationem formulae propositae ad duas radices aequales absolvi potest, exitus citius invenitur; neque tentando.

Rem autem quia calculi est prolixioris alibi absolvemus: Quid vero si constet nullam figuram analyticam succedere, et quaestio sit an non aliqua geometrica transcendens inveniri possit, quemadmodum aliqua ex trochoeidum genere aut volutarum, aut helicum.

Habemus aut habere possum indices ac velut formulas omnium figurarum geometricarum, quaerendum an possibile sit formulas quasdam quasi analyticas dare figurarum transcendentium.

Quod duplici modo fieri potest, uno breviore sed minus perfecto; altero tam prolixo sed tam perfecte analytico quam possibile est arte humana. Modo minus perfecto, dum praeter duas indeterminatas x. et y. tertia adhibetur portio scilicet quaedam curvae in rectam si placet extensae, quae appelletur ω.

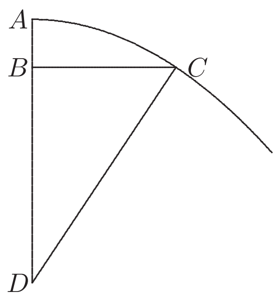
Ita analytice cycloeides, trochoeides, aliaeque figurae explicari possunt. Potest et fieri ut plures una curvae adhibeantur, ad quarum portiones referenda sit curva proposita; eaeque erunt aut a se invicem independentes; aut dependebunt a se invicem; et vel analytice vel semianalytice per methodum scilicet tangentium inversam, perfectam aut imperfectam. Quodsi analytice a se invicem dependent duae curvae ad unam ω reduci possunt sin semianalytice reducentur quidem omnia ad unam curvam, sed si methodus tangentium inversa est perfecta accedet alia adhuc recta incognita quae eliminari posset, si posset determinari aequatio ad duas aequales radices geminate. Sed si per gradus methodo cuius hic et alibi specimen dedi res sit resolvenda; tunc fateor omnia ad unam curvam reduci non poterunt.

Quod si iam illam ipsam quoque curvam elidere velimus; tunc designatio adhibebitur tam perfecta quam fieri potest. Nimirum per methodum tangentium inversam perfectam

3 per *(1)* aequationes *(2)* determinationem *L* 4 f. tentando. *(1)* Quodsi iam *(2)* Rem *L* 7 f. helicum. *(1)* Tunc scilicet praeter duas incognitas *(2)* Ut ergo *(3)* Habemus *L* 9 sit *(1)* addere indices form *(2)* formulas *L* 20 semianalytice *(1)* possunt *(2)* reducentur *L* 22 duas *(1)* rectas *(2)* aequales *L* 25 velimus; *(1)* accedet rect *(2)* tunc *L*

5 alibi absolvemus: vgl. *De methodo tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium* (Cc 2, Nr. 839). 23 alibi specimen dedi: vgl. Cc 2, Nr. 823 und 824.

inquiretur in eius curvae longitudinem; et ita habebitur aequatio duarum incognitarum capitalium, sed unius duarumque praeterea intervenientium, eliminandarum determinatione ad duas radices aequales.



[*Fig. 6*]

Exemplo utamur cycloeidis: Esto curva cuius ordinata $\sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Eius quaeritur quadratura id est quaeritur curva AC, cuius [reducta] $BD \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Erit $\dfrac{a^4}{a^2-x^2} + y^2 \sqcap s^2$. appellando $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $BD \sqcap \dfrac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$. et $CD \sqcap s$. Fiet aequatio: $a^4 + a^2y^2 - x^2y^2 \sqcap a^2s^2 - s^2x^2$. in qua aequatione tam x. quam y. duas habent radices aequales. Inventa y. erit arcubus circuli seu elementis cycloeidis (demtis sinubus) respondentibus proportionalis. Cum autem impossibile sit invenire figuram analyticam circuli quadratricem, ut alibi demonstravi, ideo nec poterit solvi hoc problema per determinationem ad duas radices aequales. Tantum ergo ipsis x. et y. signum adscribendum est quo significetur habere tam unam quam alteram duos valores aequales; et ita analytice quantum possibile est expressa est aequatione figura circuli quadratrix, homogenea arcubus, geometrica sed non perfecte analytica. Rectius forte ipsi s. circumdabitur signum, quo intelligatur esse minimam seu proinde ea conditione accedente debere eliminari et fiet: $a^4 + a^2y^2 - x^2y^2 \sqcap a^2 s^2 - x^2 s^2$.

1 aequatio *(1)* trium et quat *(2)* duarum *L* 5 utamur *(1)* in cissoeide: *(2)* cycloeidis: *L* 6 cuius *(1)* ordinatae *(2)* | reductae *ändert Hrsg.* | BD *L* 10 analyticam *erg. L*

11 ut alibi demonstravi: vgl. u. a. Cc 2, Nr. 1102, zweite Propositio und *LQK*, prop. LI S. 127 f.

Ipsius autem y. quadratorum dimidiatorum figura erit perfecte arcuum circuli summatrix, ergo pro $\frac{y^2}{2}$. ponamus za. fiet $y^2 \sqcap 2za$. et fiet: $a^4 + 2a^3z - 2x^2az \sqcap a^2\, s^2 - x^2\, s^2$. et figura omnium z. erit arcuum summatrix. Et $z \sqcap \frac{a^2\, s^2 - x^2\, s^2 - a^4}{2a^3 - 2ax^2}$. cui si addatur $\sqrt{a^2 - x^2}$. sinus circuli, ponendo scilicet n. elementum cycloeidis valere $z + \sqrt{a^2 - x^2}$, tunc inquam fiet:

$n \sqcap \frac{a^2\, s^2 - x^2\, s^2 - a^4 + 2a^3\sqrt{a^2 - x^2} - 2ax^2\sqrt{a^2 - x^2}}{2a^3 - 2ax^2}$. in qua aequatione tam x. quam n. duos habent valores aequales: Idque ob s. duplicato circulo inclusam subintelligendo perfecta quantumlicet habebitur designatio cycloeidis per analysin. Quod si iam cycloeidis perpendiculares quaerantur; videndum est, an per analysin istam eae possint haberi, quemadmodum inveniuntur facile per geometriam, tunc autem determinanda sunt omnia ad tres radices aequales, ut ex calculo patet, facta scilicet inquisitione in tangentes Cartesii more per duas radices aequales. Quod an succedat, et an hoc omnia de cycloeide praestari possint quae per geometriam communem; (et per consequens multa alia) vicissim an alia problemata constructu difficilia difficultatesque id genus reduci possint ad cycloeidem; videndum est et quod ad novissimum attinet, analysis ostendit viam. Nam ipsa s. velut tertia indeterminata cogitanda est, et locus ad cycloeidem erit velut locus ad superficiem seu tres indeterminatas. Igitur formulis trium incognitarum explicabuntur curvae transcendentes, instar superficierum. Sed restant facienda; nimirum (1) eligendum quando illae formulae pendent ex curvae in rectum extensione, potius quam ex quadratura, (2) videndum an et quando quadraturae et alia talia problemata reduci possint ad curvarum in rectum extensiones, (3) videndum an et quibus modis difficultas reduci possit ad seriem numerorum rationalium; seu quando figurae datae quadrandae alia exhiberi possit analytica rationalis aequivalens, (4) an hoc modo per summas numerorum rationa-

1 f. arcuum *(1)* quadratrix *(2)* summatrix *L* 4 circuli, *(1)* tunc perfecte fiet: ae *(2)* ponendo *L* 8 quantumlicet *erg. L* 11 patet, *(1)* nova scilicet adhibita incognita *(2)* facta *L* 17 indeterminatas. *(1)* Videndum ergo an ex formulis istis ad *(2)* Igitur *L* 20 an et *erg. L* 23 possit *(1)* geometrica *(2)* analytica *L*

12 Cartesii more: vgl. R. Descartes, *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 40–50 [Marg.] (vgl. *DO* VI S. 413–424).

lium semper problemata ista solvi possint, etsi non constructionibus generalibus, (5) an difficultas quadraturae semper reduci possit ad simplicissimae quadraturam figurae, vel simplicissimae curvae in rectum extensionem, (6) exemplo logarithmorum inquirendum quomodo figurae transcendentes non replicatae ((quae methodo mea ex methodo tangentium [inversa] (sed plerumque imperfecta,) pendent,)) sed gradu aequationis continue variantes ad figuras geometricas sive etiam analyticas quadrandas possint reduci cum et figura angulorum possit in exemplum valere.

5 inversa *erg. Hrsg.*

40. SERIERUM SUMMA PER DIFFERENTIARUM MOMENTA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 223–224. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift erg. Text zweispaltig.
Cc 2, Nr. 776

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 40 ist vermutlich nach N. 38 entstanden, zu dem es außer den thematisch bedingten Korrespondenzen auch konkrete Verbindungen gibt: Von den Figuren *A*–*C* auf S. 584 f. wird nur die fig. *C* im Text behandelt; die funktionslose fig. *A* ist wohl eine Übernahme der Fig. 1 von N. 38_6 S. 423. Auf S. 583 Z. 8 f. äußert sich Leibniz zur Zerlegung der Polynome $y^3 + y^2 + 1$ bzw. $y^3 - y^2 + y - 1$; ähnliche Bemerkungen finden sich auch in N. 38_2 S. 391 Z. 13 f. u. N. 38_{10} S. 465 Z. 16 – S. 466 Z. 2, wo Leibniz die zugehörigen Rechnungen durchführt.

Serierum summa per differentiarum momenta

(1)	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{6}$	
(2)		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{30}$		
(3)		1		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{15}$		
(4)	$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{16}$		$\frac{1}{25}$		$\frac{1}{36}$	
(5)		$\frac{3}{4}$		$\frac{5}{36}$		$\frac{7}{144}$		$\frac{9}{400}$		$\frac{11}{900}$		addatur
(6)		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{36}$		$\frac{1}{144}$		$\frac{1}{400}$		$\frac{1}{900}$		fiet
(7)		1		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{18}$		$\frac{1}{40}$		$\frac{1}{75}$.		

---

20 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{rll} \cancel{2}6 & & \\ \cancel{9}\cancel{0}0 & ⨍ & 75 \\ \cancel{1}\cancel{2}2 & & \\ 1 & & \end{array}$$

A 5. auferatur 6. fiet:

$$\begin{array}{llllllllllll}
(8) & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{24} & & & \frac{1}{50} & & \frac{1}{90} \\
 & & & \frac{7}{18} & & \frac{15}{216} & & \frac{26}{1200} & & & \frac{40}{4500}. & \text{Repetatur 3.} \\
 & & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} \\
(9) & & & \frac{2}{3} & & \frac{3}{18} & & \frac{4}{60} & & & \frac{5}{150} & \\
(10) & & & \frac{2}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{15} & & & \frac{1}{30} & \\
(11) & 0 & \frac{1}{3} & & \frac{1}{9} & & \frac{1}{15} & & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{35} \\
(12) & \frac{1}{3} & & \frac{6}{27}\Big|\frac{2}{9} & & \left[\frac{6}{135}\right] & & \frac{9}{360}\Big|\frac{3}{120}. & \text{Confer 12. et 9.} & & &
\end{array}$$

---

14 *Nebenrechnungen zur Lesart zu Z. 7:*

Nicht gestrichen:	*Gestrichen:*	*Nicht gestrichen:*
$\begin{array}{r} 150 \\ \underline{15} \\ 139\,[!] \end{array}$	$\frac{6}{139}\Big\vert$	$\dfrac{6}{9 \frown 15 \sqcap 135}$

7 (11) *(1)* $\begin{array}{cccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{9} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} \\ \frac{4}{3} & \frac{12}{27}\Big|\frac{4}{9} & \frac{6}{135}\,\textit{(!)} & & & \end{array}$ *(2)* 0 *L* 8 $\frac{6}{27}\Big|\frac{2}{9}$ | $\frac{6}{135}$ *erg. Hrsg.* | *(1)* $\frac{6}{144}\Big|\frac{2}{72}$ *(!)* *(2)* $\frac{9}{360}\Big|\frac{3}{120}$ *L*

---

7 $\frac{1}{9}$: Richtig wäre $\frac{1}{8}$. Leibniz rechnet zunächst konsequent weiter; den angekündigten Vergleich der Differenzenfolgen (12) und (9) führt er jedoch nicht durch, sondern schreibt die Folgen (11) mit dem falschen Wert $\frac{1}{9}$ und (3) an und bildet die Summenfolge von (3). S. 577 Z. 13 schreibt er die Folge (11) zunächst wieder mit dem falschen Wert an, verbessert dann aber in $\frac{1}{8}$.

$$\begin{array}{lcccccccccccccccc}
 & \frac{1}{3} & . & \frac{1}{9} & . & \frac{1}{15} & . & \frac{1}{24} & . & \frac{1}{35} & . & \frac{1}{63} & . & \frac{1}{80} & . & \frac{1}{99} \\
 & \frac{1}{1} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} & & & & & & \\
(13) & \frac{4}{3} & & \frac{9}{18}\Big|\frac{1}{2} & & \frac{16}{60}\Big|\frac{4}{15} & & \frac{25}{150}\Big|\frac{5}{30}\Big|\frac{1}{6} & & & & & & & &
\end{array}$$

Sit 6. in distantias a vertice fiet

$$(14)\quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{48} \quad \frac{1}{100} \quad \frac{1}{150} \quad \text{quae incipit}$$

ut dimidia 8. sed non continuat.

Si 7. multiplicetur in distantias a vertice, fiet 3. quod significat summam summarum huius seriei 7, aequari summae seriei ③.

Eodem modo si ⑧. multiplices per distantias a vertice unitate auctas seu per numeros 2. 3. 4. 5. fiet iterum series ③. Hinc ex serie ⑧ et ⑭. iunctis habetur series ④. At eadem habetur ex sola serie ⑭. per marginalia notata NB. NB. Ergo ex sola serie ⑧. etiam habetur ④.

$$\begin{array}{cccccc}
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35}, \\
\text{ab} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \frac{1}{21}
\end{array}$$

---

5 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{lll}
\cancel{3} & & \\
\cancel{9}\cancel{0}0 & ⨍ & 150 \\
\cancel{6}\cancel{6}6 & &
\end{array}$$

11 NB. NB. Nam ⑦ − ⑥ $\sqcap$ ⑤ et ⑦x − ⑥x $\sqcap$ ⑤x. x $\sqcap$ 1. vel 2. vel 3. seu distantiae a vertice. Iam ⑤x dato datur ④. Ergo datis ⑦x et ⑥x dabitur ④. Datur autem ⑦x nam $\sqcap$ ③. Et datur ③ ut constat. Superest ergo ⑥x quam nondum habeo. Et quae adeo pendet ex ④x.

6 ut *(1)* dupla *(2)* dimidia *L* 9 unitate *(1)* minutas, seu per *(2)* auctas *L* 10–12 Hinc ... habetur ④ *erg. L* 13 $\frac{1}{3}$ *(1)* $\frac{1}{9}$ *(2)* $\frac{1}{8}$ *L*

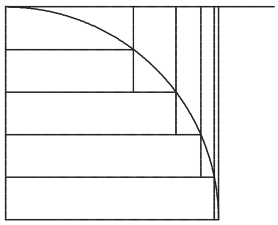
---

5 $\frac{1}{150}$: Leibniz rechnet $6 \cdot \frac{1}{900}$ statt $5 \cdot \frac{1}{900}$ und verfehlt so die Identifizierung $(14) = \frac{1}{2}\,(8)$.

$$[(15)]\quad 0\qquad \frac{1}{24}\qquad \frac{1}{30}\qquad \frac{1}{40}\qquad \frac{[2]}{105},\ \text{ducatur in distantias, fiet}$$
$$\frac{1}{12}\qquad \frac{1}{10}\qquad \frac{1}{[10]}\qquad \frac{[2]}{21}.$$

Hac methodo saepissime invenimus summam figurae quae datae seriei summas continenti sit aequivalens.

Hinc sequitur, quotiescunque serie in numeros naturales ducta figuram reperimus summabilem, videndum an data summa haberi possit.



[*Fig. 1*]

Differentiae cuiuslibet figurae ductae in numeros naturales seu intervalla a vertice, aequantur figurae complemento. Ideoque si proposita quadam serie in numeros naturales ducta productum quadrari seu summari potest et summa illa a parallelogrammo isopar-

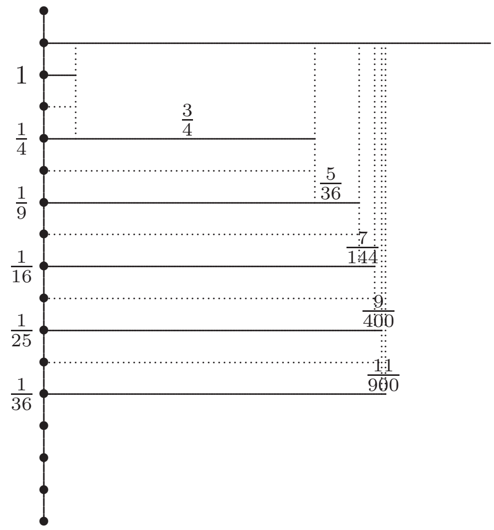
1 *Nebenrechnungen*:

$$\frac{5}{150}\Big|\frac{1}{30}\qquad \begin{array}{rrr} 9 & 15 & 12 \\ & \underline{24} & \underline{30} \\ & & 360 \end{array}\qquad \frac{9}{360}\Big|\frac{1}{40}$$

6 *Nach* possit: Imo male.

577,14–578,3 $\frac{1}{21}$ | (14) *ändert Hrsg.* | 0 *(1)* $\frac{1}{27}$ $\frac{5}{15}$ *(2)* $\frac{1}{24}$ ... $\frac{1}{40}$ | $\frac{1}{105}$ *ändert Hrsg.* |, ducatur ... fiet *(a)* (25) *(b)* | 25 *streicht Hrsg.* | $\frac{1}{12}$ $\frac{1}{10}$ | $\frac{1}{20}$ $\frac{1}{21}$ *ändert Hrsg.* |. Hac *L* 3 invenimus *(1)* figuram *(2)* summam *L* 9 Ideoque *(1)* differentiae *(2)* si *L* 10 quadrari *(1)* potest habetur summa *(2)* seu *L* 12 *(1)* $\frac{5}{15}\Big|\frac{1}{3}$ *(2)* $\frac{5}{150}\Big|\frac{1}{30}$ *L* allelo subtrahatur, residuum erit summa figurae quae ex datae componitur summis; seu residuum erit summa summarum figurae datae.

Hinc porro si datae figurae differentiae, in intervalla ductae quadrari possunt, etiam figura quadrari potest.



[*Fig. 2*]

Hinc cum seriei $\quad 0 \quad 1 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{36}$ etc.

differentiae sint $\quad 1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{7}{144} \quad \frac{9}{400} \quad \frac{11}{900}$ etc.

cogitentur diametro quidem applicari per numeros impares.

Area figurae erit: $1 \ \frac{2}{4} \ \frac{2}{9} \ \frac{2}{16}$ etc. Sed si intervalla negligas, et applicata ponas ad 1. 2. 3. 4. 5. non ad 1. 3. 5. 7. area figurae erit $1. \ \frac{1}{4}. \ \frac{1}{9}. \ \frac{1}{16}.$ Porro differentiae in distantias 1. 2. 3. 4. etc. ductae dabunt:

6 cum *(1)* figurae *(2)* seriei *L*

$$1 \quad \frac{3}{2} \quad \frac{5}{12} \quad \frac{7}{36} \quad \frac{9}{80}.$$ Illius summa reperta, etiam summa $1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.$ haberi potest. Ut autem summa posterioris quaeratur, auferatur inde [dimidia] progressio 7. seu

$$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{12} \quad \frac{1}{36} \quad \frac{1}{80}, \quad \text{fiet:}$$

$$0 \quad 1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \text{etc. quae summa haberi potest,}$$

ergo ad summam omnium $1.\ \frac{1}{4}.\ \frac{1}{9}.$ etc. habendam, opus est hac summa quae supra notata num. 7, scilicet:

$$1 \quad \frac{1}{16} \quad \frac{1}{18} \quad \frac{1}{40} \quad \frac{1}{75} \quad \text{quae rursus multiplicata per:}$$

$$1. \quad 2. \quad 3. \quad 4. \quad \text{etc.} \quad \text{dabit:}$$

$$1 \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{10} \quad \frac{1}{15}, \quad \text{ergo eius habetur momentum}$$

ex vertice.

Quadrata numerorum naturalium ducta in differentias dant duplum momentum a vertice complementi figurae datae. Ita:

$$1 \quad \frac{3}{4} \quad \frac{5}{36} \quad \frac{7}{144} \quad \frac{9}{400}, \quad \text{ducta in}$$

$$1 \quad 4 \quad 9 \quad 16 \quad 25 \quad \text{dant:}$$

$$1 \quad 3 \quad \frac{5}{4} \quad \frac{7}{[9]} \quad \frac{9}{16}.$$

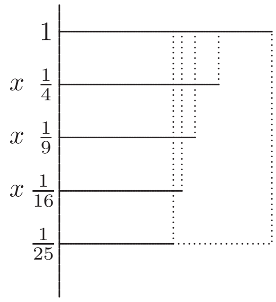
Ad habendum momentum seriei a vertice, ducendi sunt eius termini in numeros naturales. Unde

2–4 inde | *(1)* summa num. 3 *(2)* | dupla *ändert Hrsg.* | progressio 7. seu *erg.* | 1 *L* 8 $\frac{1}{40}$ *(1)* etc. *(2)* $\frac{1}{75}$ *L* 10 ergo *(1)* haec summa, $1\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{18}\ \frac{1}{40}$ *(a)* etc. *(b)* $\frac{1}{75}$. Hinc etiam summa num. 6. $\frac{1}{4}\ \frac{1}{36}\ \frac{1}{144}\ \frac{1}{36}$ *(!)* seu quadrata | fractionum *erg.* | triangularium haberi possunt *(2)* eius *L* 12 f. dant | duplum *erg.* | momentum *(1)* figurae a vertice, ut de *(2)* a vertice *L* 16 f. $\frac{5}{4}$ | $\frac{7}{6}$ *ändert Hrsg.* | $\frac{9}{16}$. *(1)* Si series quaedam in numer *(2)* Ad *L* 17 vertice *(1)* habetur *(2)*, *(a)* ducendae *(b)* ducendi *L*

$$1 \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{16} \qquad \frac{1}{25}, \qquad \text{dabit:}$$

$$1 \qquad \frac{1}{2} \qquad \frac{1}{3} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{5}. \qquad \text{Quare momentum a vertice}$$

integrae progressionis haberi non potest. Idem momentum a vertice aliter haberi potest, ducantur differentiae figurae in numerorum naturalium quadrata, productum erit duplum momenti a vertice, complementi figurae, quare si dimidium eius a prismate isoparallelo auferatur, restabit momentum figurae, et contra momento figurae reperto habetur et summa ipsorum productorum. Momentum figurae ex axe, habetur unica tantum via, per quadrata scilicet terminorum:



[*Fig. 3*]

Videndum est an ex figura proposita alia fieri possit regularis basi quoque in partes aequales secta certisque accessionibus et diminutionibus; quod statim ostendit aequatio:

Nam $\dfrac{a^3}{x^2} \sqcap y$. Ergo $a\sqrt{\dfrac{a}{y}} \sqcap x$. Sed vereor ut hoc in numeris serviat.

Porro quoniam ad summam quadratorum omnium fractionum habendam, sufficit haberi momentum fractionum triangularium, patet centrum gravitatis triangularium de-

2 momentum *(1)* eius *(2)* a vertice *L* 4 in *(1)* numeros na *(2)* numerorum naturalium quadrata, *(a)* habetur etiam resi *(b)* productum erit *(aa)* dupli *(bb)* duplum *L* 5 eius *(1)* ab altitudinis *(2)* a prismate *L* 10 possit *(1)* rationalis *(2)* regularis *L* 14–582,1 desiderari *(1)* Invento centro gravitatis habetur area figurae, modo et detur mo *(2)* Invento ... dividatur *(a)* figura *(b)* momentum *(aa)* ex *(bb)* per *L*

14 centrum gravitatis triangularium: Der gesuchte Schwerpunkt existiert nur für endliche Partialfolgen, so daß die weiteren Folgerungen bis S. 582 Z. 13 nur für solche Folgen gelten.

siderari. Invento centro gravitatis dividatur momentum per distantiam, et habebitur area figurae.

Data summa quadratorum fractionum naturalium, datur et triangularium et contra.

(1) $\dfrac{1}{y} - \dfrac{1}{1+y} \sqcap$ (2) $\dfrac{y+1-y}{y^2+y} \sqcap \dfrac{1}{y^2+y}$.

(3) $\dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+2y+1} \sqcap$ (4) $\dfrac{\boxed{y^2}+2y+1\boxed{-y^2}}{y^4+2y^3+y^2}$ sive

(5) $\dfrac{y+1}{y^4+2y^3+y^2} + \dfrac{y}{[y^2, \frown\,]\; y^2+2y+1}$ sive (6) $\dfrac{1}{y^3+y^2} + \dfrac{y}{y^4+2y^3+y^2}$ sive

(7) $\dfrac{1}{y^3+y^2} + \dfrac{1}{y^3+[2y^2+y]}$. Ergo habetur summa, nempe

(8) $\dfrac{1}{y+1, \frown\, y^2} + \dfrac{1}{[y+1, \square, \frown\, y]}$. Idem aliter resolvi potest, in

(9) $\dfrac{2}{y^3+2y^2+y} + \dfrac{1}{y^4+2y^3+y^2}$.

Si facias ab initio (10) $\dfrac{1}{y^2-2y+1} - \dfrac{1}{y^2}$ fiet: (11) $\dfrac{+2y-1}{y^2-2y+1, \frown\, y^2}$, quod rursus in duo resolvi potest: (12) $\dfrac{1}{y-1, \frown\, y^2} + \dfrac{1}{y^2-2y+1, \frown\, y}$, vel in (13) $\dfrac{2}{y^2-2y+1, \frown\, y} - \dfrac{1}{y^2-2y+1, \frown\, y^2}$.

Quare si unius ex partibus 8 et 9 haberi potest summa, etiam alterius haberi poterit.

(14) $\dfrac{1}{y^2+1} - \dfrac{1}{y^2+2y+2} \sqcap \dfrac{\boxed{y^2}+2y+2\boxed{-y^2}-1}{y^2+1, \frown\, y^2+2y+2} \sqcap$ (15) $\dfrac{2y+1}{y^2+1, \frown\, y^2+2y+2}$, summabilis. Dissolvatur, in

6 $y^2, \frown$ *erg. Hrsg.* 7 (7) $\dfrac{1}{y^3+y^2}$ + | $\dfrac{1}{y^3+2y^2+y}$ ändert *Hrsg.* |. *(1)* Horum ergo duorum *(2)* Ergo *L* 8 (8) $\dfrac{1}{y+1, \frown\, y^2}$ + | $\dfrac{1}{y^2+1, \square, \frown\, y^2}$ ändert *Hrsg.* |. *(1)* Fiat $\dfrac{1}{y^2-2y+1} - \dfrac{1}{y^2}$, habebimus eodem modo $\dfrac{\boxed{y^2}\boxed{-y^2}+2y-1}{y^2-y, \square}$, fiet: $\dfrac{2}{y^3-2y^2+y}$ *(2)* Idem *L*

15 Dissolvatur: Die folgende Zerlegung ist nicht zulässig.

[(16)] $\dfrac{y}{y^2+1, y^2+2y+2}$ $\boxed{+\dfrac{y+1}{y^2+1,\frown \llcorner y+1, \square \lrcorner}}$ $+\dfrac{1}{y^2+1,\frown y+1}$, sive

[(17)] $\dfrac{y}{y^2+1, y^2+2y+2}$ $+\dfrac{1}{y^3+y^2+y+1}$.

Aliter:

[(18)] $\dfrac{1}{y^2-2y+2} - \dfrac{1}{y^2+1}$ sive [(19)] $\dfrac{\boxed{y^2}\boxed{+1}\boxed{-y^2}+2y-\overset{1}{\boxed{2}}}{y^2-2y+2,\frown y^2+1}$, unde

[(20)] $\dfrac{2y-1}{y^2-2y+2,\frown y^2+1}$, quae quantitas dissolvi potest in has duas:

[(21)] $\dfrac{y}{y^2-2y+2,\frown y^2+1} - \dfrac{1}{y-1,\frown y^2+1}$, sive $\dfrac{y}{y^2-2y+2,\frown y^2+1} - \dfrac{1}{y^3-y^2+y-1}$.

Hinc patet ut obiter dicam quantitatem hanc y^3+y^2+y+1 vel y^3-y^2+y-1 duos habere divisores: Prior enim fit ex $y^2+1,\frown y+1$ posterior fit ex $y^2[+]1,\frown y-1$.

$\dfrac{a^2y}{a^2+y^2}$ pendet ex quadratura hyperbolae, demonstrari potest, ex serie eius quadratrice per regressum.

Nam est $\dfrac{y-y^3+y^5-y^7}{\frac{b^2}{2}-\frac{b^4}{4}+\frac{b^6}{6}-\frac{b^8}{8}}$ etc. Unde $\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{8}$ at hyperbolae numerus quadrator est: $\dfrac{1}{1}-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{4}$. Patet ergo duplicatam esse hyperbolam figurae propositae. Attamen fatendum est ope collationis numerorum vel serierum quadratricium, non

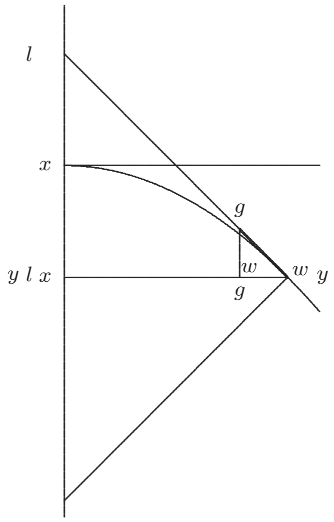
1–6 *Zählung* (15) ... (20) *L ändert Hrsg.* 3 f. Aliter: *(1)* $\dfrac{1}{y^2}-\dfrac{1}{y^2-2y+1}$ *(2)* $\dfrac{1}{y^2-2y+1}-\dfrac{1}{y^2}$ $\sqcap$ y^2-y^2+2y-1 *(3)* | (17) *ändert Hrsg.* | $\dfrac{1}{y^2-2y+2}$ *L* 9 – *L ändert Hrsg.* 10 potest, ex *(1)* numero eius *(a)* characteri *(b)* quadratoris *(2)* serie *L* 14 numerorum | quadratorum *gestr.* | vel *L*

5 dissolvi potest: Die folgende Zerlegung ist nicht zulässig. 8 Hinc patet: Ähnliche Aussagen in N. 38_2 S. 391 Z. 13 f. u. N. 38_{10} S. 465 Z. 16 – S. 466 Z. 2.

nisi totorum, at non et portionum respondentium collationes institui: Indicio sunt tamen. At geometria ostendit etiam $\dfrac{b^2}{2} - \dfrac{b^4}{4} - \dfrac{b^6}{6} - \dfrac{b^8}{8}$ inveniri posse ex $\dfrac{b}{1} - \dfrac{b^2}{2} + \dfrac{b^3}{3} - \dfrac{b^4}{4}$.

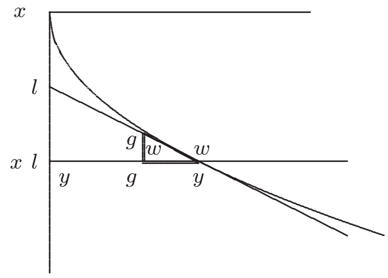
Et hinc iam lux habetur praeclara, stabiliendis per inductionem regulis de ratione totorum inter se ex variante in infinitum, sed regula certa partium ratione.

fig. *A*



[*Fig. 4*]

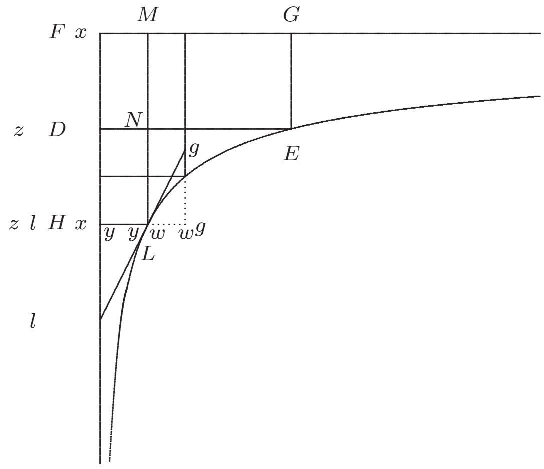
fig. *B*



[*Fig. 5*]

3 de *(1)* collatione totorum ex *(2)* ratione *L* 4–585,3 partium ratione. *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}^2 - \mathrm{a}^2}$ pendet ex quadratura hyperbolae. Fiat: $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}^2} \sqcap \mathrm{x}$. Unde $\mathrm{a}^3 \sqcap \mathrm{xy}^2$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{y}$. *(a)* Unde $\mathrm{a}^3 \sqcap \mathrm{x}^2\mathrm{y}$. sive $+2\cancel{\mathrm{x}}\mathrm{l} \sqcap -\mathrm{x}^{\cancel{2}}\mathrm{y}$. sive $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{-\mathrm{xy}}{2}$. sive $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^3}{2}$ *(b)* Unde *L*

fig. C



[*Fig. 6*]

$\dfrac{a^3}{x^2} \sqcap y$. Unde $a^3 \sqcap x^2y$. Unde $-2\cancel{x}ly \sqcap x^{\cancel{2}}y$. Ergo $2l \sqcap x$ seu $l \sqcap \dfrac{-x}{2}$. Si fecissemus $-x^{\cancel{2}}\cancel{y} \sqcap 2\cancel{x}l\cancel{y}$ idem habuissemus.

$lw \sqcap yg$. At summa omnium yg aequatur figurae, summa vero omnium lw, aequatur in nostro exemplo, vid. fig. C. aequatur inquam summae omnium $\dfrac{xw}{2}$ at summa omnium xw aequatur figurae in hoc exemplo, in aliis figurae complemento. Ergo hic summa omnium $\dfrac{xw}{2}$ aequatur figurae dimidiae. Sed haec ita explicanda sunt. Sumatur portio quaedam curvae, EL. Unde rectae demittantur perpendiculares in oppositas directrices EG, ED et LH, LM. Dictum est summam omnium lw (seu $\dfrac{xw}{2}$) aequari summae omnium y, seu spatio $LHDEL$. At constat omnium xw summam aequari spatio $LMGEL$.

6 in *(1)* fig. B *(2)* nostro *L* 6 omnium *(1)* $-\frac{\text{xw}}{2}$ *(2)* $\frac{\text{xw}}{2}$ *L* 7 figurae *(1)* complemento, et figura omnium −xw *(2)* in *L* 7 hic *erg.* *L* 10 LM. *(1))* Aio patet *(2)* Dictum *L*

Ergo omnium $\dfrac{xw}{2}$ summa aequabitur dimidio spatio $LMGEL$, at eadem aequatur spatio $LHDEL$, ergo spatium $LMGEL$, est d u p l u m spatii $LHDEL$.

Distinguamus unumquodque horum spatiorum, in id quod cuilibet proprium, et id quod utrique commune est; punctoque intersectionis rectarum DE, et LM, appellato N, commune erit utrique spatium $LNEL$, quod vocabimus ξa, et spatio $LMGEL$ proprium erit rectangulum NG, et spatio $LHDEL$, proprium erit rectangulum DL. Recta autem DH appellata z. et DE appellata e. erit rectangulum $DL \sqcap zy$ et rectangulum $NG \sqcap e-y, \frown x-z$. Ergo spatium $LMGEL \sqcap \xi a,, +e-y, \frown x-z$, et $LHDEL \sqcap \xi a + zy$. Ergo $\xi a,, +e-y, \frown x-z \sqcap 2\xi a + 2zy$, sive $\xi a + ex - ez - yx + yz \sqcap 2\xi a + 2zy$, sive $ex - ez - yx \sqcap \xi a + zy$. Et $\xi a \sqcap ex - ez - yx - yz$ sive rectangulum DG, demta rectangulorum HM et $[HN]$ summa.

Ipsam FD appellemus ω et erit $z \sqcap x - \omega$, fietque: $ex - ex + e\omega - yx - yx + y\omega \sqcap \xi a$ sive $e\omega - 2yx + y\omega \sqcap \xi a$. Ad ξa addatur $HM \sqcap yx$, itemque $NG \sqcap e\omega - y\omega$, fiet spatium $LHFGEL \sqcap 2e\omega - yx$. Et pro y ponendo $\dfrac{a^3}{x^2}$, pro e ponendo $\dfrac{a^3}{\omega^2}$, fiet: $\dfrac{2a^3}{\omega} - \dfrac{a^3}{x}$. Auferatur inde FE, seu $e\omega$, seu $\dfrac{a^3}{\omega}$ fiet: $\dfrac{a^3}{\omega} - \dfrac{a^3}{x}$. aequalis spatio $LHDEL$. Quod si ad ξa addatur NG fiet: $2e\omega - 2yx$, sive $\dfrac{2a^3}{\omega} - \dfrac{2a^3}{x} \sqcap$ spatio $LMGEL$. Unde si aequatio fuisset $\dfrac{a^4}{x^3} \sqcap y$ fiet puto $\dfrac{a^3}{\omega^2} - \dfrac{a^3}{x^3}$, item $\dfrac{3a^3}{\omega^2} - \dfrac{3a^3}{x^2}$.

$$y+a \quad \frown \quad y+b \quad \frown \quad y+c \quad \sqcap \quad 0.$$

$$\text{Unde}\quad \begin{array}{llll} y^2 & +\,a & y & +ab \frown y+c, \sqcap y^3 \\ & +\,b & .. & \end{array} \quad \begin{array}{lllll} +\,a & y^2 & +\,ab & y & +\,abc \sqcap 0. \\ +\,b & .. & +\,ac & .. & \\ +\,c & .. & +\,bc & .. & \end{array}$$

---

15 *Zu* $\dfrac{a^3}{\omega} - \dfrac{a^3}{x}$: $\dfrac{a^3x - a^3\omega}{\omega x}$, vel $\dfrac{za^3}{x^2 - [z]x}$.

7 DL $\sqcap$ zy *(1)* −ez sive zy − ze, *(2)* et *L* 11 DM *L ändert Hrsg.* 12 FD | appellemus *streicht Hrsg.* | appellemus *L* 13 eω − 2yx + yω $\sqcap$ ξa. *(1)* Pro y ponamus $\frac{a^3}{x^2}$, et pro e ponamus $\frac{a^3}{\omega^2}$, fiet: $\frac{a^3}{\omega} - \frac{2}{-}$ *(2)* Ad *(a)* x *(b)* ξa *L* 22 ω *L ändert Hrsg.*

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ summetur. $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \sqcap \frac{b+a}{ab}$, $+\frac{1}{c} \sqcap \frac{bc+ac}{abc}$.

Hinc si series quotcunque fractionum numeratorem constantem habentium ineunda sit: aequatio fingenda est cuius incogniti, seu radices fingantur ipsi nominatores. Summa eorum erit terminus secundus: summa rectangulorum sub ipsis terminus tertius: [factus] ex omnibus terminus ultimus. Sed ut cum aliis terminis nihil sit nobis negotii, fingenda est aequatio, quae non habeat nisi terminos maximum qui tot est dimensionum quot sunt nominatores seu quasi-incognitae, secundum qui est summa nominatorum, tertium, qui ignoratur sed qui velut cognitus consideratur, qui est summa fractionum, per ultimum multiplicatarum; et ultimum qui est factus ex denominatoribus. Sed ista aequatio fateor intractabilis est: Interim synthetica methodo serviunt ista ad inveniendas summas; v. g. si sit:

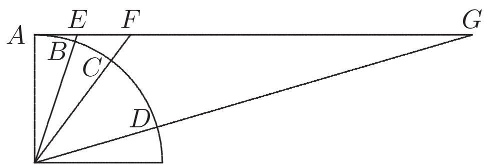
$y^{100}+1000y^{99}\ *\ *\ *\ +100y \sqcap 100,000.$

Hoc modo summa omnium fractionum quarum nominatores sunt radices, numerator unitas erit $\frac{100}{100,000}$ vel $\frac{1}{1000}$. Sed et secundus terminus omitti potest. Addatur aliquid radici, seu pro y. ponatur $z+1$. et habebitur omnium aliarum combinationum nempe et solidorum ex omnibus radicibus etc. summa.

$$\begin{array}{cccc}
a & & & \\
 & g & & \text{etc.} \\
b & & m & \\
 & h & & s \\
c & & n & \\
 & i & & t \\
d & & o & \\
 & k & & v \\
e & & p & \\
 & l & & w \\
f & & q & \\
 & f & & x \\
0 & & f & \\
 & 0 & & f \\
 & & 0 & \\
 & & & 0
\end{array}$$

Ponantur termini inter $a.$ et $f.$ finitas quantitates interiecti infiniti, continue decrescentes, sed incremento tali, ut nunquam infra f descendant, quemadmodum cogitare possumus fieri, si a, ponatur esse circulus, et $f.$ cogitetur esse quadratum inscriptum, $e.$ octogonum inscriptum, $d.$ hexdecagonum etc.

Videndum est an differentiae $l.k.i.$ etc. ad certam seriem vel progressionem revocari possint, quae sit summabilis. Eius seriei summa aequabitur circulo. Idem est in circumferentiis polygonorum:



[*Fig. 7*]

Ostensum est ab aliis si AE tangens arcus dati AB sit x , AF tangentem arcus dupli AC fore $\dfrac{2a^2x}{a^2-x^3}$. Hinc patet semper rationalem esse tangentem arcus dupli si rationalis tangens arcus dati. Ponatur iam arcus datus esse infinite parvus, et tangens eius esse β. Tangens arcus dupli erit $\dfrac{2a^2\beta}{a^2-\beta^2}$ et tangens arcus quadrupli erit: $\dfrac{2a^2 \frown \dfrac{2a^2\beta}{a^2-\beta^2}}{a^2 - \dfrac{4a^4\beta^2}{a^4-2a^2\beta^2+\beta^4}}$

587,2 series *(1)* progressionis harmoni *(2)* quotcunque fractionum *(a)* nominatorem *(b)* numeratorem *L* 587,3 cuius *(1)* | terminus *streicht Hrsg.* | ultimus *(2)* incogniti *L* 587,4 summa *L ändert Hrsg.* 587,6 f. sunt *(1)* incognitae *(2)* nominatores *L* 587,8 f. fractionum *(1)* et ultimum qui est *(2)* per ultimum *(a)* divisarum *(b)* multiplicatarum *L* 3 esse *(1)* circumferentia *(2)* circulus *L* 6 f. in *(1)* polygonis *(2)* in *(3)* circumferentiis *L* 10 esse *(1)* pars *(2)* tangentem *L* 11 iam *(1)* tangens *(2)* arcus *L*

9 ab aliis: vgl. J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura ... pars prima*, 1647, S. 13 u. S. 47 bis 60, wo zehn Beweise von verschiedenen Mathematikern abgedruckt sind; der Satz wird mit Hinweis auf die vorliegenden Beweise analytisch bewiesen bei Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II, S. 366–368.

atque ita crescendo in infinitum donec ad certum perveniatur terminum, qui sit v. g. quadratum circumscriptum.

Haec fere gemina illis quae alibi etiam de exprimendis ordinatis curvarum dixi.

$$\text{Progressio:}\quad \underbrace{\frac{1}{1}-\frac{1}{3}}_{\displaystyle\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{7}}_{\displaystyle\frac{2}{35}} + \underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{11}}_{\displaystyle\frac{2}{99}.}$$

$$\text{Sit iam}\quad \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}}_{\displaystyle\frac{2}{15}} + \underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}_{\displaystyle\frac{2}{63}} + \underbrace{\frac{1}{11}-\frac{1}{13}}_{\displaystyle\frac{2}{143}.}\quad \text{fiet}$$

$$\text{Ergo}\quad \frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}\ \text{etc.,,}\quad + \quad \frac{2}{15}+\frac{2}{63}+\frac{2}{143}\ \text{etc.} \sqcap 1.$$

$$\text{Sive}\quad \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143}\ \text{etc.} \sqcap \frac{1}{2}$$

$$\text{quia}\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}\ \text{etc.} \\[2ex] \quad +\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}+\frac{1}{11}\ \text{etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}\ \text{etc.} \\[2ex] \frac{2}{15}+\frac{2}{63}+\frac{2}{143}\ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\text{Eodem modo:}\quad \underbrace{1-\frac{1}{2}}_{\displaystyle\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}_{\displaystyle\frac{1}{12}} + \underbrace{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}}_{\displaystyle\frac{1}{30}} + \underbrace{\frac{1}{7}-\frac{1}{8}}_{\displaystyle\frac{1}{56}} + \underbrace{\frac{1}{9}-\frac{1}{10}}_{\displaystyle\frac{1}{90}.}$$

facit:

$$\text{At}\quad \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}}_{\displaystyle\frac{1}{6}} + \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}_{\displaystyle\frac{1}{20}} + \underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{7}}_{\displaystyle\frac{1}{42}} + \underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{9}}_{\displaystyle\frac{1}{72}} + \underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{11}}_{\displaystyle\frac{1}{110}.}\quad \text{etc.} \sqcap$$

14 f. $\frac{1}{90}$. *(1)* Eodem modo *(2)* At *L*

3 alibi: *Approximatio ad mensuram circularem geometrica*, *LSB* VII, 1 N. 6_2 S. 71+73, wo fast das gleiche Differenzenschema wie S. 587 Z. 18–32 auftritt.

$$\text{Ergo iungendo: } \frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{42}+\frac{1}{56} \text{ etc. } \sqcap 1$$

$$\text{et } \quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{10}+\frac{1}{15}+\frac{1}{21}+\frac{1}{28} \text{ etc. } \sqcap 2.$$

Quod verissimum.

$$\text{Eodem modo } \begin{array}{ccccccc} \underbrace{\frac{1}{2}-\frac{1}{4}} & + & \underbrace{\frac{1}{6}-\frac{1}{8}} & + & \underbrace{\frac{1}{10}-\frac{1}{12}} & + & \underbrace{\frac{1}{14}-\frac{1}{16}} \\ \frac{2}{8} & & \frac{2}{48} & & \frac{2}{120} & & \frac{2}{224} \\ \frac{1}{4} & & \frac{1}{24} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{112} \end{array}$$

$$\text{Iam } \begin{array}{cccc} \underbrace{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}} & \underbrace{\frac{1}{8}-\frac{1}{10}} & \underbrace{\frac{1}{12}-\frac{1}{14}} & \text{etc. facit} \\ \frac{2}{24} & \frac{2}{80} & \frac{2}{168} & \text{etc.} \end{array}$$

$$\text{Ergo } \left.\begin{array}{l} \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{6}-\frac{1}{8}+\frac{1}{10}-\frac{1}{12}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16} \text{ etc.} \\ \quad +\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{12}-\frac{1}{14}+\frac{1}{16} \text{ etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{2}{8}+\frac{2}{48}+\frac{2}{120}+\frac{2}{224} \\ \quad +\frac{2}{24}+\frac{2}{80}+\frac{2}{168} \end{array}\right.$$

$$\text{Ergo: } \frac{1}{8}+\frac{1}{24}\left[+\frac{1}{48}\right]+\frac{1}{80}\left[+\frac{1}{120}\right]+\frac{1}{168}+\frac{1}{224} \text{ etc. } \sqcap \frac{1}{4}.$$

$$\text{Iam } \frac{1}{3}+\frac{1}{15}+\frac{1}{35}+\frac{1}{63}+\frac{1}{99}+\frac{1}{143} \text{ etc. } \sqcap \frac{1}{2}.$$

$$\text{Et } +\frac{1}{8}+\frac{1}{24}\left[+\frac{1}{48}\right]\left[+\frac{1}{80}\right]\left[+\frac{1}{120}\right] \text{ etc. } \sqcap \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo } \frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}+\frac{1}{35}\left[+\frac{1}{48}\right]+\frac{1}{63}\left[+\frac{1}{80}\right]+\frac{1}{99}\left[+\frac{1}{120}\right]+\frac{1}{143} \text{ etc. } \sqcap \frac{3}{4}.$$

12 $+\frac{1}{48}$ *erg. Hrsg.* 12 $+\frac{1}{120}$ *erg. Hrsg.* 12 f. $\sqcap \frac{1}{4}$. *(1)* Quare denique: $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+$ *(2)* Iam *L* 14 $+\frac{1}{24}$ $|+\frac{1}{80}+\frac{1}{168}+\frac{1}{224}$ *ändert Hrsg.* | etc. *L* 15 $\frac{1}{35}$ $|+\frac{1}{80}+\frac{1}{63}+\frac{1}{168}+\frac{1}{99}+\frac{1}{224}$ *ändert Hrsg.* | $+\frac{1}{143}$ *L*

Superest ut quaeramus summam huius seriei,

$$\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$$

$$+\frac{2}{15} \quad -\frac{2}{35} \quad +\frac{2}{63} \quad -\frac{2}{99} \quad +\frac{2}{143} \sqcap \frac{1}{3} - \frac{2}{15} + \frac{2}{7} - \frac{2}{9} \text{ etc.}$$

Ergo $\frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc. $\sqcap \frac{1}{6} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. $\sqcap \frac{2}{15} + \frac{2}{63} + \frac{2}{143}$ etc. $-\frac{1}{6}$.

Ergo $\frac{1}{6} \sqcap \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc.

Ergo $\frac{1}{3} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{63} + \frac{1}{99} + \frac{1}{143}$ etc. $\sqcap \frac{1}{3} + \frac{1}{6} \sqcap \frac{3}{6} \sqcap \frac{1}{2}$ ut ante.

Nota si $\frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15}$ etc. multiplicentur per $\frac{2}{8}$,

fiet: $\frac{2}{8} + \frac{2}{24} + \frac{2}{48} + \frac{2}{80} + \frac{2}{120}$ etc. seu

$\frac{2}{9-1} + \frac{2}{25-1} + \frac{2}{49-1}$ etc. quod iterum ad demonstrandam aliter huius quoque seriei summam servit.

$$\frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^2+2y\beta+\beta^2} \sqcap \frac{\boxed{y^2} + 2y\beta + \beta^2 \boxed{-y^2}}{y^2+2y\beta+\beta^2, \frown y^2} \quad \text{summabilis.} \quad (1)$$

$$\frac{1}{y^2-2y\beta+\beta^2} - \frac{1}{y^2} \sqcap \frac{\boxed{y^2 - y^2} + 2y\beta + \beta^2}{y^2-2y\beta+\beta^2, \frown y^2} \quad \text{summabilis.} \quad (2)$$

Iungantur 1. et 2., ac primum addendo, fiet:

1 f. seriei *(1)* 15 *(2)* $\frac{1}{15}$ $\frac{1}{63}$ *(3)* Quod si ergo vel *(4)* 1 $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$ *(a)* $1 + \frac{1}{15} - \frac{1}{35} + \frac{1}{63} - \frac{1}{99} + \frac{1}{143} \sqcap \frac{4}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc. *(b)* $1 + \frac{2}{15} - \frac{2}{35} + \frac{2}{63} - \frac{2}{99} + \frac{2}{143} \sqcap \frac{2}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9}$ etc.,, $\frown$ 2 *(aa)* demto *(bb)*$\sqcap$ *(5)* $\frac{1}{3} - \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{13}$ *L*

12 (2): Auf der rechten Seite der Gleichung müßte im Zähler $-\beta^2$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter, der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Überlegung bis S. 592 Z. 3.

$$\frac{2y\beta+\beta^2,\frown y^2,\frown y^2\boxed{-2y\beta}+\beta^2,,+\quad +2y\beta+\beta^2,\frown y^2\frown y^2+\boxed{+2y\beta}+\beta^2}{y^4,,\frown\quad y^4+2\beta^2y^2+\beta^4,-4\beta^2y^2}$$ sive

$$\frac{4y\beta+2\beta^2\frown y^2,\frown y^2+\beta^2}{y\,4\,2,\frown\quad y^2\boxed{+2\beta^2y^2}+\beta^4\boxed{-4\beta^2y^2}}.$$
$$-2\beta^2y^2$$

Iungi possunt et subtrahendo, et fiet $\dfrac{4\cancel{y}\beta,\frown 2y\beta+\beta^2}{y^{\cancel{2}},\frown\quad y^4-2\beta^2y^2+\beta^4}$ cuius seriei datur rursus summa.

$$\frac{1}{y}-\frac{1}{y+\beta}\sqcap\frac{y+\beta\boxed{-y}}{y^2+\beta y}.\qquad \frac{1}{y-\beta}-\frac{1}{y}\sqcap\frac{\boxed{y-y}+\beta}{y^2-\beta y}.$$

Iungantur addendo, fiet: $\dfrac{\boxed{\beta y^2\boxed{-\beta^2y}+\beta y^2\boxed{+\beta^2y}}\,2\beta y^2}{y^4-\beta^2y^2}\sqcap\dfrac{2\beta}{y^2-\beta^2}.$

Iungantur subtrahendo, fiet: $\dfrac{-\beta y^2+\beta^2y+\beta y^2+\beta^2y}{y^4-\beta^2y^2}\sqcap\dfrac{2\beta^2}{y^3-\beta^2y}.$

Huius ergo seriei $\frac{1}{3}+\frac{1}{8}+\frac{1}{15}+\frac{1}{24}$ etc. habetur summa, item huius: $\frac{1}{6}+\frac{1}{24}+\frac{1}{60}+\frac{1}{120}$ etc. [$\frown$ 6] $\sqcap$ 1 $\frac{1}{4}$ $\frac{1}{10}$ $\frac{1}{20}$, quae est series [reciprocorum] pyramidalium, nimirum omnes numeri cubi radicibus minuti sunt senarii, et divisi per 6. dant numeros pyramidales.

$$\begin{array}{lccccccccccc}
 & \dfrac{1}{4-1} & + & \dfrac{1}{9-1} & + & \dfrac{1}{16-1} & + & \dfrac{1}{25-1} & \text{etc.} & \sqcap & \dfrac{3}{4}. & \\
\text{Iam} & \dfrac{1}{4-1} & \sqcap & \dfrac{1}{4} & + & \dfrac{1}{16} & + & \dfrac{1}{64} & + & \dfrac{1}{256} & \text{etc.} & \\
 & \dfrac{1}{9-1} & \sqcap & \dfrac{1}{9} & + & \dfrac{1}{81} & + & \dfrac{1}{729} & + & \dfrac{1}{6561} & \text{etc.} &
\end{array}$$

---

5 *Nebenrechnung*: $\dfrac{1}{y}-\dfrac{1}{y+b}\sqcap\dfrac{y+b-y}{y^2+by}\sqcap\dfrac{b}{y^2+by}$

9 $\frown$6 *erg. Hrsg.* 9 reciprocorum *erg. Hrsg.*

Omnes ergo omnium fractionum potestates exponentium parium simul sumtae aequantur tribus quartis.

$$\begin{array}{ccccccccccc}
\frac{1}{3} & - & \frac{1}{6} & + & \frac{1}{9} & - & \frac{1}{12} & + & \frac{1}{15} & - & \frac{1}{18} \\
 & \frac{3}{18} & & & & \frac{3}{108} & & & & \frac{3}{270} & \\
 & \frac{1}{6} & & & & \frac{1}{36} & & & & \frac{1}{90} & \\
\frac{1}{6} & - & \frac{1}{9} & + & \frac{1}{12} & - & \frac{1}{15} & + & \frac{1}{18} & - & \frac{1}{21} \\
 & \frac{3}{54} & & & & \frac{3}{180} & & & & \frac{3}{378} & \\
 & \frac{1}{18} & & & & \frac{1}{60} & & & & \frac{1}{126} & \text{etc.}
\end{array}$$

$$\text{Ergo}\quad \left.\begin{array}{l} \frac{1}{3} - \frac{1}{6} + \frac{1}{9} - \frac{1}{12} + \frac{1}{15} - \frac{1}{18} \ \text{etc.} \\[2ex] \quad + \frac{1}{6} - \frac{1}{9} + \frac{1}{12} - \frac{1}{15} + \frac{1}{18} \ \text{etc.} \end{array}\right\} \sqcap \left\{\begin{array}{l} \frac{1}{6} \ \ \frac{1}{36} \ \ \frac{1}{90} \ \ \text{etc.} \\[2ex] \frac{1}{18} \ \ \frac{1}{60} \ \ \frac{1}{126} \ \ \text{etc.} \end{array}\right.$$

$$\begin{array}{ll}
\text{Ergo} & \frac{1}{6} + \frac{1}{18} + \frac{1}{36} + \frac{1}{60} + \frac{1}{90} + \frac{1}{126} \quad \text{etc.} \ \sqcap \ \frac{1}{3} \\
 & \frac{1}{3} + \frac{1}{[9]} + \frac{1}{18} + \frac{1}{30} + \frac{1}{45} + \frac{1}{63} \quad \text{etc.} \ \sqcap \ \frac{2}{3} \ \text{et} \\
 & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} + \frac{1}{21} \qquad\qquad \sqcap \ 2, \ \text{ut dudum scimus.}
\end{array}$$

$$\begin{array}{lccccccccccc}
\text{Sed} & \frac{1}{1} & - & \frac{1}{4} & + & \frac{1}{7} & - & \frac{1}{10} & + & \frac{1}{13} & - & \frac{1}{16} \ \text{etc.} \\
 & & \frac{3}{4} & & & & \frac{3}{70} & & & & \frac{3}{208} & \text{etc.} \\
 & \frac{1}{4} & - & \frac{1}{7} & + & \frac{1}{10} & - & \frac{1}{13} & + & \frac{1}{16} & - & \frac{1}{19} \ \text{etc.} \\
 & & \frac{3}{28} & & & & \frac{3}{130} & & & & \frac{3}{304} & \text{etc.}
\end{array}$$

1 omnium *(1)* totius *(2)* rerum ⟨combi⟩ *(3)* fractionum *L* 13 6 *L ändert Hrsg.*

$$\text{Unde}\quad \begin{array}{cccccccccccc} \frac{1}{4} & + & \frac{1}{28} & + & \frac{1}{70} & + & \frac{1}{130} & + & \frac{1}{208} & + & \frac{1}{304} & \quad\sqcap\ \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} & & \frac{1}{14} & & \frac{1}{35} & & \frac{1}{65} & & \frac{1}{104} & & \frac{1}{152} & \text{etc.}\ \sqcap \left[\frac{2}{3}\right] \end{array}$$

Series quadratrix $\frac{1}{4y^2-1}$. Ponendo y esse numerum imparem, erit differentia: $\frac{1}{4y^2-1} - \frac{1}{4y^2+16y+15}$, seu $\frac{16y+16}{16y^4+64y^3+60y^2-16y-15}$.

Si invicem addantur $\frac{a^3}{a^2+y^2}$ et $\frac{a^3}{y^2-a^2}$, fiet: $\frac{2y^2[a^3]}{y^4-a^4}$.

Si invicem addantur $\frac{a^3}{a^2+y^2}$ et $\frac{a^3}{a^2-y^2}$, fiet: $\frac{[2]a^5}{a^4-y^4}$. Qua habita habetur et $\frac{a^4}{a^4-y^4}$, inde $\dfrac{y^4+y^8+y^{12}+y^{16}}{\frac{1}{5}\quad\frac{1}{9}\quad\frac{1}{13}\quad\frac{1}{17}}$ etc.

Iam $\frac{y^2}{a^2+y^2} \sqcap \dfrac{y^2-y^4+y^6}{\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}-\frac{1}{9}}$ etc. Addendo ergo $\frac{y^4}{a^4-y^4}$, et $\frac{y^2}{a^2+y^2}$ summa omnium fiet: $\frac{[a^2y^2]}{a^4-y^4} \sqcap \frac{1}{3}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}$ etc.

Quid si sit: $\frac{y^2a}{a^2+2ay+y^2} \sqcap x$, fiet:

$\frac{y^2a}{a^2},, -\frac{2ay[+]y^2,\frown y^2a}{a^4} + \frac{2ay[+]y^2,\square,\frown y^2a}{a^6}$ etc.

$\frac{a^2}{a^2+2ay+y^2}$ quadrabilis.

2 $\frac{1}{6}$ *L ändert Hrsg.* 4 $-\frac{1}{4y^2+16y+15}$, *(1)* differentia *(2)* seu *L* 5 a^3 *erg. Hrsg.* 6 2 *erg. Hrsg.* 9 $2y^4+a^2y^2$ *L ändert Hrsg.* 11 − *L ändert Hrsg. zweimal*

$$\frac{1}{4y^2-1}\sqcap\frac{1}{2y+1,2y-1}.$$

$$\Big[-\frac{1}{4y^2,+2,2y,2,+,4-1}+\frac{1}{4y^2-1}\sqcap\frac{\boxed{4y^2}+8y+3\boxed{-4y^2}+1}{}\sqcap$$

$\frac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}\sqcap\frac{2y+2,+2y,,\frown 2y+2,-2y\sqcap 8y+4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}$ dividatur per $2y+1$, tam nominator quam numerator, fiet: $\frac{4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,2y-1}\sqcap\frac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}\Big]$ quae ducta in $2y+3$. distantiam a vertice aliquo, dabit: $\frac{4}{4y^2-1}$. Et quadruplum summae, habetur ex ductu hoc differentiarum. Cum aliunde constet hunc ductum dare eius complementum, unde videtur aliquid duci ad summam seriei huius quadratricis ineundam.

$$\begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 10 & 14 & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{35} & \frac{1}{99} & \frac{1}{[195]} & \frac{1}{323}. \end{array}$$

Esto y numerus impar, erit $\frac{1}{4y^2-1}$ terminus seriei quadratricis.

1–4 $\sqcap\frac{1}{2y+1,2y-1}$. *(1)* $\frac{1}{4y^2,+2,2y,2,+4,-1}-\frac{1}{4y^2-1}$ *(2)* $-\frac{1}{4y^2,+2,2y,2,+4,-1}+\frac{1}{4y^2-1}\sqcap\frac{\boxed{4y^2}+8y+3\boxed{-4y^2}+1}{}\sqcap\frac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}\sqcap\frac{2y+2,,+2y,,\frown 2y-2,-2y\sqcap 8y+4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\ 4y^2-1}$ *(a)* dividatur per $2y+1$, *(aa)* fiet *(bb)* tam nominator quam numerator, fiet: $\frac{4}{\overline{2y+2}\boxed{2},-1,,\frown 2y-1}\sqcap\frac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}$ *(b)* multiplicetur per $2y+1$, fiet *(3)* | $-\frac{1}{4y^2,+2,2y,2,+16,-1}+\frac{1}{4y^2-1}\sqcap\frac{\boxed{4y^2}+8y+15\boxed{-4y^2}+1}{}\sqcap\frac{\overline{2y+2}\boxed{2}-4y^2}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,\ 4y^2-1}\sqcap\frac{2y+4,,+2y,,\frown 2y-2,-2y\sqcap 8y+16}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,\ 4y^2-1}$ *ändert Hrsg.* | dividatur per $y+2$, fiet $\frac{4}{\overline{2y+4}\boxed{2},-1,,\frown 2y-1}\sqcap\frac{4}{2y+1,2y+3,2y-1}$ *gestr., erg. u. ändert Hrsg.* | quae *L*

6 aliunde constet: Leibniz verwendet den Satz bereits S. 578 Z. 8 f.

$\frac{1}{y} - \frac{1}{y-1} \sqcap \frac{y+1-y}{y^2+[y]} \sqcap \frac{1}{y^2+[y]}$. Sed quia differentiae ipsarum y sunt $2_{[,]}$ sic potius faciemus: $\frac{1}{y} - \frac{1}{y+2}$, vel potius denique: $\frac{1}{2y} - \frac{1}{2y+2}$ fiet: $\frac{2y+2-2y}{4y^2+4y} \sqcap \frac{1}{2y^2+2y}$, cuius dimidium $\frac{1}{4y^2+4y}$. Vel ita: $\frac{1}{2y-2} - \frac{1}{2y} \sqcap \frac{\boxed{2y-2y}+2}{4y^2-4y}$ cuius dimidium: ☉$\frac{1}{4y^2-4y}$, addatur ad ☽$\frac{1}{4y^2+4y}$ fiet $\frac{4y^2\boxed{+4y^2}+4y^2\boxed{-4y^2}}{16y^4-16y^2}$, sive $\frac{1}{2y^2-2}$ cuius duplum ♀$\frac{1}{y^2-1}$.

Contra si alterum ab altero auferatur, ☽ a ☉, restabit $\frac{\boxed{+4y^2}+4y\boxed{-4y^2}+4y}{16y^4-16y^2}$ cuius [duplum]: ☿$\frac{1}{y^3-y}$. Cuius seriei habetur summa. Addantur hae duae series, ♀ et ☿, fiet:

595,9 *Nebenrechnungen*:

	Zur Lesart, nicht gestrichen:		*Zum gültigen Text*:
14		5	18
14		~~14~~	18
56		~~28~~5 ⨍ 19	144
14		~~17~~5	18
296 [*!*]		~~1~~	296

595,9 f. $\frac{1}{99}$ | $\frac{1}{295}$ ändert Hrsg. | $\frac{1}{323}$. *(1)* Multiplicentur ista per 3. 7. 11. 15. 19. *(2)* Esto *L* 1 1 *L ändert Hrsg. zweimal* 3 $\frac{1}{4y^2+4y}$. *(1)* Unde auferenda a *(a)* 2 *(b)* $\frac{1}{4y^2-1}$, restabit $\frac{1}{4y^2-1} - \frac{1}{4y^2+2} \sqcap \frac{\boxed{4y^2}+2\boxed{-4y^2}+1}{\substack{16y^4+8y^2-2 \\ -4\,..}} \sqcap \frac{3}{16y^4+4y^2-2}$ *(2)* Vel *L* 4 fiet *(1)* $\frac{4y^2\boxed{+4y}+4y^2\boxed{-4y}}{16y^4+16y^2}$, sive *(a)* 8 *(b)* $\frac{1}{2y^2+2}$ *(c)* $\frac{y^2}{2y^2+2}$ cuius duplum erit: $\frac{y^2}{y^2+1}$,vel $1 - \frac{1}{y^2+1}$. Contra *(2)* $\frac{4y^2\boxed{+4y}+4y^2\boxed{-4y}}{16y^4+16y^2}$ *L* 5 si *(1)* addantur simul, fiet: *(2)* alterum *L* 6 quadruplum *L ändert Hrsg.*

$\frac{y+1}{y^3-y} \sqcap \frac{1}{y-1, \frown y} \sqcap \frac{1}{y^2-y}$. Contra si altera ab altera auferatur, fiet: $\frac{y-1}{y^3-y} \sqcap \frac{1}{y^2+y}$.

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{4+2} & \frac{1}{9+3} & & \quad & \frac{1}{4-2} & \frac{1}{9-3} & \frac{1}{16-4} & \frac{1}{25-5} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} & & \frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{4-2} & - & \frac{1}{4+2} & \sqcap & \frac{2+2}{16-4} & & \frac{1}{3} & & \\
\frac{1}{9-3} & - & \frac{1}{9+3} & \sqcap & \frac{9+3-9+3}{81-9} & & \frac{1}{12} & & \\
\frac{1}{16-4} & - & \frac{1}{16+4} & \sqcap & \frac{8}{256-96} & \sqcap & \frac{1}{32-2} & \sqcap & \frac{1}{30}
\end{array}$$

41. AUS UND ZU GOSSELINS DE ARTE MAGNA
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Leibniz hat — vermutlich während seines Aufenthaltes in Paris — ein Exemplar von G. Gosselins *De arte magna*, Paris, 1577 erworben, das sich heute in der Niedersächsischen Landesbibliothek Hannover befindet. Oben auf dem Titelblatt steht ein Eintrag von fremder Hand: „ex lib: Jacobi Michelet de La Cheuallerye. Ꝝ9. n°. 109.“

Die gestrichene Marginalie auf fol. 11 r° (= S. 599 Z. 13–22) dürfte unmittelbar vor N. 41_2 entstanden sein, wo dieselbe Rechnung korrekt durchgeführt ist (= S. 602 Z. 4–16). Dies kann frühestens im Oktober 1674 geschehen sein, da in N. 41_2 auf das datierte Stück N. 38_{16} verwiesen wird. Das Wasserzeichen von N. 41_2 ist für September 1674 bis Januar 1675 belegt. N. 41_2 muß vor dem 3. März 1675 entstanden sein, da es in dem datierten Stück N. 44_2 erwähnt wird.

Dem Text Gosselins ist die Blattzählung der Ausgabe von 1577 in eckigen Klammern vorangestellt. Die Marginalien von Leibniz werden als Fußnote wiedergegeben. Marginalien, Korrekturen oder Unterstreichungen im Inhaltsverzeichnis sowie auf fol. 4 r°–7 r°, 9 r°, 11 r° u. 25 v°, die von fremder Hand stammen oder Leibniz nicht eindeutig zugeschrieben werden können, sind nicht wiedergegeben.

41_1. HANDEXEMPLAR

Überlieferung: *LiH* Marginalien in G. Gosselin, *De arte magna*, Paris, 1577: *Niedersächs. Landesbibl.* Nm-A 317
Cc 2, Nr. 00

[fol. 5 v°]

...

Theorema nostrum ad rationem vestigandi lateris Cubici. Cap. VII.

Si numerus in duas partes quascunque secetur Cubus totius aequalis erit Cubis partium; et facto ex triplo uniuscuiusque partis in factum ex una in alteram, ut 8 dividatur in 5 et 3, Cubus 8 est 512: Cubus 5. est 125, Cubus 3. est 27, factus ex 3 in 5. est numerus

---

24–599,3 $\llcorner a+b \lrcorner^3 \sqcap a^3+b^3+3ab \frown a+b \sqcap a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ vel $\sqcap a^2, \frown a+3b,, +b^2, \frown 3b+a$ vel $\sqcap a, \frown a^2+3ab+3b^2, +b^3$ vel $\sqcap a^3, +b, \frown 3a^2+3ab+b^2$.

---

6 Jacobi Michelet de La Cheuallerye: nicht ermittelt.

15, qui ductus in triplum 5. hoc est in 15, facit 225, idem numerus 15 ductus in triplum 3 hoc est 9 efficit 135, quae omnia simul sumpta aequalia sunt Cubo 8, nam 125, 27, 225, et 135, faciunt 512.

. . .

[fol. 11 r$^{\text{o}}$/v$^{\text{o}}$]

. . .

De Proportione Arithmetica. Cap. IX
Dato latere vestigandi cuiuscunque Polygoni
generalis ratio et facilis.

Auferemus 2 ex numero Polygoni, auferemus et monadem a latere, tum residuos hos numeros multiplicabimus invicem, facto addemus 2, summa haec ducta in semissem,

---

10–600,3 *Gestrichen*:

$$
\begin{array}{r}
b-2 \\
y-1 \\
\hline
-2y+2 \\
+b..\underline{-\ b} \\
+\ 2 \\
\hline\hline
-2y+b \\
\underline{+b..\qquad} \\
\dfrac{y}{2} \\
\hline\hline
-y^2+\dfrac{b}{2}y \\
+\dfrac{b}{2}..\qquad
\end{array}
$$

15 f. *(1)* $\begin{array}{l}-2y-2\\ +b..\underline{+b}\end{array}$ *(2)* $\begin{array}{l}-2y+2\\ +b..\underline{-b}\end{array}$ *L*

---

18 $+b$: Richtig wäre $-b+4$; Leibniz erkennt den Fehler, korrigiert unvollständig und streicht die Marginalie. Richtig durchgeführt ist die Rechnung in N. 41$_2$ S. 602 Z. 4–16.

vel contra semissis lateris in hanc summam, facit polygonum quaesitum. Atque hanc a se excogitatam rationem demonstravit Vir Doctissimus M. Bressius Professor Mathematicus.

Vestigemus triangulum ab latere 6, quia triangulum habet tres angulos, subductis 2 restat 1, deduco etiam 1 ex 6, restat 5, quem multiplico in 1 residuum angulorum fit ipse 5, cui addo 2, existit 7, hunc multiplico per semissem 6 lateris, hoc est per 3, exurgunt 21, triangulus ab latere 6.

Vestigemus Pentagonum ab latere 6, deduco 2 ex 5 numero angulorum, restant [3], deduco 1 ex 6, supersunt 5, residuos hos numeros invicem multiplico, 5 in 3, fiunt 15, addo 2, existunt 17, quae multiplico per 3 semissem 6 lateris, fiunt 51, atque tantus est Pentagonus cuius latus est 6. Idemque de reliquis esto iudicium.

8–11

$$5 - 2 \sqcap 3 \sqcap b - 2$$
$$y - 1$$
$$y - 1, \frown \underbrace{b - 2}_{c}, +2,\, , \frown \frac{y}{2}$$
$$\begin{array}{l} yc - ca + 2a^2 \\ \qquad\qquad \frac{y}{2} \\ \hline\hline \end{array}$$
$$\frac{\begin{array}{l} y^2c - ca \;\; y \\ \quad + 2a^2 \end{array}}{2}$$

8 2 *H ändert LiH*

---

2 demonstravit: Beweis von M. Bressieu nicht gefunden. — Der Satz ist bereits bewiesen in DIOPHANT, *De multangulis numeris*, prop. 8.

41_2. DE SUMMA FRACTIONUM QUARUM NOMINATORES NUMERI POLYGONI

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 IV 17 Bl. 10–11. 1 Bog. 4°. 2 1/2 S. Bl. 11 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 756

De summa fractionum quarum numeratores constans; nominatores numeri polygoni.

Ex Gosselino *De arte magna sive algebra* lib. 1. cap. 11 [*!*]. *Dato latere vestigandi polygoni ratio generalis ac facilis.*

Auferemus 2 *ex numero angulorum; auferemus et monadem a latere*[;] *residuos multiplicabimus invicem; facto addemus* 2*; summa ducta in lateris semissem, dabit polygonum quaesitum.*

V. g. vestigemus Δ^{lum} *a latere* 6*, quia triangulum tres habet angulos, subductis* 2 *restat* 1*; ex* 6 *aufer* 1 *restat* 5. *Iam* $5 \frown 1 \sqcap 5$, *adde* 2, *fit* 7, *multiplica per* $\frac{6}{2} \sqcap 3$, *fiet* 21 *triangularis numerus quaesitus.*

Ego id analytice ita enuntio: Si numerus angulorum sit b, latus sit y. Erit polygonum

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}-2ay^2\\+b\ \ ..\end{array}\right.}{2}\qquad \frac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2y\\-ba\ \ ..\end{array}\right.}{2}\qquad \text{sive}\quad b-2,\frown y-1,,+2,,,\frown \frac{y}{2}.$$

8 Ex Gosselino: *De arte magna*, 1577, Buch 1, Kap. IX, Bl. 11 r° [Marg.]. 16–18 Erit polygonum: Leibniz berechnet hier die allgemeinere Formel $((b-2a)(y-a)+2a^2)\frac{y}{2}$, in der a für die Einheit steht (vgl. N. 36 S. 366 Z. 2 f.).

Si esset $\frac{e}{a}y^2+ely+el^2-\beta e^2$ iniri poterit summa, fractionum ab ipsis denominatarum, ut alibi a me inventum est. Sunt autem $e.\ a.\ \beta.$ datae; iam ut termini ubique conferri

---

601,18 *Nebenbetrachtung*:

$$\begin{array}{rl} b-2 & \quad 3-2\sqcap 1 \\ \underline{y-1} & \quad 6-1\sqcap 5 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2y+2 \\ \underline{+b..-b} \\ +2 \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -2y+4 \\ \underline{+b..-b} \\ \frac{y}{2} \\ \hline\hline \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -y^2+2y \\ \underline{+\frac{b}{2}..\ -\frac{b}{2}..} \end{array}$$

$$\begin{array}{rrl} \boxed{\begin{array}{r} -36 \\ 54\ \boxed{+3 \frown 18} \end{array}} & \begin{array}{r} +12 \\ -9 \end{array} & \\ 18 & \overline{+3} & \sqcap 21 \end{array}$$

2 datae; *(1)* | iam *streicht Hrsg.* | termini conferantur, fiet: $-2a+b \sqcap 2e$ et $e \sqcap \frac{-2a+b}{2}$ *(2)* iam *L*

14–16 *(1)* $\begin{array}{cc} -9 & +6 \\ \boxed{+\frac{3}{2}\frown 9} & \boxed{-\frac{3}{2}\frown 3} \\ \frac{27}{2} & -\frac{9}{2} \end{array}\Bigg\}\ \frac{27-9}{2} \sqcap \frac{18}{2} \sqcap 9$ *(2)* $\boxed{\begin{array}{r} -36 \\ 54\ \boxed{+3 \frown 18} \end{array}}$ 18 *L*

---

2 alibi: N. 38_{16} S. 532 Z. 5 – S. 533 Z. 6.

possint scribatur: $2ez^2+2elz+2el^2-2\beta e^2$. Et in polygono pro y. pone $z+f$. fiet $y^2 \sqcap z^2+2fz+f^2$ et iam ordinando:

$$\begin{array}{rlrlrl} - & 2az^2 & - & 4faz & - & 2af^2 \\ + & b.. & + & [2]bf.. & + & bf^2 \\ & & + & 4a^2\,.. & + & 4a^2f \\ & & - & ba\,.. & - & baf\ \ . \end{array}$$

Conferantur termini terminis: $e \sqcap \dfrac{-2a+b}{2}$. $l \sqcap \dfrac{-4fa+[2]bf+4a^2-ba}{2e \sqcap -2a+b}$. $[2e]l^2 \sqcap -2af^2+bf^2+4a^2f-baf+2\beta e^2$. Quibus valoribus inter se iunctis habebitur valor ipsius f. pariter et l. Quibus obtentis poterit inveniri fractionum omnium a polygonis denominatarum, numeratorem constantem habentium summa. In triangulo ipsa f. necessaria non est.

Summam habens seriei $\dfrac{1}{\begin{array}{c}y^2+ly+l^2\\ -\beta^2\end{array}}$ quaeritur summa huius seriei: $\dfrac{1}{z^2+\frac{1}{2}\beta z}$.

Pone $z \sqcap y+d$. erit $z^2 \sqcap y^2+2dy+d^2$. et $\dfrac{1}{2}\beta z$. erit $\sqcap \dfrac{1}{2}\beta y+\dfrac{1}{2}\beta d$. et conferendae erunt formulae hae:

$$\left\{\begin{array}{lcrcl} y^2 & + & ly & + & l^2 \\ & & & - & \beta^2 \\ \\ y^2 & + & 2dy & + & d^2 \\ & + & \frac{1}{2}\beta.. & + & \frac{1}{2}\beta d. \end{array}\right.$$

Erit $l \sqcap 2d+\dfrac{1}{2}\beta \sqcap \dfrac{4d+\beta}{2}$, et $l^2 \sqcap \dfrac{16d^2+8d\beta+\beta^2}{4}$. $l^2-\beta^2 \sqcap d^2+\dfrac{1}{2}\beta d$, ergo

$$\frac{\overset{12}{\boxed{16}}d^2+\overset{6}{\boxed{8}}d\beta\boxed{+\beta^2}-\overset{3}{\boxed{4}}\beta^2}{\cancel{4}} \sqcap \frac{\boxed{4d^2}+\boxed{2\beta d}}{\cancel{4}}$$

sive $4d^2+2d\beta \sqcap \beta^2$, sive $d^2+\dfrac{1}{2}d\beta+\dfrac{1}{16}\beta^2 \sqcap \dfrac{1}{16}\beta^2+\dfrac{\beta^2}{4} \sqcap \dfrac{5\beta^2}{16}$ et erit $d+\dfrac{1}{4}\beta \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{5}}{4}$, sive $d \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{5},-\beta}{4}$.

4+7 2 *erg. Hrsg. zweimal* 8 2e *erg. Hrsg.* 9 ipsius f. *(1)* eademque methodo *(2)* pariter *L*

Maioris certitudinis causa cum hac serie conferamus (ex qua ista: $\begin{array}{l} y^2+ly+l^2 \\ \qquad\quad\ -\beta^2 \\ \qquad\ +\frac{1}{2}f\beta \end{array}$ facta est):

$$y^2 \begin{cases} +2ga & y \\ \dfrac{+f\beta}{f} & .. \end{cases} \qquad \begin{cases} +g^2a^2 \\ \dfrac{+f\beta ga}{f^2} \end{cases}$$, fiet : $2df\boxed{+\frac{1}{2}\beta f} \sqcap 2ga + \boxed{+f\beta}$.

Unde $4df - f\beta \sqcap 4ga$, sive $f \sqcap \dfrac{4ga}{4d-\beta}$ et $f^2 \sqcap \dfrac{16g^2a^2}{16d^2-8d\beta+\beta^2}$.

Iam $2d^2f^2+\beta df^2 \sqcap 2g^2a^2+2f\beta ga.$

$$\frac{16g^2a^2}{16d^2-8d\beta+\beta^2} \qquad\qquad \frac{4ga}{4d-\beta}$$

Unde:

$$\boxed{32d^2g^2a^2} + \boxed{\begin{array}{c}24\\32\\16\end{array}}\beta dg^2a^2 \sqcap \boxed{32d^2g^2a^2}\ \boxed{-16d\beta g^2a^2}\ \boxed{+2\beta^2g^2a^2}\ \boxed{+8\beta g^2a^2 4d} - \begin{array}{c}6\\8\end{array}\beta g^2a^2\beta$$

fiet $4d \sqcap -\beta$ seu $d = \dfrac{-\beta}{4}$. Sed ita ex formula proposita $\begin{array}{l} y^2+2d\,y+d^2 \\ \quad +\frac{1}{2}\beta.. +\frac{1}{2}\beta d \end{array}$ fiet:

1–4 ex qua ... facta est: Leibniz übernimmt die folgende Formel aus N. 38₁₆ S. 529 Z. 2.

10 Leibniz übersieht den Faktor 4 im vorletzten Term der rechten Seite der Gleichung, deren Reduktion $0 = -6\beta^2g^2a^2$ ergäbe. Im weiteren Verlauf treten zusätzliche Rechenfehler auf: Konsequent gerechnet müßte in S. 605 Z. 1 $y^2 - \dfrac{\beta^2}{16}$ stehen, in S. 605 Z. 3 $f \sqcap \dfrac{4ga}{8d}$ sowie $f \sqcap \dfrac{-2ga}{\beta}$; in S. 605 Z. 12–14 fehlt der Term $+16c\beta^2gay$ hinter der Klammer und in S. 605 Z. 14 müßte $-4g^2a^2\beta y$ im Nenner des ersten Bruches stehen.

$$y^2-\frac{\beta}{2}y+\frac{\beta^2}{16},\ \text{sive}\quad y^2\ *-\frac{\beta^2}{8}.$$

$$+\frac{\beta}{2}\,..-\frac{\beta^2}{8}$$

At $f \sqcap \dfrac{ga}{8d}$ sive $f \sqcap \dfrac{-ga}{2\beta}$.

$$\text{Igitur ex quantitate: }\dagger\frac{cy+da}{fy+ga}\ \ddagger\ \frac{\begin{matrix}cy+c\beta\\+da\end{matrix}}{\begin{matrix}fy+f\beta\\+ga\end{matrix}}\ \text{fiet: }\dagger\frac{cy-\frac{\beta a}{4}}{-\frac{ga}{\beta}y+ga}\ \ddagger\ \frac{\begin{matrix}cy+c\beta\\-\frac{\beta a}{4}\end{matrix}}{\begin{matrix}\frac{-ga}{2\beta}y+\boxed{-}\frac{ga}{2}\\ \boxed{+ga}\end{matrix}}$$

$$\text{sive: }\dagger\frac{4c\beta y-\beta^2a}{-2gay+4ga\beta}\ \ddagger\ \frac{\begin{matrix}4c\beta y+4c\beta^2\\-\beta^2a\end{matrix}}{-2gay+2ga\beta}.$$

$$\frac{\begin{matrix}\dagger\left\{\begin{matrix}-\ 8c\beta gay^2 & +\ 2\beta^2a^2gy & \\ & -\ 8c\beta^2ga.. & -\ 2\beta^3a^2g\end{matrix}\right.\\[1ex] \ddagger\left\{\begin{matrix}-\ 8c\beta ga.. & -\ 8c\beta^2ga.. & +16ga\beta^3c\\ & 2ga^2\beta^2.. & -\ 4ga^2\beta^3\end{matrix}\right.\end{matrix}}{\begin{matrix}4g^2a^2y^2 & -\ 8g^2a^2\beta y & +\ 8g^2a^2\beta^2\\ & -\ 8g^2a^2\beta.. & +\end{matrix}}\ \text{sive}\quad\frac{\ddagger16ga\beta^3c\dagger2ga^2\beta^3,\smile 4g^2a^2}{y^2-4\beta y+2\beta^2}.$$

1+3 $-\dfrac{\beta^2}{8}$. *(1)* Sed hoc nihil noceret, nisi inde quantitas ipsius f. fieret infinita, nam 4d $-\beta \sqcap 0$ *(2)* At *L*

5 ex quantitate: Leibniz übernimmt die folgende Formel aus N. 38₁₆ S. 530 Z. 1–8.

42. DE GENERALIBUS CALCULIS CONSTITUENDIS
[Oktober 1674 – Januar 1675]

Überlieferung:

L Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 228. 1 Ausschnitt ca 20,9 x 1,2 cm. 1 1/2 Z. auf Bl. 228 r°. Bl. 228 v° leer. — Spuren fremden Textes an der oberen und unteren Schnittkante.
E (mit dt. Übs.): Knobloch, *Übersicht*, S. 4.
Cc 2, Nr. 1514

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden. Mit der Summierung von Reihen mittels der Berechnung von Momenten befaßt sich Leibniz hauptsächlich ab Oktober 1674 (vgl. N. 38, N. 40, N. 45). Ähnliche Überlegungen wie in der vorliegenden Notiz äußert Leibniz detaillierter im Schlußabschnitt von N. 43_3 vom Januar 1675. N. 42 dürfte also in der Zeit von Oktober 1674 bis Januar 1675 entstanden sein.

Constituendi generales calculi de summis, et summis summarum et momentis ex basi vel vertice. Hinc praeclara admiranda et generalia habebuntur.

43. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS
Januar 1675

Die folgenden drei Stücke stehen in einem engen Zusammenhang und sind von Leibniz unter eine Überschrift gestellt worden. Den im ersten Teilstück durchgeführten Ansatz überprüft er im zweiten mittels Kontrollzahlen, wobei er im ersten Teilstück Kontrollzahlen, Neunerproben und Nebenrechnungen sowie eine Schlußbemerkung nachträgt. Das dritte Teilstück setzt die Betrachtung fort.

43_1. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS PRIMA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 1. 1 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1 v° leer. Links Rand max. 6 cm. Am Rande Nebenrechnung zu N. 43_2 (= S. 625 Z. 6–18).
Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675

D e s e r i e b u s s u m m a b i l i b u s ,

et in specie hac: $\dfrac{1}{z^2+\dfrac{\beta}{2}z\quad *}$ ג

Reperi duo maxima geometriae problemata reduci ad summam huius seriei numerorum rationalium decrescentis in infinitum productae, $\dfrac{1}{z^2+\dfrac{\beta}{2}z\quad *}$ ponendo z esse indeterminatam progressione arithmetica crescentem, sive primanam, 1.2.3.4.5. etc. vel 1.3.5.7. etc. vel 2.5.8.11. etc. et β esse huius arithmeticae progressionis intervallum, ac proinde quantitatem eandem perpetuo et constantem.

15 ג *erg. L* 17 f. indeterminatam *(1)* geometrica *(2)* progressione *L*

16 problemata: Gemeint sind die Kreis- und die Hyperbelquadratur; s. u. N. 43_3.

Ut autem appareat, an haec series sit summabilis, nullam hactenus aliam novi methodum, quam ut omnium serierum summabilium, ipsi seriei datae, aut eius multiplae similium, fiat enumeratio. Reperta enim a me ratio est, si quis laborem calculi subire velit, enumerandi series numerorum summabiles omnes. Nimirum series sunt summabiles, quae sunt differentiae serierum. Itaque series p u r a s, atque r a t i o n a l e s, id est in quibus quantitas indeterminata non ingreditur ullam radicem, enumerare incipiemus, earumque differentias investigare. Quod si hac methodo res non succedit, videndum est, quibus casibus effici potest, ut serierum irrationalium aut non purarum, differentiae tamen fiant rationales et purae.

Incipiemus a rationalibus et puris, ex quibus simplicissima,

$$\text{(I)}\ \frac{y+d}{y+g}\text{: et differentia: (II)}\ \dagger\,\frac{y+d}{y+g}\ \ddagger\,\frac{\begin{array}{c}y+\beta\\+d\end{array}}{\begin{array}{c}y+\beta\\+g\end{array}}\ \text{qua reducta multiplicando per crucem}$$

$(\times)$ fiet (III)

$$\begin{array}{llll} \boxed{\dagger y^2} & \boxed{\begin{array}{c}\dagger dy\\ ..\beta..\\ ..g..\end{array}} & \begin{array}{l}\dagger\ \beta d\\ ..\ \boxed{g\,..}\end{array} & \smile\ \begin{array}{l}y^2+2g\,y+g^2\\ \quad +\ \beta\,..+\beta g\end{array}\\ \boxed{\ddagger y^2} & \boxed{\begin{array}{c}\ddagger \beta y\\ ..d..\\ ..g..\end{array}} & \begin{array}{l}\ddagger\ g\beta\\ ..\ \boxed{gd}\end{array} & \end{array}$$

et destructis destruendis atque ordinando in modum fractionis fiet: (IV) $\dfrac{\dagger\beta d\ \ddagger\ g\beta}{\begin{array}{c}y^2+2gy+g^2\\ +\beta\ ..+\beta g\end{array}}$.

Quod si ab initio posuissemus (V) $\dfrac{y+d}{fy+ga}$ habuissemus: (VI) $\dfrac{\dagger\beta df\ \ddagger\ g\beta a}{\begin{array}{c}f^2y^2+2fagy+a^2g^2\\ +f^2\beta\ ..\ +agf\beta\end{array}}$. $(\aleph)$

Idque utilius arbitror. Porro quoniam inventa haec series, cuius formula $(\aleph)$ eundem constantem habet numeratorem, negligi poterit ille, et formula eius conferri cum hac,

3 a me *erg. L* 4 numerorum *erg. L* 5 differentiae *(1)* summab *(2)* serierum *L* 12 reducta | fiet *streicht Hrsg.* | multiplicando *L*

$\dfrac{1}{f^2y^2+f^2by+f^2ca}$. Unde quoniam termini primi iidem, conferendo secundos, fiet aequatio haec: $2ag+f\beta \sqcap fb$. Unde $g \sqcap f, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}$ et $a^2g^2 \sqcap \dfrac{f^2}{4} \frown b^2-2b\beta+\beta^2$, eosque valores inserendo in aequationem $a^2g^2+agf\beta \sqcap f^2ca$ ex terminis ultimis collatis natam, fiet, $a^2f^2 \frown \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2}{4}, +f^2\beta \frown \dfrac{b-\beta}{2} \sqcap f^2ca$. et ipsa f^2 per divisionem evanescente fiet $c \sqcap \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2+2b\beta-2\beta^2}{4a}$ sive $\underline{\underline{c}} \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4a}$. Itaque formula omnis, cuius series, summatrix, pura et rationalis, poterit reduci ad hanc: ב $\dfrac{1}{y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$. Ex hoc calculo apparet, etiam f. fuisse inutilem. Iam cum hac serie inventa ב, conferri non potest data ג. Sequeretur enim $\dfrac{\beta}{2} \sqcap b$. ex collatis terminis secundis, ponendo $z \sqcap y$ et $\beta \sqcap b$ ex collatis ultimis. Quod implicat. Quod si explicemus z per $y+d$. ex formula ג, fiet ה $\dfrac{1}{\begin{array}{c}y^2+2dy+d^2\\ +\dfrac{\beta}{2}\,..+\dfrac{\beta d}{2}\end{array}}$. Unde collatis formulis ה et ב, ob terminos secundos, fiet: $b \sqcap \dfrac{4d+\beta}{2}$, sive $b^2 \sqcap \dfrac{16d^2+8d\beta+\beta^2}{4}$. Sed ob terminos ultimos, fiet alius valor, ipsius b^2, nempe $4d^2+2\beta d+\beta^2$. Contradictio ergo, sive differentia inter hos duos valores est $\dfrac{3\beta^2}{4}$. Eadem autem erat supra contradictio sive differentia, inter duos ipsius b^2, valores

4 $\sqcap$ $\mathrm{f^2ca}$. *(1)* destructaque omn *(2)* in *(3)* et *L* 4 f. evanescente *(1)* fiet c $\sqcap$ *(2)* et ponendo b − a $\sqcap$ d. (quoniam nulla hic confusio metuenda, quandoquidem superiore ipsius d significatione non amplius opus habemus,) sive $\underline{\underline{\mathrm{b}}} \sqcap \mathrm{d+a}$. fiet $\underline{\underline{\mathrm{c}}} \sqcap \dfrac{\mathrm{ad^2+d\beta^2}}{\beta^2}$. Formula ergo omnis, cuius series summatrix pura et rationalis, non assurgit ultra primanos; ad hanc reduci potest: $\dfrac{1}{\begin{array}{c}\mathrm{y^2+dy+ad^2}\\ \mathrm{+a..+\beta^2d}\end{array}}$ *(3)* fiet *L* 8 data ג. *(1)* ponendo enim $\dfrac{\beta}{2} \sqcap \mathrm{b}$. Ergo $\dfrac{\beta^2}{4} \sqcap \mathrm{b^2}$ ob terminos secundos, impossibile est ergo esse b $\sqcap \beta$ ut sequeret *(2)* Sequeretur *L* 10 terminos *(1)* ultimos, fiet *(2)* secundos *L* 12 terminos *(1)* primos *(2)* ultimos, | fiet: *streicht Hrsg.* | fiet *L*

nempe $\frac{\beta^2}{4}$ et β^2. Patet ergo explicationem impossibilitati non mederi. Quod generaliter demonstrari operae pretium foret. Plurimum enim calculos contrahit haec observatio. Demonstrabitur autem optime conferendo formulam quandam indeterminatam, modo explicatam, modo non explicatam, cum quadam alia indeterminata: Hoc modo: Sit formula: $y^3+by^2+acy+a^2d$. conferenda cum formula alia simili $y^3+ey^2+afy+a^2g$, vel eius explicatione, si in locum ipsius y in posteriore substituatur $y+h$, ita enim non desinet esse similis: sed ita aio si collatio inter non explicatas impossibilis, fore et inter explicatas; nam si non explicatas conferas, literae fiunt eaedem, erit enim $b \sqcap e$. et $c \sqcap f$. et $d \sqcap g$. (in quibus valoribus continetur impossibilitas). Idem ergo est conferre aequationem explicatam cum alia, quod conferre cum se ipsa non-explicata; explicatio ergo mutat nihil. Nempe [si] pro $z^2+\frac{\beta}{2}z *$. ponas z^2+z+ac, et cum eo conferas $y^2+by+\frac{b^2-\beta^2}{4}$ sive si id cum $y^2+2dy+d^2$ conferas, sive conferas cum $y^2+ly+am$. Itaque antea conferas has duas

$$\begin{array}{l} +e \;..\; +ed \\ \qquad +ac \end{array}$$

novissimas formulas, nempe ex secundis $e \sqcap l-2d$. ergo erit $am \sqcap \boxed{d^2}+ld, -\boxed{2}d^2+ac$. Unde $\begin{array}{l} y^2+ly+ld \\ \qquad\quad -d^2 \\ \qquad\quad +ac \end{array}$, adeoque $l \sqcap b$. etc. Sed nota si explicatio mutet gradum formulae, ut si pro z ponatur y^2 etc. aliterve tunc fieri posse, ut postea succedat collatio. Sed haec obiter.

Uno iam gradu altius ad formulam quadratricem altiorem assurgamus:

$$\text{(VII)}\quad \frac{y^2+ny+ap}{\frac{q}{a}y^2+ry+as}.\ \text{et differentia erit:}\ \text{(VIII)}\ \dagger\ \frac{y^2+ny+ap}{\frac{q}{a}y^2+ry+as}\ \ddagger\ \frac{\begin{array}{l} y^2+2\beta y \quad +\beta^2 \\ \quad +\ n \;..\; +n\beta \\ \qquad\qquad\quad +ap \end{array}}{\begin{array}{l} \frac{q}{a}y^2+2\beta\frac{q}{a}y+\frac{q}{a}\beta^2 \\ \qquad +\ r \;..\; +r\beta \\ \qquad\qquad\quad +as \end{array}}.$$

6 in *(1)* eius locum substitu *(2)* locum *L* 11 si *streicht L, erg. Hrsg.* 11 et *(1)* conferas cum $\frac{1}{y^2+by}$ *(2)* cum *L* 16 explicatio *(1)* contineat praeterea *(2)* mutet *L* 21 altius *(1)* | assurgamus *streicht Hrsg.* | ad formulam: *(2)* ad *L*

Qua formula reducta apparebit, non assurgi altius quam si l. et n. fuissent $\sqcap$ 0. nempe etsi in speciem nominator huius differentiae reductae assurgat ad quadratoquadratum, tamen quadratoquadrato, et cubo destructis, in numeratore restabit tantum quadratus cum radice. Nominator vero utique ad quadratoquadratum assurget. Facta ergo multiplicatione per crucem, fiet numerator IX

$$\begin{array}{llllllllll}
-50 & \ddagger\frac{qn}{a}\beta & y^2 & -\ 6 & \ddagger 2qp\beta & y & -\ 3 & \ddagger qp\beta^2 & . \\
 & & & -\ 2 & ..\frac{qn}{a}\beta^2 & .. & -12 & ..rpa\beta & \\
+4[\frown 25] & \ddagger r\beta & .. & +12 & \ddagger 2as\beta & .. & +\ 6 & \ddagger as\beta^2 & \\
 & & & \underline{+\ 4} & ..r\beta^2 & .. & \underline{+12} & ..nsa\beta & \\
 & & & \quad 8\frown 5 & & & \quad 3 & & \\
 & & & 40 & & & & & \\
 & \boxed{q.n.r.} & & & \boxed{\begin{array}{l} q.n.r. \\ p.s. \end{array}} & & & \boxed{\begin{array}{l} q.n.r. \\ p.s. \end{array}} &
\end{array}$$

Quem conferamus cum alia formula, $ady^2 + a^2ey + a^3f$. Hinc opeque huius collationis investigabimus literas, ipsi numeratori proprias, n. et p. nam reliquae, q, r, s. sunt ipsi cum nominatore communes, nempe ex terminis primis $n \sqcap \ddagger\frac{a^2d}{q\beta} + \frac{ra}{q} \sqcap \ddagger\frac{a^2d + ra\beta}{q\beta}$ et ob terminos secundos, $p \sqcap \frac{\ddagger a^2e \ddagger ad\beta \boxed{-r\beta^2} + 2as\beta \boxed{+r\beta^2}}{2q\beta}$ et ob terminos ultimos,

---

6–11

$$\begin{array}{rl}
\textit{Kontrollrechnung}: & +50 \\
 & +40 \\
 & \underline{+\ 3} \\
 & \ \ 93 - 46 \sqcap 47
\end{array}$$

3 in numeratore *erg. L* 8 $\frown$ 25 *erg. Hrsg.* 14 Hinc *(1)* in collatis terminis primis q $\sqcap$ *(2)* opeque *L* 16 ex ... primis *erg. L*

6–11 u. S. 612 Z. 1–3: Leibniz verwendet die Kontrollzahlen $a = q = \beta = 1$, übernimmt von N. 46₂ S. 621 Z. 10 die Werte $y = 5, n = 2, p = 3, r = 4, s = 6$ und setzt $\ddagger$ gleich $-$. Für die Neunerprobe in S. 612 Z. 1–3 kommen die Werte $e = 8$ und $d = 2$ hinzu. — Vgl. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

$$\overset{4}{}\qquad\overset{8}{}\qquad\qquad\qquad\overset{3}{}$$

$f \sqcap + q\beta\; a^{\cancel{2}}e - q\beta\cancel{d}d\beta \pm 2q\beta\cancel{d}s\beta \;\pm 2\cancel{d}s\beta^2,\; -2a^2ds\cancel{d}\boxed{\pm 2ra\beta s\cancel{d}},,\; \smile 2qa^2$, et fiet nume-

$$ra \ldots \qquad ra \ldots \qquad \boxed{.\,ra \ldots}$$

rator: $$\frac{\begin{array}{l} ady^2 + a^2ey \pm a\beta^2 s - \;\beta^2\, d\, q + \beta a\, e\, q \pm 2\beta^2 qs \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - \;a\beta\; \cdot r + a^2\; \cdot r \\ \qquad\qquad\qquad\qquad - 2a^2\; \cdot s \end{array}}{\dfrac{2q}{a}}$$

Nominator vero formulae VIII erit

$$\begin{array}{llll}
\text{X}\;\; 625)\dfrac{q^2}{a^2}y^4 8) + \dfrac{2qr}{a}\;\; y^3\; 12) + 2qs\quad y^2 & & & \\
\qquad\qquad\qquad 16) + \;\; r^2 \quad .. & 48) + 2rsa\;\; y\; 36) + a^2s^2 & & \\
+\dfrac{2\beta q^2}{a^2} \ldots \quad \boxed{+\dfrac{qr\beta}{a}\quad ..} & & & \\
\qquad\qquad + \dfrac{3\,2\,\beta qr}{a}\; .. & + r^2\beta\;\; \cdot & & \\
 & + 2\beta qs\; \cdot & + asr\beta & \\
\qquad\qquad + \dfrac{q^2}{a^2}\beta^2 \quad .. & + \dfrac{rq\beta^2}{a}\; \cdot & + sq\beta^2 &
\end{array}$$

9–14 *Neben- und Kontrollrechnungen*:

$$\begin{array}{r} 5 \\ \underline{25} \\ 125 \\ \underline{5\;\;\;} \\ 625 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 48 \\ \underline{5} \\ 240 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 125 \\ \underline{8} \\ 1000 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 28 \\ \underline{25} \\ 140 \\ \underline{56\;} \\ 700 \end{array}$$

---

2 $\pm 2\cancel{d}s\beta^2$: Richtig wäre $\pm 2qs\beta^2$; da Leibniz auf S. 613 Z. 5 $q = a$ setzt, wird der Fehler kompensiert.
9–14 Vgl. Erl. zu S. 611 Z. 6–11 u. Z. 1–3.

Calculus cum eo, quem alibi inii consentit. Superest ut hanc quoque formulam X, cum alia generali, $y^4+gy^3+ahy^2+a^2ly+a^3m$ [conferamus]. Nam terminum summae dimensionis per aliquam arbitrariam multiplicare nolui, quia non possunt eiusdem fractionis omnes termini tam in numeratore, ut supposuimus, quam in nominatore, assumi arbitrarii. Itaque $\underline{\underline{q}} \sqcap a$. Instituta iam collatione ex terminis 2^{dis} erit $r \sqcap \dfrac{g-2\beta}{2}$, et ex terminis tertiis fiet: $s \sqcap ah \left\{\begin{array}{l} -g^2 \quad -\boxed{3}\,\beta \frown \dfrac{g\boxed{-2\beta}}{2}\ \boxed{-}\,\beta^2,, \smile 2q \\ \boxed{+4g\beta} \\ \dfrac{\boxed{-4\beta^2}}{4} \end{array}\right.$ $+$ sive $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$

612,9–14

		625			625
8	$\frown$	125	$\sqcap$	1000	1000
12, 16 }	$\frown$	25	$\sqcap$	700	700
48	$\frown$	5	$\sqcap$	240	240
		36			36
2	$\frown$	125	$\sqcap$	250	2601
12	$\frown$	25	$\sqcap$	300	250
1				25	325
16					160
12					24
4					6
32	$\frown$	5	$\sqcap$	160	3366
		24			
		6			

2 conferamus *erg. Hrsg.*

1 alibi: N. 38₁₆ S. 533 Z. 9 – S. 534 Z. 5.

et $rs \sqcap \dfrac{4ahg - g^3 \boxed{-2\beta g^2}\boxed{+4\beta^2 g} - 8a\beta h \boxed{+2\beta g^2} + 8\,4\,\beta^2 g - 8\beta^3}{16a}$. Et $r^2 \sqcap \dfrac{g^2 - 4g\beta + 4\beta^2}{4}$. Quos valores substituendo in aequatione ex terminis quartis collatis nata, ex $l \sqcap \dfrac{2ars + \beta r^2 + 2\beta as + \beta^2 r}{a^2}$, fiet:

$l \sqcap 4ahg - g^3 \boxed{-8a\beta h}\ \boxed{+8\beta^2 g}\ \boxed{-8\beta^3},\ \boxed{+2\beta g^2}\ \boxed{-8g\beta^2}\ \boxed{+8\beta^3}, \boxed{+8\beta ah}\boxed{-2\beta g^2}$ $\boxed{-4\beta^2 g}\boxed{+8\beta^3}, \boxed{+4\beta^2 g}\boxed{-8\beta^3},, \smile 8a^2$, sive $l \sqcap 4ahg - g^3, \smile 8a^2$.

Eodem modo $m \sqcap a^{\cancel{2}}s^2 + \cancel{a}\beta rs + \cancel{a}\beta^2 s, \smile a^{\cancel{3}2}$. ex collatione ultimorum, et pro s. et rs. substituendo eorum valores, ac pro s^2, ponendo:

$$\frac{\overset{\cancel{4}}{16a^2h^2} - \overset{\cancel{5}}{8ahg^2} - \overset{\cancel{1}}{16ah\beta g} + \overset{\cancel{7}}{32ah\beta^2}, \overset{\cancel{1}}{+g^4} + \overset{\cancel{4}}{4\beta g^3} - \overset{\cancel{5}}{4(-8)\beta^2 g^2}\boxed{+4\beta^2 g^2} - \overset{\cancel{2}}{16\beta^3 g}, \overset{\cancel{7}}{+16\beta^4}}{64a^2}$$

fiet $\underset{\langle\cancel{3}\rangle}{\underline{m}} \sqcap \underset{\cancel{4}}{16a^2h^2} - \underset{\cancel{5}}{8ahg^2}\boxed{-16ah\beta g} + \underset{\cancel{7}}{32ah\beta^2} + \underset{\cancel{1}}{g^4}\boxed{+4\beta g^3}\boxed{-4\beta^2 g^2}\boxed{-16\beta^3 g} + \underset{\cancel{7}}{16\beta^4}$,

$\boxed{+16\beta ahg}\boxed{-4\beta g^3}\boxed{-32a\beta^2 h}\boxed{+32\beta^3 g}\boxed{-32\beta^4}, \boxed{+32\beta^2 ah} - 12\underset{\cancel{6}}{8}\,\beta^2 g^2 \boxed{-16\beta^3 g}\boxed{+32\beta^4},,$

$\smile 64a^3$. adeoque $m \sqcap 16a^2h^2 - 8ahg^2 + 32ah\beta^2 + g^4 + 16\beta^4 - 12\beta^2 g^2, \smile 64a^3$.

613,6 f. *Unter* $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$: Causa erroris in seqq. quod hic pro $4\beta^2$. scripseram β^2.

613,6+7 $s \sqcap \dfrac{\overset{2}{4ah} - \overset{8}{g^2} - \overset{7}{2\beta g} + \overset{1}{4\beta^2}}{8a}$: Leibniz hat den Faktor 4 im letzten Term des Zählers zunächst vergessen. Der Fehler pflanzt sich fort bis S. 619 Z. 3. Auf S. 619 Z. 8 f. entdeckt Leibniz eine andere Unstimmigkeit und überprüft daraufhin die Rechnung auf dem folgenden Bogen sowie durch Rechenkontrollen S. 611 Z. 6–11, S. 612 Z. 1–3, S. 612 Z. 9–14, S. 613 Z. 6, Z. 8–13 u. S. 619 Z. 2. In N. 43_2 S. 624 Z. 3 f. erkennt er die Ursache des ersten Fehlers und verbessert von S. 613 Z. 7 – Z. 14. Die Neunerprobe S. 613 Z. 6 mit den Werten $g = 10$ und $h = 41$ von N. 46_2 S. 622 Z. 18 sowie die restliche Rechnung korrigiert er nicht. 8 Vgl. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

Formula ergo, cuius summatrix ascendit ad quadratum, ad hanc semper fractionem reduci poterit: $dy^2 + aey + a^2f \;\smile\; y^4 + gy^3 + ahy^2 + a^2ly + a^3m$, modo explicentur, m, l, f. per solas a, β, d, e, g, h. Valores autem ipsarum m, et l, ita habemus inventos per has solas. Tantum ergo opus est, ut in valore ipsius f, ipsae r. et s. explicentur. q. quoque explicanda est per a. Habebimus ergo hunc valorem ipsius f,

$$f \;\sqcap\; \underset{/}{\boxed{8a^2\beta e}}, +4ga^2e\underset{/}{\boxed{-8\beta a^2e}}, \underset{//}{\boxed{-8a\beta^2d}}, \underset{///}{\boxed{-4ga\beta d}}\underset{//}{\boxed{+8\beta ad\beta}}, \boxed{\dagger 2qs\beta^2 \dagger 2as\beta^2},$$

$-8a^2dh + 2adg^2\;\underset{///}{\boxed{+4ad\beta g}} - 2ad\beta^2,, \smile 16a^3$, adeoque destructis destruendis, et deprimendo per $2a$, fiet $f \sqcap +2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d, \smile 8a^2$. Itaque formula quaelibet seriei summabilis per aliam seriem quadratricem ad quadratum nec ultra assurgentem, reduci poterit ad formulam hanc,

(XI)

$$dy^2 + aey + \frac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}, \smile\; y^4 + gy^3 + ahy^2 + \frac{4ahg - g^3 - 3\beta^2 g}{8}\, y + \frac{16a^2h^2 - 8ag^2h + 8a\beta^2h - 6\beta^2g^2 + g^4 - \beta^4}{64}.$$

Proposita autem formula seriei cuius summatrix quaeritur, ante omnia reddenda est huic formulae similis, ideoque necesse est dimensionum huius numerum non excedere; aut si excedat, debet divisibilis esse, sive debent numerator et nominator habere communem mensuram. Sin infra numerum dimensionum subsidat data; impleri poterit ille, vel multiplicatione vel adiectione; multiplicatione, multiplicando datam per quandam arbitrariam formulam; adiectione, addendo ei aut subtrahendo aliam cuius summatrix nota est: nam si productae summatrix inveniri poterit, eo ipso etiam propositae summatrix reperietur; auferendo vel addendo summatricem adiectae a summatrice productae. Ubi iam formula proposita formulae summabili, nempe (XI) similis reddita est, instituenda est collatio, quae si succedit, habemus inventam seriem propositae summatricem. Sin vero collatio nos ducat ad impossibile, sequitur neque seriem propositae (aut productae ex proposita cum alia cognitae summatricis) summatricem huius cuius summatrix proposita, nempe hoc loco quadratici gradus esse.

8 quaelibet *(1)* summabilis per aliam form *(2)* seriei *L* 9 nec ultra *erg. L* 16 debet *(1)* numerator divisibilis esse, sive debet *(2)* divisibilis *L* 17 numerum *(1)* terminorum *(2)* dimensionum *L* 18 vel *(1)* additione *(2)* adiectione *L* 20 f. reperietur; *(1)* addendo *(2)* auferendo *(a)* si *(b)* vel *L* 22 proposita *(1)* quadrabili *(2)* formulae *L*

Haec iam in formula data ג, et summatrice XI. experiamur; ac primam seriem $\dfrac{1}{z^2 + \dfrac{\beta}{2}z \quad *}$ ponendo $z \sqcap y$ multiplicemus per $dz^2 + aez + \dfrac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}$. Fiet numerator productus idem cum numeratore formulae XI. ponendo esse $x \sqcap y$ quod alioqui necessarium erat, quia numerator formulae huius, ג, est 1. Ergo superest, ut nominatorem formulae ג, multiplicando per numeratorem formulae XI. conferamus productum cum nominatore formulae XI. productum erit

$$\text{XII} \quad \begin{array}{llll} dy^4 & +\dfrac{d\beta}{2}\,y^3 & * & \\ & +ae \;\; \ldots \;\; + & \dfrac{ae\beta}{2}\;y^2 & \\ & & +\dfrac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8} \;\; .. & +\dfrac{2aeg\beta - 4adh\beta + dg^2\beta - \beta d}{16}\;y \quad * \end{array}$$

Quae formula conferatur nominatori formulae XI. per $\underline{d}$. multiplicato, $dy^4 + dgy^3 + adhy^2$ etc. etc. Unde termini primi iidem. Et conferendo secundos, $e \sqcap \dfrac{2gd - \beta d}{2a}$. Et ex collatis tertiis fiet: $3\,4\,\cancel{d}gd\beta - 2\cancel{d}\beta^2 d + 2\cancel{d}g^2 d \boxed{-\cancel{d}\beta gd} - 4adh + dg^2 - \beta^2 d, -8adh \sqcap 0$, sive fiet, $h \sqcap 3g\cancel{d}\beta - 2\cancel{d}\beta^2 + 2\cancel{d}g^2 + \cancel{d}g^2 - \beta^2\cancel{d}, \smile 12a\cancel{d}$.

Collatis quartis poterunt omnia dividi per d, proinde ipsa d. est inutilis, cumque duae supersint aequationes, una ex collatis quartis, altera ex collatis ultimis sive quintis terminis; arbitraria autem non nisi unica sit, quae restet, nempe g. cum d. sit inutilis; patet collationem impossibilem esse. Potuissem loco formulae ג adhibere formulam ה, sed calculus erit prolixus, effectus vero quantum iudicare licet, idem.

Itaque ad alteram methodi partem recurrendum est, et ipsi $\dfrac{m}{\dfrac{s}{a}y^2 + \dfrac{\beta}{2}y \; *}$ addenda formula ב, $\dfrac{n}{\dfrac{a}{s}y^2 + by + \dfrac{b^2 - \beta^2}{4}}$.

$$\frac{ma}{s}y^2 + mb\,y + \frac{mb^2 - m\beta^2}{4}$$

2 ponendo z ⊓ y *erg. L* 3 ponendo ... x ⊓ y *erg. L* 11 Unde *(1)* conferendo terminos primos, sequitur esse d ⊓ a. et e ⊓ g *(2)* termini *L* 14 quartis *(1)* habebitur pure ipsa d. nempe fiet 8ah *(2)* poterunt *L* 15 collatis *(1)* tertiis *(2)* quartis *L* 19 et *(1)* |ipsi *streicht Hrsg.*| *(2)* form *(3)* ipsi *L*

$$\text{Summa: } \frac{\frac{ns}{a}\,..\;+\;\frac{\beta n}{2}\,..}{\begin{array}{l} y^4+\frac{bs}{a}y^3+\frac{s}{a}\frown\frac{b^2-\beta^2}{4}y^2 \\ \quad+\frac{\beta a}{2s}\,...+\qquad\frac{\beta b}{2}\qquad..+\frac{\beta b^2-\beta^3}{4}y \;\;* \end{array}} \quad \text{XIII}\,.$$

Quae formula XIII. conferenda cum formula XI, numerator primum cum numeratore, ubi conferendo terminos primos, fiet: $m \sqcap \dfrac{dsa-ns^2}{a^2}$, et ex secundis collatis fiet, $e \sqcap 2dsab-2ns^2b+a^2\beta n, \smile\, 2a^3$; et ex tertiis fiet: $2dsabg-2ns^2bg+a^2\beta ng, -4a^3dh+da^2g^2-\beta^2a^2d \sqcap +2dsab^2-2ns^2b^2, +2dsa\beta^2-2ns^3\beta^2$ XIV . In qua aequatione num. [XIV.] sunt arbitrariae d,s,n,b,g,h, et cuiusnam autem valorem eius ope inveniri satis sit, patebit ex progressu. Nam ex istis 6 literis arbitrariis alicuius quae et in nominatore reperitur quaerendus est valor; nempe ex his, $s.b.g.h$. Si hae 4 literae in nominatore collationi non satisfaciunt, ut scilicet hoc modo, et reliquae, d,n, in nominatorem gliscant; sin illis careri potest, interest ad calculi compendium, ipsas in nominatorem non intrare; id ergo primum in nominatore excutiendum est. Nimirum ex secundis ipsius nominatoris, $2s^2b+\beta a^2 \sqcap 2gas$, adeoque $b \sqcap 2gas-\beta a^2, \smile\, 2s^2$. Et $b^2 \sqcap 4g^2a^2s^2-4ga^3s\beta+\beta^2a^4, \smile\, 4s^4$. Unde in terminis tertiis fiet: $4g^2a^2s^2-4ga^3s\beta+\beta^2a^4, -4as^3\beta^2, +8\beta asgas-4\beta as\beta a^2, \sqcap 16as^3ah$, cuius aequationis ope quaeri potest valor ipsius s, per extractionem radicis cubicae. Penultima dabit sequentem valorem ipsius h, nempe $h \sqcap +4s^4g^3+12s^4\beta^2g, +4g^2a^2s^2\beta-4ga^3s\beta^2+\beta^3a^4-4s^4\beta^3, \smile\, 16ags^4$. Et denique ex ultimis fiet: $16a^2h^2-8ag^2h+8a\beta^2h-6\beta^2g^2+g^4-\beta^4 \sqcap 0$. Quarum trium aequationum ope inveniri poterit valor trium incognitarum, nempe, s,h,g.

---

11 *Über* gliscant: intret. *Am Rande*: Imo frustra efficiemus ut literae numeratoris intrent in nominatorem, nam si semel literarum quales sunt collatio impossibilis, erit etiam impossibilis valore quolibet substituto.

1 *(1)* Numerator *(2)* Summa *L* 4 $\dfrac{\mathrm{dsa-ns^2}}{\mathrm{a^2}}$, *(1)* et ex secundis $\dfrac{2\mathrm{ds}\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{b}-2\mathrm{ns^2}\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{b}+\beta\mathrm{na}^{\cancel{2}}}{\cancel{2\mathrm{a}^2}} \sqcap 2\mathrm{a^3e}$, sive $\mathrm{n} \sqcap \dfrac{2\mathrm{ae}-2\mathrm{db}}{}$ *(2)* et *L* 6 f. num. *(1)* XIV. *(2)* | XIII. *ändert Hrsg.* | sunt *L* 8 progressu. *(1)* Nam si ipsius nominatoris literae, in *(2)* Nam *L* 12 f. Nimirum *(1)* bs *(2)* ex *(a)* primis *(b)* secundis *L* 14 terminis *(1)* secundis *(2)* tertiis *L* 16 cubicae. *(1)* Et quoniam duae quae restant aequationes collatitiae, ex terminis penultimis et ultimis, ipsam s. non amplius continent. Missa ergo tantisper hac aequatione, reliquas duas excutiamus, et *(2)* Penultima | quidem *gestr.* | dabit *L*

Quod si nulla harum trium aequationum impossibilis, habebimus desideratum. Quod si aliter rem instituamus, et ope XIV quaeramus h. tunc omnes reliquae, $d.n.s.g.b.$ ingredientur in nominatorem, et cum aequationes collatitiae in nominatore futurae sint tantum quatuor; erunt indeterminatae quinque, ac proinde una supernumeraria, cuius ope poterit ultima aequatio reddi quam simplicissima, et si licet pura, quo facto et reliquae omnes literae pure habebuntur. Sed antequam absolvendi eius calculi sic satis prolixi laborem suam, operae pretium erat investigare in numeris veritatem formularum ב et XI. Et quidem quod ad formulam ב, quae coincidit formulae IV. illud reperimus, si qua data sit series cuius formula reducta ad ב, vel sumto numeratore ex IV, nominatore ex ב, ad hanc, $ǂ\beta d ǂ gb \,,\smile y^2 + by + \dfrac{b^2-\beta^2}{4}$, vel (: pro g substituendo eius valorem supra inventum, $\dfrac{fb - f\beta}{2a}$:) ad hanc:

☉ $\boxed{ǂ\beta d \ \dfrac{ǂfb^2 \dagger f\beta b}{2a} \smile y^2 + by + \dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$, tunc formulam s e r i e i s u m m a t r i c i s esse (I) nempe $y + d \smile y + g$, vel (: explicando g :) ☽ $\boxed{y + d \smile y \ \dfrac{+fb - f\beta}{2a}}$. Eodem modo reperimus si s e r i e i s u m m a n d a e formula sit reducibilis ad hanc

XI $\boxed{dy^2 + aey + \dfrac{2aeg - 4adh + dg^2 - \beta^2 d}{8}, \smile y^4 + gy^3 + ahy^2 + \dfrac{4ahg - g^3 - 3\beta^2 g}{8}y + \dfrac{16a^2h^2 - 8ag^2h + 8a\beta^2 h - 6\beta^2 g^2 + g^4 - \beta^4}{64}}$ ☿

formulam s e r i e i s u m m a t r i c i s fore VII, $\boxed{y^2 + ny + ap \smile y^2 + ry + as}$. Est autem ex superioribus

1 trium *erg.* *L* 3 et *(1)* habebitur denique *(2)* cum *L*

10 $ǂ\beta d ǂ gb$: Der Zähler von IV lautet richtig $ǂ\beta d ǂ g\beta$. Der Fehler wirkt sich auf Z. 12 aus. Durch die Kontrollrechnung S. 619 Z. 4–9 erkennt Leibniz die Unstimmigkeit, vermutet aber eine andere Ursache. Zu Beginn von N. 43₂ führt er die Rechnung korrekt durch. 10 supra: S. 609 Z. 2.

♀ $\underline{n} \sqcap \ddagger 2ad + g\beta - 2\beta^2 \smile 2\beta$. Et $\underline{p} \sqcap \ddagger 4a^2e \ddagger 4ad\beta + 4\beta ah - \beta g^2 - 2\beta^2 g + 4\beta^3 \smile 8a\beta$. Et
$-\cancel{32} \quad +8 \quad + \cancel{164} - \cancel{100} - \cancel{20} \quad +\cancel{1}, \smile \quad \cancel{8}$
$\underline{r} \sqcap g - 2\beta, \smile 2$, et $\underline{s} \sqcap 4ah - g^2 - 2\beta g + \beta^2, \smile 8a$.

Primum ergo ut veritatem relationis inter duas formulas ☉ et ☽ in numeris exploremus, ponamus $b \sqcap 2$. $d \sqcap 3$. $f \sqcap 4$. $a \sqcap 1$. $\beta \sqcap 1$. et ex formula ☽ fiet in numeris, $y + 3 \smile\ ,, y, \boxed{+8-4} + 4 \smile 2 \sqcap y + 3 \smile y + 2$, et ponendo $y \sqcap 5$, fiet: $8 \smile +7 \sqcap \frac{8}{7}$, ponendo vero $y \sqcap 6$, fiet $\frac{9}{8}$, quarum differentia $\frac{1}{56} \sqcap$ ☉. Quod videamus an sit verum: $\dagger 3,, \ddagger 16 \dagger 8, \smile 2 \sqcap \dagger 3 + 4,,, \sqcap 1$. quia $\dagger \sqcap -$. ex formula (II). Numerator ergo 1. Nominator vero $25 + 10 \; \dfrac{+4-1}{4}$ in quo cum sit error necesse erit calculum hunc ☉ et ☽ concernentem resumere scheda sequente, adiectis statim numeris. Calculus verus fuit sed error in numeris. Posito b non 2 sed 5 res successit. Vide initium plagulae sequentis, ubi et calculum sequentem ☿ et ♀ non fere nisi uno in loco comperi corruptum, ac restitui.

1 *Faktor* 4 *vor* β^3 *erg. L* 10–12 Calculus ... initium *(1)* paginae *(2)* plagulae ... restitui *erg. L* 12 nisi | in *streicht Hrsg.* | uno *L*

1 f. Zur Kontrollrechnung $+\cancel{1}$ unter $4\beta^3$ s. Lesart zu Z. 1. 10 f. Calculus ... successit: s. o. Erl. zu S. 612 Z. 2 – Vide: s. o. Erl. zu S. 613 Z. 6+7.

43_2. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS SECUNDA

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 2 1 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 2 r°. Bl. 2 v° leer. Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675

Pars II. schediasmatis d e s e r i e b u s s u m m a b i l i b u s,

et in specie hac: $\dfrac{1}{z^2 + \dfrac{\beta}{2}z \quad *}$

$$\ddagger \ \llcorner 5y + 1\beta + 3d \smile 5y + 1\beta + 2g \lrcorner \ \ddagger \ \llcorner 5y + 3d \smile 5y + 2g \lrcorner \ \sqcap$$

$$5 + 4 \smile 5 + 3 \quad - \quad 5 + 3 \smile 5 + 2$$
$$9 \smile 8 \quad - \quad 8 \smile 7 \qquad \sqcap \ \frac{9}{8} - \frac{8}{7} \sqcap -\frac{1}{56}$$

$$\left.\begin{array}{l} \ddagger \left\{ \begin{array}{l} 25y^2 + 1\beta\, 5y + 2g1\beta \\ \quad + 3d\ ..\ \boxed{..3d} \\ \quad + 2g\ .. \end{array}\right. \\ \\ \ddagger \left\{ \begin{array}{l} 25y^2 + 1\beta\, 5y + 3d1\beta \\ \quad + 2g\ ..\ \boxed{..3d} \\ \quad + 3d\ .. \end{array}\right. \end{array}\right\} \smile \begin{array}{l} 25y^2 + (2)\, 2g\, 5y + 4g^2 \\ \\ \quad + 1\beta\ .. + 1\beta 2g, \end{array} \qquad \sqcap$$

$$\frac{\ddagger 3d1\beta \ddagger 2g1\beta}{\begin{array}{l}25y^2 + (2)\, 2g5y + 4g^2 \\ \quad + 1\beta\,.. + 1\beta 2g\end{array}} \sqcap [-]\frac{1}{56}$$

Quae formula ita producta conferatur quoad nominatorem cum hac generali: $25y^2 + 5b5y + 6ca$. Termini primi iidem sunt, collatis secundis $2g \sqcap 5b - 1\beta, \smile (2)$. et $4g^2 \sqcap 25b^2 - (2)\, 5b1\beta + 1\beta^2, \smile (4)$; unde $6ca \sqcap 25b^2 - (2)\, 5b1\beta + 1\beta^2, + (4)\, 1\beta \overbrace{\underbrace{2g}, \smile (4)}^{5b - 1\beta, \smile (2)}$. Et ex-

19 $-$ *erg. Hrsg.* 23 $\underbrace{2g}, \smile (4)$. *(1)* Unde ex formula generali fiet haec: $25y^2 + 5b5y$ *(2)* Unde ex formula *(3)* Et *L*

plicando g, erit $6ca \sqcap 25b^2 \boxed{-2\,5b1\beta}\boxed{+1\beta^2}, \boxed{+2\,1\beta 5b} - 1\,\boxed{2}\,1\beta^2, \smile 4$. Unde ex formula generali fiet haec ad rem accommodata, nempe $25y^2+5b5y+\dfrac{25b^2-1\beta^2}{4}$. Adeoque si formula seriei cuiusdam datae reduci queat ad hanc

$$\boxed{\boxed{\ddagger 3d1\beta,, \ddagger 5b1\beta \ddagger 1\beta^2, \smile 2,,, \smile ,,, 25y^2+5b5y,, +25b-1\beta^2, \smile 4}}\ \odot$$

erit formula seriei summatricis $\begin{array}{l} \ddagger 5y+3d \smile 5y+2g \\ \qquad +1\beta \qquad +1\beta \end{array}$, sive explicando g, fiet:

$$\boxed{\boxed{\begin{array}{l} 5y\ +3d\smile 5y+\dfrac{5b-1\beta}{2} \\ \quad +1\beta \qquad\quad +1\beta \end{array}}}\qquad ☽.$$

Procedamus nunc ad examen formularum ☿ et ♀.

Sit formula summatrix $\left(\frac{38}{51}\right)$ $25y^2+2n5y+3pa \smile 25y^2+4r5y+6sa$. et differentia eiusdem formulae ab alia in qua in locum $5y$ substituta sit quantitas $5y+1\beta$ erit

$$\begin{array}{llll} \ddagger\llcorner 25y^2 + 2\,1\beta\,5y + & 1\beta^2 & \smile & 25y^2 + 2\,1\beta\,5y + \ 1\beta^2 \lrcorner \\ \qquad + \ 2n\ ..+ & 2n1\beta & & \qquad + \ 4r\ ..+4r1\beta \\ \qquad\qquad + & 3pa & & \qquad\qquad + \ 6sa \\ & (51 & \smile & 66) \\ \ddagger\llcorner 25y^2 + \ 2n\,5y + & 3pa & \smile & 25y^2 + \ 4r\,5y + \ 6sa\lrcorner \\ & (38 & \smile & 51) \end{array}$$

$$\boxed{\frac{51}{66}-\frac{38}{51}\sqcap\frac{31}{1122}}$$

Multiplicando per crucem reducemus ad unam fractionem,

---

18 *Nebenrechnungen:* $\dfrac{38}{51}\underset{-}{\times}\dfrac{51}{66}\quad \dfrac{93}{3366}\ \Big|\ \dfrac{31}{1122}$

19–622,1 fractionem, *(1)* cuius numerator, *(2)* $\ddagger 4r1\beta$ *L*

$$\begin{array}{lll}
\dagger\ 4r1\beta\ \ 25\ \ y^2 & \dagger\ ②1a6s1\beta\ \ 5y & \dagger\ 1a6s1\beta^2 \qquad \smile\\
\dagger\ 2n1\beta\ \ ..\ \ .. & \bullet\ \ 4r1\beta^2\ \ .. & \bullet\ 2n6s1a1\beta\\
 & \dagger\ ②1a3p1\beta\ \ .. & \dagger\ 1a3p1\beta^2\\
 & \bullet\ \ 2n1\beta^2\ \ .. & \bullet\ 4r3p1a1\beta\\
\left(\underbrace{+4-2}_{+2}\frown 25\sqcap 50\right) & \left(\underbrace{+12+4-6-2}_{+8}\frown 5\sqcap +40\right) & \left(\underbrace{+6+12-3-12}_{+3}\right)\\
 & (50+40+3\sqcap 93) &
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
625y^4 + ②4r\ 125y^3 + ②a6s\ 25y^2 + ②4r6sa\ 5y + 36s^2a^2\\
\qquad\qquad\qquad\quad + \ 16r^2\ \ ....
\end{array}$$

$$\boxed{(625)\quad (1000)\qquad (700)\qquad (240)\qquad (36)\quad \sqcap 2601\sqcap 51\frown 51}$$

$$\begin{array}{l}
+ ②\beta\ \ \ldots\ldots + ③4r\beta\ \ .... +\ 16r^2\beta\ \ .. + a6s4r\beta\\
\qquad\qquad\quad +\ \ \beta^2\ \ .... + ②\beta a6s\ \ .. +\ 6sa\beta^2\\
\qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\ 4r\beta^2\ \ ..
\end{array}$$

$$\boxed{(2601)\quad (250)\qquad (325)\qquad (160)\qquad (30)\quad \sqcap 3366}$$

$$\boxed{\begin{array}{l}(93\smile 3366)\\ (31\smile 1122)\end{array}}$$

Haec fractio producta, ut quam licet simplicissime enuntietur, conferatur cum alia g e n e r a l i sibi simili, $\dfrac{2d25y^2+8ea5y+a^2 3f}{625y^4+10g125y^3+a41h25y^2+a^2 80l5y+a^3 66m}$, numerator

---

$$\begin{array}{rrr}
51 & 38 & 51\\
\underline{66} & \underline{66} & \underline{51}\\
306 & 228 & 51\\
\underline{306\ } & \underline{228\ } & \underline{255\ }\\
3366 & 2508 & 2601\\
 & & \underline{2508}\\
 & & 93
\end{array}$$

Gestrichene Nebenrechnung:

$$\begin{array}{l}
\quad 2\\
\cancel{3}\,\cancel{3}\,6\,6\,\cancel{+}\,10\\
\cancel{3}\,\cancel{1}\,\cancel{1}\,1\\
\quad \cancel{3}\,3
\end{array}$$

scilicet numeratori et nominator nominatori; sed antequam calculum superioris plagulae sine necessitate repetamus, poterimus eius conclusionem nempe formulas ☿ et ♀ iam tum per numeros examinare; nam si consentient, non erit cur calculum repetamus. Formula ☿ erat:

$$2d25y^2 \ +8ea5y + \frac{2\,a8e10g - 4\,a2d41h + 2d100g^2 - \beta^2 2d}{8}, \smile\ 625y^4 + 10g125y^3 +$$

$$a41h25y^2 + \frac{4\,a41h10g - 1000g^3 - 3\,\beta^2 10g}{8} 5y +$$

$$\frac{\overset{\cancel{4}}{16\,a^2 1681h^2} - \overset{\cancel{5}}{8\,a100g^2 41h} + \overset{4}{8\,a\beta^2 41h} - \overset{3}{6\,\beta^2 100g^2} + \overset{\cancel{1}}{10000g^4} - \overset{\cancel{8}}{1\beta^4}}{64}$$

Ut ergo consentiat calculus, necesse est ut terminus numeratoris tertius faciat 3. quod est falsum facit enim $\frac{30}{8}$. Ergo in calculo erratum est. Eodem modo terminus nominatoris penultimus facere debet 80, quod non facit, quemadmodum sine ullo calculo ex sola novenarii proba colligo. Ultimus facere debet 66, quod itidem non facturum statim novenarius indicat. Unde intelligitur quanta sit necessitas methodi cuius ope omnes calculi errores evitari possint.

Repetendus ergo calculus superior adhibitis numeris, et invenimus $2n \sqcap ǂ2\,a2d + 10g\beta - 2\,\beta^2 \ \smile\ 2\,\beta$. Recte. $4r \ \sqcap\ 10g - 2\,\beta, \smile\ 2$. Recte. At s. supra male, itaque resumatur ex terminis tertiis nominatorum, $6s \sqcap a41h - 16r^2 - 3\,4r\beta - \beta^2, \smile\ 2\,a$, et explicando r, fiet:

5–8

Nebenrechnungen:
$$\begin{array}{rrrrr}
25 & 41 & 41 & 82 & 160 \\
\underline{16} & \underline{25} & \underline{41} & \underline{4} & \underline{200} \\
41 & 205 & 41 & 328 & 360 \\
 & \underline{82} & \underline{164} & \underline{2} & -\underline{330} \\
 & 1025 & 1681 & 330 & 30
\end{array}$$

1 scilicet *(1)* primum *(2)* numeratori *L*

---

2 formulas ☿ et ♀: N. 43₁ S. 618 Z. 15 – S. 619 Z. 3. 16 supra: N. 43₁ S. 619 Z. 3; vgl. Erl. N. 43₁ S. 613 Z. 6+7

$6s \sqcap a41h \dfrac{-100g^2 + \textcircled{4}10g\beta - \textcircled{4}\beta^2}{\textcircled{4}} \dfrac{-\textcircled{3}10g\beta + \textcircled{6}1\beta^2}{\textcircled{2}} - \beta^2,, \smile \textcircled{2}a \sqcap \textcircled{4}a41h -$
$100g^2 \boxed{+\textcircled{4}10g\beta}\boxed{-\textcircled{4}\beta^2} - \textcircled{2}\boxed{\textcircled{6}}10g\beta + \textcircled{4}\boxed{\textcircled{12}}\beta^2 \boxed{-\textcircled{4}\beta^2},, \smile \textcircled{8}a \sqcap \textcircled{4}a41h -$
$100g^2 - \textcircled{2}10g\beta + \textcircled{4}\beta^2,, \smile \textcircled{8}a$. Error autem in superioribus fuerat quod pro $\textcircled{4}\beta^2$, scripseram β^2. Iam ergo $3p \sqcap \mp\textcircled{4}a^2 8e \mp \textcircled{4}a2d\beta + \textcircled{4}\beta a41h - \beta 100g^2 - \textcircled{2}10g\beta^2 + \textcircled{4}\beta^3,,$
$\not{4} \quad \not{8} \quad \not{2} \quad \not{8} \quad \not{7} \quad \not{4}$
$\smile \textcircled{8}a\beta$. ubi rursus idem error, nempe β^3 pro $\textcircled{4}\beta^3$ et

$3f \sqcap \textcircled{4}\not{d}\beta a8e \boxed{-\textcircled{4}\not{d}\beta 2d\beta} - 2d\textcircled{4}\not{d}41h + \not{d}2d100g^2 + \not{d}2d\textcircled{2}10g\beta - \not{d}2d\textcircled{8}\boxed{\textcircled{4}}\beta^2,, \smile 8a^2$
$..\ 4r\not{d}\ldots - ..\ 4r\not{d}\ldots$
$3 \quad \sqcap \quad \not{7} \quad \not{4} \quad \not{5} \quad \not{2} \quad 4 \quad 2 \quad \smile 8$

sive $3f \sqcap \textcircled{4}\beta a8e + \textcircled{4}4ra8e - \textcircled{4}4r2d\beta - \textcircled{4}2da41h + 2d100g^2 + \textcircled{2}2d10g\beta - \textcircled{8}2d\beta^2,, \smile \textcircled{8}a^2$. Et explicando r, fiet:

$3f \sqcap \boxed{\textcircled{4}\beta a8e} + \textcircled{2}a8e10g\boxed{-\textcircled{4}a8e\beta}\boxed{-\textcircled{2}2d\beta 10g} - \boxed{+}\textcircled{4}2d\beta^2 - \textcircled{4}2da41h + 2d100g^2$
$3 \quad \sqcap \quad \not{7} \quad 1 \quad 5 \quad \not{2}$
$\boxed{+\textcircled{2}2d10g\beta}\boxed{-\textcircled{8}2d\beta^2},, \smile \textcircled{8}a^2$
$\smile 8$

ac proinde denique $3f \sqcap \textcircled{2}a8e10g - \textcircled{4}2d\beta^2 - \textcircled{4}2da41h + 2d100g^2 \smile 8a^2$. Qui valor rursus per omnia consentit cum priore, excepto quod pro $\textcircled{4}2d\beta^2$ supra erat $2d\beta^2$.

Supersunt duae investigandae literae l, et m; et reperi quidem
$80\,l \sqcap \textcircled{4}a41h10g - 1000g^3, \smile 8a^2$ ac denique $66m \sqcap \textcircled{16}a^2 41 \frown 41h^2 - \textcircled{8}a41h100g^2 +$
$(8 \frown 80 \sqcap 1640 - 1000 \sqcap 640) \quad \not{6} \quad \not{4} \quad \not{5}$
$\textcircled{32}a41h\beta^2 + 10000g^4 + \textcircled{16}\beta^4 - \textcircled{12}\beta^2 100g^2,, \smile + \textcircled{64}a^3$.
$\not{7} \quad \not{1} \quad \not{7} \quad \not{6}$

Itaque si qua data sit s e r i e i s u m m a n d a e formula, reducibilis ad hanc ☿:

9–15 *Nebenrechnungen zur Neunerprobe:*
9 $6 \sqcap \not{8} \frown \not{3} \sqcap \not{24} \sqcap 6$
13+15 $\boxed{5 + 1 \sqcap 8 \frown 3 \sqcap 24 \sqcap 6}$

---

3 Error: s. o. N. 43₁, Erl. zu S. 613 Z. 6+7. 17 supra: N. 43₁ S. 615 Z. 8. 20+22 Bei der Neunerprobe setzt Leibniz $66 \equiv 3 (\mathrm{mod}\ 9)$ mit $-66 \equiv 6\ (\mathrm{mod}\ 9)$ auf die rechte Seite der Gleichung.

$$☿\ \left.\frac{2d25y^2 + a8e5y + \dfrac{2\,a8e10g - 4\,2d\beta^2 - 4\,2da41h + 2d100g^2}{8}}{625y^4 + 10g125y^3 + a41h25y^2 + \dfrac{4\,a41h10g - 1000g^3}{8}5y \ + \ \dfrac{16\,a^2 41h41h - 8\,a41h100g^2 + 32\,a41h\beta^2 + 10000g^4 + 16\,\beta^4 - 12\,\beta^2 100g^2}{64}}\right\}$$

loco $\left\{\dfrac{2d25y^2 + a8e5y + a^2 3f}{625y^4 + 10g125y^3 + a41h25y^2 + a^2 80l5y + a^3 66m}\right.$ tunc formula seriei summatricis erit:

624,19–21 *Nebenrechnungen auf Bl. 1 r°:*

	410	41	41	66
	<u>4</u>	<u>41</u>	<u>8</u>	<u>64</u>
	1640	41	$-328 + 328$	254[!]
	<u>1000</u>	<u>164</u>	<u>4</u>	[*bricht ab*]
8 ⌢ 80 ⊓	640	1681	$+\,328$	
		<u>16</u>	3	
		10086	<u>984</u>	
		1681		
		[26896]	$16a^2h^2$	
		~~984~~	$-8hg^2 + 32ah\beta^2$	
		<u>~~1~~</u>	$+g^4$	
		~~4~~	$+16\beta^4 - 12\beta^2g^2$	
		[27885]		

624,19 ⌣ $8a^2$ *(1)* et 66m ⊓ $16a^2h^2 - 8ahg^2 + 32ah\beta^2 + g^4 + 16\beta^4 - 12\beta^2g^2$, ⌣ $64a^3$ *(2)* ac *L* 8–12 *vorletzte Spalte* -328 *(1)* | $\begin{array}{r}+\,328\\ \underline{4}\\ 656\end{array}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\begin{array}{r}+328\\ \underline{3}\\ 984\end{array}$ *L* 14 ~~26876~~ *L ändert Hrsg.* 18 ~~27865~~ *L ändert Hrsg.*

$$♀\ \cfrac{25y^2 + \cfrac{\mp 2\,a2d + 10g\beta 2\,\beta^2}{2\,\beta}5y + \cfrac{\mp 4\,a^2 8e \mp 4\,a2d\beta + 4\,\beta a41h - \beta 100g^2 - 2\,10g\beta^2 + 4\,\beta^3}{8}}{25y^2 + \cfrac{10g - 2\,\beta}{2}5y + \cfrac{4\,a41h - 100g^2 - 2\,10g\beta + 4\,\beta^2}{8\,a}} \Bigg\}$$

loco $\left\{ \frac{25y^2 + 2n5y + 3pa}{25y^2 + 4r5y + a6s} \right.$.

Quod si iam series aliqua proposita sit cuius formula velut $\cfrac{3m}{\frac{5s}{a}25y^2 + \frac{4\beta}{2}5y *}$ et $\boxed{\frac{3}{125 + 2 \frown 5} \sqcap \frac{3}{135}}$ quaeratur formula seriei summatricis (: nota: literae $\underline{m}$. $\underline{s}$. $\underline{n}$. $\underline{b}$. hic novam [recipiunt] significationem, ut et aliae si quae repetantur :) hoc per ea quae superiore plagula dixi non potest fieri commodius, quam si addatur ei alia formula, ut $\cfrac{7n}{\frac{a}{5s}25y^2 + 6b5y + \frac{36b^2 - 16\beta^2}{4}}$ $\boxed{\frac{7}{40}}$. Literae β. demus imposterum numerum 4, ut eius significationem distinguamus a litera a. quod imposterum semper inter calculandum servabimus. Ita enim minus facilis lapsus, si nulla aequivocatio. Explicui tamen tam y. quam s. per 5, quia y. caeteris minus miscet nec facile in illo lapsus.

5+8 *Nebenrechnung:* $\frac{3}{135} + \frac{7}{40} \sqcap \frac{120 + 945 \sqcap 1065}{5400}$

4 iam *(1)* formula *(2)* series aliqua proposita *(a)* sit velut $\cfrac{3\mathrm{m}}{\frac{4\mathrm{s}}{\mathrm{a}}25\mathrm{y}^2 + \frac{4\beta}{2}\mathrm{y}\ \ *}$ cuius quaeritur formula summatrix *(b)* sit *L* 6 f. (nota: *(1)* litera $\underline{\mathrm{m}}$ hic novam recipit *(2)* literae … novam | recipit *ändert Hrsg.* | significationem *L* 13 $\frac{3}{135}$+ *(1)* $\frac{5}{40} \sqcap$ *(a)* $\frac{3}{17+8} \smile 5$ *(b)* $\frac{3}{27}$ *(c)* $\frac{3}{17} + \frac{5}{8}, \smile 5 \sqcap$ *(aa)* $\frac{3}{15}$ *(bb)* $\frac{24+85}{17 \frown 8} \sqcap \frac{109}{136 \frown 5}$ sive $\frac{109}{8800}$ *(d)* $\frac{120+675}{5400} \sqcap \frac{795}{5400}$ *(2)* $\frac{7}{40}$ *L*

---

7 superiore plagula dixi: N. 43$_1$ S. 616 Z. 18 f.

Addendo has duas formulas producetur haec:

$$\begin{array}{llll}
\frac{3ma}{5s}\,25y^2 & +3m6b5y & +\frac{3m36b^2-3m16\beta^2}{(4} & \smile \\
+\frac{7n5b}{a}\ \ldots\ldots & +\frac{4\beta 7n}{(2}\ \ldots & & \\
\cancel{8} & \cancel{7} & \cancel{6} & \smile \\
35+\frac{3}{5}\frown 25 & 32\frown 5 & 15 & \smile
\end{array}$$

$$\begin{array}{lllll}
\smile\ 625y^4 & +\frac{6b5s}{a}125y^3 & +\frac{5s}{(4\,a},36b^2-16\beta^2,25y^2 & +\frac{4\beta 36b^2-64\beta^3}{8}5y & * \\
 & +\frac{4\beta a}{(2\,5s}\ldots\ldots & +\frac{4\beta 6b}{(2} \quad\quad \ldots\ldots & & \\
\smile\ \cancel{4} & \cancel{2} & \cancel{7} & \cancel{5} & \\
\smile\ 625 & 30\frac{2}{5}\frown 125 & 37\frown 25 & 10\frown 5 & \\
 & -\frac{102}{5}\delta & +4\theta & &
\end{array}$$

Quae formula producta conferetur cum formula ☿ modo in dicta formula ☿ explicetur ipsa β. numero adscripto 4.

Sed ut probatio per numeros institui possit adiciendae sunt literae quaedam probatoriae, quo utrobique numeri cognitae termini cuiuslibet numeris cognitae termini respondentis aequivalent. Id vero ante omnia in nominatore faciemus, nam in solo nominatore

---

2–5 *Nebenrechnungen:*

35	35	18
5	25	14
175	175	32
	70	
	875	
	15	
	890	

6–9 *Divisionszeichen wiederholt Hrsg.* 14 cognitae *erg. L zweimal* difficultatem habet collatio, quia tot in eo aequationes collatitiae, quatuor scilicet terminorum, quot incognitae, nempe $s.b.g.h.$

Sed video mutandum esse aliquid, antequam veniatur ad collationem, nam in una dedi ipsi $\beta.$ valorem 1, in altera valorem 4. Itaque alterutrubi corrigendum, et facilius est in novissima formula efficere ut $\beta.$ valeat tantum 1, et ita stabit:

$$\frac{3ma}{5s}\ 25\,y^2 \qquad +3m6b5y \qquad + \frac{3m36b^2-3m\beta}{4} \qquad \smile$$
$$+\frac{7n5s}{a}\ \ldots \qquad +\frac{\beta 7n}{2}\ \ldots$$

$$625y^4 + \frac{6b5s}{a}\ 125y^3 + \frac{5s}{a} \frown 36b^2-\beta^2 \frown 25y^2 + \frac{\beta 36b^2-3\delta a^2-\beta^3}{8}5y \qquad *$$
$$\frac{10\gamma\beta}{2\,5s}\ \ldots\ldots + \frac{\beta 6b}{2} \qquad \ldots$$
$$31 \qquad 178 \qquad\qquad 4 \qquad 0$$
$$-21\lambda \qquad -137\mu a \qquad\qquad +76a^2\xi \qquad +66m$$

ubi $\frac{10\gamma\beta}{2\,5s}$ loco $\frac{\beta a}{2\,5s}$, ut fractionem auferam, inter calculandum utique examen novenarium facilius reddatur. Eodem modo ascripsi $-3\delta a^2$. Etsi sub finem calculi poni debent $\gamma \sqcap a$, et $\delta \sqcap 0$. Eodem modo et literae $\lambda.\mu.\xi.m.$ sub finem calculi habebuntur pro nullis, adiectae interim, ut numeri cognitarum formulae ☿ et huius, sint iidem. His iam quatuor collationibus totidem quaerendae sunt incognitae ut dixi, $b.h.g.s.$ ac primum

---

11 *Nebenrechnung:* $\begin{array}{r} 178 \\ \underline{41} \\ 137 \end{array}$

2 f. s.b.g.h. *(1)* Ut er *(2)* Ut ergo ad collationem veniamus, *(a)* termini *(b)* nominatoris formulae ☿ cum nominatore formulae novissimae, utique primi termini iidem sunt itaque non est opus *(aa)* adiecto termino *(bb)* adiecta litera probatoria, in 2^{dis} vero differentia. Nam terminus secundus *(aaa)* form *(bbb)* nominatoris formulae ☿ habet 10g. cum in formula novissima sit $30+\frac{2}{5}$, *(aaaa)* vel *(bbbb)* itaque ipsi 10g addatur $20+\frac{2}{5}\delta$, vel $\frac{102}{5}\delta$. | Eodem modo in termino tertio formulae ☿ habetur 41h. et in respondente novissimae, 31. Huic ergo addatur 4θ. in termino tertio *gestr.* | *(3)* Sed *L*

valores ipsarum g. et h, statim habentur sine ullo calculo, nempe $\underset{\cancel{8}}{10g} \sqcap (2)\underset{\cancel{3}}{6b25s^2}+ \underset{\cancel{1}}{10\gamma\beta a} - (2)\underset{\cancel{6}}{21\lambda a5s}, \smile (2)a5s$ et $\underset{\cancel{8}}{41h} \sqcap (2)\underset{0}{5s36b^2} - (2)\underset{\cancel{8}}{5s\beta^2} + \underset{\cancel{6}}{\beta a6b} - (2)\underset{\cancel{5}}{137\mu a^2}, \smile (2)a^2.$

$$\left.\begin{array}{l} \underset{8}{1000g^3} \sqcap (8)\underset{0}{\llcorner 6b\lrcorner^3 25^3s^6}, +(12)\underset{0}{36b^2 25^2 s^4 10\gamma\beta a} - (24)\underset{0}{36b^2 25^2 s^4 21\lambda a5s}, \\ \qquad +(6)\underset{0}{6b25s^2 100\gamma^2\beta^2a^2} + (24)\underset{0}{6b25s^2 21^2\lambda^2a^2 25s^2},, \\ \qquad -(24)6b25s^2 10\gamma\beta a 21\lambda a5s,,, + \underset{1}{1000\gamma^3\beta^3a^3} \\ \qquad -(6)\underset{0}{100\gamma^2\beta^2a^2 21\lambda a5s} - (12)\underset{0}{10\gamma\beta a 21^2\lambda^2 a^2 25s^2}, \\ \qquad -(8)\underset{0}{21^3\lambda^3a^3 125s^3} \end{array}\right\} \smile (8)a^3 125s^3$$

Sed hinc disco observationem perutilem, non esse dandum literis valorem numerorum quos, aut quorum abiecto novenario residuis metitur ternarius, ut 3.6. nam hae vel in se ductae, vel in alios plerumque faciunt quantitatem quae abiecto novenario nihil relinquit, ut $6 \frown 6 \sqcap 36$. $3 \frown 6 \sqcap 18$. $3 \frown 3 \sqcap 9$. $3 \frown 4 \sqcap 12$, seu 3. $3 \frown 5 \sqcap 15$ seu 6. $3 \frown 7 \sqcap 21$, seu 3. $3 \frown 8 \sqcap 24$ seu 6. $3 \frown 9 \sqcap 27$ seu 0. Itaque literae $\underline{b}$. pro 6 dabimus 8. et literae $\underline{m}$. pro 3 dabimus 4. Unde denique scribendo:

$$\left\{\begin{array}{llll} \dfrac{4ma}{5s}\,25y^2 & +\,4m8b5y & +\,\dfrac{4m64b^2-4m\beta^2}{(4)}, & \smile \\ +\dfrac{7n5s}{a}\ .\ . & & +\,\dfrac{\beta 7n}{(2)}\ .. & \end{array}\right.$$

17 alios *(1)* rursus *(2)* plerumque *L*

$$625y^4 + \frac{8b5s}{a}125y^3 \;+ 64b^2 - \beta^2 \frown \frac{5s}{a}25y^2 + \frac{64b^2\beta - \beta^3[-]\delta a^2}{(8)}5y \qquad *$$

$$+\frac{10\gamma\beta}{(2)\,5s} \;\cdot\cdot\;\; \cdot\cdot\; + \qquad \beta 8b \smile (2) \qquad \cdot\;\; \cdot$$

$$(41) \qquad\qquad (319) \qquad\qquad\qquad (8)$$

$$-31\lambda \qquad\qquad -278\mu a \qquad\qquad\qquad +72a^2\xi \qquad\qquad +66ma^3$$

Unde $10g \sqcap (2)\,8b25s^2 + 10\gamma\beta a - (2)\,31\lambda a5s, \smile (2)\,a5s$, et $41h \sqcap (2)\,5s64b^2 - (2)\,5s\beta^2 +$

$\cancel{8} \quad \cancel{4} \quad \cancel{1} \quad \cancel{5} \quad \cancel{5} \quad \cancel{1} \quad \cancel{8}$

$\beta a8b - (2)\,278\mu a^2, \smile (2)\,a^2.$

$\cancel{8} \quad \cancel{2}$

$$(8)\,a^3 125s^3 \frown 1000g^3 \;\sqcap\; (8)\,\llcorner 8b \lrcorner^3 25^3 s^6 + (12)\,64b^2 25^2 s^4 10\gamma\beta a - (24)\,64b^2 25^2 s^4 31\lambda a5s,$$

$$\cancel{8} \qquad\qquad \cancel{1} \qquad\qquad \cancel{3} \qquad\qquad \cancel{6}$$

$$+(6)\,8b25s^2 100\gamma^2\beta^2 a^2 + (24)\,8b25s^2 31^2\lambda^2 a^2 25s^2$$

$$\cancel{3} \qquad\qquad \cancel{3}$$

$$-(24)\,8b25s^2 10\gamma\beta a31\lambda a5s,,, + 1000\gamma^3\beta^3 a^3,$$

$$\cancel{3} \qquad\qquad \cancel{1}$$

$$-(16)\,100\gamma^2\beta^2 a^2 31\lambda a5s + (12)\,10\gamma\beta a31^2\lambda^2 a^2 25s^2,$$

$$\cancel{1} \qquad\qquad \cancel{3}$$

$$-(8)\,31^3\lambda^3 a^3 125s^3$$

$$\cancel{8}$$

1–4 *Nebenrechnungen:*

319	63
41	5
	325 [!]
	4
	329
	41
	278 [!]

1 + *L ändert Hrsg.*

qui ipsius $1000g^3 \frown ((8)\,a^3125s^3$ valor auferatur a sequenti formula, quae est

$$((4)\,a^3s^341h10g \sqcap ((2)\,25s^2\,(\cancel{4})\,a\,((2)\,8b25s^2 \quad \begin{array}{l} ((2)\,5s64b^2 \\ -((2)\,5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -((2)\,278\mu a^2 \end{array}$$

$$+((2)\,25s^2\,(\cancel{4})\,a\,(12)\,64b^225^2s^410\gamma\beta a \quad \begin{array}{l} ((2)\,5s64b^2 \\ -((2)\,5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -((2)\,278\mu a^2 \end{array}$$

$$-((2)\,25s^2\,(\cancel{4})\,a\,((2)\,31\lambda a5s \quad \begin{array}{l} ((2)\,5s64b^2 \\ -((2)\,5s\beta^2 \\ +\beta a8b \\ -((2)\,278\mu a^2 \end{array} .$$

Residuum aequabitur huic:

$a^3125s^364b^2\beta - a^3125s^3\beta^3[-]a^3125s^3\delta a^2 + ((8)\,a^3125s^372a^2\xi$

Quae aequatio collatitia orta est ex collatione terminorum penultimorum; ultimi termini dant aequationem hanc: $(16)\,a^241^2h^2 - ((8)\,a41h100g^2 + (32)\,a41h\beta$ [*bricht ab*]

15 + *L ändert Hrsg.*

43_3. DE SERIEBUS SUMMABILIBUS PARS TERTIA
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 3. 1/6 Bl. 1°. 1 S. auf Bl. 3 r°. Bl. 3 v° leer. Cc 2, Nr. 892 tlw.

Ianuar. 1675.

Pars III. schediasmatis d e s e r i e b u s s u m m a b i l i b u s

$$\text{et in specie hac: } \frac{1}{z^2 + \dfrac{\beta}{2}z} \quad *$$

Edoctus experientia calculorum superiorum, videbo an errores quos illic commisi, possim praevenire. Ac primum exponam de quo agatur. Repertum est a me, si series fractionum numeratore unitate, nominatoribus numeris quadratis unitate minutis exponatur, tunc prout nunc continue nunc per saltus sumantur, aut absolute aut non nisi ex supposita circuli et hyperbolae quadratura, haberi seriei summam,

$$\begin{array}{lcccccccccccl}
\text{I)} & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} & \frac{1}{48} & \frac{1}{63} & \frac{1}{80} & \frac{1}{99} & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap & \frac{3}{4} \\
\text{II)} & \cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \frac{1}{24} & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \frac{1}{80} & \cdot & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap & \frac{1}{4} \\
\text{III)} & \frac{1}{3} & \cdot & \frac{1}{15} & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \frac{1}{63} & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \text{etc.} \sqcap & \frac{1}{2} \\
\text{IV)} & \frac{1}{3} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{35} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{99} & \cdot & \text{etc.} \sqcap & \left.\begin{array}{l}\text{numero qui}\\ \\ \text{pendet ex}\end{array}\right\} \text{quadratura} \left\{\begin{array}{l}\text{circuli}\\ \\ \text{hyperbolae}\end{array}\right\} \\
\text{V)} & \cdot & \frac{1}{8} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{48} & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{1}{120} & \text{etc.} \sqcap &
\end{array}$$

Haec alibi a me geometrice demonstrata sunt. Nunc series istas duas quae ex circuli et hyperbolae quadratura pendent analytice exprimamus, ut in earum summam inquiri

13 $\frac{1}{120}$ | $\frac{1}{143}$ $\frac{1}{168}$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L* 14 $\frac{1}{120}$ | $\cdot$ $\frac{1}{168}$ $\cdot$ *gestr.* | etc. *L* 15 $\frac{1}{99}$ $\cdot$ | $\frac{1}{143}$ $\cdot$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L* 16 $\frac{1}{99}$ $\cdot$ | $\cdot$ $\cdot$ $\frac{1}{195}$ *gestr.* | etc. *L*

19 alibi: vgl. N. 15, N. 38_2, N. 38_{10} sowie die *Arithmetische Kreisquadratur*, *LSB* III, 1 N. 39 S. 165 f. u. *LQK* prop. XLII S. 88 f.

possit. Si nimirum quadratis restituantur unitates ademtae, habebuntur in quarta serie, 4.36.100 et radices 2.6.10, quorum intervallum 4. Eodem modo ex quinta serie, 9.49.121. et radices, 3.7.11. quorum intervallum etiam 4. Itaque ponendo intervallum 4 esse β. et unitatem $\sqcap$ a. poterit utraque series sic enuntiari: $\dfrac{1}{y^2 - \dfrac{a\beta}{4}}$. Ponendo scilicet y. repraesentare numeros progressionis arithmeticae, quorum intervallum β sit $\sqcap$ 4, item sic: $\dfrac{1}{y^2 - a^2}$. Sed et adhuc aliter, nam $y^2 - a^2 \sqcap y + a \frown y - a$. Considerandum est itaque, 3.35.99. aequari $1 \frown 3$, $5 \frown 7$, $9 \frown 11$, item 8.48.120. aequari $2 \frown 4$. $6 \frown 8$. $10 \frown 12$. Itaque numeri progressionis arithmeticae, quorum intervallum β, sit 4, undecunque oriantur, appellentur y. ut 1.5.9. vel 2.6.10. Itaque ratione ipsorum $\left\{\begin{matrix} 1.\ 5.\ \ 9. \\ 2.\ 6.\ 10. \end{matrix}\right.$ ipsi $\left\{\begin{matrix} 3.\ 7.\ 11. \\ 4.\ 8.\ 12. \end{matrix}\right.$ erunt $y + \dfrac{\beta}{2}$, nam $\dfrac{\beta}{2}$ est 2, vel $y + 2a$. Unde $\left\{\begin{matrix} 1 \frown 3. & 5 \frown 7. & 9 \frown 11. \\ 2 \frown 4. & 6 \frown 8. & 10 \frown 12. \end{matrix}\right\} \sqcap y^2 + \dfrac{\beta}{2} y$ $*$ vel si mavis $y^2 + 2ay$. adeoque tam circuli quam hyperbolae series quadratrix ita exprimi poterit[:] $\dfrac{1}{y^2 + \dfrac{\beta}{2} y \quad *}$ vel $\dfrac{1}{y^2 + 2ay}$. Habemus ergo repertas iam serierum formulas quatuor, $\dfrac{1}{y^2 - \dfrac{a\beta}{4}}$ vel $\dfrac{1}{y^2 - a^2}$, vel $\dfrac{1}{y^2 + \dfrac{\beta}{2} y \quad *}$ vel $\dfrac{1}{y^2 + 2ay}$, et si vel unius ex eius reperiri possit summa, habebimus circuli simul et hyperbolae quadraturam.

Porro methodum inquirendi in serierum summas, ego primus omnium reperisse credo universalem; ita ut datae cuiusque seriei, quae modo formula analytica certae dimensionis explicari possit[,] haberi summa, aut inveniri possit in-summabilitas ope conditarum quarundam tabularum, si quis modo calculi laborem subire velit. Res eo redit, quaeruntur s e r i e r u m propositarum seu s u m m a n d a r u m , s e r i e s s u m m a t r i c e s. Iam ex serie summatrice data haberi potest series eius summanda; contra vero nemo

1 in *(1)* prima *(2)* quarta *L* 4 f. enuntiari: *(1)* $\mathrm{y}^2 - \dfrac{\beta}{4}$ *(2)* $\dfrac{1}{\mathrm{y}^2 - \dfrac{\mathrm{a}\beta}{4}}$ . . . scilicet y *(a)* esse *(b)* repraesentare *L* 7 3.35.99. *(1)* fieri ex *(2)* aequari *L* 8 β, sit *erg. L* 9 appellentur y. *(1)* et proxime sequens erit $\mathrm{y} + 2\mathrm{a}$ *(2)* ut *L*

methodum explicuit ex data serie summanda inveniendi summatricem; utendum ergo arte analytica generali, a qua et nomen habet; et sumtis seriebus summatricibus indeterminatis generalibus, inde derivandae earum series summandae, quas conferendo datis seu propositis; resolventur propositae series in partes quales res postulat. Series autem summatrices quantum licet generales assumendae sunt, quo minoribus tentaminibus quaesitum obtineamus. Et vero nondum mecum statui, an possint novis adhibitis characteribus excogitari [formulae], quae plurium imo omnium dimensionum formulas in se comprehendant unae.

7 formulas *L ändert Hrsg.*

44. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE

44_1. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS PRIMA
3. März 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 915 A tlw.

3 Martii 1675

De summa seriei fractionum datae
cum formulae differentiarum comparatur

$$\pm\,\frac{cy+ad}{fy+ag}\;\mp\;\frac{\begin{array}{r}cy+c\beta\\+ad\end{array}}{\begin{array}{r}fy+f\beta\\+ag\end{array}}\;\sqcap\;\frac{\begin{array}{l}\pm\begin{cases}cfy^2 & +\;adf\,y\;\;+adf\beta\\ & +\;cf\beta\,..\;\;+a^2dg\\ & +\;acg\,..\end{cases}\\ \mp\begin{cases}cf\,.. & +\;cf\beta\,..\;\;+acg\beta\\ & +\;adf\,..\;\;+a^2dg\\ & +\;acg\,..\end{cases}\end{array}}{\begin{array}{l}f^2y^2\odot_I+2afg\,..\;+afg\beta\\ \qquad +\;f^2\beta\,..\;+a^2g^2\\ \qquad \underset{I}{\boxed{+\;afg\,..}}\end{array}}$$

sive $\sqcap\;\dfrac{\pm adf\beta\mp acg\beta}{\begin{array}{l}f^2y^2+2afgy+afg\beta\\ \quad+f^2\beta\,..+a^2g^2\end{array}}$.

7f. De *(1)* summis serierum *(2)* summa seriei | fractionum *erg. u. gestr.* | fractionum *erg.* | datae ... differentiarum | generali *gestr.* | comparatur *L*

Esto iam data formula $\dfrac{\mp adf\beta \pm acg\beta}{f^2z^2 + \dfrac{f^2}{2}\beta z \ *}$. Cumque numeratores sint iidem, aut si non essent[,] cum constantes sint, multiplicando dividendoque facile reddi possent iidem, restat ut nominatores conferamus, quod ut succedere possit, faciamus $z \sqcap y + d$, erit $f^2z^2 \sqcap f^2y^2 + 2f^2dy + f^2d^2$, et $\dfrac{f^2\beta z}{2} \sqcap \dfrac{f^2\beta y}{2} + \dfrac{f^2\beta d}{2}$, et fiet nominator correctus:

$$\begin{array}{lclcl} f^2y^2 & + & 2f^2d \quad y & + & f^2d^2 \\ & + & \dfrac{f^2\beta}{2} \quad .. & + & \dfrac{f^2\beta d}{2} \end{array}$$ conferendus nominatori superiori:

$$\begin{array}{lclcl} f^2y^2 & + & 2afg \quad y & + & afg\beta \\ & + & f^2\beta \quad .. & + & a^2g^2 \end{array}$$

Primi terminii iidem sunt, collatis ergo secundis, fiet haec aequatio:

$$4fd\boxed{+f\beta} \sqcap 4ag + (2)f\beta \text{ sive } f \sqcap \frac{4ag}{4d-\beta}, \text{ et } f^2 \sqcap \frac{16a^2g^2}{16d^2-8d\beta+\beta^2}.$$

Collatis ultimis terminis aequatio haec habebitur: $2f^2d^2 + f^2\beta d \sqcap 2afg\beta + 2a^2g^2$.

$$\frac{16a^2g^2}{16d^2-8d\beta+\beta^2} \qquad\qquad \frac{4ag}{4d-\beta}$$

Substitutis ipsius f explicationibus, sublatisque fractionibus, fiet:

$$\boxed{32a^2g^2d^2}\ \boxed{+16a^2g^2\beta d} \sqcap \boxed{\underbrace{2ag\beta 4ag4d}_{16(32)a^2g^2\beta d}}\ \underbrace{-2ag\beta 4ag\beta}_{-8a^2g^2\beta^2},\ \underbrace{+2a^2g^2 16d^2}_{\boxed{+32a^2g^2d^2}}\ \underbrace{-2a^2g^2 8d\beta}_{\boxed{-16a^2g^2d\beta}}\ \underbrace{+2a^2g^2\beta^2}_{+2a^2g^2\beta^2}$$

Unde fit denique aequatio impossibilis: inter 8 et 2.

Sic ergo exitus non datur, et remedium aliquod, si licet quaerendum est.

Ad originem ergo huius seriei ad summandum propositae redeamus. Ordinata cyclocissoeidis erat $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$, multiplicetur quantitate assumta $\dfrac{e}{a}$, fiet: $\dfrac{ex}{\sqrt{2ax \mp x^2}} \sqcap y$.

14 $\boxed{+16a^2g^2\beta d}$ $\sqcap$ *(1)* $2ag\beta 4ag16d^2 - 2ag\beta 4ag8d\beta + 2ag\beta 4ag \sqcap 2ag\beta ad - 2ag\beta d$ *(2)* $\boxed{\underbrace{2ag\beta 4ag4d}_{16(32)a^2g^2\beta d}}$ *L* 18 redeamus. *(1)* Aequatio *(2)* Ordinata *L*

Unde $\dfrac{e^2x^2}{2ax \mp x^2} \sqcap y^2 \sqcap \dfrac{e^2x}{2a \mp x}$. Unde $2ay^2 \mp xy^2 \sqcap e^2x$, vel $2ay^2 \sqcap e^2x \pm xy^2$, vel $\dfrac{2ay^2}{e^2 \pm y^2}[\sqcap x]$. Sed hinc video nil novi; rectius ita: $\dfrac{ax}{\sqrt{2ex \mp \dfrac{e}{a}x^2}} \sqcap y$. Unde $\dfrac{a^2x}{2e \mp \dfrac{e}{a}x} \sqcap y^2$.

Unde $a^2x \pm \dfrac{e}{a}y^2x \sqcap 2ey^2$ sive $\dfrac{2ey^2}{a^2 \pm \dfrac{e}{a}y^2} \sqcap x$. Unde et haec: $\dfrac{a^2}{a^2 \pm \dfrac{e}{a}y^2}$ vel $\dfrac{1}{1+ey^2}$. ponendo $a \sqcap 1$, et e in circulo signum $-$, in hyp. $+$ continere. Unde $1 - ey^2 + e^2y^4 - e^3y^6$ etc. Summae $b - \dfrac{eb^3}{3} + \dfrac{e^2b^5}{5} - \dfrac{e^3b^7}{7}$ etc. Ponatur $eb^2 \sqcap 1$. seu $b \sqcap \dfrac{1}{\sqrt{e}}$. Sin malis relinqui a^2, fiet: $1 - \dfrac{ey^2}{a^3} + \dfrac{e^2y^4}{a^5} - \dfrac{e^3y^6}{a^7}$ etc. Unde: $\dfrac{b}{a} - \dfrac{eb^3}{3a^4} + \dfrac{e^2b^5}{5a^7} - \dfrac{e^3b^7}{7a^{10}}$.

Sed video nihil his obtineri; nam aut $\dfrac{eb^2}{a^3}$ ponendo $\sqcap 1$. aut series in aequationem cogibilis inde fieri non potest.

Ad aliud ergo remedium confugiendum tentandumque est, an aliqua series summabilis addi possit datae, ita ut summa inde facta comparabilis summabili reddatur.

E. g. ad ♃ $\dfrac{h}{a^2y^2 + 2da^2y + d^2a^2}$ quaesitam, addatur ♄ $\dfrac{m}{f^2y^2 + 2afgy + a^2g^2}$ inventa.

$$\frac{a^2\beta}{2} \;..+ \frac{\beta da^2}{2} \qquad\qquad + f^2\beta \;.. +afg\beta$$

Summa ex ipsis formulae summabilium quadratoquadraticae in nominatore, quadraticae in numeratore comparetur; quo facto si in tanta arbitrariarum, d, f, g, h, m, et earum praeterea, quae ex formula $\dfrac{ly^2 + ny + pa}{\dfrac{q}{a}y^2 + ry + s}$, peti possunt numero sex, vel saltem neglecto l, numero 5, fient decem minimum arbitrariae, collationes autem sunt numero novem.

2 $\dfrac{2ay^2}{e^2 \pm y^2}$ | $\sqcap$ x *erg. Hrsg.* | . *(1)* Sub *(2)* Sumatur iam: $\dfrac{y^2}{e^2-}$ *(3)* Sed *L* 11 ad *(1)* $\dfrac{ca}{y^2 + \frac{1}{2}\beta y}$ addatur $\dfrac{d}{}$ *(2)* ♃ *L* 12 *(1)* $+a^2\beta$ .. *(2)* $+f^2\beta$ .. *L*

12 $f^2\beta$ ..: Leibniz ändert hier und in der Formel für b auf S. 641 Z. 24 punktuell den Faktor a^2 in f^2.

Sed et unam adhuc arbitrariam forte facere licebit, forte; explicando y, in posteriore formula $\dfrac{m}{f^2y^2\,\text{etc.}}$. Imo si alias adhuc adicere velis formulas summabiles augebis numerum arbitrariarum, modo non augeatur et numerus dimensionum seu collatitiarum, quod difficile erit evitatu.

$$\begin{array}{cccc} \odot & & \text{☽} & \\ \text{ǂ}\,\dfrac{\frac{l}{a}y^2+ny}{\frac{q}{a}y^2+ry} & \text{‡} & \dfrac{\frac{l}{a}y^2+2ly\beta+\beta^2+ny+n\beta}{\frac{q}{a}y^2+\frac{2q}{a}\beta y+\frac{q}{a}\beta^2+r\ ..\ +r\beta} & .\ \text{Unde}\ \begin{array}{l|l} \frac{lq}{a^2}y^4+\frac{nq}{a}\,y^3 & -\frac{ql}{a^2}y^4-\frac{2lq\beta}{a^2}\,y^3 \\ +\frac{2q\beta l}{a^2}\ .. & -\frac{nq}{a}\ .. \\ +\frac{rl}{a}\ .. & -\frac{rl}{a}\ .. \end{array} \\ \text{♀} & & \text{☿} & \end{array}$$

Patet ergo terminos duos altissimos destructum iri, et fore arbitrariarum undecim, $d.f.g; h.m.l; n.p.q; r.s$; collationum autem ($y^2.y.a$ in numeratore, $y^4+y^3+y^2+y+a.$ in nominatore) in universum 8, et arbitrariae supernumerariae erunt tres, quarum ope si exitus reperiri non potest; has methodum in hunc quidem usum non ultra sollicitandas arbitror.

$\text{ǂ}\dfrac{\odot}{\text{♀}}\ \text{‡}\ \dfrac{\text{☽}}{\text{☿}} \sqcap \dfrac{\text{ǂ}\odot\text{☿}\ \text{‡}\ \text{♀☽}}{\text{♀☿}}$. Iam ex iis quae schediasmatis *De seriebus et quadraturis* plag. 13. fine, et plag. XV. initio calculata sunt, et inter se consentiunt, erit ponendo pro $e \sqcap q.\quad f \sqcap r.\quad g \sqcap s.\quad b \sqcap l.\quad c \sqcap n.\quad d \sqcap p.$

3 modo *(1)* earum nominator *(2)* non *L* 13 usum *(1)* mittendas arbitror *(2)* non *L* 15 f. *quadraturis* *(1)* parte *(2)* plag. 13. *L*

5–9 Leibniz vergißt in den Formeln ☉ u. ☽ den Term $+pa$, in ♀ u. ☿ den Term $+sa$; er bemerkt den Fehler auf S. 642 Z. 7 und schreibt anschließend die vollständige Formel neu an. 15 *De seriebus et quadraturis*: N. 38₁₅ S. 525 Z. 1 – S. 526 Z. 9 u. N. 38₁₇ S. 539 Z. 11 – S. 541 Z. 8.

$$
\begin{array}{llllllll}
 & 1 & & 2 & & 3 \\
\dagger\odot\text{☿}\ddagger\text{♀☽}\ \sqcap & \dagger\dfrac{qn\beta}{a} & y^2 & \dagger 2qp\beta & y & \dagger qp\beta^2 \\
 & \ddagger\dfrac{lr\beta}{a} & .. & \dagger\dfrac{qn\beta^2}{a} & .. & \dagger rpa\beta \\
 & & & \ddagger 2ls\beta & .. & \ddagger ls\beta^2 \\
 & & & \ddagger\dfrac{lr\beta^2}{a} & .. & \ddagger nsa\beta \\
 & \boxed{q.n.r.} & & \boxed{q.n.r.p.s.} & & \boxed{q.n.r.p.s.}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
 & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 \\
\text{♀☿}\ \sqcap & \dfrac{q^2}{a^2} & y^4 & +\dfrac{2q^2\beta}{a^2} & y^3 & +\dfrac{q^2\beta^2}{a^2} & y^2 & +\dfrac{qr\beta^2}{a} & y & +qs\beta^2 \\
 & & & +\dfrac{2qr}{a} & .. & +\dfrac{3qr\beta}{a} & .. & +r^2\beta & .. & +rsa\beta \\
 & & & \boxed{q.r.} & & +2qs & .. & +2rsa & .. & +s^2a^2 \\
 & & & & & +r^2 & .. & +2qs\beta & .. & \boxed{q.r.s.} \\
 & & & & & \boxed{q.r.s.} & & \boxed{q.r.s.} & &
\end{array}
$$

$$\text{Iam } ♃ + ♄ \sqcap \dfrac{\begin{array}{lllll} 1 & & 2 & & 3 \\ hf^2 & y^2 & +2afgh & y & +a^2g^2h \\ & & +a^2\beta h & .. & +afg\beta h \\ +ma^2 & .. & +2da^2m & .. & +d^2a^2m \\ & & +\dfrac{a^2\beta m}{2} & .. & +\dfrac{\beta da^2m}{2} \end{array}}{\begin{array}{llllllll} 4 & 5 & & 6 & & 7 & & 8 \\ a^2f^2y^4 & +2afga^2 & y^3 & +a^2g^2a^2 & y^2 & +a^2g^2 2da^2 & y & +a^2g^2d^2a^2 \\ & +a^2\beta a^2 & .. & +afg\beta a^2 & .. & +afg\beta 2da^2 & .. & +afg\beta d^2a^2 \\ & +f^2 2da^2 & .. & +2afg2da^2 & .. & +\dfrac{a^2g^2a^2\beta}{2} & .. & +a^2g^2\dfrac{\beta da^2}{2} \\ & +\dfrac{f^2a^2\beta}{2} & .. & +a^2\beta 2da^2 & .. & +\dfrac{afg\beta a^2\beta}{2} & .. & +\dfrac{afg\beta\beta da^2}{2} \\ & & & +\dfrac{2afga^2\beta}{2} & .. & +2afgd^2a^2 & .. & \\ & & & +\dfrac{a^2\beta a^2\beta}{2} & .. & +a^2\beta d^2a^2 & .. & \\ & & & +d^2a^2f^2 & .. & +\dfrac{2afg\beta da^2}{2} & .. & \\ & & & +\dfrac{\beta da^2}{2}f^2 & .. & +\dfrac{a^2\beta\beta da^2}{2} & .. & \end{array}}$$

In his duabus formulis inter se conferendis, sunt cognitae, a, β; quaesitae: $q, n, l, r, p, s, h, m, f, d, g$.

Ante omnia per 4, erit $f \sqcap q$. Literae quae saepissime occurrunt rectius in postremum differuntur.

<u>h</u> occurrit vicibus 5 semper simpliciter cum $f^2.fg.g^2$
<u>m</u> . . . . cum $d.d^2$

14 cognitae, a, β; *(1)* arb *(2)* indetermi *(3)* quaesitae *L* 16 f $\sqcap$ q. *(1)* m per 1 *(2)* <u>m</u> per (1), et h.s.q.n.l.r. <u>d.</u> per (2) in *(3)* Literae *L* 17 f. differuntur. *(1)* Saepissime autem occurrunt h, et m, proxime q, inde r. h occurrit vicibus 5, semper pure *(2)* <u>h</u> . . . semper *(a)* pure *(b)* simpliciter *L*

$\underline{f}\, f^2\, h.$	$fg\, h.$	$f^2\, d\,.$	$f^2\, d^2$	$\underline{l}\ l\ q$	$\underline{r}\, r\, l.\, r^2$
		$fg\,..$	$fg\,..$	$..\, r$	$..\, n$
				$\underline{n}\, n\, q$	$..\, q$
$\underline{g}\, g^2\, h.$	$gf\, h$			$..\, r$	
$..\ d$	$....\, d$				
$..\ d^2$	$....\, d^2$			$\underline{q}\, q\, l.\, q^2$	
				$..\, n$	
$\underline{d}\, d\ \ m.$	$d^2\ m$			$..\, r$	
$..\ f^2$	$..\ f^2$				
$..\ fg$	$..\ fg$				
$..\ g^2$	$..\ g^2$				

Repetam:	$\underline{h}$	$h\,fg$	2.3	$\underline{m}$	$m\,d$	3.	$\underline{d}$	$d\,m$	2.3		$d^2 m$	3.
		$..\, f^2$	1.		$..\ d^2$	3.		$..\, f^2$	5.6		$..\ f^2$	6.
		$..\, g^2$	3.		$\bullet$	1.2		$..\, fg$	6.7.8.		$..\ fg$	7.8
								$..\, g^2$	7.8		$..\ g^2$	8.
								$\bullet$	6.7		$\bullet$	7.

$\underline{l}\ \ l\ q$	$\underline{n}\ \ n\, q$	$\underline{q}\, q\, l$	q^2	$\underline{r}\ \ r\, l$	r^2	$\underline{f}$	$\underline{g}$
$..\, r$	$..\, r$	$..\, n$		$..\, n$			
		$..\, r$		$..\, q$			

Sed cum nullum magnopere ex allegatione coepta usum videam, eam non perfeci.

Quoniam tamen in calculo tam prolixo opus est compendio, ideo seriem ♄, ita exhibebimus: $\dfrac{m}{y^2+by+ca}$ ponendo scilicet multiplicatam per f^2 fractionem ♄. Fractionem ♃ ita exprimemus: $\dfrac{h}{y^2+ey+a\varepsilon}$ ponendo $b \sqcap \dfrac{2afg+f^2\beta}{f^2}$, et $c \sqcap \dfrac{a^2g^2+afg\beta}{f^2}$, et $e \sqcap 2d+\dfrac{a^2}{2}$, et $\varepsilon \sqcap d^2+\dfrac{\beta d}{2}$ unde $d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$.

1 *(1)* f vicibus 3 semper cum h; bis cum g, semel secum ipso *(2)* $\underline{\mathrm{f}}$ *L* 24 b $\sqcap$ *(1)* $\dfrac{2\mathrm{afg}+\mathrm{a}^2\beta}{\mathrm{f}^2}$ *(2)* $\dfrac{2\mathrm{afg}+\mathrm{f}^2\beta}{\mathrm{f}^2}$ *L* 25 unde d $\sqcap$ $\dfrac{2\mathrm{e}-\mathrm{a}}{4}$ *erg. L*

Addendo iam ♃ et ♄ reformata, fiet: $$\begin{array}{c} +my^2+emy+a\varepsilon m\\ +h\;..\;+bh\;..\;+eah \\ \hline y^4+by^3+cay^2+caey+ca^2\varepsilon\\ +e\;..\;+eb\;..\;+a\varepsilon b..\\ +a\varepsilon\;.. \end{array}$$

Unde patet in fractione ex ⊙ et ☽ facta, nempe $\dfrac{ǂ⊙☿ \pm ♀☽}{♀☿}$ posse audacter poni $q \sqcap a$ cognitae seu unitati. Videamus tamen an non et hanc brevius exprimere liceat, nempe: Nota ⊙ et [♀] non bene supra expressae quia in ipsis omissae p et s. Sic ergo:

$$\begin{array}{ccc} ⊙ & & ☽ \\ & & \dfrac{l}{a}y^2+\dfrac{2l\beta}{a}y+\dfrac{l\beta^2}{a} \\ & & +\quad n\,..+n\beta \\ ǂ\,\dfrac{\dfrac{l}{a}y^2+ny+pa}{y^2+ry+sa} & \pm & \dfrac{\qquad\qquad\qquad +pa}{y^2\;+\;2\beta y\;+\beta^2} \\ & & +\quad r\,..\;+r\beta \\ & & +sa \\ ♀ & & ☿ \end{array}$$

641,24 *Zu* $b \sqcap \dfrac{2afg+f^2\beta}{f^2}$, et $c \sqcap \dfrac{a^2g^2+afg\beta}{f^2}$: Ergo $g \sqcap \dfrac{fb-f\beta}{2a}$ et $c \sqcap a^2, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}\square, +a\beta, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}$. Ergo c. non est quantitas separata, sed pendens a b.

6 f. nempe *(1)* ⊙ manebit ǂ $\dfrac{\frac{l}{a}y^2+ny}{\quad}$ *(2)* Nota ⊙ et | ☽ *ändert Hrsg.* | non *L*

641,24 f. $e \sqcap 2d+\dfrac{a^2}{2}\;\ldots\; d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$: Richtig wäre $e=2d+\dfrac{\beta}{2}$ bzw. $d=\dfrac{2e-\beta}{4}$. Die fehlerhaften Werte für d bzw. e gehen in , S. 647 Z. 16 f. und in N. 44₂ S. 653 Z. 3–6 in die weitere Rechnung ein.
7 Nota: s. Erl. zu S. 638 Z. 5–9.

Et ut compendio consulamus licebit ☽ ita enuntiare: $\dfrac{\frac{l}{a}y^2+\lambda y+\pi a}{y^2+\varrho y+\text{ɷ}a}\ \dfrac{☽}{☿}$. Tantum ergo notemus; $\underline{\varepsilon}$ pendere ex e. $\underline{\varrho}$ ex r. $\underline{\text{ɷ}}$ ex r et s. $\underline{\lambda}$ ex l et n. et $\underline{\pi}$ ex $l.n.p.$ Igitur $\dfrac{⊙☿+☽♀}{♀☿}$ faciet:

$$\text{ǂ}\left\{\begin{array}{l} \quad pay^2 \\ +\varrho n \,..+\ \varrho pay \\ +\text{ɷ}l\ ..+\text{ɷ}an..+\text{ɷ}a^2p \end{array}\right\} ⊓ ⊙☿$$

$$\text{ǂ}\left\{\begin{array}{l} +\pi a\ .. \\ +r\lambda\ ..+\ r\pi a.. \\ +\ sl\ ..+\ sa\lambda..+\ sa^2\pi \end{array}\right\} ⊓ ☽♀$$

Sed iam ex numeratore ⊙☿ + ☽♀ intelligo conferendo cum calculo superiore, nullum hic a compendio seu brachylogia haberi lucrum, nisi forte in nominatore, cum hic per brachylogiam tantum novem habeantur quantitates, partes formulae, supra vero 14. Itaque retento superiore numeratore, quia nullum a comprehensione seu brachylogia lucrum, nominatorem novum adhibeamus, multiplicando: $y^2+ry+sa$, per $y^2\varrho y+\text{ɷ}a$. Sed ne in lapsum proclives simus describendo ob affinitatem r et ϱ, et s et ɷ, satius ergo pro ϱ adhibere φ et pro ɷ adhibere, γ. et $y^2+ry+sa$, multiplicata per $y^2+\varphi y+\gamma a$, dabit:

12 f. habeantur *(1)* termini, supra autem *(2)* qua *(3)* quantitates, *(a)* hic vero *(b)* partes formulae, *(aa)* hic vero *(bb)* supra vero 14. *(aaa)* Commodius ergo sic exprimemus ǂ $\dfrac{⊙}{♀}$ $\dfrac{\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2+\mathrm{ny}+\mathrm{pa}}{\mathrm{y}^2+\mathrm{ry}+\mathrm{sa}}$ ǂ $\dfrac{\begin{array}{r}\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2+\lambda\mathrm{y}+\lambda\beta \\ +\mathrm{pa}\end{array}}{\begin{array}{r}\mathrm{y}^2+\ \varrho\mathrm{y}+\varrho\beta \\ +\mathrm{sa}\end{array}}$ $\dfrac{☽}{☿}$ ponendo λ ⊓ $\dfrac{2\mathrm{l}\beta}{\mathrm{a}}+\mathrm{n}$ et ϱ ⊓ $2\beta+\mathrm{r}$. Unde fiet multiplicando per crucem, $\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^4$ *(bbb)* Posses et $\dfrac{☽}{☿}$ sic exprimere: $\dfrac{\begin{array}{l}\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2+\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\beta\,\mathrm{y}\ +\lambda\beta \\ \qquad +\lambda\quad ..\ +\mathrm{pa}\end{array}}{\begin{array}{l}\mathrm{y}^2+\beta\quad \mathrm{y}\ +\beta\varrho \\ \quad +\varrho\quad ..\ +\varrho\mathrm{a}\end{array}}$. Sed nec hinc compendium valde notabile; *(ccc)* Commodissimum *(ddd)* Itaque *L* 14 +ɷa *(1)*, unde fiet: *(2)* Sed *L*

$$\left.\begin{array}{llllll} & & \text{nominator} & & & \\ y^4 & +r & y^3 & +sa\ y^2 & +\varphi sa\ y & +\gamma sa^2 \\ & +\varphi & .. & +\varphi r\ .. & +\gamma ar\ .. & \\ & & & +\gamma a\ .. & & \end{array}\right\}\text{qui est denominator fractionis cuius numerator est,}$$

$$\begin{array}{llll} & \text{numerator} & & \\ \mp n\beta\ \ y^2 & \mp 2ap\beta\ y & \mp\ ap\beta^2 & \\ \pm\dfrac{lr\beta}{a}\ .. & \mp n\beta^2\ .. & \mp\ rpa\beta & \\ & \pm 2ls\beta\ .. & \pm\ ls\beta^2 & \\ & \pm\dfrac{lr\beta^2}{a}\ .. & \pm\ nsa\beta & \end{array}$$

Quae fractio conferenda est cum superiore cuius

$$\begin{array}{llllll} & & \text{nominator} & & & \\ \cancel{4} & \cancel{5} & \cancel{6} & \cancel{7} & 8 & \\ y^4 & +b\ \ y^3 & +ca\ y^2 & +cae\ \ y & +ca^2\varepsilon & \\ & +e\ \ .. & +e\beta\ .. & +a\varepsilon\beta\ .. & & \\ & & +a\varepsilon\ .. & & & \end{array} \qquad \begin{array}{lll} & \text{numerator} & \\ \cancel{1} & \cancel{2} & 3 \\ +ma\ y^2 & +ema\ \ y & +a^2\varepsilon m \\ +ha\ \ .. & +bha\ \ .. & +ca^2h \end{array}$$

Quaerendae sunt: $b.c.e.(\varepsilon).h.m.,l.n.p.\underbrace{r.(\varphi)s.}_{(\gamma)}$

Ex coll. $\underline{\underline{5}}$, erit $\underline{b} \sqcap \boxed{r+\varphi}\,2r+2\beta-e$. ex $\underline{\underline{6}}$, erit $\underline{\underline{c}} \sqcap \dfrac{sa+\varphi r+\gamma a-e\beta-a\varepsilon}{a}$. Ex $\underline{\underline{1}}$, erit

---

18 *Nebenbetrachtung:* $\varepsilon \sqcap \dfrac{d^2+\beta d}{2}$. Est autem $d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$. $\varphi \sqcap 2\beta+r$. $\gamma \sqcap \dfrac{\beta^2+r\beta+sa}{a}$.

Inveni errorem in eo commissum, quod c velut literam separatam, a b independentem supponi, quod non est.

---

10 superiore: S. 642 Z. 1–4. 19 $\varepsilon = \dfrac{d^2+\beta d}{2}$: Leibniz übernimmt die Werte für ε und d von S. 641 Z. 25 (vgl. Erl.), für φ und γ aus der Formel ☿ S. 642 Z. 11–13. Beim Übertragen der Gleichung für ε unterläuft ihm ein Schreibfehler; der fehlerhafte Wert geht in die Berechnung von ε in S. 646 Z. 1 f. ein, wobei weitere Unstimmigkeiten auftreten. Das Ergebnis beeinträchtigt die Rechnung in N. 44_2 ab S. 658 Z. 1.

$\underline{m} \sqcap \dfrac{\mp n\beta a \pm lr\beta - ha^2}{a^2}$, ex $\underline{\underline{2}}$, erit

$\underline{p} \sqcap \dfrac{\mp n\beta a^2 e \pm lr\beta ea - ha^3 e + 2rha^3 + 2\beta ha^3 \pm n\beta^2 a^e \mp 2ls\beta a^2 \mp lr\beta^2 a}{\mp 2a^3\beta}$. Ex $\underline{\underline{7}}$, fiet:

$2\beta sa + rsa + r\beta^2 + r^2\beta + rsa \sqcap esa \boxed{+e\varphi r} + 2\beta er + 2r^2 e + e\beta^2 + er\beta + esa + 2ra\varepsilon + 2\beta a\varepsilon - ea\varepsilon$ adeoque $\underline{\underline{s}} \sqcap \dfrac{+3\beta er + 2r^2 e + e\beta^2 + 2ra\varepsilon + 2\beta a\varepsilon - ea\varepsilon - r\beta^2 - r^2\beta}{2\beta a + 2ra - 2ea}$. Ex aequatione autem $\underline{\underline{8}}$, fiet:

$$\left.\begin{array}{l} 3\beta er\,\beta^2 + 2r^2 e\,\beta^2 + e\beta^2\,\beta^2 + 2ra\varepsilon\,\beta^2 + 2\beta a\varepsilon\,\beta^2 - ea\varepsilon\,\beta^2 - r\beta^2\,\beta^2 - r^2\beta\,\beta^2 \\ \ldots.\ r\beta + \ldots.\ r\beta + \ldots\ r\beta + \ldots.\ r\beta + \ldots.\ r\beta - \ldots\ r\beta - \ldots\ r\beta - \ldots\ r\beta \\ \ldots.\ sa + \ldots.\ sa + \ldots\ sa + \ldots.\ sa + \ldots.\ sa - \ldots\ sa - \ldots\ sa - \ldots\ sa \end{array}\right\} \sqcap$$

$$\begin{array}{cccccccc} sa^2 e\, 2\beta\cancel{a} & +\varphi & rae\ 2\beta\cancel{a} & +\gamma & a^2 e & 2\beta\cancel{a} & -e^2 a\beta\, 2\beta\cancel{a} & -a^2 e\varepsilon\, 2\beta\cancel{a} \\ 2r\cancel{a} & \overbrace{2\beta + r} & 2r\cancel{a} & \overbrace{\dfrac{\beta^2 + r\beta + sa}{a}} & & 2r\cancel{a} & 2r\cancel{a} & 2r\cancel{a} \\ -\,2e\cancel{a} & & -\,2e\cancel{a} & & & -\,2e\cancel{a} & -\,2e\cancel{a} & -\,2e\cancel{a} \end{array}$$

Sed cum duae literae sint in mea potestate, utile videtur, ponere, $s \sqcap 0$. et fiet ex coll. 7:

$$\oplus\ r^2 \quad \left.\left\{\dfrac{\begin{array}{l} +3\beta er \\ \boxed{+2a\varepsilon..} \\ -\beta^2.. \end{array}}{2e-\beta}\right. \quad \left\{\dfrac{\begin{array}{l} +e\beta^2 \\ \boxed{\begin{array}{r} +2\beta a\varepsilon \\ -ea\varepsilon \end{array}} \end{array}}{2e-\beta}\right.\right\} \sqcap 0 \quad \text{et ex coll. 6[:]}$$

---

13 *Kontrollbetrachtung mit Nebenrechnungen:* $(e \sqcap -\dfrac{15}{2})$ $3\beta e \sqcap \dfrac{-45\cancel{24} \frown 2}{\cancel{2}} \sqcap -90,\ -16 \sqcap -106.\ -19 \sqcap 2e - \beta.$ $\begin{array}{r} 15 \\ \underline{8} \\ 120 \end{array}$ $\begin{array}{c} \cancel{6} \\ \cancel{12}\cancel{0} \\ \cancel{19} \end{array} \not\sqcap 6\ \dfrac{4[!]}{19}$ $\dfrac{e\beta^2 \sqcap -15 \frown 8}{-19 \sqcap 2e - \beta} \sqcap 6\dfrac{4[!]}{19}$. Ex quo calculo apparet r esse quantitatem realem, quod desiderabatur.

644,18 $\underline{\mathrm{c}} \sqcap \dfrac{\mathrm{sa} + \varphi\mathrm{r} + \gamma\mathrm{a} - \mathrm{e}\beta - \mathrm{a}\varepsilon}{\mathrm{a}}$. *(1)* Ex 7. explicando $\varphi \sqcap 2\beta + \mathrm{r}$, ex coll. 7. fiet: *(2)* $2\beta 3\mathrm{sa}$ *(3)* γ *(4)* Ex 8, $\gamma \sqcap \dfrac{\mathrm{sa}\cancel{2}\varepsilon + \varphi\mathrm{r}\cancel{a}\varepsilon + \gamma\mathrm{a}\cancel{2}\varepsilon - \mathrm{e}\varepsilon\beta - \cancel{a}\varepsilon^2}{\mathrm{sa}}$ *(4)* Ex $\underline{\underline{1}}$ *L* 644,19 d $\sqcap \dfrac{2\mathrm{e} - \mathrm{a}}{4}$. *(1)* ergo $\varepsilon \sqcap \dfrac{4\mathrm{e}^2 - 4\mathrm{ea} + \mathrm{a}^2}{32} +$ *(2)* $\varphi \sqcap 2\beta + \mathrm{r}$ *L*

$+3\,2\,\beta r + r^2 + \beta^2 \boxed{+r\beta} - e\beta - a\varepsilon \sqcap 0$. Est autem $\varepsilon \sqcap \dfrac{4e^2 - 4ea + a^2}{32} + \dfrac{2\beta e - \beta a}{2a}$ vel $\varepsilon \sqcap \dfrac{4e^2 - 4ea + a^2 + 32\beta e - 16\beta a}{32a}$. Unde ex coll. 6 fiet: $96\beta r + 32r^2 + 32\beta^2 - e\beta - 4e^2 + 4ea - a^2 - 32\beta e + 16\beta a \sqcap 0$ sive

$$\left.\begin{array}{rrr} e^2 & +\quad \beta e & -\ 96\beta r \\ & -\ \ 4a.. & -\ 32r^2 \\ & +32\beta.. & -\ 32\beta^2 \\ & & +\quad a^2 \\ & & -\ 16\beta a \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{4} \end{array}\right\} \sqcap\ 0.$$

Ex priore aequatione, coll. 7. substituendo pro ε eius valorem, fiet:

$$\begin{array}{rll} r^2 & +\,96\beta e\ r & +\,32e\beta^2 \quad \sqcap\ 0. \\ & +\ 8e^2 & +\ 8\beta e^2 \\ & -\ 8ea & -\ 8ea\beta \\ & +\ 2a^2 & +\ 2\beta a^2 \\ & +\,64\beta e & +\,64\beta^2 e \\ & \underline{-\,32\beta a} & \underline{-\,32\beta^2 a} \\ & -\,32\beta^2 & -\ \ 4e^3 \\ & & +\ 4e^2 a \\ & & -\ \ ea^2 \\ & & -\,32\beta e^2 \\ & & +\,16e\beta a \\ \hline & \multicolumn{2}{c}{64e - 32\beta} \end{array}$$

Sed aliter quoque et credo brevius: Ponendo, ut dixi $s \sqcap 0$. fiet et $ca^2\varepsilon \sqcap 0$. Ergo vel $c \sqcap 0$. ut paulo ante, vel potius divisa aequatione per c. fiet $\varepsilon \sqcap 0$. Quo facto exitus habetur planus, quia fiet: ♂ $\underline{\underline{e^2}} \begin{array}{l} -\ \ ae \\ +8\beta \end{array} \begin{array}{l} +\dfrac{a^2}{4} \\ -\,4\beta a \end{array} \sqcap 0$. Habetur ergo e pure, sine r, et proinde $\underline{r}$ quoque.

6+9 $\sqcap$ 0. *(1)* Eodem modo in priore aequatione *(a)* subst *(b)* Ex coll. 7 *(aa)* fiet *(bb)* fiet *(3)* Ex *L* 23 facto *(1)* ad utrius *(2)* exitus *L*

645,16 ($e \sqcap -\dfrac{15}{2}$): Leibniz verwendet die Gleichung von S. 647 Z. 17 mit den Werten $\beta = 4$ und $a = 1$. 1 f. Est autem ε: S. Erl. zu S. 644 Z. 19.

Aequationibus ⊕ ex coll. 7, et ♂ ex coll. 8 inventis restat aequatio invenienda ex coll. 3. ubi quia s et ε sunt $\sqcap$ 0. ponendo etiam $p \sqcap 0$. restabit ex coll. 3. $ca^2h \sqcap 0$. id est vel $c \sqcap 0$. vel $h \sqcap 0$. Sed non licet ponere $c \sqcap 0$. quia in valore ipsius c. ex coll. 6. non continentur aliae incognitae quam r. et e. quae iam sunt inventae, erit ergo ex coll. 3. $\underline{h} \sqcap 0$. Sed iam video id non licere, neque h neque m facere $\sqcap$ 0. Quare nec p licebit ponere $\sqcap$ 0. fiet ergo: ex coll. 3. $\text{ǂ}ap\beta^2 \;\text{ǂ}\; rpa\beta \sqcap ca^2h$. vel

$$\begin{array}{cccccccc} \text{ǂ}\,n\beta a e\beta & \ddagger\,n\beta^2 a\beta & \ddagger\,lr\beta e\beta & \boxed{\begin{array}{c}\text{ǂ}2ls\beta a\beta\\ \dots.\,ra\end{array}} & -hae\,a\beta & \text{ǂ}\,lr\beta^2 a & +2rha\,a\beta & +2\beta ha\,a\beta \\ \dots\;ar & \dots\;ar & \dots.\,r & & \dots\,ra & \dots.\,r & \dots.\;ra & \dots.\;ra \end{array}$$
$$\sqcap 2ca^2h,$$

sive $\sqcap \boxed{2sa^3h} + 2\varphi ra^2h + 2\gamma aa^2h - 2e\beta a^2h \boxed{-2a\varepsilon a^2h}$. Ac primum parenthesi inclusa evanescunt, quia s et $\varepsilon \sqcap 0$. per superiora. Supersunt incognitae, h, n, l ex quibus duae sunt supernumerariae, non tamen licet ponere $h \sqcap 0$. neque n simul cum l. Optimum ergo erit ponere vel l vel n aequale $\sqcap$ 0. et h. arbitrariae valorem quendam ascribere, per quem aequatio reddatur simplicior. Hac ergo in parte manifeste habetur exitus, tantum unum excutiendum superest, an e et r sint quantitates verae, an imaginariae. Imo de e non metuendum, nam si $\varepsilon \sqcap 0$ fiet per superiora $d \sqcap -\beta$. ut idem $d \sqcap \dfrac{2e-a}{4}$. Ergo $e \sqcap \dfrac{a-4\beta}{2}$. nam divisibilis est aequatio ♂ per d, aut per $\dfrac{2e-a}{4}$.

---

16 per superiora: Leibniz verwendet die fehlerhafte Gleichung für ε von S. 644 Z. 19.

44_2. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS SECUNDA
3. März 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 7 v° leer. Datum u. Überschrift ergänzt. — Auf Bl. 7 r° außerhalb des Textes 3 Skizzen in Blindtechnik, möglicherweise zur Rechenmaschine (hier nicht wiedergegeben).
Cc 2, Nr. 915 A tlw.

3 Martii 1675

Pars 2^da De seriei fractionum summa cum formulae differentiarum comparatur

His ita pulchre in speciem procedentibus, denique errorem aliquem subesse deprehendi, non quidem calculi, sed quod peius ratiocinationis, nam praecipitato nonnihil iudicio sumi b. et c. velut a se invicem independentes, cum tamen sit $b \sqcap \dfrac{2ag+f\beta}{f}$. Unde $g \sqcap f, \frown \dfrac{b-\beta}{a}$. Iam $c \sqcap \dfrac{a^2g^2+afg\beta}{f^2}$, ergo $c \sqcap \dfrac{a^2, \frown f^2, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}\square,, + a\beta, \frown f^2, \frown \dfrac{b-\beta}{2a}}{f^2}$, sive $c \sqcap \dfrac{b^2-2\beta b+\beta^2}{4} + \dfrac{b\beta-\beta^2}{2}$ sive $c \sqcap \dfrac{b^2-2b\beta+\beta^2, +2b\beta-2\beta^2}{4}$ sive $c \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4}$. Ergo omnium serierum, quarum numerator constans, nominator vero: $y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}$, ut $\dfrac{1}{y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}}$ iniri potest summa. Unde si sit series $\dfrac{1}{y^2+2\mu y+\mu^2}$. conferendo erit: $\mu \sqcap \dfrac{b}{2}$. et $\mu^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}$. Ergo $\dfrac{b^2}{4} \sqcap \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{\beta^2}{4}$. Ergo $\beta \sqcap 0$. quod est absurdum.

8 Pars 2^da *(1)* De *(a)* serierum *(b)* seriei summa *(2)* De *L*

Videamus an habeatur series: $\dfrac{1}{\begin{array}{c}y^2+2\mu y+\mu^2\\ \qquad\quad +\xi^2\end{array}}$. Unde conferendo: $\mu \sqcap \dfrac{b}{2}$ et $\mu^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}$. Iam $\dfrac{b^2}{4}+\xi^2 \sqcap \dfrac{b^2}{4}-\dfrac{\beta^2}{4}$. Erit $\xi^2 \sqcap -\dfrac{\beta^2}{4}$. quod est absurdum.

$y^2+by+\dfrac{b^2-\beta^2}{4}$ conferenda cum: $\begin{array}{ccc}y^2 & +2dy & +d^2\\ & +\dfrac{\beta}{2} & +\dfrac{\beta d}{2}\end{array}$ fiet $d \sqcap \dfrac{2b-\beta}{4}$, et $d^2 \sqcap \dfrac{4b^2-4b\beta+\beta^2}{16}$. Unde $\boxed{4b^2}\boxed{-4b\beta}+\beta^2\boxed{+4b\beta}-2\beta^2 \sqcap \boxed{4b^2}-4\beta^2$ aequatio absurda. Ergo ne ista quidem series.

Sumamus seriem polygonorum, et videamus quarumnam ex illis fractionum haberi possit summa. Porro ut alibi ex Gosselino calculavi, si numerus angulorum sit B, latus z, numerus polygonus erit: $\dfrac{2a+B}{2}\,z^2\ \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\\ -Ba\end{array}\right.}{2}\,z$. Explicetur z per $y+\mu$, fiet:

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{\left\{\begin{array}{l}2a\ \ y^2\\ +B\ ..\end{array}\right.}{2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2a\\ +B\end{array}\right.}{2}\frown 2\mu\ y & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2a\ \ \mu^2\\ +B\ \ ..\end{array}\right.}{2}, \text{ divisisque omnibus per } \dfrac{2a+B}{2}, \text{ fiet:}\\[2ex]
 & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\ \ ..\\ -Ba\ \ ..\end{array}\right.}{2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\mu\\ -Ba\,\mu\end{array}\right.}{2}\\[2ex]
y^2 & +\ \mu\ y & \mu^2. \quad \text{Erit } \mu \sqcap \dfrac{2ab+Bb-4a^2+Ba}{2a+B}. \text{ et}\\[2ex]
 & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\,..\\ -Ba\,..\end{array}\right.}{\begin{array}{l}+2a\\ +B\end{array}} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+4a^2\mu\\ -Ba\,..\end{array}\right.}{\begin{array}{l}+2a\\ +B\end{array}}
\end{array}$$

4–651,3 y^2+by ... [irrationalem]: Leibniz versucht nacheinander drei Zahlenfolgen durch Koeffizientenvergleich auf die Ausgangsformel zurückzuführen. Ab Z. 16 unterlaufen ihm einige Fehler, welche die Überlegungen beeinträchtigen. 9 alibi ex Gosselino: Leibniz exzerpiert den Satz über die Polygonalzahlen aus *De arte magna*, 1577; Bl. 11 r° [Marg.] und übersetzt ihn in eine analytische Formel in N. 41₂ S. 601 Z. 8–18. 16–650,15 $+\mu y$: Leibniz vergißt den Faktor 2. Der Fehler geht in die weitere Rechnung ein und beeinträchtigt zusammen mit weiteren Unstimmigkeiten in der Gleichung S. 650 Z. 10 f. die Berechnung von b in S. 650 Z. 14 f.

$$\mu^2 \sqcap \frac{4a^2b^2+4abBb-16aba^2+4abBa,+B^2b^2-8Bba^2+2B^2ba,+16a^4-8a^2Ba+B^2a^2}{4a^2+4aB+B^2}.$$

Unde fiet: $4a^2b^2+4abBb$ etc., $\begin{array}{l} +2ab,\frown +4a^2 \sqcap \left\{ \begin{array}{ll} +b^2 & \frown +4a^2\ . \\ \underline{-\beta^2} & +4aB \\ \quad 4 & +B^2 \end{array}\right. \\ +Bb \quad\ -Ba \\ -4a^2 \\ +Ba \end{array}$

Compendii causa rectius ita procedemus: Ponendo $\mu \sqcap \dfrac{2ab+Bb-4a^2+Ba}{2a+B}$ vel $b-\dfrac{4a-B,\frown a}{2a+B}$ erit $\mu^2 \sqcap b^2-2ba\dfrac{4a-B}{2a+B}+\dfrac{4a-B[,\frown a]}{2a+B}\square$. Ergo $b^2-2ba\dfrac{4a-B}{2a+B}+\dfrac{4a-B[,\frown a]}{2a+B}\square+\boxed{\dfrac{4a-B,\frown a\mu}{2a+B}}\dfrac{4a-B,,,\frown b\frown 2a+B,,-4a+B,\frown a}{2a+B,\square} \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4}$.

Multiplicentur omnia per $16a^2+16aB+4B^2$, fiet:

$$\boxed{16a^2b^2}\boxed{+16aBb^2}\boxed{+4B^2b^2}-2ba4a4a-2ba4a2B+2baB4a+2baB2B+64a^4-32a^3B+4a^2B^2 \sqcap \boxed{16a^2b^2}\boxed{+16aBb^2}\boxed{4B^2b^2}-16a^2\beta^2-16aB\beta^2-4B^2\beta^2.$$

Unde patet huius aequationis ope regulariter inveniri posse b. Adeoque regulariter summam numerorum fractionum polygonalium inveniri posse; fiet

$$b \sqcap \frac{-16a^2\beta^2-16aB\beta^2-4B^2\beta^2-64a^4+32a^3B-4a^2B^2}{\begin{array}{c}-32a^3\boxed{-16a^2B+8a^2B}+4aB^2\\ -8a^2B\end{array}}.$$

Exemplo utamur pentagoni cuius formula: $\begin{array}{l} y^2+7\mu a y+7\mu^2 \\ +\quad a\quad +a\mu \end{array}$. Ergo $\mu \sqcap \dfrac{b-a}{7}$. et

$\mu^2 \sqcap \dfrac{b^2-2ba+a^2}{49}$. Unde $\dfrac{b^2-2ba\boxed{+a^2}+\boxed{ab}\boxed{-a^2}}{7} \sqcap \dfrac{b^2-a^2}{4}$ seu $\boxed{4b^2}-4ba \sqcap$

7 f. $,\frown$ a *erg. Hrsg. zweimal* 13 numerorum *(1)* polygonorum *(2)* fractionum *L* 13 posse; *(1)* fiet enim b $\sqcap$ *(2)* ponamus *(3)* sed nos e diverticulo in viam redeamus *(4)* fiet *L*

16–651,3 formula: Die Formel für die Fünfeckszahlen ist fehlerhaft und beeinträchtigt zusammen mit Flüchtigkeitsfehlern in Z. 16 (in der Gleichung für μ fehlt der Faktor a im Nenner) und in S. 651 Z. 1 (in der zweiten Gleichung der Kette müßte $+\frac{7}{3}a^2$ stehen) die Überlegung bis S. 651 Z. 3.

$3\boxed{7}b^2 - 7a^2$. sive $b^2 + \frac{4}{3}ab + \frac{4}{9}a^2 \sqcap \frac{4}{9}a^2 + 7a^2 \sqcap \frac{4a^2 + 63a^2}{9} \sqcap \sqrt{\frac{67a^2}{9}} \sqcap b + \frac{2}{3}a$ sive $b \sqcap \frac{a\sqrt{67} - 2a}{3}$. Et notabile est infinitorum numerorum rationalium summae sic aequalem haberi [irrationalem].

$\frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{\boxed{1} + y^2 \boxed{-1}}{y^2-1, \frown y+1}$, huius seriei momentum ex $y+1$. est $\frac{y^2}{y^2-1}$ quod haberi potest. Eiusdem momentum ex $y-1$, est: $\frac{y^2}{y^2+2y+1}$. Haec ergo pendet ex $\frac{1}{y+1}$. $\frac{y^2+2y+1}{y^2+2y+1} \sqcap 1$. et $\frac{y+1}{y^2+2y+1} \sqcap \frac{1}{y+1}$. Ergo $\frac{y}{y^2+2y+1}$ pendet etiam ex $\frac{1}{y+1}$.

$\frac{da}{y^2-\beta^2} + \frac{c}{y+\beta} \sqcap \frac{da + cy - c\beta}{y^2-\beta^2}$, seu $\frac{\begin{matrix} cy - c\beta \\ + da \end{matrix}}{y^2-\beta^2}$ vel $\frac{\begin{matrix} y - \beta \\ + \frac{da}{c} \end{matrix}}{y^2-\beta^2}$. Pone $-\beta + \frac{da}{c} \sqcap \beta$ fiet: $\frac{da}{c} \sqcap 2\beta$.

$\frac{1}{y+\beta} - \frac{1}{y-\beta} \sqcap \frac{y-\beta-y-\beta}{y^2-\beta^2} \sqcap \frac{[-2\beta]}{y^2-\beta^2}$

Operae pretium foret invenire indicium unde pateat an aequatio impossibilis etiam ante collationem.

$bf \sqcap 2ga + f\beta$, et $f^2c \sqcap g^2a + f\beta g$. Ergo $g \sqcap \frac{bf - f\beta}{2a}$, et $g^2 \sqcap \frac{b^2f^2 - 2bf^2\beta + f^2\beta^2}{4a^2}$. Iam $\cancel{f^2}c \sqcap \frac{b^2\cancel{f^2}\boxed{-2bf^2\beta} + \cancel{f^2}\beta^2}{4a\cancel{^2}}, \frown \cancel{a}, + \frac{\boxed{f\beta bf} - \cancel{f^2}\beta^2}{2}$. $c \sqcap \frac{b^2\boxed{+\beta^2 - 2\beta^2} - \beta^2}{4}$. Aliter:

3 rationalem *L ändert Hrsg.* 4 huius *(1)* figurae *(2)* seriei *L* 11 $2\beta^2$ *L ändert Hrsg.*

4–7 $\frac{1}{y^2-1} + \frac{1}{y+1}$: Leibniz vergißt auf der rechten Seite der Gleichung im Zähler den Term $+y$; die Überlegung bzgl. der Momente wird dadurch nicht wesentlich beeinträchtigt.

$$f \sqcap \frac{2ga}{b-\beta} \text{ et } f^2 \sqcap \frac{4g^2a^2}{b^2-2b\beta+\beta^2}.\ c \sqcap \frac{\cancel{g^2}a - \dfrac{2\cancel{g}a \frown \beta\cancel{g}}{b-\beta}}{\dfrac{4\cancel{g^2}a^2}{b^2-2b\beta+\beta^2}} \sqcap \frac{b\cancel{a}\boxed{-\beta a+2\beta a} + \beta\cancel{a}, \frown b-\beta}{4a\cancel{^2}}.$$

Ergo $c \sqcap \dfrac{b^2-\beta^2}{4a}$.

Redeamus ad nostram collationem:

$\cancel{1}$	$\cancel{2}$	$\cancel{3}$	$\cancel{4}$	$\cancel{5}$	6	$\cancel{7}$	$\cancel{8}$
$\mp n\beta\ y^2$	$\mp 2ap\beta y$	$\mp ap\beta^2$	y^4	$+2r\,y^3$	$+2sa\quad y^2$	$+2\beta say$	$+\beta^2 sa$
	$\mp\ n\beta^2\,..$	$\mp rpa\beta$		$+2\beta\,..$	$+3\beta r\quad ..$	$+3rsa\,..$	$+r\beta sa$
$\pm\dfrac{lr\beta}{a}\,..$	$\pm 2ls\beta\ ..$	$\pm ls\beta^2$			$+\quad r^2\ ..$	$+\beta^2 r\ ..$	$+s^2a^2$
	$\pm\dfrac{lr\beta^2}{a}\,..$	$\pm nsa\beta$			$+\quad \beta^2\ ..$	$+r^2\beta\ ..$	
$+ma\,y^2$	$+ema\ ..$	$+a^2\varepsilon m$	y^4	$+\ b\,y^3$	$+\quad \dfrac{b^2}{4}\,y^2$	$+\dfrac{b^2}{4}e\ \ y$	$+b^2a\varepsilon$
$+ha\ ..$	$+bha\ ..$	$+\dfrac{b^2ah}{4}$		$+\ e\,..$	$-\quad \dfrac{\beta^2}{4}\,..$	$-\dfrac{\beta^2}{4}e\,..$	$\dfrac{-\beta^2a\varepsilon}{4}$
		$-\dfrac{a\beta^2h}{4}$			$+\quad e\beta\ ..$	$+a\varepsilon b\ \ ..$	
					$+\quad a\varepsilon\ ..$		

$b \sqcap 2r+2\beta-e$ per coll. 5. $\quad m \sqcap \dfrac{\mp n\beta a \pm lr\beta - ha^2}{a^2}$ ex coll. 1.

$$\underbrace{2r+2\beta-e}$$

$$p \sqcap \frac{\mp en\beta a \pm elr\beta - eha^2 + bha^2 \pm n\beta^2 a \mp 2ls\beta a \mp lr\beta^2}{\mp 2a^2\beta} \text{ ex coll 2.}$$

m et h non possunt poni $\sqcap$ 0. singulatim, aut simul.

Pone $s \sqcap 0$. fiet ex 8. $b \sqcap \dfrac{\beta}{2}$ et $e \sqcap \dfrac{4r+3\beta}{2}$, nisi malimus ex 8, $\varepsilon \sqcap 0$: Habebitur e pure, sine alia incognita ex coll. 8. Nimirum fiet: $e \sqcap \dfrac{a-4\beta}{2}$. ut praecedentis plagulae

17–653,1 $b \sqcap \dfrac{\beta}{2}$ et $e \sqcap \dfrac{4r+3\beta}{2}$: Aus dem Koeffizientenvergleich ergibt sich $b = \beta$ und $e = 2r+\beta$. Leibniz übernimmt anschließend jedoch den ebenfalls fehlerhaften Wert für e aus N. 44_1 S. 647 Z. 17.

fine ostendi. Ponendo igitur $s \sqcap 0.$ et $\varepsilon \sqcap 0.$ poterit iam r inveniri nulla alia incognita implicata, nisi e, quae pro cognita haberi potest.

$$\underbrace{\frac{a-4\beta}{2}}\ \underbrace{\frac{a-4\beta}{2}}$$

Nimirum ex coll. 7: $4\beta^2 r + 4r^2\beta \sqcap b^2 e \ - \ \beta^2 e.$

$$\overbrace{4r^2 + 8r\beta - 4re, +4\beta^2 - 4\beta e, +e^2}$$

$$\frac{a-4\beta}{2} \qquad \overbrace{\frac{a^2 - 8a\beta + 16\beta^2}{4}}$$

Ex qua aequatione reducta, fiet:

$$\underset{\mathrm{II}}{\boxed{16\beta^2 r}}\boxed{+16r^2\beta} \sqcap 8r^2 a - 48\,32\,r^2\beta, +48\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{32\,\underset{\mathrm{I}}{16}}}\,r\beta a - 144\underset{\mathrm{III}}{\boxed{80\,\underset{\mathrm{II}}{64}}}\,r\beta^2 - 4ra^2\underset{\mathrm{I}}{\boxed{+4ra4\beta}}$$
$$\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{+4r4\beta a}}\underset{\mathrm{III}}{\boxed{-4r4\beta 4\beta}} + 62\underset{\mathrm{V}}{8}\,\beta^2 a - 120\underset{\mathrm{VI}}{32}\,\beta^3 - 10\underset{\mathrm{VII}}{8}\,\beta a^2\underset{\mathrm{V}}{\boxed{+32\beta a\beta}}$$
$$\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{-64\beta^3}} + \frac{a^3}{2}\underset{\mathrm{VII}}{\boxed{-a^2 2\cancel{4}\beta - 4\cancel{8}a\beta a}}\underset{\mathrm{V}}{\boxed{+4\cancel{8}a\beta 4\beta}}\underset{\mathrm{V}}{\boxed{+8\cancel{16}\beta^2 a}}\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{-8\cancel{16}\beta^2 4\beta}}$$
$$\underset{\mathrm{V}}{\boxed{-2\beta^2 a}}\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{+8\beta^3}}$$ seu colligendo:

$$\boxed{\begin{matrix} +\ 8a \\ -\ 48\beta \end{matrix}}\, r^2 .. \left\{\begin{matrix} + & 144\beta^2 & r \\ - & 4a^2 & \end{matrix}\right. \atop \overline{+8a - 48\beta} \quad \left\{\begin{matrix} + & 62\beta^2 a \\ - & 120\beta^3 \\ - & 10\beta a^2 \\ + & \dfrac{a^3}{2} \end{matrix}\right. \atop \overline{+8a-48\beta}$$

$\sqcap\ 0.$ et ordinando ad extractionem:

652,18 ex coll. 8 *erg. L*

$$r^2\,\frac{\left\{\begin{array}{l}+\;144\beta^2\\-\quad 4a^2\end{array}\right.}{8a-48\beta}\;r\,\frac{\left\{\begin{array}{l}+\quad 20736\beta^4\\-\quad 1152\beta^2a^2\\+\quad 16a^4\end{array}\right.}{64a^2-768a\beta+2304\beta^2,\frown 4}\quad\sqcap$$

$$\frac{\left\{\begin{array}{l}+\quad 20736\beta^4\\-\quad 1152\beta^2a^2\\+\quad 16a^4\end{array}\right.}{64a^2-768a\beta+2304\beta^2,\frown 4}\quad\frac{\left\{\begin{array}{l}-\;\;62\beta^2a\\+\;120\beta^3\\+\;\;10\beta a^2\\-\;\;\dfrac{a^3}{2}\end{array}\right.}{48\beta-8a}$$

Ergo $\mp r \pm \frac{2300}{184} \sqcap \sqrt{\frac{4290000}{184,2,\square}+\frac{6108}{184}-\frac{1}{2}}$ ponendo $a \sqcap 1.$ et $\beta \sqcap 4.$ Unde patet hactenus nullam occurrisse impossibilitatem.

Quemadmodum ergo $e \sqcap -\frac{3}{2}$, ita $r \sqcap \mp\sqrt{31+\frac{3}{4}+33\frac{1}{5}-\frac{1}{2}}-12\frac{1}{2}$ seu $r \sqcap \mp 8-12\frac{1}{2} \sqcap -4\frac{1}{2}$ vel $-20\frac{1}{2}$.

1–7 *Nebenrechnungen und Zusätze s. S. 660 Z. 1 – S. 662 Z. 3.*

10 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & \cancel{2}3 & & \\
\cancel{2}0 & & & \cancel{5}\cancel{4} & & \\
\cancel{4}\cancel{6} & & & \cancel{3}\cancel{7}\cancel{8}6 & & \\
\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}0 \;⨍\; 12 & \dfrac{92}{[184]}\Big|\dfrac{1}{2} & & \cancel{6}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{8}\;⨍\;33\,\dfrac{9}{46}\sqcap 33\,\dfrac{1}{5} & \dfrac{18}{92}\Big|\dfrac{9}{46} & \\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{4}4 & & & \cancel{1}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{4} & & \\
\cancel{1}\cancel{8} & & & \cancel{1}\cancel{8} & &
\end{array}$$

---

10 f. $e \sqcap -\frac{3}{2}$: Aus $\beta = 4$ folgt gemäß S. 652 Z. 18 $e = -\frac{15}{2}$. Für die Berechnung von r verwendet Leibniz Näherungswerte.

Brevius enuntiando p, erit $p \sqcap \dfrac{ema + bha \mp n\beta^2 \mp 2ls\beta \mp lr\dfrac{\beta^2}{a}}{\mp 2a\beta}$ per coll. 2.

$$s \sqcap \frac{a^2\varepsilon m + \dfrac{b^2ah}{4} - \dfrac{a\beta^2h}{4},, \mp p + \boxed{\mp\mp}\dfrac{2ls\beta}{\mp 2a\beta}, \frown a\beta^2 + ra\beta}{\mp l\beta^2 \mp na\beta} \text{ coll. 3.}$$

Sed iam video quia quatuor aequationes collatitias 5.6.7.8. non nisi totidem incognitae $r.s.e.b.$ ingrediuntur, ex illis solis aliquam enasci posse impossibilitatem frustraque caeteras misceri, itaque resumamus.

Ex aequatione 5, erit ut ante $b \sqcap 2r + 2\beta - e$.

Ex aequatione 6, erit $2as \sqcap \boxed{\dfrac{b^2}{4}}\, \dfrac{\boxed{4r^2}\boxed{+8r\beta} - 4re, \boxed{+4\beta^2}\boxed{-4\beta e} + e^2,}{4} - \dfrac{\beta^2}{4}\boxed{+e\beta} + a\varepsilon, -\boxed{3}\beta r\boxed{-r^2}\boxed{-\beta^2}$ sive $s \sqcap \dfrac{-4re + e^2 - \beta^2 + 4a\varepsilon - 4\beta r}{8a}$.

Ex aequatione 7, $\dfrac{\underset{\text{VIII}}{\boxed{-4re}}\underset{\text{IX}}{\boxed{+e^2}} - \beta^2 + \underset{\text{V}}{\boxed{4a\varepsilon}}\boxed{-4\beta r}}{4}\beta +$

$$\frac{\underset{\text{III}}{\boxed{-12r^2e}} + 11\underset{\text{IV}}{\boxed{3}}re^2 - 3r\beta^2 - 4\underset{\text{VI}}{\boxed{+12}}ra\varepsilon - 4\underset{\text{II}}{\boxed{12}}\beta r^2}{8}\boxed{+\beta^2 r}\underset{\text{II}}{\boxed{+r^2\beta}} \sqcap$$

$$\frac{10\underset{\text{III}}{\boxed{4}}r^2e + 12\underset{\text{VIII}}{\boxed{8}}r\beta e\underset{\text{IV}}{\boxed{-4re^2}} + 3\underset{\text{VII}}{\boxed{4}}\beta^2e - 5\underset{\text{IX}}{\boxed{4}}\beta e^2 + e^3}{4} + a\varepsilon b \underset{\text{VII}}{\boxed{-\frac{\beta^2e}{4}}}.$$

$$\underset{\text{VI}}{\boxed{2r}} + \underset{\text{V}}{\boxed{2}}\beta - e$$

654,14–19 *(1)* | $\begin{array}{l} 1 \\ \not2 \\ \not5\,7\,6 \\ \not2\not3\not0\,0\,\not\int \\ \not1\not8\not4\,4 \\ \not1\not8 \end{array}$ *(a)* 13 *(b)* 12 $\dfrac{78}{184}\Big|\dfrac{39}{92}\Big|\dfrac{4}{9}\Big|\dfrac{1}{2}$ $\begin{array}{c} 96 \\ \underline{8} \\ 78 \end{array}$ *(!) streicht Hrsg.* | *(2)* $\begin{array}{l} 1 \\ \not2\,0 \\ \not4\,\not6 \\ \not2\not3\not0\,0\not\int 12 \\ \not1\not8\not4\,4 \\ \not1\not8 \end{array}$ | $\dfrac{92}{182}$ *ändert Hrsg.* | $\Big|\dfrac{1}{2}$ *L* 1 *(1)* m $\sqcap$ $\mp$apβ^2 $\mp$ rpaβ $\mp$ lsβ^2 $\mp$ nsaβ – l *(2)* Brevius *L* 4 r.s.e.b. *erg. L* 4 solis *(1)* apparer *(2)* aliquam enasci posse | aliquam *gestr.* | impossibilitatem *(a)* quo *(b)* frustraque *L*

Et multiplicatis omnibus per 8. fiet:

$$\begin{array}{l} -2\beta^3 + 11re^2 - 3r\beta^2 - 4ra\varepsilon - 4\beta r^2 \sqcap 20r^2e + 24r\beta e + 6\beta^2 e \\ \qquad\qquad\qquad\qquad -10\beta e^2 + 2e^3 + 8a\varepsilon\beta - 8a\varepsilon e \end{array}$$

$$\frac{4e^2 - 4ae + a^2 + 32\beta.. - 16\beta a}{32a}$$

$$-2\beta^3 + \frac{21}{2}\underset{\text{III}}{11}re^2$$

$$-3r\beta^2 - 4ar\varepsilon - 4\beta r^2 \sqcap 20r^2e + 20\underset{\text{IV}}{24}r\beta e + 14\underset{\text{V}}{6}\beta^2 e$$

$$-17\underset{\text{VI}}{\left(-9\underset{\text{II}}{\boxed{-10}}\right)}\beta e^2 + \underset{\text{I}}{2}e^3$$

$$+8a\beta\varepsilon \qquad\qquad -8ae\varepsilon$$

$$\overbrace{\frac{\underset{\text{III}}{4e^2} - 4ae + a^2 \quad \underset{\text{IV}}{+32\beta\,..} - 16\beta a}{32a}} \quad \overbrace{\frac{\underset{\text{II}}{4e^2}\ \underset{\text{VII}}{-4ae} + a^2 \quad \underset{\text{V}}{+32\beta\,..} - 16a\beta}{32a}} \quad \overbrace{\frac{\underset{\text{I}}{4e^2} - 4ae + a^2 \quad \underset{\text{VI}}{+32\beta\,..} - 12\underset{\text{VII}}{16}a\beta}{32a}}$$

Ordinando et multiplicando omnia per 32. fiet:

$$\begin{array}{l} 32e^3 - \dfrac{32,21}{2}re^2 + 32,20r^2e - 32,17\beta e^2 + 32,4\beta r^2 \quad \sqcap \quad 0 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + 8,\ 4a\ .. \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} -\ 16a\ er & +32,13\beta^2\ r & +32,14\beta^2\ e & +32,2\beta^3 \\ +32,28\beta\,.. & +\ 4a^2\ .. & -\ 8a^2\ .. & +\ 8\beta a^2 \\ & -\ 4,16\beta a\ .. & +8,12a\beta\ .. & \end{array}$$

2–11 $-2\beta^3$: Leibniz verwendet für ε den fehlerhaften Wert aus N. 44_1 S. 646 Z. 2.

Restat aequatio 8:

$$\frac{\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{-\beta^2 4re}}\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{+\beta^2 e^2}}\underset{\mathrm{IX}}{\boxed{-\beta^2\beta^2}}\;-3\underset{\mathrm{II}}{\boxed{4}}\beta^2 a\varepsilon\;-\;4\beta^2\beta r \atop \underset{\mathrm{X}}{\boxed{..\;r\beta\;...}}\underset{\mathrm{V}}{\boxed{..\;r\beta\,..}}\underset{\mathrm{VII}}{\boxed{-r\beta\,..}}\boxed{+\quad 4r\beta\quad ..}+\underset{\mathrm{VIII}}{\boxed{..r\beta..}}}{\cancel{8}2}$$

$$\left\{\frac{\begin{array}{l}+16r^2e^2-8re^3-24\underset{\mathrm{IV}}{\boxed{+8}}re\beta^2\underset{\mathrm{III}}{\boxed{-32rea\varepsilon}}\underset{\mathrm{X}}{\boxed{+32re\beta r}}\\ +e^4+6\underset{\mathrm{VI}}{\boxed{-2}}e^2\beta^2-8\underset{\mathrm{III}}{\boxed{+8}}e^2a\varepsilon\underset{\mathrm{V}}{\boxed{-8e^2\beta r}}-7\underset{\mathrm{IX}}{\boxed{+}}\beta^4\\ \underset{\mathrm{II}}{\boxed{-8\beta^2a\varepsilon}}\underset{\mathrm{VII}}{\boxed{+8\beta^3r}},+16a^2\varepsilon^2\boxed{-32a\varepsilon\beta r},+48\underset{\mathrm{VIII}}{\boxed{16}}\beta^2r^2\end{array}}{\cancel{6}\cancel{4}\,16}\right.\sqcap$$

$$\llcorner\frac{4r^2a\varepsilon+8r\beta a\varepsilon-2\underset{\mathrm{III}}{\boxed{4}}rea\varepsilon\underset{\mathrm{II}}{\boxed{+4\beta^2a\varepsilon}}-4\beta ea\varepsilon\underset{\mathrm{III}}{\boxed{e^2a\varepsilon}}}{\cancel{4}}\lrcorner\underset{\mathrm{II}}{\boxed{-\beta^2a\varepsilon}}$$

Unde post destructiones ordinando et explicando ε^2:

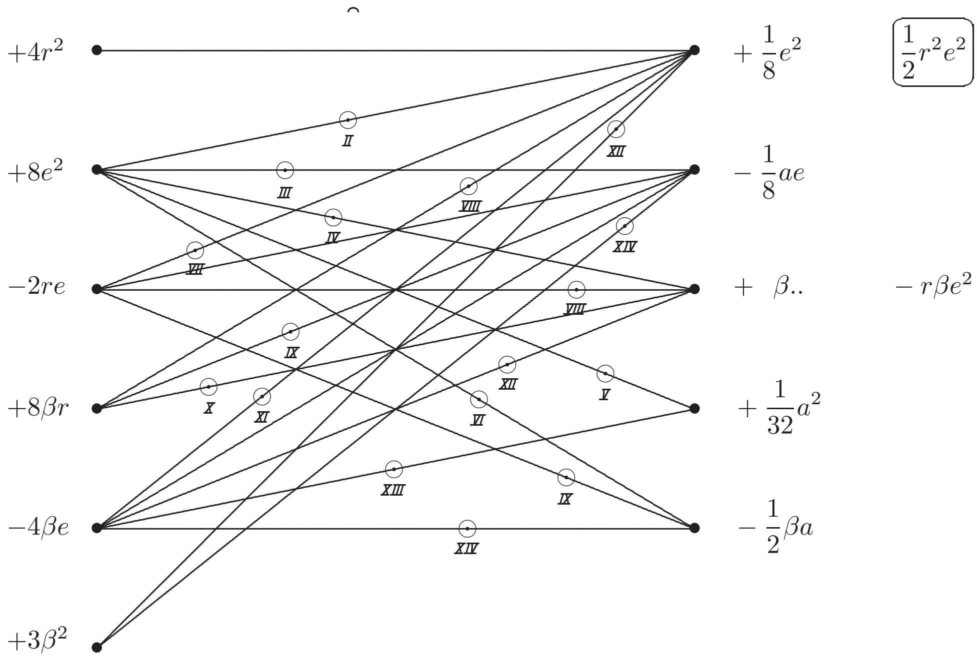
2–7 *Nebenrechnung zum Reduktionsschritt II:*

$$\frac{+32-8-48}{16}\sqcap-\frac{24}{16}\sqcap-\frac{3}{2}$$

1 aequatio *(1)* 8 in *(a)* 64 *(b)* 3 *(!)* ubi *(2)* 8: *L*

$$
\begin{array}{llllllll}
\underset{II}{\boxed{+\quad e^4}} & -\frac{31}{4}\underset{VII}{\boxed{-8}}r & e^3 & +15\frac{1}{2}\boxed{16}r^2 & e^2 & -32\underset{X}{\boxed{-24}}\beta^2 r & e & -32\beta^3 r \\
+\frac{1}{4}\ .. & +\quad \underset{III}{\boxed{-}}\frac{1}{2}a & .. & +\frac{77}{8}\underset{XII}{\boxed{+6}}\beta^2 & .. & -\qquad \frac{1}{4}a^3 & .. & -7\beta^4 \\
 & -\frac{7}{2}\underset{XI}{\boxed{-\underset{IV}{\boxed{+}}4}}\beta\ .. & & +\frac{18}{4}\underset{V}{\boxed{+4}}a^2 & .. & +3+\frac{1}{8}\boxed{+3}\beta a^2 & .. & +\frac{1}{64}a^4 \\
 & & & -67\underset{VI}{\boxed{-64}}\beta a\ .. & & -18+\frac{3}{8}\underset{XIV}{\boxed{-16}}\beta^2 a\ .. & & -\frac{1}{2}\beta a^3 \\
 & & & +256\beta^2 & .. & & & +48\beta^2 r^2 \\
 & & & \underset{V}{\boxed{+\frac{3}{4}a^2 \qquad ..}} & & & & +4+\frac{3}{32}\underset{XV}{\boxed{4}}\beta^2 a^2 \\
 & & & \underset{VI}{\boxed{-\ 7a\beta \qquad ..}} & & & & \\
 & & & +16\beta^2 & .. & & &
\end{array}
$$

⊓



Aequatio haec facta ex 8 data iungatur factae ex 7$^{\text{ma}}$ data in quarum utraque r. et e. et alterutra incognita tolletur.

657,8–658,2 *Nebenrechnungen:*

657, 8

$$\begin{array}{rl} & 16e^4 - 32a\ e^3 + 8a^2\ e^2 - 8a^3\ e + a^4 \\ & \quad + 256\beta\ ..\ - 128a\beta\ ..\ + 128\beta a^2\ ..\ - 32\beta a^3 \\ & \qquad\qquad + 16a^2\ ..\ + 64\beta a^2\ ..\ + 256\beta^2 a^2 \\ & \qquad\qquad - 256\beta a\ ..\ - 1024\beta^2 a\ .. \\ & \qquad\qquad + 1024\beta^2\ .. \\ 16a^2\varepsilon^2 \sqcap & \overline{\qquad\quad \boxed{1024\cancel{a^2} \smile 16\cancel{a^2}}\,64 \qquad\qquad\qquad\qquad} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 256 \\ \underline{4} \\ 1024 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{4}\cancel{6} \\ \cancel{1}\cancel{0}\cancel{2}\cancel{4} \smallint 64 \\ \cancel{1}\cancel{6}\cancel{6} \\ \cancel{1} \end{array}$$

658,2

$$\begin{array}{l} \text{etc.} - \ 4 + \dfrac{3}{8} \sqcap\ 6 \\ \text{etc.} \sqcap 10 - \dfrac{3}{8} \\ \qquad \dfrac{80-3}{80} \sqcap \dfrac{77}{8} \end{array}$$

1 facta *(1)* ex *(a)* 8 *(b)* 7$^{\text{ma}}$ | data *streicht Hrsg.* | *(2)* ex *L*

657,8–658,2 explicando ε^2: S. Erl. zu S. 656 Z. 2–11. Leibniz führt die Umformung der Gleichung 8 nicht vollständig und fehlerfrei durch und bricht die Reduktion ab. Im folgenden Teilstück N. 44$_3$ überzeugt er sich von der Durchführbarkeit der Rechnung.

[*Nebenrechnungen und Zusätze zu S. 654 Z. 1–8*]

144 $\times$	144	48	48	2304	20736	$\cancel{2}$ 2
144	8	16	48	16	16	$\cancel{1}\cancel{0}9\cancel{3}1$
576	1152	288	384	13824	124416	$\cancel{3}\cancel{3}\cancel{1}\cancel{7}\cancel{7}6$ ⨍ 144
576		48	192	2304	20736	$\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{4}\cancel{4}4$
144		768	2304	36864	331776	$\cancel{2}\cancel{3}\cancel{0}\cancel{0}$
20736				+64		23
				36928		
				−768		
				4		
				2 [*bricht ab*]		

20736	64	62	48	184
256	120	16	4	184
124416	1280	372	192	736
103680	64	62	−8	1472
41472	7680	992	184	184
5308416		62		33856
−1152		+1612		
16		−7680		33856
6912		− 40		4
1152		−6108		135424
−18432				
+16				
−18416				

$$\frac{4290000}{33856 \frown 4} + \frac{6108}{184} - \frac{1}{2}$$

25 $\frac{4290000}{33856 \frown 4}$: Im Zähler müßte 5290000 stehen; der Fehler und weitere Flüchtigkeiten beeinträchtigen die folgenden Rechnungen.

$$
\begin{array}{c}
\cancel{2}\\
\cancel{5}\cancel{2}\\
\cancel{3}\cancel{7}\cancel{4}9\\
\cancel{2}\cancel{6}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{8}\\
\cancel{4}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{0}000 \not{f}\ 23309\\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}\cancel{4}4\\
\cancel{1}\cancel{8}\cancel{8}\cancel{8}8\\
\cancel{1}\cancel{1}\cancel{1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
\cancel{1}9\cancel{2}85\\
\cancel{2}\cancel{2}\cancel{7}\cancel{2}\cancel{6}\\
\cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4}\cancel{8}6\\
\cancel{4}\cancel{2}\cancel{9}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \not{f}\ 31\ \dfrac{91856}{135424}\\
\cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{4}\\
\cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
356\\
4\cancel{4}\cancel{6}78\\
\cancel{1}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{4}\cancel{2}\cancel{4} \not{f}\ 1\\
\cancel{9}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{6}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{c}
3\\
\cancel{4}\cancel{4}8\\
\cancel{1}\cancel{5}\cancel{7}\cancel{3}0\\
\cancel{9}\cancel{1}\cancel{8}\cancel{5}\cancel{6} \not{f}\ 21\ \dfrac{380}{4356}\\
\cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}\cancel{6}\cancel{6}\\
\cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
\cancel{2}\\
\cancel{1}\cancel{5}7\\
\cancel{4}\cancel{3}\cancel{5}6 \not{f}\ 11\ \dfrac{176}{380}\\
\cancel{3}\cancel{8}\cancel{0}\cancel{0}\\
\cancel{3}\cancel{8}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
2\\
\cancel{1}\cancel{4}2\\
\cancel{3}\cancel{8}\cancel{0} \not{f}\ 2\ \dfrac{22}{176}\\
\cancel{1}\cancel{7}\cancel{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
\cancel{1}\cancel{7}6 \not{f}\ 8\\
\cancel{2}2
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
21\\
\underline{11}\\
21\\
\underline{21\ \ }\\
231
\end{array}
\qquad
1+\frac{11}{231}\quad\frac{242}{231}
\qquad
\begin{array}{r}
231\\
\underline{242}\\
473
\end{array}
\qquad
\frac{231}{473}
$$

$$
31\ \frac{1}{1\boxed{+\dfrac{4356}{91856}}+\dfrac{1}{21+\dfrac{380}{4356}}}
\qquad
31\ \frac{1}{1+\dfrac{1}{21+\dfrac{1}{11+\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{8}}}}}\ \sqcap\ \frac{4290000}{135424}
$$

---

2 $\cancel{5}\cancel{2}$: Leibniz liest statt der 2 eine 1. 4 $4\cancel{4}\cancel{6}78$: Leibniz vergißt, die 8 als letzte Ziffer des Restes in die folgende Division zu übernehmen. 11 $\cancel{1}\cancel{4}2$: Richtig wäre $\cancel{1}\cancel{4}8$. 20 rechter Ausdruck: Leibniz übernimmt die fehlerhafte Kettenbruchentwicklung mit einem Abschreibefehler in *Wallisii series interpolanda pro circulo*, *LSB* VII, 1 N. 85_1 S. 570.

Unde intelligi potest fractionem istam diminui posse per 8. item per $2+\frac{1}{8}$. item per $11+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{8}}$ etc. Eadem et in terminis analyticis serviunt ad fractas formulam datam dividentes inveniendas quorum usus esse potest in construendo.

44_3. DE SUMMA SERIEI FRACTIONUM DATAE PARS TERTIA

[3. März 1675 oder unmittelbar danach]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 4 Bl. 8. 1 Bl. 4°. Goldschnitt. 1 S. auf Bl. 8 r°. Bl. 8 v° leer. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 915 B

Ad schediasma 3 martii 1675.

Pertinet ad schediasma de seriei fractionum summa cum formula differentiarum comparatur.

Ope harum 5 aequationum, etiam 5 incognitas $r.\ s.\ e.\ b.\ \varepsilon.$ comprehendentium:

(1) $e+b \sqcap 2r+2\beta$

(2) $a\varepsilon+e\beta-\frac{\beta^2}{4}+\frac{b^2}{4} \sqcap \beta^2+r^2+3\beta r+2sa$

(3) $ab\varepsilon-\beta^2\frac{e}{4}+\frac{b^2e}{4} \sqcap r^2\beta+\beta^2 r+3rsa+2\beta sa$

(4) $\frac{-\beta^2a\varepsilon+b^2a\varepsilon}{4} \sqcap s^2a^2+r\beta sa+\beta^2 sa$

10 fractionum *erg. L*

1 diminui posse: Leibniz hält die Quotienten des Euklidischen Algorithmus irrtümlich für gemeinsame Teiler von Zähler und Nenner des Bruches. 12–663,1 Ope harum 5 aequationum: Die Gleichungen (1) – (4) übernimmt Leibniz aus dem Koeffizientenvergleich in N. 44_2 S. 652 Z. 4–12, die Gleichung (5) aus N. 44_1 S. 646 Z. 2.

(5) $\varepsilon \sqcap \dfrac{4e^2 - 4ae + 32\beta e + a^2 - 16\beta a}{32a}$

inveniendi sunt valores q u a t u o r incognitarum, $r.s.e.b.$ puri scilicet et absoluti, id est ut in earum valore nulla ex his q u i n q u e incognitis supra dictis $r.s.e.b.\varepsilon$. comprehendatur.

Quaeratur autem b per aequationem 1. Valor eius per dictam aequationem 1. repertus, substituatur in eius locum in aequatione 2^{da}, atque ita per dictam aequationem 2^{dam} ita reformatam, inveniatur valor ipsius s.

Valores reperti ipsius s. pariter et ipsius b. in ipsarum harum literarum locum substituantur i n a e q u a t i o n e 3^{tia} et ita ex a e q u a t i o n e 3^{tia} alia fiet aequatio, in qua duae tantum restabunt incognitae, ε, et r. Pro ε substituatur eius valor sumtus ex aequatione quinta, et ita e x d i c t a a e q u a t i o n e 3^{tia} alia fiet aequatio, i n q u a d u a e t a n t u m s u p e r e r u n t i n c o g n i t a e , r. e t e.

Eodem modo in aequatione quarta pro b, s, ε substituendo eorum valores inventos ex aequationibus 1. 2. 5. habebitur rursus aequatio d u a r u m t a n t u m i n c o g n i t a r u m , r e t e. Quas duas aequationes duarum incognitarum invicem iungendo, inde fiet unica unius tantum incognitae, et habebitur vel r. absolute, vel e. absolute. Quos valores absolutos in ipsarum $b.s$. valoribus substituendo etiam ipsarum $b.s$. ac proinde omnium quatuor, $b.s.e.r$. valores sine ulla harum quinque: $b.s.e.r.\varepsilon$. mentione habebuntur, quod quaerebamus.

2 valores *(1)* 5 li *(2)* q u a t u o r *L* 9 3^{tia} *(1)* et ex a e q u a t i o n e 4^{ta} alia *(a)* fiat *(b)* fiet aequatio *(2)* et *L* 10 valor *(1)* ex aequatione 4^{ta}, ita *(2)* sumtus *L* 17 ipsarum *(1)* b.s.ε valoribus substituendo etiam b.s.ε ac proinde omnium quinque, *(2)* b.s *L*

10 duae tantum: Leibniz vergißt hier die dritte Unbekannte e, argumentiert aber in der Folge korrekt.

45. DE SERIERUM SUMMA PER DIFFERENTIARUM MOMENTA
[Januar – Ende April 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 135. 1 Bl. 2°. Längs- und Querfaltung. 1 Spalte auf Bl. 135 v° rechts, linke Spalte leer bis auf 7 Zeilen Textergänzung. Auf Bl. 135 r° *LSB* VII, 1 N. 77.
Cc 2, Nr. 929

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist vor der Querfaltung des Blattes geschrieben, das ab Ende April 1675 entstandene *Problema Davenantii*, *LSB* VII, 1 N. 77, danach. Das Wasserzeichen des Papiers ist von Januar bis August 1675 belegt.

$\dfrac{1}{y^2-1} \sqcap \dfrac{1}{y+1, y-1}$. Si $y \sqcap$ 2. 6. 10. [14] etc.

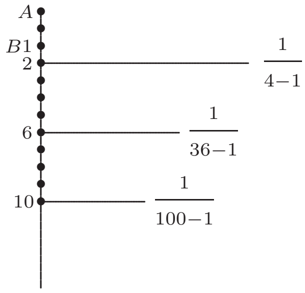
$\dfrac{1}{4-1}\quad \dfrac{1}{36-1}\quad \dfrac{1}{100-1}\quad \dfrac{1}{196-1}$ etc.

Momentum huius seriei ex A est:

$\dfrac{1}{y-1}$ seu $\dfrac{1}{2-1}\quad \dfrac{1}{6-1}\quad \dfrac{1}{10-1}\quad \dfrac{1}{[14]-1}$ etc.

Momentum eiusdem seriei ex B est:

$\dfrac{1}{y+1} \sqcap \dfrac{1}{2+1}\quad \dfrac{1}{6+1}\quad \dfrac{1}{10+1}\quad \dfrac{1}{[14]+1}$ etc.



[*Fig. 1*]

---

11 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{14} \\ 56 \\ \underline{14} \\ 196 \end{array}$$

10–15 16 *L ändert Hrsg. dreimal*

$\frac{y}{y-1} - \frac{1}{y-1} \sqcap 1$. Ergo $\quad \frac{1}{y-1} \sqcap \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^5}$ etc.

et $\quad \frac{1}{y+1} \sqcap \frac{1}{y} - \frac{1}{y^2} + \frac{1}{y^3} - \frac{1}{y^4} + \frac{1}{y^5}$ etc.

Ergo $\frac{1}{y-1} - \frac{1}{y+1} \sqcap \bullet + \frac{2}{y^2} \quad \bullet \quad + \frac{2}{y^4} \quad \bullet$ etc. $\sqcap \frac{2}{y^2-1}$

$$\dagger\left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{llll} \frac{c}{a} & y^2 & + & \frac{c}{a}\beta \quad y \\ & & + & d \quad \cdot \\ & & + & \frac{bc}{a} \quad \cdot \end{array}}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ +\frac{c}{a}b\beta \\ \boxed{+bd} \end{array}\right.$$

$$\ddagger\left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{llll} \frac{c}{a} & y^2 & + & \frac{c}{a}\beta \quad \cdot \\ & & + & \frac{cb}{a} \quad \cdot \\ & & + & d \quad \cdot \end{array}}\end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \\ +d\beta \\ \boxed{+db} \end{array}\right.$$

$$\dagger\,\frac{y+b}{\frac{c}{a}y+d} \ \ddagger\, \frac{y+\beta+b}{\frac{c}{a}y+\frac{c}{a}\beta+d} \quad \sqcap \quad \overline{\hspace{6cm}}$$

Unde $\dfrac{\frac{c}{a}b\beta\,[-]\,d\beta}{\begin{array}{l}\frac{c^2}{a^2}y^2 + \frac{2cd}{a}y + d^2 \\ +\frac{c^2}{a^2}\beta \cdot + \frac{cd}{a}\beta\end{array}}$. Quaeratur ergo: $\dfrac{1}{\begin{array}{l}y^2 + \frac{2da}{c}y + \frac{d^2a^2}{c^2} \\ +\ \beta \quad \cdot + \frac{ad}{c}\beta\end{array}}$. Ergo conferendo cum $\frac{1}{y^2-1}$ fiet: $2da+\beta c \sqcap 0$ sive $d \sqcap \frac{-\beta c}{2a}$ et $d^2 \sqcap \frac{\beta^2c^2}{4a^2}$. Ergo $\frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^2}{2} \sqcap 1$ sive $\frac{2\beta^2-\beta^2}{4} \sqcap 1$ sive $\frac{\beta^2}{4} \sqcap 1$. Ergo $\beta \sqcap 2$. Quando ergo differentia ipsarum y est 2 summa omnium $\frac{1}{y^2-1}$ habetur hoc modo.

13 + *L ändert Hrsg.*

Si collationis causa loco $\frac{1}{y^2-1}$ fiet: $\frac{1}{\begin{array}{r}y^2+2yf+f^2\\-1\end{array}}$ conferendo fiet: $f \sqcap \frac{da}{c}+\frac{\beta}{2}$. Ergo f^2 fiet: $\frac{d^2a^2}{c^2}+\frac{da\beta}{c}+\frac{\beta^2}{4}$. Unde fiet rursus $\beta^2 \sqcap 4$ et patet cur explicatio nil mutet quia intervallum determinatum mutari explicando non potest.

$$\frac{y+b}{\frac{c}{a}y+d} \sqcap \frac{x}{a}.\ \text{Ergo}\ ya+ba \sqcap \frac{c}{a}yx+da.\ \text{Unde:}\ y \sqcap \frac{da-ca}{a-\frac{c}{a}x}.$$

$$\ddagger \frac{a\sqrt{by+ca}+dy+ea}{hy+la} \ddagger \frac{a\sqrt{\begin{array}{l}by+b\beta\\+ca\end{array}}\begin{array}{l}+dy+d\beta\\+ea\end{array}}{\begin{array}{l}hy+h\beta\\+la\end{array}}.$$

$$ahy\sqrt{by+ca}\ \boxed{+dhy^2}\ \boxed{\begin{array}{l}+eah\ y\\ \\+h\beta d\ \cdot\\+la\ \cdot\ \cdot\end{array}} \begin{array}{l}+h\beta\ a\ \sqrt{by+ca}+e\ a\ h\beta\\ \\+la\ \cdot\ \cdot\qquad \boxed{+\cdot\ \cdot\ la}\\ \\ \end{array}$$

$$hay\sqrt{\begin{array}{l}by+b\beta\\ \\+ca\end{array}}\ \boxed{+dhy^2}\ \boxed{\begin{array}{l}+d\beta h\ y\\ \\+ea\ \cdot\ \cdot\\+lad\ \cdot\end{array}} +la^2\sqrt{\begin{array}{l}by+b\beta\\ \\+ca\end{array}}\ \begin{array}{l}+l\,a\,d\,\beta\\ \\ \boxed{+l\,a\,e\,a}\end{array}$$

$$\text{Unde}\ \frac{\ddagger\left\{\begin{array}{l}ahy\ \sqrt{by+ca}\\hba\\la^2\end{array}\right. \ddagger\left\{\begin{array}{r}hay\\+la^2\end{array}\right. \sqrt{\begin{array}{r}by+b\beta\\+ca\end{array}}\ \begin{array}{l}\ddagger\ eah\beta\\ \ddagger\ lad\beta\end{array}}{va^2} \sqcap z.$$

1–4 Si ... potest *erg. L* 6 *(1)* $\frac{x}{a} \sqcap$ *(2)* $\ddagger \frac{a\sqrt{by+ca}+dy+ea}{a\sqrt{fy+ga}+hy+la} \ddagger \frac{a\sqrt{\begin{array}{l}by+b\beta\\+ca\end{array}}\begin{array}{l}+dy+d\beta\\+ea\end{array}}{a\sqrt{\begin{array}{l}fy+f\beta\\+ag\end{array}}\begin{array}{l}+hy+h\beta\\+la\end{array}}$. $a\sqrt{by+ca,\frown \begin{array}{l}fy+f\beta\\+ag\end{array}}+da\sqrt{\begin{array}{l}fy+f\beta\\+ag\end{array}}+ea\sqrt{\begin{array}{l}fy+f\beta\\+ag\end{array}}$ *(3)* $\ddagger \frac{a\sqrt{by+ca}+dy+ea}{hy+la}$ *L*

5 $+da$: Richtig wäre $+dx$. Konsequent gerechnet müßte in der folgenden Gleichung für y im Zähler $da-ba$ stehen.

Unde quadrandi causa ordinando:

$$\dagger \left\{ \begin{array}{l} la^2 \\ hba \\ ahy \end{array} \right. \sqrt{by+ca} + \omega a^3 - z^2 av \sqcap \dagger \left\{ \begin{array}{l} \quad hay \\ +\, la^2 \end{array} \right. \sqrt{\begin{array}{l} by + b\beta \\ \quad + ca \end{array}} \quad \text{sive}$$

$$\begin{array}{l} \quad l^2a^4 \\ +\, 2la^2hba \\ +\, 2la^2ahy \\ +\, h^2b^2a^2 \\ +\, 2hbaahy \\ +\, a^2h^2y^2 \end{array} \frown by+ca \;\dagger\; \begin{array}{l} 2la^2 \\ 2hba \\ 2ahy \end{array} \frown \begin{array}{l} \quad \omega a^3 \\ -\, z^2av \end{array} \sqrt{by+ca} + \omega^2 a^6 \,[-]\, q2\omega a^3 z^2 av + z^4a^2v^2$$

$$\sqcap$$

$$\begin{array}{l} \quad h^2a^2y^2 \\ +\, 2hala^2y \\ +\, l^2a^4 \end{array} \frown \begin{array}{l} by + b\beta\,. \\ \quad + ca \end{array}$$

Calculus fit nimis prolixus.

5 + *L ändert Hrsg.*

46. DETERMINATIONUM PROGRESSIO IN INFINITUM
[Anfang November 1675]

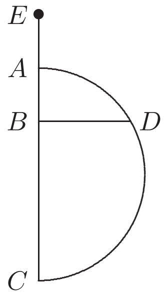
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 305. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S.
Cc 2, Nr. 777

Datierungsgründe: Die in Teil 1 u. 3 auftretenden Differential- und Integralsymbole hat Leibniz schrittweise ab dem 29. Oktober 1675 (*Analyseos tetragonisticae pars 2da*, Cc 2, Nr. 1092, gedr. *LBG* S. 151–156) eingeführt; die Fehlerhaftigkeit der in Teil 3 verwendeteten Produktregel für die Differentiation erkennt er am 11. November 1675 in *Methodi tangentium inversae exempla* (Cc 2, Nr. 1120, gedr. *LBG* S. 161–167).

[*Teil 1*]

$$AB \sqcap y. \quad BC \sqcap c - y.$$

$$AC \sqcap c. \quad BD \sqcap \omega \sqcap \frac{yc - y^2}{c}.$$



[*Fig. 1*]

11 *(1)* AB $\sqcap$ x. CB $\sqcap$ b − y. Pon *(2)* EB $\sqcap$ y. CB $\sqcap$ b − z. EC $\sqcap$ b. *(a)* BD $\sqcap$ *(b)* AB $\sqcap$ e. BD *(3)* AB $\sqcap$ y. *(4)* AB $\sqcap$ y *L*

12–669,4 $BD \sqcap \omega \sqcap \frac{yc - y^2}{c}$: Richtig wäre $\omega = \frac{yc - y^2}{\omega}$. Die Überlegung wird dadurch bis S. 669 Z. 4, in der Flüchtigkeitsfehler hinzutreten, hinfällig.

$EB \sqcap e$. Sit $y \sqcap e+b$ et erit $\omega \sqcap \dfrac{ce+cb-e^2-2eb-b^2}{c}$ et pro ω ponatur $v+\dfrac{cb-b^2}{c}$ fiet $v \sqcap \underset{-2b}{+c}\ e-e^2, \smile c$. Sit eius portionis, quam metimur maxima abscissa E, $\sqcap c-2b$ seu $b \sqcap \dfrac{c-E}{2}$ et fiet: $v \sqcap Ee-e^2, \smile 2$ adeoque $\int v \sqcap \dfrac{E^3}{2}-\dfrac{E^3}{3}$. Sed hoc in altioribus non aeque facile.

[*Teil 2*]

$1-2+3-4+5-6$ etc. accedunt ad $\odot$.

$$\begin{array}{lcl}
\text{maior} & & \text{minor} \\
1\,t & \odot & \overline{1-2}\,t \\
\overline{1-2+3}\,t & & \overline{1-2+3-4}\,t \\
\overline{1-2+3-4+5}\,t & & \overline{1-2+3-4+5-6}\,t
\end{array}$$

$$y-\frac{y^3}{3a^2}+\frac{y^5}{5a^4}-\frac{y^7}{7a^6}+\frac{y^9}{9a^8}-\frac{y^{11}}{11a^{10}}+\frac{y^{13}}{13a^{12}}-\frac{y^{15}}{15a^{14}} \text{ etc.} \sqcap \frac{\odot}{a}.$$

$\dfrac{y}{1}$ maior quam $\odot$. Ergo $y \sqcap 1\odot$. $\dfrac{y}{1}-\dfrac{y^3}{3a^2} \sqcap \odot$. seu $\dfrac{y}{1} \sqcap \dfrac{y^3}{3a^2}+\odot$. seu $\dfrac{y^3}{3a^2} \sqcap \dfrac{y}{1}-\odot$.

$\dfrac{y}{1}-\dfrac{y^3}{3a^2}+\dfrac{y^5}{5a^4} \sqcap \odot$. Pro $\dfrac{y^3}{3a^2}$ ponatur $\dfrac{\odot^3}{3a^2}$, fiet: $\dfrac{y}{1}+\dfrac{y^5}{5a^4} \sqcap \odot+\dfrac{1\odot^3}{3a^2}$.

$\dfrac{y}{1}-\dfrac{y^3}{3a^2}\boxed{+\dfrac{y^5}{5a^4}}-\dfrac{y^7}{7a^6} \sqcap \odot$. Pro $+\dfrac{y^5}{5a^4}$ ponatur quod est minus: $+\dfrac{\odot^5}{5a^4}$, manebit $+\dfrac{\odot^5}{5a^4}$ minus, et erit $y+\dfrac{\odot^5}{5a^4} \sqcap \odot+\dfrac{y^3}{3a^2}+\dfrac{y^7}{7a^6}$.

$\dfrac{y}{1}-\dfrac{y^3}{3a^2}+\dfrac{y^5}{5a^4}-\dfrac{y^7}{7a^6}+\dfrac{y^9}{9a^8} \sqcap \odot$. seu $\dfrac{y}{1}+\dfrac{y^5}{5a^4}+\dfrac{y^9}{9a^8} \sqcap \odot+\dfrac{1\odot^3}{3a^2}+\dfrac{\odot^7}{7a^6}$.
$\qquad -\dfrac{\odot^3}{3a^2} \qquad\qquad -\dfrac{\odot^7}{7a^6}$

Adeoque determinationum progressio in infinitum talis erit:

ℵ

$\boxed{I}$ $\boxed{II}$

y

$$
\begin{array}{rl|l}
\frac{y}{1} \sqcap \odot & & \frac{y}{1} \sqcap \odot \;\Big|\; + \frac{y^3}{3a^2} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} \sqcap \odot & + \frac{\odot^3}{3a^2} & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} \sqcap \frac{\odot}{1} \;\Big|\; + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^9}{9a^8} \sqcap \frac{\odot}{1} & + \frac{\odot^3}{3a^2} \quad \frac{\odot^7}{7a^6} & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} + \frac{\odot^9}{9a^8} \sqcap \frac{\odot}{1} \;\Big|\; + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^{11}}{11a^{10}} \\
\frac{y}{1} + \frac{y^5}{5a^4} + \frac{y^9}{9a^8} + \frac{y^{13}}{13a^{12}} \sqcap \frac{\odot}{1} & + \frac{\odot^3}{3a^2} + \frac{\odot^7}{7a^6} + \frac{\odot^{11}}{11a^{10}} & \frac{y}{1} + \frac{\odot^5}{5a^4} + \frac{\odot^9}{9a^8} + \frac{\odot^{13}}{13a^{12}} \sqcap \frac{\odot}{1} \;\Big|\; + \frac{y^3}{3a^2} + \frac{y^7}{7a^6} + \frac{y^{11}}{11a^{10}} + \frac{y^{15}}{15a^{14}}
\end{array}
$$

Ex quibus determinationibus cum habeatur pure valor ipsius $\odot$ ex data y. rationis est haberi et y. ex data $\odot$.

$y \sqcap \odot$. Per y vel $\odot$ multiplicare dividere est.

Si ita continuetur in infinitum, fient tantum ex duabus ultimis aequationes.

Ponatur autem ex $\dfrac{y^5}{5a^4} + \dfrac{y^9}{9a^8} + \dfrac{y^{13}}{[13a^{12}]}$ etc. fieri $\overline{zy}$.

$\dfrac{\odot^5}{5a^4} + \dfrac{\odot^9}{9a^8} + \dfrac{\odot^{13}}{[13a^{12}]}$ fieri $\overline{z\odot}$.

et ex $\dfrac{\odot^3}{3a^2} + \dfrac{\odot^7}{7a^6} + \dfrac{\odot^{11}}{11a^{10}}$ etc. faciamus $\overline{v\odot}$.

$\dfrac{y^3}{3a^2} + \dfrac{y^7}{7a^6} + \dfrac{y^{11}}{11a^{10}}$ faciamus $\overline{vy}$.

Habebimus denique duas ultimas determinationes tales: $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$ et $y + \overline{z\odot} \sqcap \dfrac{\odot}{1} + \overline{vy}$ vel mutatis his determinationibus in aequationes fiet: $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$. et $y + \overline{z\odot} \sqcap \odot + \overline{vy}$. $y \sqcap \odot + \overline{v\odot} - \overline{zy} \sqcap \overline{vy} - \overline{z\odot}$ et fiet: $\overline{v\odot} + \overline{z\odot} \sqcap \overline{vy} + \overline{zy}$. Unde sequeretur $\odot$ et y esse aequales quod absurdum est utique. Ideo error aliquis admissus, is utique in eo quod mutabamus determinationes in aequationes, quod non videtur permissum sine demonstratione, nec in infinitum progrediendo, hoc loco quia $y \sqcap \odot$; $y + \overline{zy} \sqcap \odot + \overline{v\odot}$. Ergo explicando $\odot$ et $y + \overline{zy} \sqcap y + \overline{z\odot} - \overline{vy}$. Ergo $\overline{zy} + \overline{vy} \sqcap \overline{z\odot}$ quod patet per se. Nihil ergo ex his duci poterit, nisi aliud quiddam accedat.

Ut pergere liceat, opus erit sumi adhuc aliam ipsius $\odot$ determinationem, quemadmodum enim ad explicandum hac usi sumus $y \sqcap \odot$. ita adhibenda erit et haec: $\dfrac{y^3}{3a^2} \sqcap \odot$. vel adhuc melius si qua $\dfrac{y^2}{\ldots a^2}$. Imo potius $\dfrac{y}{\ldots}$. Certum est tangentes semper magis crescere quam arcus, si ergo appareat octantem certa sui tangentis id est radii parte esse maiorem, utique et caeteri erunt. Est autem octans $\omega \sqcap \dfrac{\pi}{8}$, radius $\sqcap \dfrac{1}{6}\pi$. Ergo $\pi \sqcap 6$ rad.

5 f. $15a^{14}$ *L ändert Hrsg. zweimal* 11 Unde *(1)* reperitur eodem modo componi *(2)* sequeretur *L* 13 f. sine demonstratione *erg. L* 14 quia y $\sqcap \odot$ *erg. L* 15 explicando $\odot$ *erg. L* 19 $\frac{y}{\ldots}$. *(1)* Iam certum est tangentes continuo magis crescere quam arcus, adeoque si tangens octantis *(2)* Ponatur autem arcus in *(3)* Certum *L* 20 appareat *(1)* tangentem octantis certa arcus par *(2)* octantem *L* 21 $\sqcap \frac{1}{6}\pi$. *(1)* Ita $\pi \sqcap 8\omega$: *(2)* Ergo *L*

Ergo $\omega \sqcap \dfrac{6\,\text{rad.}}{8}$. Ergo $\omega \sqcap \dfrac{3}{4}$ rad. Ergo arcus octanti minor maior est tribus quartis sui tangentis, seu $\odot \sqcap \dfrac{3}{4}y$. posito, ut semper y. non excedere radium. Unde et $\odot \sqcap \dfrac{y}{2}$. et $\odot \sqcap y$. Harum duarum determinationum ope, poterit inveniri y. ex data $\odot$. et $y \sqcap \dfrac{4\odot}{3}$. Ergo in determinationibus $\boxed{I}$ et $\boxed{II}$ ponendo semper potentiam a $\dfrac{4}{3}\odot$ in locum potentiae ipsius y. maius scilicet in locum maioris, manebit maioritas, et ita stabit:

$$\boxed{I}$$

$$\begin{array}{l|l}
y \sqcap \odot & \\
y \sqcap \odot & +\dfrac{\odot^3}{3a^3} - \dfrac{4^5\odot^5}{3^5,5a^4} \\
y \sqcap \odot & +\dfrac{\odot^3}{3a^3} - \dfrac{4^5\odot^5}{3^5,5a^4} + \dfrac{\odot^7}{7a^6} - \dfrac{4^9\odot^9}{3^9,9a^8} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \dfrac{\odot^{11}}{11a^{10}} - \dfrac{4^{13}\odot^{13}}{3^{13},13a^{12}} \\
\text{etc.} &
\end{array}$$

$$\left[\boxed{II}\right]$$

$$\begin{array}{l|l}
y \sqcap \odot & + \dfrac{4^3\odot^3}{3^3,3a^2} \\
y \sqcap \odot & + \ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^5}{5a^4} + \dfrac{4^7\odot^7}{3^7,7a^6} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^9}{9a^8} + \dfrac{4^{11}\odot^{11}}{3^{11},11a^{10}} \\
y \sqcap \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots - \dfrac{\odot^{13}}{13a^{12}} + \dfrac{4^{15}\odot^{15}}{3^{15},15a^{14}}
\end{array}$$

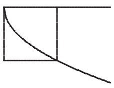
3 data $\odot$. *(1)* Quanti hae sint *(a)* ⟨maxim⟩ *(b)* momenti *(2)* et *L* 12 $\boxed{\text{II}}$ *erg. Hrsg.*

6–16 $\boxed{I}$: In der Vorlage stehen die Tabellen $\boxed{I}$ u. $\boxed{II}$ nebeneinander.

Si utrobique iidem prodiissent termini, tunc habita fuisset aequatio ultimarum determinationum inter se, adeoque singulae in aequationes transiissent.

Poterit fieri, ut propius accedatur ad scopum, etsi non ideo ausim dicere, prorsus attingi, si, ubique ad determinationem sequentem reddendam puram non determinatio pura omnium prima, sed proxime praecedens, substituatur. Video tamen cur ne sic quidem perfecte attingatur scopus: Quando scilicet aliquid, ut $\odot \sqcap \frac{3}{4}y$. forinsecus assumimus. Sed iam video si nihil forinsecus assumatur, sed solae ex aequatione nostra determinationes coniungantur rem successuram. Duobus modis rem tentare decreveram uno, ut ope quatuor primarum per crucem, inveniatur pura, quae in tertia pari substituta det rursus puram. Et ita porro, sed iam video id non licere, quia errores primi omnes simul in ultimum refunduntur. Vera ergo in eo consistit via, utut ex duabus semper pluribusve sibi oppositis aut vicinis valorem purum eliciamus.

[*Teil 3*]



[*Fig. 2*]

$$\odot \sqcap \overline{dt}\int \frac{a^3}{a^2+t^2}. \text{ Ergo } \overline{d\odot} \sqcap \frac{a^2}{a^2+t^2}\,\overline{\overline{ddt}} \text{ identicum seu } \frac{d\odot}{\overline{\overline{ddt}}} \sqcap \frac{a^2}{a^2+t^2}.$$

$$\text{et } d\odot a^2, +t^2 d\odot \sqcap a^3. \text{ et } t^2 \sqcap \frac{a^3 - \overline{d\odot}a^3}{d\odot}.$$

$$\int \overline{dt}\odot \sqcap (\overset{\text{ult}}{\odot})(\overset{\text{ult}}{T}) - \int \odot dt. \text{ Ergo } \int \frac{\odot^2}{\int \frac{a^3}{a^2+t^2}} \sqcap \int \overline{dt\odot} \sqcap (\odot)\text{ult} \frown (T)\text{ult},, - \int \odot\ dt.$$

16 *Unter* (T)ult, *gestrichen:* diff

2 singulae *(1)* dedissent aeq *(2)* in *L* 3 dicere, *(1)* non poterit *(2)* prorsus *L* 4 puram *(1)* ⟨prim⟩ *(2)* non omnium prima, sed proxime praecedens, quippe quae haud dubie minus aberrat, substituatur. *(2)* non *L* 9 ope *(1)* duarum *(2)* quatuor *L* 14 *(1)* y $\sqcap$ *(2)* a *(3)* $\odot \sqcap$ *L*

14 Ergo $\overline{d\odot} \sqcap \frac{a^2}{a^2+t^2}\,\overline{\overline{ddt}}$: Leibniz differenziert das Produkt zunächst falsch; in der weiteren Überlegung nähert er sich trotz zweier Fehler der richtigen Formel.

Hinc modus ostenditur ex duobus factis inveniendi differentiam, ut diff $\overline{(\odot) \frown (T)}$ addatur $-$ diff $\int \odot dt$ et diff. erit $\overline{dt}\odot$. Ergo diff. $(\odot) \frown (T)$ erit $\overline{dt}\odot - d\int \overline{\odot \overline{dt}}$.

[*Teil 4*]

$A \sqcap B$. $A \Pi C$. Ergo differentia inter A et C, minor quam differentia inter A et B et inter B et C. Ergo error non maior quam $A - C$, quam dicitur $A \sqcap B$.

Videamus an non ex duabus determinationibus oppositis affectis, in tabula $\aleph$ parallelis possit haberi pure valor ipsius y, ex dato valore ipsius $\odot$. Primae duae oppositae parallelaeque determinationes sunt $y \sqcap \odot$ et $y \Pi \odot + \dfrac{y^3}{3a^2}$. Pro $\odot$ ponamus ω. Ex priore quia $y \sqcap \omega$ erit $y^3 \sqcap \omega^3$, et fiet $y \Pi \omega + \dfrac{\omega^3}{3a^2}$. Imo sic non procedit res. Tentemus aliter $y \sqcap \odot$ et y $\Pi \odot + \dfrac{y^3}{3a^2}$. Ergo $y \Pi \odot + \dfrac{y\odot^2}{3a^2}$. Hoc succedit sed malum in eo quod $\odot$ in fractiones valorum ipsius y. ingredietur, quod nollem. Videndum tamen fiet: $y \Pi \dfrac{\odot}{1 - \dfrac{\odot^2}{3a^2}}$.
Imo error, non succedit. Invertimus determinationem.

Si a tabulae $\aleph$ partis seu seriei $\boxed{I}$ terminis auferantur termini proxime praecedentes seriei $\boxed{II}$ habebimus pro serie I.

$$\begin{array}{ll|ll|}
+y \sqcap \odot & & +y + \dfrac{y^5}{5} \sqcap & + \odot + \dfrac{\odot^3}{3} \\
-0 & -0 & -y & -\odot - \dfrac{y^3}{3}
\end{array}$$

. Sed iam video omnino his determinationibus tabulae $\aleph$ non esse utendum, sed rediri debere ad primas:

4 *(1)* $\odot \sqcap$ y. *(2)* A $\sqcap$ B. A Π C. *(a)* | Ergo *streicht Hrsg.* | A + A − C *(b)* Ergo *L* 5 B et C. *(1)* AB $\sqcap$ AC. A − C $\sqcap$ A − B *(2)* Ergo *L* 7 ipsius $\odot$ | , vel ob *erg. u. gestr.* | . Primae *L* 8 f. ponamus ω. *(1)* Sit y $\sqcap$ *(2)* Si *(3)* Ex priore *(a)* $y^3 \sqcap \omega^3$, et y Π $\odot +$ *(b)* quia *L* 11 f. y Π $\dfrac{\odot}{1 - \dfrac{\odot^2}{3a^2}}$. *(1)* ex. duabus sequentibus: *(2)* Imo *L* 13 Si a *(1)* terminis tabulae $\boxed{\text{I}}$ *(2)* tabulae *L* 13 auferantur | ordine *gestr.* | termini *L*

10–12 Ergo $y \Pi \odot + \dfrac{y\odot^2}{3a^2}$: Die Folgerung ist nicht zulässig, wie Leibniz schließlich bemerkt.

$$\begin{array}{ll}
\odot \sqcap \frac{y}{1} & \odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} \\
\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3} + \frac{y^5}{5} & \odot \sqcap \bullet \quad \bullet + \frac{y^5}{5} - \frac{y^7}{7} \\
\odot \sqcap \bullet \quad \bullet \quad \bullet - \frac{y^7}{7} + \frac{y^9}{9} & \odot \sqcap \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet + \frac{y^9}{9} - \frac{y^{11}}{11}
\end{array}$$

Ubi si pro $\frac{y^3}{3}$ ponatur $\frac{\odot^3}{3}$, nescio an liceat dicere: $\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{\odot^3}{3}$ seu $\frac{y}{1} \sqcap \odot + \frac{\odot^3}{3}$. Sed quamvis id non liceret in his primis licebit tamen in postremo omnium, quia postrema determinationum pro aequatione est. Verum hac ratione prima inveniri aut scribi non poterit nisi praecedentes faciant partem, eademque semper repetantur (: alioqui nunquam primum eius terminum scribere poterimus :) aut nisi etiam inferiores determinationes sint probae. Sed exaltatio per ductum in se ipsum non procedit ad altiores.

$\odot y^2 \sqcap \frac{y^3}{1} - \frac{y^5}{3}$. Ergo $y^5 \sqcap \frac{y^3}{1} - \odot y^2$. Rursus $y^5 \sqcap \odot - \frac{y}{1} + \frac{y^3}{3}$. Sed non ideo ausim scribere alterum horum altero maius. Si maius dividas per minus, et minus per maius manebit maius, et fiet: $\frac{y^5}{y^{\cancel{3}} - \odot \cancel{y^2}} \sqcap \frac{\odot - y + y^3}{y^{\cancel{3}3}}$ et $y^8 \sqcap \odot\, y^2 - y^3 + y^5, -\odot^2 + y\odot - y^3\odot$.

Si minor multiplicetur per minorem et maior per maiorem, manet determinatio itaque $\odot \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^3}{3}$ multiplicetur per $y^2 \sqcap \odot^2$, fiet: $y^2\odot \sqcap \frac{\odot^2 y}{1} - \frac{y^3\odot^2}{3}$, vel $y \sqcap \odot - \frac{y^2\odot}{3}$.

10–12 Ergo $y^5 \sqcap \frac{y^3}{1} - \odot y^2$: Leibniz vernachlässigt wiederholt den Nenner von Termen, hinzu kommt ein Rechenfehler, der die letzte Ungleichung des Absatzes beeinträchtigt.

47. INFINITUM

[Anfang November 1675]

Überlieferung:

L Konzept: LH 4 V 10 Bl. 58. Ausschnitt ca 20 x 23 cm ohne linke untere Ecke (ca 11 x 8 cm). 1 S. auf Bl. 58 v°. Bl. 58 r° leer. Wasserzeichen vorhanden. Schema sowie Figuren zuerst auf dem Bl., Text darum herumgeschrieben. Isolierte Bemerkungen am linken u. am unteren Rand. Überschrift ergänzt.

E Teildruck: *LFC* S. 147 f. = S. 677 Z. 1–9.
Cc 2, Nr. 1408

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt. Das zu *Fig. 1* gehörige Problem behandelt Leibniz ausführlich in *Methodi tangentium inversae exempla*, datiert 11. November 1675 (Cc 2, Nr. 1120, gedr. *LBG* S. 161–167).

I n f i n i t u m

$$
\begin{array}{cccc}
\left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{1}\right\rangle & \\
\left\langle\frac{1}{2}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{3}\right\rangle & \left\langle\frac{1}{4}\right\rangle & \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \text{etc.} & \\
\text{etc.} & & & \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} \\
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \\
1 & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \left[\frac{1}{16}\right] \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} \\
\hline
\frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{ccc}
1 & 1 & 1 \\
3 & 27 & \frac{1}{4} \\
6 & 216 & \frac{1}{9} \\
10 & 1000 & \frac{1}{16}
\end{array}
$$

14 f. *Textverlust durch Zerschneiden erg. Hrsg.* 18 $_{16}$ *L ändert Hrsg.*

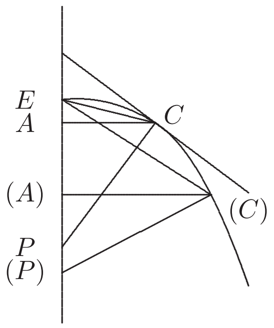
13–677,9 I n f i n i t u m : Fast wörtlich erscheint diese Argumentation wieder in einem Brief an Erhard Weigel vom September 1679 (*LSB* II, 1 N. 212 S. 486 u. III, 2 N. 345 S. 838 f.).

$\frac{1}{0}$ est quantitas infinita, hinc credibile est summam seriei huius: 1. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$. $\frac{1}{4}$ etc. esse infinitam.

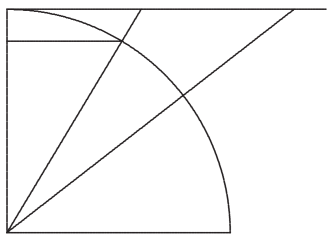
At summa seriei $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. est etiam $\frac{1}{0}$ sive infinita. Ergo sequeretur quia $\frac{1}{0}$ ipsi $\frac{1}{0}$ aequale fore $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{2}$. $\frac{1}{3}$ etc. $\sqcap$ $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$. $\frac{1}{1}$ etc. quod est absurdum.

Videtur enim $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. ipso $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. infinities esse maius. Dicendum ergo $\frac{1}{0}$ et $\frac{1}{0}$ non aequivalere seu 0 non posse esse quantitatem minimam, sed esse infinite parvam, ut una 0 sit alia maior. Et hic videtur hoc modo oblatum nobis exemplum quo infinitum unum alio infinities maius est. Et videtur summa omnium fractionum, summae omnium unitatum et inter finitam quantitatem quodammodo media esse.

[*Figuren außerhalb des Haupttextes*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$$\frac{AC}{(A)(C)} \sqcap \frac{(A)(P)}{AP}$$

1 f. esse *(1)* finitam *(2)* infinitam *(3)* infinitam *L* 4 absurdum. *(1)* Dicendum ergo *(2)* Videtur *L*

---

12 $\frac{AC}{(A)(C)} \sqcap \frac{(A)(P)}{AP}$: Die Bedingung läuft darauf hinaus, daß das Produkt aus Ordinate und Subnormale konstant ist, und wird durch die kubischen Parabeln erfüllt.

[*Isolierte Bemerkungen*]

[*Am unteren Rand:*]

$a^y \sqcap y^a$ $y^z \sqcap zy$, $2^2 \sqcap 2,2$

[*Am linken Rand, gegenläufig:*]

$$\begin{array}{r} 23\\ \underline{17}\\ 161\\ \underline{23}\\ 391 \end{array}$$

48. AEQUATIONES INFINITAE PRO FIGURIS ETIAM ORDINARIIS
[November 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 117. 1 Zettel 19,2 x 7 cm. 1 S. auf Bl. 117 r°. Bl. 117 v° leer. An oberer und unterer Schnittkante Reste fremden Textes.
Cc 2, Nr. 1206

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1675 belegt. Das Stück ist vor dem auf Juni 1676 datierten N. 62 geschrieben, das in S. 786 Z. 3 auf N. 48 verweist und auf S. 793 Z. 15 f. die Reihenentwicklung von Z. 10 übernimmt.

Aequationes infinitae pro figuris etiam ordinariis, sit $a+x \frown a-x \sqcap y^2$, sive $\dfrac{y^2}{a+x} \sqcap a-x$. fiet: $a-x \sqcap \dfrac{y^2}{a} - \dfrac{y^2x}{a^2} + \dfrac{y^2x^2}{a^3}$ etc. Res apparet difficilior si sit $x^2y+x^3 \sqcap y^2a$, fiet $x^2 \sqcap \dfrac{y^2a}{x+y}$ fiet: $x^2 \sqcap \dfrac{y^2a}{x} - \dfrac{y^3a}{x^2} + \dfrac{y^4a}{x^3} - \dfrac{y^5a}{x^4}$ etc. Sed quoniam praeterea etiam: $x^3 \sqcap y^2a - x^2y$ sive $\dfrac{x^3}{ya-x^2}$ fiet: $\odot$

$\odot$ $x^3 \sqcap \dfrac{x^3}{ya} + \dfrac{x^5}{y^2a^2} + \dfrac{x^7}{y^3a^3}$ etc. Unde duos valores ipsius x^2 aequando: Fiet

$\dfrac{y^2a}{x} - \dfrac{y^3a}{x^2} + \dfrac{y^4a}{x^3}$ etc. $\sqcap \dfrac{x^2}{ya} + \dfrac{x^5}{y^2a^2} + \dfrac{x^7}{y^3a^3}$ etc.

Quod si omnes fractiones reducere vellemus ad communem denominatorem foret exponens potentiae cuiusque termini infinitus, certo quodam demto. Et tamen eiusmodi aequationis infinitae dari poterit summa, seu expressio finita. Si sint aequationes in quibus plures excitari possunt analogiae, plures etiam in unam addi poterunt formulae. Et

15 f. foret *(1)* potentia cuiusque infinita *(2)* exponens *L* 16 eiusmodi *(1)* seri *(2)* aequationis *L* 18 formulae *(1)*; quia et ex duabus *(2)*. Et *L*

---

12 sive $\dfrac{x^3}{ya-x^2}$: Leibniz berechnet den Wert für y und setzt ihn irrtümlich gleich x^3. Der Fehler beeinträchtigt die Überlegung bis Z. 14, wo konsequent gerechnet in den Zählern der letzten beiden Terme der rechten Seite x^4 und x^6 stehen müßten.

ita enumerando possibiles poterimus iudicare de summis eiusmodi serierum si quando occurrant.

---

1 *Fragment fremden Textes unter* summis: $x - 1 \frown$

49. PROGRESSIO HARMONICA
[Oktober – Dezember 1675]

Die Gesprächsaufzeichnung N. 49_1 und die Aufzeichnung von Tschirnhaus N. 49_2 stehen in engem Zusammenhang: Die Betrachtungen der Teile 1 u. 2 von N. 49_1 werden in Teil 1 u. 2 von N. 49_2 weitergeführt. Die Wasserzeichen der beiden Teilstücke sind in den Leibniz-Handschriften bisher nur mit einem einzigen weiteren Träger belegt: Die Aufzeichnung von Tschirnhaus N. 49_2 ist auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie Leibniz' *Regle pour trouver les feries* (Cc 2, Nr. 1502 A, B), in der aus gegebenen Kalenderdaten die zugehörigen Wochentage berechnet werden. Leibniz behandelt darin den 1. Januar 1676 und den 15. August 1676 als Daten der Zukunft, den 1. Mai 1615 (geändert aus 1. Mai 1675) als Datum der Vergangenheit. Da Tschirnhaus sich seit Ende September 1675 in Paris aufhielt, dürften die beiden Teilstücke in der Zeit von Oktober bis Dezember 1675 enstanden sein.

49_1. NOTAE

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 256. 1 Bl. 2°. Obere Hälfte links Ausriß von max. 3 x 7,5 cm. Ca 1 1/2 S. Untere Hälfte von Bl. 256 r° leer. Textfolge Bl. 256 r° oberes Viertel, Bl. 256 v° rechte Hälfte des unteren Drittels, Bl. 256 r° zweites Viertel, Bl. 256 v° linke Hälfte des unteren Drittels, Bl. 256 v° obere zwei Drittel.
Cc 2, Nr. 1340

[*Teil 1*]

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccccc} & & & \frac{1}{y} & & & \\ & & \frac{2}{y} & & \frac{1}{y} & & \\ & \frac{3}{y} & & \frac{3}{2y} & & \frac{1}{y} & \\ \frac{4}{y} & & \frac{6}{3y} & & \frac{4}{3y} & & \frac{1}{y} \end{array} \qquad \boxed{\begin{array}{c} y \sqcap 1 \\ y \sqcap 2 \\ y \sqcap 3 \\ y \sqcap 4 \end{array}} \qquad \begin{array}{cccc} \frac{1}{1} & & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} \end{array}$$

Productum inferiorum $\frac{5}{y}+\frac{10}{3y} \sqcap \frac{15+10 \sqcap 25}{1,3y} \sqcap \frac{4}{y}+\frac{6}{3y}+\frac{4}{3y}+\frac{1}{y}$

[*Tschirnhaus*]					[*Leibniz*]
1		2		3	$1,2,3 \sqcap 6$. Num. term. 3. multipl. per 1,2,1 aequ. 6.
$\underline{1}$		$\underline{1}$		$\underline{2}$	
1		2		6	
1	3	3	1	| 9	$1.2.3.4 \sqcap 24 \sqcap 1,3,3,1,,4$
				$\underline{\ \ 4}$	
				36	

[*Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}$$

24	24	$\top\!\top$	50	$\top\!\top$	36	25
12		4				$\underline{\ 3}$
8	6				9	[75]
$\underline{\ 6}$		3				
$\dfrac{50}{24}$	2				3	$\dfrac{[75]}{36}$
	1					

[*Auf der Rückseite:*]

[*Zu Z. 9–14 , Spalte 5 gehörig:*] $\dfrac{6+8+12+24}{24}$

$$\frac{1}{1}\quad \frac{3}{2}\quad \frac{11}{6}\quad \frac{50}{24}$$

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}$$

1				
1	1			
1	3	2		
1	6	11	6	
1	10	35	50	24

$1 + 6 + 11 + 6 \;\wp\; 24$

$\underline{4 \quad 3 \quad 2 \quad 1}$

$4 + 18 + 22 + 6 \;\wp\; 50$

$1 + 6 + 11$

$\underline{6 \quad 3 \quad 1}$

$6 + 18 + 11 \;\wp\; 35$

$1 + 6$

$\underline{4 \quad 1}$

$4 + 6 \;\wp\; 10$

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 1+a & 1+b & 1+c & 1+d \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} a & \sqcap & 1 \\ ab & \sqcap & 1 + a \\ abc & \sqcap & 1 + a + ab \\ & & \quad + b \\ abcd & \sqcap & 1 + a + ab + abc \\ & & \quad + b + ac \\ & & \quad + c + bc \end{array}$$

[*Tschirnhaus*]

$$bc \frown \begin{array}{r} 1+a \\ \underline{\quad b} \\ b+ab \\ 2b \end{array} \qquad bcd \qquad b \frown \begin{array}{l} 1+a \\ \underline{cd \qquad} \\ cd+acd \\ 2cd \end{array}$$

[*Auf der Rückseite:*]

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5} \qquad \frac{1}{1}\ \frac{1}{1+a}\ \frac{1}{1+b} \qquad \begin{array}{c} \dfrac{2+a}{1+a}\ \dfrac{1}{1+b} \\ \hline 3+2a+ab \\ +2b \\ \hline 1+\ a+ab \\ +\ b \end{array}$$

abc

$abcd$

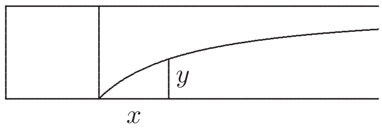
682,5 $\sqcap$ 24 $\sqcap$ *(1)* $\begin{array}{r} 1+3+3+1 \\ 4 \\ \hline\hline 4\ \ 12\ \ 12\ \ 4 \end{array}$ *(2)* 1, 3, 3, 1,, 4 *L* 682,11+13 65 *T ändert Hrsg. zweimal*

11 f. bc $\frown$ *(1)* $\begin{array}{c} b+a \\ b \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{c} 1+a \\ b \end{array}$ *T*

11–14 *bc* $\frown$: Tschirnhaus setzt auf der rechten Seite zunächst den Faktor c richtig gleich $b+a$, ändert dann jedoch in $1+a=b$, ohne den zweiten Faktor in $1+b=c$ zu ändern, und berechnet so b^2 anstatt bc.

[*Teil 3*]

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

$$y \sqcap \frac{x-1}{x} \qquad y \sqcap \frac{\frac{x}{2}-1}{x}$$

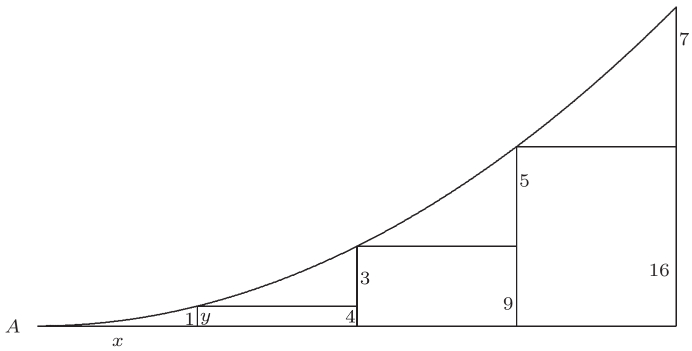
$$xy \sqcap x-1 \qquad y \sqcap \frac{x-2}{2x} \qquad \frac{4}{12}$$

$$2xy \sqcap x-2$$

$$x \sqcap \frac{1}{0} \qquad \frac{y}{0} \sqcap \frac{1}{0}-1 \qquad \frac{2y}{0} \sqcap \frac{1}{0}-2$$

$$y \sqcap 1-\emptyset \qquad 2y \sqcap 1-\emptyset$$

$$y \sqcap \frac{1}{2}$$



$$x\,x \sqcap a\,y \qquad \frac{xx}{a} \sqcap y$$

1	3	5	7
1	2	3	4

[*Fig. 2*]

[*Tschirnhaus*]

1 2 4 8 16

[*Leibniz*]

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8}$$

12 *Fig. 2*: Zwei Vorstufen der Figur werden nicht wiedergegeben.

[*Tschirnhaus*]	[*Leibniz*]
$\begin{array}{ccc} 4 & \frac{5}{2} & \\ \hline \frac{4}{1} & \frac{5}{2} & \frac{6}{3} \end{array}$	natur. $\underbrace{\underbrace{y\,,\frac{y+1}{2}}\,,y+2}_{\text{natur.}}$ [*bricht ab*]

49_2. PROGRESSIO HARMONICA

Überlieferung: *T* Aufzeichnung (Tschirnhaus für Leibniz): LH 35 XII 1 Bl. 255. 1 Bl. 2°. Rechts unregelmäßige Rißkante. Ca 1 1/3 S. Untere zwei Drittel von Bl. 255 v° leer bis auf vier Zeilen quer zur Schreibrichtung. Auf Bl. 255 r° über und unter S. 687 Z. 5–10 Nebenrechnungen zu nicht aufgefundenem Schema. — Überschrift von Leibniz ergänzt.
Cc 2, Nr. 1181

Progressio harmonica

[*Teil 1*]

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1
\end{array}$$

$$
\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & & & \\
 & & & & \overset{b}{\frac{2}{y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & & \\
 & & & \overset{c}{\frac{3}{y}} & & \overset{g}{\frac{3}{b2y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & & \\
 & & \overset{d}{\frac{4}{y}} & & \overset{h}{\frac{6y}{c3y}} & & \overset{l}{\frac{4}{g3y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & & \\
 & \overset{e}{\frac{5}{y}} & & \overset{i}{\frac{10}{d4y}} & & \overset{m}{\frac{10}{h6y}} & & \overset{o}{\frac{5}{l4y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}} & \\
\overset{f}{\frac{6}{y}} & & \overset{k}{\frac{15}{e5y}} & & \overset{n}{\frac{20}{i10y}} & & \overset{p}{\frac{15}{m10y}} & & \overset{q}{\frac{6}{o5y}} & & \overset{a}{\frac{1}{y}}
\end{array}
$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{b}{y}+\frac{a}{y} \sqcap \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{c}{y}+\frac{g}{by}+\frac{a}{y} \sqcap \frac{a+c}{y}+\frac{g}{by} \sqcap \frac{ab+bc+g}{by} \;\Big|\; \frac{d}{y}+\frac{h}{cy}+\frac{l}{gy}+\frac{a}{y} \sqcap$$

$$\frac{a+d}{y}+\frac{h}{cy}+\frac{l}{gy} \sqcap \frac{a+d}{y}+\frac{gh+cl}{cgy} \sqcap \frac{cga+cgd+gh+ch}{cgy} \;\Big|\; \frac{e}{y}+\frac{i}{dy}+\frac{m}{hy}+\frac{o}{ly}+$$

$$\frac{a}{y} \sqcap \frac{a+e}{y}+\frac{i}{dy}+\frac{o}{ly}+\frac{m}{hy} \sqcap \frac{a+e}{y}+\frac{li+do}{dly}+\frac{m}{hy} \sqcap \frac{a+e}{y}+\frac{hli+hdo+dlm}{hdly} \sqcap$$

$$\frac{hdla+hdle+hli+hdo+dlm}{hdly} \;\Big|\; \frac{f}{y}+\frac{k}{ey}+\frac{n}{iy}+\frac{p}{my}+\frac{q}{oy}+\frac{a}{y} \sqcap$$

$$\frac{aeimo+efimo+kimo+nemo+peio+eimq}{eimoy}$$

---

14 $\frac{cga+cgd+gh+ch}{cgy}$: Der letzte Term im Zähler müßte $+cl$ lauten; Tschirnhaus übernimmt den fehlerhaften Wert in die vierte Spalte des Schemas S. 687 Z. 1–3.

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{1} \;\Big|\; \frac{b+bc+g}{by} \;\Big|\; \frac{cg+cgd+gh+ch}{cgy} \;\Big|\; \frac{hdl+hdle+hli+hdo+dlm}{hdly} \;\Big|\; \frac{eimo+efimo+kimo+nemo+peio+eimq}{eimoy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{cc+ccd+2ch}{cgy} \;\Big|\; \frac{hdd+hdde+2hdi+ddi}{hdly} \;\Big|\; \frac{eeii+eefii+kiie+neii+keei+eiik}{eimoy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{c+cd+2h}{cy} \;\Big|\; \frac{dh+hde+2hi+di}{hdy} \;\Big|\; \frac{ei+eif+ki+ni+ke+ik}{eiy}$$

$$\frac{a}{y} \;\Big|\; \frac{a+b}{y} \;\Big|\; \frac{a+2b+ab+bb}{by}$$

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{3c+cd+d}{cy} \;\Big|\; \frac{2dec+4cd+2kc+2ec+dd}{2cdy} \;\Bigg|\; \begin{array}{l} \cancel{ed}+\cancel{2ec}+fed+2fec+fd+ \\ 2cf+\cancel{kd}+\cancel{2cl}+\cancel{2ke}+ee+ \\ \cancel{ed}+\cancel{2ec}+\cancel{de}+dd+\cancel{2cd}+\cancel{2ce}+ \\ \cancel{2cd}+4cc+2de+4ec \\ \hline 5ed+10ec+4cd+fed+2fec+ \\ fd+2cf+ee+dd+4cc \end{array}$$

$$\frac{1}{y} \;\Big|\; \frac{1+b}{y} \;\Big|\; \frac{b+bc+c}{by} \;\Big|\; \frac{3c+dc+d}{cy} \;\Big|\; \begin{array}{l} 2cde+\cancel{2cd}+\cancel{2cd}+4cc+ \\ 2ce+dd+\cancel{2cd} \end{array}$$

$$\frac{2cde+6cd+2ce+dd+4cc}{2cdy}$$

5 *(1)* $\frac{\mathrm{2dec+2cd+2kc+2ec+dd}}{\mathrm{2cdy}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{2dec+4cd+2kc+2ec+dd}}{\mathrm{2cdy}}$ *T* 9 *(1)* 3ed + 6ec *(2)* 5ed + 10ec *T*

1–13 Neben dem fehlerhaften Wert $+ch$ in der vierten Spalte von Z. 1–3 beeinträchtigt eine Reihe von Versehen die Rechnungen. Trotz Kontrollbetrachtungen und Neuansätzen gelingt es Tschirnhaus nicht, die Unstimmigkeiten zu beseitigen.

687,5 *Darunter und darüber Nebenrechnungen zu nicht gefundenem Schema:*

$i \sqcap 2c \quad o \sqcap 2k \quad r \sqcap 2p$

$i \sqcap 2c \quad k \sqcap d + 2c \quad l \sqcap e + d + 2c \quad o \sqcap 2k \quad m \sqcap f + e + d + 2c$

$p \sqcap e + d + 2c + 2k \quad n \sqcap g + f + e + d + 2c \quad q \sqcap f + 2e + 2d + 2c + 2k$

$r \sqcap 2e + 2d + 4c + 4k$

Auf der Rückseite, quer zur Schreibrichtung:

$$\begin{array}{cccccc} y & y & by & cy & 2cdy & 2d + 2ce \text{ in } y \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e + d + 2c \\ \underline{2d + 4c \qquad\qquad\qquad\qquad} \\ 2de + 2dd + 8dc + 4ce + 8cc \\ 2def + 2ddf + 8dcf + 4cef + 8ccf \text{ in } y \end{array}$$

$$\begin{array}{l} e + 3d + 6c \\ \underline{f + e + d + 2c} \\ ef + 3fd + 18cd + ee + 4de + 8ce + 3dd + 12cc \\ efg + 3fdg + 18cdg + eeg + 4deg + 8ceg + 3ddg + 12ccg \end{array}$$

1 *Schema*: Grundlage der Gleichungen und der Nebenrechnungen ist ein achtzeiliges Dreiecksschema, entsprechend dem auf S. 686, mit den Werten $a = 1, \ldots h = 8, i = 6, k = 10, l = 15, m = 21, n = 28, o = 20, p = 35, q = 56, r = 70$. 13 $+18cd$: Richtig wäre $+12cd + 6cf$; der Fehler wird in die folgende Zeile übernommen.

[*Teil 2*]

$$\frac{1}{a}\quad \frac{1}{b}\quad \frac{1}{c}\quad \frac{1}{d}\qquad \frac{a+b}{ab}\quad \frac{1}{c}\;\Bigg|\; \frac{ac+bc+ab}{abc}\quad \frac{1}{d}\;\Bigg|\; \frac{acd+bcd+abd+abc}{abcd}$$

687,13 *Kontrollbetrachtungen und Nebenrechnungen:*

1. Ansatz:

$$\frac{e}{y}+\frac{3}{y}+\frac{e}{cy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\frac{y}{y}+\frac{3}{y}+\frac{y}{cy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\frac{5}{5}+\frac{3}{5}+\frac{1}{3}+\frac{4}{\ }\quad [\textit{bricht ab}]$$

$c \quad d \qquad e \qquad y \backsim 5$

$3 \quad 4 \qquad 5$

$\underline{12}$

60

$\underline{\ \ 2}$

120

72

30

16

$\underline{\ 36}$

$$\frac{274}{120}$$

2. Ansatz:

$$\frac{e}{y}+\frac{3}{y}+\frac{e}{dy}+\frac{d}{2cy}+\frac{2c}{dy}$$

$$\cancel{\frac{1}{1}}+\frac{3}{5}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}$$

$$\cancel{\frac{1}{1}}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cancel{\frac{1}{4}}+\frac{1}{5}$$

$$\frac{3}{5}+\frac{2}{15}+\frac{3}{10}\backsim\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}$$

$\underline{\ 15\ \ }$

$$\frac{17}{15}+\frac{3}{10}\backsim\frac{5}{6}+\frac{1}{5}$$

170

$\underline{\ 45}$

$$\frac{215}{\cancel{150}}\backsim\frac{31}{\cancel{30}}\quad \cancel{3}\ \ 55\,[\textit{bricht ab}]$$

5

$$\begin{array}{rl}
 & \begin{array}{llllllll} 4 & + & 3a & + & 2ab & + & abc \\ & + & 3b & + & 2ac & & \\ & + & 3c & + & 2bc & & \\ \hline \end{array} \quad \begin{array}{llllllll} 3 & + & 2a & + & ab & + & abcd \\ & + & 2b & + & ac & & \\ & + & 2c & + & bc & & \end{array} \quad \begin{array}{lllll} 2 & + & a & +2abcd - abc \\ & + & b & \\ & + & c & \end{array} \\
abcd \frown & \begin{array}{llllllll} 1 & + & a & + & ab & + & abc \\ & + & b & + & ac & & \\ & + & c & + & bc & & \end{array} \quad \begin{array}{llllllll} 1 & + & a & + & ab & [+abc] \\ & + & b & + & ac & \\ & + & c & + & bc & \end{array}
\end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2abcd + 1 + c - \cancel{ab} \\ \qquad 1 + a \end{array} \qquad \frac{a + c + 2abcd}{abcd}$$

1–8 *Nebenbetrachtungen:*

$$\begin{array}{llllllll} 4 & + & 3a & + & 2ab & + & abc \\ & + & 3b & + & 2ac & & \\ & + & 3c & + & 2bc & & \end{array} \qquad \begin{array}{llllllll} 4 & + & 3a & + & 2ab & + & abc \\ & + & 3b & + & 2ac & & \\ & + & 3c & + & 2bc & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 1 & + & a & + & ab & + & abc \\ & + & b & + & ac & & \\ & + & c & + & bc & & \\ \hline 2 & + & a & + & [\textit{bricht ab}] & & \\ & + & b & & & & \\ & + & c & & & & \end{array}$$

4 + abc *erg. Hrsg.* 10–12 *(1)* $\begin{array}{l} 3+2a+ab+abcd \\ +2b+ac \\ +2c+bc \end{array}$ *(2)* $\begin{array}{l} 4+3a+2ab+abc \\ +3b+2ac \\ +3c+2bc \end{array}$ *T*

1–8 Tschirnhaus berechnet (wie in N. 49₁ Teil 2 skizziert) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}$ für $a = 1$, $b = 1 + a$, $c = 1 + b$, $d = 1 + c$ und formt den Zähler des Bruches sukzessive um. Im letzten Schritt müßte a mit negativem Vorzeichen in den Zähler des resultierenden Bruches übernommen werden.

50. TANGENTIUM APPLICATIO AD NUMERORUM SERIES
Dezember 1675

Überlieferung: L Konzept: LH 35 V 7 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S. Rechter Rand (Außenseite des ursprünglichen Bogens) um ca 1 cm beschnitten. Erste Überschrift und Hervorhebungen Z. 8–11 (durch doppeltes Unterstreichen) mit anderer Tinte ergänzt.
Cc 2, Nr. 1186

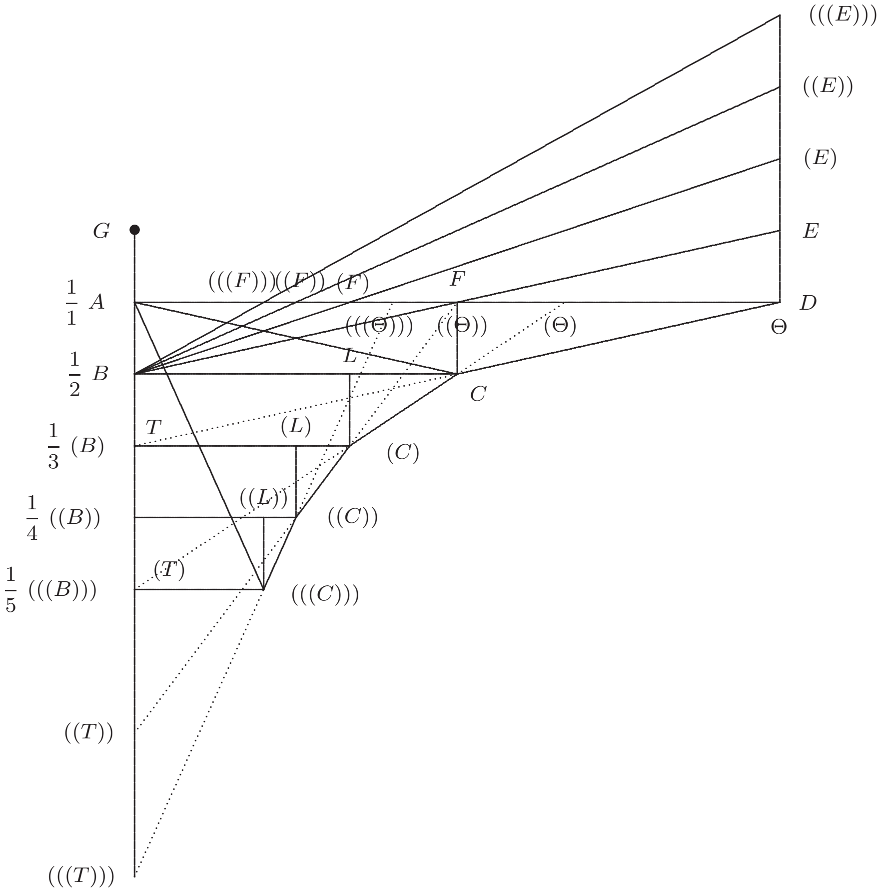
Xb. 1675.

Tangentium applicatio ad numerorum series ut in quadraturis

Progressiones numerorum geometrice tractandae

Quaeritur figura seu polygonum regulatum, progressionis harmonicae. Intervalla terminorum sint aequalia $AB \sqcap B(B)$ etc. $\sqcap \beta$. Ipsa unitas sit AD. Reliqui termini BC, $(B)(C)$, $((B))((C))$ erunt $\frac{1}{2}. \ \frac{1}{3}. \ \frac{1}{4}.$ etc. Ex D erigatur in contrarias ipsis B, partes recta DE, in qua sumantur DE, $D(E)$, $D((E))$, $D(((E)))$ ipsis AB, $A(B)$, $A((B))$ etc. aequales. Iungantur BE, $B(E)$, $B((E))$ quae secabunt ipsam AD in punctis F, (F), $((F))$ etc. Erunt $AF. A(F). A((F))$ etc. $\sqcap \frac{1}{2}. \ \frac{1}{3}. \ \frac{1}{4}$ etc. adeoque ipsae BC, $(B)(C)$ etc. tantum ipsis sumendae sunt aequales.

Ex cuiuslibet ordinatae termino, ut (C) in ordinatam proxime maiorem BC, demittatur perpendicularis $CL \sqcap (B)B \sqcap AB$ constanti. Erunt ipsae LC, vel $(L)(C)$ etc. differentiae $\sqcap \frac{1}{2} \ \frac{1}{6} \ \frac{1}{12} \ \frac{1}{20}$ etc. Sit $GB \sqcap y$. Erit $BC \sqcap \frac{1}{y}$ et $LC \sqcap \frac{1}{y} - \frac{1}{y+\beta} \sqcap \frac{\beta}{y^2+\beta y}$. Ducantur tangentes figurae, seu producantur latera polygoni huius dum, utrique axi scil. AB, et ei coniugato, occurrant in (Θ) et (T).



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

691,22–693,1 et (T). *(1)* Erit *(a)* $\frac{\mathrm{(F)(T)}}{}$ *(b)* $\frac{\mathrm{(B)(T)}}{\mathrm{(B)(C)}} \sqcap$ *(aa)* $\frac{\mathrm{L(C)}}{\mathrm{LC}}$ *(bb)* $\frac{\mathrm{LC}}{\mathrm{L(C)}}$ *(cc)* $\frac{\mathrm{L(C)}}{\mathrm{LC}}$ sive (B)(T) $\sqcap$ *(aaa)* $\frac{1}{\mathrm{y}+\beta} \frown \mathrm{y}^2+\beta$ *(bbb)* $\frac{\frac{\beta}{\mathrm{y}^2+\beta\mathrm{y}}}{}$ *(2)* Ergo (B)(T) $\sqcap \frac{\beta\frac{1}{\mathrm{y}+\beta}}{\frac{\beta}{\mathrm{y}^2+\beta\mathrm{y}}} \sqcap \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{y}}} \sqcap \mathrm{y}$. Ergo erit (B)(T) $\sqcap$ *(3)* $\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{BC} \sqcap \frac{1}{2\beta}} \sqcap$ *(a)* $\left\langle\frac{\beta}{\beta}\right\rangle$. et BC $\sqcap$ BT *(b)* $|\frac{\beta}{\frac{\beta}{2}}$. *ändert Hrsg.* | et *L*

$\dfrac{BT}{BC \sqcap \dfrac{1}{2\beta}} \sqcap \dfrac{\beta}{\dfrac{\beta}{2[\beta^2]}}$ et $BT \sqcap \beta$. Eodem modo: $\dfrac{(B)(T)}{(B)(C) \sqcap \dfrac{1}{3[\beta]}} \sqcap \dfrac{\beta}{\dfrac{\beta}{6 \sqcap 2,3[\beta^2]}}$ et $(B)(T) \sqcap 2\beta$ et generaliter $\dfrac{(BT)}{(BC) \sqcap \dfrac{1}{y+\beta}} \sqcap \dfrac{L(C) \sqcap \beta}{LC \sqcap \dfrac{\beta}{y^2+\beta y}}$. Ergo $(BT) \sqcap y \sqcap GB \sqcap A(B)$. Eodem modo $((B))((T)) \sqcap A((B))$ et ita in caeteris.

Quaeritur iam $A\Theta$. intervallum scilicet inter tangentes et punctum A, in axe coniugato. Sed statim patet fore $A\Theta \sqcap 2BC$ quia $AT \sqcap 2BT$.

Iungantur $AC.\,A(((C)))$. Erit summa omnium $A(\Theta),^{\frown}$ in β dupla spatii $AC(C)$ etc. $(((C)))A$, at eadem dupla omnibus BC. Ergo spatium $AC(C)$ etc. $(((C)))A$ spatio $BC\ \ldots\ (((C)))(((B)))[B]$ aequale quod aliunde patet, quia et $A(((B)))(((C))) \sqcap ABC$ perpetuo. Ideo in figura harmonica nihil hinc duci potest. At, videamus an non in aliis hac methodo quae in geometricis mihi utilis fuit, aliquid detegi queat:

[*Es folgt die Fig. 2 auf S. 694.*]

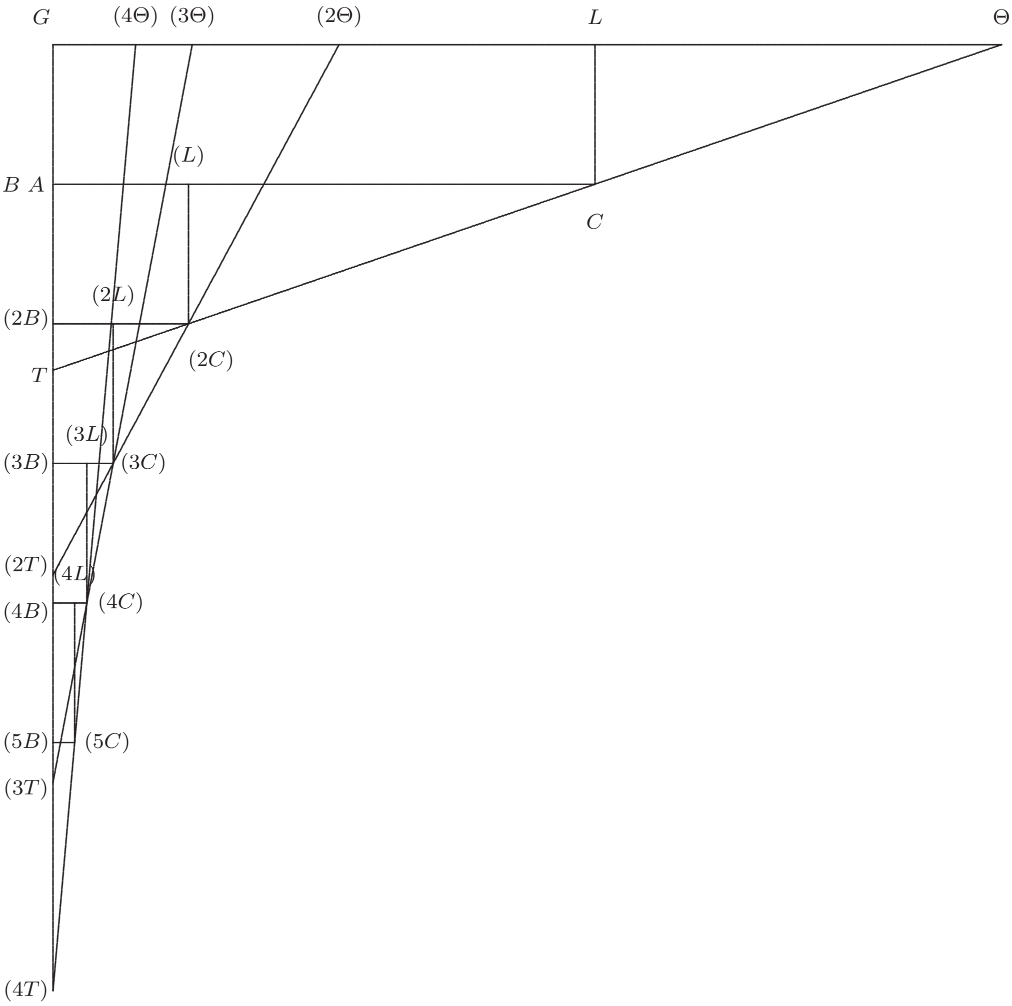
Sit $AC \sqcap 1$. $GB \sqcap GA \sqcap \beta \sqcap (yB)(\overline{y+1}B)$. $GB \sqcap y$. $BC \sqcap \dfrac{1}{y^2}$.

$\displaystyle\int \frac{\beta}{y^2} \sqcap \int \square (yB)(\overline{y+1}B)(\overline{y+1}C)(yC).$

$LC \sqcap \dfrac{1}{y^2} - \dfrac{1}{y^2+2y\beta+\beta^2} \sqcap \dfrac{2y\beta+\beta^2}{y^4+2y^3\beta+y^2\beta^2} \sqcap \overset{\odot}{\dfrac{2\beta}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}} + \boxed{2}\,\overset{☽}{\dfrac{\beta}{y+\beta}}$. Habetur autem $\int LC$. Ergo ad habendum $\int \overline{\boxed{2}\,\dfrac{\beta}{y+\beta}}$ tantum opus haberi $\displaystyle\int \frac{1}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}$. Si omnes in infinitum quaerantur $\int \overline{LC}$ erit summa eorum $\sqcap 1$. Si finitus numerus fiet

1 β *erg. Hrsg.* 1 β^2 *erg. Hrsg.* 2 $\sqcap \dfrac{\mathrm{L(C)} \sqcap \beta}{\mathrm{LC} \sqcap \dfrac{\beta}{\mathrm{y}^2+\beta\mathrm{y}}}$ *(1)* $\sqcap \dfrac{1}{\dfrac{1}{\mathrm{y}}}$ *(a)* $\sqcap$ *(b)* Ergo *(2)* Ergo *L* 6 dupla *(1)* omn *(2)* spatii *L* 7 dupla *(1)* spatii B *(2)* omnibus *L*

14 f. Im Nenner von ☽ fehlt der Faktor y; der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis S. 695 Z. 3.



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 2*: Der mit (L) bezeichnete Punkt entspricht dem Punkt L im Text; der Punkt L der Figur tritt im Text nicht auf.

$1-\dfrac{1}{y^2}$. Ergo $\displaystyle\int \overline{\odot + \rightmoon} \sqcap 1-\frac{1}{y^2}$. $\displaystyle\int \frac{\odot y\beta}{2} \sqcap \int \rightmoon$. $\displaystyle\int \frac{\beta\odot \frown y+\beta}{2} \sqcap \int \frac{\beta^2}{y \frown y+\beta} \sqcap \beta-\frac{\beta}{y}$. Iam $\displaystyle -\int \frac{\beta\odot y}{2} + \int \frac{\beta\odot}{2} \frown y+\beta \sqcap \int \frac{\beta^2\odot}{2}$. Ergo $\displaystyle\int \frac{\beta^2\odot}{2} \sqcap \beta - \frac{\beta}{y} - \int \rightmoon$. At $\displaystyle\int \rightmoon \sqcap 1-\frac{1}{y^2} - \int \odot$. Ergo $\displaystyle\int \frac{\beta^2\odot}{2} \sqcap \beta - \frac{\beta}{y} - 1 + \frac{1}{y^2} + \int \odot$. Qui calculus si rectus habebitur $\displaystyle\int \odot$. adeoque et $\displaystyle\int \rightmoon$. quae quaerebatur. Eademque methodus ad caeteras potentias poterit applicari et ni fallor alibi probavi ex data $\displaystyle\int \frac{1}{y^2}$. dari summam finitam $\dfrac{1}{y}$.

Altera methodus, quae geometrica est, et latitudinem sive spatium considerat, erit quaeremus BT. nempe $\dfrac{BT}{BC} \sqcap \dfrac{\beta}{\dfrac{2y\beta+\beta^2}{\boxed{2}, y \frown y+\beta}}$ at $BC \sqcap \dfrac{1}{y^2}$. Ergo $BT \sqcap \dfrac{\beta y^2 + 2\beta^2 y + \beta^3}{2y\beta+\beta^2} \sqcap \beta + \dfrac{\beta y^2}{2y\cancel{\beta}+\beta^{\cancel{2}}}$ cui si addatur $AB \sqcap y-\beta$ fiet $AT \sqcap \dfrac{3y^2+\beta y}{2y+\beta}$. Eritque $\dfrac{A\Theta}{BC} \sqcap \dfrac{AT}{BT} \sqcap \dfrac{3y^2+\beta y}{y^2+2\beta y+\beta^2}$ ponendo Θ esse in AC et fiet $A\Theta \sqcap \dfrac{3y+\beta}{y^3+2\beta y^2+\beta^2 y} \sqcap \dfrac{3}{y^2+2\beta y+\beta^2} + \dfrac{\beta}{y^3+2y^2\beta+y\beta^2}$. Quorum summa si habeatur, poterit iterum haberi area spatii. Et notabile quod ad eandem reditur hic figuram, $\dfrac{1}{y\odot, \boxed{2}\, y+\beta}$, ita ut hae duae methodi aut singulae, aut iunctae rem conficere videantur. Nec dubium eadem et in caeterarum potentiarum reciprocis datur.

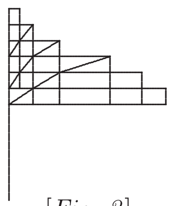
$1 \sqcap 1-\dfrac{1}{y^2}$. *(1)* $\displaystyle\int \frac{\odot y}{2} \sqcap \int \rightmoon$. $\displaystyle\int \frac{\odot \frown y+\beta}{2} \sqcap \int \frac{\beta}{y \frown y+\beta} \sqcap 1-\frac{1}{y}$. Iam $\displaystyle -\int \frac{\odot y}{2} + \int \frac{\odot}{2} \frown y+\beta \sqcap \int \frac{\beta\odot}{2}$. Ergo $\displaystyle\int \frac{\beta\odot}{2} \sqcap 1 - \int \rightmoon - \frac{1}{y}$. At $\displaystyle\int \rightmoon \sqcap 1 - \frac{1}{y^2} - \int \odot$. Ergo $\displaystyle\int \frac{\beta\odot}{2} \sqcap (1-1) + \frac{1}{y^2} + \int \odot - \frac{1}{y}$ *(2)* $\displaystyle\int \frac{\odot y\beta}{2} \sqcap \int \rightmoon$ *L*

5 alibi: Leibniz erinnert sich vermutlich ungenau an ein Ergebnis aus der *Analysis tetragonistica ex centrobarycis*, dat. 25./26. Okt. 1675 (Cc 2, Nr. 1089/1090; *LBG* S. 151): „Omn. $\dfrac{a}{x} \sqcap$ ult. $\overline{x \text{ omn. } \dfrac{a}{x^2}} - \overline{\text{omn. } \dfrac{a}{x^2}}$“.

Pulcherrima est haec tangentium applicatio ad numerorum series. Vel ideo quod ita seriei numericae alia aequivalens exhibetur, quod alias difficile, quia numeri non tractabiles ut figurae quoniam differentiae non negligendae.

Hac methodo etiam poterunt investigari triangulorum centra gravitatis, et eorum distantiae duci in triangulum, et productae seriei summa habebitur, si momenta aliunde habentur, vel contra. Haec geometriae et arithmeticae communia.

Caeterum est aliquid arithmeticae peculiare, ut scilicet figurae propositae exhibeatur aequivalens; elementis seu differentiis alia quadam ratione distributis, ut



[*Fig. 3*]

quid prohibet aliam componi seriem ex elementis seu differentiis, alia plane ratione in lineam rectam compositis, ut scilicet lineas duxi. Putem haec ad geometriam quoque applicari posse. Quemadmodum poterit ad geometriam quoque applicari illa mira ratiocinatio, qua summae inveniuntur in se ipsas replicatae; ope tangentium. Quemadmodum etiam ope eiusmodi diversae descriptionis arithmeticae ad geometriam translatae poterunt forte aliquando exhiberi figurae transcendentes, seu quarum descriptio non est in potestate, aequales illis quae describi possunt v. g. figurae ananalyticae habebuntur, si non possit dari summa differentiarum secundum lineas quas vides iunctarum, ad faciendas per earum summationem novas ordinatas.

15 aliquando *(1)* mutari figurae hac *(2)* exhiberi figurae *(a)* mechanicae a *(b)* transcendentis *(c)* transcendentes *L* 16 figurae *(1)* non *(2)* ageometricae *(3)* analy *(4)* ananalyticae *L*

12 f. illa mira ratiocinatio: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, S. 19–24 [Marg.].

51. DE INVENTIONE THEOREMATUM ELEGANTIUM
[November 1675 – Februar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 119. Ca. 2/3 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 119 r°. Bl. 119 v° leer. Linker Rand (im Falz des ursprünglichen Bogens) leicht bogenförmig. An der oberen, schrägen Schnittkante Buchstabenreste fremden Textes.
Cc 2, Nr. 1341

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt.

Inventio theorematum elegantium et demonstrationum ex calculo concinnandarum in eo consistit, ut unam formulam in varias formulas aequipollentes mutemus eas inprimis, quarum iam nota natura et proprietates.

Ut si proponam tibi terminos continuabiles in infinitum nempe:

$$\begin{array}{lll} a & & b \\ (a) \sqcap \sqrt{ab} & & (b) \sqcap \dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}} \\ ((a)) \sqcap \sqrt{(a)(b)} & & ((b)) \sqcap \dfrac{2(b)\sqrt{(a)(b)}}{(b)+\sqrt{(a)(b)}} \\ \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

Utique erit elegantior enuntiatio si dicas, esse (a) medium geometricum inter a. b. et (b) medium harmonicum inter b. et (a).

12 terminos *(1)* : *(2)* continuabiles *L* 17 esse (a) *(1)* progressionis *(2)* medium *(a)* arith *(b)* geometricum *L*

9 f. demonstrationum ex calculo concinnandarum: vgl. Fr. van Schooten, *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, 1661, *DGS* II S. 341 bis 420. 12 terminos: vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, prop. XI S. 25–28; ders., *Excercitationes geometricae*, 1668 S. 2 f. [Marg.]; in seinem Handexemplar, *Niedersächs. Landsbibl.* Ms IV, 377, hat Leibniz auf S. 2 die Reihenfolge der Berechnung der zweiten Terme der Doppelfolge aus den vorhergehenden durch Verbindungsstriche angedeutet.

Quod patebit si pro $\sqrt{ab}$ in valore ipsius (b) substituas id cuius valor est $\sqrt{ab}$ nempe (a) et fiet $(b) \sqcap \dfrac{2b(a)}{b+(a)}$. et erunt $b \quad (b) \quad (a)$ progressionis harmonicae, quod sic patet $b \quad \dfrac{2b(a)}{b+(a)} \quad (a)$.

Est autem $\dfrac{2b(a)}{b+(a)}$ formula medii harmonici duplum scilicet rectanguli per summam divisi. Hae scilicet formulae simplices notandae et in catalogos referendae, et nominibus designandae sunt, ut scilicet cum earum ope elegantiora obtineamus theoremata, et utendo theorematis formularum eiusmodi notarum iam demonstratis, faciliores obtineamus demonstrationes. Imo et constructiones, dum iam pulchra problemata plerumque circa formulas eiusmodi notas et celebratas habentur. Porro ut in nostro exemplo obiter dicam cum communis mensura non mutet progressionis dividendo tres terminos per ba, fiet:

$$\frac{1}{a} \quad \frac{2}{b+a} \quad \frac{1}{b} \quad \text{vel} \quad \frac{1}{2a} \quad \frac{1}{a+b} \quad \frac{1}{2b}.$$

Quorum trium terminorum novissimorum nominatores sunt progressionis arithmeticae, nempe:

$$\frac{1}{2a} \quad \frac{1}{2a, +\overline{-a+b}} \quad \frac{1}{2a, +2\overline{-a+b}}.$$

Ita si omnia multiplicemus per $b+a$ fiet ex tribus scilicet terminis initio, quorum medius fractio, fiet inquam:

$b^2+ab \quad 2ab \quad ba+a^2$

sive $b+a, b \quad 2ab \quad b+a, a$.

Si a primo auferas medium fiet b^2-ab. Si a secundo tertium fiet: $ab-a^2$, id est fiet illic $b \frown b-a$, hic a [$\frown$] $b-a$, quae sunt ut b. ad a, cum ipse terminus primus sit etiam ad tertium ut b. ad a.

---

13 f. *Unter* arithmeticae: P r o g r e s s i o h a r m o n i c a a r i t h m e t i c a e e s t r e c i p r o c a.

6 cum *(1)* | offeruntur *streicht Hrsg.* | earum ope *(2)* earum ope *(a)* pulcheriora obt *(b)* elegantiora *L* 6 f. et *(1)* ob lemma *(2)* utendo *L* 21 a; b − a *L ändert Hrsg.*

Hinc porro sequitur si addantur duo numeri integri progressionis harmonicae uno interiecto distantes, esse aut quadratos aut quadratorum multiplos. Nam $b^2+ab+ab+a^2$, seu $b^2+2ab+a^2$ quadratus. Quadrati sunt cum progressio primitiva est.

Et differentiae eorum sunt differentiae duorum quadratorum. Hinc solutio cuiusdam problematis, perelegans. Quaeritur series numerorum, in quibus id contingat, in infinitum, ut sint quadrati simul vel multipli; et generaliter loquendo multipli quadratorum; summae; et differentiae vel multipli differentiarum quadratorum sint differentiae, terminorum uno intervallo dissitorum. Hae sunt quaestiones longe difficiliores quam simplices.

1 f. uno ... distantes *erg.* *L* 5 perelegans. *(1)* Sit quaerenda vero num *(2)* Quaeritur *L*
6 quadratorum *(1)* et | sint *streicht Hrsg.* | *(2)* summae *L*

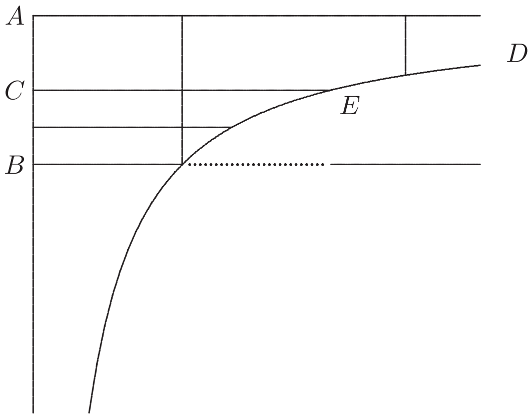
52. PRO SUMMA PROGRESSIONIS HARMONICAE
[November 1675 – Februar 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 254. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 254 r°. Bl. 254 v°. leer. Cc 2, Nr. 1185

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum November 1675 bis Anfang Februar 1676 belegt.

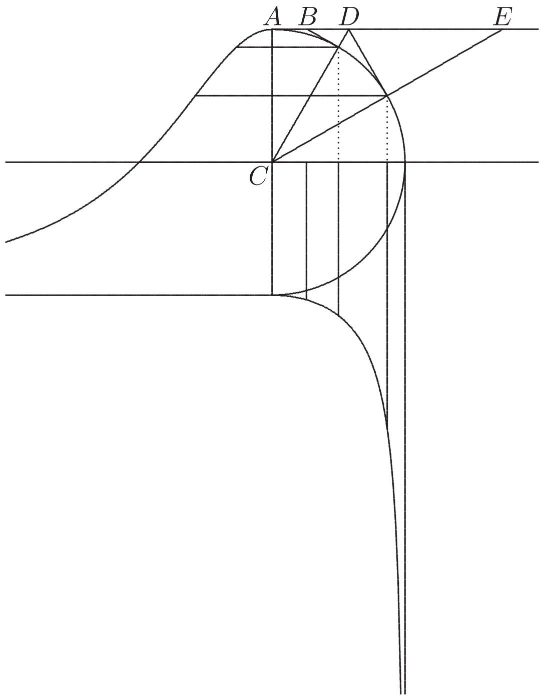
[*Teil 1*]

P r o s u m m a p r o g r e s s i o n i s h a r m o n i c a e



[*Fig. 1*]

8 P r o *erg. L*



[*Fig. 2*]

$$\begin{array}{cccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
\left[\frac{1}{1}\right] & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \\
\hline
 & \frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \text{etc.} \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & &
\end{array}$$

3 $\frac{1}{1}$ *gestr. L, erg. Hrsg.*

1 *Fig. 2*: vgl. die Darstellungen der figura segmentorum und der figura angulorum in *LQK* S. 42 u. 46.

$$\frac{a}{a[-ay]} \sqcap 1 + y + y^2 + y^3$$

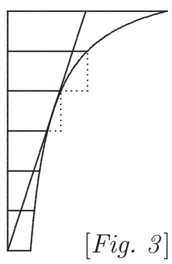
$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{2}} \sqcap \frac{2}{1} \sqcap 1 + \frac{1}{1}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{27} \quad \frac{1}{81} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{3}} \sqcap \frac{3}{3-1} \sqcap \frac{3}{2} \sqcap 1 + \frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{125} \quad \frac{1}{625} \quad \text{etc.} \sqcap \frac{1}{1-\frac{1}{5}} \sqcap \frac{5}{5-1} \sqcap \frac{5}{4} \sqcap 1 + \frac{1}{4}$$

$$\begin{array}{cccccc}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
\hline
\frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} & \\
\frac{1}{8} & \frac{1}{27} & \frac{1}{64} & \frac{1}{125} & \frac{1}{216} & \\
\frac{1}{16} & \frac{1}{81} & \frac{1}{256} & \frac{1}{625} & \frac{1}{1296} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & & & &
\end{array}$$

In arithmeticis progressionibus non potest alia commode fieri aequatio referens ad alium axem.



[*Fig. 3*]

$\frac{a}{y} - \frac{a}{y+\beta} \sqcap \frac{ay + a\beta - ay}{y^2 + \beta y} \sqcap \frac{a\beta}{y^2+\beta y}$ cuius momentum est: $\int \overline{\frac{a\beta}{y+\beta}} \sqcap \int \beta$ [*bricht ab*]

1 + y *L ändert Hrsg.*

[*Teil 2*]

Sit numerus quantuscunque, quaeritur an multiplicari possit per alium, ut productum fiat minus quam summa omnium productorum possibilium ex omnibus numeris minoribus.

$$\begin{array}{llll} y^3 + b\,y^2 & + bc\,y & + bcd \\ \quad\;\; c & + bd & \\ \quad\;\; d & + cd & \end{array}$$

Videndum an differentia inter productum continuorum, et summa productorum omnium numerorum minorum superare possit quemlibet numerum datum.

Producti continuorum logarithmus habetur addendo logarithmos omnium numerorum inferiorum.

[*Isolierte Gleichung*]

$y^z * * *$ etc. $e \sqcap \dfrac{s}{y}$

5–7 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{l} a\,b\,c\,d \\ a\,b\,c \\ a\,b\,d \\ a\,c\,d \\ b\,c\,d \end{array}$$

2 quantuscunque, *(1)* multiplicetur per *(2)* quaeritur *L*

10 f. Producti ... inferiorum: vgl. N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 34. In Leibniz' Handexemplar ist der Absatz unter der entsprechenden Aussage mit Bleistift angestrichen.

53. DE TRIANGULO HARMONICO

Die folgenden drei Stücke stehen in einem engen inneren und zum Teil auch äußeren Zusammenhang: N. 53_3 ist als erstes entstanden, vermutlich kurz vor dem auf Dezember 1675 datierten Stück N. 53_1, in dem es erwähnt wird.

Bei der Abfassung von N. 53_2, datiert Februar 1676, hat Leibniz auf N. 53_3 verwiesen sowie umgekehrt einen Hinweis auf N. 53_2 in N. 53_3 ergänzt. Anschließend hat er dieses Blättchen in N. 53_2 wie in einen Brief eingefaltet und den so entstandenen Umschlag mit einer beide Stücke betreffenden Aufschrift (= S. 708 Z. 7–10) versehen.

53_1. DE PROGRESSIONE HARMONICA
Dezember 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 250. 1 Bl. ca. 18,5 x 16 cm. Obere und untere Schnittkante unregelmäßig. 1 S. auf Bl. 250 r°. Datum und Überschrift über dem Schema S. 706 Z. 2–19 ergänzt. — Auf Bl. 250 v° teilweise zerschnittene numerische Divisionen mit verschiedenen Rechenproben. Druck in einem späteren Band der Reihe.
Cc 2, Nr. 1180 tlw.

Decemb. 1675

P r o g r e s s i o   h a r m o n i c a

1					1				
	1					2			
2		1			3		4		
	2		1			6		8	
4		2		1	9		12		16
	4		2			18		24	
8		4			27		36		
	8					54			
16					81				

Progressio geometrica proxime inferior est series differentiarum transversalium progressionis geometricae propositae. Nec tantum differentiarum transversalium primarum seu primarum, sed et secundarum etc.

Series differentiarum rectarum progressionis geometricae est eiusdem progressionis geometricae. Si ope differentiarum transversalium inveniri possunt summae, sequitur hoc applicari posse ad geometricas; nam si seriei differentiarum transversalis primae quaeratur rursus series differentialis prima, et huius rursus, venietur tandem ad primam quae est unitatum; ubi differentiae sunt 0. seu exhaurientur. Sed si progressio non sit per numeros, non venietur unquam ad unitates:

704,17 *Unter* P r o g r e s s i o h a r m o n i c a : Adde schedam exiguam de inveniendis theorematis.

706,5–15 *Nebenrechnungen zum Schema*:

5 $\frac{1}{6} - \frac{1}{12} \sqcap \frac{12-6}{6,12} \sqcap \frac{1}{12}$

7 $\frac{1}{12} - \frac{1}{20} \sqcap \frac{20-12}{12,20} \sqcap \frac{8}{12,20} \sqcap \frac{2}{3,20} \sqcap \frac{1}{30}$

10 $105 \sqcap 5,21$ $\qquad \frac{105-60}{60,105} \sqcap \frac{45 \sqcap 5,9}{\cancel{3},2,\cancel{5},\cancel{3},7,10} \sqcap \frac{1}{140}$

11 $\frac{12}{30,42} \sqcap \frac{1}{7,15} \sqcap \frac{1}{105}$

13 $\frac{14}{42,56} \sqcap \frac{1}{6,28} \sqcap \frac{1}{168}$ $\qquad \begin{array}{r} 21 \\ 8 \\ \hline 168 \end{array}$

15 $\begin{array}{r} 72- \\ 56 \\ \hline 16 \end{array}$ $\qquad \frac{16}{56,72} \sqcap \frac{\cancel{2},\cancel{8}}{7,\cancel{8},\cancel{2},36} \sqcap$ $\qquad 36,7 \sqcap 252$ $\qquad \begin{array}{r} 28 \\ 9 \\ \hline 252 \end{array}$

6 si *(1)* diff *(2)* seriei | differentiarum *erg.* | transversalis *L* 10 Adde *(1)* schediasmata *(2)* schedam *L*

---

10 schedam exiguam: N. 53₃.

$\frac{1}{1}$									
	$\frac{1}{2}$								
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$							
	$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{4}$						
$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{5}$					
	$\frac{1}{12}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{6}$				
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{7}$			
	$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{42}$		$\frac{1}{8}$		
$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{60}$		$\frac{1}{105}$		$\frac{1}{56}$		$\frac{1}{9}$	
	$\frac{1}{30}$		$\frac{1}{140}$		$\frac{1}{168}$		$\frac{1}{72}$		$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{105}$				$\frac{1}{252}$		$\frac{1}{90}$	
	$\frac{1}{42}$						$\frac{1}{360}$		
$\frac{1}{7}$		$\frac{1}{168}$							
	$\frac{1}{56}$								
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{252}$							
	$\frac{1}{72}$								
$\frac{1}{9}$		$\frac{1}{360}$							
	$\frac{1}{90}$								
$\frac{1}{10}$									

Series secunda habet denominatores ex ductu duorum primorum proximorum, series tertia, ex ductu terminorum seriei primae, in terminos numero antecedentes seriei secundae sed per primum divisos, ut

$$\begin{array}{ccccccc}
\dfrac{1}{3} & , & \dfrac{1}{2} & \smile & \dfrac{1}{2} & \sqcap & \dfrac{1}{3} \\
\dfrac{1}{4} & , & \dfrac{1}{6} & \smile & \dfrac{1}{2} & \sqcap & \dfrac{1}{12} \\
\dfrac{1}{5} & , & \dfrac{1}{12} & \smile & \dfrac{1}{2} & \sqcap & \dfrac{1}{30}.
\end{array}$$

Si quaelibet series differentiarum descendens per primum terminum suum dividatur, fient reciproci numerorum combinatoriorum.

1 ex *(1)* facto *(2)* ductu *L* 2 ex *(1)* facto terminorum seriei *(2)* ductu *(a)* termini se *(b)* terminorum *L* 2 in *(1)* terminum *(2)* terminos *(a)* respondentes *(b)* ⟨in⟩ *(c)* numero *L* 7 differentiarum descendens *erg.* *L*

53_2. TRIANGULUM HARMONICUM ET TRIANGULUM PASCALII
Februar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 27 Bl. 2. 1 Bl. 4°. Goldschnitt. Brieffaltung. 1 S. auf Bl. 2 r°. Datum auf Bl. 2 r° oben ergänzt. Überschrift auf Bl. 2 v° Mitte. 10 Z.
Cc 2, Nr. 1337

Feb. 1676.

Triangulum harmonicum respondens triangulo arithmetico Pascalii, quo ostenditur quomodo numerorum figuratorum reciproci seu fracti, possint addi in summam. Patet et quomodo saepe ex simplicibus divinemus composita.

Ingeniosissimus Pascalius tractatum scripsit de triangulo arithmetico: de summis, et summis summarum, et summis ex summis summarum, etc. numerorum progressionis arithmeticae.

Ego singulari quadam ratione incidi in triangulum harmonicum; de differentiis et differentiis differentiarum, et differentiis ex differentiis differentiarum, etc. numerorum progressionis harmonicae.

Cumque numeri progressionis harmonicae sint reciproci, sive fracti numerorum progressionis arithmeticae, factum est miro naturae consilio, ut etiam reliquae totius trianguli harmonici series (tantum certo modo multiplicatae) serierum respondentium trianguli arithmetici reciprocae essent, atque iidem sint numeri trianguli arithmetici et harmonici, eo tantum discrimine quod termini trianguli arithmetici sint integri, id est fracti habentes figuratum, (id est trigonalem, pyramidalem, trigonotrigonalem, etc.) pro numeratore, et unitatem pro nominatore; contra termini trianguli harmonici habeant unitatem pro numeratore, numerum figuratum pro nominatore.

Reliqua ex tabulae inspectione patent, quae deducere demonstrationibus non est operae pretium. Hodie enim quivis characteristicae analyseos cultor facile deprehendit et demonstrat, qualia multis ratiociniis Pascalius ostendit.

17 progressionis *(1)* arithmeticae *(2)* harmonicae *L* 18 ut | reciproci *gestr.* | etiam *L* 26 f. et demonstrat *erg. L*

8 Pascalii: *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.] (*PO* III, S. 433–593).

T r i a n g. a r i t h m e t.
P a s c a l i i

servit ad inveniendas summas integrorum finitorum figuratorum, et quadraturas parabolarum rationalium, omnium graduum, quae sunt figurae carentes asymptotis.

T r i a n g. h a r m o n.
m e u m

servit ad inveniendas summas fractorum figuratorum, finitorum et infinitorum summam finitam habentium et quadraturas hyperbolarum rationalium, omnium graduum, quae spatia habent finitae magnitudinis, at ob asymptotos, infinitae longitudinis.

708,24 *Nach* nominatore *Tabelle gestr. L*:

$$\left|\begin{array}{rrrrc} 1 & 1 & 1 & 1 & \frac{1}{1} \\ 5 & 4 & 3 & 2 & \frac{1}{2} \\ 15 & 10 & 6 & 3 & \frac{1}{3} \\ 35 & 20 & 10 & 4 & \frac{1}{4} \\ 70 & 35 & 15 & 5 & \frac{1}{5} \\ 126 & 56 & 21 & 6 & \frac{1}{6} \end{array}\right|$$

5 *rechte Spalte* figuratorum, *(1)* etc. *(2)* finitorum *L* 9 rationalium, *(1)* (excepta prima, ⟨minime⟩ quadrabili) *(2)* omnium *L*

								$\frac{1}{1}$								
							1		$\frac{1}{1}$							
						1		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{1}$						
					1		2		$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{1}$					
				1		3		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{1}$				
			1		4		3		$\frac{1}{3}$		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{1}$			
		1		5		6		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{1}$		
	1		6		10		4		$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{1}$	
etc.		7		15		10		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{10}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{7}$		etc.
	etc.		21		20		5		$\frac{1}{5}$		$\frac{1}{20}$		$\frac{1}{21}$		etc.	
		etc.		35		15		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{15}$		$\frac{1}{35}$		etc.		
			etc.		35		6		$\frac{1}{6}$		$\frac{1}{35}$		etc.			
				etc.		21		$\frac{1}{1}$		$\frac{1}{21}$		etc.				
					etc.		7		$\frac{1}{7}$		etc.					
						etc.		$\frac{1}{1}$		etc.						
[I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII	XIV	XV	XVI	XVII]

16–711,14 *Spalten- und Zeilenzählung erg. Hrsg. Die römisch numerierten Zeilen sind im Manuskript senkrecht unter die entsprechenden Spalten geschrieben. Die eckigen Klammern im Text bis S. 711 Z. 11 stammen von Leibniz selbst.*

[IV] etc.
[V] Summae ex summis summarum seu $\nabla\nabla$ gonales
[VI] Summae summarum seu pyramidales
[VII] Summae arithmeticorum, seu trigonales [differentiae pyramidalium etc.]
[VIII] Progressio arithmetica [differentiae trigonalium et differentiae differentiarum pyramidalium, etc.]
[X] Progressio harmonica seu reciproci arithmetici [summae fractionum seu reciprocorum trigonalium per $\frac{2}{1}$ divisorum; summae summarum reciprocorum pyramidalium per $\frac{2}{1}$ in $\frac{3}{2}$ id est per 3 divisorum etc.]
[XI] Differentiae harmonicorum multiplicatae per $\frac{2}{1}$ [seu reciproci triangularium, seu summae pyramidalium per $\frac{3}{2}$ divisorum]
[XII] Differentiae differentiarum multiplicatae per [3]
[XIII] Differentiae inter differentias differentiarum multiplicatae per [4]
[XIV] etc.

Adde quae alibi scripsi de trianguli harmonici numerorum summis in scheda exigua, huic involuta.

4 [differentiae . . . etc.] *erg. L* 5 f. [differentiae . . . etc.] *erg. L* 7 seu reciproci arithmetici *erg. L* 7–9 [summae . . . per $\frac{2}{1}$ divisorum; | summae summarum *erg.* | reciprocorum . . . etc.] *erg. L* 10 *(1)* Progressio *(2)* Differentiae *L* 10 f. [seu . . . divisorum] *erg. L* 12 Differentiae *(1)* harmonicorum *(2)* differentiarum *L* 12 $\frac{3}{2}$ *L ändert Hrsg.* 13 Differentiae *(1)* ex *(2)* inter *L* 13 $\frac{4}{3}$ *L ändert Hrsg.*

53_3. SCHEDA EXIGUA
[Dezember(?) 1675 – Februar 1676]

Überlieferung:

L Überarbeitetes Konzept: LH 35 VIII 27 Bl. 1. Ein Zettel 4,5 x 17,5 cm. 2 S.
E P. Costabel, *Leibniz et les séries numériques*, 1978, S. 90–91.
Teildruck in dt. Übersetzung: D. Mahnke, *Zusätze aus den ungedruckten Handschriften*, 1931, S. 31–33 (= Z. 14 – S. 713 Z. 9 und S. 713 Z. 13 – S. 714 Z. 15).
Cc 2, Nr. 1336

[*Teil 1*]

Origo inventionis trianguli harmonici.

Anno 1673 Hugenius mihi proposuerat summam fractionum triangularium inveniendam quam particulari sed valde memorabili solutione deprehenderat. Cum ergo in ea essem meditatione forte notavi[:]

Si exponatur
$$\begin{array}{l}A \sqcap \frac{1}{1}\ \ \frac{1}{2}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{4}\ \ \frac{1}{5}\\[2ex] B \sqcap \frac{1}{1}\ \ \frac{1}{3}\ \ \frac{1}{6}\ \ \frac{1}{10}\ \ \frac{1}{15}\end{array}$$

et si dimidii termini B addantur terminis ex A, per lineas quas vides iunctis, reddi terminos ex A, terminis ex B superscriptos. Quod in mentem primum venerat, quod viderem primum terminum nempe 1 ipsius B, dimidiatum, additum iuncto per lineam

10 trianguli harmonici *erg. L* 11 f. inveniendam *erg. L* 12 solutione *(1)* invenerat *(2)* deprehenderat 18 nempe 1 *erg. L*

11 Anno 1673: Das Gespräch hat wahrscheinlich im September 1672 stattgefunden; vgl. in der Einleitung S. XXV sowie N. 36 u. *Historia et origo calculi differentialis*, 1714 (*LMG* V S. 404). Huygens' Lösung des Probleme ist abgedruckt in *HO* XIV, S. 144–150.

ex A, nempe $\frac{1}{2}$ facere 1, seu primum ex A. Item quod nominatores proximi ex A in se ducti, faciunt semper numeratorum ex B duplos, ut

$$\begin{array}{ccc} 1,2 \sqcap 2. & 2,3 \sqcap 6. & 3,4 \sqcap 12. \\ 1 & 3 & 6 \end{array}$$

Quod autem in caeteris seriebus sumenda sint $\frac{2}{3}C$, $\frac{3}{4}D$, etc. ita facile divinavi, quia $\frac{2}{3}$ primi termini ex C et $\frac{3}{4}$ primi termini ex D, id est semper unitatis, addita secundo termino seriei praecedentis, faciunt semper unitatem. Unde patet quomodo simplicium auxilio s a e p e c o m p o s i t a d i v i n e m u s . Ex hoc autem theoremate inductione deprehenso, summas eleganti satis ratiocinio inveni. Et ex his porro exstruxi ∇^{lum} harmonicum cuius cum arithmetico mirus consensus. De quo alibi.

[*Teil 2*]

Demonstratio. Summae serierum trianguli arithmetici reciproci seu trianguli harmonici.

Sit
$$\begin{array}{lcl} A & \sqcap & \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.} \\ B & \sqcap & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10} + \frac{1}{15} \text{ etc.} \\ C & \sqcap & \frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{10} + \frac{1}{20} + \frac{1}{35} \text{ etc.} \\ D & \sqcap & \frac{1}{1} + \frac{1}{5} + \frac{1}{15} + \frac{1}{35} + \frac{1}{70} \text{ etc.} \\ \text{etc.} & \sqcap & \text{etc.} \end{array}$$

Erit
$$\begin{array}{lcl} A - 1 & \sqcap & + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} \text{ etc.} \\ \frac{1}{2}B & \sqcap & + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} + \frac{1}{20} \text{ etc.} \end{array}$$

1 facere *(1)* duplos *(2)* 1 *L* 2 semper | sequentiam *gestr.* | numeratorum *L* 2 *B (1)* dimidios *(2)* duplos 6 C | seu unitatis *gestr.* | et *L* 9 f. Et ... alibi. *erg. L* 12 serierum *(1)* reciproce triangulo-pyramidalium etc. *(2)* trianguli *L* 13 Sit *erg. L*

---

10 De quo alibi: N. 53₂.

Iam per theorema $A - 1 + \frac{1}{2}B \sqcap 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$ etc.

Ergo $A - 1 + \frac{1}{2}B \sqcap A$. Ergo $B \sqcap \frac{2}{1}$. Adeoque habetur totius seriei B summa.

Eodem modo $B - 1 + \frac{2}{3}C \sqcap B$. Ergo C $\sqcap \frac{3}{2}$.

$C - 1 + \frac{3}{4}D \sqcap C$. Ergo D $\sqcap \frac{4}{3}$. Et ita porro in infinitum.

Ergo ut in unum contrahamus:

$$\begin{array}{cccccc}
 & \underbrace{\;A\;} & \underbrace{\;B\;} & \underbrace{\;C\;} & \underbrace{\;D\;} & \text{etc.} \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \frac{1}{1} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & \frac{1}{35} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{5} & \frac{1}{15} & \frac{1}{35} & \frac{1}{70} & \\
\text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \text{etc.} & \\
\hline
\multicolumn{6}{c}{\text{summa}} \\
\hline
\frac{0}{\ldots} & \frac{1}{0} & \frac{2}{1} & \frac{3}{2} & \frac{4}{3} & \text{etc.} \\
\multicolumn{2}{c}{\underbrace{\qquad\qquad}_{\text{coniecturalia}}} & \multicolumn{4}{c}{\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{\text{certa}}}
\end{array}$$

1 theorema: s. o. S. 712 Z. 14–17.

54. NUMERI PROGRESSIONIS HARMONICAE

8. Februar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 243–244. 1 Bog. 2°. 4 S. Zusatz am linken Rand von Bl. 244 r° u. unten auf Bl. 243 v° quergeschrieben. Geringer Textverlust durch Ausrisse im Falz. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1303

8. Feb. 1676.

Numeri progressionis harmonicae et proprietates quaedam in earum progressione observatae et summa circiter vera

[*Teil 1*]

Progressionis harmonicae natura est, ut tribus quibuslibet sumtis terminis continuis, sit primus ad tertium, ut differentia primi et secundi ad differentiam secundi et tertii: a b c sint characteres algebraici erit: $\dfrac{a}{c} \sqcap \dfrac{a-b}{b-c}$. et $a,b - a,c \sqcap a,c - b,c$. et $2, a,c \sqcap a,b + b,c$. cuius aequationis ope, quaerere possumus valorem vel a. vel b. vel c, itaque $b \sqcap \dfrac{2, a, c}{a+c}$. id est medius trium terminorum progressionis harmonicae est duplus facti ex extremis, divisi per summam. Quaeramus et extremos, erit scilicet $a \sqcap \left[\dfrac{b,c}{2, c,, - b}\right]$.

15 f. tertii: *(1)* 1.2.3.4.5.6.7 sint characteres algebraici *(a)* p s t *(b)* erit: $\dfrac{1}{3} \sqcap \dfrac{1-2}{2-3}$. et $1,2 - 1,3 \sqcap 1,3 - 2,3$. et $2, 1,3 \sqcap 1,2 + 2,3$. et erit $2 \sqcap \dfrac{2, 1, 3}{1+3}$ id est numerus medius *(2)* a b c *L* 17 vel *(1)* 1. vel 2. vel 3. Sed satius quaerere valorem ipsius 2, sive medii, nam nulla est ratio cur alter extremorum prae altero eligatur, itaque $2 \sqcap \dfrac{2, 1, 3}{1+3}$ *(2)* a. vel b. *L* 19–716,1 scilicet *(1)* $1 \sqcap \dfrac{2,3}{2\,1,3,, - 1,2}$. et $3 \sqcap \dfrac{1,2}{2\,1,2,, - 2,3}$ *(2)* $1 \sqcap \dfrac{2,3}{2, 3,, - 2}$ et $3 \sqcap \dfrac{1,2}{2, 1,, - 2}$. Sit $1 \sqcap$ a. et $2 \sqcap$ b. erit $3 \sqcap \dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a} - \mathrm{b}}$. a b $\dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$ sive $\dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{b}}$ $\dfrac{\mathrm{ab}}{\mathrm{a}}$ $\dfrac{\mathrm{ab}}{2\mathrm{a}-\mathrm{b}}$ *(3)* | $\mathrm{a} \sqcap \dfrac{\mathrm{b,c}}{2, \mathrm{b},, - \mathrm{c}}$ *ändert Hrsg.* | et *L*

et $c \sqcap \dfrac{a,b}{2,a,,-b}$. Ergo assumendo $a.b.$ sequens seu tertius habebitur et ita stabit $a \quad b \quad \dfrac{ab}{2a-b}$ sive reducendo ad unum numeratorem, quod etiam aliquando utile est, quemadmodum alias ad unum nominatorem, fiet $\dfrac{ab}{b} \quad \dfrac{ab}{a} \quad \dfrac{ab}{2a-b}$. Sunt autem nominatores $b.\,a.\,2a-b$, termini progressionis arithmeticae, nam duplus medius, aequatur summae extremorum.

Medium harmonicum $\dfrac{2ac}{a+c}$ reciprocum est dimidiae summae fractionum sub extremis $\dfrac{1}{2a}+\dfrac{1}{2c}$. seu $b \sqcap \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$.

Sed quoniam progressio quaelibet eadem manet si tota per aliquam quantitatem dividatur, ideo resumendo: $\dfrac{ab}{b} \quad \dfrac{ab}{a} \quad \dfrac{ab}{2a-b}$ etc. et totum dividendo per ab, fiet: $\dfrac{1}{b} \quad \dfrac{1}{a} \quad \dfrac{1}{2a-b}$. Sit quartus terminus $\dfrac{1}{c}$ quaeritur c quam sic inveniemus scribendo: $\dfrac{1}{b} \quad \dfrac{1}{B \sqcap a} \quad \dfrac{1}{A \sqcap 2a-b}$

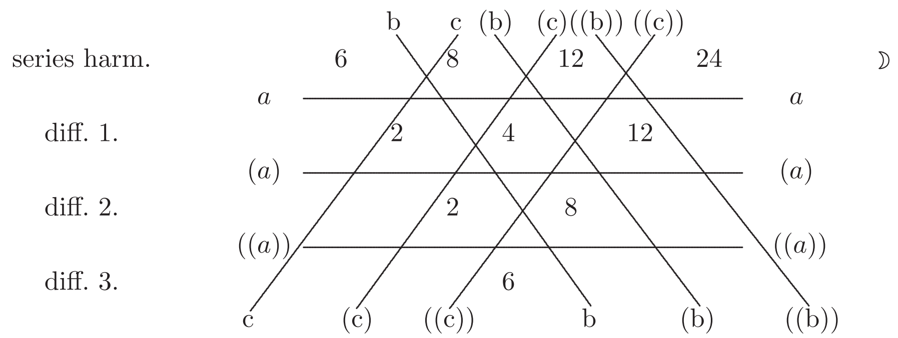
3 nominatores *erg. L* 5 f. extremorum *(1)*: Et quoniam b et a pro arbi *(2)*. *(a)* Divisis omnibus per ab, fiet: $\begin{array}{ccc} \frac{1}{ab^2} & \frac{1}{a^2b} & \frac{1}{2a^2b-ab^2} \\ & \text{vel} & \text{vel} \\ & \frac{1}{AB^2} & \frac{1}{A^2B} \end{array}$. Sit *(aa)* quartus *(bb)* continuatae huius progressionis quartus, $\frac{1}{c}$, appellando secundum $\frac{1}{AB^2}$. et tertium $\frac{1}{A^2B}$, fiet quartus $\frac{1}{2A^2B-AB^2}$ et $c \sqcap 2A^2B-AB^2$. Hinc $A \sqcap \frac{a^2b}{B^2}$. et $A^2 \sqcap \frac{a^4b^2}{B^4}$. et $A^2 \sqcap \frac{2a^2b-ab^2}{B}$. fiet $B^3 \sqcap \frac{a^3b}{2a-b}$. Ergo $\frac{b}{2a-b}$ debet esse cubus. Quod praestabitur si ponatur $a \sqcap 1$. et $b \sqcap 1$. erit enim $\frac{b}{2a-b} \sqcap 1$. qui primus est casus, et oritur progressio harmonica prima 1.1.1. *(aaa)* Aliter *(bbb)* Proximus *(aaaa)* gradus *(bbbb)* casus est, ut ponendo $b \sqcap 1$. fiat $a \sqcap 5$. et fiet: $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{25} \quad \frac{1}{45}$ etc. sive omnia multiplicando per $ab \sqcap 5$, fiet $\frac{1}{1} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{9} \quad \frac{1}{15}$ etc. *(b)* Medium *L* 10 scribendo *erg. L*

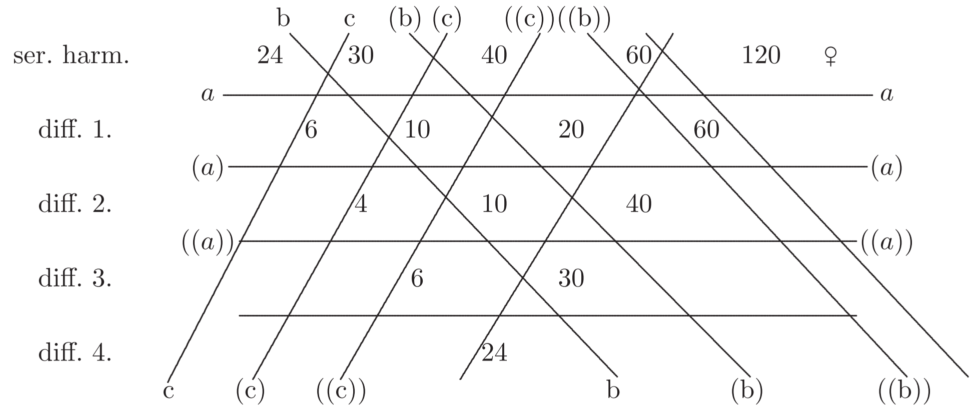
6 f. Medium ... $b \sqcap \dfrac{2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{c}}$: vgl. N. 55 S. 733 Z. 16.

$\dfrac{1}{c \sqcap 2A - B}$. Fit enim quartus ex secundo et tertio, ut tertius ex primo et secundo, ergo inserendo valores A et B in valore c, fiet $c \sqcap 4a - 2b$, $-a \sqcap 3a - 2b$. Fiet ergo progressio harmonica: $\dfrac{1}{b}$ $\dfrac{1}{a}$ $\dfrac{1}{2a-b}$ $\dfrac{1}{3a-2b}$ $\dfrac{1}{4a-3b}$ etc. id est eius termini sunt fractiones, quarum nominatores sunt progressionis arithmeticae incipientis a $\underline{b}$. et continue crescentis, differentia $a - b$. Unde patet etiam omnes possibiles progressiones harmonicas enumerari posse, quia a. et b. sumi possunt pro arbitrio, modo a, maior quam b. Deinde sequitur hinc progressionem numerorum integrorum harmonicorum non posse continuari in infinitum. Nam ut in integris exhibeatur progressio harmonica reducendae sunt fractiones ad communem denominatorem. Quo abiecto habebuntur numeri progressionis harmonicae integri. Sed patet eos longe alios fieri, prout alius atque alius sumitur denominator. Alius autem alius oritur denominator, quando aliae atque aliae sumuntur fractiones, quod fit, quando nunc plures nunc pauciores fractiones assumuntur. Hinc difficillimae tractationis haec progressio est, ob continuam variationem, ut tamen in eius naturam in integris per compendiosas inductiones inquirere possimus, operae pretium erit, incipere ordine enumerare omnes series integrorum harmonicorum finitas, quae ex infinita unica fractionum $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{4}$ $\dfrac{1}{5}$ etc. fieri possunt. Ex primo fit 1. ex duabus primis, invento et abiecto communi denominatore, 2.1. ex tribus primis, 6.3.2. expressa in tabula adiecta per $\odot$, ex quatuor primis, 24.12.8.6. expressa in tabula adiecta per ☽. Atque ita continuari tabula intellige inquisitis cuiuslibet seriei differentiis, et differentiarum differentiis, ut factum vides. Eumque in finem n o t a n d a , tabulae subscripta, consulantur.

$$\begin{array}{lccc} & & 1 & \\ \hline & 1 & & 2 \\ \hline \text{series harmonica} & 2 & 3 & 6 \\ \hline \text{diff. 1.} & & 1 \quad 3 & \\ \hline \text{diff. 2.} & & 2 & \end{array} \qquad \odot \qquad \begin{array}{l} \frac{1}{1} \\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{2} \sqcap \frac{2}{1}\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3} \sqcap \frac{6}{6}\ \frac{3}{6}\ \frac{2}{6} \end{array}$$

14 incipere *erg.* *L* 16 invento et *erg.* *L* 17 denominatore, *(1)* et reducendo ad unam fractionem *(2)* 2.1. ex *L*





120 144 180 240 360 720
24 36 60 120 360
12 24 60 240
12 36 180
24 144
120

720 840 1008 1260 1680 2520 5040
120 168 252 420 840 2520
48 84 168 420 1680
36 84 252 1260
48 168 1008
120 840
720

Notanda in tabula

Differentiae sunt, primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $aa, (a)(a)$ etc.

Incrementa primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $bb, (b)(b)$ etc.

Decrementa primi secundi tertii gradus quae includuntur rectis $cc, (c)(c)$ etc.

Differentiae incrementa, decrementa, simpliciter, significant ea quae primi gradus.

In progressione harmonica termini decrementis differentiae primae, incrementis secundis, 2[dae] tertiis coincidunt, sive generaliter, series horizontales coincidunt obliquis decrementalibus, in progressione harmonica.

Difficile foret a priori invenire progressionem quae hoc praestaret, si nesciremus esse harmonicam.

In serie qualibet incrementali termini ab extremis aequidistantes coincidunt.

Continuatio tabulae per series, seu progressio progressionum harmonicarum sive serierum. Series sequens quaesita fiet ex praecedente, si ultimus praecedentis, fiat primus sequentis, et reliqui sequentis, sint omnes praecedentis per suum ordinalem numerum naturalem ordine seriei quaesitae respondentem, multiplicati, ut $\odot$ est tertia in ordine, adeoque naturalis ei respondens, sive ordinalis eius, 3. Primus eius terminus est 2. maximus seriei praecedentis, sequentes, 3.6. sunt facti ex terminis seriei praecedentis, 1.2. in ordinalem seriei quaesitae, 3.

Continuatio tabulae per incrementa, seu progressio progressionum incrementalium, sive incrementorum harmonicorum. Primus et ultimus (coincidentes) iam habentur, sunt enim iidem cum primo termino seriei seu ultimo seriei praecedentis. Reliqui sic fient. Incrementalium praecedentis seriei primus multiplicetur per 1. secundus per 2. tertius per 3. etc. et ita in medium usque ab utroque enim extremo fit idem. Ita series incrementalis ♀, nempe ⟨24.6.⟩4. sic fiet. 24. terminus seriei primus (est semper factus ⟨—⟩ ⟨om⟩nium ordinalium), reliqui ex ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis, 6.2. per 1.2. ordine multiplicatis.

Quoniam autem incrementorum progressionem invenimus, non est opus nunc quidem tabulam longius continuari, nam incrementa videntur simplicioris esse naturae, quam ipsae series, adeoque supererit ut inquiramus in progressionis incrementorum proprieta-

2 *(1)* Tabula facile continuari poterit, si *(2)* Differentiae *L* 2 includuntur *(1)* lineis, *(2)* rectis *L* 5 decrementa, *(1)* intellige *(2)* simpliciter *L* 10 f. harmonicam. *(1)* Continuatio tabulae: *(2)* In *L* 13 quaesita *erg. L* 13 si *(1)* primus *(2)* ultimus *L* 14 suum ordinalem *erg. L* 15 quaesitae *erg. L* 24 f. ⟨om⟩nium *(1)* naturali *(2)* ordinalium *L* 25 ex *(1)* terminis seriei | increment⟨—⟩ *erg.* | ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis, ordine, *(2)* ⟨—⟩ ⟨prae⟩cedentis *L*

tes. Nam quando series quaedam tractatur, utile est quaeri eius differentias, et differentias differentiarum, et differentias tertias, seu quas ipsae habent differentiae differentiarum, idque tamdiu, donec vel ultimae differentiae sint 0. et habemus quaesitum, hoc enim sufficit ad naturam progressionis propositae investigandam, ita enim et aequatione potest exprimi, et summae terminorum possunt inveniri, quae sunt primaria in qualibet progressione quaesita. Vel differentiae nunquam evanescunt quamdiu termini suppetunt, et tunc inquirendum est in seriem incrementorum, vel decrementorum; illorum, si series ab initio proposita in infinitum crescere potest, horum, si in infinitum potest decrescere: utrorumque, si finita est. Hoc loco differentias nunquam exhaustum iri patet nisi cum terminis, et series proposita harmonica finita est, adeoque incrementorum simul et decrementorum series, examinanda, quae utraque etiam finita, sed aequidiuturna cum ipsa serie terminorum, imo series decrementorum mirabili sane proprietate coincidit cum serie terminorum.

Superest ergo tantum examinanda series incrementorum separatim; quoniam enim eius naturam ac progressionem certa quadam regula invenimus, sola per se incrementa iam novam tabulam possumus quaerere, extra tabulae superioris continuationem.

$$\begin{array}{c} 1\\ \hline 1\quad 1\\ 0\\ \hline 2\quad\ 1\quad\ 2\\ -1\quad 1\\ 2\\ \hline 6\quad\ 2\quad\ 2\quad\ 6\\ -4\quad\ 0\quad +4\\ +4\quad +4\\ 0 \end{array}$$

2 differentiarum, et *(1)* differentiae quam ipsae *(1)* differentias *(a)* secundas seu *(b)* tertias *L* 3 vel *(1)* incideamus in *(2)* ultimae *L* 6 Vel *(1)* nulla inveniri potest differentia *(2)* diff *(3)* differentiae *L* 6 quamdiu ... suppetunt *erg. L* 7 f. decrementorum; *(1)* si pro *(2)* illorum, si series | *(a)* pro data *(b)* ab initio proposita *erg.* | in *L* 9 f. nisi ... terminis *erg. L* 11 utraque *erg. L*

24		6		4		6		24
	−18		−2		2		18	
		16		4		16		
			− 12		12			
				24				

120		24		12		12		24		120
	−96		−12		0		12		96	
		+84		+12		+12		84		
			− 72		0		72			
				72		72				
					0					

720		120		48		36		48		120		720
	−600		−72		−12		12		72		600	
		+528		+60		24		60		528		
			− 468		−36		36		468			
				432		[72]		432				
					[−360]		[360]					
						[720]						

5040		720		240		144		144		240		720		5040
	4320		[480]		96		0		•		•		•	
		[3840]		[384]		•		•		•		•		
			[3456]		•		•		•		•			
				•		•		•		•				
					•		•		•					
						•		•						
							•							

18 0 *L ändert Hrsg.* 19 432 *L ändert Hrsg. zweimal* 20 0 *L ändert Hrsg.* 23 360 *L ändert Hrsg.* 24 3960 *L ändert Hrsg.* 24 264 *L ändert Hrsg.* 25 3696 *L ändert Hrsg.*

Hic illud primum notabile est (ut in triangulo arithmetico), quod idem ab utraque extremorum parte diverso.

$$\begin{array}{llrrrrrl}
\text{Calculo producitur:} & & \text{ut} & 6 & 2 & 2 & 6 & \\
 & & & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \text{per} \\
 & & 24 & 6 & 4 & 6 & 24 & \\
 & & \underline{1} & \underline{2} & \underline{3} & \underline{4} & \underline{5} & \text{per} \\
 & 120 & 24 & 12 & 12 & 24 & 120 &
\end{array}$$

Notandae, et differentiae negativae, quae hic occurrunt.

Caeterum quoniam differentiae incrementorum ad magnos denique numeros ascendunt, non est cur sic pergamus. Et referenda huc quae alibi calculavi, ubi certa quadam ratione differentiae exhauriri videbantur.

In omni progressione harmonica, ut $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{9}\ \frac{1}{10}$ excerpti per intervalla aequalia sunt etiam harmonici, ut $\frac{1}{2}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{8}\ \frac{1}{11}$ etc.

Quare idem est et in integris, quando fractiones ad communem denominatorem reducuntur.

---

14 f. *Nebenbetrachtung, gestrichen:*

$$\frac{1}{2} \sqcap \frac{2, \frac{1}{3}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{3}} \quad \text{seu} \quad 1 \sqcap \frac{2, 2, \frac{1}{\cancel{3}} \sqcap 4}{\frac{3,1}{1}+\frac{1,1}{1} \sqcap 4}$$

$$\frac{1}{3} \sqcap \frac{2, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} \sqcap \frac{2, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{5}}. \quad \text{Ergo} \quad \frac{\cancel{2}}{3} \sqcap \frac{\cancel{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}}{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} + \frac{\cancel{2}, \frac{1}{1}, \frac{1}{5}}{\frac{1}{1}+\frac{1}{5}} \quad \text{et} \quad 3 \sqcap \frac{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}, \frac{1}{4}} \textit{(!)}$$

$$\left(\sqcap \frac{\frac{4}{1}+\frac{2}{1}}{2} \right). \text{ Reducendo ad unum numeratorem } \frac{1}{3} \sqcap \frac{1}{4+2} + \frac{1}{5+1} \sqcap \frac{2}{6}$$

14 integris, | ut arbitror *gestr.* | quando *L*

---

10 alibi calculavi: vgl. N. 22 Teil 2.

[*Teil 2*]

Summae progressionum finitarum omnium quarum formulae rationales aequabiles, licet fractae. Quod hactenus nemo.

Cum diu laborassem frustra in summis reciprocarum progressionum, seu fractionum, investigandis, tandem subito lucem quandam hausi. Diu constabat mihi ex Mercatoris methodo posse appropinquando exhiberi summam terminorum harmonicae finitorum, id enim cum hyperbolae quadratura in numeris propinquis exhibita, coincidit, sed nondum appropinquationis ope ad exactam summam quaesitam veniri posse cogitaveram. Quod nuper in mentem venit, et nunc explicabo.

Nam sit: $\underbrace{\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{7}}_{\text{☽}}$ etc. seu

$$\frac{1}{1}-\frac{0}{1}+\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{1}-\frac{2}{3}+\frac{1}{1}-\frac{3}{4}+\frac{1}{1}-\frac{4}{5}+\frac{1}{1}-\frac{5}{6}+\frac{1}{1}-\frac{6}{7} \text{ etc. seu}$$

$7,-\Bigl(\underbrace{\frac{0}{1}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}+\frac{5}{6}+\frac{6}{7}}_{\odot}\Bigr)$. Ergo si series $\odot$ inveniatur invenietur et ☽, nam ☽ $\sqcap 7-\odot$.

3 *Am Rande:* Aequabiles formulae, quae aequationem certi gradus seu lineam non transcendentem dare possunt.

2–4 Summae progressionum *(1)* formularum ra *(2)* finitarum ... rationales | aequabiles *erg.* |, licet ... nemo *erg. L* 5 reciprocarum | arithm *erg. u. gestr.* | progressionum *L* 6 f. Mercatoris *(1)* regul *(2)* methodo *L* 8–10 , sed ... explicabo *erg. L* 11 etc. *(1)* seu *(2)* seu $1-\frac{2}{1}+1-\frac{3}{2}+1-\frac{4}{3}+1-\frac{5}{4}+1-\frac{6}{5}+1-\frac{7}{6}+1-\frac{8}{7}$ *(3)* seu *L*

6 f. ex Mercatoris methodo: N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XV S. 29 f. [Marg.], entwickelt $\frac{1}{1+a}$ durch fortgesetzte Division in die Reihe $1-a+a^2-a^3+a^4$ etc.

Fractionum in $\odot$ contentarum numeratores, 0.1.2.3. etc. appellemus y. erit $\odot \sqcap \dfrac{y}{1+y} + \dfrac{(y)}{1+(y)}$ etc. Iam $\dfrac{y}{1+y} \sqcap y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5 \; -y^6 \; \left[+y^7 - y^8 + y^9 - y^{10}\right]$ etc.

Et quanquam hoc modo subtrahenda addendis maiora, si in infinitum continuetur series potentiarum; attamen si appropinquatio tantum quaeratur non est opus iri in infinitum; sed finiri potest in potentia affirmativa, adeoque et series tota harum potentiarum $y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$ erit affirmativa seu nihilo maior et continuari poterit, donec ab $\dfrac{y}{y+1}$ minus differat quam aliqua quantitas data. Iam si idem fiat in singulis y, habebimus:

$$y \sqcap 1 \qquad \frac{y}{1+y} \qquad \overline{\sqcap} \; y - y^2 + y^3 - y^4 + y^5$$

$$y \sqcap 2 \qquad \frac{(y)}{1+(y)} \qquad \overline{\sqcap} \; (y) - (y)^2 + (y)^3 - (y)^4 + (y)^5$$

$$y \sqcap 3 \qquad \frac{((y))}{1+((y))} \qquad \overline{\sqcap} \; ((y)) - ((y))^2 + ((y))^3 - ((y))^4 + ((y))^5$$

etc. etc. etc. etc. etc. etc. etc.

$$y \sqcap 100 \; \frac{{}_{100}(y)_{100}}{1+{}_{100}(y)_{100}} \; \overline{\sqcap} \; {}_{100}(y)_{100} - {}_{100}(y)_{100}^{\;2} + {}_{100}(y)_{100}^{\;3} - {}_{100}(y)_{100}^{\;4} + {}_{100}(y)_{100}^{\;5}$$

Iam haberi potest nullo negotio, summa omnium y. seu 1.2.3. etc. ab 1 ad 100 et omnium y^2 seu 1.4.9. etc. ab 1 ad 100^2, et ita quoque cuborum etc. Cum ergo in singulis aequationibus eousque produci possint potentiae, ut sit error minor dato, poterit

---

8–12 *Am Rande:* $\sqcap$ maior. Et $\overline{\sqcap}$ est paulo maior.

2 f. $-y^6$ | $-y^7+y^8-y^9+y^{10}$ *ändert Hrsg.* | etc. *(1)* Iam quia numerum ipsarum y supponimus esse finitum, haberi potest in numeris $\int$ y | seu sum. omnium y *erg.* |, (et $\int y^2$ et $\int y^3$, et sum. y^4 etc. Unde sequitur, *(2)* Sed quoniam hoc modo subtrahenda addendis maiora, ideo aliter procedemus *(3)* Et *L* 3 maiora, *(1)* si *(2)* cum y sit integer, *(3)* si *L* 4 potentiarum *erg. L* 4 si *(1)* in affirma *(2)* subsistatur in po *(3)* appropinquatio *L* 7 Iam | si *streicht Hrsg.* | si *L* 13 seu … etc. *erg. L*

---

12 $\dfrac{{}_{100}(y)_{100}}{1+{}_{100}(y)_{100}}$: Die Symbole bedeuten die Anzahl der Klammern. Die Bezeichnungsweise ist nicht völlig in Übereinstimmung mit der linken Spalte. Um Konsequenz zu erzeugen, müßten entweder einfache Klammern bereits in Z. 8 oder 99 Klammern in Z. 12 stehen.

in singulis error tam fieri parvus, ut et in summa sit minor dato. Et ita habebitur summa $\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\text{etc.}+\frac{1}{100}$ quantitate quantumlibet verae propinqua.

Sed hic video erratum, quia enim y est integer, hinc tantum abest, ut continuando appropinquemus, ut contra quo longius continuamus, hoc longius absit error a vero. Huic malo elegans remedium inveni, ponendo $y \sqcap \frac{1.\,\text{vel}\,2.\,\text{vel}\,3.}{1000,000\,\text{etc.}}$ ita, ut id quod unitas erat, sit pars $\frac{1}{1000,000^{\text{ma}}}$, quantitatis alterius quae ipsam vicibus tot continet. Quod semper in problemate dato effici potest. Et ita postremae potestates negligi poterunt, et appropinquabimus pro libitu.

Habemus ergo viam exhibendi quantitatem, quae a summa reciprocorum arithmeticae progressionis differat minus quam quantitas data. Haec quantitas sit: $\frac{z\,\text{quantitas verae appropinquans}}{1000,000,000,000,000,000}$ seu $\frac{z}{\overline{1000}^6}$. Quia ivimus ad y^5. eritque z. integer. Iam idem $\sqsupset$ $\frac{\text{integris}\,\sqcap\,v}{1.2.3.\,\text{etc.}\,100.1000,000}$ erit $\frac{z}{\overline{1000}^6} \sqsupset \frac{v}{1.2.3.\,\text{etc.}\,100.\overline{1000}^2}$.

Error autem ponatur minor quam $\frac{1}{\overline{1000}^2}$, seu $v \sqsupset \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^4}+\frac{1}{\overline{1000}^2}$, seu si omnia rursus per $\overline{1000}^2$ multiplicata intelligamus, per quae ante diviseramus, $v \sqsupset \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$ et $v \sqsupset \frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$ $+1$.

Et numerus integer cadens inter hos duos ipsius v valores, (qui non nisi unus esse potest, quoniam non nisi unitate differunt) erit quaesitus. Is vero numerus statim reperie-

5 f. *Zusatz s. S. 729 Z. 22 – S. 730 Z. 15*

3 hic | rursus *gestr.* | video *L* 11 integer *(1)*, reductis *(2)*. Iam *L* 13 Error *(1)* ergo ponatur inventus minor quam 1, *(2)* autem *L* 15 f. $+1$. *(1)* Debet maximus numerus integer cadens inter hos duos, esse quaesitus *(2)* Et *L* 17 quaesitus. *(1)* Sed illud agitur *(2)* Is *L*

11–726,5 $\frac{z\,\text{quantitas verae appropinquans}}{1000,000,000,000,000,000}$ ... potest: vgl. N. 55 S. 732 Z. 7–9 tur fractionem quantumlicet ad integros reducendo. Quare res eo tandem redit tantum, ut inveniendus sit numerus maximus integer in $\frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$ contentus, eique addenda unitas; is enim maior quam $\frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}$, et minor quam $\frac{z.1.2.3.\,\text{etc.}\,100}{\overline{1000}^2}+1$. Satisfacit ergo, et solus, satisfacit, quia inter duas quantitates sola unitate differentes plus quam unus integer consistere non potest.

Adeoque infallibiliter habebimus exactam et veram progressionis harmonicae propositae finitae, summam.

Hoc iam inventum immensos pariter in geometria et arithmetica habere usus, paucis ostendam. Ac primo hinc dabitur summa omnium serierum, quae ex huius seriei terminis affirmatis negatisque componunturque, quales sunt plurimae, ut:

$\frac{1}{1}-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}$ etc. vel $1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. quarum prior exhibet quadraturam hyperbolae, posterior circuli. Et hinc iam reperta est via per quam solis numerorum additionibus, mira facilitate veniri poterit, ad appropinquationem, etiam si quis velit Ludolphina exactiorem. Idque admoneri operae pretium erit in mea *Quadratura arithmetica*. Iam $\frac{1}{1}-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-\frac{1}{11}$ etc. etiam sic poterunt exprimi, $\frac{2}{3}+\frac{2}{35}+\frac{2}{99}$ etc. sive: $\frac{2}{2^2-1}+\frac{2}{6^2-1}+\frac{2}{100^2-1}$ etc. quorum denominatores duplorum ab imparibus quadrata unitate minuta.

Si naturales y. erunt pares $2y$. impares, $2y{-}1$, eorum dupli, $4y{-}2$, et horum quadrata, $16y^2-16y\boxed{\begin{matrix}+4\\-1\end{matrix}}+3$. Ergo omnium $\frac{1}{16y^2-16y+3}$ haberi potest summa; videndum an non hoc modo datae cuiuslibet, $\frac{1}{b^2y+cy+d}$ haberi possit summa, verum quia iam scio, non posse hoc modo haberi summam huius $\frac{1}{y^2+2cy+c^2}$. Ideo ut hanc formam exclu-

4 differentes *(1)* una maior *(2)* plus *L* 16 f. imparibus *(1)* radices *(2)* quadrata *L*

14 Ludolphina: Ludolph van Ceulen, *Vanden Circkel*, 1596; seine beste Approximation überliefert W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, S. 55. 14 f. *Quadratura arithmetica*: vgl. *LQK*, Scholium zu prop. XXXII S. 80.

damus, ideo quaeramus tantum huiusmodi seriei summam $\dfrac{1}{z^2+d}$. Semper enim ad eam reduci potest formula, ubi si d extet, non potest comprehendi $y^2+2cy+c^2$. Sit ergo numerorum arithmeticae progressionis undecunque incipientium, forma, $fy+g$. sit differentia, e, erit terminus harmonicae progressionis, $\dfrac{1}{fy+g}$. et $\dfrac{1}{fy+g} - \dfrac{1}{\begin{matrix}fy+fe\\ +\ g\end{matrix}}$ debet aequari $\dfrac{h}{z^2+d}$ fiet: $\dfrac{\boxed{fy}+fe\boxed{+g}\boxed{-fy}\boxed{-g}}{\begin{matrix}f^2y^2+2fgy+g^2\\ +f^2e\ .\ +feg\end{matrix}}$ et $h \sqcap fe$. Potest autem h fieri qualem velimus, nec nos turbat. Porro $fy \sqcap z$. $2g+fe \sqcap 0$. seu $fe \sqcap -2g$. et $g^2\boxed{+feg} - 2g^2 \sqcap d$. sive $g \sqcap \sqrt{\ }-d$. Ponamus $-d \sqcap D$. erit $d \sqcap -D$. Ergo $g \sqcap \ddagger\sqrt{D}$. $e \sqcap \dfrac{\ddagger 2\sqrt{D}}{f}$ et $y \sqcap \dfrac{1}{f}z$. Ergo quaelibet fractio quadratica huius formae $\ddagger\dfrac{2\sqrt{D}}{z^2-D}$ exprimi poterit terminis progressionis harmonicae, huiusmodi: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{f}z+\sqrt{D}}$ sed alternatim affirmatis et negatis. Videamus iam si data sit forma: $\dfrac{1}{\dfrac{1}{f}x^2+bx+c}$. quae cum hac: $\dfrac{1}{z^2-D}$. comparari possit: Sit $z \sqcap x+l$. fiet $\dfrac{1}{f}z^2 - D \sqcap \dfrac{1}{f}x^2 + \dfrac{2l}{f}x + l^2 \atop -D$. ergo $\dfrac{l}{f} \sqcap \dfrac{b}{2}$ et $D \sqcap l^2-c$. et erit $f \sqcap \dfrac{2l}{b}$. Data ergo forma: $\dfrac{\ddagger 2\sqrt{l^2-c}}{\dfrac{b}{2l}x^2+bx+c}$. erit harmonica eius $\dfrac{1}{\begin{matrix}+\dfrac{b}{2l}x+\sqrt{l^2-c}\\ +\dfrac{b}{2}\end{matrix}}$. Eodem modo et formularum fracta-

3 sit *(1)* unitas ⊓ e *(2)* differentia *L* 9 erit ... g ⊓ $\ddagger\sqrt{}$D. *erg. L* 10 quaelibet *(1)* formul *(2)* fractio quadratica *(a)* reduci potest ad differentiam *(b)* huius *L* 10 poterit *(1)* differentia duarum *(a)* harmo *(b)* harmonicarum *(2)* terminis *L* 15 modo *(1)* formulae *(2)* fractionum cubicarum et quadraticarum *(3)* et *L*

rum ad cubum aut [quadratoquadratum] assurgentium haberi poterunt summae, vel eo magis, nimirum tres harmonicas addendo subtrahendoque a se invicem. Quin imo poterunt additiones misceri subtractionibus, item series addendae aut subtrahendae antea multiplicari. Videntur tamen haec irrelevantia, seu varietatem arbitrariarum non auctura. Sed verbo: Maxima varietas in eod fingi potest, ut faciamus:

$\dfrac{qy+b}{fy+g} \mp \dfrac{ry+c}{ly+m} (\mp) \dfrac{sy+d}{ny+p}$ etc. quot scilicet opus ad formulam conficiendam propositae similem, cuius summa quaeritur, dum scilicet omnes hae ad communem denominatorem reducuntur. Unde si formula sit $\dfrac{y^3+\alpha y^2+\beta y+\gamma}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$, poterit huiusmodi progressionis iniri summa: dum ostendetur summae trium praecedentium harmonicarum, vel ab harmonicis cognita quantitate differentium aequari.

Quanquam et singularum partium iniri possunt summae, ut separatim portio: $\dfrac{y^3}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$ quae rursus resolvi potest in has duas: $\dfrac{1}{\delta} - \dfrac{\frac{\varepsilon}{\delta}y^2+\frac{\theta}{\delta}y+\left[\frac{\lambda}{\delta}\right]}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$. Quam rursus dissolvamus in partes tres, secundum $y^2.y.\left[\frac{\lambda}{\delta}\right]$ et tribus residuis partibus prioris addamus, fient: $\dfrac{\begin{matrix} +\alpha\, y^2 + & \beta\, y + & \gamma \\ -\frac{\varepsilon}{\delta}\quad\cdot & -\frac{\theta}{\delta}\quad\cdot & -\left[\frac{\lambda}{\delta}\right] \end{matrix}}{\delta y^3 \text{ etc.}}$. Ex his rursus excerpendo: $\dfrac{\begin{matrix} +\alpha\, y^2 \\ +\frac{\varepsilon}{\delta}\quad\cdot \end{matrix}}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$. Singulorum separatim methodo eadem iniri possunt summae, sed satius arbitror sine divulsione priori methodo insisti. Interea hinc excipiendi casus $\dfrac{1}{y^2}$. et $\dfrac{1}{y^3}$. etc. qui hoc modo tractari non possunt, quia tunc $l^2-c \sqcap 0$. Huic rei duplex remedium circumspicio; primum, quod eodem modo cum quadratis, cubis aliisque formis agi potest, quo ab initio paginae praecedentis, cum ipsis harmonicis egimus. Et hoc est remedium generale omnium

1 quadratoquadratoquadratum *L ändert Hrsg.* 3 subtractionibus *(1)* (videtur tamen haec inev *(2)*, item *L* 12 $\dfrac{y^3}{\delta y^3+\varepsilon y^2+\theta y+\lambda}$ *(1)* | fiet: *streicht Hrsg.* | $\sqcap \dfrac{1}{\delta}$, *(2)* quae *L* 12 λ *L ändert Hrsg.* 13 $y^2.y.$ | λ *ändert Hrsg.* | *(1)* numeratoris, et *(2)* et *L* 15 λ *L ändert Hrsg.*

19 f. ab ... praecedentis: s. o. S. 723 Z. 5

formularum; alterum est, ut sumamus formulas illas quarum tam finitarum quam infinitarum per regulas aliunde notas datur summa, nempe $\frac{1}{y \frown y+1}$ et $\frac{1}{y \frown y+1 \frown y+2}$ et $\frac{1}{y \frown y+b \frown y+2b \frown y+3b}$ aliaeque tales nempe quarum nominatores sunt numeri combinatorii; imo una cum integris y. vel y^2. y^3. etc. in unum, aut ad harmonicas addantur; ita enim ex additione tot serierum, quarum singularum habetur summa, poterit credo cuilibet formulae rationi fractae vel ex integris fractisque utcunque mixtae, similis exhiberi. Imo quoniam numeri triangulares aliique figurati sive combinatorii sunt differentiae harmonicorum; poterunt et investigari differentiae quadratorum vel cuborum etc. ab harmonicis, unde novae formae facile summabiles. Ope ergo harmonicorum, quos arithmetice summa⟨mus⟩ et aliorum quales triangulares et pyramidales etc. quos summamus analytice, additis si opus integris, non dubito formulas alias omnes excitari posse. Unde illud commodum habebimus, ut calculatis semel per tabulam harmonicorum summis, omnes aliae summae perfacile inveniantur per traditam tabulam analyticam, quae generaliter usum tabulae harmonicae in caeteris ostendat. Tabula harmonica, si condenda sit, hoc fieri posset per logarithmos; dum scilicet omnes multiplicationes tot numerorum, quibus opus in harmonicis, ope logarithmorum contraherentur facilius ope ingentis instrumenti in quo descripta hyperbola. Omnium optime si regulam analyticam adhuc inveniam pro summis harmonicorum. Caeterum et aliae ⟨— —⟩ demonstrationes huc resumendae, quibus videbar probare, ex datis harmonicis inveniri posse summam quadratorum finitorum ⟨— —⟩

[*Zusatz zu S.* 725 *Z. 5f.*]

Corrigendum hic aliquid scilicet quia y est fractio, ut $\frac{x}{1000}$, hinc $\frac{y}{1+y}$ foret $\frac{x}{1000+x}$ etc. Rectius ergo sic: Sumamus $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ etc. faciamus: $\frac{1000}{1000-0}$ $\frac{1000}{1000-1}$ $\frac{1000}{1000-2}$ et con-

3 tales *(1)* infinitum; una cum inte *(2)* nempe *(a)* combi *(b)* quarum *L* 23 $\frac{1}{3}$ etc. *(1)* | multiplicemus *streicht Hrsg.* | super et infra per 1000, fiet $\frac{1000}{1000+0}$ $\frac{1000}{}$ *(2)* faciamus *L*

22–730,15 Corrigendum . . . quaeritur: vgl. N. 55 S. 731 Z. 18 – S. 732 Z. 6.

tinuando usque ad $\dfrac{1000}{1000-1000\sqcap 0}$ sive fient $\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{1000}}$ $\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{1000}}$ etc. usque ad $\dfrac{1}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ id est $\dfrac{1000}{1000}$ $\dfrac{1000}{999}$ $\dfrac{1000}{998}$ etc. usque ad $\dfrac{1000}{1}$. Quam progressionem facere possumus ex ordinaria: $\dfrac{1}{1000}$ $\dfrac{1}{999}$ $\dfrac{1}{998}$ etc. per ⟨1000⟩ multiplicata. Et ita ex data hac et ordinariae summam habebimus. Et ob $1-\dfrac{1}{1000}$ potentiae dividendo non alternis addentur et subtrahentur, sed semper addentur. Si ergo addendi sint termini 144 verbi gratia, tunc loco 1000 adhibendi 144. Possemus tamen semper ⟨per⟩ 1000, et similes procedere, hoc modo. Volumus summam inire huius seriei $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ etc. $\dfrac{1}{144}$. Fingamus nos inire velle usque ad $\dfrac{1}{1000}$ et incipiendo a $\dfrac{1000}{1-\dfrac{x}{1000}}$ etc. seu $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ $\dfrac{1000}{1-\dfrac{2}{1000}}$ progrediamur usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{856}{1000}}$ et ineamus summam, deinde procedamus etiam alio calculo ab $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ et unam summam ab altera subtrahendo habebimus summam horum, $\dfrac{1000}{144}$ $\dfrac{1000}{143}$ etc. $\dfrac{1000}{1}$ quae quaerebatur. Pulcherrimum est specimen, et forte in aliis utile futurum reducendi calculum alioqui difficillimum, ob numeros multiplicandos, ad decimalem. Et hoc usui haberemus, quod una pars calculi, nempe incipiendo ab $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1}{1000}}$ usque ad $\dfrac{1000}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ serviet pro exemplis omnibus; et altera tantum variaretur, pro omnibus inquam exemplis, quando non amplius quam 1000 terminorum summa quaeritur.

1 f. $\dfrac{1}{1-\dfrac{1000}{1000}}$ *(1)* sive dividendo *(2)* id *L* 12 reducendi *(1)* | rem *streicht Hrsg.* | al *(2)* calculum *L*

55. PROGRESSIONIS HARMONICAE PROPRIETAS
[Am oder kurz nach dem 8.] Februar 1676

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 253. Ca. 3/4 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 253 r°. Überschrift und Datum ergänzt. Datum links neben Z. 21 wiederholt. Am unteren Rand und auf der Rückseite Aufzeichnungen anderen Inhalts (Druck in einem späteren Band der Reihe). Ursprünglich bildete LH 35 II 1 Bl. 253 mit LH 35 XIII 1 Bl. 391 (*Tangentium calculus*, Cc 2, Nr. 00, Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2°; der Text S. 733 Z. 18 wurde beim Zerschneiden des Blattes teilweise abgetrennt.
Cc 2, Nr. 1334 tlw.

Datierungsgründe: Die Gesprächsaufzeichnung bezieht sich mehrfach auf das auf den 8. Februar 1676 datierte Stück N. 54.

[*Leibniz*]

Progressionis harmonicae proprietas et arithmeticae summa naturali via demonstrata accomodabilis et ad alias summas.
Febr. 1676

$$\frac{100}{1-y} \qquad y \sqcap \frac{1}{100}$$

$$\frac{\cancel{100}}{1-\frac{0}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\frac{1}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\frac{2}{100}} + \frac{\cancel{100}}{1-\frac{3}{100}}$$

$$\frac{\cancel{100}}{100-0} \qquad \frac{\cancel{100}}{100-1} \qquad \frac{\cancel{100}}{100-2} \qquad \frac{\cancel{100}}{100-3} \qquad \text{etc.} \qquad \frac{\cancel{100}}{100-99}$$

$$\frac{100}{100} \qquad \frac{100}{99} \qquad \frac{100}{98} \qquad \frac{100}{97} \qquad \text{etc.} \qquad \frac{100}{1}$$

$$\frac{1}{1-\frac{1}{100}} \sqcap 1 + \frac{1}{100} + \frac{1}{100^2} + \frac{1}{100^3} + \frac{1}{100^4} \text{ etc.}$$

18–732,6 Vgl. N. 54 S. 729 Z. 22 – S. 730 Z. 15.

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dfrac{1}{1-\dfrac{2}{100}} & \sqcap & 1 & + & \dfrac{2}{100} & + & \dfrac{4}{100^2} & + & \dfrac{8}{100^3} & \bullet \\
\dfrac{1}{1-\dfrac{3}{100}} & & 1 & & \dfrac{3}{100} & & \dfrac{9}{100^2} & & \dfrac{27}{100^3} & \bullet \\
\hline
\text{etc.} & & \bullet & & \bullet & & \text{etc.} & & \bullet & \bullet
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\dfrac{100}{99} & \dfrac{100}{99}+1 & 1+\dfrac{1}{99} & \dfrac{1}{100^5}+\dfrac{1}{100^7}+\dfrac{1}{100^9} \\
1+\dfrac{1}{99} & 2+\dfrac{1}{99} & 2 & \\
 & & 2+\dfrac{1}{99} &
\end{array}$$

$$v \;\overline{\sqcap}\; \frac{zc}{100^5}\,. \qquad v \;\overline{\sqcap}\; \frac{zc}{100^5}+1.$$

$$\frac{v}{c} \sqcap \frac{z}{100^5} + e. \qquad \frac{v}{c} \;\overline{\sqcap}\; \frac{z}{100^5}.\ \text{Ergo}\ \frac{v100^5}{c100^5} \;\overline{\sqcap}\; \frac{zc}{c100^5}.$$

$$\frac{v}{c} \;\overline{\sqcap}\; \frac{z}{100^5}+1. \qquad \frac{v100^5}{c100^5}\,[\overline{\sqcap}]\,\frac{zc}{c100^5}+1.$$

[*Tschirnhaus mit Ergänzungen von Leibniz*]

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}+\frac{1}{e}$$

9 $\overline{\sqcap}$ *L ändert Hrsg.*

7–9 Vgl. N. 54 S. 725 Z. 11 – S. 726 Z. 5. — Die Bedeutung des Symbols $\overline{\sqcap}$ erklärt Leibniz S. 724 Z. 16, entsprechend steht $\overline{\sqcap}$ für „ein wenig kleiner“.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 1 & & & & \\ & & & \frac{1}{a} & + & \frac{1}{b} & & & \\ & & \frac{1}{1a} & + & \frac{2}{1a+(1)c} & + & \frac{1}{(1)c} & & \\ & \frac{1}{1a} & + & \frac{3}{2a+(1)d} & + & \frac{3}{1a+(2)d} & + & \frac{1}{(1)d} & \\ \frac{1}{1a} & + & \frac{4}{3a+(1)e} & + & \frac{6}{3a+(3)e} & + & \frac{4}{1a+(3)e} & + & \frac{1}{(1)e} \end{array}
\qquad
\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$

Pulcherrima progressio numerorum progressionis harmonicae.

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 4 \\ x & x+y & x+2y & \end{array}$$

$x \quad x+y \quad x+2y$ sed sic naturalius

$$\begin{array}{cccccc} \frac{a+[c]}{1} & a+b & & & & \\ \frac{2a \mid a+c \mid 2c}{2} & 2a+2b & \frac{3a+3c}{2} & & & \frac{3}{2} \\ \frac{3a \mid 2a+c \mid a+2c \mid 3c}{3} & 3a+3b & & & & \\ \frac{4a \mid 3a+c \mid 2a+2c \mid a+3c \mid 4c}{4} & 4a+4b & \frac{10a+10c}{4} & & \frac{5a+5c}{2} & \frac{5}{2} \end{array}$$

Modus progressionis arithmeticae exprimendae utilis ad inveniendas summas, et ideo naturalis, sic utraque litera adhibita eodem modo componitur.

Isoliert: $\frac{2ac}{a+c}$ *Am Rande, quer:* $\frac{0}{1}$

[*Leibniz, am unteren Rand und auf LH 35 XIII 1 Bl. 391 r°*]

$$\frac{1}{y^2} \quad \frac{1}{1,-2y+y^2}$$

1 f. *Obere zwei Zeilen des linken Schemas erg. L* 6 Pulcherrima . . . harmonicae. *erg. L* 9 sed . . . naturalius *erg. L* 10 b *T ändert Hrsg.* 14 f. Modus . . . componitur *erg. L*

16 $\frac{2ac}{a+c}$: vgl. N. 54 S. 716 Z. 6 f.

56. EXPRESSIO QUANTITATIS PER SERIEM
[Ende April 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. 1/4 S. auf Bl. 10 r° oben. Auf dem Rest des Bogens N. 57_2.
Cc 2, Nr. 1399

Datierungsgründe: N. 56 ist vor dem auf Ende April datierten N. 57_2 geschrieben und dürfte unmittelbar vorher entstanden sein. Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Monate April bis Juli 1676 belegt.

Omnis quantitas exprimi potest hoc modo: $by^z + cy^\omega + dy^v$ etc. si opus est in infinitum. Ergo et curvae cuiuslibet ordinata eodem modo potest exprimi. Ergo summa omnium ordinatarum secundum omnes y. erit: $\dfrac{by^{z+1}}{z+1} + \dfrac{cy^{\omega+1}}{\omega+1} + \dfrac{dy^{v+1}}{v+1}$ etc. Si vero ordinata fuisset: $by^{z+\varphi} + cy^{\omega+\varphi} + dy^{v+\varphi}$ fuisset summa $\dfrac{by^{z+\varphi+1}}{z+\varphi+1} + \dfrac{cy^{\omega+\varphi+1}}{\omega+\varphi+1} + \dfrac{dy^{v+\varphi+1}}{v+\varphi+1}$. Ponamus iam potentias ipsarum y esse progressionis arithmeticae, ut $by^z \quad cy^{z+\omega} \quad dy^{z+2\omega}$ etc. erit summa: $\dfrac{by^{z+1}}{z+1} + \dfrac{cy^{z+\omega+1}}{z+\omega+1} + \dfrac{dy^{z+2\omega+1}}{z+2\omega+1}$. Si fuisset $by^{z+\varphi} + cy^{z+\omega+\varphi} + dy^{z+2\omega+\varphi}$ foret summa: $\dfrac{by^{z+\varphi+1}}{z+\varphi+1} + \dfrac{cy^{z+\omega+\varphi+1}}{z+\omega+\varphi+1} + \dfrac{dy^{z+2\omega+\varphi+1}}{z+2\omega+\varphi+1}$ sed difficile erit eruere rationem harum summarum, tametsi hoc unum forte generale dici possit, quod reductis omnibus ad communem denominatorem, si z et ω sint numeri integri, necesse est, nominatores, quippe factos numerorum progressionis arithmeticae habere quandam mensuram communem. Nisi forte in continua tantum, 7.9.11. non possunt dividi per 1.3.5. ergo necesse est esse continuos vel continuorum multiplos.

10 et *(1)* aequationis *(2)* curvae *L* 18 progressionis *(1)* geometricae *(2)* arithmeticae *L*

57. DE PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA

Die beiden Teilstücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang mit den Exzerpten aus Pietro Mengolis *Circolo*, 1672, die Leibniz vermutlich vor dem auf Ende April 1676 datierten Stück N. 57_2 angefertigt hat. Der erste Teil der Exzerpte (Cc 2, Nr. 1383 A) ist bisher nicht aufgefunden; erhalten sind der zweite Teil (Cc 2, Nr. 1383 B) und eine Beilage (Cc 2, Nr. 1384, Druck in einem späteren Band der Reihe). Die Notiz N. 57_1 verweist darauf, daß N. 57_2 bei den Exzerpten abgelegt war; sie ist auf Papier aus Hannoverscher Zeit geschrieben und möglicherweise anläßlich einer erneuten Auseinandersetzung mit dem Thema in *De cyclometria per interpolatione*, LH 35 II 1 Bl. 68–73, datiert 26. März 1679 (Druck in einem späteren Band der Reihe), entstanden.

57_1. PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA
[Ende 1676 – Ende März 1679]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 73. 1 Streifen ca 5,4 x 10,9 cm. Unten Rißkante. 15 Zeilen auf B. 73 r°. Bl. 73 v° leer.
Cc 2, Nr. 1403

Datierungsgründe: s. o. Z. 6–9.

Progressionis harmonicae summa

Hanc, vide inventam a me primum et ascriptam sub finem schediasmatis in fol. cui titulus: *Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adiecta.* Aprilis. 1676.

Hoc schediasma collocavi apud *Excerpta ex Mengoli Circulo*.

---

17 sub finem schediasmatis: s. u. N. 57_2 S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12. 20 *Excerpta ex Mengoli Circulo*: s. o. Z. 2–5.

57_2. ARITHMETICA INFINITORUM ET INTERPOLATIONUM
Ende April 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 9–10. Ca 3 S. Obere Hälfte von Bl. 9 r° u. unteres Viertel von Bl. 10 v° leer. Auf dem Rest des Bogens N. 56.
Cc 2, Nr. 1398, 1400, 1401

(Fine April. 1676)

Arithmetica infinitorum et interpolationum figuris applicata et summa harmonicorum sub finem adiecta

$$\begin{array}{ccccc|ccccc}
 & & & & t & & & & & \\
 & & & a & & r & & & & \\
 & & a^2 & & ar & & r^2 & & & \\
 & a^3 & & a^2r & & ar^2 & & r^3 & & \\
a^4 & & a^3r & & a^2r^2 & & ar^3 & & r^4 & \\
a^5 & a^4r & a^3r^2 & & & a^2r^3 & ar^4 & r^5 & &
\end{array}$$

tab. I

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{2} & & & & \\
 & & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{3} & & & \\
 & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{4} & & \\
 & \frac{1}{5} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{5} & \\
\frac{1}{6} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{60} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{6}
\end{array}$$

tab. II

---

15 *Zu* tab. I:
NB.
Nota pro ar. posset sumi $\frac{a}{r}$ item pro $r \sqcap 1 - a$. sumi potest $a - 1$. item pro $\sqrt{}$. sumi potest $\sqrt[3]{}$. $\sqrt[4]{}$. etc. denique praecedentium omnium reciprocae.

---

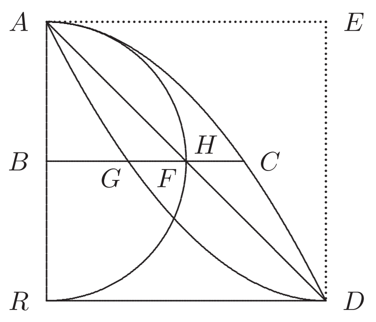
8 sub finem: S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12. 15 tab. I: vgl. P. MENGOLI, *Circolo*, 1672, § 10–15 S. 4–6 und die Quarta Tauola Triangolare S. 7; tab. II: *a. a. O.* § 9 S. 4.

1					
2	2				
3	6	3			
4	12	12	4		
5	20	30	20	5	
6	30	60	60	30	6

tab. III

1								
1	1							
1	2	1						
1	3	3	1					
1	4	6	4	1				
1	5	10	10	5	1			
1	6	15	20	15	6	1		
1	7	21	35	35	21	7	1	
1	8	28	56	70	56	28	8	1

tab. IV



[*Fig. 1*]

Sit trilineum $ARDCA$ duabus rectis $AR.\,RD$. et curva ACD. inclusum. Recta AR tota sit $\underline{t}$. Abscissa AB sit $\underline{a}$. Residua BR sit $\underline{r}$. Ordinata BC sit $\underline{y}$.

Si ponamus iam esse $y \sqcap t$. ut si pro figura $ARDCA$ erit quadratum $ARDE$. Si y sit $\sqcap$ a vel r, seu si ordinata BF sit $\sqcap$ AB. pro figura $ARDCA$, erit triangulum semiquadratum ARD. Sin $y \sqcap \dfrac{a^2}{t}$. vel posita $t \sqcap 1$. si $y \sqcap a^2 \sqcap BG$. pro figura $ARDCA$, erit $ARDGA$ trilineum parabolicum, et ita de caeteris altioribus, ut si y sit a^3, vel a^4. Si vero sit $y \sqcap ar$. seu si ordinatae BH sint ut rectangula ABR. erit figura $ARHA$ proportionalis elementis hemisphaerii atque ita omnes termini tabulae I. ordine per figuras poterunt exhiberi, quarum ordinatas exprimant.

16 ARDE. *(1)* et ACD linea, *(2)* Si *L* 23 proportionalis *(1)* plan *(2)* elementis *(a)* sphaerae *(b)* hemisphaerii *L*

7 tab. III: *a. a. O.* § 8 S. 3 f.; tab. IV: *a. a. O.* § 7 S. 3. 12 Recta *AR* . . . sit: *a. a. O.* § 10 f. S. 4 f.

Porro quoniam harum figurarum omnium quarum ordinatae tab. I. exhibentur, datae sunt quadraturae (sunt enim omnes ex genere paraboloeidum, quippe rationales integrae) ideo areas figurarum completarum seu summas omnium ordinatarum ab A. ad R. expressimus tab. II. Nempe omnes a. seu area ARD. est $\frac{1}{2}$ quadrati $ARDE$. Omnes a^2, seu area $ARDGA$, est $\frac{1}{3}$ eiusdem; et ita de caeteris.

Si iam fractiones hae invertendo in integros transmutentur fiet tabula III. quam patet factam ex tab. IV. numerorum combinatoriorum, serie parallela quavis in seriei numerum multiplicata, nam $1, \frown 1 \sqcap 1$. $1, \frown 2$ $1, \frown 2 \sqcap 2.2.$ $1.2.1. \frown 3 \sqcap 3.6.3.$ etc.

Quoniam vero hoc modo reperiuntur tantum areae figurarum eiusmodi completarum; videndum est an non eodem modo et portiones quaelibet mensurari possint. Exempli causa: $BH \sqcap y \sqcap ar$. Est $r \sqcap t - a$. Ergo $y \sqcap at - a^2$ seu posita $t \sqcap 1$ erit $y \sqcap a - a^2$. Ergo $\overline{\text{summ}\, y} \sqcap \frac{a^2}{2} - \frac{a^3}{3} \sqcap \frac{3a^2 - 2a^3}{6} \sqcap a^2, \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$. Eodem modo si sit $y \sqcap a^2 r$: fiet $y \sqcap a^2 - a^3$. et $\overline{\text{sum}\, y} \sqcap \frac{a^3}{3} - \frac{a^4}{4} \sqcap \frac{4a^3 - 3a^4}{12}$. Unde brevius: $\int \overline{ar} \sqcap \frac{1}{2}a^2 r + \frac{1}{6}a^3 \sqcap \frac{1}{3}a^2 r + \frac{1}{6}a^2$. Et similiter: $\int \overline{a^2 r} \sqcap \frac{1}{3}a^3 r + \frac{1}{12}a^4 \sqcap \frac{1}{4}a^3 r + \frac{1}{12}a^3$. Eodem modo $\int \overline{a^2 r} \sqcap \frac{1}{5}a^4 r + \frac{1}{20}a^4$. Quaeramus et $a^3 r^2$. fiet $\sqcap a^3, 1 - 2a + a^2 \sqcap a^3 - 2a^4 + a^5$. et $\int \overline{a^3 r^2} \sqcap \frac{a^4}{4} - \frac{2a^5}{5} + \frac{a^6}{6} \sqcap [a^4], \frac{1}{4} + \frac{2a}{5} + \frac{1a^2}{6} \sqcap \frac{1, 30,, -2, 24a + 20a^2}{4, 5, 6}[a^4]$. Unde patet regula generalis, nempe[:] Ad habendam summam figurae, cuius ordinata sit verbi gratia, $a^3 r^2$. termini combinatorii valoris ipsius r^2. suis affecti potestatibus, ut $1. - 2a.\ 1a^2$. ducantur ordine in harmonicos, seu fractiones unitatem pro numeratore, arithmeticos continuos pro [denominatoribus] habentes; ita ut maximus denominator, sit [6.] (hoc loco), [unitate differat ab] exponentium potestatum a, et r. summa. Notandum

---

21–739,4 *Zusatz s. S. 746 Z. 3–8*

3 areas *(1)* integrarum *(2)* figurarum *L* 8 f. etc. *(1)* Quoniam ergo ad hunc velut fontem pervenimus, iam ad tab. I. redeamus *(a)*, in qua *(b)*. Eam vero deficientem esse patet et posse suppleri. Exempli causa si detur figura, cuius ordinatae sint $\sqrt{}$a. $\sqrt{}$a^3. etc. *(2)* Quoniam *L* 16 a^3 *L ändert Hrsg. zweimal* 19 ordine *erg. L* 20 numeratoribus *L ändert Hrsg.* 20 f. denominator, *(1)* unitate differat a *(2)* sit | 5. *ändert Hrsg.* | (hoc loco), | unitate ... ab *erg. Hrsg.* | exponentium *L*

autem est, si ponatur ultima $a \sqcap t \sqcap 1$. seu si de figurae completae summa agatur, tunc reductis omnibus fractionibus ad communem denominatorem semper fieri posse ut fractio non habeat nisi unitatem pro [numeratore], vel ideo quia in tabula II. id semper evenit: adeoque quoniam id semper evenire necesse est quomodocunque coniungantur, hinc poterimus ducere problema sane memorabile: scilicet si sint numeri combinatorii quicunque alternatim affirmati et negati ut $1 \mid -3 \mid +3 \mid -1$. et ducantur in totidem fractiones harmonicas simplices continuas, ut $\frac{1}{4}. \frac{1}{5}. \frac{1}{6}. \frac{1}{7}$ ut fiat $\frac{1}{4} - \frac{3}{5} + \frac{3}{6} - \frac{1}{7}$, reducta fractio ad communem denominatorem semper deprimi potest ut numeratorem habeat unitatem[:] $5, 6, 7 - 3, 4, 6, 7 + 3, 4, 5, 7 - 4, 5, 6$. Et pro integris $210 - 504 + 420 - 120 \sqcap 6$. Hoc poterit condi theorema memorabile, si in seriem plenam numerorum combinatoriorum, (ut 1. 11. 121. 1331. etc.) ducantur totidem numeri harmonici; alterutris alternatim affirmatis et negatis, factus erit productum totidem, uno minus, numerorum ordine deinceps ab unitate sumtorum, ut $1 \mid -2 \mid +1$ in $30 \mid 24 \mid 20$. dat $2 \sqcap 1, 2$. $1 \mid -3 \mid +3 \mid -1$ in $210 \mid [168] \mid [140] \mid 120$. dat $6 \sqcap 1, 2, 3$.

Unde mirabilis etiam ducetur aequatio. Nempe: Si in seriem plenam numerorum combinatoriorum alternatim affirmatam et negatam, ducantur totidem harmonici quicunque, semper proveniet idem.

9–14 *Nebenrechnungen:*

210	42	28 }	$\sqcap$	14	30	24 20
	$\underline{12}$	15 }		$\underline{30}$	20	
	84			420		
	$\underline{42}$			$\underline{210}$		
	504			630		
				$-\ \underline{624}$		
				6		

9–740,13 *Zusatz s. S. 746 Z. 10 – S. 748 Z. 12*

3 denominatore *L ändert Hrsg.* 6 alternatim ... negati *erg. L* 8 semper *(1)* reduci *(2)* deprimi *L* 10 memorabile, *(1)* si numeri progressionis harmonicae, ducantur in seriem *(2)* si in seriem | plenam *erg.* | numerorum *L* 14 504 *L ändert Hrsg.* 14 420 *L ändert Hrsg.*

Et porro si series plena numerorum combinatoriorum, alternatim affirmatorum et negatorum in totidem differentias numerorum harmonicorum continuorum ordine sibi detractorum ducatur, factum aequabitur nihilo: ut si sumatur: $1 \mid -2 \mid 1$. ducaturque in

$$\left.\begin{array}{ccc} -2,3 & -1,3 & -1,2 \\ \underline{+5,6} & \underline{+4,6} & \underline{+4,5} \\ 24 & 21 & 18 \end{array}\right\} \sqcap 24.21.18. \quad \text{Nam} \quad \left.\begin{array}{ccc} +24 & +21 & +18 \\ \underline{\quad 1} & \underline{-\ 2} & \underline{\quad 1} \\ 24 & -42 & 18 \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Hinc aequatio duas habens radices aequales per hos numeros, ut 24. 21. 18 multiplicata manet aequatio. Unde conicio hos productos differentiarum respondentium harmonicorum semper dare numeros progressionis arithmeticae. Et vicissim credibile est differentias eiusmodi quatuor harmonicorum, semper dare numeros triangulares. Ratio quia arithmetici in $1-2+1$ ducti faciunt 0. et triangulares in $1-3+3-1$ ducti faciunt 0. Quod inventum denique conducere videbitur ad harmonicorum ineundas summas, quo posito spes est etiam ad quadratorum summas aliqua arte posse veniri.

Sed nunc ad figurarum incompletarum seu portionum summas redeamus: Scilicet $\int \overline{a^3r^2} \sqcap \dfrac{1,30-2,24a+1,20a^2}{4,5,6}[a^4]$ sive

$$1,\frac{5,6-2,4,5}{4,5,6},,-2a\frac{4,6-4,5}{4,5,6},,+\frac{4,5}{4,5,6}r^2,,,[a^4].$$

Sed videtur reductio ad r esse inutilis, et sufficere, ut exprimamus per a. Tabulam ergo summarum ordinatarum tabulae I. seu arearum pro figuris incompletis pariter et completis condemus hanc:

2 differentias *(1)* nu *(2)* serier *(3)* numerorum *(a)* combinatoriorum *(b)* harmonicorum *L*
8 f. productos *(1)* harmonicorum in *(2)* differentiarum *(a)* divers *(b)* respondentium harmonicorum | in $+1-2+1$ ductos *gestr.* | semper *L* 10 eiusmodi *(1)* in $1\ -3\ +3\ -1$ dare numeros *(2)* quatuor *L*
14 ad *(1)* nostrum *(2)* nostras su *(3)* figurarum *L* 15 f. a^3 *L ändert Hrsg. zweimal*

					$\frac{a}{1}$
				$\frac{a^2}{2}$	
			$\frac{a^3}{3}$		$a^2, \frac{1}{2} - \frac{a}{3}$
		$\frac{a^4}{4}$		$a^3, \frac{1}{3} - \frac{a}{4}$	
	$\frac{a^5}{5}$		$a^4, \frac{1}{4} - \frac{a}{5}$		$a^3, \frac{1}{3} - \frac{2a}{4} + \frac{a^2}{5}$
$\frac{a^6}{6}$		$a^5, \frac{1}{5} - \frac{a}{6}$		$a^4, \frac{1}{4} - \frac{2a}{5} + \frac{a^2}{6}$	

tab. V.

					1
				a	
			a^2		$a, 1 - a$
		a^3		$a^2, 1 - a$	
	a^4		$a^3, 1 - a$		$a^2, 1 - 2a + a^2$
a^5		$a^4, 1 - a$		$a^3, 1 - 2a + a^2$	

tab. VI.

Nempe ex tabulae I. parte sinistra per lineam perpendicularem resecta, (omissa dextra, quae tantum repetitio foret sinistrae, quia quod de r, idem dici potest de a, et contra) facio tabulam VI. pro t ponendo 1, et pro r. ponendo eius valorem, $(t - a$, vel) $1 - a$. et tabula V. areas figurarum tabulae VI, completarum pariter et incompletarum ordine exhibebit.

Porro hactenus earum tantum figurarum tab. I. et VI. areas tab. II. et V. exhibuimus quae sunt rationales. Quoniam vero et irrationales plurimae ipsis affines sunt notae, eas quoque in unam cum his tabulam redigamus.

21 quae *(1)* sumtae *(2)* sunt *L*

$$\begin{array}{ccccccc}
\sqrt{1} \\
\sqrt{a} & \sqrt{r} \\
\sqrt{a^2} & \sqrt{ar} & \sqrt{r^2} \\
\sqrt{a^3} & \sqrt{a^2r} & \sqrt{ar^2} & \sqrt{r^3} \\
\sqrt{a^4} & \sqrt{a^3r} & \sqrt{a^2r^2} & \sqrt{ar^3} & \sqrt{r^4} \\
\sqrt{a^5} & \sqrt{a^4r} & \sqrt{a^3r^2} & \sqrt{a^2r^3} & \sqrt{ar^4} & \sqrt{r^5} \\
\sqrt{a^6} & \sqrt{a^5r} & \sqrt{a^4r^2} & \sqrt{a^3r^3} & \sqrt{a^2r^4} & \sqrt{ar^5} & \sqrt{r^6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{|ccccccc}
\frac{2}{2} \\
* & * \\
\frac{2}{4} & * & \frac{2}{4} \\
* & * & * & * \\
\frac{2}{6} & * & \frac{2}{12} & * & \frac{2}{6} \\
* & * & * & * & * & * \\
\frac{2}{8} & * & \frac{2}{24} & * & \frac{2}{24} & * & \frac{2}{8}
\end{array}$$

tab. VII. tab. VIII.

Tabula ergo I. interpolata habebimus tab. VII.: Cuius tabulae VII. termini extrahibiles reddunt tabulam I. Eodem modo tantum tabulae VI. terminis praefigi posset $\sqrt{\ }$. Huic tabulae VII. e regione ponamus tabulam VIII. quae areas figurarum completarum tabulae VII. contineat quae ex tab. II. iam habentur reliquis vacuis relictis: Cuius tabulae loca repleta coincidunt cum locis sive terminis tabulae II. Loca vero vacua ut suppleantur facilius operae pretium erit, quemadmodum tabula II. habet fontem, tabulam IV, ita tabulam VIII. reduci ad fontem, nempe tabulam IX, quae respondeat tabulae IV. ut tabula VIII. ipsi tabulae II. Quod ut fiat facilius, consideranda est ipsorum terminorum tabulae IV. origo. Constat autem aliunde numeros combinatorios fieri, hoc modo, nempe: Si consideres in ea series obliquas, erit prima $\frac{1}{1}\ \frac{1}{1}\ \frac{1}{1}$ etc. secunda vero $\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}\ \frac{3}{1}\ \frac{4}{1}$ tertia $\frac{1,2}{1,2}\ \frac{2,3}{1,2}\ \frac{3,4}{1,2}\ \frac{4,5}{1,2}$ etc. [quarta] $\frac{1,2,3}{1,2,3}\ \frac{2,3,4}{1,2,3}\ \frac{3,4,5}{1,2,3}\ \frac{4,5,6}{1,2,3}$ etc. Unde omnibus duplicatis ita stabit[:]

13 loca *(1)* notata *(2)* repleta *L* 17 f. nempe: *(1)* 1. 1. ex $\frac{1,1}{1}\ \frac{1,1}{1}$ | 1. 2. 1. *(2)* Si 18 $\frac{1}{1}\ \frac{2}{1}$ ... tertia *erg. L* 19 tertia *L ändert Hrsg.*

8 tab. VII: *a. a. O.* § 16 u. die Quinta Tauola Triangolare S. 6–8; tab. VIII: *a. a. O.* § 18 S. 8.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & & & & & & \frac{2}{2} & & & & & & \\
 & & & & & * & & * & & & & & \\
 & & & & \frac{2}{2} & & * & & \frac{2}{2} & & & & \\
 & & & * & & * & & * & & * & & & \\
 & & \frac{2,4}{2,4} & & * & & \frac{4}{2} & & * & & \frac{2}{2} & & \\
 & * & & * & & * & & * & & * & & * & \\
\frac{2,4,6}{2,4,6} & & * & & \frac{4,6}{2,4} & & * & & \frac{6}{2} & & * & & \frac{2}{2}
\end{array}$$

tab. IX.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{2}{2} & & & & & & & \\
 & & & & & & 1 & \Big| & 1 & & & & & & \\
 & & & & & \frac{2}{2} & \Big| & * & \Big| & \frac{2}{2} & & & & & \\
 & & & & 1 & \Big| & \frac{3}{2} & \Big| & \frac{3}{2} & \Big| & 1 & & & & \\
 & & & \frac{2,4}{2,4} & \Big| & * & \Big| & \frac{4}{2} & \Big| & * & \Big| & \frac{2}{2}\left(\frac{2,4}{2,4}\right) & & & \\
 & & 1 & \Big| & \frac{3,5}{2,4} & \Big| & \frac{5}{2} & \Big| & \frac{5}{2} & \Big| & \frac{3,5}{2,4} & \Big| & 1 & & \\
 & \frac{2,4,6}{2,4,6} & \Big| & * & \Big| & \frac{4,6}{2,4}\left(\frac{6}{2}\right) & \Big| & * & \Big| & \frac{4,6}{2,4}\left(\frac{6}{2}\right) & \Big| & * & \Big| & \frac{2}{2} & \\
1 & & \frac{3,5,7}{2,4,6} & & \frac{7}{2} & & \frac{5,7}{2,4} & & \frac{5,7}{2,4} & & \frac{7}{2} & & \frac{3,5,7}{2,4,6} & & 1
\end{array}$$

tab. X.

Cuius tabulae IX. loca plena coincidunt cum locis tabulae IV. eoque modo expressa sunt, ut appareat interpolandi via et coepta interpolatione fiet tabula X. Ubi nota in tab. X. eandem fractionem aliquando bis expressam, pro duplici origine tum in loco in quo est, tum in reciproco.

---

8 tab. IX: *a. a. O.* § 21 S. 9. 17 tab. X: *a. a. O.* § 23 S. 9 f.

Denique ut loca vacua in tabulae X. serie transverse descendens in ordine secunda $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} * \frac{3,5,7}{2,4,6}$ etc. eiusque reciproca, item in serie transverse descendente in ordine quarta $1 * \frac{5}{2} * \frac{5,7}{2,4} *$ etc. eiusque reciproca, similiterque in caeteris parallelis, compleantur ideo in serie transverse descendente secunda $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} * \frac{3,5,7}{2,4,6} *$ considerandum terminos qui iam adsunt esse, 1^{mum} ad 3^{tium} ut 2 ad 3. seu ut 1 ad $\frac{3}{2}$. tertium ad quintum, ut 4 ad 5, seu ut $\frac{3}{2}$ ad $\frac{3,5}{2,4}$, quintum ad septimum ut 6 ad 7. Ut ergo omnes compleantur, numerorum sibi vicinorum rationes, quemadmodum fuit primus ad tertium ut 2 ad 3. ita facere necesse erit, a n t e - p r i m u m quendam imaginarium seu nullesimum (: nam nullesimus est ordinalis :), quem vocabimus c, ad secundum ut 1 ad 2 et secundum ad quartum, ut 3 ad 4. Tota ergo series interpolata ita stabit:

0	1	2	3	4	5	6	
$c.$	$1.$	$\frac{2}{1}c.$	$\frac{3}{2}.$	$\frac{2,4}{1,3}c.$	$\frac{3,5}{2,4}.$	$\frac{2,4,6}{1,3,5}c.$	etc.

Iam quartus terminus huius seriei interpolatae, debet etiam esse primus sequentis interpolandae seu secundae transverse descendentis, quia ei ob reciprocam situationem aequipollet, ut ex tabulae X. inspectione patet. Ergo series quarta transverse descendens

743,21–744,1 *Zusatz zur Lesart s. S. 748 Z. 14–21*

743,21–744,1 reciproco. *(1)* Denique ut loca vacua in tabulae X. seriebus $1 * \frac{3}{2} * \frac{3,5}{2,4} *$ etc. et $1 * \frac{5}{2} * \frac{5,7}{2,4}$ etc. et parallelis earumque reciprocis, impleantur, ante 1. positam imaginando *(a)* b. ante $\frac{3}{2}$ ponemus $\frac{2}{1}$b. ante $\frac{3,5}{2,4}$ ponemus $\frac{2,4}{1,3}$b. *(b)* c. ante $\frac{3}{2}$ ponemus $\frac{2}{1}$ c. ante $\frac{3,5}{2,4}$ ponemus $\frac{2,4}{1,3}$ c. Similiter in altera serie pro $\frac{5}{2}$ interpolabitur $\frac{4}{1}$, pro $\frac{7}{4}$ fiet $\frac{6}{3}$ *(2)* Denique *L* 1 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L* 2 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L* 4 serie *(1)* transversa *(2)* transverse *L* 7 f. ad *(1)* secundum *(2)* tertium *L* 8 f. seu … ordinalis :) *erg.* *L* 14 seu … descendentis *erg.* *L* 15 series *(1)* secunda *(2)* quarta *L* interpolanda ita incipiet coepta interpolatione: $1 \quad \frac{2,4}{1,3}c \quad \frac{5}{2} \quad * \quad \frac{5,7}{2,4} \quad *$. Facile ergo compleri poterit, ut enim ex primo habeatur tertius, quintus, septimus, etc. faciendo 1[mum] ad 3[tium] ut 2 ad 5, tertium ad 5[tum] ut 4 ad 7. 5[tum] ad 7[mum] ut 6 ad 9. Ita ex secundo habebuntur nullesimus[,] quartus, sextus, octavus etc. faciendo nullesimum ad 2[dum], ut 1 ad 4. secundum ad quartum, ut 3 ad 6. quartum ad sextum ut 5 ad 8. etc.

Et series haec transverse descendens quarta, ita stabit completa:

0	1	2	3	4	5	6
$\frac{2}{3}c.$	1.	$\frac{2,4}{3,1}c.$	$\frac{5}{2}.$	$\frac{2,4,6}{3,1,3}c.$	$\frac{5,7}{2,4}.$	etc.

sive pro $\frac{2}{3}c$ ponendo d. fiet d. 1. $\frac{4}{1}d$. $\frac{5}{2}$. $\frac{4,6}{1,3}d$. $\frac{5,7}{2,4}$. $\frac{4,6,8}{1,3,5}d$. etc.

Sexta series transverse descendens $1 \quad * \quad \frac{7}{2}$ etc. eodem modo facile interpolabitur ex praecedentis, quia quartus praecedentis, et sextus antepraecedentis terminus coincidunt eius termino secundo. Ergo eius terminus secundus erit $\frac{4,6}{1,3}$. Porro in ea primus habetur ad tertium, ut 2 ad 7. tertius ad 5[tum] ut 4 ad 9. 5[tus] ad 7[mum], ut 6 ad 11. Eodem ergo modo erit nullesimus ad secundum, ut 1 ad 6. secundus ad quartum ut 3 ad 8. et ponendo nullesimum esse $e \sqcap \frac{4d}{3}$. erit series sexta transverse descendens interpolata: $e \quad 1 \quad \frac{6}{1}e \quad \frac{7}{2} \quad \frac{6,8}{1,3}e \quad 7.$

1 coepta interpolatione *erg. L* 4 nullesimus *erg. L* 6 series *(1)* secunda *(2)* haec *L* 13 ad *(1)* secundum *(2)* tertium *L* 14 erit *(1)* secundus ad *(2)* nullesimus *L*

11 quartus praecedentis: Leibniz bezieht sich auf die 2., 4. und 6. Transversalfolge mit den zu interpolierenden Termen. Aus Symmetriegründen ist der 2. Term der 6. Folge gleich dem 6. Term der 2. Folge: $\frac{2,4,6}{1,3,5}c = \frac{4,6}{1,5}d$. Leibniz setzt ihn irrtümlich gleich dem 4. Term der 4. Folge $\frac{2,4,6}{3,1,3}c = \frac{4,6}{1,3}d$ und verfehlt so den Wert $e = \frac{4}{5}d$; die Formel für die 6. Folge ist aber korrekt.

[*Zusätze*]

[*Zu S. 738 Z. 21 – S. 739 Z. 4:*]

Videor tandem agnoscere rationem qua possit in toto pariter ac in singulis partibus haberi numerator simplex, erit ex. g. a^3, $\frac{1}{3} - \frac{2a}{4} + \frac{a^2}{5}$, si $a \sqcap 1$ dat $\frac{2}{3,4,5}$. Sed aliud remedium. Si ponamus esse r non $\sqcap 1 - a$ sed $\sqcap v - a$ ponendo v esse ultimam a; ipsa a semper variante; tunc enim ex. gr. r^4 erit $\sqcap v^4 - 4v^3a + 6v^2a^2 - 4va^3 + a^4$ et $\int \overline{r^4} \sqcap \frac{1v^5}{1} - \frac{4v^5}{2} + \frac{6v^5}{3} - \frac{4v^5}{4} + \frac{1v^5}{5}$. et $a^2r^2 \sqcap a^2, v^2 - 2va + a^2$. et $\int \overline{a^2r^2} \sqcap \frac{v^5}{3} - \left[\frac{2v^5}{4} + \frac{v^5}{5}\right] \sqcap \frac{2v^5}{3,4,5}$. et hoc iam pulcherrimum est maximique usus, si quid unquam, in geometria.

[*Zu S. 739 Z. 9 – S. 740 Z. 13:*]

$$\underbrace{\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}}\ \ \underbrace{\frac{1}{4}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{6}}\ \text{etc.}$$

$$\begin{array}{l} 6\ \ \underbrace{3\ \ 2\ \ 30}_{12\ \ 8\ \ 6}\ \ 24\ \ 20 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} +30 & +24 & +20 \\ -\ \ 6 & -\ \ 3 & -\ \ 2 \\ \hline 24 & 21 & 18 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 30 & 24 & 20 \\ \underline{12} & \underline{8} & \underline{6} \\ 18 & 16 & 14 \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} 12 & 8 & 6 \\ \underline{6} & \underline{3} & \underline{2} \\ 6 & 5 & 4 \end{array}$$

Ergo differentiae eiusmodi semper arithmetici. Quid si inverso modo subtraha⟨mus⟩

$$\begin{array}{ccc} 30 & 24 & 20 \\ 2 & 3 & 6 \\ \hline 28 & 21 & 14 \end{array}\quad \text{sunt etiam arithmetici.}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & & \\ 24 & 12 & 8 & 6 & & & & \\ & 60 & 40 & 30 & 24 & & & \\ & & 120 & 90 & 72 & 60 & & \end{array}$$

$1| - 3| + 3| - 1, \frown 24|12|8|6 \sqcap 24| - 36| + 24| - 6 \sqcap 6$

$1| - 3| + 3| - 1, \frown 60|40|30|24 \sqcap 60| - 120| + 90| - 24 \sqcap 6$

4 $\frac{2}{3,4,5}$. *(1)* et semper erit *(2)* Sed *L* 7 $\sqcap \frac{v^5}{3} - | \frac{v^5}{4} + \frac{v^5}{7}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{2v^5}{3,4,5}$. *L*

60	40	30	24
24	12	8	6
36	28	22	18
(18	14	11	9)
	4	3	2

Numeri 18. 14. 11. 9. a trigonalibus differunt octonario nam si auferas 8. fiet 10. 6. 3. 1. Hinc differentiae quinque harmonicorum redibunt ad pyramidales et plurium ad altiores. Hinc concluditur generaliter differentias has semper fore summabiles. Videamus iam an hinc duci possit [aliquid] ad summam seriei harmonicae, sit $\underbrace{\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}}_{\odot}+\frac{1}{6}$, $\underbrace{\frac{1}{2}+\dots+\frac{1}{6}}_{☽}$

cuius seriei invenienda est summa.

$$\frac{\odot}{6} \sqcap \frac{2,3,4,5+1,3,4,5+1,2,4,5\,[+1,2,3,5]\ +1,2,3,4}{1,2,3,4,5,6}$$

et $☽ \sqcap \dfrac{3,4,5,6+2,4,5,6,+2,3,5,6\,[+2.3.4.6]\ +2,3,4,5}{1,2,3,4,5,6}$.

Iam $\dfrac{\odot}{6} - ☽$. haberi potest, differentiae enim respondentium ordine numeratorum dabunt numeros a pyramidalibus constanter differentes, adeoque summabiles. Ponamus ergo $\dfrac{\odot}{6} -$

746,18

(1) $\underbrace{\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}\quad\frac{1}{4}}\quad\frac{1}{5}\quad\frac{1}{6}$

$24\quad\underbrace{12\quad 8\quad 6}$

$120\quad\underbrace{40\quad 30\quad 24}$

$360\quad 90\quad 72\quad 60$

120	40	30	24
24	12	8	6
96	28	22	18
(48	14	11	9)
34	3	2	

120	40	30	24
6	8	12	24
114	32	18	0
82	14		

$1 -\ \ 3 +\ \ 3 - 1\quad 1| - 3| + 3| - 1|$ ⌢ $120|40|30|24| \sqcap 120| - 120| + 90| - 24| \sqcap 66$ *(2)* $\frac{1}{1}$ *L* $48 - 42 + 33 - 9$ 9 aliquis *L ändert Hrsg.* 13 $+1,2,3,5$ *erg. Hrsg.* 14 $+2.3.4.6$ *erg. Hrsg.*
16–748,1 $\frac{\odot}{6} -$ ☽ $\sqcap$ *(1)* Ω *(2)* −Ω *(3)* Ω *L*

$☽ \sqcap \Omega$. Iam aliunde scimus esse $\odot -$ $☽ \sqcap 1 - \frac{1}{6}$. Ergo $☽ \sqcap \odot + \frac{1}{6} - 1$. Eadem $☽ \sqcap \frac{\odot}{6}[-]\Omega$. Ergo $\frac{\odot}{6} - \Omega \sqcap \odot + \frac{1}{6} - 1$. Ergo $\odot[-]6\Omega \sqcap 6\odot + 1 - 6$. et $\frac{5 - 6\Omega}{[5]} \sqcap \odot \sqcap \frac{5}{6} - \Omega$. Tandem ergo viam reperimus per quam progressionis harmonicae numerorum reperiri potest summa. Habetur enim $\odot$ eodem modo et $☽$.

Cum opus sit ad eam rem inventione numeri figurati altissimi gradus, v. g. ad inventionem summae pyramidalium opus est triangulo-triangularibus. Ergo ad summam numerorum harmonicorum quinque opus est triangulo-triangulari numero id est assurgente ad quadrato-quadratum. Et pro 100 harmonicis opus foret formula assurgente ad 99 gradus. Huic malo succurremus primum per logarithmos, nam quia numeri figurati fiunt ductu in se invicem continuorum hinc addemus tantum logarithmos numerorum continuorum: Imo datur compendium, inveniendi summas logarithmorum numerorum arithmetice crescentium, quo utemur.

[*Zur Lesart zu S. 743 Z. 21 – S. 744 Z. 1, nicht gestrichen:*]

Sed nondum video quomodo hinc appropinquationes pro partibus quoque, aut infinitae series, earumque reciprocae duci possint, cum non appareat, qualis in casu partium sit b. neque enim b. ad eandem potest attolli potentiam, neque enim in casu ubi $v \sqcap 1$ fieret b^5 aeq. b et ita in caeteris, neque tamen poterit credo pro b fieri: bv^4, vel bv^5 aliave. Imo forte poterit. Ut scilicet tota series horizontalis multiplicetur per v^5 vel per v^4. Sed nec hoc procedere arbitror, sequeretur enim omnes b, fore inter se, ut ipsas v. Quod non est. Forte aliquando hanc quoque difficultatem complanare licebit: Qua superata pulcherrimus interpolationum usus foret ad series.

1 $☽ \sqcap \frac{\odot}{6}$ *(1)* $-$ *(2)* | $+$ *L, ändert Hrsg.* | Ω *L* 2 $\odot$ *(1)* $-$ *(2)* | $+$ *L, ändert Hrsg.* | 6Ω *L* 2 6 *L ändert Hrsg.*

58. QUADRATURA ARITHMETICA CIRCULI ET HYPERBOLAE
3. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 125. 1 Bl. 2°. 1 1/2 S. Datum und Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1412

3. Maii 1676.

Quadratura arithmetica circuli et hyperbolae

[*Teil 1*]

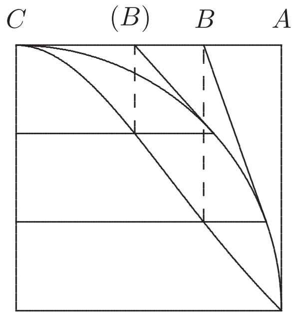
$x \sqcap \dfrac{y^2}{1+y^2} \sqcap y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + y^{10} - y^{12}$ etc. Ponamus $y \sqcap 1 - z$. fiet

$$
\begin{array}{llllll}
x \sqcap +1 & -1 & +1 & -1 & \text{etc. etc.} \\
\quad -2z & +4z & -6z & +8z & \\
\quad +1z^2 & -6z^2 & +15z^2 & -28z^2 & \\
 & +4z^3 & -20z^3 & +56z^3 & \\
 & -1z^4 & +15z^4 & -70z^4 & \\
 & & -6z^5 & +56z^5 & \\
 & & +1z^6 & -28z^6 & \\
 & & & +8z^7 & \\
 & & & -1z^8 &
\end{array}
\qquad
\text{vel}\, x \sqcap \left\{
\begin{array}{lrrl}
 & 0 & 0 & \text{etc.} \\
z, & +\,2 & 2 & \text{etc.} \\
z^2, & -\,5 & -\,13 & \\
z^3, & 4 & 36 & \\
 & -\,1 & -\,55 & \\
 & & & \\
 & & &
\end{array}
\right.
$$

10 etc. etc. *(1)* Et *(2)* Et summando erit *(3)* vel *L*

$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$	1	$\cancel{1}$
1	$\cancel{2}$	3	$\cancel{4}$	5	$\cancel{6}$	7	$\cancel{8}$	9	$\cancel{10}$	11	$\cancel{12}$	13	$\cancel{14}$	15	$\cancel{16}$	
$\cancel{1}$	3	$\cancel{6}$	10	$\cancel{15}$	21	$\cancel{28}$	36	$\cancel{45}$	55	$\cancel{66}$	78	$\cancel{91}$	105	$\cancel{120}$	136	
1	$\cancel{4}$	10	$\cancel{20}$	35	$\cancel{56}$	84	$\cancel{120}$	165	$\cancel{220}$	286	$\cancel{364}$	455	$\cancel{560}$	680	$\cancel{816}$	
1	5	15	35	70												
1	6	21	56	126												
1	7	28	84	210												
1	8	36	120	330												
1	9	45	165	495												
1	10	55	220	715												
1	11	66	286	1001												
1	12	78	364	1365												
1	13	91	455	1820												
1	14	105	560													
1	15	120														
1	16															
1																

$AC \sqcap 1.$
$AB \sqcap z.$
$CB \sqcap y.$



[*Fig. 1*]

21 *Fig. 1*: Die von Leibniz gezeichnete und hier wiedergegebene Figur entspricht nicht der Gleichung von S. 749 Z. 9, sondern $x = \dfrac{2y^2}{1+y^2}$. Die Unstimmigkeit wirkt sich nicht weiter aus.

Porro assumto quodam numero infinito (numerus enim maximus omnino assumi non potest); poterit tam omnium z, quam omnium z^2, et z^3 etc. iniri summa, scilicet numerorum arithmeticorum secundas differentias aequales habentium, et tertias, et quartas etc. Talium enim numerorum ex dato ultimo, hoc loco infinito semper haberi poterit summa, adeoque habebitur expressio ipsius x ope potestatum tum a z tum a numero infinito; numerus autem infinitus non potest coincidere cum numero infinitesimarum ipsius z quia is variat, alia atque alia assumta z, nisi et infinitesimas proportione putes. Et hinc iam haberi potest modus analyticus expressiones eiusmodi, infinito numero utentes convertendi in alias in quibus nullus sit numerus infinitus. Nam quae numerum habent infinitum hoc modo, earum ne partes quidem tractabiles sunt. Si vero possemus fingere numerum infinitum constantem semper eundem esse cum infinitesimarum ipsius z numero; ipsas autem infinitesimas alias esse pro alia z arithmeticeque crescere, tunc numerus infinitus aequivalebit z, et pro eius quadrato scribi poterit z^2, et ita porro. Hoc si succedit pulchrum habebimus modum expressiones huiusmodi $y^2 - y^4 + y^6 - y^8$ etc. convertendi in alias. Ex quo plurima theoremata nova ducentur.

[*Teil 2*]

$y \sqcap b^l$. erit $l \sqcap \dfrac{y}{1} - \dfrac{y^2}{2b} + \dfrac{y^3}{3b^2} - \dfrac{y^4}{4b^3}$ etc. posito l. logarithmo. Porro $dl \sqcap \dfrac{b^2}{b+a}$. Unde in aequatione figurae logarithmicae $y \sqcap b^{\int \frac{b^2}{b+a}}$. nam $l \sqcap \int \dfrac{b^2}{b+a}$. Est autem a. quantitas variabilis, b. constans. $\int l \sqcap \dfrac{y^2}{1,2} - \dfrac{y^3}{2,3,b} + \dfrac{y^4}{3,4,b^2} - \dfrac{y^5}{4,5,b^3}$ etc.

Si generaliter indices serviunt ad quadraturas, ut a Wallisio ex inductione iudicari coeptum est, spes magna est posse omnes quadraturas exprimi ope talium serierum.

3 differentias *(1)*, aequales *(2)* nullas *(3)* arith *(4)* aequales *L* 10 f. fingere *(1)* alium numerum infinitum assumi *(2)* numerum *L* 19 f. etc. *(1)* Unde sequeretur posita y $\sqcap$ b. dari logarithmorum summa, adeoque et spatii eius. Si daretur *(a)* x $\sqcap \frac{\mathrm{e}^3}{}$ *(b)* | $\varphi \sqcap \frac{\mathrm{e}}{1} - \frac{\mathrm{e}^3}{3\mathrm{b}^2} + \frac{\mathrm{e}^5}{5\mathrm{b}^3} - \frac{\mathrm{e}^7}{7\mathrm{b}^5}$ *streicht Hrsg.* | *(2)* Si *L*

20 Wallisio: *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO* I S. 355–478).

$x \sqcap y^z$. Ergo $z \sqcap \frac{x}{1} - \frac{x^2}{2y} + \frac{x^3}{3y^2} - \frac{x^4}{4y^3}$ etc. Est aequatio ad paraboloeidem. Contra $x^{\frac{1}{z}} \sqcap y$. Ergo $\frac{1}{z} \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3}$ etc. et generaliter ex huiusmodi aequationibus extrahi potest radix, et inveniri valor ipsius y. vel x. ut patet. Nemo autem facile crederet talem aequationem esse ad paraboloeidem; forent ad hyperboloeidem, si v. g. pro x. ponatur $\frac{1}{x}$. aut pro y, $\frac{1}{y}$. Nec quisquam facile crederet: $\frac{x}{1} - \frac{x^2}{2y} + \frac{x^3}{3y^2} - \frac{x^4}{4y^3}$ etc. $\sqcap$ $\dfrac{1}{\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3} \text{ etc.}}$. Genus aequationis identicae mirabilis, identica autem est, quia nihil ex illa duci potest, semperque vera est, quaecunque sumantur x. et y. adeoque nihil novae determinationis assumitur, tali aequatione assumta. Et videndum an hinc sequatur idem esse verum, quomodocunque per saltus progrediamur. Videndum si dicamus e. g. $x \sqcap y^2 + cy + d$. an talis aequatio etiam sic exprimi possit, quasi logarithmo: $x \sqcap y^z$. Quod idem est ac: $\sqrt[2]{x + \frac{c^2}{4} - d} - \frac{c}{2} \sqcap y$. et fiet: $y^2 + cy + d \sqcap y^z$ vel $x \sqcap \overline{\sqrt[2]{x^2 + \frac{c^2}{4} - d} - \frac{c}{2}}^{\,z}$. Videndum saltem si sumatur esse: $x \sqcap y + d$. an posito $x \sqcap y^z$. et $y + d \sqcap y^z$. vel $x \sqcap \overline{x - d}^{\,z}$ possit z. quaeri instar logarithmi modo supra dicto. Quod dicere non ausim.

Experiundum calculo, an diversae hae inquirendi in ipsius z. valorem rationes consentiant. Item, quia z. debet considerari quasi certus quidam numerus ideo idem provenire debet sumtis quibuscunque x. et y. modo ponatur $x \sqcap y + d$.

Redeam ad superiorem aequationem: $\frac{1}{z} \sqcap \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2x} + \frac{y^3}{3x^2} - \frac{y^4}{4x^3}$ etc. Pro x. ponatur eius valor y^z, fiet: $\frac{y}{1} - \frac{y^{[2]-z}}{2} + \frac{y^{[3]-2z}}{3} + \frac{y^{[4]-3z}}{4}$ etc. $\sqcap \frac{1}{z}$. quae propositio semper vera esse debet, et identica, quaecunque sumatur y. et z. Nam si ex quadam aequatione ducatur alia, et ope unius aliqua tollatur litera ex alia, proveniens aequatio est identica.

---

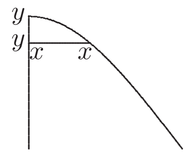
18 *Nebenrechnung:* $y^{1-z} \sqcap \dfrac{1}{y^{z-1}}$

3 ut patet *erg. L* 14 f. consentiant. *(1)* Unde illa *(2)* Item *L* 18 1 *L ändert Hrsg. dreimal*

Et hoc est exemplum mirabilis cuiusdam summationis si z. per numerum explicetur. Videndum tamen, ne inde sequatur absurdum. Quo vitato pulchrae hinc consequentiae ducentur. Superest adhuc, ut alterutrum x. vel y. inveniamus pure ope z, exponente non nisi numeros continente.

[*Teil 3*]

$$x \sqcap y^2 - y^4 + y^6 - y^8$$
$$\int \overline{x} \sqcap \frac{y^3}{3} - \frac{y^5}{5} + \frac{y^7}{7} - \frac{y^9}{9} \text{ etc.}$$



[*Fig. 2*]

$$x \overset{(1)}{\sqcap} \frac{y^2}{1+y^2}. \quad \frac{y^2}{1+y^2} \overset{(2)}{\sqcap} y^2 - y^4 + y^6 - y^8 + y^{10} - y^{12} \text{ etc.} \quad x + y^2 x \overset{(3)}{\sqcap} y^2. \text{ seu}$$

$x \overset{(4)}{\sqcap} y^2 - y^2 x$. et $y^2 \overset{(5)}{\sqcap} \dfrac{x}{1-x}$. Ergo pro aeq. 2. stabit

$$\frac{y^2}{1+y^2} \overset{(6)}{\sqcap} \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc.}$$

Unde ut obiter patet aequationem hanc

$$x \overset{(7)}{\sqcap} \frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc.}$$

esse identicam quodammodo cum non possit esse determinata.

$$x \sqcap \frac{\dfrac{x}{1-x}}{1+\dfrac{x}{1-x}} \sqcap \frac{\dfrac{x}{1-x}}{\dfrac{1-x+x}{1-x}} \sqcap x.$$

$$y \sqcap \sqrt{\frac{x}{1-x}} \sqcap \sqrt{\frac{x}{1-x} - \frac{x^2}{1-2x+x^2} + \frac{x^3}{1-3x+3x^2-x^3} \text{ etc. } \smile 1-x} \sqcap$$

12 Unde ... hanc *erg. L* 14 f. esse ... $\sqcap$ x *erg. L*

8 *Fig. 2*: Die Merkfigur gibt nicht die Kurve $x \sqcap \dfrac{y^2}{1+y^2}$ wieder.

$\dfrac{\sqrt{x - \dfrac{x^2}{1-x} + \dfrac{x^3}{1-2x+x^2} \text{ etc.}}}{1-x}$. Habetur autem summa omnium y aliunde ergo et summa haberi potest infinitarum. $\overline{\displaystyle\int \sqrt{x - \frac{x^2}{1-x} + \frac{x^3}{1-2x+x^2} \text{ etc.}} \smile 1-x}$. Novum ergo habemus hic exemplum summae infinitae.

arcus $\sqcap \dfrac{t}{1} - \dfrac{t^3}{3} + \dfrac{t^5}{5} - \dfrac{t^7}{7}$ etc. $\sqcap \int \overline{1 - t^2 + t^4 - t^6 \text{ etc.}}$ Ergo $\overline{d\,\text{arc}} \sqcap 1 - t^2 + t^4 - t^6 \sqcap \dfrac{1}{1+t}$ et $t \sqcap \dfrac{1 - \overline{d\,\text{arc}}}{\overline{d\,\text{arc}}}$. arc $\sqcap \int \dfrac{1}{1+t}$. Ergo $\int \dfrac{1}{1+t} \sqcap \dfrac{1-\overline{d\,\text{arc}}}{\overline{d\,\text{arc}}} - \dfrac{\overline{1-\overline{d\,\text{arc}}}\boxed{3}}{\overline{d\,\text{arc}}^3} + \dfrac{\overline{1-\overline{d\,\text{arc}}}\boxed{5}}{\overline{d\,\text{arc}}^5}$.

Idem est 2^z, $\boxed{2}$, et 4^z. Iam $2^z\,\boxed{2} \sqcap 2^{2z}$ ergo $4^z \sqcap 2^{2z}$. Et generaliter erit $bb^z \sqcap b^{2z}$ et $b, b^z \sqcap b^{z+1}$. Ex his variae haberi poterunt expressiones per infinitas series eodem redeuntes.

5 f. $+\dfrac{\overline{1-\overline{\text{d arc}}}\boxed{5}}{\overline{\text{d arc}}^5}$. | $\sqcap \dfrac{1}{\text{d arc}} - \dfrac{1}{\overline{\text{d arc}}^3} + \dfrac{1}{\overline{\text{d arc}}^5}$ *gestr.* |. Idem *L*

---

4 $\sqcap \dfrac{1}{1+t}$: Richtig wäre $\dfrac{1}{1+t^2}$; der Fehler beeinträchtigt die folgende Zeile, in deren abschließender Gleichung eine weitere Unstimmigkeit hinzukommt.

59. DE SUMMA SERIEI IN QUA NUMERATORES ARITHMETICI, NOMINATORES GEOMETRICI

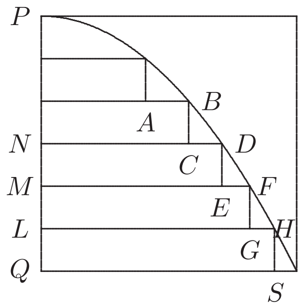
24. Mai 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 1. 1 Zettel ca. 21,2 x 6,6 cm. 1 S. auf Bl. 1 r°. Unterkante geschwungen, Überschrift ergänzt. — Auf der Rückseite Fragment einer durch Zerschneiden verworfenen Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus. Druck in einem späteren Band der Reihe.
Cc 2, Nr. 1425 tlw.

24. Maii 1676.

Summa seriei in qua numeratores arithmetici, nominatores geometrici

Invenire summam seriei $\frac{1}{1}$ $\frac{2}{2}$ $\frac{3}{4}$ $\frac{4}{8}$ $\frac{5}{16}$ etc.



[*Fig. 1*]

13 *Fig. 1*: Leibniz verdeutlicht seine Überlegungen zur Summierung der Reihe anhand der Treppenfigur unter dem Kurvenbogen. Aus dem Text ergäbe sich eine Exponentialkurve. Leibniz zeichnet einen für ein allgemeines Kurvenstück stehenden Parabelbogen. Die zwei oberen Stufen der Treppenfigur hat Leibniz nachträglich ergänzt. Der Punkt P tritt daher im Text sowohl auf der Höhe von B wie als Endpunkt der Kurve auf.

Sint GH. EF. CD. AB. ipsae $\begin{cases} GH\ EF\ CD\ AB \text{ etc.} \\ \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \quad \frac{1}{16} \end{cases}$ etc. earum summa HL.

Summae $\begin{cases} 2 \quad 1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{8} \\ HL\ \ FM\ \ DN \text{ etc.} \end{cases}$ etc. summa summarum 4.

Ergo spatium $PLHBP \sqcap 4$. si $QL \sqcap LM \sqcap MN \sqcap NP$.

Sit $GH \sqcap LQ \sqcap LM$ etc. $\sqcap FM \sqcap 1$. et totum spatium $PQSHBP$ erit $\frac{1}{1}\ \frac{2}{2}\ \frac{3}{4}\ \frac{4}{8}\ \frac{5}{16}$ etc. ipsae scilicet ductae $GH \sqcap 1$ in $[LQ] \sqcap 1$ et $EF \sqcap \frac{1}{2}$ in $MQ \sqcap 2$. et $CD \sqcap \frac{1}{4}$ in $NQ \sqcap 3$. etc.

At vero hoc idem spatium est, $PLHBP$ seu 4, $+LQSH \sqcap 2$. Ergo $\frac{1}{1}+\frac{2}{2}+\frac{3}{4}+\frac{4}{8}+\frac{5}{16}$ etc. $\sqcap 6$.

3 PLHBP $\sqcap$ 4 *(1)* Si *(2)* Idem spatium componatur ductu ipsarum G *(3)* si *L* 5 LH *L ändert Hrsg.*

3 spatium $PLHBP$: Leibniz übersieht, daß die Ordinate LH allein nichts zur Fläche der Treppenfigur $PLGBP = 2$ hinzufügt, und stellt so in der Folge einen vermeintlichen Widerspruch fest.

60. SERIES CONVERGENTES SEU SUBSTITUTRICES
26. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 346–347. Bl. 346 ein Bl. 4°. 1 1/2 S. Bl. 346a ein Zettel ca 17,5 x 10 cm. Auf Bl. 346a r° 2 Zeilen quer geschrieben. Bl. 346a v° leer. Bl. 347 ca 1/3 Bl. 4°. Oberkante schräg abgeschnitten. 2 S. Textfolge Bl. 346 r° oben, 347 v°, 347 r°, 346 r° unten, 346 v° tlw. durch Kustoden gesichert. Datum und erste Überschrift auf Bl. 347 v° oben ergänzt. Zweite Überschrift auf Bl. 346a. Bl. 346a ursprünglich mit Siegellack an Bl. 346 und an Bl. 347 befestigt.
Cc 2, Nr. 1453

26 Iunii 1676

Series convergentes seu substitutrices

Series convergentes et modus per illas inquirendi in aream ope numeri laterum polygoni

Aequatio inveniri potest, exprimens circuli magnitudinem, eaque valde simplex. In eam ingreditur numerus n. progressionis geometricae duplae quilibet: 1. 2. 4. 8. 16. etc. et tanto erit exactior, quanto hic numerus maior.

Hinc admiranda ducentur pro sectione anguli et trigonometria. Item pro aliis curvis et quadraturis omnibus.

---

11 *Darunter*: Adde huc Greg. a S. Vincentio de polygonis [regularibus] figurae inscribendis methodum generalem quae portiones aequales abscindant. Videndum an et fieri possint eiusmodi quae arcus aequales abscindant.

12 in *(1)* summas *(2)* summam *(3)* aream *L* 13 numeri *(1)* polygonorum *(2)* laterum *L* 14 exprimens *(1)* naturam circuli, *(2)* circuli *L* 15 n. *(1)* Erit valor *(2)* progressionis *L* 19 regularis *L ändert Hrsg.*

---

19 Greg. a S. Vincentio: vgl. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch IV, prop. CXCIX u. CC, S. 349 f.; Buch V, prop. CCLXXXVII, S. 489; Buch VI, prop. CVI, S. 585 [Marg.]. — Saint-Vincent bezeichnet einer Figur einbeschriebene Polygone als regulär, wenn die Seiten (abgesehen von der Basis) gleiche Segmente abschneiden.

Forte aliquando tolli poterit numerus n; et tunc id procedet pro illis scilicet curvis, in quibus dimensio in potestate.

Quaeritur an inter modos quibus quid eodem modo ex quibusdam quantitatibus componitur quo ex aliis, ut ex $a.b.$ quo ex $a^2 + b^2$. sit etiam inventio maximi et minimi, sed non puto.

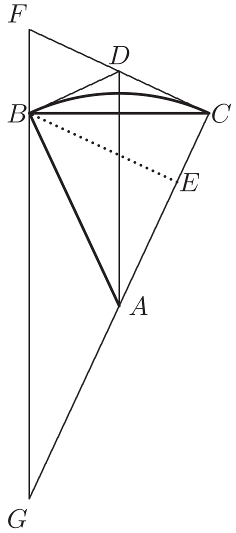
Absolvimus tandem et impossibilitatis demonstrationem in circuli quadratura.

Si datur formula eadem operatione proveniens ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. datur sectoris cuiuslibet quadratura per demonstrata a Iac. Gregorio. Ergo hinc dabitur regula generalis inveniendi sectorem ex datis a. b. triangulo inscripto et trapezio circumscripto huius formulae interventu expressa: at regula generalis huiusmodi est impossibilis, ut demonstravi de circulo, et ad ellipsin atque hyperbolam applicari potest; ergo formula eadem operatione proveniens ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. est impossibilis, formula, inquam, analytica finita. Hinc iam demonstro novis plane artibus, ipsam sectoris circularis (eodemque modo elliptici et hyperbolici) impossibilem esse quadraturam. Nimirum quemadmodum Iac. Gregorius hoc problema solvit: ex data formula eadem operatione proveniente, invenire sectoris aream: ita ego contra: ex data sectoris area invenire formulam eadem operatione provenientem. Nam ut res concepta est a Gregorio in eo fuit eius

6 f. quadratura. *(1)* Sector eodem modo componitur ex a. b. quo quaeri *(2)* Si *L* 7 datur *(1)* quantit *(2)* formula *L* 7 f. datur *(1)* circu *(2)* sectoris *L* 8 quadratura | per demonstrata a Iac. Gregorio. *(1)* Hinc per *(2)* Ergo hinc *erg.* | dabiturque *ändert Hrsg.* | regula *L* 11 de ... potest *erg. L* 13 f. sectoris *(1)* illius *(2)* circularis *L* 15 Iac. *erg. L* 16 f. formulam *(1)* eodem modo compositam *(2)* eadem *L*

7 $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$: Richtig wäre $\dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; Leibniz verwendet den falschen Wert bis S. 761 Z. 5 sowie in N. 64 S. 800 Z. 15–18. 8 demonstrata a Iac. Gregorio: Vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Scholium nach prop. V, S. 15 f. 11 demonstravi de circulo: Vgl. Cc 2, Nr. 1102, zweite propositio und *LQK*, prop. LI, S. 128. 15 quemadmodum Iac. Gregorius ... solvit: s. o. Erläuterung zu Z. 8, hier Prop. XI, S. 25–28 [Marg.].

demonstratio imperfecta; et neque Hugenium neque alios convincere potuit. Aliud est enim de quantitatibus aliud de formulis loqui: et potest quantitas eodem modo componi ex diversis, verbi gratia possibile est fortasse aliquam reperiri operationem, per quam eodem modo proveniat numerus 3 ex 4 et 6 quo ex 9 et 13, sed quis illam divinabit. Imo videtur nullus numerus esse, qui non forte eodem modo ex duobus paribus aliorum provenire possit, saltem per analyses quasdam transcendentes. Re igitur altius repetita, deprehendi, si sit quantitas aliqua a duabus dependens, sive iis determinatis determinata, sive ex illis datis calculabilis; posse formulam analyticam exprimi, qua ex iis componatur, eamque non variam vagamque sed certam constantem et unicam.



[*Fig. 1*]

1 potuit *(1)*, ut si numerus 3 *(a)* eodem mo *(b)* eadem oper *(2)*. Aliud *L* 6 igitur *(1)* profundius *(2)* altius *L*

1 neque Hugenium neque alios: Zum Streit vgl. *GT*, S. 51–53 und C. J. Scriba, *Gregory's converging double sequence*, 1983. Mit alios dürfte Leibniz neben Wallis auch sich selbst gemeint haben; vgl. Cc 2, Nr. 1102 Scholium zur zweiten propositio. — Den Zeitgenossen zugänglich waren die Rezensionen in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 33 vom 16./26. März 1667/1668 S. 640–644 und im *Journal des Sçavans* vom 2. Juli 1668 S. 361–368, die Stellungnahme von Huygens, *a. a. O.* vom 12. November 1668 S. 437–444, von Gregory in den *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 37 vom 13./23. Juli 1668 S. 732–735 und Nr. 44 vom 15./25. Februar 1668/1669 S. 882–886 sowie in den *Exercitationes Geometricae*, 1668, Praefatio u. S. 1–8 [Marg.].

Sit ergo reperta quantitas aequalis sectori, seu sectoris alicuius quadratura, ea utique determina⟨ta⟩ erit lineis quibus sector determinatur, ut radio et sinu, vel radio et chorda; vel radio et sagitta vel tangente quae omnia eodem recidunt. Ponatur esse determinata radio et tangente semiarcus seu circumscripta sive inscripta, erit exprimibilis eius valor per formulam (vel aequationem,) quam non alia ingreditur litera, quam r. et t. Sit illa aequatio verbi gratia z (sector) $\sqcap r^2 + bt^2 + frt + hr$. ubi duae tantum literae r. et t. at b. f. h. numeri qualescunque. Notabilis haec distinctio literarum lineas significantium a literis numeros significantibus.

Porro trapezium circumscriptum $ABDC$ aequatur radio in DC, quia angulus ACD rectus ergo erit rt. Ex data t. ipsa CE, est $x \sqcap \dfrac{2rt^2}{r^2+t^2}$. Sit G oppositum diametri punctum et GBF ducatur, erit $CF \sqcap 2t$. et $GC \sqcap 2r$. et $EG \sqcap 2r - x \sqcap 2r - \dfrac{2rt^2}{r^2+t^2} \sqcap \dfrac{2r^3}{r^2+t^2}$. et fiet: FC ad CG, seu DC ad AC, seu t. ad r. ut BE ad EG, seu ut BE ad $\dfrac{2r^3}{r^2+t^2}$. Ergo $BE \sqcap \dfrac{2r^2t}{r^2+t^2}$. Ergo triangulum $ABC \sqcap \dfrac{BE \frown r}{2}$. seu $\dfrac{r^3t}{r^2+t^2}$. Quemadmodum trapezium circumscriptum rt. sit $rt \sqcap b$. et $\dfrac{r^3t}{r^2+t^2} \sqcap a$. Nempe a. triangulum, b. trapezium; erit $a \sqcap \dfrac{br^2}{r^2+t^2}$. Ope harum duarum aequationum quaeramus r. et t. ex a. et b. quod fieri posse patet. Erit $t \sqcap \dfrac{b}{r}$. et $a \sqcap \dfrac{br^2}{r^2+\dfrac{b^2}{r^2}} \sqcap \dfrac{br^4}{r^4+b^2}$. et reducendo: $r^4a + b^2a \sqcap br^4$. et $r^4 \sqcap \dfrac{b^2a}{b-a}$. sive $r \sqcap \sqrt[4]{\dfrac{b^2a}{b-a}}$. adeoque $t \sqcap b\sqrt[4]{\dfrac{b-a}{b^2a}}$. Quoniam ergo ex datis a. b. reperimus r. t. et ex datis r. t. calculo habuimus quantitatem sectoris ex hypothesi, habebimus etiam ex datis a. b. Ergo formulam habebimus analyticam eodem modo productam ex a. b. quo ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Sed iam video non hinc sequi, quod eadem formula serviat pro

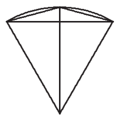
3 vel tangente *erg.* *L* 4 et *(1)* chorda *(2)* tangente *L* 8 f. significantibus. *(1)* Porro triangulum aequatur radio *(2)* Porro *L* 19 modo *(1)* compositam *(2)* productam *L* 20 $\dfrac{2\mathrm{ab}}{\mathrm{a}+\sqrt{\mathrm{ab}}}$. *(1)* Iam si formula ista sit pure analytica. *(2)* Sed *L*

quolibet alio sectore. Imo iam video id hinc sequi. Sufficit enim nos generaliter habere formulam eodem modo productam ex $a.$ et $b.$ quo ex duabus sequentibus, qualis ista est quam reperimus. Ut exacta sit ratiocinatio nostra. Reperta vel data area sectoris habetur valor eius expressus formula non continente alias literas quam $a.$ $b.$ ut ostendi. Duo sequentia polygona sint c ($\sqcap \sqrt{ab}$) et d ($\sqcap \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$). Poterit ex $c.$ et $d.$ etiam calculo reperiri idem sector quia similiter determinata omnia: eadem plane calculandi methodo. Quaeritur ergo, si ponamus v. g. esse sectorem $a^2+b^2+ma+nb.$ an necesse sit idem provenire, si substituatur $c.$ $d.$ in locum $a.$ $b.$ Sed iam video id non esse necesse, nisi sciam quomodo isti numeri $m.$ $n.$ sint deducti, seu inventi. Itaque si quis mihi exhibeat quadraturam sectoris, non potero eum hac methodo refutare. Video tamen remedium. Demonstrabitur scilicet, me saltem eum refutare posse, si sciam quomodo inventa sit quadratura, seu posse demonstrare, quod impossibile sit, ut sciam quomodo sit inventa; tunc enim ubi id apparebit, nullo modo isti numeri particulares intrabunt, ita ut in iis ullo modo lateat virtualiter $a.$ et $b.$ Quod si ergo in iis nullo modo latet iam $a.$ et $b.$ tunc verum erit me in locum $a.$ et $b.$ substituere posse $c.$ et $d.$ et erit formula eodem modo producta, inventa. Eadem autem formula semel reperta serviet mihi pro aliis omnibus sectoribus quod demonstratum est esse absurdum.

Caeterum una adhuc est difficultas: Possitne fieri ut formula reperiatur eodem modo composita ex polygonis duobus, et tamen ex ea data non possit reperiri sector. Ut si formula ista non possit accomodari ad casum aequalitatis. Quemadmodum reperi radium esse quantitatem eodem modo compositam ex quolibet trapezio cum suo triangulo, ergo est enim $r \sqcap \sqrt[4]{\dfrac{b^2a}{b-a}}$. posito trapezio $b.$ triangulo $a.$ Sed si novissime ea sint aequalia, et infinite parva, patet mira ratione omnia evanescere. Unde tamen forte deberet duci lux ⟨quaedam⟩ analytica. Et vero hinc incidit mihi in mentem an non et calculo inveniri possit radium e s s e e o d e m m o d o compositum ex polygonis inscripto et circumscripto quolibet: Quod ita indagabimus: Sumamus generaliter polygonum quodlibet regulare inscriptum, et circumscriptum. Unumquodque eorum determinatum est ex suo ambitu, et fulcro. Quae omnia ad duas reduci possunt literas, quod quidem ea faciendum est

8 a. b. *(1)* Sed . . . necesse, quia isti numeri *(2)* Sed *L* 9 deducti, *(1)* ex *(2)* seu *L* 13 intrabunt, *(1)* neque in *(2)* ita *L* 25 ex *(1)* polygono inscripto sumto *(2)* polygonis *L* 28 et | radio *gestr.* | vel *streicht Hrsg.* | fulcro *L* 28 literas, *(1)* radium, et alium. *(2)* quod *L*

arte, ut non ingrediatur numerus laterum polygoni, et ut nihilo minus possit area eius ex eiusmodi literis haberi, ut si sumamus ambitum non vero fulcrum.



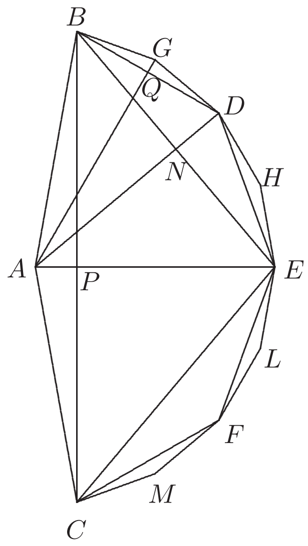
[*Fig. 2*]

Ut regula quaedam facienda inveniendi aream polygoni ex ambitu in proxime inferiorem ambitum, aliaque id genus. Denique res ita instituenda, ut ex dato polygono inscripto et circumscripto, nulla mentione numeri laterum generaliter inveniri possit radius circuli. Est autem res determinata, quia in eodem circulo, non possunt duo esse polygona inscriptum et circumscriptum eodem modo. Res ita instituetur: Sunto polygona duo unum inscriptum a. alterum circumscriptum b. Ex iis quaeritur radius. Ponatur numerus laterum esse n. radius r. tangens semiarcus, seu circumscripta t. Hinc caetera calculare licebit. Scilicet hinc calculabimus aream polygoni inscripti, pariter et circumscripti, verum ita duas tantum habebimus aequationes, cum opus sit tribus, unum ergo adiciendum est, ut exempli causa quantitas primi trianguli vel trapezii in ordine ad radium; ita duae tantum erunt incognitae, numerus laterum et radius. Verum sciendum est generaliter ex numero laterum et primo polygono quodlibet sequens non eodem modo posse componi, nisi per logarithmos, seu per expressionem transcendentem. Itaque non nisi per expressionem aliquam transcendentem radius inveniri potest ex datis a. b. quibuslibet posito primo dato. Qualiscunque sit, inveniatur. Nimirum numero invento per aequationem, tollatur ille, quoniam duae sunt aequationes duaeque incognitae, donec tandem sit aequatio in qua sola $\underline{r}$. incognita expressa ope $\underline{a}$. $\underline{b}$. Ponendo iam inverso modo r. cognitam, sed a. b. aequales et incognitas, eius ope invenientur a. vel b. inter se aequales seu sector. Hoc pulcherrimum. Habemus ergo $\underline{r}$. quantitatem eodem modo compositam ex a. b. et ex $\sqrt{ab}$. $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. sed non ideo formulam quae non sit transcendens. Caeterum eligi possunt

4 in *(1)* fulcra *(2)* proxime *L* 8 instituetur: *(1)* Sumatur *(2)* Sunto *L* 10 n. *(1)* Hinc habebitur *(2)* radius r. *(a)* fulcr *(b)* tangens *L* 13 quantitas *(1)* omnium *(2)* primi *L* 17 datis *(1)* a. b. (supposito *(2)* a. b. *L* 18 inveniatur *(1)*; eadem aequatio dabit quaesitum sectorem ⟨prae⟩ *(2)*. Nimirum *L* 22 ergo $\underline{r}$. *erg.* *L*

modi convergendi, ut res fiat quam simplicissima, et ad solos si placeat logarithmos redeat, ut scilicet inveniendae sint tantum mediae proportionales. Numerus infinitus, n. eliminatus erit.

Hinc ergo apparet subtilissimum licet Gregorium rem non recte satis percepisse, quod quantitatem formulae confudit. Scilicet credidit data quantitate haberi formulam. At ego ipsi quantitatem dabo eodem modo compositam. Quae quantitas est radius. Sed nihil inde. Aliud videndum an non ex datis $\underbrace{a.\ b.}$ $\underbrace{c.\ d.}$ seu duobus proximis polygonorum paribus inveniri possit radius. Hoc fieri poterit sine istis logarithmis. Hinc si habeamus modum generalem quo radius componitur ex duobus paribus, quo ex duobus aliis paribus: at hinc etiam poterit inveniri sectoris area. Nam in ultimis omnia quatuor a se non differunt. Eodem modo sufficit ex tribus polygonis inscriptis tantum inveniri radium. Nec opus est seriebus convergentibus ullo modo.



[*Fig. 3*]

7 seu *(1)* polygonis inscripto et circumscripto vicinis sibi, ut *(2)* duobus *L*

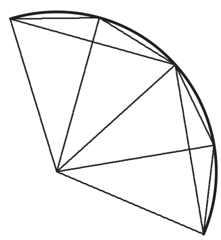
4 Gregorium: s. o. Erl. zu S. 758 Z. 15 und S. 759 Z. 1.

Arcui BEC inscriptum triangulum ABC. Quadrangulum $ABEC \sqcap a^2$. Sexangulum $ABDEFC \sqcap b^2$ etc. $(\underbrace{2+1}_{3}\ \underbrace{2+2}_{4}\ \underbrace{2+4}_{6}\ \underbrace{2+8}_{10}\ \underbrace{2+16}_{18})$. Decangulum $[ABGDHELFMC]$ $\sqcap c^2$.

Triangulum ABD aequale $\dfrac{AD \text{ radio}}{2}$ in BN semichordam praecedentis polygoni. Ergo ipsum $ABDE$ aequale radio in BN et $ABDEFC$, aequale radio in chordam polygoni praecedentis. Et generalis ex his oritur regula, polygonum sequens aequari radio in dimidium ambitum polygoni praecedentis. Sit polygonum $ABEC$ $[\sqcap]$ a^2. Dividatur per radium r. fiet $\dfrac{a^2}{r}$. polygoni praecedentis ambitus dimidius (ambitus demtis duobus radiis), BP. Ergo $\dfrac{2a^2}{r}$. eius ambitus $\sqcap$ BC. Sit polygoni praecedentis numerus laterum n. Dividendo per n. fiet $\dfrac{2a^2}{rn}$. latus unum polygoni praecedentis ut BC, et BP eius [semichorda] erit $\dfrac{a^2}{nr}$. Iam ex data BP investigemus BN. Ipsam BP vocemus π. et AB vocemus r. Erit $AP \sqcap \sqrt{r^2-\pi^2}$. et $PE \sqcap r - \sqrt{r^2-\pi^2}$. cuius quadr. additum ad quad. π. dabit quad. BE. Ergo $r^2 - 2r\sqrt{r^2-\pi^2} + r^2 \quad - \pi^2 + \pi^2 \sqcap \overline{BE}^2$. et $BN \sqcap \dfrac{\sqrt{2r^2-2r\sqrt{r^2-\pi^2}}}{2}$. $\sqcap \sqrt{\dfrac{r^2-r\sqrt{r^2-\pi^2}}{2}}$. et pro π. ponendo eius valorem $\dfrac{a^2}{nr}$. fiet $BN \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2-r\sqrt{r^2-\dfrac{a^4}{n^2r^2}}}{2}}$. $BN \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2-\dfrac{1}{n}\sqrt{r^4n^2-a^4}}{2}}$. Hinc iam polygoni

1 a^2. *(1)* Hexangulu *(2)* Sexangulum *L* 2–4 Decangulum | ABGDHELFM *ändert Hrsg.*| $\sqcap$ c^2. *(1)* Triangulum elementare voco *(a)*, cuius ⟨multi⟩ *(b)* id ex quorum pluribus similibus et aequalibus in circulo polygonum componitur; ut triangulum ABE pro quadrangulo, ABD pro sexangulo ABG pro decangulo. *(aa)* Polygonum *(bb)* Triangulum *(aaa)* sequens *(bbb)* elementare aequatur *(2)* Triangulum *L* 7 $\sqcap$ *erg. Hrsg.* 8 f. (ambitus ... radiis) *erg. L* 9 polygoni *(1)* a^2 *(2)* praecedentis *L* 11 chorda *L ändert Hrsg.* 12 Erit *(1)* NP $\sqcap$ $\sqrt{r^2-\pi^2}$. et DN $\sqcap$ $r - \sqrt{r^2-\pi^2}$. *(2)* AP *L* 12 f. $\sqrt{r^2-\pi^2}$. *(1)* et *(2)* cuius quadr. *(a)* sublatum a *(b)* additum *L* 15 $\sqrt{\dfrac{r^2-\dfrac{1}{n}\sqrt{r^4n^2-a^4}}{2}}$. *(1)* Eius duplum BE seu 2 BN multiplicetur *(2)* Hinc *L*

$ABDEFC$ ambitum quaeremus. Nempe BN ducatur in numerum laterum polygoni $[ABEC]$ qui est duplus numeri laterum polygoni praecedentis ABC seu duplus numeri n. Ergo BN ducatur in $2n$. numerum laterum polygoni $ABDEFC$, fiet dimidius ambitus, seu dimidium ipsius $[ABDEFC]$, quod ductum in r. dabit aream polygoni $ABDEFC \sqcap r\sqrt{2n^2r^2 - 2n\sqrt{r^4n^2 - a^4}} \overset{\odot}{\sqcap} b^2$. Et ita area polygoni tertii, $ABDEFC \sqcap b^2$, habebitur ex radio r, numero n. laterum polygoni primi ABC, et a^2. area polygoni secundi, $[ABEC]$. Ergo eodem modo pro polygonis ABC. $[ABEC]$. $ABDEFC$. ponendo $[ABEC]$. $ABDEFC$. $[ABGDHELFMC]$. tertii area, c^2, ex praecedentium duorum, primi numero, $2n$, medii area $b^2 \sqcap r\sqrt{2n^2r^2 - 2n\sqrt{r^4n^2 - a^4}}$. habebitur. Ergo in aeq. $\odot$ pro b^2. ponendo c^2, pro a^2. ponendo b^2, fiet: $r\sqrt{8n^2[r^2] - 4n\sqrt{4r^4n^2 - b^4}} \overset{☽}{\sqcap} c^2$. Ope alterius aequationum $\odot$ et ☽ tollatur incognita n. In residua sola restabit quantitas incognita r. et habebitur aequatio seu formula secundum quam radius componitur ex a^2. b^2. c^2. sive ex areis trium polygonorum quorumcunque. Habetur ergo formula eodem modo composita ex tribus polygonis datis, quo ex tribus polygonis proxime sequentibus. Iam calculavit Gregorius in serie A. B. C. D. E. etc. Z. polygonorum sectori inscriptorum, primo posito a^2. secundo b^2. tertium fore $\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}$.



[Fig. 4]

2 BEC *L ändert Hrsg.* 4 dimidium *(1)* recta⟨rum⟩ *(2)* ipsius | BDEFC *ändert Hrsg.* |, quod *L* 5 b^2. *(1)* Et eodem plane modo *(2)* Et *L* 7 BDEF *L ändert Hrsg. dreimal* 8 BGDHELFGMC *L ändert Hrsg.* 10 b^2, *(1)* vel eius valorem, sive pro a^4. ponendo $2r^4n^2 - 2nr^2\sqrt{r^4n^2 - a^4}$ *(2)* fiet *L* 10 r^2 *erg. Hrsg.* 13 ergo *(1)* | quantitas *streicht Hrsg.* | *(2)* formula *L* 14 Iam *(1)* si polygonorum *(2)* calculavit *L* 15 Z. *(1)* si *(2)* polygonorum *L*

14 f. calculavit Gregorius: vgl. J. Gregory, *Vera quadratura circuli et hyperbolae*, 1668, Scholium nach prop. V, S. 15.

Ergo quantitas habebitur eodem modo composita ex $a^2.\ b^2.\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}$. quo componitur ex $b^2.\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}.\ \dfrac{2\ \boxed{6}\ \sqrt{\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}}}{b^2+\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}}$. seu ex $A.\ B.\ C.$ quo ex $B.\ C.\ D.$ aut $C.\ D.\ E.$ Ergo et quantitas habebitur eodem modo composita ex $Z.\ Z.\ Z.$ quo ex $A.\ B.\ C.$ Unde sequitur inveniri posse ipsam Z. Idque duplici ex principio: Uno[,] quod illa quantitas ex $Z.\ Z.\ Z.$ eodem modo composita iam cognita est (: Ubi tamen hoc manifestum est obstaculum, quod tunc sector ex solo determinaretur radio, quod absurdum et impossibile foret: nullae enim supererunt literae, nisi tria ultima polygona aequalia (seu in ultimis ipsa Z.) ex aeq. ☽ et ⊙ et litera r. non ergo possunt poni aequales. Cui difficultati nullum aliud remedium video, quam non posse forte literam n. tolli ex aequationibus ⊙ et ☽ ope alterius, sed relinqui forte identicas aliaque id genus obstacula subtilia debent esse a natura parata :). Altero, quod aequando inter se quantitatem eodem modo compositam ex $A.\ B.\ C.$ quo ex $Z.\ Z.\ Z.$ invenietur Z. (: Sed necesse est idem obstaculum reperiri, scilicet ut litera n. non possit tolli, aut ut nihil possit reperiri nisi identicum, ponendo tres ultimas, seu $a^2.\ b^2.\ c^2.$ in aeq. ⊙, ☽ aequales[:]) Interim hinc admiranda ducimus multa. Primo quantitatem invenire eodem modo compositam ex eiusmodi quantitatibus, modo sciamus ex qua curva sit ducta. (: Unde contra si curvam nesciamus, deturque seriei terminatio aliunde poterit hinc inveniri quantitas eodem [modo] composita, seu quasi latus rectum; et curvae forsan aequatio: haec utilia, ad methodum tangentium inversam :) Secundo habebimus semper aequationem egregiam cuius ope possit inveniri valor polygoni valde remoti, ope tantum numeri n. et primorum $A.\ B.\ C.$ nempe ita ut error sit minor quam differentia eius ab alio proximo, semperque idem erit calculus, mutato tantum numero n. quod est admirabile, et in hoc genere summum. Neque enim mente fingi potest appropinquatio perfectior. Reperietur

2 aut C. D. E. *erg. L* 7 nisi *(1)* a^2. b^2. c^2. aequales et r. seu a. et r. *(2)* tria *L* 8 aequales. *(1)* Unde *(2)* Cui *L* 11 natura | a *streicht Hrsg.* | parata *L* 16 ducta. *(1)* Alteram *(2)* (: Unde *L* 18 modo *erg. Hrsg.* 21 A. B. C. *(1)* errori *(2)* et ipsam *(3)* nempe *L*

765,16 tertium fore $\dfrac{2b^6}{\sqrt{a^2+b^2}}$: Richtig wäre $\sqrt{\dfrac{2b^6}{a^2+b^2}}$; der Fehler pflanzt sich fort bis Z. 2, wo bei der Ermittlung des dritten Terms ein weiterer Fehler hinzukommt.

scilicet aequatio simplicissima, pro area sectoris, in quam ingreditur numerus n. progressionis duplae, tanto exactior, quanto numerus maior; sine ulla alia mutatione. Hinc sectio anguli et rationis pulcherrima.

---

3 *Darunter*: Εὕρηκα

2 alia *erg. L*

61. DE AREIS ET CURVIS PER SERIES EXPRIMENDIS
28./29. Juni 1676 – 29. November 1678/[nach dem 29. November 1678]

Die beiden Teilstücke stehen in engem inhaltlichen und äußeren Zusammenhang. Sie wurden von Leibniz ursprünglich auf je ein Bl. 2° mit gleichem Wasserzeichenbild geschrieben und zuerst auf den 29. bzw. den 27., dann auf den 28. bzw. 29. Juni 1676 datiert. Unter den Haupttext von N. 61_1 schrieb Leibniz *Quadratura ex summis ordinatarum* (= Cc 2, Nr. 1449, Druck in einem späteren Band der Reihe) an, das er später aus dem Blatt herausschnitt; der am rechten Rand zunächst noch zusammenhängende Rest wurde getrennt (= LH 35 XII 1 Bl. 24 u. Bl. 25). Der ursprünglich unter Cc 2, Nr. 1449 geschriebene Zusatz 1 (= S. 772 Z. 2–8) stammt möglicherweise erst aus Hannoverscher Zeit; eine Ergänzung dazu (vgl. S. 772 Z. 8) ist erst nach dem auf den 29. November 1678 datierten Zusatz 2 (S. 773 Z. 2–7) entstanden. Leibniz schrieb letzteren in die Lücke zwischen dem Haupttext und Cc 2, Nr. 1449 sowie unter den Zusatz 1. Zusatz 2 enthält einen Verweis auf N. 61_2; nach Tinte und Duktus dürfte der Zusatz 1 von N. 61_2 (= S. 778 Z. 9 – S. 780 Z. 6) zur selben Zeit entstanden sein. Nach der Abfassung von Zusatz 2 zu N. 61_2 (= S. 780 Z. 8 – S. 781 Z. 5) bemerkte Leibniz einen Fehler im Haupttext von N. 61_1, markierte ihn am Rande des Blattes, korrigierte punktuell im Text und strich den Zusatz 2 zu N. 61_2. Zuletzt schrieb er den Zusatz 3 zu N. 61_2 (= S. 781 Z. 7 – S. 782 Z. 9) auf den freigebliebenen Rest des ersten Blattes unter die Zusätze zu N. 61_1.

61_1. DE FIGURARUM AREIS PER INFINITAS SERIES EXPRIMENDIS
28. Juni 1676 – 29. November 1678

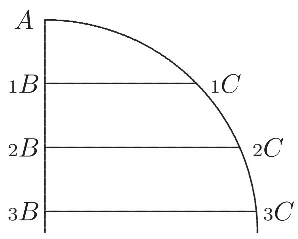
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 24–25. Bl. 24: 1 Bl. ca 4°. 2 S. — Bl. 25: 1 Bl. ca 4°. 10 Zeilen auf Bl. 25 r°. oben. Darunter Zusatz 3 von N. 61_2. Bl. 25 v° leer. — Bl. 24 u. 25 bildeten ursprünglich mit LH 35 XIII 1 Bl. 433 (Cc 2, Nr. 1449), einem Zettel von max. 21,5 x 5,5 cm, ein vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1458, 1459 C tlw.

28. Iun. 1676.

De figurarum areis per infinitas series exprimendis regula generalis.

Inveni methodum generalem cuius ope obtineri semper poterit figura rationalis datae homologa; adeoque expressio curvae propositae per seriem infinitam.

25 *(1)* 29. *(2)* 28. *L* 26 De *(1)* curvarum *(2)* figurarum *L* 27 Inveni | tandem *gestr.* | methodum *L* 27 f. poterit *(1)* series rati *(2)* figura *L*



[*Fig. 1*]

Quae ut intelligatur sit curva ${}_1C{}_2C{}_3C$. Axis $A{}_1B{}_2B{}_3B$. Ordinatae, $y \sqcap {}_1B{}_1C$, vel ${}_2B{}_2C$, vel ${}_3B{}_3C$. Et abscissae sint $x \sqcap A{}_1B$, vel $A{}_2B$, vel $A{}_3B$. Aequatio curvae quaelibet, ut $2ax - x^2 \overset{(1)}{\sqcap} y^2$. Area figurae: $\int \overline{yd\overline{x}}$. Sumatur 1° alia litera quaelibet, z[,] eique talis tribuatur relatio, ut $yd\overline{x}$. sit quantitas rationalis quod fiet si tum y, tum x, sint rationales ex data z. Ut exempli causa, ponatur $x \overset{(2)}{\sqcap} \dfrac{2az^2}{a^2+z^2}$. eumque valorem substituendo in aequatione 1, $\dfrac{4a^2z^2}{a^2+z^2} - \dfrac{4a^2z^4}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(3)}{\sqcap} y^2$. et reducendo:

$$\frac{4a^4z^2\boxed{+4a^2z^4}\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(4)}{\sqcap} y^2. \text{ et } \frac{2a^2z}{a^2+z^2} \overset{(5)}{\sqcap} y. \text{ Iam } d\overline{x} \text{ ita investigabitur:}$$

$$d\overline{x} \overset{(6)}{\sqcap} \ddagger \frac{2az^2}{a^2+z} \ddagger \frac{\boxed{2az^2}+4a\beta z\boxed{+2a\beta^2}}{\boxed{a^2+z^2}+2\beta z\boxed{+\beta^2}} \overset{(7)}{\sqcap} \frac{\boxed{+4\beta az^3}\ddagger 4a^3\beta z\boxed{\ddagger 4\beta az^3}}{a^4+2a^2z^2+z^4}. \text{ eritque}$$

$\ddagger \overset{(8)}{\sqcap} -$ et $\ddagger \overset{(9)}{\sqcap} +$ et $d\overline{x} \overset{(9)}{\sqcap} \dfrac{4a^3\beta z}{a^4+2a^2z^2+z^4}$. et ex 9. et 5. erit $yd\overline{x} \sqcap a^4\beta, \boxed{3}\,\dfrac{z}{a^2+z^2}$ seu $yd\overline{x} \sqcap \dfrac{a^4\beta z^3}{a^6+3a^4z^2+3a^2z^4+z^6}$. quae est figura rationalis, ad quam summa sinuum reducitur.

---

17 *Zur ersetzten Lesart, am Rande:* Error calculi

6 tributatur *(1)* valor *(2)* relatio *L* 6 f. quod ... data z *erg. L* 8 f. substituendo *(1)* seriei *(2)* in *L* 9 f. reducendo: *(1)* $\dfrac{\boxed{4a^2z^2}+4a^2z^4\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4} \overset{(4)}{\sqcap} y^2$ et $\dfrac{2az^2}{a^2+z^2} \overset{(5)}{\sqcap} y$ *(2)* $\dfrac{4a^4z^2\boxed{+4a^2z^4}\boxed{-4a^2z^4}}{a^4+2a^2z^2+z^4}$ *L*

---

12 $d\overline{x} \overset{(9)}{\sqcap}$: Zählung doppelt; Leibniz bezieht sich im folgendem auf diese Gleichung. 15 Error calculi: Leibniz bemerkt den Fehler erst nach der Abfassung von Zusatz 2 zu N. 61₂ (vgl. die Erl. zu S. 780 Z. 9) und korrigiert nur punktuell. Der falsche Wert geht in Z. 12 in die Berechnung von $yd\overline{x}$ ein.

Caeterum saepe idem poterit obtineri compendiosius, si neque y, neque x, adeoque nec $d\overline{x}$ sint rationales; sed tamen factum ex ipsis $yd\overline{x}$ sit quantitas rationalis. Quod contingere poterit, si per eam quantitatem irrationalem una dividitur, per quam altera multiplicatur. Porro quod diximus de resolutione figurae in parallelogramma per ordinatas, locum habet etiam de eius resolutione per convergentes in triangula, aut truncos triangulum residuos; aliaque id genus.

Caeterum si modo ab initio posito, tam $d\overline{x}$, quam y, sive tam x, quam y rationales quaerimus, tunc problema de areis curvarum per series infinitas exprimendis redit ad problemata Diophantea; et illud generale: Datam aequationem rationaliter explicare, ut sit aequatio ad curvam conicam: $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Ergo $\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1$. aequanda quadrato seu $\dfrac{z^2}{a^2}$. Sit $\dfrac{z}{a} \sqcap \dfrac{a}{x} + \sqrt{\mp\dfrac{a}{q} + 1}$. fiet: $\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\ \boxed{\mp\dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{2[a]}{x}\sqrt{\mp\dfrac{a}{q} + 1},\ \boxed{\mp\dfrac{a}{q} + 1}$. Sed sic res ut video nondum absoluta, procedamus rectius et scribamus: ☿ $\dfrac{\sqrt{a^2 2ax \mp a^2\dfrac{a}{q}x^2, \overline{\overline{\mp\dfrac{a}{q} + 1}, 4a^2x^2 \mp 4\dfrac{a}{q}x^4 + \dfrac{a^2}{q^2}x^4}}}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \sqcap \dfrac{z}{a}$ ubi formulata [numeratoris] aequanda quadrato forte utiliter poterit prior semiabsoluta:

$\dfrac{a^2}{2a \mp \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{a^2}{x} + 2[a]\sqrt{\mp\dfrac{a}{q} + 1}$. Imo video ne hoc quidem sic sufficere[,] debet enim non definite, seu in casu particulari, sed indefinite reddi rationalis. Praeterea non nisi duae restare debent literae indeterminatae in una aequatione. Itaque tertia assumta quantitate ω, explicanda per eam x, ita ut possit extrahi radix ex prima formula seu valore ipsius z, ut scribatur:

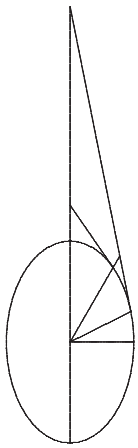
6 f. genus. *(1)* Tota ergo res eo redit, data aequati *(2)* Caeterum si *(a)* vulgari ratione *(b)* modo *L* 10 curvam *(1)* ellipseos *(2)* conicam *L* 12 a *erg. Hrsg.* 13 f. nominatoris *L ändert Hrsg.* 15 a *erg. Hrsg.*

$\frac{a^2}{2ax \text{ ŧ } \frac{a}{q}x^2}\boxed{\text{ŧ}\frac{a}{q}+1} \sqcap \omega^2+2\omega\sqrt{\text{ŧ}\frac{a}{q}+\frac{1}{1}}\boxed{\text{ŧ}\frac{a}{q}+1}$. $\text{ŧ }\frac{a}{q}+1$. vocemus γ. et $\omega \sqcap \frac{v}{2a \text{ ŧ } \frac{a}{q}x}$ fiet: $\frac{a^2}{2ax \text{ ŧ } \frac{a}{q}x^2} \sqcap \frac{v^2+2\gamma v\overline{2a \text{ ŧ } \frac{a}{q}x}}{\boxed{2}\overline{2a \text{ ŧ } \frac{a}{q}x}}$. seu $\frac{a^2}{x} \sqcap \frac{v^2+2\gamma v2a \text{ ŧ } 2\gamma v\frac{a}{q}x}{2a \text{ ŧ } \frac{a}{q}x}$: $2a^3 \text{ ŧ } \frac{a^3}{q}x \sqcap v^2x+4\gamma vax \text{ ŧ}2\gamma\frac{a}{q}x^2$. sive $x^2\,\underbrace{\boxed{\begin{array}{l}\text{ŧ } 2q\,v \\ \text{ŧ }\frac{q}{2\gamma a}v^2 \\ -\frac{a^2}{2\gamma}\end{array}}}_{\text{☽}}\begin{array}{l} \\ \bullet \\ \bullet\end{array}\, x+\frac{\text{☽}^2}{4} \sqcap \frac{\text{☽}^2}{4}+2a^3$. Sed ita ex $\frac{\text{☽}^2}{4}+2a^3$ deberet radix extrahi posse, ubi x^2 ascendit ad quadratoquadratum, adeoque res prorsus ut ab initio unde redordiri possemus a formula ☿. Sed id nunc non opus, sufficit methodum tenere. Imo ope formulae ☿ res multo simplicior reddi potest. Scribamus $2ax\text{ŧ}\frac{a}{q}x^2 \sqcap \xi$. fiet $\frac{\sqrt{\xi+\gamma\xi^2}}{\xi} \sqcap \frac{z}{a}$. Extrahenda est radix ex $\xi+\gamma\xi^2 \sqcap \boxed{2}\overline{1+\gamma\xi}\varphi^2$. et $\xi \sqcap \varphi^2+\gamma\xi\varphi^2$. Aliter $\cancel{\xi}+\gamma\xi^{\cancel{2}} \sqcap \psi^2\xi^{\cancel{2}}$ seu $1+\gamma\xi \sqcap \psi^2\xi$. sed non est his nunc immorandum. Sufficit methodum tenere, ut tantum ad inventionem seriei rationalis pro curva, solutio problematis Diophantaei supersit.

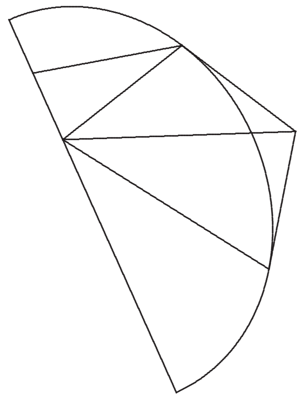
3–7 $+2a^3$ *(1)* potest *(2)* deberet *L* 7 res *(1)* difficilior quam *(2)* prorsus *L* 12 pro curva *erg. L*

3 $\text{ŧ}2\gamma\frac{a}{q}x^2$: Leibniz vergißt in diesem Term den Faktor v; der Fehler geht in die anschließende Umformung der quadratischen Gleichung ein, in der auch der Term $+2a^3$ noch umgeformt werden müßte.

[Zusatz 1]



[Fig. 2]



[Fig. 3]

$\dfrac{a^2}{2ax \pm \frac{a}{q}x^2}\ \boxed{\underbrace{\pm\frac{a}{q}+1}_{\gamma}} \sqcap \omega^2 + 2\omega\sqrt{\gamma}\,\boxed{+\gamma}$ sive $2ax \pm \frac{a}{q}x^2, \frown \omega^2 + 2\omega\sqrt{\gamma} \sqcap a^2$. Pro x sumatur $\frac{q}{2} \pm y$ pro $2ax \pm \frac{a}{q}x^2$, fiet $+\frac{2aq}{2} \pm 2ay,, \pm \frac{a}{q}\,\frac{q^2}{4} + ay \pm \frac{a}{q}y^2$. $x \sqcap y + c$. fiet $2ay + 2ac \pm \frac{a}{q}y^2 \pm \frac{2a}{q}yc + c^2$. sit $\cancel{2}\cancel{a}\cancel{y} \sqcap \pm\frac{\cancel{2}\cancel{a}}{q}c\cancel{y}$ seu $c \sqcap \mp q$. fiet $2ax \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap q^2 \mp 2aq \pm \frac{a}{q}y^2 \sqcap$ *[bricht ab]*

Sit $\omega \sqcap \frac{v}{x}$. fiet: $\dfrac{a^2}{2ax \pm \frac{a}{q}xx}$ *aequ.* $\dfrac{v^2 + 2v\sqrt{\gamma}}{x^2}$ seu $x \sqcap \dfrac{2avv + 4av\sqrt{\gamma}}{a^2 \pm \frac{a}{q}vv \pm \frac{2a}{q}v\sqrt{\gamma}}$ et $d\overline{\omega}$ *aequ.* $\dfrac{vd\overline{x} - xd\overline{v}}{xx}$ et pro x item pro $d\overline{x}$ substituendo valorem habetur $xd\overline{\omega}$ per v rationaliter.

7 *(1)* yy $\sqcap$ *(a)* z^2 *(b)* $v^2 + a^2b^2$. Ergo $2yd\overline{y} \sqcap 2vd\overline{v}$. Ergo $d\overline{y} \sqcap \dfrac{2vd\overline{v}}{\langle\text{—}\rangle^2 + b^2}$ *(2)* Sit *L* 8 et ... rationaliter *erg L*

[*Zusatz 2*]

29. Novemb. 1678.

Res non difficulter absolvitur hoc modo: $\ddagger\dfrac{a}{q}+1$ sit *aequ.* m et fiet: $\dfrac{z^2}{a^2}m^2$ *aequ.* $\dfrac{a^2}{2ax\ddagger\dfrac{a}{q}x^2}$. $(\ddagger)\dfrac{z^2}{a^2}(\ddagger)m, e$ *aequ.* $\dfrac{a}{x}$, et fiet: $\ddagger\dfrac{z}{a}\overline{(\ddagger)m}, \smile e$ *aequ.* $\dfrac{a}{2a\ddagger\dfrac{a}{q}x}+1$. Res sic non procedit quia incognita in nominatore, ideo sic procedemus: $z^2 2ax \ddagger z^2\dfrac{a}{q}x^2 - m^2 2ax \ddagger m^2\dfrac{a}{q}x^2$ *aequ.* a^2. Ponatur [*bricht ab*]

Vide 29. Iun. 1676. ubi pro curva conica series rationalis quaeritur.

5 in *(1)* numeratore *(2)* nominatore, ideo *(a)* semper pro z scribamus $\dfrac{\mathrm{q}}{\langle - \rangle}$ et $\dfrac{1}{\langle - \rangle}$ aequ. x^2 *(b)* sic *L*

7 Vide: N. 61$_2$.

61_2. PRO CURVA CONICA SERIES RATIONALIS QUAERENDA
29. Juni 1676 / [am und nach dem 29. November 1678]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 25, 29. Bl. 25: 1 Bl. ca. 4°. 1/2 S. auf Bl. 25 r° unten, darüber 10 Z. von N. 61_1 (= S. 772 Z. 1–8 und S. 773 Z. 5–7). Bl. 25 v° leer. — Bl. 29: 1 Bl. 2°. 2 S. Haupttext und Zusätze 1 u. 2 auf Bl. 29. Zusatz 3 auf Bl. 25 r°. Datum u. Überschrift auf Bl. 29 r° oben ergänzt.
Cc 2, Nr. 1459 A–B, C tlw.

29. Iun. 1676.

P r o c u r v a c o n i c a s e r i e s r a t i o n a l i s q u a e r e n d a

$$\sqrt{\underbrace{\frac{a^2}{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}}_{☽} + 1 \ddagger \frac{a}{q}} \sqcap \frac{z}{a}.\ \text{seu}\ a^4 + 2a^3x \ddagger \frac{a^3}{q}x^2,\ \ddagger 2a^3x + \frac{a^4}{q^2}x^2 \sqcap 2z^2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2z^2.$$

Determinando ad tangentes: $2a^3t \ddagger \frac{2a^3}{q}xt \ddagger 2a^3t + \frac{2a^4}{q^2}xt - 2z^2at \ddagger \frac{2a}{q}xtz^2 \sqcap 4z^2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2z^2$ eritque $t \sqcap \dfrac{4z^2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2z^2}{☿\ 2a^3 \ddagger \frac{2a^3}{q}x \ddagger 2a^3 + \frac{2a^4}{q^2}x - 2z^2a \ddagger \frac{2a}{q}xz^2}$. Et pro z^2. ponendo

---

9 *Daneben:* NB. sub finem solutio vera.

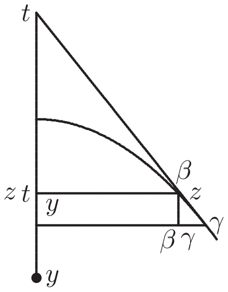
8 *(1)* Pro c *(2)* 27. *(3)* 29. *L*

---

14 sub finem: Gemeint ist wohl ursprünglich der gestrichene Zusatz 2, sinngemäß Zusatz 3.

10–775,1 $\ddagger 2a^3x$: Richtig wäre $\ddagger \frac{2a^4}{q}x$; dieser und ein weiterer Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Berechnung der Subtangente t, die Leibniz in S. 775 Z. 1 abbricht.

$\frac{\odot\ a^4+2a^3x\pm\frac{a^3}{q}x^2\pm\frac{2a^3}{x}+\frac{a^4x^2}{q^2}}{2ax\pm\frac{a}{q}x^2}$ fiet $t\sqcap\frac{2\frown\odot}{2a^3\pm\frac{2a^3}{q}x\pm 2a^3+\frac{2a^4}{q}x}$ [*bricht ab*]



[*Fig. 1*]

$\frac{\gamma}{\beta}\sqcap\frac{z}{t}$ et $\gamma\sqcap\frac{\beta z}{t}$ et $\gamma z\sqcap\frac{[\beta]z^2}{t\sqcap\frac{\text{☽}2z^2}{\text{☿}}}\sqcap\frac{[\beta]\text{☿}}{2\,\text{☽}}$. Unde hic rationalis figura cuius haberi potest summa.

$2ax\pm\frac{a}{q}x^2$. Sit $x\sqcap y+b$ fiet $2ay+2ab,\pm\frac{a}{q}y^2\pm\frac{2a}{q}yb\pm\frac{a}{q}b^2$. et $\cancel{2ay}\pm\frac{\cancel{2a}b}{q}\cancel{y}\sqcap 0$. Ergo $b\sqcap\pm q$ et $x\sqcap y\pm q$ et $2ax\pm\frac{a}{q}x^2\sqcap$ $\boxed{2ay}\pm 2aq\pm\frac{a}{q}y^2\boxed{\overline{\pm\frac{a}{q}\frown\pm 2qy}}\pm\frac{a}{q}q^2$ et fiet $\pm aq\pm\frac{a}{q}y^2$. et fiet $\frac{a^2}{\pm aq\pm\frac{a}{q}y^2}+1\pm\frac{a}{q}\sqcap\frac{z^2}{a^2}$. seu $\boxed{a^4}\pm a^3q\pm\frac{a^3}{q}y^2\boxed{-a^4}+\frac{a^4}{q^2}y^2\sqcap\pm aqz^2\pm\frac{a}{q}y^2z^2$ et $y^2\sqcap$ $\frac{\pm aqz^2\pm a^3q}{\pm\frac{a^3}{q}+\frac{a^4}{q^2}\pm\frac{a}{q}z^2}$. Ergo dividendo per $\frac{aq}{\frac{a}{q}}\sqcap q^2$ debet $\frac{\pm z^2\pm a^2}{\underbrace{\pm a^2+\frac{a^3}{q}\pm z^2}_{(\pm)b^2}}\sqcap\frac{\pm z^2\pm a^2}{(\pm)b^2\pm z^2}$ aequari quadrato. Invertendo sufficit $\frac{\pm a^2+\frac{a^3}{q}\pm z^2}{\pm z^2\pm a^2}$ aequari quadrato, seu: $\pm a^4\pm z^4\pm\frac{a^3}{q}\pm\frac{a^5}{q}$ aequari quadrato.

2 γ *L ändert Hrsg. zweimal*

7–10 $y^2\sqcap\frac{\pm aqz^2\pm a^3q}{\pm\frac{a^3}{q}+\frac{a^4}{q^2}\pm\frac{a}{q}z^2}$: Im letzten Term des Nenners unterläuft Leibniz ein Vorzeichenfehler, der das Ergebnis in Z. 10 beeinträchtigt.

$\dfrac{a^2}{+\frac{a}{q}-\frac{a}{q}y^2}+1-\dfrac{a}{q}\sqcap\dfrac{z^2}{a^2}$ aequatio ipsarum z. quae homogeneae sunt curvae conicae.

Aequatio ad sectionem conicam $aq-\dfrac{a}{q}y^2\sqcap v^2$. Compendii causa $1-\dfrac{a}{q}$ vocemus $\dfrac{\theta}{a}$. fiet

$\boxed{\dfrac{a^2}{aq-\frac{a}{q}y^2}}\ +\dfrac{\theta}{a}\ \sqcap\ \dfrac{z^2}{a^2}$ aequatio curvae conicae. Unde et $\dfrac{qa}{q^2-y^2}\sqcap\dfrac{z^2-\theta a}{a^2}$. Ergo

$\dfrac{qa}{q^2-y^2}\ +\dfrac{\theta}{a}\ \sqcap\ \dfrac{z^2}{a^2}$

$z^2-\theta a,\frown q^2-y^2\sqcap qa^3$ aequatio generalis figurae quae curvae conicae homogenea est. $z+\sqrt{\theta a},z-\sqrt{\theta a},q+y,q-y\sqcap qa^3$. [Ponatur $q+y\sqcap\dfrac{\omega a^2}{z+\sqrt{\theta a},z-\sqrt{\theta a}}$ fiet $a^2\omega,q-y\sqcap qa^3$ et $q-y\sqcap\dfrac{qa^{\cancel{3}}}{\cancel{a^2}\omega}$. Ergo $2q\sqcap\dfrac{qa}{\omega}+\dfrac{\omega a^2}{z+\sqrt{\theta a},z-\sqrt{\theta a}}$.] $2q\sqcap\dfrac{qa,z+\sqrt{\theta a},z-\sqrt{\theta a}+\omega^2a^2}{z+\sqrt{\theta a},z-\sqrt{\theta a},\omega}$ seu $qaz^2-qa\theta a+\omega^2a^2\sqcap 2q\omega z^2-2q\omega\theta a$ ☽.

Ponatur $az\sqcap ce+dv+fa$ et $\omega\sqcap ge+hv+la$ fiet

$\dfrac{q}{a},,,\overline{c^2e^2+2cdev+2cfae,+d^2v^2+2dfav+f^2a^2},,-qa\theta a,,$

$+[a^2,]\ g^2e^2+2ghev+2glae+h^2v^2+2hlav+l^2a^2$

$\sqcap$

1 f. conicae. *(1)* | q $\sqcap$ ∓Q. *streicht Hrsg.* | Aequatio ad curvam conicam $2\mathrm{ax}\mp\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{Q}}\mathrm{x}^2\sqcap$ *(2)* Aequatio *L* 3 conicae *(1)* seu $\mathrm{qa}+\mathrm{q}^2-\mathrm{y}^2-\mathrm{a}^2-\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{y}^2$ *(2)* . Unde *L* 5 $\frown\mathrm{q}^2-\mathrm{y}^2\sqcap$ *(1)* quadrato *(2)* qa^3 aequatio *(a)* ad curvam conicam *(b)* generalis *L* 5 f. est. *(1)* Fingamus *(2)* Sit $\mathrm{q}+\mathrm{y}\sqcap\frac{\omega\mathrm{a}}{\mathrm{z}+\sqrt{\theta\mathrm{a}}}$ et fiet $\mathrm{y}\sqcap\frac{\omega\mathrm{a}}{\mathrm{z}+\theta\mathrm{a}\,(!)}-\mathrm{q}$ et $\mathrm{q}-\mathrm{y}\sqcap 2\mathrm{q}-\frac{\omega\mathrm{a}}{\mathrm{z}+\theta\mathrm{a}\,(!)}$ et pro $\mathrm{z}^2-\theta\mathrm{a}\frown\mathrm{q}^2-\mathrm{y}^2\sqcap\mathrm{qa}^3$. fiet: $\mathrm{z}\sqrt{\theta\mathrm{a}},\frown 2\mathrm{q}\omega-\frac{\omega^2\mathrm{a}}{\mathrm{z}+\sqrt{\theta\mathrm{a}}}\sqcap\mathrm{qa}^3$ *(3)* $\mathrm{z}+\sqrt{\theta\mathrm{a}}$ *L* 6 f. Ponatur ... $\frac{\omega\mathrm{a}^2}{\mathrm{z}+\sqrt{\theta\mathrm{a}},\mathrm{z}-\sqrt{\theta\mathrm{a}}}$. *gestr. L, erg. Hrsg.* 11 a^2, *erg. Hrsg.*

$$\begin{array}{llllllllll}
\left[\frac{2q}{a^2},\right] & c^2g\,e^3 & +2cdg\,e^2v & +2cfag\,e^2 & +d^2g\ \ v^2e & +2dfag\ ve & +f^2a^2g\ \ e & +d^2h\,v^3 & +2dhfa\,v^2 \\
 & +c^2h & +lac^2 & +2cdh & +2cfah & & & & +lad^2\ \ .. \\
 & & & & +2lacd & +2la^2cf\,. & & & \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{l}
\quad +f^2a^2hv+f^2a^3l \\
\quad +2dfla^2 \\
-2q\theta[a],\ \overline{ge+hv+la}
\end{array}$$

Ubi habemus: v^3. e^3. v^2e. e^2v. e^2. v^2. v. e. ... Tollendi ergo termini e^3. e^2v. e^2. Pro e^3 tollenda: $c^2g \sqcap 0$. Pro e^2v, tollenda erit $2cdg + c^2h \sqcap 0$. Quorum utrumque non potest praestari rectius quam ponendo $c \sqcap 0$. Sed e^2. video hac eadem methodo non posse tolli simul enim c et g fierent $\sqcap 0$. et evanesceret e nec nisi una indeterminata v, intrat aequationem.

$a^2z^2 - \theta a^3 \frown a^2q^2 - a^2y^2 \sqcap qa^7$. Pone $az \sqcap ce + dv + fa$. et $ay \sqcap ge + hv + la$. erit: $qa^7 \sqcap c^2e^2 + 2cdev + 2cfae + d^2v^2 + 2dfav + f^2a^2, -\theta a^3,, \frown a^2q^2, +g^2e^2 + 2ghev + 2glae + h^2v^2 + 2hlav + l^2a^2$. Video potuisse etiam denominatores dari ipsis az, et ay. in quos intrassent ipsae e. et v, nec ideo ad altiores terminos ascendissemus, habuissemusque alteram tantum arbitrariam, adeoque libertatem destruendi magnam, at in aequatione ☽ potuissemus quidem etiam maiorem habere numerum arbitrariarum, licet altius non ascendendo, sed ea cautione, ut idem sit denominator ipsarum az. et aw. Nimirum aequatio $qaz^2 + \omega^2a^2 + 2q\theta a\omega \sqcap 2q\omega z^2 + qa^2\theta$. Pro z ponatur $\dfrac{a\varphi}{\psi}$. pro ω $\dfrac{a\lambda}{\psi}$. Unde fiet: $qa^3\varphi^2\psi + a^4\lambda^2\psi + 2q\theta a^2\lambda\psi^2 \sqcap 2qa^3\lambda\varphi^2 + qa^2\theta\psi^3$. $a\lambda \sqcap ce + dv + fa$. $a\varphi \sqcap ge+hv+la$. $a\psi \sqcap me+nv+ar$. Nuspiam ascendetur ultra v^3. e^3. v^2e. e^2v. v^2. e^2. ve. v. e. Quod si ergo desideramus e puram (nam par est ratio, cum eodem modo valores formentur ex e. quam v. et si unum impossibile, erit et alterum) tollenda e^3, e^2v, e^2. Excerpamus e^3. explicando saltem animo terminos quibus opus: $qg^2me^3 + ac^2me^3 + \dfrac{2q\theta}{a}m^2ce^3 \sqcap 2qg^2ce^3 + \dfrac{q\theta}{a}m^3e^3$. Ergo $aqg^2m + a^2c^2m + 2q\theta m^2c \sqcap 2aqg^2c + q\theta m^3$. Et pro e^2v, tollenda fiet aequatio $+qg^2n + q2ghm, +ac^2n + a2cdm, +\dfrac{2q\theta}{a}m^2d + \dfrac{4q\theta}{a}mnc \sqcap 2qg^2d + 4qghc + \dfrac{3q\theta}{a}m^2n$.

1 $\frac{2q}{a^2}$, *erg. Hrsg.* 6 a *erg. Hrsg.* 10 una *(1)* incogni *(2)* indeterminata *L*

Denique pro e^2 tollenda fiet: $qg^2ra+[q2glam]+ac^2ar+a2cfam+\frac{2q\theta}{a}m^2fa+\frac{4q\theta}{a}marc \sqcap 2qg^2fa+4qglac+[\frac{q\theta}{a}3m^2ar]$. Ponendo $m.$ et $c \sqcap 0$ satisfiet aeq. 1. Unde pro aeq. 2: $qg^2n \sqcap 2qg^2d$ seu $n \sqcap 2d$; et ex aeq. 3. $qg^2ra \sqcap 2qg^2fa$ seu $ra \sqcap 2fa$ caeterae arbitrariae, et fieri possent $h.$ et $l \sqcap 0.$

Posuimus $a\lambda \sqcap ce+dv+fa.$ $a\varphi \sqcap ge+hv+la.$ $a\psi \sqcap me+nv+ar.$ $m \sqcap c \sqcap h \sqcap l \sqcap 0.$ $n \sqcap 2d.$ $ar \sqcap 2fa.$ erit $a\lambda \sqcap dv+fa.$ $a\varphi \sqcap ge.$ $a\psi \sqcap 2dv+2fa.$ $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{a\lambda}{a\psi}$ $[\sqcap]$ $\frac{dv+fa}{2dv+2fa} \sqcap \frac{1}{2}$ quod absurdum est. Ita enim ipsa ω fieret constans, non ergo sic licet.

[*Zusatz 1*]

Omnia pagina praecedenti huc reducta erant: $\frac{qa}{q^2-y^2}$ *aequ.* $\frac{z^2-\theta a}{a^2}$.

$$\left.\begin{matrix} +a^3q \\ +\theta aq^2 \end{matrix}\right\} \textit{aequ. } q^2z^2+\theta ay^2-y^2z^2$$

---

10 *Unter aequ.: m*

18 f. *Zur ersetzten Stufe (2) der Lesart, gestrichen:*

$a\lambda \sqcap dv+fa$ $\quad a^2\lambda^2 \sqcap d^2v^2+2dfav+f^2a^2$

$a\varphi \sqcap ge+2fa$ $\quad a^2\varphi^2 \sqcap g^2e^2+4gfae+4f^2a^2$

$a\varphi \sqcap 2dv$ [*bricht ab*] $\quad a^3\lambda g^2 \sqcap g^2de^2v+4gfadev+4f^2a^2dv+g^2fae^2+4gf^2a^2e+4f^3a^3$

1 q2glac *L ändert Hrsg.* 2 $\frac{q\theta}{a}3m^2e^2ar$ *L ändert Hrsg.* 4 f. $l \sqcap 0.$ *(1)* $\frac{z}{a} \sqcap \frac{ge+hv}{2dv+2fa}$ et $\frac{\omega}{a} \sqcap \frac{dv+fa}{2dv+2fa}$. $a\lambda \sqcap dv+fa.$ $a\varphi \sqcap ge+2fa.$ $2dv+2fa \sqcap a\psi$ *(2)* | $qa^4\varphi^2\psi+a^5\lambda^2\psi+2a^3q\theta\lambda\psi^2 \sqcap 2qa^4\lambda\varphi^2+qa^2\theta\psi^3$. *streicht Hrsg.* | $qa2dv\overline{\boxed{g^2e^2}+4gfae+4f^2a^2}+a^22dv\overline{d^2v^2+2dfav+f^2a^2}+2q\theta 4d^2v^2\,\overline{dv+fa} \sqcap 2ga\,\overline{\boxed{g^2de^2v}\,4gfadev+4f^2a^2dv+g^2fae^2+4gf^2a^2e+4f^3a^3}$ *(3)* Inven *(4)* Posuimus *L* 6 $\sqcap$ *erg. Hrsg*

9 f. $\frac{z^2-\theta a}{a^2}$. *(1)* Loco $\frac{z^2}{a^2}$ ponatur $\frac{b^2}{\omega^2}$ et fiet: $\frac{z}{a}$ aequ. $\frac{b}{\omega}$ et scribemus *(a)* $\frac{z^2}{b^2}$ *(b)* $\frac{b^2}{\omega^2}+$ *(3)* Loco $\frac{z^2-\theta a}{a^2}$ ponatur *(4)* Sit q^2-y^2 aequ. $\frac{1}{e^2}$ seu *(5)* $+a^3q$ *L*

z *aequ.* $ce+dv+f$. y *aequ.* $ge+hv+k$. fiet:

q^2z^2 *aequ.* $q^2, \overline{c^2e^2+d^2v^2+2cdev+2cfe+2dfv+f^2}$

θay^2 *aequ.* $\theta a, \overline{g^2e^2+h^2v^2+2ghev+2gke+2hkv+k^2}$

addatur valor ipsius y, et quadretur atque auferatur, summa comparetur cum aequatione ex rationali excitata.

$q^2z^2+\theta ay^2-y^2z^2 \begin{array}{l}-a^3q\\ -\theta aq^2\end{array}$ *aequ.* 0. z *aequ.* $\dfrac{de}{v}$ et y *aequ.* $\dfrac{dv}{e}$, fiet

$q^2\dfrac{d^2e^2}{v^2}+\dfrac{\theta ad^2v^2}{c^2} \begin{array}{l}-a^3q\\ -\theta aq^2\end{array}$ *aequ.* d^4. Unde ut extrahi possit radix, fiet:

$\dfrac{qde}{v}+\sqrt{\theta a},\dfrac{dv}{e} \begin{array}{l}-2q\sqrt{\theta a}d^2\\ -a^3q\\ -\theta aq^2\end{array}$ *aequ.* d^2

$q^2z^2+\theta ay^2-y^2z^2$ *aequ.* m. Scribatur z^2 *aequ.* ce^2+dv^2+r. et y^2 *aequ.* fe^2+gv^2+h.

$$\begin{array}{llllll}
\text{fiet} \quad q^2c\,e^2 & +\ q^2d\,v^2 & -cfe^4-dgv^4-cg\,e^2v^2 & \boxed{\begin{array}{ll}-hc\,e^2 & -hd\,v^2\\ -rf & -rg\end{array}} & -hr \ \textit{aequ.}\ 0\\
+\theta af & +\ \theta ag & \qquad\qquad -df & & -m\\
-\ hc & -\ hd & & & [+q^2r]\\
-\ rf & -\ rg & & & [+\theta ah]
\end{array}$$

---

6 *Darunter:* Imo hoc non licet, quia sic ex duabus incognitis fit una, non ponitur yz *aequ.* constanti.

1 *(1)* Pone z aequ. yω+f fiet $\begin{array}{l}+\mathrm{a}^3\mathrm{q}\\ +\theta \mathrm{aq}^2\end{array}$ aequ. $\mathrm{q^2y^2w^2+2q^2yf+q^2f^2+\theta ay^2,-z^2y^2w-2z^2yf+z^2f^2}$ *(2)* Loco z^2 scribe $\mathfrak{z}$ loco y^2 scribe v fiet $\mathrm{a^3q+\theta aq^2}$ aeq. $\mathrm{q}\mathfrak{z}+\theta \mathrm{a}v-v\mathfrak{z}$, fiat $\mathfrak{z}$ aequ. e + f et v aequ. h + l. et habebimus $\mathrm{a^3q+\theta aq^2}$ aequ. $\mathrm{qe+qf+\theta ah+\theta al-eh-le-fh-fl}$ fiant $\mathrm{a^3q+\theta aq^2}$ aequ. $\mathrm{qf+\theta al-fl}$. et *(a)* restabit qe *(b)* fiat: h aequ. e et *(aa)* faciamus *(bb)* fiet: $\mathrm{q+\theta av-el}$. et restabit $\mathrm{qe+eah-eh-le-fh}$ aequ. 0 *(3)* Scribatur compendii ergo $\mathrm{a^3q+\theta aq^2}$ aequ. m et fiet: mz + ny *(4)* z *L* 16 $+\mathrm{q^2r}$ *erg. Hrsg.* 17 $+\theta\mathrm{ah}$ *erg. Hrsg.*

778,9 pagina praecedenti: s. o. S. 775 Z. 7–10. 778,11 m: In Z. 13 setzt Leibniz die rechte Seite der Formel gleich m.

At aequ. le^2+nv^2+p ducenda in $\beta e^2+\gamma v^2+\delta$, fiet: aequatio comparanda priori quod fieri potest et habebimus aequationem le^2+nv^2+p. inventis $l.n.p.$ item aliis literis, inde pro e^2 et v^2 restituemus y^2 et z^2 ope aequationum purarum quas habemus et res omnis facile absoluta habebitur. Multisque aliis modis in potestate est.

Tantum utile erat huiusmodi comparationes iam generaliter fuisse institutas ne opus sit calculo.

[*Zusatz 2, gestrichen*]

Aliter: $\frac{zz}{aa}\ \overset{(1)}{aequ.}\ \frac{a^2}{aq-\frac{a}{q}yy}\ \boxed{+1-\frac{a}{q}}$ ponatur $\overset{(2)}{aequ.}\ \frac{vv}{\overline{\sqrt{aq}\pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}\ \boxed{2}}+\frac{2v\sqrt{1-\frac{a}{q}}}{\sqrt{aq}\pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}$ $\boxed{+1-\frac{a}{q}}$ ergo fiet: $\frac{aa}{\sqrt{aq}\mp y\sqrt{\frac{a}{q}}}\ \overset{(3)}{aequ.}\ \frac{aa}{\sqrt{aq}\pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}+2v\sqrt{1-\frac{a}{q}}$. Unde in aequ. (4) habetur valor ipsius y rationaliter per v. Iam quia ex valore 2. ipsius $\frac{zz}{aa}$ extrahi potest radix quadratica, fiet: $\frac{z}{a}\ \overset{(5)}{aequ.}\ \frac{v}{\sqrt{aq}\pm y\sqrt{\frac{a}{q}}}+\sqrt{1-\frac{a}{q}}$ et pro y. substituendo valorem ex aequ. 4. habebitur in aequ. 5 ipsa z. rationaliter per v. Sed necesse est $\frac{a}{q}$ esse quantitatem

---

8–781,5 *Zum gestrichenen Zusatz, nicht gestrichen:* $\frac{a^2}{aq-\frac{a}{q}yy}+1-\frac{a}{q}$ revocentur ad unum denominatorem. Is variis modis divelli poterit in duos prout prius arbitrarie compositam fractionem multiplicaverimus.

9 *Zu* aequ. (4): Error.

9 in aequ. (4) *erg. L*

---

9 in aequ. (4): Gemeint ist die Gleichung (4) in N. 61₁; vgl. die Erl. zu S. 769 Z. 9 f.

affirmativam et minorem quam 1. sin minus poterunt quaedam mutari, ut res tamen succedat.

Loco aequ. 1. quaerimus valorem iψius yy. fiet: $zzaq - \frac{a}{q}zzyy$ *aequ.* $\cancel{a^4} + a^3q - \frac{a^3}{q}yy - \cancel{a^4} + \frac{a^4}{qq}yy$. Ergo $\frac{b}{c}yy$ *aequ.* $\dfrac{bzzaq - ba^3q}{\frac{a}{q}zz - \frac{a^3}{q} + \frac{a^4}{qq}}$ *aequ.* $d + e$ ubi etiam variari potest in modo resolvendi in terminos duos.

[*Zusatz 3*]

$$\frac{a^2 + aq\,-aa - \frac{a}{q}yy + \frac{a^2}{q^2}yy}{ay - \frac{a}{q}yy} \textit{ aequ. } \frac{zz}{aa} \textit{ aequ. } \frac{a^2q^2 - 2a^2yy + \frac{a^2}{q^2}y^4 + \frac{a^3}{q}yy - \frac{a^3}{q^3}y^4 \odot}{\boxed{2}\,\overline{aq - \frac{a}{q}yy}}.$$

Ut ergo numerator fiat quadratus ponatur y *aequ.* $\dfrac{b^3 + 3c^2v + dvv}{e^2 + 2ev + vv}\;\dfrac{\text{☽}}{\text{♀}^2}$. Sit compendio

$$\begin{array}{lll}
-2a^2 + \frac{a^3}{q} & \textit{aequ.} & r^2 \text{ et } \frac{a^2}{q^2} - \frac{a^3}{q^3} \textit{ aequ. } \frac{s}{a} \text{ fiet:} \\
\odot\,[\text{♀}^8\,] & \textit{aequ.} & a^2q^2\text{♀}^8 + r^2\,\text{☽}^2\text{♀}^4 + \frac{s}{a}\,\text{☽}^4. \\
\text{☽}^2 & \textit{aequ.} & b^6 + 2b^3c^2v + 2b^3dvv + c^4v^2 + 2c^2dv^3 + d^2v^4. \\
\text{☽}^4 & \textit{aequ.} & b^{12} + 4b^9c^2v + 4b^9dvv + 2b^6c^4v^2 + 4b^6c^2dv^3 + 2b^6d^2v^4, + \\
 & & 4b^6c^4v^2 + 8b^6c^2dv^3 + 4b^3c^6v^3 + 8b^3c^4dv^4 + 4b^3c^2d^2v^5, + \\
 & & 4b^6d^2v^4 + 4b^3c^4dv^4 + c^8v^4 + [8]b^3c^2d^2v^5 + [4]c^6dv^5 + 4b^3d^3v^6 + \\
 & & 2c^4d^2v^6, +4c^4d^2v^6 + 4c^2d^3v^7 + d^4v^8. \\
\text{♀}^4 & \textit{aequ.} & e^4 + 4e^3v + 6e^2v^2 + 4ev^3 + v^4. \text{ et} \\
\text{♀}^8 & \textit{aequ.} & e^8 + 8e^7v + 28e^6v^2 + 56e^5v^3 + 70e^4v^4 + 56e^3v^5 + 28e^2v^6 + \\
 & & 8ev^7 + v^8.
\end{array}$$

10 ♀^8 *erg. Hrsg.* 14 4 *L ändert Hrsg.* 14 2 *L ändert Hrsg.*

Quibus substitutis debet ⊙ comparari cum quadrato ipsius: $f + gv + hvv + kv^3 + lv^4$, seu

$$\begin{array}{llllllll}
\text{cum } f^2 + 2fgv & +2fhvv & +2fkv^3 & +2flv^4 & & & & \\
 & +\ ggvv & +2ghv^3 & +2gkv^4 & +2glv^5 & & & \\
 & & & +\ hhv^4 & +2hkv^5 & +2hlv^6 & & \\
 & & & & & +\ kkv^6 & +2klv^7 & \\
 & & & & & & & +l^2v^8.
\end{array}$$

Sed hinc apparet terminos comparandos esse novem, arbitrarios vero tantum 8 quod non sufficit. Ergo ascendendum ad v^4, sed tunc rursus 17 termini comparandi et 16 arbitrarii tantum.

8 v^4, *(1)* seu faciendae *(2)* sed *L*

62. EXTRACTIO RADICUM PER INFINITAM SERIEM
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 102–103. 1 Bog. 2°. 4 S. Randbrechung außen ca 5 cm. Überschrift ergänzt.
Cc 2, Nr. 1468

Extractio radic. per infinitam seriem

Data aequatione aliqua ut $y^3 + by^2 + c^2y + d^3 \sqcap 0$ invenire valorem ipsius y saltem per infinitam seriem, res maximi foret momenti, posset enim ita omnis aequatio resolvi per solam tabulam logarithmorum.

Ut si fieret
$$y \sqcap \begin{array}{lll} +\dfrac{b}{1} & -\dfrac{b^2}{2} & +\,b^3 \\ & -\,c & +\,c^4 \\ & & +\,d^3 \end{array} \text{ etc.}$$
in infinitum certo modo; utique fieret numeri b^3, c^4. aliaeque id genus ab his numeris, qui cogniti supponuntur altissimae potestates sine multiplicatione per solos logarithmos inveniri possunt. Mihi diu super eo negotio successu irrito meditanti, praeclara tandem analytica incidit via.

Nimirum opus esse, ut duae habeantur aequationes, quarum una saltem infinita sit, eandem habentes incognitam. Tametsi enim reapse sint identicae, id tamen non potest apparere; et tum minime, cum pro arbitrio finimus. Necesse est autem aequationem infinitam esse talem, ut, potentiae ipsius y sint decrescentes, unitate nimirum assumta longe maiore quam y (: quanquam videndum sit, an non res eodem modo succedat, etsi non decrescant :). Habitis iam duabus aequationibus eandem includentibus incognitam; (tametsi identicas) quarum alterutra (vel etiam utraque) sit infinita. Excerpamus finitam ex

---

6 Inventum mense Iunio 1676. Haec aliter longe melius iam habuimus.

14 possunt. *(1)* Videndum autem *(2)* Mihi *L* 16 aequationes, *(1)* una infinita, altera *(2)* quarum *L* 17 non | statim *gestr.* | potest *L* 20 quam y *erg. L* 22 infinita. *(1)* Eius ope *(2)* Excerpamus *(a)* inde *(b)* finitam *L*

---

23 aliter: Andere Methoden, Wurzeln in Reihen zu entwickeln, behandelt Leibniz in N. 32, 33, 38_{15} S. 518 Z. 6 – S. 523 Z. 18, sowie in *Schediasma de extractione radicum*, dat. September 1674, *LSB* VII, 1 N. 125.

infinita, subsistendo alicubi, cum error futurus sit exiguus. Et ita habebimus duas finitas aequationes, vel potius determinationes, aut saltem aequationem et determinationem; unam includentes incognitam, et earum ope ex altera alterius potentias tollemus, et habebimus denique determinationem, quae ipsam incognitam pure contineat seu habebimus valorem ipsius y. purum prope verum. Quem notemus. Et resumta aequatione infinita, ex ea rursus determinationem excerpamus priore propiorem, magisque exactam. Hanc rursus finitae aequationi coniungendo, et ope duarum aequationum vel aequationis et determinationis omnes praeter infimam dignitates tollendo, habebitur rursus determinatio nova, seu propior adhuc valor ipsius y.

Et ita porro in infinitum propiores semper ac propiores habebuntur determinationes, quarum novissima sed quae scribi nequit ipsi y. perfecte aequabitur; tametsi autem omnes scribi non possint, series tamen earum ac progressio apparebit, quod sufficit. Habita iam hac determinationum progressione, locentur illae ordine, et quaerantur earum differentiae, series differentiarum in infinitum aequabitur perfecte quantitati incognitae quaesitae.

Habemus ergo valorem ipsius y. purum infinitum.

Superest tantum, ut modos explicemus quibus data aequatione aliqua finita possit aliqua inveniri infinita ipsi identica: Tales autem modi sunt infiniti. Illum primo, qui cogitandi materiam dedit, explicabo. Versabar in logarithmorum meditatione, cogitabamque aequatione in analogias resoluta, an non possit res absolvi per logarithmos. Ostendit sese via quaedam, sed quam velut nimis operosam omisi; interea videbam, quid consequeretur, si pro logarithmis eorum valores ex supposita hyberbolae quadratura inventi, adhiberentur.

Sit aequatio: $y^3+by^2+c^2y \sqcap d^3$. Haec variis utique modis resolvi potest in analogiam, sed nos uno simplicissimo utamur, qui talis est: $\dfrac{y^2+by+c^2}{d^2} \overset{(1)}{\sqcap} \dfrac{d}{y}$. Iam logarithmus ab y^2+by+c^2 sit λ. Logarithmus ab y sit l. Logarithmus a d sit $l\overline{d}$. et logarithmus a: d^2, erit $2\,l\overline{d}$. Ex aequationis vi necesse est esse: $\lambda - 2\,l\overline{d} \sqcap l\overline{d} - l$ vel $\lambda + l \overset{(2)}{\sqcap} 3\,l\overline{d}$. ubi $l\overline{d}$ cum sit logarithmus cognitae quantitatis d, potest pro cognito haberi. Incognitae autem huius aequationis sunt $\underline{\lambda}$ et $\underline{l}$.

4 denique *erg.* *L* 4 quae *(1)* valorem ipsius y *(2)* ipsam *L* 4 contineat *(1)*. *(a)* Hanc determinationem notemus. Et iam *(aa)* reassumtis duabus *(bb)* reassumta prima aequatione infinita ex ea *(b)* Ha *(2)* seu *L* 10 f. determinationes, *(1)* quarum differentiae *(2)* quarum novissima *(a)* ipsi *(b)* sed *L* 24 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{y}}$. *(1)* id est *(2)* Iam *L* 26 $\mathrm{l}\overline{\mathrm{d}} - \mathrm{l}$ *(1)* ipse autem *(2)* vel *L*

Generaliter autem ex hyperbolae quadratura constat, quantitate aliqua existente A, logarithmum eius assumta quaedam unitate constante, (maiore quam A,) fore $\frac{A}{1} - \frac{A^2}{2} + \frac{A^3}{3} - \frac{A^4}{4}$ etc. Ergo huius ope valores ipsarum λ et l inveniemus: nam quia l est logarithmus ab y. erit $l \overset{(3)}{\sqcap} \frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4}$ etc. et eodem modo λ erit $\overset{(4)}{\sqcap} \frac{y^2+by+c^2}{1} - \frac{\boxed{2}\overline{y^2+by+c^2}}{2} + \frac{\boxed{3}\overline{y^2+by+c^2}}{3}$, etc. Modo ut dixi unitas assumta sit maior, quam y. item maior quam y^2+by+c^2. Hos valores literarum λ et l inventos in aeq. 3. et 4. inserendo in aeq. 2. habebitur aequatio in qua y assurgit ad dimensiones infinitas, fiet enim:

$$\frac{y}{1} - \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} - \frac{y^4}{4} \text{ etc. } + \frac{y^2+by+c^2}{1} - \frac{\boxed{2}\overline{y^2+by+c^2}}{2} + \frac{\boxed{3}\overline{y^2+by+c^2}}{3} \text{ etc.}$$

$\overset{(5)}{\sqcap}\ 3l\overline{d}$. Digeratur illa in ordinem, secundum potentiarum gradus ab infimis incipiendo, apparebit nihilominus progressio in infinitum. Compendii autem causa aequationem hanc semel digestam ita scribemus: $e - fy + gy^2 - hy^3$ etc. ita ut numeri 1. 2. 3. 4. pro quantitatibus sive literis quales calculus daret, habeantur, et fiet aequatio aequivalens ipsi 5: $e - fy + gy^2 - hy^3$ etc. $\overset{(6)}{\sqcap}\ 3l\overline{d}$.

Habemus ergo aequationes duas alteram finitam ab initio propositam; $y^3 + by^2 + c^2y \overset{(7)}{\sqcap} d^3$. alteram infinitam 5 vel 6. Quae tamen duae aequationes plane coincidunt, tametsi ea congruentia infiniti larva tecta, menti humanae, nisi re ad origines revocata, clare apparere non possit. Necesse est tamen coincidere, sive idem inventum iri, sive per priorem sive per posteriorem inveniatur y, quia ipsa 6, ipsius 7. vel 1. non nisi consequentia est, nec quicquam extrinsecus est assumtum. Unde si ope unius y. perfecte ex altera tolleretur, quod tentari non inutile foret, et fieri utique est, saltem observato in

2 eius *(1)* fore: *(2)* assumta *L* 2 constante, (| multo *gestr.* | maiore *L* 5 sit | multo *gestr.* | maior *L* 6 valores | ipsarum *gestr.* | literarum *L* 12 scribemus: *(1)* ey $-$ fy^2 + gy^3 $-$ hy^4 *(2)* e $-$ fy + gy^2 $-$ hy^3 *L* 13–15 aequatio | aequivalens ipsi 5 *erg.* | : *(1)* ey $-$ fy^2 + gy^3 $-$ hy^4 *(2)* e $-$ fy + gy^2 $-$ hy^3 etc. $\overset{(6)}{\sqcap}$ *(a)* 3l$\overline{\text{d}}$. Nam 3, quippe verum numerum, ut a numeris literas valentibus, distinguatur, parenthesi includo. Aequatio autem data *(aa)* est *(aaa)* huic novae infinitae *(bbb)* 1, *(bb)* 1, est *(b)* 3l$\overline{\text{d}}$. | aequivalens ipsi *erg. u. gestr.* | Habemus *L* 20 si *(1)* posset ope unius y tolli ex altera *(2)* ope *L* 21 foret, *(1)* tametsi en *(2)* pro *(3)* et *L*

infinitum progressu, fieret aequatio plane identica, quippe non nisi inter cognitas quantitates. Aequationes autem identicas invenire seu quae sint inter cognitas quantitates idem est quod invenire compendia sive summas, ut alibi animadverti. Quare nec ista inquisitio suo fructu careret. Sed nos ad nostram regrediemur.

Habitis duabus aequationibus finitis eandem incognitam includentibus constat semper valorem illius incognitae posse inveniri pure. Sed in infinitis, singulari opus est arte, quam generatim ab initio expositam nunc exemplo declarabo: Ac primum ex aequatione 6. possumus excerpere determinationes, easque tanto magis exactas, quanto longius progredimur. Ponamus nunc facilitatis causa, rem ita comparatam esse, ut sit e maior vera y, et $e - fy$ minor vera y; $e - fy + gy^2$ maior vera, et ita porro alternando in infinitum. Nam praeterquam quod id fortasse semper certis artibus obtineri potest; poterit simile quiddam praestari, tametsi id non succederet, hoc modo. Quoniam enim literae $e. f. g.$ etc. aliaeque infinitae in paucas tantum, nempe $b. c. d.$ resolvuntur; et posteriores potentias harum trium constantium continent, quae potentiae (posita unitate ipsis $b. c. d. y. y^2 + by + c^2$. maiore) sunt semper decrescentes, hinc determinationes ita excerpi scribique poterunt formulae; quarum prima sit maior vera; prima demta secunda minor, prima demta secunda addita tertia maior, tametsi illae formulae non sint unius tantum potestatis ipsius y, sed plures semper tamen finitas, contineant.

Nos vero ut dixi facilitatis causa et in exemplum ponamus esse: e maiorem quam y; at $e - fy$ minorem quam y; et $e - fy + gy^2$, maiorem: erit prima determinatio haec: $e \sqcap y$. seu determinatio $y \overset{(8)}{\sqcap} e$. Aequatio haec: $y^3 + by^2 + c^2y \overset{(7)}{\sqcap} d^3$. Ubi in aequatione pro y^3 et y^2, substituendo determinationem fiet $e^3 + be^2 + c^2y \sqcap d^3$, et $y \overset{(9)}{\sqcap} \dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$.

2 seu ... sint *erg.* *L* 5 Habitis | ergo *gestr.* | duabus *L* 7 quam *(1)* paulo ante *(2)* generatim *L* 8 excerpere *(1)* partem quae sit maior vera *(2)* determinationem, eamque tanto magis exactam *(3)* determinationes *L* 9 sit *(1)* ey maior vera, ey − fy^2 *(a)* maio *(b)* minor vera; ey − fy^2 + gy^3 *(2)* e maior *L* 11 Nam *(1)* etsi id non *(2)* praeterquam *L* 13 f. posteriores *(1)* priorum, *(2)* potentias *L* 16 secunda *(1)*, tertia *(2)* minor *L* 19 esse: *(1)* ey maiorem quam y; ut ey − fy^2 minorem quam y; et ey − fy^2 + gy^3 *(2)* e maiorem *L* 21 seu ... y $\overset{(8)}{\sqcap}$ e *erg.* *L*

3 alibi: N. 48. 21 $y \overset{(8)}{\sqcap} e$: Die Ungleichung (8) fügt Leibniz erst nach der Numerierung der Gleichung (7) in den Text ein.

Rursus ex infinita excerpendo: $e - fy \sqcap y$ fiet: $y \overset{(10)}{\sqcap} \dfrac{e}{1+f}$ et $y^2 \sqcap \dfrac{e^2}{1+2f+f^2}$ et $y^3 \sqcap \dfrac{e^3}{1+3f+3f^2+f^3}$. Quos valores ipsarum y^2. et y^3. inserendo in aeq. 7. fiet: $\dfrac{e^3}{1+3f+3f^2+f^3} + \dfrac{be^2}{1+2f+f^2} + c^2y \sqcap d^3$ et $y \overset{(11)}{\sqcap} d^3 - \dfrac{be^2}{\boxed{2}\,\overline{1+f}} - \dfrac{e^3}{\boxed{3}\,\overline{1+f}}$.

Rursus excerpendo: $e - fy + gy^2 \overset{☿}{\sqcap} y$ vel $ey - fy^2 + gy^3 \sqcap y^2$, et pro aeq. 7. scribendo $gy^3 + gby^2 + gc^2y \sqcap gd^3$ fiet: aequationem determinationi coniungendo: $ey - fy^2 \boxed{+gy^3} + gd^3 \sqcap y^2 \boxed{+gy^3} + gby^2 + gc^2y$. Unde $y^2 \sqcap \underbrace{gd^3 + \begin{array}{l} e \quad y \smile 1+gb+f \\ -gc^2\ . \end{array}}_{\odot}$ et $y^2 \sqcap \underbrace{+1\,y - e \smile g. \atop +f\ .}_{☽}$

Ergo $\odot$ maior quam y^2, erit etiam maior quam id quod est minus quam y^2, nempe maior quam ☽. Ergo fiet: $gd^3 + \begin{array}{l} e \quad y \smile 1+gb+f \\ -gc^2\ . \end{array} \sqcap \begin{array}{l} +1 \quad y - e \smile g. \\ +f\ . \end{array}$ Unde rursus haberi poterit valor ipsius y. prope verus: ut si $1+f$ vocemus h, et $e-g^2c$ vocemus m. fiet $\dfrac{gd^3+my}{h+gb} \sqcap \dfrac{hy-e}{g}$, sive $g^2d^3 + gmy \sqcap \begin{array}{l} +h^2 \quad y - eh\ . \\ +gbh\ . - gbe \end{array}$ et $y \overset{(12)}{\sqcap} \dfrac{eh+gbe+g^2d^3}{gbh+h^2-gm}$.

Et ita porro in infinitum continuando semper habebuntur determinationes magis magisque exactae seu valores maiores minoresque veris in infinitum. Atque hic duo examinanda sunt, primum an ex una determinatione artis ut ☿ atque aequatione ut 7. inter se iunctis, una tantum determinatio pura nempe 12. proditura sit etsi aliis atque aliis modis in potentiis altioribus ipsius y. ope huius coniunctionis tollendis procedas. Quod si varia vario tractandi modo provenire possunt, examinandum [quid] sit simplicissimum; deinde videndum, an semper certa sit determinationis ratio, per $\sqcap$ vel $\sqcap$, ut quemadmodum ex excerpta $e \sqcap y$ ex aequatione 7. prodiit determinatio $y \sqcap \ldots$ ita in determinatione

1 ex infinita *erg.* *L* 10 fiet: *(1)* semper *(2)* y *(3)* gd^3 *L* 16 valores *(1)* maioresque veris infiniti *(2)* magis magisque proposi *(3)* maiores *L* 17 artis ut ☿ *erg.* *L* 18 pura *(1)* prodeat, etsi variis modis in poten *(2)* nempe *L* 20 possunt, *(1)* examinandus quis *(2)* examinandum | quis *ändert Hrsg.* | sit *L* 21 semper *(1)* si determinatio sit per $\sqcap$ *(2)* assumta sit per $\sqcap$ etiam certo modo ut in *(3)* certa *L*

☿ excerpendo $1 - fy + gy^2 \sqcap y$. debent fieri $y \sqcap \dfrac{eh\,\text{etc.}}{gbh\,\text{etc.}}$ et in 12. sive an valor ille in 12. sit affirmativus.

Quae omnia discutienda sunt ut appareat an determinationes purae iusto maiores ac minores se sequantur alternis; uti excerptae non purae maiores minoresque veris se alternis sequuntur.

Illud vero cavendum inprimis ut sequentes sint semper praecedentibus accuratiores, alioqui nihil ageretur. Porro quoniam haec sublatio ad altiores potentias haud dubie calculum valde attolleret, ideo forte posset in locum aequationis 7. uti duabus primis determinationibus ex ea factis quarum una est $y \sqcap \dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$ et $y \sqcap d^3 - \dfrac{be^2}{\boxed{2}\,\overline{1+f}} - \dfrac{e^3}{\boxed{3}\,\overline{1+f}}$. Atque ita habebuntur facillimo negotio determinationes magis magisque accedentes in infinitum; in excerptis pro y. hos valores substituendo verum quoniam non est certum, ultimam harum infinitarum determinationum aequari incognitae; ideo istud quidem compendium non est aptum ad rem nostram.

Inventis iam determinationibus earumque progressione excedentes separatim; deficientes separatim, ordine collocemus; modo magis magisque accedant verae, et ultimae, veram quantitatem attingant. Nunquam autem, credo, excerptae adhibendae, sed semper ex illis et aequatione factae:

Valores veris

minores	maiores
$\dfrac{d^3 - e^3 - be^2}{c^2}$	$d^3 - \dfrac{be^2}{\boxed{2}\,\overline{1+f}} - \dfrac{e^3}{\boxed{3}\,\overline{1+f}}$
$\dfrac{eh + gbe + g^2d^3}{gbh + h^2 - gm}$	etc.
etc.	etc.

y

4 se *(1)* ordine sequantur; *(2)* sequantur *L* 5 f. sequuntur. *(1)* Ponamus *(2)* Inventis iam determinationibus earumque progressione; *(a)* erit *(b)* eas *(c)* ex *(d)* excedentes separatim, ac deficientes separatim ordine collocemus; modo quo ordine inveniuntur magis magisque *(3)* Illud *L* 7 ageretur. *(1)* Poterit etia *(2)* Porro *L* 8 f. determinationibus *(1)* nempe *(a)* y $\sqcap$ *(b)* y $\sqcap$ e. et *(aa)* y $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{d}^3-}{}$ *(bb)* y $\sqcap$ *(cc)* y $\sqcap$ $\dfrac{\mathrm{e}}{1+\mathrm{f}}$. Una *(2)* ex *L* 11 in excerptis ... substituendo *erg.* *L* 16 attingant. *(1)* Et hinc iam *(2)* Ponamus ita stare: *(3)* Nunquam autem | , credo, *erg.* | excerptae *L*

Ubi notandum haec series etsi conveniant in novissima, tamen in eo differre a Gregorianis, quod ipsi necessarium est, ut eodem modo componantur duae tertiae ex duabus secundis, quo duae secundae ex duabus primis. Nobis vero nulla hoc loco cura huiusmodi compositionum, quaerimus enim tantum series infinitas rationales cognitas incognitae aequales. Nullus tamen dubito quin plerumque etiam Gregorianus componendi modus ad alias contemplationes utilis, accedere possit.

Nunc ut ostendam, quomodo hinc inveniri possit valor infinitus incognitae, idque duobus semper modis. Nempe sive iusto minorum:

Series crescentium	A	B	C	D	E	etc.	
							y
Series decrescentium	$\aleph$	ב	ג	V	W	etc.	

Hinc duas ducemus series infinitas ipsi y aequales.

Series crescentium	A	B	C	D	E	etc.	y
Differentiae		β	γ	δ	η	etc.	

erit y *aeq*: $A + \beta + \gamma + \delta + \eta$ etc.

Series decrescentium:	$\aleph$	ב	ג	V	W	etc.	y
Differentiae:		θ	ψ	μ	ξ		

et $\aleph \sqcap \theta + \psi + \mu + \xi + y$, et fiet $y\,aeq.\,\aleph - \theta - \psi - \mu - \xi$ etc.

Rem ergo succedere nullum dubium est, idque infinitis modis: Tantum de simplicissimis rationibus cogitandum.

Tum, quoad modum inveniendae aequationis infinitae, tum quoad modum, inde eliciendarum determinationum.

1 Si in aequatione infinita inventa non reperiatur alternis + et −; tunc non nisi semel series in quaesitam incognitam desinens habetur, quod nobis sufficit, neque enim convergentibus opus habemus.

7 possit *(1)* series *(2)* valor *L* 8 Nempe *(1)* sint series crescentium in infinitum *(2)* sit *(3)* sive *L* 20 f. cogitandum. *(1)* Et si quidem per logarithmos procedere placeat: forte non erit inutile resolvere *(2)* Tum *L* 22–790,1 determinationum *(1)*, quoad modum *(2)*. *(a)* Quoad modum *(b)* Ad inveniendam aequationem infinitam procedere possumus vel per logarithmos; *(c)* Aequationem *L* 23 aequatione *erg.* *L*

1 f. Gregorianis: J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Def. 9 S. 10 [Marg.].

Aequationem infinitam, vel iam habemus, vel quaerimus: iam habemus ut in problematis tetragonisticis de quibus postea. Quaerimus in aequationibus resolvendis, vel ordinatis rationalibus curvarum inveniendis: quod fit radice ex aequatione curvae naturam explicante, per seriem infinitam extracta. Inveniemus vel per logarithmos, vel sine logarithmis. Per logarithmos, tum quo dixi modo, tum vero fortasse meliore, si aequatio data resoluta sit in analogias simplices, ut si sit $\frac{y+b}{y+c} \sqcap \frac{y+e}{y+f}$. Analogia facta ex aequatione. Et videtur quaevis aequatio data resolvi posse in eiusmodi analogias, quotcunque sit graduum, nam idem erit ac si dicas: $y+b,\ y+f,, \sqcap\ y+c, y+e$. Nec video quid prohibeat generaliter scribi: $1y+b, 2y+c, 3y+d,,$ etc. $\sqcap\ 4y+e, 5y+f, 6y+g$ etc. continuando quantum satis est, pro gradu resolvendae aequationis, inde ducendo in se invicem, poterit aequatio inde proveniens ordinari, et cum data eiusdem gradus conferri.

Et hac methodo quaevis aequatio data optime resolvetur in analogias. Iam logarithmus ab $y+b$. erit $\frac{y+b}{1} - \frac{y^2+2by+b^2}{2}, + \frac{y^3+3y^2b+3yb^2+b^3}{3}$ etc. eodemque modo logarithmus ab $y+f$. tantum pro b. ponendo f. Unde postea logarithmi illi plures ordine additi aut subtracti aequationem dabunt novam eamque infinitam. Sine logarithmis videtur aequatio infinita ex data fieri posse dividendo, ut si sit

---

9 f. NB. 1. 2. 3. numeri sunt hic pro literis.

1 f. quaerimus: iam *(1)* inf *(2)* habemus *(a)* tunc au *(b)* ut *L* 2 f. in *(1)* problematis *(2)* aequationibus *L* 3 inveniendis: *(1)* nam ex hac aequatione *(2)* quod fit radice *(a)* infin *(b)* ex *L* 6 vero *(1)* simplicior *(2)* fortasse *L*

17–791,2 sit *(1)* | aequatio *streicht Hrsg.* | divisor | $\frac{y^2+by+c^2}{y+v}$ ⨍ y *streicht Hrsg.* | *(2)* $\boxed{y^2}$ *L*

$$\begin{array}{l}
y^2 \quad +by \quad +c^2 \\
\hline
y \quad \begin{array}{c} +b \\ -v \end{array} \quad \dfrac{+c^2 - bv - v^2}{y} \quad \dfrac{-c^2 + bv^2 + v^3}{y^2} \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +c^2v \\ -bv^3 \\ +v^4 \end{array}\right.}{y^3} \quad \text{etc.} \\
\hline
\boxed{y+v} \\
-y^2 \quad -vy \\
\boxed{y+v} \\
\begin{array}{c} -by \\ +vy \end{array} \quad \begin{array}{c} -bv \\ -v^2 \end{array} \\
\boxed{y+v} \\
\dfrac{-c^2 + bv^2 + v^3}{y} \\
\boxed{y + v}
\end{array}$$

1–11 *Randbemerkungen*:

Nota non tota aequatio sed una tantum pars sic dividi debet.

Alium etiam appropinquandi modum excogitavi. Aequatio v. g. y^2+by+c^2, multiplicetur verbi gratia per y, fiet: $y^3 + by^2 + c^2y$. Explicetur y per $x + e$, fiet aequatio alia, quae forte utilius dividetur tentando quam prima, praesertim cum tunc tam e, quam dividens $x + v$, sit arbitraria.

14 *(1)* Alium mihi modum proposueram ut si aequatio $\mathrm{y}^2 + \mathrm{by} + \mathrm{c}^2 \sqcap 0$. dividatur per $\mathrm{y} + 1$. vel aliam et restat fractio *(a)* haec negli *(b)* affirma *(2)* Alium *L* 14 excogitavi. *(1)* Dividatur aequatio per aliquam quantitatem et notetur fractio. Et rursus per aliam; *(2)* Aequatio *L*

8 $-v^2$: Richtig wäre $+v^2$. Der Vorzeichenfehler sowie ein weiterer Flüchtigkeitsfehler — der erste Term im Zähler des Bruches Z. 10 müßte c^2v lauten — beeinträchtigen das Ergebnis der Division, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

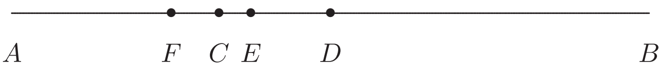
Sed haec dividendi ratio habet difficultates multas ob causas, nam si v non est iam una ex radicibus divisione in infinitum quidem producta, procedit, si vero est una [ex] radicibus, ipsamet incognita est adeoque inutilis. Remedium vero succurrit: Sit aequatio: $y^2 - c^2 \sqcap by$, poterit scribi: $y - c \sqcap \dfrac{by}{c+y}$ et dividendo fiet: $y - c \sqcap \dfrac{by}{c} - \dfrac{by^2}{c^2} + \dfrac{by^3}{c^3} - \dfrac{by^4}{c^4}$ etc. in infinitum, modo sit c maior quam y seu modo series sit decrescens: et haec videtur simplicissima ratio esse aequationem propositam finitam convertendi in infinitam. Ex qua determinationes eliciendo, easque cum ipsa aequatione coniungendo valores puri invenientur appropinquantes; quorum differentiae dabunt seriem infinitam.

Ex generali invento: Quod data serie infinita appropinquantium ad differentiam infinite parvam, habetur etiam series infinita aequalis, nimirum series differentiarum: ista pendent omnia. Unde iam olim notavi etiam ex Wallisii invento inveniri posse seriem aequalem circulo ex dato radio; et contra radium ex data circumferentia, sed illud incommodum in Wallisii methodo, quod non datur applicatio commoda ad partes.

Incidit hic alius appropinquandi modus, quem experiri operae pretium est. Dividatur aequatio proposita $y^2 + by + c^2 \sqcap 0$. per quantitatem $y - v$ arbitrariam, fiet fractio, quae alia atque alia erit, prout explicabitur v. Explicetur v, pro arbitrio, ut per 1. erit fractio vel quantitas affirmativa vel negativa, si affirmativa, erit minor iusto divisor; sin sit negativa, erit maior iusto (+ vel contra pro signis +). Qualiscunque sit sumatur alia ipsius v. explicatio, tunc ut fractio sit contraria, cum antea fuerit negativa, nunc fiat affirmativa, et tunc consistet radix intra duos valores ipsius v. Et ita porro sumendo aliquem medium inter hos duos valorem novum, iterum dividemus, eodemque modo experiemur. Et ut certae cuidam regulae hanc appropinquationem attingemus, poterimus semper differentiam inter duas inter quas consistitur novissime bisecare; vel etiam trisecare. Sed naturalior est bisectio.

1 ratio *(1)* mihi displicet *(2)* habet *L* 2 ex *erg. Hrsg.* 3 f. aequatio: *(1)* $\mathrm{y}^2 - \mathrm{byc}^2 \sqcap \mathrm{c}^2$ poterit scribi: $\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{c}^2}{}$ *(2)* $\mathrm{y}^2 - \mathrm{c}^2 \sqcap \mathrm{by}$, poterit scribi: *(a)* $\mathrm{y} + \mathrm{c} \sqcap \dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{y} - \mathrm{c}}$ *(b)* $\mathrm{y} - \mathrm{c} \sqcap$ *(aa)* $\dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{y} + \mathrm{c}}$ *(bb)* $\dfrac{\mathrm{by}}{\mathrm{c} + \mathrm{y}}$ *L* 7 puri *erg. L* 10 differentiarum: *(1)* Varios alios modos dari posse arbitror *(2)* ista *L* 16 Explicetur v, *(1)* primum ita, ut fra *(2)* pro *L* 18 sit *(1)* quaeratur alius di *(2)* sumatur *L* 19 tunc *(1)* vel ex fract *(2)* ut *L* 23 bisecare *(1)*. *(a)* Poterit *(b)* Posset aliud etiam eligi sed ingen *(2)*; vel *L*

11 olim notavi: nicht ermittelt; ähnlich N. 69; ex Wallisii invento: *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191 S. 178–182 (*WO* I S. 467–469).



[*Fig. 1*]

Est tamen hoc in eo incommodum, quod ita bisecando AD differentiam inter duos valores ad inveniendum punctum C, aliquando eveniet, ut ipsum C incognitum punctum transsiliamus. Nempe bisecando ipsam AB, in D, transsiliemus C, quaesitum et postea non amplius inter D et B, ut in prioribus forte fiebat, sed inter A et D consistet quaesitum, ubi rursus bisecando [AD] in F, consistet punctum C, adhuc inter F et D. Sed rursus FD bisecando in E, contrarium iterum eveniet nec erit punctum C inter E et D, sed inter F et E.

Cumque ista methodus non fere nisi in numeris procedat, nec constanti quadam ratione progrediatur; nec denique sit revera appropinquans ad distantiam infinite parvam; ac denique plane non serviat ad aequationes illas in quibus ipsae pro cognitis assumtae sunt indefinitae, ut fit in aequationibus curvarum; ideo ad nostrum scopum nihil servit. Et redeundum est ad viam illam sane pulcherrimam, hic apertam, ut praeter datam aequationem adhuc alia, infinita, inveniatur.

Aequatio $a^2 - x^2 \overset{\odot}{\sqcap} y^2$. seu $a - x \sqcap \dfrac{y^2}{a+x}$ fietque:

$$a - x \overset{\rightmoon}{\sqcap} \frac{y^2}{a} - \frac{y^2x}{a^2} + \frac{y^2x^2}{a^2} - \frac{y^2x^3}{a^4} + \frac{y^2x^4}{a^5} \text{ etc. vel } x \sqcap a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} \text{ etc.}$$

Ponendum est autem esse a maiorem quam x. nam si minor foret, possemus nihilominus idem praestare, ita aliter dividendo, y^2 non per $a + x$ sed per $x + a$, ut semper sit a in summo, x in imo. Hinc patet esse

$$x \overset{(1)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} \qquad\qquad x \overset{(2)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3}$$

$$x \overset{(3)}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} - \frac{y^2x^4}{a^5}$$

3 punctum C, *(1)* et mox *(2)* aliquando *L* 4 transsiliamus *(1)*; cum sat *(2)*. Nempe bisecando *(a)* in C, *(b)* ipsam *L* 6 AC *L ändert Hrsg.*

15 Aequatio: vgl. N. 48 S. 679 Z. 10.

$$x \overset{\boxed{1}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} \qquad x \overset{\boxed{2}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4}$$

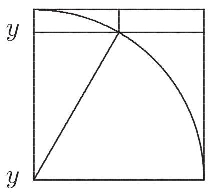
$$x \overset{\boxed{3}}{\sqcap} a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} - \frac{y^2x^2}{a^3} + \frac{y^2x^3}{a^4} - \frac{y^2x^4}{a^5} + \frac{y^2x^5}{a^6}$$

Ubi ex ⊙ et (1) fiet $\underbrace{x^2}_{a^2-y^2} \sqcap ax - \frac{y^2x}{a}$. et $x \sqcap a$. Ex (2) et ⊙ fiet $x \sqcap a - \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2}$ $\llcorner\frac{-y^2a^2+y^4}{a^3}\lrcorner$, vel $x \sqcap \dfrac{a - \frac{y^2}{a},,\llcorner\frac{-y^2a^2+y^4}{a^3}\lrcorner}{[1] - \frac{y^2}{[a^2]}}$ vel $\dfrac{a^4 - y^2a^2,, - a^2y^2 + y^4 \smile a^3}{a^2 - y^2, \smile [a^2]}$, et divi-

---

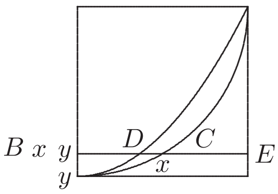
793,15–20 *Nebenbetrachtungen*:

793, 15



$$1 - \sqrt{1 - \frac{1}{4}} \sqcap \frac{1}{4} \text{ seu } \frac{3}{4} \sqcap \sqrt{1 - \frac{1}{4}}$$
$$\frac{3}{(4)} \sqcap \frac{\sqrt{3}}{(2)}$$
$$\frac{3}{2} \sqcap \sqrt{3}$$
$$\sqrt{3} \sqcap 2$$

793, 20



BC seu $x \sqcap BE$
BC seu $x \sqcap BD$

3 Ubi *(1)* antequam ill *(2)* lo *(3)* ex *(a)* 1 et ⊙ fiet: *(b)* (1) fiet *(4)* ex |⊙ et *erg.*| (1) fiet *L*
5 a *L ändert Hrsg. dreimal*

dendo per $a^2 - y^2$, fiet $\frac{a^2 - y^2}{a}$. Ergo $x \sqcap a - \frac{y^2}{a}$. (Credibile non alias habitum iri determinationes puras ex excerptis excedentibus quam ex deficientibus, saltem hic.)

Ex (3) et $\odot$ fiet: $\frac{a^2x - y^2x}{a},, + \llcorner \frac{y^2}{a^4} \frown a^2 - y^2 \lrcorner\, x,,, \sqcap \frac{a^2 - y^2}{a},, - \frac{y^2}{a^3} \llcorner \overline{a^2 - y^2}^{\,2} \lrcorner,,, - \frac{y^2}{a^5} \llcorner \overline{a^2 - y^2}^{\,4} \lrcorner$ et $ax \frown a^2 - y^2 \sqcap a^4 - y^2\overline{a^2 - y^2} - \frac{y^2\overline{a^2 - y^2}^{\,3}}{a^5}$ etc. Et ita porro.

$\frac{2}{1+y^2} \sqcap 2 - 2y^2 + 2y^4 - 2y^6 + 2y^8$ etc. Iam $\frac{2}{2+y^2-1} \sqcap 1\ \frac{-y^2+1}{2} + \frac{\overline{y^2-1}^{\,[2]}}{4}$

$\frac{a}{b+c} \sqcap \frac{a}{b} - \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} - \frac{ac^3}{b^4}$ etc. vel $\frac{1}{b+c} \sqcap \frac{1}{b} - \frac{c}{b^2} + \frac{c^2}{b^3} - \frac{c^3}{b^4}$ etc.

Ergo $\frac{2y^2}{1+y^2} \sqcap 2y^2 - 2y^4 + 2y^6 - 2y^8$ etc.

$\frac{2y^2}{2, +y^2 - 1} \sqcap \frac{2y^2}{2} - \frac{2y^2, y^2 - 1}{4} + \frac{2y^2, \overline{y^2 - 1}^{\,2}}{8} - \frac{2y^2, \overline{y^2 - 1}^{\,3}}{16}$ et

$\omega \overset{\odot}{\sqcap}$ omn. $\frac{\cancel{2}y^2}{1+y^2} \sqcap \frac{\cancel{2}y^3}{3} - \frac{\cancel{2}y^5}{5} + \frac{\cancel{2}y^7}{7} - \frac{\cancel{2}y^9}{9}$.

---

6 *Nebenrechnung*:

$$\frac{a}{b+c} \sqcap \frac{a}{b} - \frac{\frac{ac}{b}}{b+c}$$
$$- \frac{ac}{b^2} + \frac{\frac{ac^2}{b^2}}{b+c}$$
$$+ \frac{ac^2}{b^3} - \frac{\frac{ac^3}{b^3}}{b+c}$$

1 f. (Credibile ... hic.) *erg. L* 5 4 *L ändert Hrsg.* 9 $\omega \overset{\odot}{\sqcap}$ *(1)* $\mathrm{s}^{\mathrm{umma}}$ *(2)* omn. *L*

---

3 f. fiet: Die folgende Ungleichung weist im Ansatz mehrere Fehler auf und wird nicht konsequent umgeformt. Richtig gerechnet würde sich $ax\,(a^2 - y^2) > (a^2 - y^2)^2$ ergeben.

Et quia etiam $\dfrac{2y^2}{2+y^2-1}$ seu $\dfrac{\cancel{2}y^2}{1+y^2}$ est $\sqcap$ $\dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}}, -\dfrac{\cancel{2}}{\cancel{2}} \llcorner \dfrac{y^4-y^2}{4} \lrcorner + \dfrac{y^6-2y^4+y^2}{8}$ $+\dfrac{y^8-3y^6+3y^4+y^2}{16}$ etc. fiet rursus $\displaystyle\int \frac{y^2}{1+y^2} \sqcap \omega \sqcap$ ☽ $\dfrac{\dfrac{y^3}{3}}{2} - \dfrac{\dfrac{y^5}{5}-\dfrac{y^3}{3}}{4} + \dfrac{\dfrac{y^7}{7}-\dfrac{2y^5}{5}+\dfrac{y^3}{3}}{8}$ $- \dfrac{\dfrac{y^9}{9}-\dfrac{3y^7}{7}+\dfrac{3y^5}{5}-\dfrac{y^3}{3}}{16}$ etc.

Habemus ergo duos ipsius ω valores infinitos; et possemus habere adhuc plures. Porro ope harum duarum aequationum ☉ et ☽ valorem ipsius ω exhibentium poterit vicissim ipsa y. inveniri ex data ω. Quod ita fiet: Si duas diversarum aequationum infinitarum determinationes, ordine assumtas coniungamus, eo tantum observato, ut ex una excerpatur valor iusto maior, ex altera valor iusto minor, ita enim semper obtineri poterit valor purus; iusto maior vel iusto minor, semperque accedetur magis magisque ad verum, et seriei finis in ipsam quantitatem desinet.

Sit in exemplum $\omega \sqcap b - cy + dy^2 - ey^3$ etc. et rursus $\omega \sqcap ny - py^2 + qy^3 - ry^4$ etc. erit $\omega \sqcap b - cy$. et $\omega \sqcap ny$. et $y \sqcap \dfrac{\omega}{n}$, itemque $y \sqcap \dfrac{\omega - b}{c}$.

Rursus $\omega \sqcap b - cy + dy^2$. et $\omega \sqcap ny - py^2$. fietque $y^2 \sqcap \dfrac{ny-\omega}{p}$ et $y^2 \sqcap \dfrac{\omega - b + cy}{d}$. Ergo $\dfrac{\omega-b+cy}{d} \sqcap \dfrac{ny-\omega}{p}$. seu $\omega p - bp + cyp \sqcap dny - d\omega$. et fiet $y \sqcap \dfrac{p\omega + d\omega - bp}{dn - cp}$ quem valorem certis modis in duabus valoris y^2, determinationibus inserendo duae possent haberi determinationes purae, sufficit tamen haec una. Et ita continue pergendo.

Incidit hic compendium egregium in tollendis potestatibus excerptarum determinationum; quod alioqui difficile admodum et molestum. Compendium autem in ea consistit: ut ubique valorem purum prope verum proxime praecedentem, nunc excedentem nunc

4 ergo *(1)* duas aequationes infinitas *(2)* duos *L* 4 f. Porro *(1)* duae aequationes ipsius *(2)* ope *L* 6 fiet: *(1)* Si *(a)* fiunt d *(b)* ex una *(c)* unam ex aequat *(d)* ex qualibet aequatione unam excerpamus *(aa)* aequat *(bb)* determinationem, semper a minus *(2)* Si *(3)* Si ex duabus aequationibus duas semper determinationes conferamus *(4)* Si *L* 7 coniungamus, *(1)* primam maius *(2)* eo *L* 10 f. desinet. *(1)* | Sit *streicht Hrsg.* | $\omega \sqcap$ by *(a)* + *(b)* $-\mathrm{cy}^2 + \mathrm{dy}$ *(2)* Sit *L* 15 in *(1)* aequatione *(2)* aequationibus *(3)* duabus *L* 16 haberi *(1)* aeq *(2)* determinationes *L* 16 f. pergendo. *(1)* Ut iam in usu unius aequatio *(2)* Incidit *L* 19 ubique *(1)* determinationem proxime praecedentem *(2)* pr *(3)* valorem *(a)* prope *(b)* purum *L*

deficientem substituamus, ita enim nihilominus ultima determinatio desinet in quantitatem quaesitam. [Imo error est, ita enim omnes errores a primo ad ultimum usque in unum confundentur. Coeptae ergo viae est insistendum.]

2 f. [Imo ... insistendum]: Die erste eckige Klammer stammt von Leibniz, die zweite ist vom Herausgeber ergänzt.

63. DE SERIEBUS CONVERGENTIBUS
[Juni 1676?]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 II 1 Bl. 179. 1 Ausschnitt ca 20,5 x 1,8 cm. 2 1/2 Z. auf Bl. 179 r°. Bl. 179 v° leer. — An der unteren Schnittkante Reste fremden Textes.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Notiz ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden; mit den konvergenten Folgen von J. Gregory befaßt sich Leibniz gehäuft im Juni 1676.

Si fingatur valor sectoris seu p o l y g o n o r u m s e r i e i c o n v e r g e n t i s in numeris dari, nemo mortalium scire potest, an non eodem modo componatur ex terminis convergentibus. Ideo ne ad κριτήριον quidem servit.

8 p o l y g o n o r u m *erg. L*

64. SERIES CONVERGENTES DUAE

[Juni? 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 311. 1 Bl. 2°. Ca 3/5 S. auf Bl. 311 v°. Von dem Blatt ist oben ein Streifen von ca 3 cm abgeschnitten worden. Auf Bl. 311 r° stehen zusätzlich Cc 2, Nr. 1456 (Druck in einem späteren Band der Reihe) und *De angulo contactus*, *LSB* VII, 1 N. 32.
Cc 2, Nr. 1455

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt. Mit den konvergenten Folgen von Gregory befaßt sich Leibniz gehäuft im Juni 1676.

$$\begin{array}{lclclc} a. & & & b. & & \\ A & \sqcap & \dfrac{2ab}{a+b.} & B & \sqcap & \dfrac{a+b}{2}. \\[2ex] (A) & \sqcap & \dfrac{2AB}{A+B}. & (B) & \sqcap & \dfrac{A+B}{2}. \end{array}$$

S e r i e s c o n v e r g e n t e s duae una $a.\ A.\ (A)$ etc. altera $b.\ B.\ (B)$ etc. Factum ex ipsis semper est ab. Nam $AB \sqcap ab$. et $(A)(B) \sqcap AB$. ergo $(A)(B) \sqcap ab$. Haec series est convergens seu differentia inter duos terminos tandem minor quavis quantitate data: Nam refert eam Gregorius in responso ad Hugenium *Transact.* Iul. 1668. et summam invenit. Sit ultimus terminus unius convergentium z, alterius etiam z, erit $z^2 \sqcap ab$. et $z \sqcap \sqrt{ab}$.

Similiter quandocunque quantitas habetur eodem modo composita ex terminis primis $a.\,b.$ quo ex secundis $A.\,B.$, inveniri potest terminus ultimus. Ego id addo, si esset una tantum series $a.\ A.\ (A)$. et quantitas daretur eodem modo composita ex a. et A. quo ex A. et (A). haberetur etiam terminatio. Quia in seriebus replicatis suppono terminos ultimum penultimum et antepenultimum differre quantitate minore quam quae

18 f. $\sqrt{\text{ab}}$. *(1)* Eodem modo *(2)* Similiter *L* 22 seriebus *(1)* convergentibus *(2)* replicatis *L*

16 Gregorius: J. Gregory, *Answer to the animadversions of Mr. Hugenius*, *Philosophical Transactions* III, 1668/69, Nr. 37 vom 13./23. Juli 1668 S. 733.

assignari possit, nempe differentiam terminorum a. A. (A). etc. tandem fieri minorem qualibet assignabili quantitate. Serierum replicatarum consideratio longe maioris est usus quam convergentium[,] patet ex illis quae duxi aliquando ex methodo tangentium inversa. Potest adiungi convergentia, cum consideramus duas curvas hoc modo expressas, serie replicata, se intersecare alicubi. Quaeratur hoc modo punctum intersectionis. Observo series convergentes Gregorianas plerasque omnes hoc habere, ut si ponantur a. b.

$$\begin{array}{lccccc} & a & a & & a & a \\ \text{aequales sint et } A.\ B.\ \text{aequales. Si } a \sqcap b.\ \text{erit} & & & \text{seu} & & . \\ & \dfrac{2a^2}{a+a} & \dfrac{a+a}{2} & & a & a \end{array}$$

Videndum an idem semper in caeteris, non puto esse necesse.

Porro ex regula de compositione simili; exhibente terminationem, videtur semper aequatio transcendens inveniri posse, ut Gregorius exprimit hoc modo seriem pro circulo

$$\begin{array}{lcccr} & a & b & & \\ \text{et hyperbola convergentem.} & & & & a.\ \text{triangulum},\ b.\ \text{trapezium}, \\ & A \sqcap \sqrt{ab} & \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}} \sqcap B & & \end{array}$$

finis seriei sector, termini seu membra polygona inscripta et circumscripta, quaeritur quantitas eodem modo composita ex a. b. quo ex A. B. Sit verbi gratia $a^\omega + b \sqcap A^\omega + B$. fiet aequatio haec: $a^\omega + b \overset{(1)}{\sqcap} \sqrt{ab}^{\,\omega} + \dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$. Cuius aequationis ope si inveniatur ω. poterit etiam ultimus terminus seriei, seu sector inveniri, nam inventa ω. utique erit nota $a^\omega + b$. Sit sector ignotus z. erit $z^\omega + z \sqcap \underbrace{a^\omega + b}_{\text{cognitae}}$. Adeoque inventa ω. habebitur et z. quod erat faciendum. Ecce ergo analyseos genus pro circulo et hyperbola. Porro: hinc videtur sequi ex data circuli quadratura, dari et quadraturam hyperbolae; eodem enim prorsus

2 quantitate *(1)* Observo series eiusm *(2)* Serierum *L* 12 ut *(1)* invenit *(2)* Gregorius *L* 14+16 trapezium, *(1)* terminus *(2)* finis *L* 17 composita ex *(1)* utroque, *(a)* trans *(b)* sit *(2)* a. b. *L* 21 erat *(1)* demonstrandum *(2)* faciendum *L* 22 circuli *(1)* et hyperbol *(2)* quadratura, *L*

---

3 duxi aliquando: vgl. N. 39. 12 Gregorius exprimit: Vgl. J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668, Scholium zu prop. V, S. 15. 15 $\dfrac{2ab}{a+\sqrt{ab}}$: Richtig wäre $\dfrac{2b\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$; vgl. die Erl. zu S. 758 Z. 7.

modo componitur sector circularis quo hyperbolicus. Saltem illud certum, eandem z. aliter inveniri posse, in hyperbola ex eo quod scimus logarithmos simpliciter ad eam rem servire. Sed ut verum fatear non video quomodo hinc sequatur eodem modo componi in circulo. Potuissemus aliter assumere infinitis modis. Sit v. g.

$a^{\omega\nu} + b^{\nu} + r \sqcap \sqrt{ab}^{\,\omega\nu} + B^{\nu} + r.$

Et talia possunt fieri infinitis modis. Et divelli posset etiam talis aequatio in duas.

Tota difficultas in his absolvendis in eo est, ut datis $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e$. inveniamus ω. Hoc ita tento dividamus e. in duas: $e - y$. et $+ y$. fiatque: $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e - y + y$. et dividatur in duas: $a^{\omega} \sqcap e - y$. et $A^{\omega} \sqcap y$. Sed iam video id, si y. incognita esse inutile.

$x^2 + y^2 \sqcap \varphi$. Quaeritur relatio ad 2. Si aequatio $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap e$. reduci potest ad aequationem $b^{\omega} \sqcap e$. poterit quadratura circuli reduci ad quadraturam hyperbolae; et aliae omnes.

Si $a^{\omega} + A^{\omega} \sqcap b$. *donne* $C^{\omega} \sqcap d$. sitque rursus aliunde $e^{\omega} \sqcap f$. et ω. et f. inveniri possunt ex quad. hyp. Poterunt omnes quadraturae solvi per quadraturam hyperbolae.

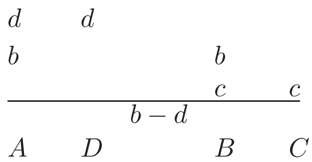
2 hyperbola *(1)*, et generaliter quidem ope *(2)* ex *L* 3 servire. *(1)* Quod si fiat ope ipsarum, a. b. *(2)* Sed ut *(a)* mirum video *(b)* verum *L* 4 circulo. *(1)* Caeterum aequatio 1. poterit dividi in duas, hoc modo: *(2)* Potuissemus *L* 12 f. omnes. *(1)* Imo hinc sequetur aliquam hyperbolae portionem posse quadrari, seu aliquem logarithmum posse inveniri; si scilicet series convergens sit summabilis aliunde, hac tamen methodo reduci poterit ad duas eiusmodi aequationes ubi bis idem logarithmus in diversis, unde, si hae reducibiles ad unam *(2)* Si *L* 13 e$^{\omega}$ $\sqcap$ f. *(1)* quadratura *(2)* et *L*

65. THEOREMA ANALYTICUM DE MAXIMIS ET MINIMIS
[April – Juli 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 15. 1 Streifen 20,7 x 4,7 cm. Unterkante stark geschwungen. 2 S. — Auf LH 4 V 10 Bl. 63 v° Teil der Stufe *(1)* der Lesart zu S. 803 Z. 4. Auf Bl. 63 r° *Extensio interminata*, *LSB* VI, 3 N. 66. Die beiden Streifen bildeten ursprünglich zwei zusammenhängende Teile eines Blattes. Vor dem Zerschneiden schrieb Leibniz den Text der Rückseite darunter noch einmal an, danach strich er die so entstandenen Fragmente durch.
Cc 2, Nr. 1139, 00 tlw.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für die Monate April bis Juli 1676 belegt.

Theorema analyticum pulcherrimum d e m a x i m i s e t m i n i m i s:



$AD \sqcap d$. $AC \sqcap b+c$. Sit $\underset{b}{AB}$ ad $\underset{c}{BC}$ ut z. ad v. erit $b^z c^v \sqcap d^z, \overline{b+c-d}^{\,\underline{v}}$ si modo supponatur d. differre a b. et esse minor quam $b+c$. Ergo $\frac{b}{d}^{\underline{z}} \sqcap \frac{b+c-d}{c}^{\underline{v}}$. Ergo $\frac{b^z-d^z}{d^z} \sqcap \frac{b-d}{c}^{\underline{v}}$ quoniam a posteriore nimium aufero. Ergo divisis omnibus per $b-d$ si ponatur $b \sqcap d$ erit:

16 AD ... b + c. *Am Rande erg. L* 18 quoniam ... aufero *erg. L* 19 si ... b ⊓ d *erg. L*

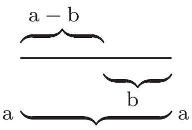
11 Theorema: M. Ricci, *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*, 1668 [Marg.], Problema primum S. 9; vgl. *LQK*, prop. XV S. 56–58.

$$\frac{b^{z-1}+b^{z-2}d^1+b^{z-3}d^2 \text{ etc... } b^1d^{z-2}+d^{z-1}\odot}{d^z} \sqcap \frac{b^{v-1}+b^{v-2}d^1 \text{ etc.} + b^1d^{v-2}+d^{v-1}\rightmoon}{c^v}$$

et $\dfrac{\odot}{\rightmoon} \sqcap \dfrac{d^z}{c^v}$.

Nota termini componentes $\odot$ pariter et componentes $\rightmoon$ sunt progressionis geometricae. Et haec redibit ad theorema Slusianum, qui in *Miscellaneis* cap. [4.] ita ait: Notum est (ait Slusius) in serie trium arithmetice proportionalium maximam ad mediam habere minorem rationem quam habet media ad minimam. Ideo quadratum mediae esse maius facto sub extremis, sed non aeque nota est propositio universalis $A\, \overset{r}{b}\, c\, D\, \overset{q}{e}\, F$ arithmetice crescentes. A minima. Numerus excessus inter A et D est r. inter D et F est q. Aio fore $\dfrac{A^{\boxed{r}}}{D} \sqcap \dfrac{D^{\underline{q}}}{F}$.

2 f. $\sqcap \frac{d^z}{c^v}$. *(1)* Si b. non poneretur maior d. idem contingeret tamen ab altera *(a)* parte *(b)* parte, versus C seu pro b. *(aa)* substi *(bb)* semper intelligenda ea quae maior pon *(2)* Nota *L* 4 Miscellaneis | cap. 9. *erg L, ändert Hrsg.* | ita ait: *(1)* Notum est | ait Slusius *erg.* | in serie trium arithmetice proportionalium maximam ad mediam minorem habere rationem quam habet media ad minimam. Ideo quadratum mediae maius esse facto sub extremis, sed non aeque nota est *(a)* ut *(b)* propositio universalis $A\, \overset{r}{b}\, c\, D\, \overset{q}{e}\, F$ arithmetice crescentes. A minima. Numerus excessum inter A et D esto r. inter D et F esto q. Aio fore $\frac{A^{\underline{z}}}{D} \sqcap \frac{D^{\underline{q}}}{F}$. Unde etiam demonstrat *(aa)* esse *(bb)* si magnitudo quaelibet dividatur in ratione numeri ad numerum fore productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes sunt iidem numeri, erit omnium similium maximum. Sive postremum de maximo producto etiam sic enuntio



$b^b, \overline{b-a}^{\,b-a} \sqcap c^b, \overline{a-c}^{\,b-a}$ *(2)* Notum *L* 9 $\underline{z}$ *L ändert Hrsg.*

1 $\rightmoon$: Der richtige Wert von $\rightmoon$ ist $\displaystyle\sum_{k=0}^{v-1} \binom{v-1}{k}\, b^{v-1-k}\, (-d)^k$. 3 Nota: vgl. M. Ricci, *a. a. O.*, Corollarium S. 8 f. 4–804,3 theorema Slusianum: *Mesolabum*, 1668 [Marg.], S. 114–117. — Bereits 1673 hat Leibniz eine englische Übersetzung des Theorems aus der Besprechung in den *Philosophical Transactions* IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 906 kennengelernt (s. Cc 2, Nr. 500).

Unde etiam demonstrat si magnitudo quaelibet dividatur in ratione numeri ad numerum fore productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes iidem numeri, omnium [similium] maximum.

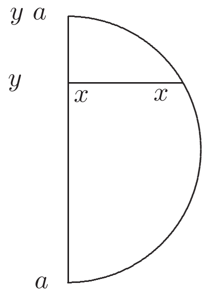
Hoc postremum etiam ita enuntio: $a\ \underbrace{\overbrace{\rule{5em}{0.4pt}}^{a-b}\underbrace{\rule{4em}{0.4pt}}_{b}}\ a \qquad b^b, \overline{b-a}^{\,b-a} \sqcap c^b, \overline{a-c}^{\,b-a}$

3 possibilium *L* *ändert Hrsg.*

66. DE SERIE AD CIRCULUM PER DETERMINATIONES
[März – August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 122. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 122 r°. Bl. 122 v° leer. Cc 2, Nr. 1207

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt.



$x^2 \sqcap ax - y^2$ seu $x^2 \sqcap x - y^2$.

[*Fig. 1*]

In circulo $ax - x^2 \sqcap y^2$. a. diameter. x. sinus versus. y. rectus. Hinc $x \sqcap \dfrac{y^2}{a-x}$. et dividendo:

6 seu $\mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{x} - \mathrm{y}^2$ *erg. L*

7 *Fig. 1*: Leibniz verwechselt bei der Beschriftung der Figur x und y; der Irrtum beeinträchtigt die Überlegung S. 807 Z. 14 – S. 808 Z. 2.

$$x \sqcap \frac{y^2}{a} + \frac{y^2x}{a^2} \;\Big|\; + \frac{y^2x^2}{a^3} \;\Big|\; + \frac{y^2x^3}{a^4} \;\Big|\; + \frac{y^2x^4}{a^5} \;\Big|\; + \frac{y^2x^5}{a^6} \;\Big|\; + \frac{y^2x^6}{a^7}$$

$$x \sqcap y^2 + y^2x$$

$$x \sqcap y^2 + y^2x \;\Big|\; \underbrace{+ y^2x^2}$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 2y^2x - y^4 \qquad \underbrace{+ y^2x^3}$$

$$\underbrace{y^2x^2} - y^4x$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 3y^2x - 2y^4 \qquad \underbrace{+ y^2x^4}$$

$$\underbrace{y^2x^2} - 2y^4x + y^6$$

$$y^2x - y^4$$

$$x \sqcap y^2 + 4y^2x - 3y^4 + y^6 \qquad \underbrace{+y^2x^5}$$

$$\underbrace{y^2x^3}\;\underbrace{-2x^2y^4} + y^6x$$

$$+y^2x - y^4 - y^4x - 2y^4x + 2y^6$$

$$x \sqcap y^2 + 5y^2x - 4y^4 + 3y^6 - 2y^4x \qquad \underbrace{+y^2x^6}$$

$$\underbrace{y^2x^3}\;\underbrace{-3y^4x^2} + 3y^6x - y^8$$

$$y^2x - y^4 - y^4x - 3y^4x + 3y^6$$

8–14 Leibniz übernimmt absichtlich nicht alle bei der Umformung auftretenden Terme in die folgenden Zeilen, wie aus S. 808 Z. 4 ersichtlich ist.

Ponamus $a \sqcap 1$.

$x \sqcap y^2$	$1 - x \sqcap 1$
$x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-y^2}{1}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 1y^4}{1-2y^2}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-2y^2}{1-y^2}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 2y^4}{1-3y^2}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-3y^2}{1-2y^2}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 3y^4 + 1y^6}{1-4y^2+2y^4}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-4y^2+2y^4}{1-3y^2+1y^4}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 4y^4 + 3y^6}{1-5y^2+2y^4}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-5y^2+2y^4}{1-4y^2+3y^4}$
$x \sqcap \dfrac{y^2 - 5y^4 + 6y^6 - 1y^8}{1-6y^2+5y^4-3y^6}$	$1 - x \sqcap \dfrac{1-6y^2+5y^4-3y^6}{1-5y^2+6y^4-1y^6}$

[*Zusätze*]

[*Zu S.* 806 *Z. 2:*]

Notanda ac solvenda difficultas; cum dicitur:

$x \sqcap y^2 + y^2x$, seu $x - y^2x \sqcap y^2$. seu $x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$ potuisse et dici:

$y^2x \sqcap x - y^2$. et $y^2x - x \sqcap -y^2$. et $x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$.

Ne ergo contraria simul concludantur, considerandum hoc est, quia scimus $x \sqcap y^2 + y^2x$, tunc si y et x sint minores unitate fore $x \sqcap y^2x$. Ergo $x - y^2x \sqcap y^2$. et $x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$. Posteriore autem modo ratiocinari non licet, nec detrahere, nisi quod constet esse minus.

2–8 *Darunter:* $\boxed{\text{Semper } x \text{ in } 1 - x_{[,]} \sqcap y^2}$

2–8 In der Vorlage stehen die Z. 2–8 neben S. 806 Z. 1–14. 13–808,2 $x \sqcap \dfrac{y^2}{1-y^2}$: Leibniz übersieht, daß sich durch den Vorzeichenwechsel die Ungleichung umkehrt. Beim folgenden Versuch, die vermeintliche Schwierigkeit zu beheben, wird er durch die falsche Beschriftung der Figur irritiert.

Posset tamen sumi $y \sqcap 1$. modo x sit minor, et tunc omnia fient contraria x, autem necessario maior, alioqui tota series infinita non esset vera.

[*Zu S. 806 Z. 6–16:*]

Forte re recte expensa additiones et negationes alternantur. Videndum et cuinam ex duabus aequationis radicibus satisfiat. Videtur quin etiam appropinquationes, (ac per consequens ex appropinquationibus series[)] in meris integris obtineri posse. Si tali scilicet modo misceantur quantitates, sive aequationes et determinationes, ut divisio fieri possit, residuis semper commode suppletis, poterunt scilicet ascribi aequationes in certas quantitates aut formulas ductae, aliaque id genus. Sed cavendum ne pro quaesitis radicibus alias immisceamus.

[*Zu S. 807 Z. 2–8 :*]

Ex his iam satis apparet quomodo sine ulteriore calculo propiores semper ac propiores ipsius x valores inveniri possunt.

13 possunt. | Quarum differentiae ipsi x *streicht Hrsg.* | *L*

67. SERIES DIFFERENTIARUM GENERALIS
[März – August 1676]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 VIII 30 Bl. 146. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 146 r°. Bl. 146 v° leer. Überschrift von Leibniz ergänzt. Cc 2, Nr. 1513

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von März bis August 1676 belegt.

Series differentiarum generalis

[*Tschirnhaus*]

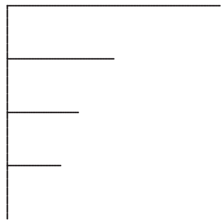
$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{n}{t} & \frac{o}{u} & \frac{p}{w} & \frac{q}{x} & \frac{r}{y} & \frac{s}{z} & & \frac{s}{z} \sqcap 0 \\
\frac{nu-ot}{ut} & \frac{wo-pu}{wu} & \frac{px-qw}{wx} & \frac{qy-rx}{xy} & \frac{zr-sy}{yz} & & & \\
\frac{1}{f} & \frac{1}{g} & \frac{1}{h} & \frac{1}{i} & \frac{1}{k} & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
un-ot \sqcap 1 & ut \sqcap f & t \sqcap \frac{f}{u} & t \sqcap \frac{fw}{g} \\
n \sqcap \frac{ot+1}{u} & t \sqcap \frac{f}{u} & & \\
n \sqcap \frac{of+u}{uu} & t \sqcap \frac{f}{u} & & t \sqcap \frac{fhk \text{ etc. in inf.}}{gi \text{ etc. in } z} \\
o \sqcap \frac{pg+w}{ww} & u \sqcap \frac{g}{w} & & \\
p \sqcap \frac{gh+x}{xx} & w \sqcap \frac{h}{x} & & \\
q \sqcap \frac{ri+y}{yy} & x \sqcap \frac{i}{y} & &
\end{array}$$

7 *(1)* Quadratura per series differentiarum *(2)* S e r i e s *L*

[*Leibniz*]

$$\begin{array}{lcccccccccc}
r & & y & z & \omega & ♉ & & & & & \\
p & & & a & b & c & d & e & f & & \\
q & & & & g & h & i & k & l & & \\
s & & & & & m & n & s & t & & \\
t & & & & & & v & w & x & & \\
v & & & & & & & & & & \\
w & & & & & & & & & &
\end{array}
\qquad
\frac{1}{1}\quad\frac{1}{2}\quad\frac{1}{3}$$



[*Fig. 1*]

[*Tschirnhaus*]

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} \\
\frac{3}{2} & \Big| \frac{11}{6} & \Big| \frac{50}{24} & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
\frac{1}{2} & \frac{1}{6} & \frac{1}{12} & \frac{1}{20} \\
\frac{2}{3} & \frac{3}{4} & \frac{4}{5} & \frac{5}{6}
\end{array}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{s}{z} + \frac{1}{k} + \frac{1}{\ldots}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{fghik \text{ in } s + fghiz + ghikz + hikfz + ikfgz + kfghz}{fghikz} \qquad t \sqcap \frac{fhk \text{ etc.}}{gil \text{ etc. in } z}$$

$$n \sqcap \frac{fghik \text{ in } s \text{ etc. } + \text{ omnibus productis una dimensione minoribus in } z}{gg\,ii\,ll \text{ in infinitum in } zz}$$

$$n \sqcap \frac{ot+1}{\cancel{u}} \qquad \frac{f}{\cancel{u}} \qquad n \sqcap \frac{ot+u}{u\cancel{u}} \qquad t \sqcap \frac{f}{\cancel{u}}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{ot+1}{f} \qquad \left[\frac{n}{t}\right] \sqcap \frac{of+u}{fu}$$

$$\frac{n}{t} \sqcap \frac{ot}{f} + \frac{1}{f} \qquad \left[\frac{n}{t}\right] \sqcap \frac{o}{u} + \frac{1}{f}$$

16 f. n *T ändert Hrsg. zweimal*

$$\frac{1}{f} + \frac{1}{g} + \frac{1}{h} + \frac{1}{i} + \frac{1}{k}$$

$$\frac{f+g}{fg} + 1 \text{ [\textit{bricht ab}]} \quad \frac{f}{fghik} \text{ [\textit{bricht ab}]}$$

[*Leibniz, Schrägzeile von Tschirnhaus*]

$$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5}$$

$$t \quad o$$

$$f \ldots b\, \underbrace{\boxed{\underbrace{cd}}}$$

$$a \sqcap f. \qquad p \;\; a \;\; \sqcap \;\; \underbrace{\underbrace{b \;\; c \;\; d \;\; e} \;\; \ldots} \;\; a \;\; \ldots \;\; a \;\; \ldots \;\; p$$

$$a \;\ldots\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1 \;\; 1$$

$$\boxed{\frac{1}{1} \;\; \frac{1}{2} \;\; \frac{1}{3} \;\; \frac{1}{4} \;\; \frac{1}{5}}$$

1 *Nebenrechnung, Tschirnhaus:* $\frac{f \; g \; h \; i}{fgh}$ $fg \;\; gh \;\; [hf]$

13 hg *T ändert Hrsg.*

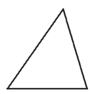
[*Tschirnhaus*]

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} & \frac{1}{0} \quad 0 \\ \frac{1}{0} & 1 + 0 \\ \hline & \frac{1}{0} + 1 \end{array}$$

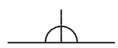
$$\begin{array}{cccc} y & y+1 & y+2 & y+3 \end{array}$$

$$\begin{array}{llll} a+b & ab+ab+bc & bc & bbcc \\ & ab & b+c & \\ & & \underline{b+c} & \\ & & bb+bc & \\ & 64 & \quad +bc+cc & \end{array}$$

[*Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext*]
[*Leibniz oder Tschirnhaus*]



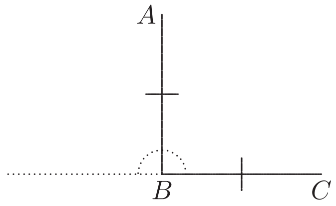
[*Fig. 2*]



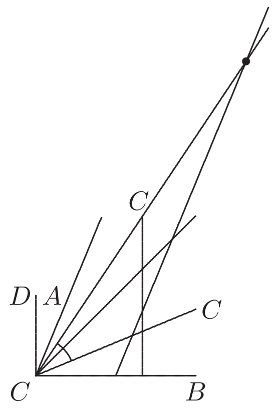
[*Fig. 3*]

2–4 Tschirnhaus rechnet im Schema rechts von unten nach oben und schreibt das Ergebnis links auf den Strich.

[*Tschirnhaus, quer zur Schreibrichtung*]



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

68. DE SUMMIS SERIERUM GENERALISSIMA
August 1676

Die beiden Teilstücke stehen in engem inneren und äußeren Zusammenhang. Auf zwei Seiten eines Bogens haben Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs Aufzeichnungen notiert. Vermutlich unmittelbar danach hat Leibniz den Inhalt weiter ausgearbeitet und schließlich eine gemeinsame Überschrift (= Z. 12 f.) und das Datum (= S. 818 Z. 10) ergänzt.

68_1. NOTAE

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz u. Tschirnhaus): LH 35 VIII 30 Bl. 144 bis 145. 1 Bog. 2°. 2 S. auf B. 144 r° u. 145 v°. Textfolge Bl. 145 v°, Bl. 144 r°. Überschrift von Leibniz auf Bl. 144 r° ergänzt. Auf dem Rest des Bogens N. 68_2.
Cc 2, Nr. 1512

De summis serierum generalissima item utrum terminorum rationalium summae possint esse irrationales

[*Teil 1*]

[*Tschirnhaus*]

$$\begin{array}{lll}
\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} + \frac{1}{t} & y - x \sqcap 1 & xy \sqcap a \\[2ex]
\frac{y-x}{xy} + \frac{z-y}{yz} + \frac{t-z}{tz} & x \sqcap y - 1 & yy - y \sqcap a \\[2ex]
\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d} & x \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} & y \sqcap +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + a} \\[2ex]
\frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{12} & y \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b} & z \sqcap +\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b} \\[2ex]
a & z \sqcap -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + c} &
\end{array}$$

$$-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4} + b} \sqcap \sqrt{\frac{1}{4} + a} + \frac{1}{2} \qquad \frac{bb - 2ab + aa - 2b + \cancel{2a} + 1}{\cancel{4}} \sqcap \frac{1 + 2\cancel{4}a}{\cancel{4}}$$

$$\sqrt{\frac{1}{4}+b} \;\wp\; \sqrt{\frac{1}{4}+a}+1 \qquad bb \wp 2ab+2b-aa+2a$$

$$\cancel{\frac{1}{4}}+b \;\wp\; \cancel{\frac{1}{4}}+a+2\sqrt{\frac{1}{4}+a}+1 \qquad b \wp a+1+\sqrt{4a+1}$$

$$\frac{b-a-1}{2} \;\wp\; \sqrt{\frac{1}{4}+a} \qquad c \wp b+1+\sqrt{4b+1}$$

$$\frac{f}{x}+\frac{f}{y}+\frac{f}{z}+\frac{f}{t} \qquad \frac{1}{1}\;\frac{1}{3}\;\frac{1}{6}$$

$$\frac{f}{x}\quad \frac{g}{y}\quad \frac{f}{z}\quad \frac{g}{t}\quad \frac{f}{u}$$

$$\frac{f}{x}\quad \frac{g}{y}\quad \frac{f}{z}\quad \frac{i}{t}\quad \frac{f}{u} \qquad \frac{1}{2} \qquad \begin{array}{ccccc} \frac{1}{2} & \frac{x}{3} & \frac{1}{4} & \frac{xx}{5} & \frac{1}{6}\,x \end{array} \qquad x \wp x-\cancel{xx} \mid \cancel{xx}-\cancel{x^3} \mid \cancel{x^3}-\cancel{x^4} \mid$$

$$\frac{1}{3} \qquad \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \hline 1 & 2 & 4 & 8 & 16 \end{array}$$

[*Tschirnhaus, auf der Gegenseite*]

$$\frac{1}{a}\quad \frac{1}{b}\quad \frac{1}{c}$$

[*Leibniz*]

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}+\frac{1}{d}$. Formula unde per comparationem seriei datae summa inveniri potest.

$$\frac{fy-xg}{xy} \sqcap \frac{1}{a}. \quad fy-xg \sqcap 1. \quad x \sqcap \frac{fy-1}{g}. \quad x \sqcap \frac{a}{y}. \quad y^2-y \sqcap \frac{ga}{f}.$$

---

2 f. *Zahlenbeispiele, Tschirnhaus:*
zu $\sqrt{4a+1}:3$ *zu* $\sqrt{4b+1}:5$

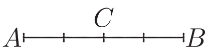
12 $\sqcap \frac{1}{\mathrm{a}}$. | xy ⊓ fay − xag. x ⊓ $\frac{\mathrm{fay}}{\mathrm{y+ag}}$ *gestr.* | fy − xg ⊓ 1 *L* 12 y^2- *(1)* yf *(2)* y ⊓ $\frac{\mathrm{ga}}{\mathrm{f}}$ *L*

---

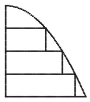
6 Zur linken Folge: vgl. N. 68₂ S. 818 Z. 17 f. 11 f. Leibniz nimmt diesen Ansatz in Teil 1 von N. 68₂ wieder auf; $y^2-y \sqcap \frac{ga}{f}$: Richtig wäre $y^2-\frac{y}{f} \sqcap \frac{ga}{f}$. Leibniz führt die Rechnung auf S. 818 Z. 13 nochmals durch, wobei ihm ein anderer Flüchtigkeitsfehler unterläuft. 14 3 . . . 5: Wie auf S. 814 Z. 18–20, linke Spalte, angedeutet wählt Tschirnhaus $a=2, b=6$ und berechnet die Wurzeln.

[*Teil 2*]

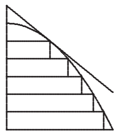
[*Tschirnhaus oder Leibniz*]



[*Fig. 1, Tschirnhaus*]

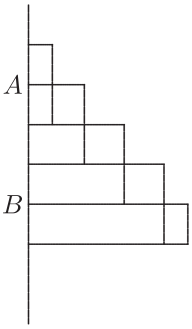


[*Fig. 2*]

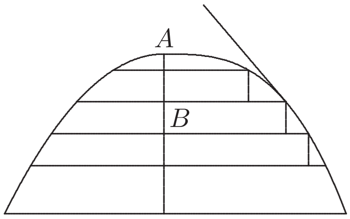


[*Fig. 3*]

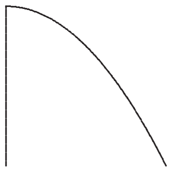
[*Fig. 4*]



[*Fig. 5, Leibniz*]



[*Fig. 6, Leibniz*]



[*Fig. 7*]

[*Leibniz*]

$y \sqcap x^2$ $\quad \boxed{y^2 \quad x^2 \quad yx \quad x \quad y \quad d}$ $\quad y \;\; \sqcap + \sqrt{\sqrt{x \ldots} \;\; - \sqrt{}}$

$(y) \quad - \sqrt{\sqrt{x+\beta} \quad \sqrt{}}$

$$\underbrace{\frac{1}{1} - \frac{1}{3}}_{\displaystyle\frac{2}{3}} + \underbrace{\frac{1}{5} - \frac{1}{7}}_{\displaystyle\frac{2}{35}} \text{ etc.}$$

$\dfrac{1}{16y^2 + 16y + 3}$ series invenienda pro magnitudine circuli

---

6 $\boxed{y^2 \quad x^2 \quad yx \quad x \quad y \quad d}$: vgl. S. 821 Z. 17.

1	3	5	$2y+1$ impar
2	6	10	$4y+2$ impar duplus
			$16y^2+16y+4$ eius quad.

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{1} & y & & & \\[1ex]
\frac{1}{2} & \frac{1}{y} - & \frac{1}{y+\beta} & \frac{y + \beta - y}{y^2 + \beta y} & \frac{1}{y^2+y} \\[1ex]
\frac{1}{3} & & & \frac{\beta}{y^2} & \\[1ex]
\frac{1}{4} & \frac{1}{y} & & \frac{1}{1} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} &
\end{array}$$

[*Tschirnhaus*] [*Leibniz*]

$$\frac{\sqrt{2}}{-2\sqrt{2}+\sqrt{2+}} \qquad \frac{\sqrt{\ldots}}{\sqrt{}} \qquad\qquad \sqrt{+\,x\,+}\ \ [\textit{bricht ab}]$$

[*Leibniz*]

$$z \sqcap \frac{y^2\ \ldots}{\ldots} \qquad\qquad \frac{y^2+y+b}{cy^2\underbrace{+ey+d \quad \times \quad \dagger \quad cy^2+2cy\beta+c\beta^2}} \; \frac{y^2+2y\beta+\beta^2,+y+\beta\langle+b\rangle}{,+ey+e\beta+d}$$

816,9 *Unter der linken Spalte, Tschirnhaus mit Ergänzung durch Leibniz:*

$$\frac{\overset{-1}{\cancel{1}}}{1+1} \sqcap 1-1+1-1+\frac{1}{1+1} \atop {1+1}$$

816,9 *Über* $\dfrac{1}{16y^2+16y+3}$: [*Leibniz*] [*Tschirnhaus*]

$$y^2 \qquad \frac{1}{y^2+1} \qquad\qquad 2y+1$$

14 $-1+\dfrac{1}{1+1}$ *erg. L*

$$(z) \sqcap \frac{y+\beta}{\cdots}$$

$$y^y - \overline{y+\beta}^{\,y+\beta}$$

Semper fieri potest, si y ponatur esse arithmeticae progressionis rationalis, sive β sit infinitesima sive non.

68_2. INQUISITIONES DUAE

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 2 S. auf B. 144 v° u. 145 r°. Textfolge Bl. 145 r°, Bl. 144 v°. Datum auf Bl. 145 r° oben ergänzt. Auf dem Rest des Bogens N. 68_1.
Cc 2, Nr. 1511

Aug. 1676

[*Teil 1*]

$\frac{f}{x}\ \frac{g}{y}\ \frac{h}{z}\ \frac{i}{t}$ series quaesita. $\frac{1}{a}\ \frac{1}{b}\ \frac{1}{c}\ \frac{1}{d}$ series summanda.

$\frac{fy - gx \sqcap 1}{xy \sqcap a}$. Ergo $x \sqcap \frac{fy-1}{g} \sqcap \frac{a}{y}$. et $fy^2 - y \sqcap ga$. et $y^2 - \frac{1}{f}y + \frac{1}{4f^2} \sqcap ga + \frac{1}{4f^2}$.

Eodem modo et $y \sqcap \frac{+1+\sqrt{4gaf^2+1}}{2f}$ et $x \sqcap \frac{\overset{-}{+}1+\sqrt{4gaf^2+1}\ -2}{2g}$

et $z \sqcap \frac{+1+\sqrt{4hbg^2+1}}{2g}$ et $y \sqcap \frac{-1+\sqrt{4hbg^2+1}}{2h}$

et $t \sqcap \frac{+1+\sqrt{4ich^2+1}}{2h}$ et $z \sqcap \frac{-1+\sqrt{4ich^2+1}}{2i}$.

12–16 *Dazu am Rande:* (Si $f.h.$ per saltus idem, et tantum varient $g.i.$ etc. nihilominus res erit determinata.)

---

11 *Teil 1*: Leibniz nimmt im folgendem den Ansatz von S. 815 Z. 11 f. wieder auf. 13 $\sqcap ga+\frac{1}{4f^2}$.: Richtig wäre $\frac{ga}{f}+\frac{1}{4f^2}$; Leibniz rechnet konsequent weiter bis S. 819 Z. 6, wo ihm ein weiterer Fehler unterläuft, der die Gleichung für f^2 in S. 819 Z. 7 zusätzlich beeinträchtigt. 17 Si ... etc.: vgl. N. 68_1 S. 815 Z. 6.

Ponatur iam $\dfrac{1}{a}\ \dfrac{1}{b}\ \dfrac{1}{c}$ esse series decrescens in infinitum tandemque evanescens, quaeritur eius summa $\dfrac{f}{x}$. Quaeritur ergo x. Sed ad x. habendum, opus est f. et g. Habetur autem f. ex datis g. et h. et prorsus ut g. ex datis h. et i. et ita porro, nempe aequando duos ipsius y. valores fiet:

$h + h\sqrt{4gaf^2 + 1} \sqcap -f + f\sqrt{4hbg^2 + 1}$ et

$h^2 4gaf^2 + h^2 \sqcap f^2 - 2f^2\sqrt{4hbg^2 + 1} + f^2 4hbg^2 + f^2$ fietque

$\dfrac{h^2}{2 - 2\sqrt{4hbg^2 + 1}, +4hbg^2 - 4gah^2} \sqcap f^2$.

Eodem modo invenietur g. ex datis $h.\ i.\ b.\ c.$
ut f. ex datis $g.\ h.\ a.\ b.$ et ita ad inventionem summae $\dfrac{1}{a} + \dfrac{1}{b} + \dfrac{1}{c}$ etc. opus erit re adhuc difficiliore, terminatione scilicet summae replicatae modo quo dixi, nam et h. ex i. etc. eodem modo invenietur. Et ad unam inveniendam opus est sequentibus omnibus.

Hinc ergo potius illud lucrum habebimus ut serierum eiusmodi replicatarum terminationes et expressiones aliaque id genus problemata irregularia possimus revocare ad quadraturas et inventiones summarum. Si vero inter comparandum in aequatione qua f. quaeritur destrui potuissent h. et g. et eodem modo in caeteris, tunc habuissemus methodum perfectam inveniendi summam datam.

Quod ut hac methodo facere tentemus, res de integro resumenda: $\dfrac{fy - gx}{xy} \sqcap \dfrac{1}{a}$. Pro $\dfrac{1}{a}$ potuit scribi $\dfrac{v}{va}$ et divelli haec aequatio in duas $fy - gx \sqcap v$. et $xy \sqcap va$. et habebimus novam arbitrariam, sed ut generalius procedamus; est $\dfrac{fy - gx}{xy} \sqcap \dfrac{1}{a}$. seu $fya - gxa \sqcap xy$. Haec aequatio infinitis modis in duas divelli potest; novis etiam adhibitis arbitrariis ut si ponamus $vfya + \text{ת} - \text{ת} - gxav \sqcap xyv$ et divellamus in duas ut $vfya \sqcap \text{ת} + xyv$ et $\text{ת} \sqcap gxav$. Ita duas habebimus arbitrarias, sed et plures licebit facere; ipsis scilicet

3 prorsus ut *erg.* *L* 9 inventionem *(1)* seriei *(2)* summae *L* 13 ut *(1)* seriei *(2)* serierum eiusmodi *(a)* hoc modo ad *(b)* replicatarum *L* 14 expressiones *(1)* | possimus *streicht Hrsg.* | rev *(2)* aliaque *L* 20 procedamus; *(1)* quoniam est aeq *(2)* est *L* 23 plures *(1)* quaerere *(2)* licebit *L*

incognitis, $x.y.f.g.h.$ plures earum ascribendo potentias; arbitrariis quantitatibus affectis; undeque aequationes evolvendo novissima aequatio qua $f.$ ex datis $a.b.$ et $g.h.$ invenitur, debet esse talis, ut destruantur in ea ipsae $g.$ et h; et inventa erit summa seriei datae. Imo maior difficultas subnascitur in aequationes comparatitias quibus arbitrariae assumtae invenientur nec ingredi debent $a.$ et $b.$ Ergo debent totidem aequationes collatitiae quot sunt diversi modi quibus in aequatione ultima pro $f.$ $a.b.g.h.$ combinantur. Alioquin enim arbitrariae quae sunt constantes explicarentur per $a.b.$ etc. inconstantes, nisi forte ipsas arbitrarias quoque reddere velimus inconstantes quod non simplici explicatione ipsarum $x.y.f.g.h.$ per formulas, sed divulsione fieri debet, ut si in aequatione $fya - gxa \sqcap xy$ scribas $fya + \aleph y + \beth + \gimel y^2$ idemque facias de $x.$ et $f.g.$ separatim; imo et de $xy.xg.xyf.$
$- \aleph y - \beth - \gimel y^2$
aliisque omnibus terminis ex quatuor literarum combinatione factis, atque inde divellas aequationem in duas. Tunc fecisti quicquid hac quidem methodo ab homine fieri potest: Idemque aliis adhibitis literis fieri potest in sequenti $\dfrac{gz - yh}{yz} \sqcap \left[\dfrac{1}{b}\right]$ et ita porro. Inventis ita $x.y.$ et tandem termino ultimo $f.$ explicandae sunt novae assumtae hoc modo, ut destruantur in illis $f.$ et $g.$ et $h.$ Et haec est pulcherrima et generalissima methodus divulsionum; quae etiam in methodo Diophanti utilis.

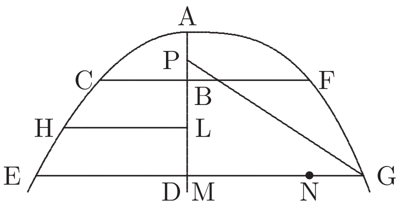
Loco quod terminos quaesitae seriei $\dfrac{f}{x}.\ \dfrac{g}{y}.$ assumsimus ut fractiones potuissemus assumere ut radices irrationales, item ut radices aequationum, unde adhuc maior complicatio. Quid si simplicissime series quaesita fuisset: $x.y.z.t.$ data $a.b.c.d.$ et $x-y \sqcap a.$ $y-z \sqcap b.$ sed sic nullae literae supernumerariae, unde et nullae divulsiones; variandae ergo enuntiationes, ut fecimus. Caeterum hic credo omnes methodos inveniendi series in se replicatas, et proinde problemata methodi tangentium inversae reducere credo poterimus ad quadraturas; quod foret pulcherrimum. Ita enim semper curvas eiusmodi possemus describere modo quem ego introduco, et scire an sint curvae analyticae satisfacientes problemati,

4 subnascitur *(1)* in valores *(2)* in *L* 6 pro f. *erg. L* 9 si | pro *streicht Hrsg.* | in *L* 14 $\frac{1}{\mathrm{a}}$ *L ändert Hrsg.* 17 f. utilis. *(1)* Caeterum *(2)* Loco *L* 20 a.b.c.d. *(1)* et modus *(2)* et *L*

25 modo quem ego introduco: Gemeint ist die von Leibniz seit Herbst 1675 entwickelte Differential- und Integralrechnung.

quia semper quadraturas omnes possumus dare analytice. In methodi divulsionum successu debet esse difficultas, quia si succederet aeque facile pro qualibet serie summanda succederet quia ipsae a. et b. non variant calculum. Sed et bene video istam methodum non esse naturalissimam, quia non dat impossibilitatem.

[*Teil 2*]



[*Fig. 1*]

Demonstravi seriei rationalis utcunque infinitae differentias esse rationales, tum ex eo quod supra dixi de differentiis infinite parvis, tum vero etiam methodo generali hoc modo[:] sit figura ABC[,] summatrix ABF. Si ea est irrationalis, non poterit generaliter evenire, ut duarum ordinatarum quarumcunque, ut BF, MG differentia sit rationalis. Quod ita ostendo. Poterit aliqua ex ordinatis quadratricis esse rationalis (nam potest haec curva alicubi secari a recta aut hyperbola, ita ordinata sit utrique communis, et ea erit rationalis), ut si a recta PG secetur in G. sitque AP, PM, rationalis ratioque laterum trianguli ut numeri ad numerum, utique erit MG rationalis. Differentia autem inter MG rationalem, et BF irrationalem utique irrationalis contra hypothesin.

Non ita facile applicatur hoc ad series numerorum[,] poterit tamen.

Sit aequatio $y^2 + by + xy + x^2 + cx + d \sqcap 0$ et rursus

$(y)^2 + b(y) + (x)(y) + (x)^2 + c(x) + d \sqcap 0$ sintque x. et (x) rationales[,]

7 Demonstravi *(1)* summae ratio *(2)* serierum rationalium utcunque infinitarum *(3)* seriei *L* 12 secari *(1)* aut a triangulo *(2)* a recta aut *(a)* parabola *(b)* hyperbola, ita | ut eius *gestr.* | ordinata *L* 13 rationalis) *(1)* vel etiam assumi potest rationalis ordinata *(2)*, ut *L* 13 ratioque *(1)* lineae *(2)* laterum *L* 15 f. hypothesin. *(1)* Eodem enim *(2)* Non *L*

8 supra dixi: s. o. S. 818 Z. 3 f.

$\ddagger y \ddagger (y) \sqcap z$. Quaeritur an z. possibile sit esse rationalem quacunque posita relatione inter y. et (y). Hoc patet esse impossibile. Potest enim talis utique poni ut sit differentia irrationalis.

Componantur aequationes $\begin{array}{l} + y^2 + by + xy + x^2 + cx \\ \\ - (y)^2 - b(y) - (x)(y) - (x)^2 - c(x) \end{array} \boxed{\begin{array}{c} +d \\ \\ -d \end{array}} \sqcap 0.$

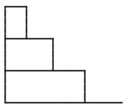
$y - (y) \sqcap z$. et $x - (x) \sqcap \omega$ fiet $z, + y \quad + bz +$

$$+(y) \qquad [\textit{bricht ab}]$$

$$\boxed{y^2}\boxed{-y^2} + 2zy - z^2$$

$$y - (y) \qquad [\textit{bricht ab}]$$

$a \quad b \quad c \quad d \quad e$ irrationales pleraeque



[*Fig. 2*]

$$\left.\begin{array}{cccc} a-b & a-c & a-d & a-e \\ & b-c & b-d & b-e \\ & & c-d & c-e \\ & & & d-e \end{array}\right\} \text{rationales}$$

Patet hoc fore impossibile si vel una ex ipsis $a.b.c.d.e$. sit rationalis. Hinc etiam $a-b$, $-b+c$ rationalis seu $a + c - 2b$, item $a + b + c, -3d$.

$a + b - 2c$

Ut differentia inter a et c sit rationalis; debet nulla esse litera [*bricht ab*]

$\sqrt{1 - \sqrt{1}} - \sqrt{}$ [*bricht ab*]

4–6 *Darunter:* (Hinc ut obiter dicam, derivari poterit regula Slusii tangentium.)

19 sit *(1)* irrationalis *(2)* rationalis *L*

---

21 derivari ... tangentium: Leibniz bezieht sich vermutlich darauf, daß die Tangentenregel von Sluse für eine Kurve $F(x,y) = 0$ mit $t = \frac{y}{y'}$ auf der Gleichung $|\, t \cdot F'_x(x,y)\,| - |\, y \cdot F'_y(x,y)\,| = 0$ beruht; vgl. auch die Erl. zu N. 38_5 S. 415 Z. 25. — Ähnlich äußert sich Leibniz in *Calculus tangentium differentialis* (s. H.-J. Hess, *Zur Vorgeschichte*, 1986, S. 87 u. *LBG* S. 230) vom November 1676.

Demonstrandum superest quod impossibile sit circulum esse quantitatem rationalem ad quadratum seu esse numerum vel rationem quae semper satisfaciat huic $\dfrac{314159}{100000}$. Ponatur esse fractio $\dfrac{c}{b}$, reducatur ad decimalem $\sqcap \dfrac{f}{10^y}$ fiet $f \sqcap \dfrac{10^y c}{b} \sqcap 314159$ etc.

Sit numerus quicunque multiplicans 10^y infinitae potentiae modo ipse sit finitus qui si dividatur per finitum, tandem post certam periodum non producat semper numeros priores. Examinandum, stabit ita.

Pro 10 scribamus v, fiet $\dfrac{v^y \frown d + ev + fv^2 + \text{ etc.}}{[l] + mv + nv^2 + \text{ etc.}}$

Pro v^y ponetur $0 + 0v + 0v^2 + 0v^3$ etc. $+\, v^y$ ponendo y infinitam.

2 huic *(1)* 341589 utcunque continuataqe *(2)* 3,1459 ad *(3)* $\dfrac{314159}{100000}$ *L* 5 non *(1)* relinquat *(2)* producat *L* 7 m *L ändert Hrsg.*

69. DE SERIE WALLISIANA
[Spätsommer 1676?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 7. 1 Ausschnitt ca 16 x 21 cm. Untere Schnittkante geschwungen. 1 S. auf Bl. 7 r°. Bl. 7 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das schwer zu datierende Stück stammt, worauf die durchgehende Verwendung von *aeq.* als Gleichheitszeichen hindeutet, wohl frühestens aus den letzten Wochen von Leibniz' Parisaufenthalt.

Secundum Wallisium ratio quadrati diametri ad circulum est $\dfrac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\,\text{etc.}}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\,\text{etc.}}$ *aequ.* $\boxdot$.

Ergo fiet $2 \boxdot$ *aeq.* $\dfrac{3.3.5.5.7.7.9.9.11.11\,\text{etc.}}{4.4.6.6.8.8.10.10.12.12\,\text{etc.}}$ et $\sqrt{2\boxdot}$ *aeq.* $\dfrac{3.5.7.9.11\,\text{etc.}}{4.6.8.10.12\,\text{etc.}}$.

Sed hinc colligo expressionem Wallisianam posse quidem haberi pro appropinquatione, cuius apparet continuabilitas in infinitum, sed non pro exacta expressione per infinitam seriem consideratam semel in universum, nam exprimendo per suppositam continuationem in infinitum, oritur absurdum, nam omnes numeri numeratoris tolli possunt, quia habentur eorum multipli in nominatore, si uterque in infinitum continuatus intelligitur, et ita staret $\sqrt{2\boxdot}$ *aeq.* $\dfrac{1}{4.2.8.2.12.2\,\text{etc.}}$ vel $\dfrac{1}{8.16.24\,\text{etc.}}$ quod est absurdum, fieret enim $\sqrt{2\boxdot}$ quantitas infinite parva. Similiter fieret $2\boxdot$ *aeq.* $\dfrac{1}{64.256.576\,\text{etc.}}$ seu $2 \boxdot$ *aeq.* $\dfrac{1}{64.1.\ 64.4.\ 64.9.\ \text{etc.}}$.

9 f. est *(1)* $\dfrac{1.3.5.}{}$ *(2)* $\dfrac{3.5.7.9.11.13}{4.6.10.12.1}$ *(3)* $\dfrac{1.3.3.5.5.7.7.9.9.11.11.\,\text{etc.}}{2.4.4.6.6.8.8.10.10.12.12.\,\text{etc.}}$ *L* 14 universum, *(1)* cum enim hoc *(2)* nam *L* 15 absurdum, *(1)* dividendo enim omnes *(2)* nam *L*
19–825,1 $\dfrac{1}{64.1.\ 64.4.\ 64.9.\ \text{etc.}}$. | Itaque *streicht Hrsg.* | Itaque *(1)* sic *(2)* potius *(a)* dicendum est *(b)* exprimendum est, *(aa)* $\dfrac{3.3.}{}$ *(bb)* $\boxdot$ esse *(cc)* ad *L*

9 Secundum Wallisium: *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191 S. 178–182 (*WO* I S. 467–469).

Itaque potius exprimendum est, ad $\boxdot$ continue appropinquari per hos valores $\frac{3.3}{2.4}$ vel $\frac{3.3.5.5.}{2.4.4.6}$ vel $\frac{3.3.5.5.7.7.}{2.4.4.6.6.8}$ vel $\frac{3.3.5.5.7.7.9.9.}{2.4.4.6.6.8.8.10}$

seu $2\sqrt{\boxdot} \sqcap \frac{3}{\sqrt{2}}$ vel $\frac{3.5}{4.\sqrt{3}}$ vel $\frac{3.5.7}{4.6.\sqrt{4}}$ vel $\frac{3.5.7.9}{4.6.8.\sqrt{5}}$ vel $\frac{3.5.7.9.11}{4.6.8.10.\sqrt{6}}$ vel $\frac{3.5.7.9.11.13}{4.6.8.10.12.\sqrt{7}}$

vel $2\sqrt{\boxdot} \sqcap \frac{3}{\sqrt{2}}$ vel $\frac{3.5}{4.\sqrt{3}}$ vel $\frac{5.7}{8.\sqrt{4}}$ vel $\frac{5.7.9}{8.\overline{8.\sqrt{5}}}$ vel $\frac{7.9.11}{8.16.\sqrt{6}}$ vel $\frac{7.9.11.13}{8.16.\overline{12.\sqrt{7}}}$ vel $\frac{9.11.13.15}{8.16.24.\sqrt{8}}$ vel $\frac{9.11.13.15.17}{8.16.24.\overline{16\sqrt{9}}}$ vel $\frac{11.13.15.17.19}{8.16.24.32\sqrt{10}}$ vel $\frac{11.13.15.17.19.21}{8.16.24.32.\overline{20\sqrt{11}}}$ vel $\frac{13.15.17.19.21.23}{8.16.24.32.40\sqrt{12}}$ et ita porro.

Et proinde series Wallisiana est proprie appellanda finita indefinita, seu quae alicubi finienda concipi debet, licet non exprimatur ubi.

Ex istis appropinq. fit

□ diam.	ad circul.				
9	8		9	8	*A*
225	192	vel in numeris	225	192	*B*
11025	9216	minoribus	1225	1024	*C*
893025	737280		19845	16384	*D*
108056025	88473600		160083	131072	*E*

5 vel $2\sqrt{\boxdot} \sqcap$ *(1)* $\frac{3.5}{}$ *(2)* $\frac{1}{8.16.24.32.48}$ *(3)* $\frac{3}{\sqrt{2}}$ *L* 9 concipi *(1)* potest, licet *(2)* debet *L*

9 f. ubi. *(1)* □ diam. ad circ. ut $\frac{9}{8}$ | $\frac{225}{192}$ | $\frac{1225}{1024}$ | $\frac{19845}{16384}$ *Dazu gestr. Nebenrechnung*: $\frac{9}{8} \fint 1 + \frac{1}{8}$ *(2)* Ex *L*

Ratio A dat quotientes $1, 8 \Big|\ B,\ 1, 5, 1, 4, 2 \Big| C,\ 1, 5, 10, 1, 1, 2, 1, 2 \Big| D,\ 1, 4, 1, 2 + \dfrac{698}{921} \Big|$ $E,\ 1, 4, 1, 1, 13 + \dfrac{398}{1045} \Big|$

825,12–14

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} 9 \\ \underline{25} \\ 225 \\ \underline{49} \\ 2025 \\ \underline{900} \\ 11025 \\ 81 \end{array}$$

1 B, 1, 5, *(1)* 10, 1, 1, 2, 1 *(2)* 1, 4, 2 |, 1 *streicht Hrsg.* | C *L*

1 quotientes: Es handelt sich um die Quotienten der Kettenbruchentwicklung.

70. DE SUMMA NUMERORUM QUADRATORUM RECIPROCORUM [Juni 1674 – Anfang Oktober 1676]

Überlieferung: *LuX* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Unbekannter mit zusätzlichen Bemerkungen von Leibniz): LH 35 VIII 30 Bl. 100. 1 Ausschnitt ca. 16 x 20 cm. Links oben ein Stück ca. 7 x 11 cm unregelmäßig herausgeschnitten. Darunter am linken Rand unregelmäßige, am unteren Rand schräge Schnittkante. 1. S. auf Bl. 100 r°. Bl. 100 v° leer. Überschrift und Text Z. 16 f. ergänzt.
Cc 2, Nr. 1210

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Gesprächsaufzeichnung ist offenbar während des Parisaufenthalts entstanden; die Verwendung des Waagebalkens als Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin.

[*Leibniz*]

Summa fractionum quarum [nominatores] sunt quadrati ordine. Idque per appropinquationem, methodo iuvenis Galli.

Inventum iuvenis per-ingeniosi, natione Galli, qui mihi communicavit coram, et quem ab eo tempore non vidi.

[*Fremde Hand*]

$$\begin{array}{ccccccccccc} C & \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} & \frac{1}{49} & \frac{1}{64} & \frac{1}{81} & \frac{1}{100} \\ A & \frac{1}{1} & \cdot & \frac{1}{9} & \cdot & \frac{1}{25} & \cdot & \frac{1}{49} & \cdot & \frac{1}{81} & \cdot \\ B & \cdot & \frac{1}{4} & \cdot & \frac{1}{16} & \cdot & \frac{1}{36} & \cdot & \frac{1}{64} & \cdot & \frac{1}{100} \end{array}$$

13 *(1)* Series *(2)* Summa *L* 13 numeratores *L ändert Hrsg.*

15 iuvenis Galli: Nach einer Vermutung von J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 177 f. handelt es sich bei dem Unbekannten um dieselbe Person, deren Identität Leibniz 1695 im Briefwechsel mit G.-F.-A. de L'Hospital und 1697 mit Johann Bernoulli zu ermitteln versuchte (s. *LMG* II S. 276 f. u. 280 sowie *LMG* III S. 362 f.).

$$B \sqcap \frac{1}{4}\,C. \qquad\qquad A - \frac{1}{1} \sqcap B. \qquad\qquad \text{Rursus} \quad A - \frac{1}{1} \sqcap B - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo } A \sqcap \frac{3}{4}\,C. \qquad\qquad \text{Ergo} \quad \frac{3}{4}\,C - \frac{1}{1} \sqcap \frac{1}{4}\,C. \qquad\qquad \text{Ergo} \quad \frac{3}{4}\,C - \frac{1}{1} \sqcap \frac{1}{4}\,C - \frac{1}{4}.$$

$$\text{Ergo} \quad \frac{1}{2}\,C \sqcap \frac{1}{1}. \qquad\qquad \text{Ergo} \quad \frac{1}{2}\,C \sqcap \frac{1}{1} - \frac{1}{4}.$$

$$\frac{2}{4} \quad C \quad \sqcap \quad \frac{1}{1} \quad - \quad \frac{1}{4} \quad + \quad \frac{1}{9} \quad - \quad \frac{1}{16} \quad + \quad \frac{1}{25} \left[- \frac{1}{36} + \frac{1}{49} \right]$$

[*Leibniz*]

$$\frac{6}{8} \quad C \quad \sqcap \quad \frac{1}{1} \quad - \quad \frac{1}{8} \quad + \quad \frac{1}{27} \quad - \quad \frac{1}{64} \quad \text{etc.}$$

---

4 *Leibniz, quer zur Schreibrichtung*, *der letzte Bruch von fremder Hand:*

La somme de la progression des fractions des puissances tombe entre: $\frac{820}{1000}$ et $\frac{821}{1000}$.

4 $-\frac{1}{49}$ *X ändert Hrsg.*

---

6 $\frac{6}{8}\,C$: C steht hier für die Summe der reziproken Kubikzahlen, nicht wie zuvor für die Summe der reziproken Quadratzahlen. 8 La somme: Es handelt sich um eine nicht ganz korrekte Näherung für den Wert der alternierenden Reihe der reziproken Quadratzahlen, der zwischen 0,822 und 0,823 liegt.

71. LOGARITHMI COMPARATI CUM PROGRESSIONIS HARMONICAE SUMMA

[Juni 1674 – Anfang Oktober 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 16. 1 Zettel ca 18 x 6 cm. Oberkante geschwungen mit Spuren fremden Textes. 1 S. auf Bl. 16 r°. Bl. 16 v° leer. Überschrift ergänzt. Cc 2, Nr. 1140

Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während des Parisaufenthalts geschrieben sein; die Verwendung des Waagebalkens als Gleichheitszeichen deutet auf eine Entstehung nicht vor Juni 1674 hin.

L o g a r i t h m i c o m p a r a t i c u m p r o g r e s s. h a r m. s u m m.

$\dfrac{1}{1+z} \sqcap 1 - z + z^2 - z^3 + z^4$ etc.

Quemadmodum $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ etc. reciprocorum hyperbolae summae logarithmis proportionales; ita reciprocorum hyperbolae cubicae summae altiori cuidam proportionales; nempe $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{3}$ $\dfrac{1}{6}$ $\dfrac{1}{10}$ $\dfrac{1}{15}$, (: sive $\dfrac{1}{1}$. $\dfrac{1}{4}$. $\dfrac{1}{9}$. $\dfrac{1}{16}$, nam haec in lineis coincidunt :) ex $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{-1+4}$ $\dfrac{1}{+1-4+9}$ $\dfrac{1}{-1+4-9+16}$ $\dfrac{1}{+1-4+9-16+25}$ etc. Quae ut in unum addas, et ad unum reducas nomen seriem eiusmodi infinitam non est difficile in lineis, quia quadratura hyperbolae cubicae habetur, videndum quae sit eius analogia ad logarithmos seu summam hyperbolae quadraticae.

---

18 *Darunter:* Error

11 *(1)* $\dfrac{1}{y^2-}$ *(2)* $\dfrac{1}{a^2+y^2+2ya}$ *(3)* $\dfrac{1}{1+\underbrace{y^2-2y}}$ $\sqcap$ *(4)* $\dfrac{1}{1+z^2}$ *(5)* $\dfrac{1}{1+z}$ *L* 12 Quemadmodum *(1)* $\dfrac{1}{y^2}$ reciproca *(2)* $\dfrac{1}{2}$ *(3)* $\dfrac{1}{1}$ $\dfrac{1}{2}$ $\dfrac{1}{3}$ etc. *(a)* reciproca | hyperbolae *streicht Hrsg.* | *(b)* reciprocorum *L* 17 videndum | tantum *gestr.* | quae *L*

---

12 f. summae logarithmis proportionales: Leibniz vermengt in unzulässiger Weise Reihensummierung und Kurvenquadratur. Er erkennt schließlich die Fragwürdigkeit seiner Argumentation, schwächt die Schlußbemerkung ab, indem er in Z. 17 tantum streicht, und markiert den Text mit Error.

72. DE SERIERUM DIVISIONE ET SUMMATIONE
[Mitte Oktober – November 1676?]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 265. 1 Bl. 2°. 1 1/2 S.
Cc 2, Nr. 1542

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist auf Pariser Papier unsicherer Datierung geschrieben. Die Verwendung der Symbolik von Differential- und Integralrechnung zeigt, daß N. 72 nicht vor November 1675 entstanden ist. Der Gebrauch von = als Gleichheitszeichen spricht hier eher für einen Zeitpunkt nach der Abreise aus Paris. Bei seinem Londonaufenthalt in der zweiten Oktoberhälfte 1676 hat sich Leibniz z. B. mit der Division von Reihen bei Newton auseinandergesetzt (vgl. *LSB* III, 1 N. 98 S. 666 u. 675).

[*Teil 1*]

[*Der Text beginnt mit dem Divisionsschema S. 831*]

$$\begin{array}{llllllllllllll}
1) & 11a & +12a^2 & +13a^3 & +14a^4 & +15a^5 & +16a^6 & +17a^7 & +18a^8 & +19a^9 & +20a^{10} & 21a^{11} & 22a^{12} & \\
a^2 & & & 11a^3 & +12a^4 & +13a^5 & +14a^6 & +15a^7 & +16a^8 & +17a^9 & +18a^{10} & 19 & 20 & \\
a^3 & & & & 11a^4 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & 18 & 19 & \\
 & & & & & & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & 17 & \\
 & & & & & & & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & 16 & \\
 & & & & & & & & 11 & 12 & 13 & 14 & 15 & \\
 & & & & & & & & & & & & 11 & 12
\end{array}$$

$11 = 1 \qquad 12 = 0 \qquad 13 + 11 = 0 \qquad 14 + 12 + 11 = 1 \qquad 15 + 13 + 12 = 1$
$16+14+13+11 = 0 \qquad 17+15+14+12+11 = 0 \qquad 18+16+15+13+12+11 = 0$
$19 + 17 + 16 + 14 + 13 + 12 = 1 \qquad 20 + 18 + 17 + 15 + 14 + 13 = 1$
$21 + 19 + 18 + 16 + 15 + 14 = 1$
$11 = 1 \qquad 12 = 0 \qquad 13 = -1 \qquad 14 = 0 \qquad 15 = 2 \qquad 16 = 0 \qquad 17 = -3$
$18 = -2 \qquad 19 = 5 \qquad 20 = 5 \qquad 21 = -4$

---

13 Die Zahlen 11–22 stehen für die Koeffizienten der Potenzen von a; vgl. Knobloch, *Übersicht*, S. 29–39. 16–19 Die Zeilen müßten im Schema um eine Spalte weiter rechts stehen. Der Fehler beeinträchtigt den folgenden Koeffizientenvergleich ab Z. 21.

divisor	dividendus	quotiens $a - a^3 + 2a^5$		
1				
	a			
a^2				
a^3		$-a^3$		
	a^4			
	a^5	$+a^5$	$+a^5$	
a^6			$+a^6$	$+a^6$
a^7		$-a^7$	$-a^7$	$-3a^7$
a^8		$-a^8$	$-a^8$	$-3a^8$
	a^9		$+a^9$	$+a^9$
	a^{10}	$+a^{10}$	$+2a^{10}$	$+2a^{10}$
	a^{11}	$+a^{11}$	$+2a^{11}$	
a^{12}				$-2a^{12}$
a^{13}		$-a^{13}$	$-a^{13}$	$-3a^{13}$
a^{14}		$-a^{14}$	$-a^{14}$	$-a^{14}$
a^{15}		$-a^{15}$		
	a^{16}		$+a^{16}$	$+a^{16}$
	a^{17}	$+a^{17}$	$+2a^{17}$	
	a^{18}	$+a^{18}$	$+2a^{18}$	
	a^{19}	$+a^{19}$	$+a^{19}$	$-a^{19}$
a^{20}				
a^{21}		$-a^{21}$	$-a^{21}$	[*bricht ab*]
a^{22}		$-a^{22}$	$-a^{22}$	
a^{23}		$-a^{23}$		
a^{24}		$-a^{24}$		
	a^{25}		$+a^{25}$	
	a^{26}	$+a^{26}$	$+2a^{26}$	
	a^{27}	$+a^{27}$	$+2a^{27}$	
	a^{28}	$+a^{28}$	$+a^{28}$	
	a^{29}	$+a^{29}$	$+a^{29}$	
divisor	dividendus 1mus	dividendus 2dus	dividendus 3tius	

1–32 In der Vorlage sind die Spalten als Zeilen angeordnet.

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{rccccl|l|l}
y = a^0 + & a^1 + & a^3 + & a^6 + & a^{10} & \text{etc.} & \text{itaque si datur } y & \text{quaerendo} \\
ad\overline{y} = 0 \ +1 & a^1 + & 3\,a^3 + & 6\,a^6 + & 10\,a^{10} & \text{etc.} & \text{dabitur et } dy & \text{tangentem} \\
a^2ddy = & 1\,a^1 + & 9\,a^3 + & 36\,a^6 + & 100\,a^{10} & \text{etc.} & & \text{lineae cuius} \\
\frac{1}{a}\int yda = & \frac{a^1}{1} + & \frac{1}{3}a^3 + & \frac{1}{6}a^6 + & \frac{1}{10}a^{10} & \text{etc.} & & \text{ordinata} \\
\frac{1}{aa}\int\overline{\int\overline{yda}da} & \frac{a^1}{1} + & \frac{1}{9}a^3 + & \frac{1}{36}a^6 + & \frac{1}{100}a^{10} & \text{etc.} & & \text{est } y
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcccccc}
y = a^0 & + \ a^1 & + \ a^2 & + \ a^3 & + \ a^4 & + \ a^5 & \\
\int yda & \frac{a^1}{1} & + \ \frac{a^2}{2} & + \ \frac{a^3}{3} & + \ \frac{a^4}{4} & + \ \frac{a^5}{5} & \\
\int\overline{\int\overline{yda}\frac{da}{a}} & \frac{a^1}{1} & + \ \frac{a^2}{4} & + \ \frac{a^3}{9} & + \ \frac{a^4}{16} & & \text{etc.}
\end{array}$$

Hinc cum $a = 1.$ prodit $\frac{1}{1} + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ etc. Itaque in lineis haberi credo potest huius seriei summa, sed supposita hyperbolae $\square^{\text{tura}}$. Methodus autem haec probe notanda est.

---

4 a^2ddy: Die Bezeichnungsweise ist irreführend: Leibniz berechnet $ad(ady)$, anschließend die Integrale $\int \frac{y}{a}da$ und $\int \frac{1}{a}\left(\int \frac{y}{a}da\right)da$; bei letzteren fehlen im Ergebnis die ersten Terme der Reihen. In Z. 9 verwendet Leibniz die korrekte Bezeichnungsweise.

[*Teil 3*]

$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4 - x^5$ etc. Rursus si $1 + a^l + a^m + a^n$ etc. $= x$. patet fore $\int \overline{x} = \frac{1}{2}x^2$. Ergo fiet: $\frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{l}x^{l+1} + \frac{1}{m}x^{m+1}$ etc. seu $x^2 = \frac{2}{l+1}x^{l+1} + \frac{2}{m}x^{m+1}$. Similiter $x^3 = 3\int x^2$. Ergo $x^3 = \frac{2.3}{l.\overline{l+1}}x^{l+2} + \frac{2.3}{m.\overline{m+1}}x^{m+2}$ etc.

$$\begin{array}{llll}
\text{Ergo fiet } 1 - x + x^2 - x^3 \text{ etc.} = 1 & & & \\
& -\frac{2}{l+1}x^{l+1} & -\frac{2}{m+1}x^{m+1} & \text{etc.} \\
& +\frac{2.3}{\overline{l+1}.\overline{l+2}}x^{l+2} & +\frac{2.3}{\overline{m+1}.\overline{m+2}}x^{m+2} & \text{etc.} \\
& -\frac{2.3.4}{\overline{l+1}.\overline{l+2}.\overline{l+3}}x^{l+3} & -\frac{2.3.4}{\overline{m+1}.\overline{m+2}.\overline{m+3}}x^{m+3} &
\end{array}$$

Ergo si $x = 1 + a^4 + a^9 + a^{16}$ erit

$$1 - y = \frac{1}{1+x} = 1 - \frac{2}{1}a + \frac{2.3}{1.2}a^2 - \frac{2.3.4}{1.2.3}a^3 + \frac{2.3.4.5}{1.2.3.4}a^4 - \frac{2.3.4.5.6}{1.2.3.4.5}a^5 + \frac{2.3.4.5.6.7}{1.2.3.4.5.6}a^6 \text{ etc.}$$

$$+\frac{2}{5}a^5 + \frac{2.3}{5.6}a^6 + \frac{2.3.4}{5.6.7}a^7$$

$$a^2y = a^2 - \frac{2}{1}a^3 + \frac{2.3}{1.2}a^4 \text{ etc.}$$

$$a^6y = a^6 - \frac{2}{1}a^7 \text{ etc.}$$

Quae tandem faciunt: $\dfrac{1 + a^2 + a^6 + a^{12} + a^{20}}{1 + a^4 + a^9 + a^{16} \text{ etc.}}$

2 *(1)* $\frac{1}{1 + a^4 + a^9 + a^{16}} = 1 -$ | $1 +$ *gestr.* | $a^4 + a^9 + a^{16}$ *(2)* $\frac{1}{1+x}$ *L* 3 $\frac{1}{2}x^2 =$ | $\frac{1}{1}x +$ *gestr.* | $\frac{1}{l}x^{l+1}$ *L* 3 seu $x^2 =$ | $\frac{2}{1}x +$ *gestr.* | $\frac{2}{l+1}x^{l+1}$ *L* 4 Ergo $x^3 =$ | $\frac{2.3}{1.2}x +$ *gestr.* | $\frac{2.3}{l.\overline{l+1}}x^{l+1}$ *L* 10 $1 - y =$ *erg. L* 13 a^6y ... etc. *erg. L*

2–13 Leibniz dividiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n(n+1)}$ durch $\sum_{n=0}^{\infty} a^{n^2}$, indem er zuerst den ersten Term des Zählers dividiert und dann das Ergebnis für die folgenden Terme verwendet. Dabei unterläuft ihm eine Reihe von Fehlern und Versehen, die er nur punktuell korrigiert.

73. EXPRESSIO SERIEI PER NUMERUM PRIMUM ET ULTIMUM
[Oktober – Dezember 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 150. 1 Bl. 2°. Ca 1/2 S. auf Bl. 150 r° oben u. eine isolierte Zeile auf dem gegenläufig beschriebenen Bl. 150 v°. Überschrift ergänzt. Auf dem Rest von Bl. 150 r° Cc 2, Nr. 1516 (Druck in Reihe VIII), von Bl. 150 v° Cc 2, Nr. 1515 B (Druck im Nachtrag zur Algebra in einem späteren Band der Reihe VII).
Cc 2, Nr. 1515 A

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist bisher für die Monate März bis August 1676 belegt. Dem Duktus nach ist die folgende Aufzeichnung Cc 2, Nr. 1516 direkt im Anschluß an das vorliegende Stück geschrieben. In dieser Aufzeichnung bezieht sich Leibniz auf J. B. TAVERNIER, *Les six voyages*, 2 Bde, Paris, 1676 („achevé d'imprimer" 1. Oktober 1676). Wie aus seinem Brief an Ferdinand von Fürstenberg vom Dezember 1676 hervorgeht (*LSB* I, 2 N. 209 S. 239), hat Leibniz das Erscheinen des Werkes noch vor seiner Abreise aus Paris (4. Oktober 1676) registriert.

Expressio seriei per numerum primum et ultimum et ita inventio summae facilis dum omnes per eandem quantitatem constantem exprimuntur

Variis modis series exprimi possunt utiliter: ex caeteris unus est in quo omnes ope termini primi et ultimi, ubi semper variat expressio pro alio atque alio simul sumtorum numero. Talis autem expressio semper ex proprietate essentiali derivari potest, ut in arithmetica: $a.\ \ b.\ \ c.$ et $c-b$ *aequ.* $b-a.\ \ \frac{c+a}{2} \sqcap b.$

$d\ \ a\ \ b\ \ c\ \ e.\quad a \sqcap \frac{d+b}{2}.\ \ c \sqcap \frac{b+e}{2}.\ \ a+c \sqcap \frac{d+2b+e}{2}.\ \ \frac{2b}{\cancel{2}} \sqcap \frac{d+2b+e}{\cancel{4}2}.$ et $b \sqcap \frac{d+e}{2}.$ et $2b \sqcap d+e.$ et $a+c \sqcap \frac{d+d+e+e}{2} \sqcap d+e.$

Ergo $a \sqcap \frac{d}{2}\boxed{+\frac{b}{2}} + \frac{d+e}{4}.$ et $a \sqcap \frac{3d+1e}{4}.\ \ c \sqcap \frac{1d+3e}{4}$

$$\left.\begin{array}{ccc} a & b & c \\[2ex] \frac{2a}{2} & \frac{a+c}{2} & \frac{2c}{2} \end{array}\right\} \sqcap \frac{3a+3c}{2}$$

20 a. b. c. *(1)* et b $\sqcap \frac{a+c}{2}$. Iam a. b. c. d. et c aequ. $\frac{b+d}{2}$. Ergo *(2)* et *L*

$$\left.\begin{array}{ccccc} d & a & b & c & e \\[2ex] \frac{4d}{4} & \frac{3d+1e}{4} & \frac{2d+2e}{4} & \frac{1d+3e}{4} & \frac{4e}{4} \end{array}\right\} \sqcap \frac{\underbrace{4+3+2+1}\frown d, +\underbrace{1+2+3+4}\frown e}{4}$$

Ergo quaesita summa progressionis arithmeticae redit iterum ad summam progressionis arithmeticae, et quidem simplicissimae, nempe summam progressionis arithmeticae 1. 2. 3. 4. 5. ab unitate incipientis et per unitates ascendentis. Haec vero ad inventionem sui supponit se ipsam, id est habetur aequatio.

Naturalis admodum haec est inquisitio, quaerimus enim modum quo summa omnium ex dato primo et ultimo, (vel primo posito 0 ex ultimo) haberi possit. Quare singuli ex ultimo explicabuntur, ut summa ex eo possit explicari.

[*Isolierte Zeilen*]

[*Am oberen Rand*] 1 $\dfrac{a}{a+\sqrt{ab+\sqrt[3]{a^2c}-\sqrt{}}}$

[*Auf der Rückseite, gegenläufig*] $\dfrac{1}{b+c} \sqcap \dfrac{1}{b} - \dfrac{c}{b^2} + \dfrac{c^2}{b^3} - \dfrac{c^3}{b^4} + \dfrac{c^4}{b^5}$ $\qquad \dfrac{1}{150+1}$

2–4 *Nebenrechnung zur Streichung, nicht gestrichen:*
$a+c \sqcap \dfrac{f+g}{2}$ $\quad a \sqcap \dfrac{3d+1e}{2}$ $\quad \dfrac{a}{2} \sqcap d + \dfrac{f}{2} + \dfrac{g}{2}$

2–4 $\dfrac{\underbrace{4+3+2+1}\frown \mathrm{d}, +\underbrace{1+2+3+4}\frown \mathrm{e}}{4}$ | f d a b $\dfrac{\mathrm{f+g}}{2}$ c e g *gestr.* | Ergo *L* 5 arithmeticae, *(1)* unde *(2)* et quidem omnis alia *(3)* et *L* 7 f. aequatio. *(1)* Nam ponendo *(2)* Naturalis *L* 12 1 | a + b + c + *gestr.* | $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}+\sqrt{\mathrm{ab}+\sqrt[3]{\mathrm{a}^2\mathrm{c}}-\sqrt{}}}$ *L*

---

15 $a+c \sqcap \dfrac{f+g}{2}$: Richtig wäre $a+c \sqcap f+g$. Der Fehler beeinträchtigt die restlichen Rechnungen.

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur; es ist zweigeteilt. Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, sind einschließlich ihrer modernen Ausgaben im ersten Teil verzeichnet. Neuere Literatur erscheint im zweiten Teil. Unter Leibniz wird neben seinen eigenen Schriften zusätzlich die für diesen Band relevante Leibniz-Korrespondenz erfaßt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

SCHRIFTEN DER LEIBNIZZEIT

1. Apollonius v. Perga, *Conica*: S. *126*.
2. Archimedes
   1. *De sphaera et cylindro I*: S. *228*.
   2. *De lineis spiralibus*: S. 246. *246*. 559.
   3. *Dimensio circuli*: S. 105. *105*.
   4. *Opera*: S. 126. *126*.
3. Barozzi, Fr., *Admirandum illud geometricum problema tredecim modis demonstratum, quod docet duas lineas in eodem plano designare, quae nunquam invicem coincidant, etiam si in infinitum protrahantur*. Venedig 1586; Nachdr.: Bologna 1993: S. *97*.
4. Beaulieu, A. de, *Mémoires du voyage aux Indes orientales*. In: *Relations de divers voyages curieux, qui n'ont point esté publiees; ou qui n'ont esté traduites* … Hrsg. M. Thévenot. 4 Tle. Paris 1663–1672 [Marg.], Tl II 1666: S. *253*.
5. Bond, H., *The variations of the magnetick needle predicted for many yeares following*. In: *Philosophical Transactions*, vol. III, 1668, S. 789 f.: S. *252*.
6. Brouncker, W., *The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*. In: *Philosophical Transactions*, vol. 3, 1668, S. 645–649: S. 458. *458*.
7. Cicero, *De officiis*: S. *87*.

– Clerselier, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 8,5.

– Deprez, G. [Hrsg.] s. SV. N. 31.

8. Descartes, R.
   1. *Discours de la Methode … Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode*. Leiden 1637 [auch in *DO* VI S. 1–515.]; Nachdr. Osnabrück 1973. [Darin: SV. N. 8,2. 8,3.]
   2. *La Dioptrique*. In SV. N. 8,1 S. 1–153 (2. Zählung) [auch in *DO* VI S. 79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N. 8,4 S. 71–206 [auch in DO VI S. 584–650]: S. *488*.
   3. *La Géométrie*. In SV. N. 8,1 S. 297–413 (2. Zählung) u. ö. [auch in *DO* VI S. 367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N. 13,1 S. 1–118.; 2. Ausg. in SV. N. 13,2 Tl I S. 1–106 [Marg.]: S. *424*. *427*. *483*. *484–486*. *492*. *504*. *573*.
   4. *Specimina philosophiae*. Amsterdam, 1644 u. ö. [Darin: SV. N. 8,2.]

5. *Lettres*. [Hrsg. Cl. de Clerselier]. 3 Bde. Paris 1657–67; lat. Fassung u. d. T. Epistolae. Amsterdam 1668–82: S. *485*.

9. Diophant, *De multangulis numeris*: S. *600*.

10. Euklid, *Elemente*: S. 103. *103*. 126. *126*.

– Eycke, S. van der [Hrsg.] s. SV. N. 24.

11. Fabri, H., *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: S. *225*. *228*.

12. Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638; Nachdr. Brüssel 1966; [auch in *Opere*, 2 Bde. Bologna 1656 u. in *GO* VIII S. 39–318 u. *GO* I S. 187–208]: S. *25*. *69*. *228*. 246–247. *246–247*.

13. *Geometria*

1. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: Descartes, R., SV. N. 8,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; Schooten, Fr. v., SV. N. 38,1; ders., *Additamentum*. S. 295 bis 336.]

2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: Descartes, R., SV. N. 8,3; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*; Schooten, Fr. v., SV. N. 38,1; ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl.; ders., *Additamentum*; Hudde, J., SV. N. 19; Heuraet, H. v., SV. N. 17. In Tl II: *Schooten*, Fr. v., *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl.; ders., SV. N. 38,2; Debeaune, Fl., *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. E. Bartholinus, S. 49–152; Witt, J. de, Elementa curvarum linearum. Hrsg. Fr.v. Schooten.]

– Girard, A. [Hrsg.] s. SV. N. 40.

14. Gosselin, G., *De arte magna, seu de occulta parte numerorum, quae et algebra, et almucabala vulgo dicitur, libri quatuor*. Paris 1577 [Marg.]: N. 41*. S. *649*.

15. Gregory, J.

1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]:
S. *65*. *105*. *249*. *495*. *558*. *696*. *697*. *758*. *763*. *765*. *789*. *800*.
Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 640–644: S. *759*. — *Journal des Sçavans*, 2. Juli 1668, S. 353–368 [Auszug (Stellungnahme von Huygens) in *HO* VI Nr. 1647 S. 228–230]: S. *759*.

2. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *105*. *492*.
Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 685–688: S. *492*.

3. *Answer to the animadversions of Mr. Hugenius*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 732–735; [auch in *HO* VI Nr. 1653 S. 240–243]: S. *759*. 799.

4. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: S. *697*. *759*.

5. *An extract of a letter ... to the Publisher, containing some considerations ... upon M. Hugens his letter*. In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668/69, S. 882–886; [auch in *HO* VI Nr. 1682 S. 306–311]: S. *759*.

16. Guericke, O. v., *Experimenta nova (ut vocantur) Magdeburgica de vacuo spatio*. Amsterdam 1672; Nachdr. Aalen 1962: S. *346*.

17. Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 13,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *193*. *487*. *559*.

18. Hobbes, T.
1. *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*. London 1660 [auch in SV. N. 18,3 pars II u. in *HOL* IV S. 1–232]: S. *253*.
2. *Dialogus physicus, sive de natura aeris*. London 1661 [auch in SV. N. 18,3 pars VI und in *HOL* IV S. 233–296]: S. *253*.
3. *Opera philosophica*. Amsterdam 1668: S. *253*.

19. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 13,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. 207. *207*.

20. Huygens, Chr.
1. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654 [auch in *HO* XII S. 113–181]: S. 105. *105*. *225*.
2. Vierter Zusatz zu *De ratiociniis in ludo aleae*. 1665. Ms. [Gedr.: *HO* XIV S. 144–150]: S. *3*. *431*. *712*.
3. Stellungnahme zu James Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura* s. SV. N. 15,1.
4. Brief an Gallois. In: *Journal des Sçavans*, 12. Nov. 1668 S. 437–444 [auch in *HO* VI Nr. 1669 S. 272–276]: S. *759*.
5. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. *193*. *486*. *558*

21. *Journal des Sçavans*. Paris (Amsterdam) 1665 ff.:
— Juli 1668: S. *759*.
— November 1668: S. *759*.
— Juli 1672: S. *30*.
— Dezember 1672: S. *30*.

22. Kepler, J.
1. *Strena seu de nive sexangula*. Frankfurt/Main 1611; [auch in *KW* IV S. 259–280]: S. *524*.
2. *Harmonices mundi libri V*. Linz 1619; [auch in *KW* VI S. 1–377]: S. *524*.

23. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Dissertatio de arte combinatoria*. Leipzig 1666 [auch in *LSB* VI, 1 S. 163–228): S. 28. *28*. 252. *252*.
2. *Propositiones quaedam physicae*. Zweiter Entwurf. Frühjahr – Herbst 1672 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 2_2 S. 6–10]: S. *17*.
3. *Aus und zu Galileis Discorsi*. Herbst 1672 bis Winter 1672/73. Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 11 S. 163–168]: S. *25*. *69*. *228*.
4. *Accessio ad arithmeticam infinitorum*. Ende 1672. Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 2 S. 1–20]: S. *30*. *52*. *61*. *69*. *72*. *76*. *111*. *141*. *150*. *369*. *431*.
5. *In subsectione polygonorum regularium circulo inscriptorum*. Ende 1672 – Anfang 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 3 S. 5 bis 30]: S. *61*. *125*.
6. *Mathematica*. Ende 1672 – Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 106 S. 653–674]: S. *225*.
7. *De figuris similibus*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 60–70]: S. *229*.
8. *Approximatio ad mensuram circularem geometrica*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_2 S. 70–74]: S. *588*.
9. *De bipartitionibus numerorum eorumque geometricis interpretationibus*. 1. Halbjahr 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 36 S. 217–228]: S. *193*. *228*. *242*. *246*.
10. *De geometria seu potius algebra mechanica*. Frühjahr – Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 8 S. 104–108]: S. *249*.
11. *De problematis Geometriae Cartesii. De compositione rationum*. Frühjahr bis Sommer (?) 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 110 S. 679–689]: S. *342*.
12. *Tentamen primum pertinens ad problema quod dicitur sex quadratorum*. Juni – August 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 42 S. 246 bis 253]: S. *127*.
13. *Inventa aliquot mea geometrica*. Sommer 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 29 S. 114–117]:

S. *251*. *566*.
14. *Schediasma de extractione radicum*. Sept. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 125 S. 783 bis 804]: S. *783*.
15. *De aequationibus ad circulum inveniendis*. Sept. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 130 S. 835–846]: S. *370*.
16. *Schediasma de constructione per curvam et lineam rectam*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 138 S. 884–888]: S. *370*.
17. *Arithmetische Kreisquadratur*. Okt. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. *314*. *386*. *388*. *632*.
18. *Schediasma de divisionibus aequationum ope diversarum literarum*. Dez. 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 143 S. 906–910]: S. *567*.
19. *Problema Davenantii*. Kurz nach dem 22. April 1675. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 77 S. 535–538]: S. *664*.
20. *Analysis tetragonistica ex centrobarycis*. 25./26. Okt. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 147–151]: S. *695*.
21. *Analyseos tetragonisticae pars secunda*. 29. Okt. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 151 bis 156]: S. *668*.
22. *Methodi tangentium inversae exempla*. 11. Nov. 1675. Ms. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 161 bis 167]: S. *668*. *676*.
23. *Wallisii series interpolanda pro circulo. Fractionum resolutio dividendo per fractiones*. Dez. 1675. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 85_1 S. 569–572]: S. *661*.
24. *Data basi, angulo ad basin, rectangulo sub lateribus invenire triangulum. Tentamen tertium*. Ende 1675 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 14_3 S. 141–146]: S. *360*.
25. *Praefatio opusculi de quadratura circuli arithmetica*. ca Ende 1675. Ms. [Gedr.: *LMG* V S. 93–98]: S. *559*.
26. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis*. Ende 1675 bis Herbst 1676. Ms. [Gedr.: Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 = Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge Nr. 43]: S. *271*. *288*. *318*. *345*. *386*. *388*. *393*. *566*. *572*. *632*. *701*. *726*. *726*. *758*. *802*.
27. *Extensio interminata*. April 1676 (?). Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* VI, 3 N. 66 S. 489 f.]: S. *802*.
28. *De angulo contactus*. April – Juli 1676. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 32 S. 205]: S. *799*.
29. *Auszüge aus den mathematischen Papieren der Royal Society*. 18.–29. Okt. 1676. Ms. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 98 S. 663–681]: S. *830*.
30. *Calculus tangentium differentialis*. Nov. 1676. Ms. [Gedr.: *LBG* S. 229–231 u. SV. N. 48 S. 86–92]: S. *822*.
31. *Historia et origo calculi differentialis*. 1714. Ms. [Gedr.: *LMG* V S. 392–410]: S. *712*.
B r i e f e :
32. Leibniz für die Royal Society, 13. Feb. 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 4 S. 22–29; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 438–448]: S. *30*. *50*. *61*. *167*. *245*.
33. Leibniz an Oldenburg, 8. März 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 9 S. 38–45; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 488–498]: S. *484*.
34. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. April 1673; Auszug von Leibniz, Frühjahr 1675. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 13 S. 49 bis 79; ohne Auszug mit engl. Übers. in: *OC* IX S. 549–570]: S. *249*. *251*. *252*.
35. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 17 S. 83–89; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 593–601]: S. *249*.
36. Leibniz an Oldenburg, 24. Mai 1673. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 20 S. 92–95; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 648–652]: S. *139*.
37. Leibniz an Ferdinand von Fürstenberg, Dez. 1676. [Gedr.: *LSB* I, 2 N. 209 S. 238 bis 240]: S. *834*.
38. Leibniz an Weigel, Sept. 1679. [Gedr.:

LSB II, 1 N. 212 S. 485–487 u. III, 2 N. 345 S. 836–840]: S. *676*.
39. Leibniz an L'Hospital, April (?) 1695. [Gedr. u. a. in: *LMG* II S. 274–277]: S. *827*.
40. L'Hospital an Leibniz, 25. April 1695. [Gedr. u. a. in: *LMG* II S. 277–281]: S. *827*.
41. Leibniz an Joh. Bernoulli, 29. Januar 1697. [Gedr. u. a. in: *LMG* III S. 360–364]: S. *827*.

24. L u d o l p h van Ceulen, *Vanden circkel. Daer in gheleert werdt te vinden de naeste proportie des circkels-diameter tegen synen omloop ... Item aller figueren-syden in den circkel beschreven ... Noch de tafelen sinuum, tangentium ende secantium ... Een laetsten van interest ...* Delft 1596; 2. Aufl. Leiden 1615. Hrsg. S. van der Eycke; lat. Fassung u. d. T. *De circulo et adscriptis liber. In quo plurimorum latera ... secundum algebricarum aequationum leges explicantur*. Leiden 1619. Hrsg. W. Snell: S. *105*. *723*.

25. Mengoli, P., *Circolo*, Bologna, 1672: N. 57*.

26. Mercator, N., *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos nova, accurata, et facilis ... cui nunc accedit vera quadratura hyperbolae, et inventio summae logarithmorum ... Huic etiam jungitur Michaelis Angeli Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis ...* London 1668 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1975: S. 107. *107*. *125*. 127. *127*. *128*. *207*. *386*. *403*. *703*. *723*.
Rez. in SV. N. 44,5.

27. Monconys, B. de, *Journal des voyages*. Hrsg. G. de Monconys. P. 1–2. Lyon 1655–1666: S. *253*.

– Monconys, G. de [Hrsg.] s. SV. N. 27.

28. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis ... libri primus et secundus*, Paris 1631. — *Libri quatuor priores*, ebd. 1639 u. ö.: S. *249*.

29. Pappus, *Mathematica collectio*: S. *126*.

30. Pardies, I. G., *Élémens de géométrie*, Paris 1671 u. ö.: S. *76*. *302*. *484*. *492*.

31. Pascal, Bl., *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Hrsg. G. Deprez. Paris 1665 [Marg.]; [auch in *PO* III S. 433–593, 341–67, 311–39]: S. 25. *25*. *30–31*. *44*. *320*. *323–324*. *332*. *363*. *708*.

32. Pell, J., *Controversiae de vera circuli mensura anno 1644 exortae inter Christianum Severini, Longomontanum ... et Ioannem Pellium ... pars prima* [mehr nicht ersch.]. Amsterdam 1647: S. *342*. *588*.

33. *P h i l o s o p h i c a l Transactions*. London 1665 ff.:
— 16./26. März 1667/1668: S. *759*.
— 13./23. April 1668: S. 458. *458*.
— 18./28. Mai 1668: S. *492*.
— 13./23. Juli 1668: S. *759*. 799. *799*.
— 17./27. August 1668: S. 107. *107*.
— 15./25. Februar 1668/1669: S. *759*.
— 25. März/4. April 1669: S. *803*.

34. Renaldini, C., *Geometra promotus*. Padua 1670: S. *492*.

35. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. London 1668 zus. mit SV. N. 26 [Marg.]: N. 65*.

36. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: N. 7*. S. *30*. *49*. *61*. *72*. *251*. *505*. *558*. *757*.

37. Sarasa, A. A. de, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*. Antwerpen 1649 [Marg.]: S. *251*.

38. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 13,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 13,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *486*.
2. *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten. In SV N. 13,2 Tl II S. 341–420: S. *342*. *588*. *697*.
3. [Hrsg.] s. SV. N. 13,1. 13,2.

– Schooten, P. v. [Hrsg.] s. SV. N. 38,2.

39. Sluse, R. Fr. W. de
1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: N. 65*.
Rez.: *Philosophical Transactions* vol. 4, 1669, S. 903–909: S. *803*.
2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius ... to the Publisher ... concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometricel curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672, S. 5143–45; Nachtrag *a. a. O.* vol. 8, 1673, S. 6059: S. *391*. *416*. *419*. *822*.

40. Snell van Royen, W.
1. *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. *105*. *723*.
2. [Hrsg.] s. SV. N. 24.

41. Stevin, S., *L'arithmetique*. Leiden 1585; 2. Aufl. ebd. 1625; [auch in: *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*. Hrsg. A. Girard. Leiden 1634]: S. *524*.

42. Tavernier, J. B., *Les six voyages ... en Turquie, en Perse, et aux Indes*. 2 Tle. Paris 1676 u. ö.: S. *834*.

– Thévenot, M. [Hrsg.] s. SV. N. 4.

43. Viète, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.]; Nachdr. Hildesheim 1970.
[Darin:] (S. 162–228) *De numerosa potestatum purarum, adque adfectarum ad exegesin resolutione tractatus* [zuerst ersch. Paris 1600]: S. 510. — (S. 240–257) *Supplementum geometriae* [zuerst ersch. Tours 1593]: S. *486*.

44. Wallis, J.
1. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in *WO* I S. 355–478; Marg.]: S. 102. *102*. 127. *127*. 183. *183*. *492*. *558*. *751*. *792*. *824*.
2. *Mathesis universalis sive arithmeticum opus integrum*. Oxford 1657. In: *Operum mathematicorum pars prima*; [auch in *WO* I S. 11–228; Marg.]: S. *127*. *253*.
3. *Commercium epistolicum, de quaestionibus quibusdam mathematicis nuper habitum*. Oxford 1658; [auch in *WO* II S. 757–860; Marg.]: S. *558*.
4. *Tractatus duo, prior de cycloide ... Posterior ... de cissoide*. Oxford 1659 [Marg.]; [auch in *WO* I S. 489–569; Marg.]: S. *495*.
5. *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed of in a letter ... to the Lord Viscount Brouncker ...* In: *Philosophical Transactions* vol. 3, 1668, S. 753–759: S. *107*. *125*. 127. *127*. 306. *307*.
6. *Mechanica: sive, de motu, tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S. 570–1063; Marg.]: S. *495*.

45. Costabel, P., *Leibniz et les séries numériques*. In: SV. N. 50 S. 81–101: S. *712*.

46. Gregory, J., *James Gregory tercentenary memorial volume*. Hrsg. H. W. Turnbull. London 1939: S. *759*.

47. Hess, H. J., *Zur Vorgeschichte der ‚Nova Methodus' (1676-1684)*. In: *300 Jahre ‚Nova Methodus' von G. W. Leibniz (1684–1984)*: Symposion in Nordwijkerhout, 28.–30. August 1984, S. 64–102 = Studia Leibnitiana Sonderheft. Nr. 14. Stuttgart 1984: S. *822*.

48. Hofmann, J. E.
1. *Die Differenzenrechnung bei Leibniz*. Zus. m. H. Wieleitner und Zusätzen von D. Mahnke. In: *Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Phys.-math. Klasse. Nr. 26. Berlin 1931, S. 560–600. [Darin: Mahnke, D., SV. N. 51,2.]
2. *Leibniz in Paris. 1672–1676. His Growth to Mathematical Maturity*. Cambridge 1974: S. *827*.

49. Knobloch, E.
1. *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Abhandlungsband. Textband = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XI. XVI. Wiesbaden 1973. 1976: S. *17*.
2. *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672 bis 1676)*. In SV. N. 50 S. 3–43; russ. u. d. T. *Rukopisi Lejbnica 1672–1676 gg.* In: *Istoriko-matematičeskie Issledovanija* 24 (1979) S. 258 bis 309: S. *606*. *830*.

50. *Leibniz à Paris (1672-1676)*. Symposion à Chantilly du 14 au 18 Nov. 1976., T. 1: *Les sciences* = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XVII. Wiesbaden 1978. [Darin: Costabel, P., SV. N. 45; Knobloch, E., SV. N. 49,2.]

51. Mahnke, D.
1. *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen der Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Jahrgang 1925. Phys.-math. Klasse. Nr. 1. Berlin 1926: S. *250*. *251*. *566*.
2. *Zusätze aus den ungedruckten Handschriften*. In SV. N. 48,1 S. 590–600: S. *712*.

52. Palumbo, M., *Leibniz e i geographica*, Rom 1996: S. *253*.

53. Scriba, C. J., *Gregory's converging double sequence*. In: *Historia Mathematica* 10 (1983) S. 274–285: S. *759*.

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXII–XXV . Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER, *Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 4	V 10	Bl. 58	N. 47
		Bl. 63	N. 65
LH 35	I 17	Bl. 16	N. 7
	II 1	Bl. 80+124	N. 26
		Bl. 93–94	N. 23
		Bl. 125	N. 58
		Bl. 161–162	N. 24
		Bl. 179	N. 63
		Bl. 205–206	N. 5
		Bl. 237–238	N. 21
		Bl. 246–247	N. 34
		Bl. 248–249	N. 25
		Bl. 291–292	N. 19
	III B 10	Bl. 1	N. 35
		Bl. 2–3	N. 12
		Bl. 4	N. 11
		Bl. 5	N. 1
	IV 17	Bl. 10–11	N. 41_{2}
	V 2	Bl. 3–4	N. 39
	V 3	Bl. 5	N. 36
	V 4	Bl. 1+37	N. 38_{1}
		Bl. 2–3	N. 38_{2}
		Bl. 4–5	N. 38_{3}
		Bl. 6–7	N. 38_{4}
		Bl. 8–9	N. 38_{5}
		Bl. 10–11	N. 38_{6}
		Bl. 12–13	N. 38_{7}
		Bl. 14–15	N. 38_{8}
		Bl. 16–17	N. 38_{9}
		Bl. 18–19	N. 38_{10}
		Bl. 20–21	N. 38_{11}
		Bl. 22–23	N. 38_{12}
		Bl. 24–25	N. 38_{13}
		Bl. 26–27	N. 38_{14}
LH 35	V 4	Bl. 28–29	N. 38_{15}
		Bl. 30–31	N. 38_{16}
		Bl. 32–33	N. 38_{17}
		Bl. 34–36	N. 38_{18}
	V 6	Bl. 12–13	N. 22
	V 7	Bl. 1	N. 50
	V 14	Bl. 15	N. 65
		Bl. 16	N. 71
	VIII 4	Bl. 1	N. 43_{1}
		Bl. 2	N. 43_{2}
		Bl. 3	N. 43_{3}
		Bl. 4–5	N. 44_{1}
		Bl. 6–7	N. 44_{2}
		Bl. 8	N. 44_{3}
	VIII 27	Bl. 1	N. 53_{3}
		Bl. 2	N. 53_{2}
	VIII 30	Bl. 43	N. 57_{1}
		Bl. 100	N. 70
		Bl. 144–145	N. 68_{1}
		144–145	N. 68_{2}
		Bl. 146	N. 67
	XII 1	Bl. 1	N. 59
		Bl. 7	N. 69
		Bl. 9–10	N. 56
		Bl. 9–10	N. 57_{2}
		Bl. 24	N. 61_{1}
		Bl. 25	N. 61_{1}
		Bl. 25	N. 61_{2}
		Bl. 29	N. 61_{2}
		Bl. 32	N. 31
		Bl. 45–46	N. 3
		Bl. 129–136	N. 6
		Bl. 137	N. 9
		Bl. 138–139	N. 14

LH 35	XII 1	Bl. 140–143	N. 13
		Bl. 144–145	N. 4_4
		Bl. 146–147	N. 4_3
		Bl. 148–149	N. 4_1
		Bl. 150–153	N. 4_2
		Bl. 243–244	N. 54
		Bl. 245–246	N. 28
		Bl. 245–246	N. 30
		Bl. 247–248	N. 27
		Bl. 250	N. 53_1
		Bl. 251–252	N. 29
		Bl. 253	N. 55
		Bl. 254	N. 52
		Bl. 255	N. 49_2
		Bl. 256	N. 49_1
		Bl. 311	N. 64
		Bl. 328–329	N. 8
		Bl. 346–347	N. 60
	XII 2	Bl. 62	N. 38_{16}
		Bl. 88	N. 20
		Bl. 119	N. 51
		Bl. 123–124	N. 17_3
		Bl. 131–132	N. 10
LH 35	XII 2	Bl. 135	N. 45
		Bl. 150	N. 73
		Bl. 163–164	N. 6
		Bl. 165–166	N. 8
		Bl. 197–198	N. 2
		Bl. 206–207	N. 18
		Bl. 208–209	N. 15
		Bl. 210–211	N. 17_2
		Bl. 218	N. 17_1
	XIII 1	Bl. 223–224	N. 40
		Bl. 228	N. 42
	XIII 3	Bl. 227–228	N. 16
		Bl. 265	N 72
	XIV 1	Bl. 102–103	N. 62
		Bl. 117	N. 48
		Bl. 119	N. 32
		Bl. 120–121	N. 33
		Bl. 122	N. 66
		Bl. 258–259	N. 37
		Bl. 305	N. 46
Nm-A 317			N. 41_1
Nm-A 605			N. 28

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfaßten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Fünf der ersten acht hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique* 2 nicht erfaßt, drei (N. 28, 38_{16}, 65) nur teilweise. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, daß das bezeichnete Stück in diesem Band nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	9	437	10	517	35	615	18
—	20	510 A	4_3	518	3	627	16
—	28	510 B	4_4	526	8	629	17_1
—	38_{16}	510 C	4_1	527	6	630	17_3
—	41_1	510 D	4_2	528	8	633	24
—	63	511	5	529 tlw.	8	634	24
—	65	512	14	530 tlw.	2	640	17_2
—	69	513 A, B	13	554	25	694	21
278	12	514	1	556	26	755	36
279	11	515	19	557	23	756	41_2
280	15	516	31	558	23	775 A	38_1

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
775 A	38_2	777	46	1186	50	1412	58
775 A	38_3	778	34	1206	48	1425 tlw.	59
775 A	38_4	820	39	1207	66	1453 A–B	60
775 A	38_5	892	43	1210	70	1455	64
775 A	38_6	920 A	44_1	1239	22	1458	61_1
775 A	38_7	920 A	44_2	1303	54	1459 A–B	61_2
775 A	38_8	920 B	44_3	1334 tlw.	55	1459 C	61_2
775 A	38_9	929	45	1335	29	1459 C	61_1
775 A	38_{10}	1030	33	1336	53_3	1467	32
775 A	38_{11}	1036	37	1337	53_2	1468	62
775 A	38_{12}	1139	65	1340	49_1	1511	68_2
775 A	38_{13}	1140	71	1341	51	1512	68_1
775 A	38_{14}	1180 tlw.	53_1	1398	57_2	1513	67
775 A	38_{15}	1181	49_2	1399	56	1514	42
775 A	38_{16}	1182	28	1400	57_2	1515 A	73
775 A	38_{17}	1183	30	1401	57_2	1542	72
775 B, C	38_{18}	1184	27	1403	57_1	1549	7
776	40	1185	52	1408	47		

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfaßt die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN, BERICHTIGUNGEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
LuX	Leibniz gemeinsam mit Unbekanntem, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
X	Unbekannter, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen und Eingriffe des Herausgebers (ursprüngliche Form im Variantenapparat). Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
$\boxed{}$	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
i. a.	im allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LBr.	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Briefwechsel
LH	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Handschriften
lib.	liber

Marg.	Marginalie(n)
Ms.	Manuskript
N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
p., pag.	pagina
probl.	problema
prop.	propositio
R.	responsio, respondetur
r°	recto
reg.	regula
S.	Seite
s.	sectio, siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
u. ö.	und öfter
v.	von, vor
Var.	Variante
vgl.	vergleiche
v°	verso
Z.	Zeile
	destilletur, distilletur (noch zu bedenken); denier

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2 *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.

DGS *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 13,2).

DO Descartes, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.

GO Galilei, G., *Opere*. Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929–1939 u. ö.

GT *James Gregory tercentenary memorial volume*. Hrsg. H.W. Turnbull, London 1939 (= SV. N. 46).

HO Huygens, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

HOL Hobbes, Th., *Opera philosophica quae latine scripsit omnia*. Hrsg. W. Molesworth. 5 Bde. London 1839–1845; Nachdr.: Aalen 1961.

KW Kepler, J., *Gesammelte Werke*. Hrsg. von der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, München. — Im Erscheinen.

LBG *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LFC *Opuscules et fragments inédits de Leibniz.* Hrsg. L. Couturat. Paris 1903; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1966.

LKK *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Textband. Hrsg. E. Knobloch = *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd. XVI. Wiesbaden 1976 (= SV. N. 49,1).

LMG *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C.I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1962 u. 1971.

LQK Leibniz, G. W., *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cujus corollarium est trigonometria sine tabulis.* Hrsg.: E. Knobloch. Göttingen 1993.

LSB Leibniz, G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe*. Hrsg. von der Göttinger und der Berliner Akademie der Wissenschaften, Berlin — Im Erscheinen.

OC Oldenburg, H., *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

PO Pascal, Bl., *Oeuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

VO Viète, Fr., *Opera mathematica, opera atque studio Fr. a Schooten.* Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970 (= SV. N. 43).

WO Wallis, J., *Opera mathematica*, 3 Bde, Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXVIII–XXXIII.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. Cajori, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. Cajori, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation	$a\,.\,b : c\,.\,d$	Proportion
$\times$	Überkreuzmultiplikation	$\mid$	Kürzung eines Bruchs
$\smile$	Division	$\oint$	facit
ꝏ	Division, Proportion	Platzhalter:	
$\square$, $\boxed{2}$	Quadrat	$*$	ausfallende Terme
cub, $\boxed{3}$	Kubus	$\circ$	Vorzeichen
Rq, $\boxed{\frac{1}{2}}$	Quadratwurzel	$\ldots$	Terme
aeq., aequ.	gleich	:	Terme
⊓	gleich	$\bullet$	Terme
⊓⊓	gleich (Summe)	Wiederholung:	
⊓, ⊏	größer als	..	Faktoren
⊓	etwas größer als	$\div$	Brüche
⊓	kleiner als	Tschirnhaus:	
⊓	etwas kleiner als	$\sim$	gleich
		$a \sqcap\!\sqcap b \top c \sqcap\!\sqcap d$	Proportion

5. BERICHTIGUNGEN

VII, 1:

S. 65 Z. 24: *Statt* article 42 ... entnommen *lies* article 40 S. 115 entnommen
S. 78 Z. 25: *Statt* 1959 *lies* 1659
S. 105 Z. 35: *Statt* N. 106 *lies* N. 106 §73 sowie H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 497 f. Die Aufgabenstellung hat Leibniz dort unterstrichen.
S. 148 Z. 24–26: *Statt* Es scheint ... *DGS* I, S. 207 *lies* *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 66
S. 184 Z. 5: *Statt* sxx + gx + r *lies* pxx + qx + r
S. 185 Z. 18 f.: *Statt* x die des *lies* x die Apotome des
S. 224 *Ergänze Erl. zu Z. 7–9*: Richtig müßte es $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} + \frac{1}{10}$ etc. $= 2$ bzw. $a + \frac{1}{3}a + \frac{1}{6}a + \frac{1}{10}a$ etc. $= 2a$ heißen.
S. 246 Z. 10: *Statt* quadratos ut *lies* quadratos (puto numeros) ut *und streiche die zugehörige Lesart*.
S. 246 Z. 20: *Statt* l'anse *lies* l'ange
S. 250 Z. 17: *Statt* Der Sinn ... Verweis *lies* s. R. DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, 1659, S. 43 sowie den zugehörigen Schootenschen Kommentar M, *DGS* I, S. 242–249
S. 527 Z. 10: *Statt* z + 1 *lies* z + β
S. 527 Z. 29 f.: *Statt* Auf ... ist *lies* Die Symbole $\textcircled{\vee}$ und ab Z. 9 $\boxed{\textcircled{\vee}}$ verwendet Leibniz, um Bildungsgesetze für Zahlenfolgen zu bezeichnen.
S. 658 *Ergänze Erl. zu Z. 16*: constat: vgl. H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 73, sowie die zugehörige Beweisfigur (Tafel I Figur 14). Leibniz hat den Satz im Text unterstrichen und zugleich mit einer Randbemerkung versehen; bei Fig. 14 hat er den Sachverhalt formelmäßig erfaßt.
S. 664 Z. 33: *Statt* 1959 *lies* 1659
S. 675 Z. 5: *Statt* 144 *lies* 544
S. 861 Z. 11: *Statt* [+q] *lies* [−q]
S. 931 SV. N. 2,3: *Statt* 108 *lies* 180
S. 932 SV. N. 11,3: *Statt 244 lies 224*
S. 936 SV. N. 51,1: *Statt 67 lies 78*

Zum Inhaltsverzeichnis