

Vorausedition zur  
Leibniz-Akademie-  
Ausgabe, Band VII, 8:  
Varia mathematica,  
Nachträge 1670–1676  
Version 4

*Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8: Varia mathematica, Nachträge 1670–1676. Version 4.* Bearbeitet von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk, hrsg. von der Leibniz-Forschungsstelle Hannover der Niedersächsischen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen beim Leibniz-Archiv der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek. Hannover, 4. Oktober 2023.



Sofern nicht anders angegeben, werden die Inhalte dieses Dokuments von der Niedersächsischen Akademie der Wissenschaften zu Göttingen unter einer Creative Commons Namensnennung-Nicht kommerziell 4.0 International Lizenz ([CC BY-NC 4.0](https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/)) zur Verfügung gestellt.



## ZU DIESEM DOKUMENT

Band 8: *Varia mathematica, Nachträge 1670–1676* von Reihe VII: *Mathematische Schriften* der historisch-kritischen Gesamtausgabe *Gottfried Wilhelm Leibniz: Sämtliche Schriften und Briefe*, hrsg. von der Preußischen Akademie der Wissenschaften u. a., Darmstadt u. a. 1923 ff. (Leibniz-Akademie-Ausgabe), wird die Edition der mathematischen Schriften aus Leibniz' Jahren in Paris abschließen. Die vorliegende Vorausedition gibt den Stand der Arbeiten an diesem Band vom September 2023 wieder.

Die Handschriften wurden von Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber und Achim Trunk bearbeitet. Davide Crippa (Venedig/Prag) stellte während seiner Tätigkeit für das Projekt ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP générique 2017, eine Transkription von N. 26 zur Verfügung. Michel Serfati (†, Paris) trug Vorarbeiten zur Edition von N. 41<sub>6</sub> bei. N. 60 beruht auf einer Transkription von Ricardo Rodríguez Hurtado (Murcia). Die Erfassung der Stücke haben Manuela Mirasch-Müller und in Teilen Elisabeth Rinner und Achim Trunk übernommen, teilweise nach Vorarbeiten von Christopherus Ray'onaldo, Jule Schwarzkopf und Yixiao Wang.

Der Satz erfolgte mit dem von John Lavagnino und Dominik Wujastyk entwickelten  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ -Macropaket EDMAC. Um den Editionstext angemessen wiedergeben zu können, wurde im Leibniz-Archiv eine auf die Anforderungen und Bedürfnisse der Edition zugeschnittene Erweiterung entwickelt. Einige Figuren wurden mit den Programmen WIN-GEOM und WINPLOT von Richard Parris generiert und in  $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$  weiterbearbeitet.

### Vorläufigkeit

Bei den Texten der Vorausedition handelt es sich um vorläufige Ergebnisse. Der fertige Band wird in einigen Aspekten von diesem Preprint abweichen. So werden sich die Anzahl und die Reihenfolge der Stücke und damit auch ihre Nummern und Seitenzahlen ändern. Bei Seitenumbrüchen und Zeilenzählung kann es ebenfalls zu Verschiebungen kommen. Schließlich können sich auch inhaltliche Änderungen ergeben; insbesondere sind die Datierungen noch vorläufig.

### Versionierung und Langfristigkeit

Im Lauf der editorischen Arbeit an einem Band können geänderte vorläufige Fassungen als Vorausedition zugänglich gemacht werden. Unterschiedliche Fassungen des Doku-

ments werden durch Versionsnummern gekennzeichnet und sind so eindeutig identifizierbar.

Wir empfehlen ausdrücklich, stets die aktuellen Fassungen der Bearbeitungen der Stücke zu nutzen. Bitte überprüfen Sie deshalb vor der Nutzung auf unserer Webseite, ob eine neuere Version der *Vorausedition* oder der publizierte Band verfügbar ist.

Die Langzeitarchivierung und die langfristige Bereitstellung der Dokumente erfolgen über die Niedersächsische Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, die das Akademien-Vorhaben „Leibniz-Edition“ gemeinsam mit der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften betreut. Die Zitierfähigkeit wird gewährleistet.

#### Zitierhinweis

Die vollständigen bibliographischen Angaben des Dokuments können der Titelseite entnommen werden. Wir empfehlen, bei Zitaten aus der *Vorausedition* oder Verweisen auf diese stets die Versionsnummer mit anzugeben. Ein Verweis könnte in einer Kurzform nach dem Muster des folgenden Beispiels gestaltet werden:

G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 Bl. 440; vgl. *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, dort N. 21 S. 69–70).

Die Signatur der edierten Handschrift findet sich jeweils im Kopf des Stückes.

#### Kontakt

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Deutschland

Leitung: Michael Kempe

Email: [leibnizarchiv@gwlb.de](mailto:leibnizarchiv@gwlb.de)

Internetauftritt: <http://www.gwlb.de>

## ABOUT THIS DOCUMENT

Volume 8: *Varia mathematica, Nachträge 1670–1676* of Series VII: *Mathematische Schriften* (Mathematical Writings) of the historical-critical edition of the complete works of Leibniz (Gottfried Wilhelm Leibniz: *Sämtliche Schriften und Briefe*) published by the Prussian Academy of Sciences and other institutions since 1923 (the Academy Edition or *Leibniz-Akademie-Ausgabe*) will complete the publication of the mathematical writings from Leibniz’s years in Paris. This *Vorausedition* (advance edition) presents the state of work on this volume as of September 2023.

The texts were prepared from manuscript sources by Alexandra Lewendoski, Siegmund Probst, Elisabeth Rinner, Regina Stuber and Achim Trunk. Davide Crippa (Venice/Prague) provided a transcription of N. 26 during his work for the project ANR MATHESIS: Édition et commentaires de manuscrits mathématiques inédits de Leibniz (2017–2021), N° ANR-17-CE27-0018-01 AAP générique 2017. Michel Serfati (†, Paris) contributed preparatory work to the edition of N. 41<sub>6</sub>. N. 60 is based on a transcription by Ricardo Rodríguez Hurtado (Murcia). Manuela Mirasch-Müller and, in parts, Elisabeth Rinner and Achim Trunk were responsible for inputting the texts, partly on the basis of preparatory work by Christopher Ray’onaldo, Jule Schwarzkopf, and Yixiao Wang.

The T<sub>E</sub>X macro suite EDMAC, developed by John Lavagnino and Dominik Wujastyk, was used for typesetting. To facilitate an adequate rendition of the published text, additions to this suite specifically adapted to the requirements and needs of the edition were developed at the Leibniz-Archiv. Some of the figures were initially produced using the WIN-GEOM and WINPLOT programs created by Richard Parris, and completed using T<sub>E</sub>X.

### Preliminary status

The writings presented in this advance edition are preliminary research results. The finished volume can be expected to diverge from them in some respects. Thus, the quantity and the sequence of the texts will change, as will their numbering and pagination. Likewise, there may be shifts in page transitions and line numbers. Finally, changes may occur to the content itself; the dates assigned to the writings, in particular, are only preliminary.

### Versions and long-term availability

Over the course of editorial work, successive preliminary versions may be made available

as advance editions. Distinct versions of the document are marked with version numbers and are thus unambiguously identifiable.

We strongly recommend always using the most recently published version of our edition of each text. Please check our website before citing this document to ascertain whether a newer version of the *Vorausedition* or the printed volume has become available.

Long-term archiving and availability of our documents are provided by the Göttingen Academy of Sciences and Humanities in Lower Saxony, which is jointly responsible with the Berlin-Brandenburg Academy of Sciences and Humanities for the interacademic project of the Leibniz Academy Edition. Citability will remain assured.

### Suggestions for citation

The complete reference of this document can be found on the title page. We recommend always specifying the version number when citing or referring to this advance edition. The following is an example of how such a reference may be provided in an abbreviated form:

G. W. Leibniz, *De condendis tabulis analyticis* (GWLB LH 35 XIII 1 fol. 440; see *Vorausedition zur Leibniz-Akademie-Ausgabe, Band VII, 8, Version 1*, N. 21 p. 69-70).

The shelfmark for the manuscript source may be found in the introductory notes to each individual text.

### Contact

Leibniz-Archiv, Waterloostr. 8, D-30169 Hannover, Germany

Head of department: Michael Kempe

E-mail: [leibnizarchiv@gwlb.de](mailto:leibnizarchiv@gwlb.de)

Website: <http://www.gwlb.de>

# INHALTSVERZEICHNIS

## VARIA MATHEMATICA, NACHTRÄGE 1670–1676

1. Observatio de logarithmis Mitte Februar 1673 .....	1
2. Règle pour trouver les ferries Oktober – Dezember 1675 .....	2
3. Datum et determinatum Erste Hälfte 1676 oder 1678 – 1679 (?) .....	7
3 <sub>1</sub> . Datum est determinatum cognitum .....	7
3 <sub>2</sub> . Determinatum idem quod dabile .....	8
4. Expressio unius literae per multas 4. September 1674 .....	9
5. De characterum imperfectione September – Oktober 1674 .....	11
6. Generalia Geometrica Mai – Oktober 1674 .....	12
7. Sur le calcul des partis 7. Januar 1676 .....	17
8. Fractiones sexagenariae Mitte 1674 – Ende 1676 .....	48
9. Multiplicatio numerorum sexagesimalium Mitte 1674 – Ende 1676 .....	50
10. De numero jactuum in tesseris Januar 1676 .....	59
11. De Analyseos Historia Oktober 1674 – Januar 1675 .....	73
12. Generatio circuli November 1675 – Januar 1676 .....	85
13. Cylinder sinuum ex applicatis parabolicis Sommer 1673 .....	86
14. De modis exprimendi series Herbst 1672 – Anfang 1673 .....	87
15. Exempla aequationis quadraticae et biquadraticae 10.–11. Oktober 1675 .....	88
16. Instrumentum ad constructionem aequationum Mitte bis Ende Oktober 1675 .....	89
17. De conoeidibus 1673 (?) .....	91
18. Quadratura per figurae complementum Herbst 1675 (?) .....	92
19. Lalouverae speculationes geometricae 1673 .....	94
20. Tabula pythagorica in manu nostra inscripta nach Mitte 1674 .....	95
21. Calculus per divisiones 29. Oktober 1675 .....	96
22. Cartesii cogitationes privatae 1. u. 5. Juni 1676 .....	98
23. De condendis tabulis analyticis Januar 1675 .....	131
24. Schediasma de constructore Dezember 1674 .....	133
24 <sub>1</sub> . Pars prima .....	133
24 <sub>2</sub> . Pars secunda .....	144
24 <sub>3</sub> . Pars tertia .....	152
25. Dispositions et complexions April – Juli 1672 .....	157

26.	Constructor	Dezember 1674.....	161
27.	De tabulis analyticis condendis	24. Dezember 1674 – Anfang 1675 (?).....	178
28.	De solidis analyticis	Dezember 1674.....	183
29.	Nota ad Soverum	Oktober 1676 – März 1679 (?) .....	184
30.	Mea Geometria	Juli – September 1676 (?).....	185
31.	De Machina Combinatoria, sive Analytica	September 1674 – Anfang 1675 (?) .....	186
32.	Generalis Diatyposis	Ende 1676.....	190
33.	Pascalii fragmentum	4. Juni 1675 – Januar 1676.....	197
34.	Extrait d’un Fragment de Pascal	Januar – September 1676 (?) .....	202
35.	De tabula combinatoria perfecta	31. Oktober – November 1675.....	206
36.	De formulis omnium dimensionum	.....	207
36 <sub>1</sub> .	De formulis omnium dimensionum, partes prima et secunda	Januar 1675	207
36 <sub>2</sub> .	De formulis omnium dimensionum, partes tertia et quarta	Februar 1675	235
37.	De aequatione quadratica	Frühjahr 1673 .....	238
38.	De aequationibus per logarithmos resolutis	Juni 1675.....	246
38 <sub>1</sub> .	De aequationibus per logarithmos resolutis (num. 1)	.....	246
38 <sub>2</sub> .	De aequatione per logarithmos (num. 2)	.....	265
39.	Invenire generatricem trochoidis	Ende 1676 .....	280
40.	Aus und zu Pierre Courcier, Supplementum Sphaerometriae	8. März 1676 ...	283
41.	Marginalien in Blaise Pascal, Traité Du Triangle Arithmetique	.....	290
41 <sub>1</sub> .	Zur Klapptafel	Frühjahr – Herbst 1672.....	290
41 <sub>2</sub> .	Zum Traitté des ordres Numeriques	Herbst 1672 – Winter 1672/73 .....	293
41 <sub>3</sub> .	Zu De numerorum continuorum productis	Ende 1672 – Frühjahr 1673 sowie Ende 1673 – Mitte 1674.....	294
41 <sub>4</sub> .	Zu Numericarum potestatum Generalis resolutio	Ende 1672 – Frühjahr 1673.....	295
41 <sub>5</sub> .	Zu Potestatum Numericarum Summa	Juli – Dezember 1672.....	296
41 <sub>6</sub> .	Zu De numeris multiplicibus	Winter 1686/87.....	297
42.	Formae Combinatoriae	20. Oktober 1675.....	302
43.	De Discerptionibus numerorum	April – Dezember 1670 (?) .....	307
44.	Regula Discerptionum Universalis	Juli – Dezember 1672.....	311
45.	Regula discerptionum et triscerptionum universalis	Juli – Dezember 1672....	312
46.	De Numero Formarum	Februar 1676.....	317
47.	Notae ad triangula numerorum et ad algebraam	Erste Hälfte Mai 1676 .....	320



48. De aequationibus cubicis et biquadratis reductis Oktober – Dezember 1676 ..	324
49. Notae ad radicum series Frühjahr bis Sommer 1673.....	327
50. Tentamen ad problema sex quadratorum September – Dezember 1672 .....	328
51. Numerum datum dividere in duos quadratos Mai 1675 .....	339
52. Machina construendi aequationes per Logarithmicam November 1676 .....	341
53. Combinatoria Oktober 1674 – Januar 1675 .....	345
54. Characteristica et combinatoria Oktober 1674 – Januar 1675 .....	347
55. Note sur les Nouveaux elemens de geometrie Mitte 1674 – Ende 1675 (?) ....	353
56. Tabula differentiarum et summarum April 1675 .....	354
57. Überwärtsdivisionen und Rechenproben Dezember 1675 .....	356
58. De appropinquationibus analyticis <b>noch</b> .....	359
59. Logarithmica Curva <b>noch</b> .....	361
60. L'instruction de Longimetrie par une Station 4. September 1676.....	370
61. Teil einer Gesprächsaufzeichnung mit Tschirnhaus Mai 1676 .....	375
62. Diverse Figuren sowie Wurzel aus $-3$ Frühjahr 1676.....	376
63. Überlegung zu binomischen Ausdrücken November 1675 .....	378
64. Propositiones de triangulis rectangulis numericis 12. – 31. Dezember 1675....	379
65. Diverses considérations mathématiques, notamment sur la courbe de Bertet et sur un canal à section trapézoïdale Um den 9. Februar 1676 .....	381
66. Quadratura circuli ex hyperbolis derivata <b>noch</b> .....	388
67. Marginalien in Philippe de La Hire, De cycloide 15. September 1676 – 25. April 1678 .....	392
68. De sectione potestatum per series Ende 1675 – Anfang 1676 (?) .....	394
69. Problemata tangentium inversa November 1675 – Ende 1676 (?) .....	395
70. P. Berthet. Quadratura per progressionem geometricam 9. Februar 1676 .....	397



# VARIA MATHEMATICA, NACHTRÄGE 1670–1676

## 1. OBSERVATIO DE LOGARITHMIS

[Mitte Februar 1673]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 V 16 Bl. 4. 1 Streifen  $19 \times 1,5$  cm. 2 Z. auf Bl. 4 r<sup>o</sup>. — Gedr.: III, 1 N. 4 S. 26 Erl.  
Cc 2, Nr. 339

5

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach der in III, 1 N. 4 S. 22 f. erwähnten Unterhaltung mit J. Pell vom 12. Februar 1673 entstanden sein. Leibniz erwähnt das Werk von Briggs in seinen *Observata in itinere Anglicano* (VIII, 1 N. 1 S. 4).

Bridgius in *Trigonometria Britannica*, ubi de Logarithmis, observavit, differentias sinuum numerorum imparium crescere, ut ipsos sinus; parium decrescere, puto. Dixit D<sup>nus</sup> Pellius. 10

9 *Astronomia Britannica L ändert Hrsg.*

---

9 observavit: Pell bezog sich vermutlich auf folgende Aussage in H. BRIGGS, *Trigonometria Britannica*, 1633, S. 36: „Sunt igitur Differentiae Secundae, Quartae, Sextae, Octavae etc. proportionales ipsis Sinubus datis. Et Differentiae Primae, Tertiae, Quintae, Septimae proportionales inter se et Sinubus complementorum Arcuum mediorum.“

## 2. RÈGLE POUR TROUVER LES FERIES

[Oktober – Dezember 1675]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 XII 1 Bl. 182–183. 2 Bl. 8°, die ursprüngl. 1 Bl. 4° bildeten.  
1 S. auf Bl. 182, 2 S. auf Bl. 183.

5

Cc 2, Nr. 1502 B, A

Datierungsgründe: Vgl. die Datierungsgründe zu VII, 3 N. 49. — Eine Datierung auf das Jahr 1675 wird durch den Umstand nahegelegt, dass Leibniz, als er sich mit dem Beispiel 1. Mai 1615 befasst, zunächst versehentlich 1675 schreibt; möglicherweise ist dies also die aktuelle Jahreszahl. Einen konkreten *terminus ante quem* liefert das Stück, indem es den 1. Januar 1676 in der Zukunftsform behandelt. Auch der 15. August 1676 wird in der Zukunftsform behandelt, in einer verworfenen Variante allerdings in der Vergangenheitsform. — Das Wasserzeichen des Papiers ist bislang nur von zwei anderen Trägern bekannt. Auf diesen finden sich VII, 3 N. 49<sub>1</sub>, eine gemeinsame Gesprächsaufzeichnung von Leibniz und Tschirnhaus, und VII, 3 N. 49<sub>2</sub>, eine Aufzeichnung von Tschirnhaus. Möglicherweise stammt die bei Leibniz seltene Papiersorte also aus Tschirnhausens Besitz. Da Tschirnhaus erst Ende September 1675 in Paris ankommt, können die erwähnten beiden Teilstücke nicht früher entstanden sein. Falls das Papier tatsächlich aus Tschirnhausens Besitz stammt, gilt dies auch für unser Stück, falls nicht, legt die Übereinstimmung der Wasserzeichen zumindest eine Entstehung in derselben Zeit nahe.

[*Erster Ansatz*]

Le cycle solaire peut servir à obtenir la lettre dominicale, et à connoistre ainsi le jour de la semaine qui sera par exemple le premier de mars, ou quelque autre d'un mois donné. Mais on peut l'obtenir plus aisément par la voye suivante: Au nombre 2 soit adjouté le nombre de l'année proposée de l'Epoque vulgaire, et encor le quart du dit nombre de la dite année proposée; negligant le residu. Divisez la somme de ces trois nombres,  $2 + b + \frac{b}{4}$

19 obtenir *erg. L*      22 proposée *erg. L*

---

19 cycle solaire: Die Nummer eines Jahres im 28-jährigen Sonnenzirkel setzt Leibniz offenbar als bekannt voraus, sie kann aber auch mühelos berechnet werden (sie entspricht dem Rest, der bei Division der um 9 vergrößerten Jahreszahl durch 28 bleibt). Der dieser Zahl des Sonnenzirkels zugeordnete Sonntagsbuchstabe und der sich aus diesem ergebende Wochentag eines gesuchten Datums lassen sich dann geeigneten Tabellen entnehmen.

par 7, et le residu sera le nombre du jour de la semaine au quel se rencontre le premier de mars, contant le dimanche pour le premier jour de la semaine, lundi pour le second, etc. Quand il ne restera 0 le premier de Mars sera un samedi.

Si l'on demande la même chose de quelque année avant la naissance de nostre seigneur; alors il faut se servir de la regle suivante. 5

[Zweiter Ansatz]

Regle pour trouver les feries ou le jour de la semaine au quel se rencontre un certain jour du mois donné dans l'année donnée

Adjoutons ensemble,

le nombre de l'année donnée	1676	10
son quart (negligeant le residu s'il y en a)	419	
et le nombre constant	2 si c'est un bissexté ou 3 si c'est un autre	
La Somme	<u>2097</u>	
divisée par 7 laissera	4	

Dimanche	Lundi	Mardi	Mercredi	Jeudi	Vendredi	Samedi	15
1	2	3	4	5	6	0	Nombres des feries

Donc le premier janvier de l'an 1676 sera un Mercredi.

Maintenant s'il s'agit de trouver la ferie du 15 d'Aoust de l'an 1676, on n'a qu'à prendre le nombre des jours qui sont depuis le 1. janvier inclusivement jusqu'au 15

3 Über die 0 gesetzt: rien

7 les feries ou *erg. L* 8 f. donnée (1) Par exemple le 15 d'Aoust de l'année 1676 estoit un samedi, tachons de le trouuer par nostre regle, qvi est telle: au nombre 2 (a) (si c'est un bissexté) (b) ou (2) Adjoutons *L* 12 constant 2 (1) ou 3. au lieux de 2. si l'an est un bissexté. (2) si *L* 18 trouuer (1) le 15 d'A (2) la ferie *L* 19 janvier (1) exclusivement jusq'au 15 d'Aoust (2) inclusivement *L*

1 f. premier de mars: Die im ersten Ansatz festgehaltene Regel zur Bestimmung des Wochentages des 1. März eines beliebigen Jahres ist für den julianischen Kalender gültig, jedoch nicht für den in Paris geltenden gregorianischen. 5 regle suivante: Anstatt eine solche Regel zur Bestimmung des Wochentags von Daten, die vor Beginn der christlichen Zeitrechnung liegen, auszuführen, schneidet Leibniz das Blatt unterhalb der letzten Zeile des ersten Ansatzes durch und notiert den zweiten und dritten auf Vorder- und Rückseite des verbleibenden Papierstückes. 18 15 d'Aoust: Bereits G. SCHOTT, *Organum mathematicum*, 1648, *regula XI*, S. 412–415, dient ein 15. August (der des Jahres 1665) als Beispiel für seine Regel zur Berechnung des Wochentages.

d'Aoust exclusivement sçavoir 227, et y adjouter 4, nombre de la ferie du premier janvier, et il proviendra 231, le quel divisé par 7 laisse 0, donc le 15 d'Aoust 1676 est un Samedi.

La regle se proposera plustost ainsi. Il faut adjouter ensemble le nombre 1676, son

1 *Hilfsaufstellung zu den beiden Beispielen:*

Janvier	31 •	31	31
Fevrier	28 ou 29	29	28
Mars	31 •	31	31
Avril	30	30	<u>30</u>
May	31 •	31	120
Juin	31 •	31	
Juill.	<u>30</u>	30	
Aoust	31 •	<u>14</u>	
Sept.	30	227	
Oct.	31 •		
Nov.	30		
Dec.	31 •		

2 *Nebenrechnungen zum Beispiel 15. August 1676:*

1676	
419	<del>21</del>
<u>227</u>	<del>2324</del> f 332, reste, 0. Nombre de la ferie du Samedy.
<u>2</u>	<del>777</del>
2324	

1 227. (1) et les diviser par 7 le residu (a) 7 (b) 3 adjouté à 4 (2) et y adjouter L

3 regle: Diese Regel ist, da sie ausfallende Schaltjahre wie 1700 unberücksichtigt lässt, nicht auf den gesamten gregorianischen Kalender seit seiner Einführung 1582 anwendbar, sondern gilt so nur für das 16. und 17. Jahrhundert. Ab 1701 müsste sie angepasst werden, indem man vor der Division durch 7 die Anzahl der ausfallenden Schalttage subtrahiert. **10** Juin: Leibniz verwechselt die Länge der Monate Juni und Juli, was sich auf die Berechnung aber nicht auswirkt.

quart 419, negligéant le residu, le nombre des jours de l'année qui precedent celuy dont on cherche la ferie; et enfin le nombre constant 2 si c'est un bissexe, ou 3 si c'est une autre année; le residu de la somme divisée par 7 donnera le nombre de la ferie du jour qu'on cherche.

[*Dritter Ansatz*]

5

„Regle pour trouver la ferie ou jour de la semaine au quel se rencontre un certain „jour du mois donné dans l'année donnée de la periode julienne.

Au nombre de l'année julienne adjoutez sa quatrieme partie, ou si le residu passe l'unité, le nombre entier prochainement plus grand, negligéant tousjours la fraction. La

4 *Berechnung eines weiteren Beispiels für die Regel aus dem zweiten Ansatz:*

1 Maii 1615. Lundi.

$$\begin{array}{r} 1615 \\ 403 \\ 1 \\ \hline 120 \\ 2139 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 2141 \end{array} \text{ f } 305$$

$$\begin{array}{r} 4 \\ \hline 2139 \end{array} \text{ f } 305$$

<b>10</b>	1 Maii (1) 1675 (2) 1615 L	<b>11–15</b>	(1) 1615	(2) 1615 L
			403	403
			3	1
			<u>120</u>	<u>120</u>
			2141	2139

8 l'année julienne: Gemeint ist die Jahreszahl nach der von J. J. SCALIGER, *De emendatione temporum*, 1583, S. 198 eingeführten Zeitrechnung. Ihre Epoche ist Montag, der 1. Januar 4713 v. Chr., gerechnet nach dem julianischen Kalender. **11** 1 Maii 1615: Dass der 1. Mai 1615 ein Montag gewesen sei, führt S. MORLAND, *Arithmetick Instruments*, 1673 [Marg.], Abschnitt *An Explanation of the Perpetual Almanack*, auf S. 3 als Beispiel zur Benutzung seines Ewigen Kalenders an. Leibniz prüft an diesem Beispiel die im zweiten Ansatz stipulierte Regel: Er addiert die Zahl 3 für Gemeinjahre und führt die Division durch 7 schriftlich aus (Mitte). Da das Ergebnis den Rest 6 aufweist und somit nicht wie von ihm erwartet ausfällt, ändert er den zu addierenden Wert, indem er statt einen Tag mehr als 2 einen weniger addiert. Die korrigierte Summe dividiert er erneut schriftlich (rechts). Doch auch diese Division liefert nicht das gewünschte Ergebnis. Tatsächlich ist das erste Ergebnis richtig: Der Rest 6 besagt, dass es sich beim 1. Mai 1615 des gregorianischen Kalenders um einen Freitag handelte. Dementsprechend war der 1. Mai 1615 des julianischen Kalenders — und eben diesen berechnet der Engländer Morland — ein Montag.

somme augmentée de 5, soit divisée par 7; et ce qui restera sera le nombre de la ferie du premier janvier nouveau style de l'année proposée. Lequel estant connu, il est aisé d'avoir la ferie de tel autre jour que l'on voudra, en adjoutant au nombre de la ferie du premier de janvier le nombre de tous les jours de cette année qui precedent le jour proposé. Cette  
 5 somme divisée par 7 laissera la ferie demandée. Il est aisé de sçavoir le nombre de tous les jours precedans, parce qu'on sçait le nombre des jours de chaque mois qui est tousjours le même excepté que le fevrier au lieu de 28 en a 29, l'an estant bissexe. Or le bissexe de la Periode Julienne se reconnoist, lors qu'en divisant son nombre par 4, il reste 1.

## Exemple

10	1676 est de la periode julienne	6389	
	son quart (negligeant la fraction)	1597	$\overset{34}{7991} \div 1141$ . Reste 4.
	Nombre constant	5	$\underline{7777}$
		7991	

Donc le premier janvier de cette année est la quatrieme ferie ou un mercredi.

15 Si vous voulez la ferie du 15 d'Aoust de la meme année, ajoutez à 4 le nombre 227 qui est celuy des jours de cette année bissextile qui precedent le 15 d'Aoust, et la somme 231 divisée par 7 laisse [0] donc le 15 d'Aoust est la septieme ferie ou un samedi.

---

2 nouveau style: Die im dritten Ansatz vorgestellte Regel ist nicht ganz korrekt; sie erzeugt die Wochentagssprünge jeweils um zwei Jahre versetzt. So ergibt bereits ihre Anwendung auf den Neujahrstag des folgenden Jahres 1677 unzutreffenderweise, dieser sei ein Donnerstag gewesen; tatsächlich handelte es sich um einen Freitag. Die Regel ließe sich ohne weiteres ertüchtigen — etwa, indem man die Julianische Jahreszahl vor der Addition ihres Viertels um 2 erhöht und nach dieser Addition den ganzzahligen Anteil dann nur noch um 3 vergrößert. Doch auch eine in dieser Form verbesserte Regel wäre, so wie die aus dem zweiten Ansatz, nur bis 1700 gültig.



## 3. DATUM ET DETERMINATUM

[Erste Hälfte 1676 oder 1678 – 1679 (?)]

Bei den Stücken N. 3<sub>1</sub> und N. 3<sub>2</sub> handelt es sich um Notizen zu den Begriffen *datum* und *determinatum*. Auf dem Träger von N. 3<sub>1</sub> sind auf Bl. 73 v<sup>o</sup> Namen von französischen Diplomaten notiert. Am 7. November 1672 schreibt Johann Christian von Boineburg an Leibniz, dass er seinen Sohn mit Jean-Antoine d’Avaux, dem *président à mortier*, und mit Honoré Courtin bekannt machen solle (I, 1 N. 194, S. 284). Am 31. März 1673 schreibt Leibniz an Melchior Friedrich von Schönborn, dass er von der Entsendung von Honoré Courtin und Paul de Barillon, der ihm unbekannt sei, als französische Gesandte zum Kölner Friedenskongress erfahren habe (I, 1 N. 225, S. 330). Nach der Verhaftung von Wilhelm Egon von Fürstenberg verließ die französische Delegation Köln am 16. April 1674 zunächst Richtung Maastricht. Leibniz war spätestens ab Oktober 1674 aufgrund seiner juristischen Beratung für die Familie Fürstenberg in die Causa Fürstenberg involviert (vgl. seine Denkschrift zur Befreiung von Wilhelm Egon von Fürstenberg, I, 1 N. 318, S. 469–473). Für den in Nimwegen ab Ende 1676 stattfindenden Friedenskongress wurde von Ludwig XIV. bereits Ende November 1675 als Mitglied der französischen Gesandtschaft Jean-Antoine d’Avaux bestimmt. Es handelt sich hierbei um den Sohn des am 23. August 1673 verstorbenen *président à mortier*, er war zuvor von Mai 1672 bis November 1674 in Venedig und im Dezember 1675 als Gesandter in Brandenburg tätig. Dass Leibniz Kenntnis von der bereits erfolgten Abreise der französischen Delegation Richtung Nimwegen hatte — Leibniz nennt keine Namen —, belegt sein Brief an Melchior Friedrich von Schönborn von Anfang Januar 1676 (I, 1 N. 266, S. 397). Für die beiden Diplomaten Courtin und Barillon lässt sich erst ab Mai 1676 bzw. ab September 1677 wieder eine offizielle Akkreditierung nachweisen: jeweils für die französische Gesandtschaft in London. Die auf Bl. 73 r<sup>o</sup> festgehaltene Notiz stimmt inhaltlich überein mit einer Aussage in der von den Herausgebern auf Sommer 1678 bis Anfang 1679 datierten Studie VI, 4 N. 25 (S. 74 Z. 9 f.). N. 3 dürfte vorher verfasst sein. Die Nennung der drei französischen Diplomaten weist auf das erste Halbjahr 1676 hin, eine spätere Entstehung ist aber nicht ausgeschlossen. — N. 3<sub>2</sub> dürfte zur selben Zeit entstanden sein.

3<sub>1</sub>. DATUM EST DETERMINATUM COGNITUM

**Überlieferung:** L Notiz: LH 35 I 9 Bl. 73. Zettel 6,35 × 3,4 cm. 5 Z. auf Bl. 73 r<sup>o</sup>. Auf Bl. 73 v<sup>o</sup> Cc 2, Nr. 449: Messieurs d’Avaux[,] Courtin, Barillon. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 545. 30  
Cc 2, Nr. 448

Datum est determinatum cognitum. Ex data diametro circuli datur area quadrati inscripti, sed determinatur area circuli.

3<sub>2</sub>. DETERMINATUM IDEM QUOD DABILE

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 4 V 10 Bl. 56 r<sup>o</sup> (v<sup>o</sup> leer). Zettel, rechte untere Ecke abgeschnitten, ca 4,4 × 8,5 cm. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 147.  
Cc 2, Nr. 00

- 5 D e t e r m i n a t u m i d e m q u o d d a b i l e . I t a a r c u s a l i q u i s p o s i t i o n e d a t u s e s t m a g n i t u d i n e d e t e r m i n a t u s s e u d a b i l i s . E t s i m a g n i t u d o e j u s n o n s i t c o g n i t a .

## 4. EXPRESSIO UNIUS LITERAE PER MULTAS

4. September 1674

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 230. Ein beschnittenes Blatt ca  $13,3 \times 17,8$  cm. 2 S. Bl. 230 bildete ursprünglich mit LH 35 XII 1 Bl. 14 (= VI, 3 N. 44) ein vollständiges Bl. 2°. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 4f. Cc 2, Nr. 740

5

## E x p r e s s i o   u n i u s   l i t e r a e   p e r   m u l t a s

4 Sept. 1674

Saepe magnitudinem cognitam incognitamve utile est exprimere certo quodam modo, per multas alias in ejus compositionem ingredientibus; quod tum ad numeros, tum ad constructiones Geometricas inventorum jam valorum, et ad incognitas quorum valores non dantur, utiliores prae caeteris eligendas utile est. Omnis autem varietas oriri potest, ex combinatione literarum propositarum, inter se et cum forinsecus assumtis. 10

Exempli causa, datae sunt literae tres *a. b. y.* Et quaestio est de exprimenda aliqua magnitudine, cujus explicatio in nostro est arbitrio; tunc fateor infinitae sunt varietates, sed tamen re intra certos limites comprehensa varietates illae sunt numerabiles. V. g. *a. b. y. ab. ay. by. aby.* Singulae harum duci possunt in aliam quandam arbitrariam; nec refert multiplicando an dividendo. Sed postea ad arbitrarias accedentes veniemus. Nunc datis literis inhaereamus: Assurgant omnes ad quadratum:  $a^2 + b^2 + y^2$ . Hae inter se, et cum prioribus combinationibus jungi possunt. Et ita si ad altiora ascendatur. Hactenus incognita non nisi multiplicando dividendoque ex propositis literis formata est. 15 20

Jam jungi possunt inter se, et multiplicationes divisionibus misceri. Possunt jam de foris numeri literaeque accedere. Sed una litera numeros quoslibet comprehendet. Novae literae additio totidem producet varietates, quot sunt si plures essent ab initio propositae. Sufficeret ergo Tabulas texti, pro combinationibus possibilibus literarum, duarum: trium, quatuor. Et cuilibet combinationi resolutionem cujus est capax, pro varia literarum explicatione. Sed cum ista sint pene infinita, Methodi quaerendae sunt quibus ex 25

18 refert | addendo ändert Hrsg. | an *L* 20 possunt. (1) Primum inter se (*a*) addere (*b*) in (2) Hactenus omni (3) Et *L* 21 dividendoque (1) ex datis (2) ex *L* 22 misceri. (1) Denique prae (2) Hactenus repetitiones praescidimus (3) possunt *L*

tot combinationibus utiles ab initio eligantur.

Breviter Tabulae analyticae formandae essent procedentes ordine per omnes formulas, non considerando literarum qualitatem sed numerum, v. g.  $\frac{a^2 - y^2}{a + y}$ . Jam  $y$ . potest significare  $2a$ .

5 Ita inchoandum esset:  $a$ .  $ab$ .  $abc$ .  $abcd$ .  $\frac{a}{e}$   $\frac{ab}{e}$  etc.  $\frac{a}{ef}$   $\frac{ab}{ef}$  etc. Terminus, ut in numeratore pariter ac nominatore non sint ultra quatuor literae. Jam jungantur inter se, ea lege, ne maximus numerus Terminorum nominatoris et terminorum denominatoris excedat 10. Ecce basin, jam in qualibet basi literis licet tribuere diversos valores; v. g.  $ab$ . licet annotare, si  $b$ . intelligatur  $a$ , fieri inde formulam  $a^2$  cujus radix  $a$ . Nec obliviscendae  
10 forte formulae in quibus ipse nominator vel numerator rursus continent fractiones. Sed quoniam istorum spes nulla, nec forte operae pretium est, superest formulas illustriores hac methodo disponi, ut si qua theoremata nova reperiantur, inseri possint suo loco.

5  $\frac{ab}{ef}$  etc. (1) Summus (2) Terminus  $L$       7 maximus (1) literarum (2) numerus  $L$       9 licet

(1) facere  $b$ . (2) annotare, ( $a$ ) aliqvando  $b$  esse, ( $b$ ) si  $b$ . intelligatur |  $a^2$  ändert Hrsg. |, fieri  $L$

10 nominator (1) ac numerator compositi sunt (2) vel  $L$       12 qva (1) denuo (2) theoremata  $L$

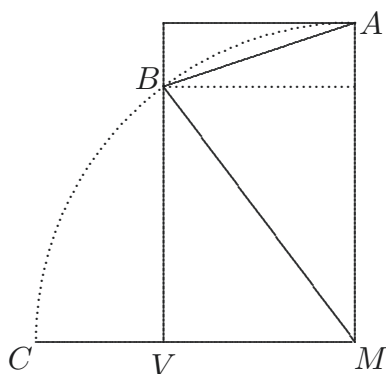
## 5. DE CHARACTERUM IMPERFECTIONE

[September – Oktober 1674]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. 7 Z. auf Bl. 123 r°. — Auf dem Rest des Bogens VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5. Cc 2, Nr. 843

5

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. N. 5 dürfte im selben Zeitraum entstanden sein wie VII, 5 N. 10 u. VII, 6 N. 5.



[Fig. 1]

Si a sectore  $AMBA$ , auferas Triangulum  $AMB$ , restat segmentum  $ABA$ . Id sane patet ex figura inspecta, sed non paret ex ipsis literis sive characteribus, unde patet 10 eos esse imperfectos aliosque inveniendos. Eodem modo si a sectore duplicato auferas Rectangulum  $VMA$ , restabit segmentum duplicatum, necesse esset ista ex characteribus posse detegi, ne inspecta quidem figura.

## 6. GENERALIA GEOMETRICA

[Mai – Oktober] 1674

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 47. 1 Bl. 4°. 2 S. Geringe Textverluste durch Tintenfraß sowie aufgrund einer Papierfalte. — Gedr.: 1. COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 144–146; 2. (engl. Teilübers. nach 1.) WIENER, *Selections*, 1951, S. 5. Cc 2, Nr. 866

Datierungsgründe: Im vorliegenden Stück referiert Leibniz seine Leistungen auf dem Gebiet der Geometrie — unter anderem eine von ihm wenige Tage zuvor gefundene Lösung eines Konstruktionsproblems der Dreieckslehre. Die ausformulierte Lösung ließ sich in seinen Handschriften bislang nicht finden, doch enthält das auf den 25. August 1674 datierte Stück VII, 1 N. 47<sub>10</sub> eine Skizze, die sich möglicherweise auf jenes Problem bezieht. Die Vermutung ist zulässig, dass er das Problem im August 1674 behandelt und kurz danach unser Stück verfasst hat. — Des weiteren erwähnt Leibniz eine Schrift zur *méthode des universels*, die er kurz zuvor geschrieben habe. Die drei hierfür in Frage kommenden Schriften (VII, 7 N. 10, 11 oder 14) sind auf Mai oder Juni, auf Juni respektive auf Mitte 1674 zu datieren. Unser Stück ist somit nicht vor Mai 1674 abgefasst worden. — Eine vergleichbare Darstellung seiner mathematischen Errungenschaften gibt Leibniz auch an anderer Stelle: Dem Stück III, 1 N. 38<sub>2</sub>, das von den Herausgebern auf Oktober 1674 datiert wird, erteilt er nachträglich den einschlägigen Titel *Propria inventa analytico-geometrica*. In ihm beschränkt er sich aber im Bereich der Geometrie auf seine arithmetische Kreisquadratur und erwähnt die *méthode de l'universalité* nicht mehr, sondern führt statt dessen eine neue, analytische Methode zur Behandlung zahlentheoretischer Probleme an. Offenbar ist jenes Stück also nach unserem verfasst worden, womit dieses spätestens im Oktober 1674 entstanden ist. — Auch das auf September oder Oktober 1674 zu datierende Stück VII, 6 N. 7, in welchem Leibniz seine arithmetische Kreisquadratur darstellt, greift (wie III, 1 N. 38<sub>2</sub>) einleitend die in unserem Stück vorgenommene Kategorisierung geometrischer Probleme auf und verwendet dabei recht ähnliche Formulierungen. Es baut hierbei offenkundig auf unserem Stück auf und ist also ebenfalls jünger als dieses.

1674. Paris

*Generalia Geometrica: de meis accessionibus  
et methodo universalitatis*

Les Theoremes n'estant que pour abreger ou diriger la solution des problemes, puis-

26–29 1674. Paris | (1) imperfectum (2) Generalia ... universalitatis erg. | (a) Les problemes Geometriques (b) Les Theoremes *L* 29 ou diriger erg. *L* 29–13,1 puisqve ... practiqve erg. *L*

que toute la theorie doit servir à la pratique. Il suffit d'estimer la varieté de la Geometrie, par celle des problemes. Les problemes de Geometrie, sont ou Rectilignes ou Curvilignes. Les Problemes rectilignes sont, dans les quels on ne demande ny suppose que la grandeur de quelques lignes droites ou espaces rectilignes. Les curvilignes supposent ou demandent la grandeur de quelque ligne courbe, ou de quelque espace curviligne. Les problemes des centres de Gravité et par consequent quantité de problemes de la Mechanique sont, de la derniere sorte. Ainsi on peut dire, qu'il y a comme deux E<sup>(sp)</sup>eces de la Geometrie, celle d'Apollonius, et celle d'Archimede; la premiere renouvelée par Viete et des Cartes; l'autre, par Galilei et Cavalieri. 5

Les problemes Rectilignes se reduisent à la Resolution de quelque E<sup>(q)</sup>u<sup>(a)</sup>tion dont il faut tirer les racines, analytiquement par le calcul, ou Geometriquement par l'intersection des lieux; exactement, ou par approximation. Mais les Curvilignes ne sont pas encor sujets à l'analyse connue, e<sup>(t)</sup> si on les vouloit reduire à une equation, on la trouveroit de l'<sup>(l)</sup>infinitesieme degré. 10

Or <sup>(a)</sup>yant fait quelques remarques assez extraordinaires dans l'une aussi bien que dans l'autre espece de Geometrie, j'ay bien voulu en toucher icy quelques unes en peu de mots. 15

Dans la Geometrie des Rectilignes; j'ay trouvé enfin le moyen de tirer les racines de toutes les Equations cubiques; c'est à dire

7 sorte. (1) On peut dire qve (2) de sorte qv (3) Ainsi L 8 d'Apollonius, (1) et l (2) qvi est des problemes Rectilignes, qvi se resolvent a la verité par l'intersection (3) et celle L 8 f. des Cartes; (1) second par (2) l'autre L 10 Rectilignes se (1) resolvent (2) reduisent L 11 par le calcul erg. L 11 f. par ... lieux erg. L

---

7 deux Especies: Die hier getroffene Unterscheidung zwischen gerad- und krummlinigen geometrischen Problemen sowie ihre historische Einordnung nimmt Leibniz auch anderorts vor: Sie findet sich sowohl in seinen wohl im Oktober 1674 für Mariotte verfassten Ausführungen über seine mathematischen Entdeckungen (III, 1 N. 382 S. 139 f.) als auch in den einleitenden Bemerkungen eines wahrscheinlich zwischen dem 10. September und Ende Oktober 1674 entstandenen Stückes, welches die Bestimmung der Kreisfläche mit Hilfe einer unendlichen Reihe rationaler Zahlen darstellt (VII, 6 N. 7, S. 88 f.).

19 Equations cubiques: Gemeint ist womöglich die Schrift *De aequationum transformationibus cubicarum et quadrato-quadraticum* aus dem September 1674 (VII, 1 N. 127 S. 818 ff.). Auch in der Schrift *Schediasma de radicibus cubicis* von Oktober 1674 (VII, 1 N. 139) sowie in dem (allerdings unvollendeten und dann verworfenen) Konzept VII, 1 N. 133, das wohl auf den September 1674 zu datieren ist, beschäftigt sich Leibniz mit der Lösung kubischer Gleichungen.

de rendre toutes les Equations cubiques pures; en sorte que pour les resoudre il ne faut que tirer la racine cubique d'un solide connu. Scipio Ferreus a trouvé le premier des regles propres à tirer les racines de quelques especes des Equations cubiques, Cardan a publié sa methode. Et Viete aussi bien que Mons. des Cartes ont desespéré de pouvoir venir  
 5 <au> bout des autres. J'ay eu le bonheur d'y voir quelque jour. Et ce la estant on peut dire que la resolution de toutes les Equations cubiques ou quarrequarees est achevée, et qu'on les peut construire toutes Geometriquement par l'invention de deux moyennes proportionelles.

Je ne repete pas icy ce que je viens de dire dans un papier à part de la Methode  
 10 des universels; qui nous abrege le calcul comprenant plusieurs cas sous un seul, qui nous fait decouvrir des harmonies dans les figures et qui nous donne le moyen de les ranger en classes par des idees generales.

Touchant les lieux, j'ay observé quelques moyens extraordinaires d'obtenir des  
 15 aequations *ad circumum* dans les problemes proposés, à fin d'en donner des constructions courtes et belles, comme par exemple je donna[y] il y a quelques jours une construction

4 Et (1) Mons. Viete et (2) Viete L 6 dire que (1) l'Analytique les (2) la resolution L 7 par  
 (1) le moyen de (2) | la seule invention *nicht gestr.* | (3) l'invention L 10 comprenant ... seul *erg.* L  
 12 par | (1) quelques notions (2) des idees | generales L 14 les (1) proposés, (2) problemes proposés, L  
 15 et (1) nettes (2) belles, L 15–15,1 jours (1) la construction du probleme: (2) une qui n'est que  
 <de deux> mots (3) | une *erg. Hrsg.* | construction fort courte de ce probleme: (a) L'Hypothénuse d'un  
 Triangle rectangle (b) un costé L

---

3 Equations cubiques: Vgl. G. CARDANO, *Artis magnaë sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, Bl. 31 (G. CARDANO, *Opera* IV, S. 251.) 9 papier: Gemeint ist wahrscheinlich der Mitte 1674 entstandene *Essay de la methode des universels* (VII, 7 N. 14), denn die Bezeichnung *methode des universels* verwendet Leibniz nur dort. Üblicherweise spricht er dagegen von der *methode de l'universalité*. So lautet auch der Titel der beiden grundlegenden, auf Mai oder Juni 1674 zu datierenden Schriften zu diesem Ansatz, in welchen er — deutlicher und im Wortlaut dem obigen ähnlicher als im *Essay* — sowohl die Verkürzung des Rechenaufwandes als auch die Aufdeckung von Harmonien mittels seiner neu ersonnenen Methode anspricht (vgl. etwa VII, 7 N. 10 S. 76 § 2 u. S. 79 § 7; N. 11 S. 114 f.). Die Bemerkung könnte sich also auch auf eines dieser beiden Konzeptpapiere beziehen.



fort courte de ce probleme: Un costé d'un Triangle estant donné et l'angle qui luy est opposé, trouver le <T>riangle en sorte que ses costés soyent en proportion harmonique.

Viete nous a donné la methode de tire<r> les racines des Aequations par d e s n o m b r e s *a* p p r o x i m a t i o n s *G* e o m e t r i q u e s ; <j>e croy pourtant d'y avoir reussi, et de pouvoir resoudre l<e>s problemes solides par approximations en n'employan<t> que des droites ou cercles; et cette methode a cela au dessus d<e> l'exegese numerique de Viète, qu'elle nous donne toutes les racines de l'Equation proposée tout à la fois; au lieu que l'exegese par nombres n'en donne qu'une. 5

Quant à la Geom<et>rie des Curvilignes je pre<tend>s d'y avoir fait quelque chose d'ext<r>aordinaire. Sans parler de la quadrature d'un segment oblique <d>e la Cycloide; 10

1 f. et ... opposé *erg. L* 2 trouver (1) les deux costés, de sorte qv (2) tous les coste (3) le <T>riangle *L* 2 f. harmonique (1) et j'ay ob (2) Viète *L* 5 *G* e o m e t r i q u e s ; (1) j'en ay trouué (2) j'ay pourtant trouué (3) j'a (4) <j>e croy *L* 9 f. qv'une (1) Dans la Geometrie des curvilignes (2) Qvant à *L* 11 de la (1) dimension (2) qvadrature *L*

---

1 probleme: Mit Konstruktionsproblemen der Dreieckslehre befasst sich Leibniz im Jahr 1674 mehrfach. In VII, 1 N. 11 etwa, das die Herausgeber auf August 1674 datieren, sind zwei Seiten und die Fläche eines gesuchten Dreiecks vorgegeben. In dem bislang auf Ende 1674 datierten Teilstück VII, 1 N. 14<sub>1</sub> sind dagegen die Basis des gesuchten Dreiecks und ein an der Basis anliegender Winkel sowie das Produkt der beiden anderen Seiten gegeben. Und im bislang auf Frühjahr 1675 datierten Teilstück VII, 1 N. 14<sub>2</sub> greift Leibniz das letztgenannte Problem erneut auf, ändert dann aber die Fragestellung und setzt nun nicht mehr einen an der Basis anliegenden, sondern den der Basis gegenüberliegenden Winkel als gegeben voraus. Dieses Problem kann er elegant konstruktiv lösen. Das in unserem Stück genannte Problem lässt sich auf eine sehr ähnliche, wenngleich geringfügig aufwendigere Weise lösen. Seine Bearbeitung ist nicht überliefert. Aus diesem Grund und auch, weil Leibniz von einer „construction fort courte“ spricht, liegt die Vermutung nahe, dass er tatsächlich die Konstruktion aus VII, 1 N. 14<sub>2</sub> meint. Womöglich geht er davon aus, dass diese Konstruktion ohne Änderung auch das hier genannte Problem löst. Weil VII, 1 N. 14<sub>1</sub> und 14<sub>2</sub> aus einer Reihe von Gründen neu datiert und nun in die erste Hälfte des Jahres 1674 gestellt werden, steht ihre Datierung dieser Interpretation nicht mehr entgegen. 3 methode: Vgl. FR. VIÈTE, *De emendatione aequationum*, 1615 (VO S. 82–161). 4 approximations Geometriques: Leibniz denkt hier womöglich an eine Verknüpfung seiner Lösung der soliden Probleme durch Kegelschnitte mit der Umformung der Kegelschnittgleichungen in eine Kreisgleichung; vgl. seine wohl im September 1674 verfasste Schrift *De aequationibus ad circulum inveniendis* (VII, 1 N. 130). 11 Cycloide: Den Segmentsatz an der Zykloide formuliert Leibniz erstmalig in III, 1, N. 29, zu datieren auf den Sommer 1674, auf S. 115. Vorarbeiten finden sich in VII, 4 N. 17, wohl aus dem späten Frühjahr 1673. Den Beweis liefert er in VII, 5 N. 31, zu datieren auf März bis Dezember 1675.

de la dimension de la courbe décrite par l'évolution du cercle (ayant trouvé que l'arc evolu  
est la moyenne proportionnelle entre le diametre et la courbe décrite); de la dimension  
de la surface du solide parabolique fait par la parabole revolüe à l'entour de la touchante  
du sommet; j'ay observé deux methodes fort estendues, l'une de donner la dimension des  
5 figures superieures en supposant celle des inferieures; l'autre de reduire l'aire d'une figure  
à la somme d'une progression de nombres rationaux. Ce qui est traduire la difficulté de  
la Geometrie à l [bricht ab]

3 de la (1) super (2) surface (a) d'un solide Hyp (b) du solide L 4 l'une de (1) revoquer  
(2) donner L 4 dimension des (1) courbes (2) figures L 6 somme (1) de progressio (2) d'une  
progression L

---

1 l'évolution du cercle: Vgl. das wahrscheinlich im Frühjahr 1673 entstandene Konzept VII, 4 N. 10<sub>1</sub>  
S. 141 u. 143 sowie III, 1 N. 29 S. 116. 3 solide parabolique: Vgl. das wohl aus dem Sommer 1673  
stammende Konzept *Triangulum characteristicum ellipsis* (VII, 4 N. 28, hier S. 509–515) sowie den auf  
den 3. Oktober 1674 datierten ersten Teil der Schrift *Schediasma de superficiebus conooidum* (VII, 5  
N. 6). 4 l'une de: Leibniz bezieht sich hier möglicherweise auf sein im August 1673 verfasstes, *Methodus  
tangentium inversae seu De functionibus* überschriebenes Konzept VII, 4 N. 40. 5 l'autre: Diese  
Bemerkung bezieht sich auf Transmutation und Reihenentwicklung; vgl. etwa das aus der ersten Hälfte  
des Jahres 1674 stammende Stück zur arithmetischen Kreisquadratur VII, 6 N. 4. 6 difficulté: In  
VII, 6 N. 7 S. 89 Z. 2 f. formuliert Leibniz den hier abgebrochenen Gedanken zu Ende: „... la difficulté des  
Curvilignes est transferée de la Geometrie à l'Arithmetique par les progressions.“

## 7. SUR LE CALCUL DES PARTIS

7. Januar 1676

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 5–8. 2 Bl. 4<sup>o</sup> u. 1 Bog. 2<sup>o</sup>. 7 S. Bl. 8 v<sup>o</sup> leer bis auf 1 Z. — Gedr.: 1. PARMENTIER, *L'estime*, 1995, S. 113–145; 2. (span. Übers.) LEIBNIZ, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 669–687.

5

Cc 2, Nr. 1259

7. Janvier 1676

Le Chevalier de Meslé fut le premier qui donna l'ouverture pour le calcul des partis, que Messieurs Pascal et Huguens ont entrepris par apres. On croyoit que s'il y avoit par exemple trois partis à gagner, pour gagner l'argent, qui estoit mis, ou trois partis à gagner, pour gagner le jeu, et si l'un avoit gagné deux partis et l'autre un; que  $\frac{2}{3}$  du jeu

10

11 partis; (1) que  $\frac{2}{3}$  du jeu luy appartennoient (2) et l'autre *L*

---

8 Meslé: Gemeint ist Antoine Gombaud (1607–1684), genannt Chevalier de Méré. 8 partis: Das *problème des partis*, zu deutsch Teilungsproblem, besteht darin, eine „gerechte“ Aufteilung des Einsatzes bei einem in mehreren Runden auszutragenden Spiel zu finden, wenn dieses abgebrochen werden muss, bevor einer der Spieler die für den Gesamtsieg vereinbarte Anzahl Runden gewonnen hat. Es gilt als klassisches Problem der Wahrscheinlichkeitstheorie. 9 Pascal: Nachdem Méré das Problem an Pascal herangetragen hat, erörtert dieser es 1654 in seinem Briefwechsel mit Fermat. Eine Abhandlung Pascals, die die Lösung des Problems präsentiert, wird nach seinem Tod abgedruckt: Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.], Abhandlung III: *Usage du triangle arithmétique, pour déterminer les partys qu'on doit faire entre deux Joueurs qui jouent en plusieurs parties* (PO III, S. 478–498). Leibniz besitzt wohl schon seit 1672 ein Exemplar dieses Buches (vgl. N. 41) und bezieht sich hier offensichtlich auf diese Abhandlung. Ihre Ergebnisse hat er jedoch nicht zur Kenntnis genommen. Pascals Briefe an Fermat — der vom 29. Juli 1654 präsentiert seine eigene Problemlösung, der vom 24. August 1654 referiert jene Fermats — werden drei Jahre nach Entstehung des vorliegenden Stückes in P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 179–188, veröffentlicht. Im Juni 1675 und wohl ab Januar 1676 kann Leibniz verschiedene Stücke aus Pascals Nachlass einsehen (vgl. N. 33 sowie III, 1 N. 53, 54 u. 74), gewinnt jedoch auch dabei keine nähere Kenntnis von der Behandlung des Problems durch Pascal und Fermat. 9 Huguens: Vgl. Chr. HUYGENS, *De ratiociniis in ludo aleae*, in: Fr. van SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum*, 1657, S. 517–534, insbesondere prop. IV–VII.

appartenoient au premier. Mais il refusoit cela, par ce qu'il ne me faut qu'un parti pour gagner tout, et il ne me faut que la perte d'un, pour rendre tout egal, et pour revenir au premier estat, donc  $\frac{1}{2}$  ou  $\frac{2}{4}$  m'appartenant au commencement, et en cas de perte du 4<sup>me</sup> jeu; et le tout, ou  $\frac{4}{4}$  m'appartenant en cas du gain du 4<sup>me</sup> jeu, ou du 3<sup>me</sup> parti; il est

5 donc manifeste qu'avant que de le gagner ou perdre j'ay  $\frac{3}{4}$  de l'argent mis sur la table.

Car ce jeu me peut faire gagner  $\frac{2}{4}$ , et me peut faire perdre  $\frac{2}{4}$ , dont il vaut  $\frac{1}{4}$  ou la moitié de  $\frac{2}{4}$ . Donc avant ce jeu j'avois  $\frac{3}{4}$ .

Le chevalier de Melé gentilhomme du Poictou, grand joueur, et homme d'esprit.

10 Cela a lieu au piquet où l'on joue des partis liez, et qu'il faut gagner 3 fois par exemple ou 4 fois, pour amener l'argent. NB. Si on joue à trois partis, il faut necessairement qu'un gagne en 5 jeux ou partis. Il peut arriver que l'un gagne trois partis de suite; | | | *item*

1 faut qv'un (1) jeu pour (2) parti L      4 du 4<sup>me</sup> (1) parti (2) jeu L      6 gagner (1)  $\frac{1}{4}$ , (2)  $\frac{2}{4}$ ,

et ... il (a) faut (b) vaut L      7 j'avois (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{3}{4}$  L      10 joue (1) trois jeux (2) à trois partis L

11–19,1 suite; (1) *item* qv'il en gagne (2) | | | *item* qv'il gagne (a) • | | | vel | • | | vel | | • | vel (b) | | • | (aa) vel | • | | vel • | | | (bb) ou L

---

1 appartenoient: Eine solche Aufteilung des Gewinns im Verhältnis der jeweils gewonnenen einzelnen Spielrunden schlägt L. PACIOLI, *Summa de arithmetica, geometria, proportioni, et proportionalita*, 1494, Bl. 197 r<sup>o</sup> vor. Es handelt sich hierbei um die erste Behandlung des Problems durch einen namentlich bekannten Autor in der Literatur. 1 refusoit: Nicht erst Méré weist Pacioli's Teilungsregel zurück; bereits G. CARDANO, *Practica arithmetice*, 1539, cap. 68, § 5 und N. TARTAGLIA, *La prima parte del general trattato di numeri, et misure*, 1556, lib. XVI, Bl. 265, § 206 kritisieren sie und stellen eigene Teilungsregeln auf. 4 parti: Die Verwendung der Begriffe *jeu* und *parti* ist anfangs inkonsistent; *jeu* steht meist für das gesamte Spiel, hier aber für eine einzelne Runde, *parti* meint in der Regel eine Spielrunde, hier aber eine gewonnene Runde bzw. einen Gewinnpunkt (später auch als *coup* oder *point* bezeichnet). 5 manifeste: Der hier am Beispiel referierte Ansatz zur Lösung des Teilungsproblems stimmt mit jenem von Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 525, prop. IV überein. 6 dont: Für die im modernen Französisch *donc* geschriebene Konjunktion verwendet Leibniz in diesem Stück, ohne einer ersichtlichen Regel zu folgen, öfters auch die Schreibweise *dont* (die an anderen Stellen aber auch für das gleichgeschriebene Pronomen steht). 9 piquet: Dies ist ein im 17. Jahrhundert populäres Kartenspiel französischen oder spanischen Ursprungs für zwei Personen.

qu'il gagne  $||\cdot|$  ou  $|\cdot||$  ou  $\cdot|||$ . Et s'il gagne en 5 jeux il peut gagner ainsi:  
 $\cdot\cdot|||$   $| \cdot\cdot||$   $||\cdot\cdot|$   $\cdot||\cdot|$   $\cdot|\cdot||$   $| \cdot|\cdot|$ . *Ecce modos omnes quibus vinci potest. Et notandum hoc combinationis plane singularis genus. Nunc ut ex meis rem principiis examinem*, je mets pour assuré, qu'en gagnant un parti je fais un tiers de ce qu'il faut faire, pour gagner l'autre moitié de l'argent qui est mise au jeu; car une moitié m'appartient déjà. Donc l'argent mis au jeu estant:  $a$ , et le nombre des partis qu'il faut gagner pour amener tout l'argent estant  $p$ , 1 parti vaudra  $\frac{a}{2p}$  et 2 partis gagnés vaudront:  $\frac{a}{p}$ . Les quels joints à  $\frac{a}{2}$  j'aurois alors  $\frac{a}{2} + \frac{a}{p}$  de tout l'argent. Mais mon adversaire gagne le 3<sup>me</sup> parti, c'est à dire, il gagne par là:  $\frac{a}{2p}$ , et il a ainsi  $\frac{a}{2} + \frac{a}{2p}$ . Donc mon droit sur l'argent tout entier est au sien, comme  $\frac{a}{2} + \frac{a}{p}$  est à  $\frac{a}{2} + \frac{a}{2p}$  ou comme  $\frac{ap+2a}{2p}$  est à  $\frac{ap+a}{2p}$ , ou comme  $p+2$  est à  $p+1$ . Par consequent il faut diviser  $a$  en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme  $p+2$  est à  $p+1$ , et  $p$  estant  $\neq 3$ , il faut  $a$  diviser en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme 5 à 4. C'est à dire divisant toute

5 gagner (1) la moit (2) l'autre  $L$  6 estant: (1)  $\langle b \rangle$  argent ayant gagné un pa (2)  $a$   $L$   
 8 vaudront: (1)  $\frac{a}{4p}$  (2)  $\frac{a}{p} L$

6 estant: Die Bezeichnung  $a$  für die Gewinnsumme findet sich bereits bei Huygens, und auch  $p$  tritt dort in ähnlicher Bedeutung auf wie hier bei Leibniz; vgl. Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 523. 9 gagne: Der hier verfolgte Ansatz widerspricht der Voraussetzung, dass die Summe der Gewinne beider Spieler konstant  $a$  ist. Dies belastet die weitere Überlegung und wirkt sich insbesondere in S. 20 Z. 4 f. aus. 12  $p+2$  est à  $p+1$ : Eine Regel für die Aufteilung des Gewinns kann als hinreichend „fair“ gelten, wenn sie mindestens drei Bedingungen erfüllt: Erstens sollte sie bei Gleichstand zum Zeitpunkt des Spielabbruchs beiden Spielern den gleichen Anteil zusprechen; zweitens sollte sie demjenigen Spieler, der als erster die für den Gesamtsieg geforderten Runden gewonnen hat, den gesamten Gewinn zusprechen; und drittens sollte sie sicherstellen, dass jede zusätzlich gewonnene Runde den Anteil am Gewinn vergrößert. Die beiden ersten Bedingungen sollten sich dabei als Randwerte aus der Regel ergeben und nicht lediglich *per definitionem* gelten. Man kann die „gerechte“ Aufteilung auch noch strenger definieren, indem man verlangt, dass diese genau im Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkeiten zu erfolgen hat. Unausgesprochen verfolgt Leibniz das Ziel, eben hierfür eine Regel zu finden. Die hier untersuchte Aufteilung des Gewinns im Verhältnis  $(p+g) : (p+f)$  bei einem Spielstand von  $g : f$  im Augenblick des Abbruchs erfüllt allerdings bereits die zweite der Mindestbedingungen nicht: Nach dieser Regel stünde dem Verlierer stets mindestens ein Drittel des Gewinns zu.

la somme en 9 parties celui qui a gagné 2 partis aura  $\frac{5a}{9}$ , et celui qui n'a gagné qu'un  
aura  $\frac{4a}{9}$ . Mais nous verrons incontinent si ce calcul est juste car si celui qui a gagné 2  
partis, gagne encor un, c'est à dire  $\frac{a}{2p}$ , c'est à dire  $\frac{a}{6}$ ,  $p$  estant  $\pi 3$ , il aura  $a$  tout entier,  
mais  $\frac{5a}{9} + \frac{a}{6}$  ne fait pas  $a$ . De meme s'il perdoit un, il n'auroit que  $\frac{a}{2}$ , or  $\frac{5a}{9} - \frac{a}{6}$  ne fait  
5 pas  $\frac{a}{2}$ . C'est pourquoy il y a du sophisme dans nostre calcul.

Et il faut un tout autre principe d'analyse. Le principe general est, que deux joueurs  
ont un droit egal sur une somme qui est au jeu, lors qu'il est aussi aisé à l'un qu'à l'autre  
de gagner ou de perdre. Donc au commencement du jeu tout est commun. C'est à dire si  
la société venoit à se rompre chacun en auroit la moitié. De plus si un des joueurs a tant  
10 de partis, sur son adversaire, que le nombre des partis qu'il luy faut pour gagner tout est  
égal au nombre de ceux qu'il doit perdre pour revenir à l'égalité; il aura gagné la moitié  
de l'autre moitié outre la sienne. Ainsi supposé qu'il faille 5 partis pour amener l'argent.  
J'en ay gagné 3, et mon adversaire 1. Si j'en gagne encor deux, j'amene l'argent, si j'en  
perds deux nous revenons à l'égalité, donc en ce cas ils m'appartiennent  $\frac{3}{4}$  de l'argent.  
15 On voit par là que ce n'est pas la meme chose, que j'aye gagné 3 partis et l'autre 1,  
et que j'aye gagné 2 partys et l'autre rien. Car au premier cas, il m'appartient  $\frac{3}{4}$ , au  
second cas, il me faut 3 partis pour gagner, et il ne faut que perdre deux pour revenir

2 f. qvi (1) gagne (2) a gagné . . . encor | un *gestr. L, erg. Hrsq.* |, c'est  $L$  6 principe (1) du jeu  
(2) general  $L$  10 adversaire, qve (1) ce qv'il (2) le nombre  $L$  10 f. gagner | tout *erg.* | est égal (1)  
à ce qvi luy faut (a) pour (b) de perte pour (2) au nombre  $L$  13 deux, (1) je gagne (2) j'amene  $L$

---

11 gagné: Auch in der Verallgemeinerung — einem Spieler fehlt noch eine bestimmte Zahl an  
Punkten zum Gesamtsieg und sein Vorsprung beträgt ebensoviele Punkte — ist der direkte Weg zum  
Gesamtsieg genauso wahrscheinlich wie der direkte Weg zum Gleichstand. Doch gibt es nun eine Anzahl  
weiterer Spielverläufe, die hier nicht berücksichtigt werden. Das Verhältnis der Gewinnwahrscheinlichkei-  
ten der beiden Spieler kann so nicht korrekt bestimmt werden. Auch im weiteren beschränkt sich Leibniz  
auf die Betrachtung spezieller Konstellationen, bis er auf S. 34 den Blick dann auf alle Spielverläufe  
ausweitet.

au premier estat d'egalité. Donc l'apparence de gagner  $\frac{a}{2}$  est à l'apparence de gagner 0, comme 2 à 3. Et il faut voir si je puis dire, que j'ay gagné autant de  $\frac{1}{5}$  mes de  $\frac{a}{2}$ , qu'il y a d'apparences de gagner, sçavoir 2. Il faut que mon adversaire gagne 5 partis pour gagner  $\frac{a}{2}$ . Et il faut gagner 2 pour venir à l'egalité. Ce qui est paradoxe. Et on ne pourra pas dire icy que l'apparence de gagner est à l'apparence de l'egalité, comme 2 à 5, donc je n'ose pas parler comme cela, non plus dans la personne de celui qui a gagné: car il faut de maniere de parler qui convienne à tous deux. Il est bien vray icy que l'un ayant gagné autant de partis, que l'autre tout est égal; mais il n'est pas vray, qu'adjoutant autant de

5

3 2. Il faut (1) 5 à mon adversaire, (a) dont (b) donc à qve (2) qve mon L 4 paradoxe, (1) (don) (2) et il ne faut parler comme cela; et même il faut considerer (3) Et on L 6 cela, (1) donc (2) non plus L

4,14 m'appartiennent: Wenn sich die Aufteilung des Gewinns am Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten bemessen soll, mit denen die beiden Spieler das gesamte Spiel gewinnen, ist zunächst danach zu fragen, ob man ein exaktes Verhältnis der Wahrscheinlichkeiten angeben kann, mit welchen sie eine einzelne Runde für sich entscheiden. Bei Spielen wie etwa dem Münzwurf kann dieses Verhältnis mit 1 : 1 angesetzt werden. Bei einem Spielstand von 3 : 1 und fünf Gewinnrunden ist der Einsatz dann im Verhältnis 13 : 3 aufzuteilen, wie sich mit den Ansätzen von Pascal oder Fermat leicht berechnen lässt und wie es bei Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, S. 526, prop. VII nachzulesen ist. Auch Bl. PASCAL, *a. a. O.*, S. III, 7 (= PO III, S. 488 f.) behandelt dieses Beispiel. Bei dem hier betrachteten Kartenspiel Piquet haben die beiden Spieler jedoch im Allgemeinen nicht die gleiche Chance, eine Runde zu gewinnen, so dass sich die Frage stellt, wie ihre jeweiligen Spielstärken zu bemessen sind. Falls man davon ausgeht, dass der Zwischenstand von 3 : 1 die unterschiedlichen Spielstärken abbildet und man daher auch das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten in einer einzelnen Runde so ansetzt, müsste eine Verteilung des Gewinns im Verhältnis von 63 : 1 erfolgen. In der Regel sind die genauen Spielstärken aber unbekannt. Das Problem setzt in seiner überlieferten Form stillschweigend gleiche Spielstärken und Erfolgswahrscheinlichkeiten in jeder Einzelrunde voraus, und Leibniz folgt dieser Vorgabe. 1 apparence: Der methodische Ansatz zur mathematischen Behandlung von Wahrscheinlichkeiten besteht im vorliegenden Stück darin, das Verhältnis zweier *apparences* zueinander zu betrachten. Die *apparence* — die Häufigkeit, mit der ein ungewisses Ereignis eintritt — wird also nicht als für sich stehende Größe betrachtet, sondern sie ist stets in eine Relation zu setzen. Dies gilt in diesem Stück gleichermaßen auch für die als *facilité*, *difficulté* oder *probabilité* bezeichneten Größen. 4 paradoxe: Für eine analoge Betrachtung aus der Sicht des zurückliegenden Spielers ist die Zahl an Runden, die dieser gewinnen muss, damit wieder Gleichstand herrscht (hier 2), in Relation zur Zahl der Runden, die er verlieren muss, damit er das Gesamtspiel verliert (hier 3), zu setzen. Dementsprechend wäre im vorliegenden Beispiel sein eigener Anteil im Verhältnis von 3 : 2 aufzuteilen. Der Ansatz führt also, ob man nun den führenden oder den zurückliegenden Spieler betrachtet, tatsächlich zum gleichen Ergebnis.

partis à l'un qu'à l'autre tout demeure egal, car celui qui est déjà le plus avancé gagnera en ce cas. C'est pourquoy un jeu estant disputé il y aura bien de la difference entre dire que tous deux ont gagné, et que pas un n'a gagné. On ne sçauroit bien demonstrier cela sans des definitions exactes. Cependant je croy que nous avons la regle. Le nombre des partis necessaires est  $p$ , le nombre des partis gagnez  $g$ . Donc de ceux qui restent à gagner le nombre est  $p - g$ . Donc si vous perdez  $g$ , vous reviendrez à l'egalité, si vous gagnez  $p - g$ , vous amenez l'argent. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de perdre en raison reciproque du nombre des jeux qu'il faut gagner, au nombre des jeux qu'il faut perdre, ou comme  $g$  à  $p - g$ ; et par consequent l'apparence d'amener l'argent, est à l'apparence de revenir à l'egalité, comme  $g$  à  $p - g$ . Mais comme est l'apparence d'amener l'argent à l'apparence de revenir à l'egalité de même est la partie de l'argent de mon adversaire sur la quelle un droit m'est acquis, à la partie de son argent qui reste dans la communauté. Donc si le jeu se doit separer en cet estat, j'aurois preferablement de l'argent de mon adversaire une partie qui sera à l'autre partie comme  $g$  est à  $p - g$ . Le reste sera divisé egalemt. Et par consequent l'argent est  $a$ , la moitié de mon adversaire est  $\frac{a}{2} \mp \frac{pa}{2p} \mp \frac{ga + pa - ga}{2p}$ . Ainsi j'auray en cas de separation;

$$\frac{a}{2} + \frac{pa - ga}{4p} + \frac{ga}{2p} \mp \frac{3ap + ga}{4p}$$

Avant que de venir au theoreme il faut aussi comprendre dans le calcul le cas où tous deux ont gagné quelque partis; l'un en a gagné  $g$ , l'autre en a gagné  $f$ , et je suppose  $f$  moindre que  $g$ . Il faut à  $G$ , c'est à dire celui qui a gagné  $g$ , le nombre  $p - g$ ; pour amener

5 partis (1) est  $p$ . le nombre des partis (2) qv'il fa (3) necessaires  $L$  6 donc  $erg.$   $L$  7  $p - g$ . vous (1) gagnez (2) amenez l'argent. (a) donc (b) or  $L$  7 perdre (1), comme le nombre (2) en raison  $L$  9 comme (1)  $p - g$  (2)  $p$  (3)  $g$  à  $p - g$ ; et par conseqvent (a) le gain sur la moitié de vostre (nom) (b) l'apparence  $L$  11 même est (1) le gain (2) le droit acquis sur l'argent de mon adversaire, un droit (3) la partie  $L$  17 f.  $\frac{3ap + ga}{4p}$  (1) Donc nous pourrons faire un theoreme. Deux joueurs (a) ayant mis (b) estant tombés d'accord qve celui (2) Avant  $L$  18 aussi (1) toucher (2) comprendre  $L$  20 gagné |f, ändert Hrsq. | le nombre  $L$

---

15 divisé: Der hier verfolgte Ansatz verlangt, den Einsatz des zurückliegenden Spielers im angegebenen Verhältnis zwischen den beiden Spielern aufzuteilen. Demzufolge bleibt weder unverteilt Geld im gemeinsamen Besitz übrig, noch ist jener Teil des Einsatzes, der dem zurückliegenden Spieler verbleibt, hälftig auf beide Spieler zu verteilen. Leibniz entwickelt seinen Gedanken konsequent weiter, bis er in S. 24 Z. 7 diese Inkonsistenz erkennt.



l'argent; et il faut que l'autre  $F$  gagne  $g - f$  pour venir à l'égalité donc l'apparence de gagner sera à l'apparence d'égalité comme  $g - f$  est à  $p - g$ . Par consequent il faut diviser  $\frac{a}{2}$  en deux parties, dont l'une soit à l'autre comme  $g - f$  est à  $p - g$ . Pour cela:  $\frac{a}{2} \propto$

$\frac{ga - fa + pa - ga}{2g - 2f + 2p - 2g} \propto \frac{ga - fa}{2p - 2f}$ . Donc ces deux parties seront:  $\frac{ga - fa}{2p - 2f}$ , et  $\frac{pa - ga}{2p - 2f}$ . Donc

$\frac{ga - fa}{2p - 2f}$  appartient preferablement à celui qui a gagné  $g$ , et du reste il luy appartient 5

$\frac{a}{2}$ , sa moitié, et la moitié du reste de la moitié de l'adversaire  $\frac{pa - ga}{4p - 4f}$ , c'est à dire

$\frac{a}{2} + \frac{pa - ga}{4p - 4f} \propto \frac{3pa - 2fa - ga}{4p - 4f}$ , et à luy preferablement  $\propto$ . Donc joignant  $\odot + \propto$ , il

proviendra  $\frac{3pa + ga - 4fa}{4p - 4f}$ , qui appartient à  $G$ , et à  $F$ , il n'appartient que  $\frac{pa - ga}{4p - 4f}$ .

Donc joignant  $\propto$  et  $\text{?}$ , nous aurons  $\frac{4pa + ga - 4fa - ga}{4p - 4f} \propto a$ .

Donc nous pourrons faire un theoreme: Deux joueurs estant tombés d'accord que 10  
celuy qui auroit fait le premier un certain nombre de jeux (points), ( $p$ ) ameneroit la  
somme d'argent mise au jeu ( $a$ ) et le jeu venant à estre rompu legitimement lors que  
celuy qui a fait le plus de points n'en a fait qu'un nombre moindre que celui qu'on  
demande ( $p$ ) sçavoir ( $g$ ) et celui qui en a fait le moins en a ( $f$ ). Il s'agit de sçavoir 15  
comment il faut faire les partis, c'est à dire comment il faut partager la somme  $a$ , entre  
ces deux joueurs, au sortir de ce jeu imparfait? Je dis que la somme  $a$ , doit estre partagée

1 et (1) il faut à celui qui a (2) il faut  $L \quad \propto \frac{3pa - 2fa - ga}{4p - 4f}$ ,  $\odot$  (1) celui (2) ce qui appartient

aussi à son adversaire, (3) et à luy  $L \quad \propto$  preferablement (1)  $\frac{ga - fa}{2p - 2f}$  (2)  $\propto$ . donc  $L \quad 11$  jeux

|(points) *erg.* |, (p) (1)  $ga$  (2) gagneroit (3) ameneroit  $L \quad 12$  f. lors que (1) l'un en a  $f$  (2) celui  $L$   
14 f. sçavoir (1) combien il faut faire les partis, c'est à dire combien il faut (avoir) (2) comment  $L$

16 Je dis (1) que celui qui a fait ( $g$ ) points (am) (2) que la somme  $L$

en deux:  $\frac{3p + g - 4f}{4p - 4f} a$ , et  $\frac{p - g}{4p - 4f} a$  et que la premiere  $\text{q}$  doit estre donnée à celui qui aura fait ( $g$ ) points, l'autre  $\text{r}$  à celui qui n'en aura fait que ( $f$ ).

Il est premierement manifeste que  $g$  et  $f$  estant egaux, ou tous deux egaux à rien, tout doit estre partagé également. Mais nostre calcul ne comprend pas ce cas, donc il faut qu'il y ait de la faute là dedans, dont je voys la raison à present. Je ne luy donne pas seulement preferablement sur son adversaire  $\frac{ga - fa}{2p - 2f}$ , qui est  $\square$  à 0, lors que  $g \square f$  mais je luy donne encor la moitié de  $\frac{pa - ga}{2p - 2f}$ . Donc il gagne en ce cas cette somme, et neantmoins il ne doit rien gagner, donc la regle est fautife, et il faut retrancher cette moitié. L'erreur est venue de ce que j'avois pris l'argent mis au jeu comme une somme dont le reste doit estre divisé, lors que celui qui a gagné le plus de points a pris son preciput. Ce que les loix de cette societé faite pour le jeu, ne portent pas. Je n'y vois pas même de la societé; et il n'est point necessaire de considerer l'argent mis sur la table; il faut seulement considerer que celui qui gagne le plus de points, a obligé l'autre à quelque chose, et a un droit acquis sur quelque chose, qu'il faut determiner, et quand les points sont egaux l'apparence de gagner toute est egale de part et d'autre, et l'obligation est compensée. Donc il faut dire: comme l'apparence de gagner la somme à la quelle mon adversaire s'oblige en cas de perte, est à l'apparence de revenir à l'egalité, ou à l'apparence de rien gagner, de même doit estre le gain au sortir du jeu imparfait, à ce que l'adversaire retient. Or l'apparence de gagner est à l'apparence de revenir à l'egalité en raison reciproque des points à faire. C'est à dire l'apparence de faire  $p - g$  points; e[s]t à l'apparence de perdre  $g - f$  points comme  $\frac{1}{p - g}$  points à  $\frac{1}{g - f}$  points, parce que l'apparence de les faire est d'autant moindre, que le nombre à faire est plus grand. Donc l'apparence de gagner est à l'apparence de rien gagner comme  $g - f$  est à  $p - g$ . Donc le

2 f. fait qve (f) (1) Axiomes: lors qve l'apparence de gagner de l'un et de l'autre costé est commune, le droit est egal Le droit du parti, est (a) qve chacun (b) qv'un joueur (2) Le fondement doit estre, qve l'argent doit estre divisé en deux parties, (3) Le fondement (a) doit (b) est, (4) il est L 3 f. rien, (1) le droit (2) tout L 9 moitié. (1) |Et nicht gestr. | generalement | la nicht gestr. | (2) L'erreur L 10 plus de (1) partis a (2) points L 15 toute erg. L 18 estre le (1) parti (2) partis au sortir du jeu imparfait (3) gain L 20 points (1) faits (2) à faire c'est à dire (a) est en raison (b) l'apparence L 23 l'apparence de (1) revenir (2) rien L

gain doit estre au residu, comme  $g - f$  à  $p - g$ . C'est à dire la somme que mon adversaire a mis au jeu doit estre divisé en deux parties, dont l'une est [à] l'autre comme  $g - f$  à  $p - g$ , et mon adversaire est obligé de me donner la partie qui est comme  $g - f$ , le reste luy demeure. Mais j'avoue que cela a besoin d'estre démontré rigoureusement. De plus la difficulté s'augmentera ainsi, posons que les obligations des joueurs soyent inegales; c'est à dire que l'un s'oblige à perdre plus qu'il ne scauroit gagner. Il est manifeste qu'à lors en cas d'egalité; il n'y a point d'obligation mais en cas de gain je gagne la somme que mon adversaire a mis, quoyque plus grande que la mienne. Donc si j'ay gagné quelques points et mon adversaire aussi, il faut calculer tout de même sur la somme que mon adversaire a mis. Je ne voy pourtant pas encor la chose assez clairement, par ce que si je le voyois dans la derniere simplicité, je devois estimer combien un point gagné m'avance en nostre cas et combien un point perdu avance mon adversaire. Il faut voir si on peut expliquer la chose ainsi. Je gagne un certain nombre de points et en raison de ces points j'ay un droit acquis sur l'argent de mon adversaire; je conte comme si mon adversaire n'avoit rien gagné; car ce qu'il aura gagné sera conté apart sur mon argent; et nous pouvons faire comme si à chaque coup nous payions autant que chacun a de droit acquis sur son adversaire, et nous verrions au bout du conte, le quel auroit gagné. Je gagne dont  $g$  points, il me restent à gagner  $p - g$  points, l'apparence de les gagner est en raison reciproque des points à gagner car la difficulté croist avec le nombre, dont la facilité décroist avec le nombre (+ il faut pourtant demonstrier cecy rigoureusement +). rigoureusement +). Mais

2 estre (1) à la somme (2) divisé  $L$  5 posons qve (1) l'un s'oblige (2) les obligations  $L$   
 6 f. manifeste qv' (1) en ce cas tout révenant à rien (2) à lors ... d'egalite; (a) chacun reprend (b) il n'y a  $L$  13 de | ses ändert Hrsq. | points  $L$  14 f. conte (1) si mon adversaire n'avoit rien gagné; car si (2) comme  $L$  20 rigoureusement +). (1) donc l'apparence de gagner est a  $g$  (2) (-) (3) Au contraire (4) Mais  $L$

---

2 divisé: Die hier aufgestellte Teilungsregel für einen Spielstand von  $g : f$  im Augenblick des Abbruchs lässt sich auch mit der Formel  $(p + g - 2f) : (p - g)$  wiedergeben. Diese erste Leibniz'sche Teilungsregel erfüllt die drei genannten Mindestanforderungen an eine „faire“ Aufteilung. 15 conté apart: Die folgenden Überlegungen betrachten die von einem Spieler gewonnene Anzahl an Runden separat und unabhängig von der Anzahl an Runden, die sein Gegner gewonnen hat. Leibniz erwägt dabei verschiedene Vorschriften, dieser Anzahl jeweils einen Anteil des Gewinns zuzuordnen. Schreibt man die Gewinnanteile hintereinander auf, bilden sie, je nach Vorschrift, eine umgedrehte harmonische Folge, eine arithmetische oder eine geometrische Reihe. Allerdings erfüllen Teilungsregeln, die auf einer solchen Getrenntbetrachtung basieren, die zweite Mindestbedingung nicht, da sie dem Verlierer des gesamten Spiels regelmäßig einen Teil des Einsatzes seines Gegners zusprechen.

cela ne me dit pas encor combien j'auray. Car il faut deux termes pour faire cette raison reciproque, et d'où prendrons nous l'autre terme; si j'avois gagné  $g + 1$  points il reste  $p - g - 1$ ; l'apparence de gagner tout au premier cas, est à l'apparence de gagner tout au second cas comme  $\frac{1}{p - g}$  est à  $\frac{1}{p - g - 1}$ , ou comme  $p - g - 1$  à  $p - g$ . Et enfin si  
 5 j'avois gagné tous les points quasi comme si le nombre des points gagez estoit  $g + \beta$ , et la difference entre  $p$  et  $g + \beta$  quasi nulle, l'apparence de gagner tout en cas des points  $g$  gagez est à l'apparence de gagner tout, ou d'amener mon argent, en cas des points  $g + \beta$  gagez, comme  $p - g$  est à  $p - g - \beta$ ; c'est à dire si  $p - g - \beta \geq 0$ , l'apparence de gagner en cas de tous les points gagez, sera à l'apparence de gagner tout en cas de  
 10 quelques points gagez, comme quelque chose à rien, ce qu'*(i)* est inepte. C'est pourquoy il y a encor du manquement la dedans, et comme la chose est tres considerable, il est important de l'examiner à fonds.

---

11 *Am unteren Seitenrand:* Voyez 7 Janvier 1676 partie II<sup>de</sup>

1 j'auray. (1) Car l'apparence de gagner  $p - g$  est (2) Car  $L$  2f. il reste  $p - g - 1$  erg.  $L$   
 4 comme (1)  $\frac{1}{p - g - 1}$  est à  $\frac{1}{p + 1}$  (2)  $\frac{1}{p - g}$   $L$  5 comme si (1)  $p - g - 1$  (2) le nombre  $L$   
 6 tout erg.  $L$  8  $p - g - \beta$ ; (1) donc (2) c'est ...  $\geq 0$ . (a) comme (b) l'apparence  $L$

---

**25,19** difficulté: Bei *facilité* und *difficulté* handelt es sich um zwei weitere Schlüsselbegriffe des Stückes. Leibniz definiert sie jedoch nicht explizit, sondern arbeitet mit einem impliziten Verständnis, das er für evident hält. Diesem zufolge verhält sich die *difficulté*,  $r$  Runden zu gewinnen, zu der *difficulté*,  $s$  Runden zu gewinnen, wie  $r : s$ , und das Verhältnis der entsprechenden *facilités* zueinander beträgt  $\frac{1}{r} : \frac{1}{s}$  bzw.  $s : r$  (vgl. Z. 2–4, S. 30 Z. 9f. u. S. 38 Z. 14f.). In S. 27 Z. 10 führt Leibniz zudem den Begriff *des-apparence* als Synonym für *difficulté* ein, und in S. 30 Z. 9f. gebraucht Leibniz *facilité* und *apparence* als Synonyme. Meist verwendet er *apparence* im vorliegenden Stück aber im oben genannten, weiter gefassten Sinn. 4  $p - g - 1$  à  $p - g$ : Diese Aussage ergibt sich aus dem Konzept der *facilité*. Das Verhältnis zweier Wahrscheinlichkeiten zueinander wird durch sie im Allgemeinen jedoch nicht zutreffend beschrieben. Notiert man die *facilités* hintereinander, erhält man eine Reihe, die einer umgedrehten harmonischen Folge sehr ähnelt. Die Glieder dieser Reihe geben die relativen Gewinnanteile, die dem Spieler im Abhängigkeit vom Punktestand zugesprochen werden, wieder. Der Sieg in einer Runde führt hierbei zu einem jeweils größeren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings wird dem Spieler bereits ein Gewinnanteil zugesprochen, bevor er überhaupt eine Runde gewonnen hat (vgl. auch S. 30 Z. 14–16). Problematisch ist zudem, wie Leibniz im folgenden bemängelt, die Zuteilung für den Fall  $g = p$ .

7 Janvier 1676.

Partie II<sup>de</sup>

Il ne faut donc pas dire que les apparences de gagner sont en raison reciproque des points qui restent à gagner pour amener l'argent, car si cela estoit, l'apparence de gagner, et par consequent le droit acquis sur l'argent de mon adversaire lors que j'ay tous les points qu'il faut, seroit à l'apparence de gagner, lors que j'ay tous les points horsmis 3, comme 3 à 0. Et par consequent celui qui a tous les points prenant tout ce que son adversaire a mis au jeu, celui qui auroit tous les points horsmis 3, n'obtiendrait rien. Donc il ne faut pas faire les apparences en raisons reciproques des points à faire. Mais plustost les des-apparences ou les difficultez, en raisons directes des points qui restent à faire. Et les des-apparences sont proportionnelles à ce qui reste de droit à mon adversaire, sur son argent. Et les points qu'il a à faire, sont la des-apparence qu'il y a qu'il conserve son argent, et par consequent elles sont proportionnelles au droit qu'il a perdu. Donc: ayant gagné ( $g$ ) points, et ayant à gagner  $p - g$  points, il ne faut que dire que l'argent de mon adversaire doit estre partagé en 2 parties dont l'une est à l'autre comme  $g$  à  $p - g$ , et la partie comme  $g$  m'appartiendra. Jusques icy j'ay supposé que mon adversaire n'ait rien gagné. Ainsi supposons que j'aye gagez  $g$  points et que j'en doive gagner  $5p$  pour

9 il | ne *erg. Hrsg.* | faut (1) dire qve (2) pas faire  $L$  11 proportionnelles (1) aux (2) non pas au (3) à ce qvi  $L$  12 argent. (1) Dont ayant fait ( $g$ ) points (2) Et les  $L$  14 gagné (1) p (2) ( $g$ ) points  $L$  17-28,4 gagné. (1) Apresent contons ce qv (2) Ainsi ... gagez |3 *ändert Hrsg.* | points et qve j'en (a) faille (b) doiuee ... du party (aa) gagnant le (bb) et qv'il ait mis (aaa) 5 (bbb) 10a, je gagne (aaaa) 3g, donc son argent doit estre divisé en 2 parties 3g. et (aaaaa) 5g (bbbbb) 5p - 3g (aaaaaa) et j'aurois  $\frac{3ga}{5p - 3g}$ . et il luy resteront (bbbbbb) Sçavoir a  $\pi \frac{3ga + 5p - 3ga}{5p}$  (bbbb) 1g, donc ... Sçavoir (aaaaa) a  $\pi \frac{1ga + 5pa - 1ga}{5p}$ , et j'auray  $\frac{1ga}{5p}$ . il luy resteront  $\frac{5pa - 1ga}{5p}$  (bbbb) 10a  $\pi \frac{1g10a + 5p}{5p}$  | 10 *erg. Hrsg.* | a - 1g10a  $L$

2 Partie: Die Gliederung des Stückes in drei Teile ist nicht inhaltlich, sondern durch die Papierträger begründet. Jeder Teil entspricht dem auf einem der drei Träger niedergeschriebenen Text. Tatsächlich endet der erste Teil mitten im Satz nach „comme la chose est tres considerable“ und der zweite beginnt mit „il est important“; der besseren Lesbarkeit halber wird hier der gesamte Satz im ersten Teil wiedergegeben. 4 restent: Wendet man den hier verworfenen Ansatz, zwei *facilités* zueinander ins Verhältnis zu setzen, nicht auf die Gewinnanteile des einen Spielers, sondern auf den Spielstand  $g : f$  an, so erhält man eine besonders einfache und alle Mindestbedingungen erfüllende Teilungsregel, nämlich die Teilung im Verhältnis von  $(p - f) : (p - g)$ . (Vgl. auch S. 37, Anm. zu Fig. 4.)

amener tout, mais que nous convenions, de nous payer à chaque coup à proportion du party et qu'il ait mis  $10a$ , je gagne  $1g$ , donc son argent doit estre divisé en 2 parties  $1g$ , et  $5p - 1g$ . Sçavoir  $10a \propto \frac{1g 10a + 5p 10a - 1g 10a}{5p}$ , et j'auray  $\frac{1g 10a}{5p}$ , il luy resteront  $\frac{5p 10a - 1g 10a}{5p}$ . Je gagne encor  $1g$ , donc c'est comme si nous recommencions et s'il

5 n'avoit mis au jeu que  $\frac{5p 10a - 1g 10a}{5p} \propto R$ , qui luy restent, donc au lieu de  $\frac{1g 10a}{5p}$  que j'avois gagné auparavant, je gagneray  $\frac{1gR}{5p}$ . C'est à dire je gagneray  $\frac{1g 5p 10a - 1g^2 10a}{25p^2}$  au deuxieme coup et la somme des deux coups gagnez sera:

$$\frac{25p^2 10a \left( -5p 1g 10a + 1g 5p 10a \right) - 1g^2 10a}{25p^2}$$

10 Donc si je ne m'estois pas fait payer au premier coup, et si j'avois attendu jusqu'au 2<sup>me</sup>, et si alors le jeu avoit esté rompu, il faudroit que j'eusse gagné la meme somme, que

---

7 *Zwischen die Zeilen gesetzte Anmerkung:* (Erreur: on ne peut pas comme cela conter sur les restes, voyez la 3<sup>me</sup> partie.)

4 donc (1) <en> (2) je gagneray (3) c'est  $L$     5  $\propto R$ . *erg. L*

---

11,17  $5p$ : Lies „im Beispiel 5, im Allgemeinen  $p$ “.  $10a$  oder  $1g$  sind entsprechend zu interpretieren. 6  $\frac{1gR}{5p}$ : Da der Spieler nach  $g$  gewonnenen Runden nur noch  $(5p - g)$  weitere gewinnen muss, um den Gesamtsieg zu erringen, stünde ihm beim Gewinn weiterer  $g$  Runden folgerichtig ein zusätzlicher Anteil von  $\frac{1gR}{5p - g}$  zu. Dies entspricht eben  $\frac{1g 10a}{5p}$ ; der hier verfolgte Ansatz, welcher jede gewonnene Runde mit einem gleichen Teil des Gewinns belohnt, wird also im folgenden mit einem untauglichen Argument verworfen. In der bereits in Hannover verfassten Schrift *De incerti aestimatione* kehrt Leibniz im September 1678 zu diesem Ansatz einer arithmetischen Reihe zurück (vgl. VI, 4 N. 34, S. 101 Z. 10

bis 12). 8  $\frac{25p^2 10a \left( -5p 1g 10a + 1g 5p 10a \right) - 1g^2 10a}{25p^2}$ : Das Ergebnis der Addition lautet konsequent gerechnet  $\frac{2g 5p 10a - 1g^2 10a}{25p^2}$ . Der Fehler fällt nicht mehr ins Gewicht.

je gagne en me faisant payer chaque deux coups. Voila une belle preuve de ces sortes de raisonnemens mais selon nostre regle, j'aurois gagné  $\frac{2g\ 10a}{5p}$ , ce qui est bien different de  $\frac{25p^2\ 10a - 1g^2\ 10a}{25p^2}$ . C'est pourquoy pour venir à bout d'une question aussi difficile que cellecy; je vois qu'il faut proceder tout autrement. Et tous ces sauts aux proportionalitez ne sont que des sophismes, qui nous doivent estre suspects. Et je vois par là qu'Euclide a eu raison de demonstrier rigoureusement les theoremes des triangles semblables et choses semblables. Voila la veritable methode, à ce que je crois. 5

Le nombre des points qu'il faut gagner est  $p$ . L'argent que mon adversaire a mis au jeu est  $a$ . Supposons que je ne mette rien de mon costé car cela peut arriver; et mon adversaire peut conter le plaisir qu'il a de jouer contre moy, pour quelque chose. Quoyqu'il y ait de la difficulté, car c'est alors plustost un prix proposé, s'il faut que je gagne dans un temps prefix et s'il n'y a point de temps, c'est un salaire, car humainement parlant je ne manqueray jamais de gagner que si nous mettons de deux costez, on peut concevoir l'un comme salarié de l'autre; et le salaire cessera lors que l'un de deux aura fait un certain nombre: mais cela n'est pas dans notre cas; donc cette supposition ne servira de rien. 10 15

Je reviens tousjours à cela, qu'ayant gagné 1 coup, ou 1 point, j'ay gagné quelque chose. Appellons cela  $l$  (*lucrum*). Mon adversaire a mis  $a$  sur la table, je gagne de son argent  $l$  le premier coup, donc il reste  $a - l$ , l'argent qui est sur la table que nous appellerons  $(a)$ , donc le second coup je gagneray  $(l)$  qui seroit à  $l$  comme  $(a) \cap a - l$  est à  $a$ . C'est à dire  $(l) \cap \frac{al - l^2}{a}$ . Et ainsi autant de fois qu'il y a des unitez en  $p$ , et la 20

6 demonstrier (1) Geometriq (2) rigoureusement les (a) proportions (b) les (c) theoremes L  
 18 l. (*lucrum*). (1) Donc l'argent gagné (2) Mon adversaire L 19 a - l. (1) pour le second (2) je  
 gagne le second coup (3) l'argent L 20 appellerons (1) l (2) a (3) (a) donc ... gagneray | (L) ändert  
 Hrsg. | qvi seroit à | L ändert Hrsg. | comme L 21 c'est a dire (1) L  $\cap$  a<sup>2</sup> - al (2) (l)  $\cap$   $\frac{al - l^2}{a}$  L

---

6 demonstrier: Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, VI.

somme de tous les  $l$ , ( $l$ ) doit estre egale à  $a$ , ou  $a \cap l + (l) + ((l))$  etc. Mais cela suppose une chose dont je ne suis pas bien seur, sçavoir que je gagne autant à proportion par le second coup sur l'argent qui reste apres celui j'ay emporté par le premier coup; que j'ay gagné au premier coup sur tout l'argent de mon adversaire, ce qui n'est pas. Mais  
 5 voila ce qu'on peut dire: j'ay emporté une certaine partie de l'argent de mon adversaire le premier coup: par exemple  $l$ . Il reste donc  $a - l$ . Donc apres cela, c'est comme si mon adversaire avoit mis sur la table  $a - l$ , à gagner en 4 points. Supposons que je ne mette rien, et que mon adversaire mette de l'argent  $a$ , à gagner en 5 points consecutifs; or je suppose que la facilité de gagner en 5 points consecutifs, est à l'apparence de gagner  
 10 en 4 points consecutifs en raison reciproque du nombre des points. Ce principe estant posé, nous calculerons le party en cas qu'on laisse le jeu imparfait: Le nombre des points à gagner est  $p$ , l'argent mis est  $a$ . Je gagne un coup, ou 1 point, et je gagne par là quelque chose que nous appellerons  $l$ . Donc il reste  $a - l$ : à gagner en  $p - 1$  points. Il faut considerer icy une chose estrange, qui est, que cette condition estant accordée,  
 15 il m'appartient quelque chose si un cas survenant m'empechoit de commencer même à jouer; car j'ay tousjours un droit acquis et il est possible que je gagne. Et il est assez difficile d'estimer la probabilité qu'il y a que je gagne 5 fois consecutives à la probabilité

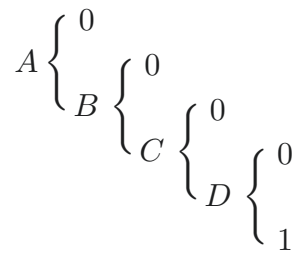
1 somme (1) |de *nicht gestr.*| tous, doit estre égale à  $a$ . (2) de tous les  $l$ . | (1) *erg.* | doit  $L$   
 2 à proportion *erg.*  $L$  5 emporté (1) un certain argent (2) une certaine  $L$  9 qve la (1) difficulté  
 (2) facilité  $L$  11 imparfait: (1) Ayant gagné 1 point il est assuré (2) Le nombre  $L$  17 qve je (1)  
 trouue (2) gagne  $L$

1  $a \cap l + (l) + ((l))$ : Leibniz legt hier den jeweils erreichten Gewinnanteil über eine geometrische Reihe fest. Der Sieg in einer Runde führt dabei zu einem jeweils kleineren Zuwachs als ein Sieg in der vorangehenden Runde. Allerdings konvergiert die von ihm definierte Reihe — unabhängig davon, wie groß der Anteil  $l$  von  $a$  gewählt wird — gegen  $a$ . Damit ist jede ihrer Partialsummen kleiner als  $a$ . Eine Teilungsregel, die auf dieser Reihe basiert, kann also die zweite der Mindestbedingungen (dass der Gesamtsieger den gesamten Gewinn erhält) niemals exakt erfüllen. 17 probabilité: Auch die *probabilité* wird in diesem Stück als Größe angesehen, die nicht absolut zu betrachten ist, sondern ihre Bedeutung als Teil eines Zahlenverhältnisses erhält. Zwar hat Leibniz bereits 1665 in seiner *Disputatio de conditionibus posterior* (in einem rechtstheoretischen Zusammenhang also) eine Vorform eines genormten Wahrscheinlichkeitsmaßes entwickelt: Der *conditio impossibilis* ordnet er dort die 0 zu, der *conditio necessaria* die 1 und der *conditio incerta* einen Bruch zwischen 0 und 1 (vgl. VI, 1 N. 6 S. 139; ganz ähnlich auch in den *Specimina juris* von 1667–69, ebd., N. 11 S. 420). Hier knüpft er an diesen Gedanken jedoch nicht an. 17 5 fois consecutives: Das im Anschluss behandelte Beispiel verlangt nur vier in Folge zu gewinnende Runden. Es ist als Zusatzspiel im Rahmen des eigentlichen Spiels konzipiert. Eine vergleichbare Anforderung besteht aber auch etwa bei einem 0 : 3-Rückstand und vier Gewinnrunden.



qu'il y a que je perde une seule fois. Au premier jeu il est aussi probable que je perde que, que je gagne, donc une probabilité pour mon adversaire, l'autre est encor incertaine, car ayant gagné, il est encor aussi probable que je perde le second jeu, qu'il n'est probable que je le gagne; donc encor 1 degrez de probabilité assureé pour mon adversaire, l'autre controversé entre luy et moy, car ayant gagné le second jeu, je peux encor ou perdre le troisieme, ce qui est assureé pour mon adversaire, ou le gagner, ce qui est controversé entre moy et l'adversaire, et ainsi tousjours, jusqu'au dernier qui m'asseure de la victoire,  $D \sqcap 0 \infty 1$ .

5

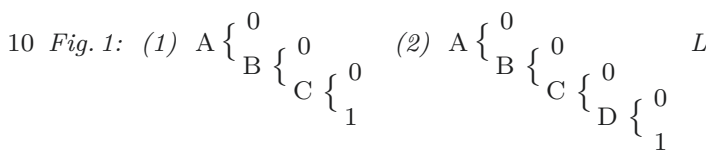


[Fig. 1]

10

$\infty$  est signum disjunctivi, aut, quo nondum in calculo usi sumus.  $C \sqcap 0 \infty D \sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\bar{0} \infty 1$ .  $B \sqcap 0 \infty C \sqcap 0 \infty 2\bar{0} \infty 1 \sqcap 3\bar{0} \infty 1$ . Et  $A \sqcap 4\bar{0} \infty 1$ .

2 gagne, (1) dont (2) donc ayant gagné, (3) donc  $L$  2 l'autre (1) pour moy (2) est encor  $L$   
 3 qve je (1) gagne le second jeu, (a) qve (b) qv'il n'est probable qve je perde; (2) perde  $L$  4f. encor  
 1 | degrez ... assureé erg. | pour ... , l'autre (1) pour moy (2) controversé  $L$  5-7 jeu, | il peut ändert  
 Hrsg. | encor ... pour | son ändert Hrsg. | adversaire, ... entre | luy ändert Hrsg. | et ... qvi | l' ändert  
 Hrsg. | assuree  $L$  7f. victoire, (1)  $C \sqcap (a) 0 - 1$ . (b)  $0 \infty 1$   $\infty$  est signum disjunctivi |, aut erg. |,  
 qvo nondum in calculo usi sumus.  $B \sqcap 0 \infty C \sqcap 0 \infty 0 \infty 1 \sqcap 2\bar{0} \infty 1$ . A (2)  $D \sqcap 0 \infty 1$   $L$



10 Fig. 1: In diesem Schema lässt sich jede geschweifte Klammer als einzelne Spielrunde betrachten, A stellt den Spielstand zu Beginn des Zusatzspiels dar (vgl. S. 35 Z. 3), B, C und D sind Zwischenstände, bei denen es fortgesetzt wird, und 0 und 1 sind die möglichen Endresultate. Dabei bedeutet 1, dass der Spieler eine Serie von vier Runden in Folge gewonnen hat, 0 dagegen, dass ihm dies nicht geglückt ist. Ein fast identisches Zerlegungsschema findet sich als fragmentarische Notiz in dem ebenfalls im Januar 1676 verfassten Stück *De numero jactuum in tesseris* (N. 10 S. 59 Z. 16 f).

Donc  $4p$  points estant proposez à estre gagnez consecutivement, l'apparence de les gagner à celle de ne pas gagner au commencement du jeu, est comme 1 est à  $4p$ . Ainsi

2 à celle ... gagner *erg. L* 2 comme (1)  $4p$  est à 1. (2) 1. est à  $4p$ . (a) Rappeler (b) ainsi *L*

**31,11** signum disjunctivi: Leibniz verfolgt das Programm, nach den Regeln einer *ars characteristica* universell einsetzbare Zeichen zu bilden. Das neu geschaffene Symbol  $\infty$  steht jedoch nicht allgemein für *aut* (... *aut*), also exklusives „oder“ (wofür die moderne Logik verschiedene Symbole kennt, etwa  $\underline{\vee}$  oder  $\oplus$ ), sondern es hat eine engere Bedeutung: Es stellt die einander ausschließenden Ausgänge einer Spielrunde nebeneinander. Dabei stehen links wie rechts des Symbols jeweils als gleichwahrscheinlich betrachtete Möglichkeiten; seine symmetrische Gestalt versinnbildlicht dieses Gleichgewicht. Das Symbol  $\infty$  kann in eine Reihe mit den *signa ambigua* gestellt werden, wie sie Leibniz Mitte 1674 in seinen Schriften zur *méthode de l'universalité* (VII, 7 N. 10 u. 11) definiert. Auch bei diesen gibt es exklusive Fallunterscheidungen, die sich weiter aufzweigen. So steht etwa das Symbol  $\mp$  für die Aussage „im einen Fall +, im anderen Fall entweder – oder +“ (vgl. VII, 7 N. 11 S. 124). Noch zwei Jahrzehnte später nennt Leibniz *notae ambiguitatis* und *notae disjunctivorum* im selben Atemzug (vgl. Leibniz an Wernher, 6./16. Oktober 1697; III, 7 N. 148 S. 598).

**31,11**  $C \sqcap 0 \infty D$ : In den zum Schema aufgestellten Gleichungen haben die Größen  $A$  bis  $D$  andere Bedeutungen als im Schema selbst. Sie stehen nicht mehr für einen Spielstand, sondern für die Gesamtheit der als gleichwahrscheinlich vorausgesetzten Ausgänge, die sich aus diesem Spielstand ergeben können. Sie geben somit eine Art Erwartungswert an. Die Kurzschreibweise  $C = 2\bar{0}\infty 1$  für  $C = 0\infty 0\infty 1$  behandelt die Gleichung, als ob sie äquivalent zu  $C = (0\infty 0)\infty 1$  wäre; tatsächlich steht sie aber für  $C = 0\infty(0\infty 1)$ , was aufgrund der fehlenden Assoziativität der durch  $\infty$  begründeten Verknüpfung nicht das Gleiche ist. In der Folge zählt die Kurzschreibweise nur die ungünstigen Endresultate und stellt sie dem einen günstigen Endresultat gegenüber. Bei der Betrachtung von Wahrscheinlichkeiten führt sie in die Irre (vgl. Z. 2), da sie nicht zwischen den einzelnen ungünstigen Endresultaten, die jeweils unterschiedlich wahrscheinlich sind, differenziert.

1  $4p$ : Lies „im Beispiel 4, im Allgemeinen  $p$ “. 2 1 est à  $4p$ : Leibniz übersetzt die Gleichung  $A = 4\bar{0}\infty 1$  in die unzutreffende Aussage, dass vom Spielstand  $A$  ausgehend das Endresultat 0 (Misserfolg) viermal so häufig auftrete wie das Endresultat 1 (Erfolg). Noch im selben Monat gelangt er an anderer Stelle aber zu einem korrekten Ergebnis: Unter dem Zerlegungsschema in N. 10 (S. 59 Z. 17) notiert er die Gleichungen  $D = \frac{1}{2}$ ,  $B = \frac{1}{4}$ ,  $C = \frac{1}{8}$  und  $A = \frac{1}{16}$  (in jenem Schema sind  $B$  und  $C$  vertauscht).

Die Größen  $A$  bis  $D$  erhalten dabei erneut eine andere Bedeutung; sie lassen sich als Erwartungswert des Zusatzspiels interpretieren, wenn der mit dem gleichen Buchstaben bezeichnete Spielstand erreicht worden ist. Der Erwartungswert (*valor expectationis*, eingeführt von Chr. HUYGENS, *a. a. O.*, 1657, S. 521 f.) ist ein Konzept, mit welchem Leibniz auch zweieinhalb Jahre später in *De incerti aestimatione* arbeitet. Dort berechnet er ihn für den Spielstand 1 : 0 und zwei Gewinnrunden

über den Ansatz  $\frac{\frac{1}{2} + 1}{2}$  (vgl. VI, 4 N. 34 S. 100 Z. 4–6). Die Gleichungen in N. 10 lassen sich leicht auf analogem Wege aus den oben aufgestellten Gleichungen erhalten, indem man die Notation  $D = 0\infty 1$  in

$D = \frac{0 + 1}{2}$  umschreibt, dann  $C = 0\infty D$  in  $C = \frac{0 + \frac{1}{2}}{2}$  überführt und entsprechend fortfährt.

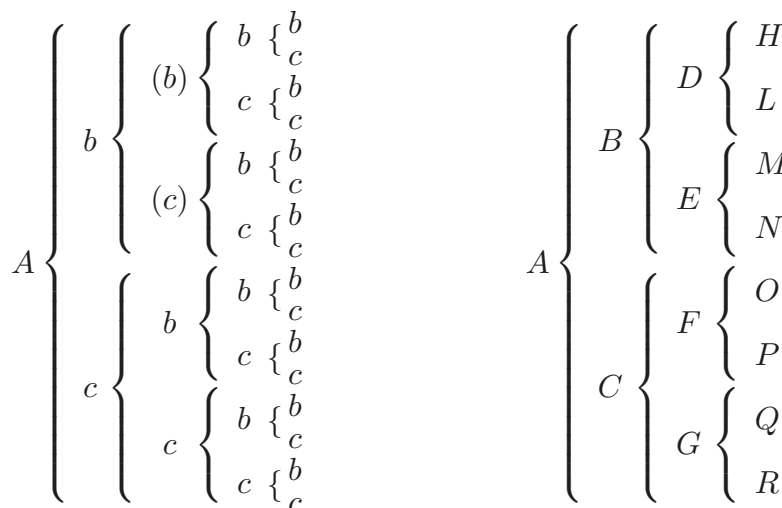
celuy qui joue, a au commencement  $\frac{1}{p}$  de la somme proposée. Le Reste est a u j e u , c'est à dire, commun aux deux joueurs, s'il[s] les ont mis tous deux; ou à celui qui a mis cet argent: celui qui a gagné 1 point consecutif a  $\frac{1}{p-1}$  de la somme proposée, celui qui a 2 points consecutifs, a  $\frac{1}{p-2}$  de la somme proposée. Donc la question se peut concevoir ainsi: deux joueurs mettent chacun une somme egale au jeu, à condition, que 5  
celuy qui gagnera un certain nombre de coups consecutifs, par exemple 4, gagnera tout. Par exemple jouant triomphe, ils demeurent d'accord apart, que celui qui pendant le jeu principal gagnera le premier quatre fois consecutives, tirera outre ce qu'il gagne au jeu principal, une certaine somme qu'ils ont mise pour cet effect. Il s'agit de sçavoir le party 10  
qu'il faut faire de cette somme, lors que [le] jeu cesse, selon le nombre des points que celui qui a gagné le dernier a gagné. Cette condition a cela de remarquable qu'on ne sçauroit finir que l'un de deux n'emporte quelque chose de la somme. Car celui qui a gagné le dernier a détruit tout ce que l'autre a fait. Et ainsi, n'ayant qu'un point pour le moins

3 argent: (1) aux deuxième coup (2) celui qui a gagne (a) deux points consecutifs (b) 1 point L  
6 exemple 4. (1) amenera (2) gagnera L 7 f. celui qui (1) aura le premier (a) 5 (b) 4 (2) pendant le jeu principal (a) aura le premier (b) gagnera L 8 f. outre ... principal erg. L 9 sçavoir (1) si (2) combien (3) le party L 11 dernier a (1) amené (2) gagné L 12 finir (1) (dans les jeux ou pas un ne peut passer (2) que l'un L

---

4 consecutifs: Die hier beschriebene Zuteilung der Gewinnanteile folgt unmittelbar aus der unzutreffenden Annahme, die Häufigkeit eines Misserfolgs sei, wenn  $p$  Siege in Folge gefordert sind,  $p$ -mal so hoch wie die eines Erfolges. Konsequenterweise müsste der Spieler allerdings mit einem Anteil von  $\frac{1}{p+1}$  (und nicht von  $\frac{1}{p}$ ) starten. Die Gewinnanteile im Zusatzspiel entsprechen dann den Gliedern einer umgedrehten harmonischen Folge. Die Frage nach dem „fairen“ Einsatz für ein solches Spiel — die Leitfrage von N. 10; vgl. S. 71 Z. 1–4 — greift Leibniz an dieser Stelle nicht auf, obwohl sein Ergebnis eine Antwort impliziert. 7 triomphe: Dieses einfache, in zeitgenössischem Deutsch als „Trumpffspiel“ bezeichnete Kartenspiel ist zu jener Zeit in Frankreich populär; die Zahl der Spieler ist variabel (vgl. LA MARINIÈRE, *La maison des jeux académiques*, 1665, S. 43–45). Es existiert auch eine Variante für genau zwei Spieler (vgl. ebd., S. 46). 8 quatre fois consecutives: Durch die geänderten Bedingungen des Zusatzspiels — es ist nun symmetrisch angelegt, wird bei Misserfolg fortgesetzt und als Endresultat ist auch ein Unentschieden möglich — wird ein ganz neues Problem gestellt. Die geänderten Bedingungen und insbesondere der zusätzlich zu berücksichtigende Parameter machen die Berechnung der Gewinnchancen deutlich aufwändiger.

lors que le jeu cesse, il luy appartiendra à proportion. Question: deux joueurs mettent ensemble une somme egale, qui sera à celui qui aura gagné quatre fois consecutives au jeu principal. Il s'agit de sçavoir combien de la somme appartiendra à celui qui aura gagné le dernier un certain nombre de coups consecutifs, lors qu'on se separe sans avoir  
5 achevé le nombre qui luy faut.



[Fig. 2]

1 f. proportion. (1) Lors que la condition (2) question deux joueurs mettent (a) une somme (b) ensemble ... egale, (aa) pendant (bb) qvi L 2 fois | consecutifs ändert Hrsg. | (1) dans le jeu (2) au jeu L 3 combien (1) aura gagné celui (2) de la somme L 4 le dernier erg. L 5 nombre (1) qv'il faut (2) qvi L

4 le dernier: Man betrachte als Beispiel ein Spiel, in welchem für das Hauptspiel sechs Gewinnrunden vereinbart worden sind und für das Zusatzspiel vier Gewinnrunden in Folge. Wird das Hauptspiel nun beim Stand von 2:2 abgebrochen, wobei der eine Spieler die beiden letzten Runden gewonnen hat, so würde die in Z. 1 angeregte Teilung à proportion nahelegen, dass der Einsatz im Verhältnis 3:1 zu seinen Gunsten zu teilen wäre. Tatsächlich beträgt die Wahrscheinlichkeit eines Sieges dieses Spielers im Zusatzspiel jedoch  $\frac{39}{128}$  und die seines Gegners  $\frac{12}{128}$ ; eine „faire“ Aufteilung müsste also im Verhältnis 155:101 erfolgen. 7 Fig. 2: Mit diesem Schema, das einem modernen Baumdiagramm sehr ähnlich ist, nimmt Leibniz nun auch die weiteren möglichen Spielverläufe in den Blick. A lässt sich auch als jener Spielstand interpretieren, bei dem ein Spiel, in welchem maximal noch vier bzw. drei Runden zu spielen sind, abgebrochen werden muss.

S'ils la mettent de sorte que celui qui gagne le premier quatre fois; la peut prendre; alors, on peut faire de même: Car en 2 fois autant de jeux, qu'il y a de points demandés; l'un des deux doit gagner:  $A$  est l'estat au quel on commence le jeu. Puisque le nombre des jeux necessaires à chacun est  $p$ , le nombre des jeux qui doivent determiner la chose est  $2p$ . Et chaque jeu est  $b \infty c$ , *id est* favorable à la personne  $b$  ou à la personne  $c$ , également. Il y aura donc:  $2p \overline{b \infty c}$  au commencement c'est à dire  $2pb \infty 2pc$ . Mais  $(g)$  jeux estant gagnés par  $b$ , le nombre des jeux qui restent est  $2p - g$ . Le nombre des jeux qui restent à gagner à  $b$  est  $p - g$ . Le nombre des jeux, qu'il faut que  $c$  gagne est  $p + g$ . Or il peut arriver par autant de manieres differentes que  $b$  gagne, qu'il y a de  $\text{com}(\overline{p - g})$ naisons dans le nombre  $2p - g$ , considerant, qu'il peut gagner chaque jeu; car ainsi il peut autant de fois gagner ces  $p - g$  jeux qui luy restent, qu'on peut prendre differentes fois le nombre de  $p - g$  dans  $2p - g$  choses. De même accordant à l'autre  $c$ , aussi, qu'il peut gagner chaque jeu, comme il doit gagner  $\overline{p + g}$  fois pour tirer l'argent. Mais je trouve encor un paralogisme là dedans, il ne faut pas examiner combien des fois il peut gagner le nombre des jeux qui luy restent, dans le nombre des jeux qui restent à jouer; mais combien des fois il les peut gagner le premier, par exemple dans le nombre  $2p - g$ . Combien des fois on peut conter  $p - g$  pour l'un avant qu'on ait conté  $p + g$  pour l'autre. Soit le nombre des jeux qui restent à jouer  $2p - g \cap 5$ , le nombre des jeux que l'un doit gagner  $p - g$ , le nombre des jeux que l'autre doit gagner n'est pas  $p + g$  comme j'avois dit, mais encor  $p$ , s'il n'a rien gagné, et  $p - f$ , s'il en a fait  $f$ .

2 alors, (1) il faut (2) on peut  $L$  2 Car (1) (en 3 fo) (2) en (a) 3 (b) 2 fois  $L$  3 f. Puisque (1) cha (2) le nombre des (a) jeux est  $2p$ . (b) jeux  $L$  5 est  $2p$ . (1) Dont il faudroit (2) Et  $L$  6 également | Dans le nombre *gestr.* |, il y aura  $L$  6 Mais (1) 1 jeu estant gagné, (2) (g) | jeu estant gagné *ändert Hrsq.* | | par  $b$  *erg.* |,  $L$  12 De même (1) consider (2) accordant  $L$  13 jeu, (1) neantmo (2) comme  $L$  14 Mais je (1) m'a (2) trouue  $L$

2 en 2 fois: Leibniz springt unvermittelt vom Zusatzspiel zurück zum Hauptspiel. Die Aussage trifft jedoch weder auf das eine noch das andere zu. 5  $2p$ : Tatsächlich hat nach spätestens  $(2p - 1)$  Runden ein erster Spieler  $p$  Siege erzielt; vgl. auch S. 18 Z. 10f. 10  $\text{com}(\overline{p - g})$ naisons: Dieser Begriff bezeichnet ungeordnete Stichproben von  $(p - g)$  Elementen aus einer gegebenen Grundmenge; vgl. N. 25 S. 159 Z. 21 bis S. 160 Z. 2. Hier sind also Kombinationen von  $(p - g)$  aus  $(2p - g)$  Elementen ohne Wiederholung, in moderner Darstellung  $\binom{2p-g}{p-g}$  an der Zahl, gemeint. Mit Fig. 4 greift Leibniz diesen Ansatz wieder auf. 18  $2p - g$ : Die Anzahl der bei einem Stand von  $g : f$  und  $p$  Gewinnrunden maximal noch zu spielenden Runden  $m$  beträgt tatsächlich  $(2p - g - f - 1)$ . Leibniz richtet in der Folge in den Figuren  $\oplus$  und 4 mehr Spalten ein als erforderlich.

$$\begin{array}{rcccccc}
 & & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\
 \oplus \left\{ \begin{array}{l} B \\ C \\ (1) \\ (2) \\ \hline (1) \end{array} \right. & \begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} b \\ c \\ b \\ c \end{array} & \begin{array}{l} \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}
 \end{array}$$

[Fig. 3]

Supposons  $p \sqcap 4$ ,  $g \sqcap 3$ ,  $f \sqcap 2$ , le nombre des jeux à jouer 5. Le nombre des jeux à gagner par  $b$ , sera 1. Le nombre des jeux à gagner par  $c$ , sera 2. Or il faut considerer  
 10 combien des fois on peut conter 1  $b$ , avant que d'avoir conté 2  $c$  dans la figure  $\oplus$ . Et on voit, que cela ne se peut qu'en deux manieres, marquées de (1) et de (2). Mais 2  $c$  ne se peut conter qu'une seule fois, en commençant par  $c c$ , avant que d'avoir dit une fois  $b$ . Donc la possibilitez de l'un est double de la possibilité de l'autre. Et l'argent tout entier qui est au jeu sera partagé en trois parties egales, dont l'un aura  $\frac{2}{3}$ , l'autre  $\frac{1}{3}$ , sans se  
 15 mettre en peine d'autre chose. Prenons un tel exemple. On a proposé une somme d'argent  $a$ , à celui de deux joueurs seuls jouans, qui gagnera le premier 5 jeux. L'un  $b$ , en ayant déjà gagné 3, et l'autre  $c$ , un seulement, il est manifeste que si  $b$  gagne 2, il aura tout; et s'il perd deux, il n'aura que la moitié de l'argent mis au jeu. Dont l'autre moitié se doit partager en deux, et l'un ayant 3, l'autre 1. Celui qui a gagné 3, aura gagné  $\frac{3}{4}$ . Ce  
 20 qui est un cas connu. Voyons si nous pouvons deriver cela de nostre principe. Le nombre

1 1 ... 5 erg. L 6  $\overline{(1) | b b}$  ändert Hrsg. | L 8 f  $\sqcap 2$ . (1) et il (a) en faut 1 point (b) faut 2 points à (2) Le nombre L 10 dans (1) les figures (2) la figure  $\oplus$  L 11–13 Mais | 2. ändert Hrsg. | ne se ... par | b b, ändert Hrsg. | avant ... fois | c. ändert Hrsg. | donc L 16 joueurs seuls jouans erg. L 16 premier (1) 6 (2) 5 jeux L 17 manifeste qve (1) s'il (2) si b (a) perd (b) gagne L 19 f. gagné (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{3}{4}$ . (a) Mais (b) Ce qvi L

13 double: Leibniz betrachtet hier die möglichen weiteren Spielverläufe bis zur Entscheidung — die *possibilités* —, zählt zusammen, wieviele davon mit einem Gesamtsieg des führenden Spielers enden und wieviele mit dem Sieg seines Gegenspielers, und setzt das Verhältnis dieser *possibilités* mit dem der *probabilités* gleich. Dies würde allerdings voraussetzen, dass jede *possibilité* mit der gleichen Wahrscheinlichkeit auftritt, was nicht der Fall ist. Tatsächlich sind die Gewinnwahrscheinlichkeiten in diesem Beispiel die gleichen wie in jenem am Anfang des Stückes (S. 18 Z. 5), wo Leibniz sie korrekt angibt.

20 connu: Leibniz bezieht sich hier auf seine unzutreffenden Überlegungen in S. 20 Z. 9–14.

des jeux à jouer au commencement estoit 10. On en a joué 4, dont *b* a gagné 3, et *c* en a gagné 1. Il en restent donc 6 à jouer, et 2 à gagner pour *b*, et 4 à gagner pour *c*. Donc ayant accordé à l'un aussi bien qu'à l'autre de gagner également chaque jeu; il faut voir quelle consequence il peut tirer de cette permission.

	1	2	3	4	5	6		
	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>	<i>b</i>		5
	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>		
(1)	<i>b</i>	<i>b</i>					(1)	<i>c</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>c</i>
(2)	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>				(2)	<i>b</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>c</i>
(3)	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>			(3)	<i>c</i> <i>b</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>c</i>
(4)	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>b</i>		(4)	<i>c</i> <i>c</i> <i>b</i> <i>c</i> <i>c</i>
(5)	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>				(5)	<i>c</i> <i>c</i> <i>c</i> <i>b</i> <i>c</i>
(6)	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>				
(7)	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>b</i>			
(8)	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>				15
(9)	<i>c</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>			
(10)	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>c</i>	<i>b</i>			

[Fig. 4]

5 1 ... 6 erg. L

18 Fig. 4: Leibniz verfolgt weiterhin den Ansatz der *possibilités*. Bei höchstens *m* noch zu spielenden Runden und einem Stand von *g* : *f* enden  $\binom{m}{p-g}$  Spielverläufe mit einem Gesamtsieg des in Führung liegenden Spielers und  $\binom{m}{p-f}$  mit seiner Niederlage. Die Aufteilung soll nun im Verhältnis dieser Zahlen erfolgen, wobei Leibniz allerdings keine Formel zu ihrer Berechnung angibt. Gekürzt ergibt sich eine Teilung im Verhältnis von  $(p - f) : (p - g)$ . Leibniz gelangt hier also auf dem Umweg über kombinatorische Erwägungen — und ohne sich dessen gewahr zu werden — zu einer der einfachsten und nächstliegenden Teilungsregeln. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen; da sie unterschiedlich wahrscheinliche Spielverläufe gleich gewichtet, erfolgt die Aufteilung allerdings im Allgemeinen nicht im Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten der beiden Spieler zueinander. Dies leistet dagegen die kanonisch gewordene Lösung von Pascal und von Fermat aus dem Jahr 1654. Fermats Ansatz dabei liegt nur einen Schritt von jenem, den Leibniz hier verfolgt, entfernt: Er ergänzt ein Schema wie das obige so, dass es sämtliche Spielverläufe, die in der maximal noch zu spielenden Anzahl an Runden möglich sind, wiedergibt (gleichgültig, ob diese Runden tatsächlich alle gespielt werden müssen, um den Sieger zu ermitteln). Diese Spielverläufe betrachtet er dabei als jeweils gleichwahrscheinlich, und er zählt zusammen, in wie vielen davon der Führende den Gesamtsieg erringen würde und in wie vielen sein Gegenspieler. Die Teilung erfolgt im Verhältnis dieser Zahlen (vgl. P. de FERMAT, *a. a. O.*, S. 184).

Donnons à la personne  $b$  le pouvoir de gagner toutes les fois qu'il veut; il ne peut gagner qu'en 10 manieres selon les loix et circomstances du jeu: donnons à l'autre le même pouvoir sur la fortune, il ne peut gagner qu'en 5 manieres differentes: dont ostant à tous deux ce pouvoir, et les remettant dans l'estat des hommes ordinaires, les apparences de  
 5 gagner, seront comme les possibilitez, et les possibilitez comme le nombre de plusieurs cas egalement possibles. Voila icy l'objection car on peut dire les differens cas ne sont pas egalement possibles. Je reponds qu'ouy, par ce qu'il y a dans l'un autant de requisits que l'autre, car dans tous les dix cas favorables à  $b$ , on ne demande que deux fois le gain de  $b$ , et dans tous les cas favorables à  $c$  on ne demande que quatre fois le gain de  $c$ . Mais  
 10 je voy par là que mon opinion avoit besoin de correction, et que un cas favorable à  $b$ , est bien plus possible qu'un cas favorable à  $c$ , par ce qu'il faut quatre succes à un cas de  $c$ , et il n'en faut que 2 à un succes favorable à  $b$ . Donc les facilitez estant en raison reciproque des nombres, et 10 estant double de 5, et 4 double de 2, l'avantage de  $b$  sera à l'avantage de  $c$ , comme 4 à 1. Il est manifeste de soy meme qu'il est plus aisé de faire  
 15 2 coups que d'en faire 4, en raison reciproque de 2 à 4. Et il est bien manifeste aussi qu'il est bien plus aisé de rencontrer une des dix manieres, que de rencontrer une des 5. Si le partage doit estre fait en deux parties qui sont en raison des apparences de gagner;

---

1 *Über* le pouvoir de gagner *gesetzte Anmerkung*: chapeau de Fortunatus

2 manieres (1) dont l'une est aussi possible qv (2) selon L 7 possibles (1) Car un cas des (2) Je reponds L 9 gain de c. (1) Donc je vois a prese (2) Mais L 15 faire 4. (1) Or qvand il y a (2) en ... de (a) 4 a 2 (b) 2 a 4. L 16 f. manieres, (1) | qve de rencontrer une des (a) 4 (b) 10 *nicht gestr.* | (2) qve de rencontrer un des (a) 4 (b) 5. (aa) Si le droit (aaa) est (bbb) acquis est egal à l'apparence de gagner; et l'apparence de gagner est en raison des cas comme (bb) Si L

---

18 chapeau: Das Wunschhütlein ist eine magische Requisite in dem ersten eigenständigen Prosaroman deutscher Sprache, dem aus unbekannter Feder stammenden *Fortunatus*. Mit Hilfe des Hutes kann sich sein Besitzer an jeden beliebigen Ort der Erde wünschen; vgl. O. V., *Fortunatus*, 1509, Bl. 60.

14 manifeste: Das Verhältnis der *facilités* zueinander beträgt  $(p - f) : (p - g)$ ; es entspricht also genau dem der *possibilités* und somit auch der oben zunächst vorgeschlagenen Teilungsregel. Da Leibniz für diese Regel jedoch keine Formel aufstellt, sondern sie nur anhand des Beispiels veranschaulicht, entgeht ihm die Übereinstimmung.



et les apparences de gagner, comme les nombres des cas également aisez, ou en raison composée du nombre des cas et de leur facilité, il est manifeste qu'il est aussi aisé que  $b$  gagne dans le premier des cas qui luy sont favorables que dans le second.

On peut considerer la meme chose lors qu'il y a plus de joueurs que deux, ce que Mons. Pascal n'a pas examiné, et qui est bien plus embarrassé. Car s'il y en a trois par exemple; il ne faut pas prendre le double du nombre des jeux à gagner, pour le nombre des jeux à jouer, mais le triple, *item* il faut faire le partage en trois parties proportionnelles aux apparences, et pour estimer les apparences il faut avoir egard à deux obstacles, par exemple non seulement venant de  $c$ , mais aussi de  $d$  troisieme joueur. On peut considerer que deux jouent, et qu'on demande d'un certain nombre de partis à l'autre, un autre; pour gagner. Il peut estre que l'un aye mis plus au jeu, dont il a quitté la propriété, pour acheter le droit de gagner en moins de coups. 5 10

1 f. gagner; (1) en raison des possibilitéz (2) comme (a) le nombre (b) les nombres des cas également (aa) possibles; ou en raison (bb) aisez, ou en raison (aaa) reciproque (bbb) recip (ccc) composée L 4 qve deux erg. L 8 egard a (1) trois (2) deux L 9 seulement (1) de (a) b, (b) c, mais aussi (2) venant L 12-40,1 acheter (1) | par *nicht gestr.* | la des (2) le droit . . . moins de (a) part (b) coups. (aa) Si (aaa) un (bbb) b aya (bb) S'il y a trois (aaa) parties, et b a gagné (bbb) poi (ccc) jeux L

1 f. raison composée: Die hier aufgestellte zweite Leibniz'sche Teilungsregel, die eine Aufteilung im Verhältnis der Produkte aus *facilité* und *possibilité* vorsieht, lässt sich mit der Formel  $(p-f)^2 : (p-g)^2$  wiedergeben. Diese Regel erfüllt die genannten Mindestanforderungen. Die von Leibniz zunächst erwogene Aufteilung im Verhältnis der *possibilités* spricht dem in Führung liegenden Spieler stets einen geringeren Anteil zu, als es der Wahrscheinlichkeit seines Gesamtsieges entspricht; die um den Faktor der *facilité* erweiterte Regel liefert demgegenüber eine bessere Annäherung an das Verhältnis der Erfolgswahrscheinlichkeiten. 5 pas examiné: Leibniz bezieht sich hier auf die genannte Abhandlung III in Pascals *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [Marg.]. Dass diese die Aufteilung unter zwei Spielern behandelt, geht aus ihrem Titel hervor. Mit der Teilungsregel, die Pascal in dieser Abhandlung auf S. III, 6 f. (= PO III, S. 488) beschreibt und welche sich mit der Formel  $\sum_{n=0}^{p-f-1} \binom{m}{n} : \sum_{n=p-f}^m \binom{m}{n}$  wiedergeben lässt, befasst sich Leibniz nicht. Die Verteilung des Gewinns unter drei Spielern diskutiert Pascal ausführlich an anderer Stelle (vgl. Pascal an Fermat, 24. August 1654, in: P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], S. 185–188). Der Inhalt dieses Briefes ist Leibniz, als er das vorliegende Konzept niederschreibt, offensichtlich noch nicht bekannt. 7 triple: Tatsächlich beträgt bei drei Spielern die maximal zu spielende Anzahl an Runden  $(3p-2)$ . 12 acheter: Bei einer solchen Vereinbarung stellt sich unmittelbar die Frage nach dem „gerechten“ Einsatz, also die Leitfrage von N. 10.

S'il y a trois jeux à gagner, et *b* en a gagné 2, *c* en a gagné 1, et si *b* gagne 1, il a tout, s'il perd un, il a la moitié de ce qui est au jeu, donc le gain d'un coup luy donnant *a* et la perte d'un coup le remettant à  $\frac{a}{2}$ , il semble que le jeu luy doit donner autant qu'il luy peut oster. Mais si ce calcul n'a point d'autre principe, il est malfondé; parce qu'il s'agit non seulement du nombre des points mais encor de la primauté. Et par même raison, on prouveroit qu'il est la même chose que deux joueurs gagnent tous deux, ou perdent tous deux en cas de jeu contesté; ce qui n'est pas icy.



[Fig. 5]

Donc selon mes principes en ce cas le party de *b* sera au party de *c*, comme 4 à 1. L'autre opinion semble estre confirmée par cecy: quand il y a autant de hazard de gagner, qu'il y en a de perdre; le droit qu'on acquireroit en gagnant, doit estre egal au droit qu'on quitteroit en perdant. Mais cette maxime n'est pas bien constante. Nous le pouvons voir. Soit trois coups à gagner; je gagne 1 coup. Et je suppose d'avoir gagné par là, *l*. Si je l'avois perdu, j'aurois perdu *l*. Avant que de jouer j'avois  $\frac{a}{2}$ . Ayant gagné le premier coup, j'ay  $\frac{a}{2} + l$ . Ayant perdu le premier coup, j'aurois  $\frac{a}{2} - l$ . Apres avoir gagné le premier coup, je gagne aussi le second coup, qui me donne (*l*). Si je l'avois perdu, j'aurois  $\frac{a}{2} + l - (l)$ . Or en ce cas, l'autre auroit gagné autant que moy, et nous serions égaux, donc j'aurois  $\frac{a}{2}$ , donc  $\frac{a}{2} + l - (l) \cap \frac{a}{2}$ , id est (*l*)  $\cap$  *l*. Donc le second coup

2 un, il (1) n'a rien, et to (2) a la moitié L 2f. gain d'un (1) point (2) coup luy donnant (a)  $\frac{a}{2}$  (b) a ... coup (aa) | luy nicht gestr. | donnant  $\frac{a}{2}$  (bb) le remettant L 3 semble qve (1) l'apparence (2) le jeu L 10f.  $\overline{b}$  | c c L 15 gagner | qvelqve chose gestr. |, qv'il ... perdre; c b | | b c c gestr. | (1) et qvand on gagne,  $\frac{a}{2}$ . (2) le droit L 16 constante. (1) Car il est assuré, qv'on peut gagner un jeu <aya> (2) Nous L 18 perdu l. (1) Si je gagne le (2) avant L 20 donne (1). | si je l'avois perdu streicht Hrsg. | si L

me fait avoir  $\frac{a}{2} + 2l$ . Il m'en osteroit autant. Il faut examiner si la difficulté de gagner une somme en trois jeux, ou 4, est proportionnelle au nombre de jeux.

On propose à  $b$  et  $c$  de gagner une somme d'argent, en sorte que celui, qui fera le premier trois jeux; l'emportera. Il est manifeste, qu'au commencement tout est égal; dont l'un a autant de droit que l'autre sur la somme proposée; et la somme est tout entiere à tous deux, parce qu'ils ne manqueront pas de gagner, l'un ou l'autre, donc la moitié appartient à chacun.

(1) $b \ b$	(1) $c \ c \ c$	$\frac{15a}{23} \ \frac{8a}{23}$	10
(2) $c \ b \ b$	(2) $b \ c \ c \ c$		
(3) $c \ c \ b \ b$	(3) $c \ b \ c \ c$		
(4) $b \ c \ b$	(4) $c \ c \ b \ c$		
(5) $c \ b \ c \ b$			
$b$	$c \ c \ c$	$\frac{9a}{10} \ \frac{1a}{10}$	15
$c \ b$			
$c \ c \ b$			
$b$	$c \ c$	$\frac{4a}{5} \ \frac{1a}{5}$	
$c \ b$			

[Fig. 6]

1 f. me (1) donne 21 (2) fait ... +21. (a) À present le troisième coup me donne ((1)), si je l'avois perdu j'aurois (b) il ... autant (aa) donc (bb) A present voyons (cc) il faut examiner (aaa) | s'il est *nicht gestr.* | aussi aisé de gagner les (bbb) si la ... trois jeux, | ou 4, *erg.* | est proportionnelle (aaaa) à la somme de la gagner (bbbb) au nombre  $L \quad 5$  somme | est *gestr.*  $L, \text{ erg. Hrsq.}$  | (1) à (2) tout  $L$

2 proportionnelle: Eine Gleichheit  $(l) = ((l))$  lässt sich auf analogem Wege nicht zeigen. Tatsächlich wird die allgemeine Forderung, dass jede einzelne Runde eines Vorsprungs einen gleich großen Zugewinn einbringen, für den Sieger also gleich viel wert sein soll, ausschließlich durch die erste Leibniz'sche Teilungsregel, formuliert in S. 25 Z. 1–4, erfüllt. Die Forderung dagegen, dass ein Spieler in einer einzelnen Runde stets ebensoviel gewinnen wie verlieren können soll (vgl. auch S. 40 Z. 14–16), dass also der Wert dieser Runde für beide Spieler gleich sein soll, wird nur durch die Teilungsregel von Fermat und Pascal erfüllt. Eine allgemeine Regel, die beide Forderungen gleichzeitig erfüllt, existiert nicht. 18 Fig. 6: In der Tabelle fehlt der sechste Spielverlauf, durch den der in Führung liegende Spieler ausgehend vom Spielstand von 1:0 bei drei Gewinnrunden gewinnen kann, nämlich  $b \ c \ c \ b$ . Dementsprechend müsste der zweiten Leibniz'schen Teilungsregel folgend der Gewinn nicht im Verhältnis von 15:8, sondern von 9:4 aufgeteilt werden. Die sich aus dem Irrtum ergebenden Zahlenwerte werden bis S. 45 verwendet.

Je suppose que  $b$  gagne 1 jeu, il restent 2 jeux à gagner à luy, et trois à gagner à son adversaire; voyons combien il y a plus d'apparence, qu'il en emporte les deux premiers, que l'autre les trois premiers. Parce qu'il faut que  $b$  gagne 2, avant que  $c$  gagne trois, voyons combien de fois cela peut arriver, que  $b$  gagne deux avant que l'autre trois, or il y a 5 manieres favorables à  $b$ , et il y en a 4, à  $c$ , donc l'apparence pour  $b$  est à l'apparence pour  $c$ , comme 5 à 4. Mais encor parce que le nombre des jeux que  $b$  demande, est au nombre des jeux que  $c$  demande comme 2 à 3, donc l'apparence est en raison de 3 à 2 et toute l'apparence est en raison composée, c'est à dire de  $\frac{5}{4}$  et  $\frac{3}{2}$ , c'est à dire comme 15 à 8. Donc divisant l'argent en 23 parties  $\frac{15a}{23}$  seront à  $b$ , et  $\frac{8a}{23}$  à  $c$ .

Supposons de plus, que  $b$  gagne aussi le second coup, il ne luy restera qu'un à gagner, et à son adversaire encor trois, donc les manieres estant comme 3 à 1, et la raison reciproque des coups aussi comme 3 à 1. Les apparences seront comme 9 à 1, c'est à dire  $b$  aura  $\frac{9a}{10}$ , et  $c$ ,  $\frac{a}{10}$  de la somme. Si  $b$  avoit perdu le second coup tout seroit revenu à l'egalité.

Supposons maintenant que  $b$  perde le 3<sup>me</sup> coup, car s'il gagne il a  $a$  tout entier. S'il perd, il luy reste 1 coup à gagner, et à son adversaire il en reste deux. Les manieres comme 2 à 1, et les coups de meme donc les avantages comme 4 à 1, et  $b$  aura  $\frac{4a}{5}$  et  $c$ ,  $\frac{a}{5}$ . Voila tous les cas possibles à trois jeux. Pour examiner cela, voyons si le meme proviendroit, en supposant qu'un homme  $b$ , gagne trois coups de suite; et qu'on luy paye chaque foy, ce qu'il peut avoir gagné de droit par ce coup. Le premier coup luy donne  $\frac{15a}{23}$

2 voyons (1) quel (2) quelle apparence il y a, qv (3) combien  $L$  2 emporte les (1) trois (2) deux  $L$  3 faut qve (1) celui (2)  $b$   $L$  8 composée, c'est à dire (1) comme 10 à (5) (2) de  $\frac{5}{4}$   $L$   
 9  $\frac{15|a \text{ erg.}|}{23} \dots \frac{8|a \text{ erg.}|}{23} L$  11 donc (1) le nombre des manieres (2) les manieres  $L$  13 Si (1) j'avois (2)  $b$  avoit  $L$  14f. l'egalité. — (1) de plus (2) Supposons  $L$  18  $\frac{a}{5}$ . (1) Ecce omnes casus  
 possibles in tre (2) voila  $L$  19  $b$  erg.  $L$

et à son adversaire  $\frac{8a}{23}$ , dont prenant  $\frac{7a}{23}$  preferablement et laissant  $\frac{8a}{23}$  au jeu, aussi bien que son adversaire, il restera au jeu  $\frac{16a}{23}$ . Et c'est comme si l'on avoit proposé à gagner  $\frac{16a}{23}$  à deux en sorte que l'un fut obligé à gagner 2 coups, l'autre à gagner trois pour l'emporter. Mais je voy apresent que ce seroit injuste comme cela, car ayant payé à celuy qui a gagné l'avantage qu'il a eu sur l'autre, il ne faut pas luy laisser encor de l'avantage, c'est pourquoy il faut que l'un gagne autant de fois que l'autre. Et on peut dire que celuy qui a gagné renonce à son coup, en recevant ce que je viens de dire. Et puisque ils sont rendus égaux, il s'agit de sçavoir, s'il faut faire en sorte que tous deux soyent obligez de gagner le residu en trois coups; ou tous deux en deux coups. Je dis que cela n'importe. Et selon la justice puisque ils sont égaux, c'est à eux de choisir la maniere qui leur plaist. Donc si encor tous deux s'obligeoient à gagner trois coups, et si on payoit tousjours son coup, à celuy qui gagneroit, continuant cecy à l'infini; la somme de toutes ses fractions infinies doit estre egale à la somme proposée toute entiere. Si tous deux s'obligeoient à gagner seulement deux coups; et  $b$  gagne le premier, il ne luy reste qu'un coup, et deux à son adversaire, donc les manieres et les coups estant doubles; l'avantage e[s]t quadruple, et par ce second coup,  $b$  aura sur  $\frac{16a}{23}$  qui reste au jeu, que nous appellerons  $(a)$ ,  $\frac{4(a)}{5}$ , et  $c$   $\frac{1(a)}{5}$ . Donc,  $b$  prendra preferablement  $\frac{3(a)}{5}$ , et il restera au jeu  $\frac{2(a)}{5} \cap \frac{32a}{5, 23}$ , le quel appartient à tous deux egalement. Si on les obligeoit de jouer tousjours à trois coups, et

1 f. adversaire  $\frac{8|a \text{ erg. Hrsq.}|}{23}, \dots \frac{7|a \text{ erg.}|}{23} \dots \frac{8|a \text{ erg. Hrsq.}|}{23} \dots \frac{16|a \text{ erg.}|}{23}$  (1) dont gagnant le second coup (2) Et  $L$  3 obligé a (1) jouer (2) gagner  $L$  4 ayant (1) donné a celuy qvi (2) payé  $L$  7 dire. (1) Et il s'agit de sçavoir si selo (2) Et puisqve  $L$  15 et les (1) nombres (2) coups  $L$

9 n'importe: Während die Entscheidung für zwei weitere Spielrunden (und anschließend eine einzelne Runde) ein Modell für das Spiel mit drei Gewinnrunden liefern kann, impliziert die Entscheidung für drei weitere Runden einen von der ursprünglichen Spielidee deutlich abweichenden, unendlichen Spielverlauf. 12 l'infini: Dieser Spielmodus entspricht letztlich dem auf S. 29 Z. 18 – S. 30 Z. 1 entwickelten Ansatz unter Ausweitung auf unendlich viele Spiele. 15 manieres: Leibniz wendet erneut seine zweite Teilungsregel an, ersetzt nun aber den Begriff *possibilité* durch *maniere*, und anstelle von *facilité* oder *difficulté* spricht er nun einfach von den benötigten *coups*.

de vendre tousjours le coup;  $b$  gagnant tousjours, il auroit premierement  $\frac{15a}{23}$ , et  $\frac{15(a)}{23}$ .

*Sed si*  $(a) \sqcap \frac{16a}{23}$ , et  $\frac{15((a))}{23}$ , *si*  $((a)) \sqcap \frac{16(a)}{23}$  *sive*  $((a)) \sqcap \frac{16, 16a}{23, 23}$ , et ainsi:  $b$  auroit

eu  $\frac{15a}{23} + \frac{15}{23}$ ,  $\hat{\wedge} \frac{16a}{23}$  „  $+$   $\frac{15}{23} \hat{\wedge} \frac{16, 16a}{23, 23}$ , et ainsi en progression geometrique perpetuelle

à l'infini. Donc  $b$  gagnant tousjours; la difference de son gain, et du tout deviendroit  
5 moindre qu'aucune grandeur assignable, c'est à dire il gagneroit tout dans un temps

infini. Or la somme de 1.  $\frac{16}{23} \cdot \frac{16^2}{23^2}$  etc. est *geometricae seriei*  $\frac{1}{1-y} \sqcap 1 + y + y^2 + y^3$  etc.

*Ergo* 1.  $\frac{16^1}{23^1} \cdot \frac{16^2}{23^2}$  etc.  $\sqcap \frac{1}{1 - \frac{16}{23}} \sqcap \frac{23}{7}$ . *Jam*  $\frac{23}{7} \hat{\wedge} \frac{15a}{23} \sqcap \frac{15a}{7} \sqcap 2a + \frac{a}{7}$ . Donc  $b$  gagneroit

plus qu'il n'y a à gagner, ce qui est absurde, donc le principe l'est aussi. Ou il faut qu'il  
aye une erreur dans le calcul. Ce que je trouve aussi.

10 7. Januar 1676.

### Partie III<sup>me</sup>

Ce qui est aussi car  $b$  a premièrement preferablement non pas  $\frac{15a}{23}$ , mais  $\frac{7a}{23}$ . Il reste  
 $\frac{16a}{23} \sqcap (a)$ . De  $(a)$  il gagne de même  $\frac{7(a)}{23} \sqcap \frac{7, 16a}{23, 23}$ , et il reste  $\frac{16(a)}{23} \sqcap \frac{16, 16a}{23, 23} \sqcap ((a))$ .

Au troisième coup,  $b$  gagne,  $\frac{7((a))}{23} \sqcap \frac{7, 16, 16a}{23, 23, 23}$ , et il reste  $\frac{16((a))}{23} \sqcap \frac{16, 16, 16a}{23, 23, 23}$ , etc.

9 *Am unteren Seitenrand:* Voyez Partie III<sup>me</sup> 7. Januar 1676

1  $\frac{15(a)}{23}$  | a streicht Hrsg. | L    2  $\frac{16, 16a}{23, 23}$  | a streicht Hrsg. | L    3 eu erg. L    4 donc (1) | la  
nicht gestr. | differ (2) b gagnant L    5 dans (1) toute l'éternité (2) un temps L    7  $\frac{23}{7} \hat{\wedge} \frac{15a}{23} \sqcap (1)$   
 $\frac{15}{7} \sqcap 2\frac{1}{7}$  (2)  $\frac{15a}{7} \sqcap 2a + \frac{a}{7}$  L    14 gagne, (1) non pas (2)  $\frac{7((a))}{23}$  L

Ainsi les gains continuels estant la progression geometrique 1.  $\frac{16}{23} \cdot \frac{16,16}{23,23} \cdot \frac{16^3}{23^3}$  etc.  $\square \frac{23}{7}$

multipliée par  $\frac{7a}{23}$ , c'est à dire  $a$ . Ainsi  $b$  gagnant tousjours à l'infini gagnera  $a$  tout entier.

Cette methode sert à trouver une infinité de fractions de tout autre egales à des fractions en progression geometrique. Car on peut faire croistre continuellement le nombre des jeux il faut jouer. Cependant tout cecy ne me donne pas encor une marque dont je puisse juger de la bonté de ma supposition; et de la methode dont je me sers de calculer. 5

Et il faut rêver s'il n'y a point d'autre methode qui nous mene à la même connoissance. C'est pourquoy commençons des cas le[s] plus simples:  $a$  argent mis au jeu. Joueurs,  $b$  et  $c$ . Celuy gagnera  $a$  qui aura fait le premier deux coups. Supposons que  $b$  gagne un coup, et supposons qu'il gagne par là  $l$ . C'est à dire, qu'il luy faut payer  $l$ , pour luy payer son droit acquis. Preferablement, le reste demeurant au jeu, sera  $a - l$ , 10

dont il luy appartiendra la moitié, sçavoir  $\frac{a-l}{2}$ . Or  $\frac{a-l}{2} + l \square \frac{a+l}{2}$ , donc son droit sur toute la masse sera  $\frac{a+l}{2}$ . Si son adversaire gagne le second coup, il est manifeste, qu'il acquerira tout autant de droit sur toute la masse, car il n'importe pas le quel des deux a fait le premier 1 coup, par ce qu'il importera seulement de sçavoir le quel de deux aura 15

le premier deux coups; dont le droit de  $c$  sera aussi  $\frac{a+l}{2}$ . Or  $\frac{a+l}{2} + \frac{a+l}{2} \square a$ , car leurs droits joints ensemble font le droit tout entier dont  $l \square \frac{a}{4}$ .

3 sert a (1) prouuer (2) trouuer  $L = 10$  coup. (1) il est manifeste s'il gagne encor 1. coup, (2) et supposons  $L = 10$  par la (1) (1) (2)  $l = L = 11$  acquis. (1) il s'agit de sçavoir la valeur de  $l$ . il (a) luy (b) est manifeste qv'il luy faut un coup, encor pour avoir (2) Si  $c$  gagne le deuxième coup, il gagne le même droit qv'avoit  $b$ . (3) preferablement  $L = 17$  droits (1) sont egaux; dont  $l \square \frac{a}{4}$  (2) joints  $L$

---

11 demeurant: Diese Definition von  $l$  oder *lucrum* weicht von der ursprünglichen in S. 29 Z. 18 f. ab. Während  $l$  dort den Gewinnanteil meint, den der Verlierer einer Runde theoretisch an deren Gewinner zu entrichten hätte, steht es hier für den Anteil, welchen der Rundensieger entnehmen könnte, so dass beide Spieler gleiche Anteile zu dem im Spiel verbleibenden Einsatz beisteuern (vgl. S. 43 Z. 1 f.). Dieses *lucrum* ist doppelt so groß wie jenes.

Donc nous avons une solution parfaite du premier cas, lors qu'on joue à deux coups. Selon l'autre methode ayant gagné 1 coup, il vous n'en faut qu'un, et il en faut 2 à vostre adversaire, donc vostre avantage est double; de même il est encor double par une autre raison, parce que vous avez deux manieres, et luy n'en a qu'une. Donc vostre avantage  
 5 est quadruple du sien, dont il appartient à vous, Monsieur  $b$ , la  $\frac{4}{5}$  et à  $c$   $\frac{1}{5}$ , au lieu qu'au paravant nous avons prouvé, qu'il appartient à  $b$ , la somme  $\frac{a+l}{2} \cap \frac{a+\frac{a}{4}}{2} \cap \frac{5}{8}[a]$ . Or la methode posterieure est demonstrative et convaincante, et ne laisse point de doute; venons au jeu à 3 coups.  $b$  gagne 1 coup, son droit acquis  $\frac{a+l}{2}$ . Si  $c$  gagne autant son droit acquis est égal sçavoir  $\frac{a+l}{2}$ , donc  $l \cap \frac{a}{4}$ . Si  $b$  gagne 2 coups il aura gagné  $l+(l) \cap L$ ,  
 10 et il aura encor  $\frac{a-L}{2}$ . Or  $\frac{a-L}{2} + L \cap \frac{a+L}{2}$ . Si son adversaire gagne aussi deux coups,

---

3 *Am Rande:*  $\begin{array}{c|c} b & cc \\ \hline bc & \end{array}$

7 *Am Rande: imo error ut statim sequitur*

1 lors qv'on (1) gagne (2) joue  $L$     2 gagné (1) 2 coups (2) 1. | coups ändert Hrsg. |, il  $L$   
 5 vous, (1)  $b$ ; (2) Monsieur  $b$ , ... à (a) luy (b)  $c$   $L$     9 il (1) restera  $\frac{a-L}{2}$ . ou a (2) aura  $L$

---

**29,17**  $l \cap \frac{a}{4}$ : Aus  $\frac{a+l}{2} + \frac{a+l}{2} = a$  ergibt sich richtig gerechnet  $l = 0$ , was kein sinnvolles Ergebnis ist. Es kommt dadurch zustande, dass nach der zweiten Runde der Zugewinn des einen Spielers dem anderen nicht abgezogen wird, so dass beiden Spielern, obwohl der Gesamtgewinn  $a$  konstant ist, ein Gewinn gegenüber dem Stand bei Spielbeginn zugesprochen wird. Dieser in Z. 9 und in S. 47 Z. 1 erneut begangene Fehler belastet die weiteren Überlegungen des Stückes. Korrigiert man ihn, so erhält man die Gleichung  $\frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a$ , aus der sich keine Aussage über die Größe  $l$  ableiten lässt. Tatsächlich hängt  $l$  von der vorgeschlagenen Teilungsregel ab und lässt sich nicht umgekehrt dazu nutzen, eine solche zu finden. Sofern man  $l$  im zuerst definierten Sinn versteht (vgl. S. 29 Z. 18 f.), beträgt im gewählten Beispiel sowohl bei einer Aufteilung gemäß der ersten Leibniz'schen Teilungsregel als auch bei Anwenden der Regel von Pascal und Fermat der Zugewinn durch jede gewonnene Runde tatsächlich  $l = \frac{a}{4}$ .



il aura aussi  $\frac{a+L}{2}$ . Or  $\frac{a+L}{2} + \frac{a+L}{2} \sqcap a$ . Donc  $L \sqcap \frac{a}{4}$ . Or  $L \sqcap l + (l)$ , et  $l \sqcap \frac{a}{4}$ . Donc  $L \sqcap \frac{a}{4} + (l)$ . Or  $L \sqcap \frac{a}{4}$ . Donc  $\frac{a}{4} + (l) \sqcap \frac{a}{4}$ . Donc  $(l) \sqcap 0$ , ce qui est absurde. D'où il s'ensuit que ce droit acquis ou cet  $l$  est une chose impossible ou chimere, estant pris absolument, sans relation aux jeux qui restent à jouer. Cependant ce n'est pas repondre *in forma* à l'objection. Et il s'ensuit necessairement que  $b$  n'a pas plus acquis par 2 coups, que par un. Tout ce qu'on peut repondre à cela, c'est de nier que les droits de tous deux joints ensemble, fasse[nt] le droit sur toute la masse. Par ce que selon le droit du jeu, ils sont obligez de jouer 6 jeux. Et il faut concevoir comme si un troisième leur avoit mis cet argent à jouer. Cet argent ne sera pas à eux qu'en cas, qu'ils le gagnent, et s'ils sont interrompus il ne leur appartient que l'avantage qu'ils ont acquis par leurs jeux; et celui qui a mis l'argent reprendra le reste. Cependant il est vray aussi, que lorsque tous deux ont mis l'argent, en cas de rupture; leurs droits joints ensemble font le droit tout entier. Cependant on peut aussi former la question en sorte, qu'un troisième propose [un] prix, et leur commande de jouer autant de coups de suite, qu'il faut pour gagner; un accident les empechant de continuer, il est assure qu'ils ont acquis quelque droit, et que l'equité veut qu'ils en tirent quelque avantage quoyque à la rigueur; le proposant puisse dire qu'il a demandé la condition tout entiere. Il peut pourtant aussi s'obliger de leur laisser en cas d'interruption l'avantage qu'on leur pourra attribuer. Estant proposants eux mêmes on les peut considerer neantmoins comme un troisième quant à cet égard, et raisonner tout de même.

3 acquis (1) absolument (2) ou (a) ce (b) cet L    14 jouer (1) 6 coups (2) autant L    16 rigueur;  
 (1) il puisse dire, que (2) le proposant L

---

8 6 jeux: Unter diesen Voraussetzungen sind maximal fünf Runden zu spielen.

## 8. FRACTIONES SEXAGENARIAE

[Mitte 1674 – Ende 1676]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 III A 26 Bl. 17. Unregelmässig zugeschnittenes Fragment, ca 10 cm × 9 cm. Text auf Bl. 17 r<sup>o</sup>, rückseitig 1 Z. mit dem Titel.  
Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: Leibniz beschäftigt sich in der vorliegenden Notiz mit den rechnerischen Grundlagen des Sexagesimalsystems. Hierbei knüpft er an Überlegungen an, die er in N. 9, welches dem gleichen Gegenstand gewidmet ist, entwickelt hat. Es darf daher vermutet werden, dass die Notiz kurz nach N. 9 entstanden ist. Da dieses Stück wahrscheinlich im Zeitraum zwischen Mitte 1674 und Ende 1676 verfasst worden ist, wird das Gleiche auch für die vorliegende Notiz angenommen. **Die Gegenstücke zu den unregelmäßigen Schnittkanten des Papierfragmentes, auf welchem die Notiz niedergeschrieben ist, sind bislang noch nicht gefunden worden; eine automatisierte Suche im Rahmen des beantragten Projektes zur digitalen Rekonstruktion von Textzusammenhängen bei Leibniz erscheint hier vielversprechend. Aus ihren Resultaten können sich neue Hinweise zur Datierung ergeben. [noch]**

15

*F r a c t i o n e s   s e x a g e n a r i a e*

$$\frac{13}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{15}{60^3}$$

$$\begin{array}{cc} 13 & 24 \\ 36 & 6 \end{array}$$

Pour reduire les primes et secondes aux troisiemes, c'e[s]t à dire pour reduire les fractions sexagenaires à un meme denominateur, il faut multiplier les primes par 36, les

20

16 *F r a c t i o n e s   s e x a g e n a r i a e   e r g.   L   a u f   B l.   17 v<sup>o</sup>*

17  $\frac{13}{60} + \frac{24}{60^2} + \frac{15}{60^3}$ : Vgl. diesen Ausdruck mit der Summe  $\frac{2}{60} [ + ] \frac{1}{3600} [ + ] \frac{7}{216000}$ , welche Leibniz in N. 9 S. 56 Z. 3 betrachtet. 21 denominateur: Mit dem beschriebenen Verfahren rechnet man eigentlich eine dreistellige Sexagesimalzahl, so wie in N. 9 gefordert, in eine Dezimalzahl um: Man multipliziert die erste Stelle mit 36 und die zweite mit 6. Um die drei oben genannten Brüche auf einen gemeinsamen Nenner zu bringen, ist dagegen der erste Bruch mit 3600 zu erweitern und der zweite mit 60. Die zum Gleichnamigmachen erforderlichen Nullen fügt Leibniz dem Ergebnis der Nebenrechnung zu S. 49 Z. 2 f. nachträglich noch hinzu, lässt den Haupttext aber unverändert.

secondes par 6, les 3<sup>mes</sup> par 1. Multiplier par 36<sub>[,]</sub> c'est multiplier par 40 – 4, multiplier par 6, c'est multiplier par  $4 + \frac{4}{2}$ . *Ergo primae multiplicentur per 4<sub>[,]</sub> producto adjiciatur 0, et inde detrahatur ipsum productum, secundae multiplicentur per 4, producto addatur ipsius dimidium, sed brevius sufficit secundas multiplicari per 6.*

---

2f. *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 13 \\ \frac{4}{520} \\ \frac{52}{46800} \end{array}$$

3f. *Gestrichene Nebenrechnung:*

$\frac{24}{4} L$	<b>5–9</b>	<i>Gestrichene Nebenrechnung:</i>	(1) $\frac{13}{40}$	(2) $\frac{13}{4} L$
$\frac{96}{48}$			$\frac{520}{52}$	$\frac{520}{52}$
$\frac{4}{4}$			$\frac{468}{468}$	$\frac{46800}{46800}$

## 9. MULTIPLICATIO NUMERORUM SEXAGESIMALIUM

[Mitte 1674 – Ende 1676]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 27. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 27 v°, Vorderseite leer.  
Cc 2, Nr. 00

- 5 Datierungsgründe: Der Gegenstand des Stückes — ein Verfahren zur Multiplikation einer im Sexagesimalsystem ausgedrückten dreistelligen Zahl mit einem unechten Bruch — legt nahe, dass es in zeitlicher Nähe zu N. 8 entstanden ist. Leibniz nimmt seine Aufgabe offenkundig in Angriff, bevor er sich näher mit Stellenwertsystemen befasst hat; dies belegt jedoch nur, dass er das Stück vor März 1679 abgefasst hat. Einen genaueren Hinweis liefert das Papier: Es stammt aus Paris, und sein Wasserzeichen
- 10 ähnelt anderen Wasserzeichen, die vor allem in der frühen Pariser Zeit auftreten. Auch der Symbolgebrauch gibt einen Hinweis in diese Richtung: Ganz überwiegend setzt Leibniz als Gleichheitssymbol das Zeichen  $\text{f}$  ein, teils in einer leicht stilisierten Form, teils als simples handschriftliches  $f$ . Diese letztere Variante kommt überwiegend, allerdings nicht ausschließlich, bis Anfang 1673 vor. Die dreimalige Verwendung des Gleichheitssymbols  $\sqcap$  dagegen spricht unzweideutig für eine Niederschrift nach Mitte 1674.
- 15 Somit ist gesichert, dass das Stück in Paris verfasst worden ist; trotz der Hinweise auf eine Entstehung zu Beginn der Pariser Zeit gibt der Gebrauch des stilisierten Waagebalkens letztlich den Ausschlag für den *terminus post quem* Mitte 1674.

[Erster Ansatz]

$$\begin{array}{cccccc}
 13 & \text{—————} & \text{/} & \text{//} & \text{///} & \text{—————} & 17 \\
 & & 19 & 9 & 7 & & \\
 20 & & \frac{19}{6} & \frac{3}{2} & \frac{7}{6} & & \frac{17}{13} \text{ f } 1 + \frac{4}{13} \\
 & & 3\frac{1}{6} & 1\frac{1}{2} & 1\frac{1}{6} & \text{vel} & \frac{131}{6} \text{ f } 21 \frac{5}{[6]}
 \end{array}$$

20 Nebenrechnung:  $\frac{10}{\frac{6}{10}}$   $\frac{5}{3} \sqcap^2$  [bricht ab]

19 13 — (1) 14, 13, 18 · (2)  $\text{/}$   $\text{//}$   $\text{///}$   $L$  21  $3\frac{1}{6}$  (1)  $2\frac{1}{2}$  (2)  $1\frac{1}{2}$   $L$

21 131: Der Status von Zahlen wie dieser als Sexagesimal- oder Dezimalzahl ist für Leibniz nicht eindeutig festgelegt, was er durch (allerdings nicht ganz konsequent durchgeführte) Gesperrtschreibung der Ziffern andeutet. Bei Zahlen, die er als eindeutig hexagesimal ausgedrückt verstanden wissen will, trennt er dagegen die Stellen in der Regel durch Kommata voneinander ab — insbesondere, wenn es sich bei mindestens einer ihrer Ziffern um eine im Dezimalsystem notierte zweistellige Zahl handelt.

$$\frac{12\frac{4}{6}}{13} \quad 4 + \frac{4}{2} \quad 4 + \frac{4}{6}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \\ 2\ 1 \\ \hline 3\ 4\ 2\ \frac{5}{6} \end{array} \sim 1 + \frac{4}{13}$$

$$\frac{76}{13^6} \quad \frac{120}{13^6} \quad \frac{28}{13^6}$$

$$\begin{array}{r} 3\ 4\ 2 \\ 1\ 0\ 5 \\ \hline 4\ 4\ 7\ \frac{19}{39} \end{array}$$

$$\frac{76}{13^6} \quad \frac{120}{13^6} \quad \frac{28}{13^6} \quad \left| \quad \frac{4414}{13^3} \quad \right| \quad \frac{1471}{13} + \frac{1}{13^3}$$

$$24, 24, 28 \quad \frac{3}{30} \quad \frac{36}{39} \quad \frac{12}{13}$$

1 Nebenrechnung:  $\frac{13}{1368} \cdot 105 \frac{18+20}{6^{\wedge}13} \quad \frac{38}{78} \left| \frac{19}{39} \right.$

2  $\frac{76}{13^6}$  (1)  $\frac{140}{13^6}$  (2)  $\frac{120}{13^6}$  L     4 105 (1)  $\frac{3}{13} + \frac{20}{6^{\wedge}13}$  (2)  $\frac{18+20}{6^{\wedge}13}$  L

1 3 2 1 : Hier ist die Korrektur in der Zeile zuvor nicht berücksichtigt; folgerichtig wäre 3 1 1 .

2  $\frac{120}{13^6}$ : Folgerichtig wäre  $\frac{36}{13^6}$ .     2 4 4 7  $\frac{19}{39}$ : Bei der Addition von  $3\ 4\ 2\ \frac{5}{6}$  mit  $1\ 0\ 5\ \frac{19}{39}$  ist der Bruchanteil des ersten Summanden verloren gegangen.     3 24, 24, 28: Das gesuchte Produkt der Sexagesimalzahl  $(19, 9, 7)_{60}$  mit dem unechten Bruch  $\frac{17}{13}$  ist  $(25, 2, 41\frac{6}{13})_{60}$ . Dass die in der rechten Spalte fortgeführte Berechnung zum falschen Ergebnis  $(24, 24, 30\frac{12}{13})_{60}$  führt, ist nicht nur auf Rechenfehler zurückzuführen, sondern grundsätzlich in dem Verfahren begründet, welches Leibniz im vorliegenden Stück ausprobiert: Er behandelt beim Rechnen mit Sexagesimalzahlen diese in einzelnen Rechenschritten wie Dezimalzahlen. Offenbar fühlt er sich hierzu berechtigt, da er eingangs eine Division durch 6 durchführt und am Ende der Rechnung wieder mit 6 multipliziert. Im vorliegenden Ansatz etwa teilt Leibniz im ersten Schritt tatsächlich nicht die Sexagesimalzahl  $(19, 9, 7)_{60}$  durch 6, sondern die Dezimalzahl 1997. Sein (nicht ganz korrektes) Ergebnis  $3\ 4\ 2\ \frac{5}{6}$  multipliziert er sodann wie eine gewöhnliche Dezimalzahl mit  $\frac{17}{13}$ . Erst bei der abschließenden Wiederversechsfachung seines (ebenfalls nicht korrekten) Produktes  $4\ 4\ 7\ \frac{19}{39}$  behandelt er dessen Ziffern wie jene einer im Sexagesimalsystem geschriebenen Zahl. Tatsächlich kann ein solches Verfahren keine Umrechnung vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem und zurück leisten; es führt im Allgemeinen zu fehlerhaften Resultaten.

$$\begin{array}{r} 1 \\ 142 \\ 1471 \text{ f } 113 + \frac{7}{13^{\wedge}3} \\ 1333 \\ 11 \end{array}$$

Ergo productum,

$$4, \quad 3, \quad 6: \quad \frac{20}{39}$$

$$\begin{array}{r} 6 \\ \hline 24 \quad 18 \quad 36 \quad \frac{33}{120} \text{ f } 3 \frac{3}{39} \\ 0 \quad 0 \quad 3 \quad \frac{39}{39} \\ \hline 24, \quad 18, \quad 39 \quad \frac{3}{39} \Big| \frac{1}{13} \end{array}$$

[Zweiter Ansatz]

$$\begin{array}{r} 13 \text{ ————— } \begin{array}{ccc} / & // & /// \\ 19, & 9, & 7 \end{array} \text{ ————— } 17 \\ \\ \begin{array}{ccc} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ \hline \emptyset & 6 & \emptyset \end{array} \end{array}$$

5

$$\begin{array}{l} 1 \text{ Nebenrechnungen: } \frac{140}{60} \Big| \frac{14}{6} \Big| \frac{7}{3} \wedge 17 \qquad \frac{7 + \overline{(7^{\wedge}13)}91}{13^{\wedge}3} \sqcap \frac{98}{13^{\wedge}3} \Big| \frac{98}{39} \text{ f } 2 \left[ \frac{20}{39} \right] \\ 4 \text{ Nebenrechnung: } \frac{17}{13} \text{ f } 1 \frac{4}{13} \end{array}$$

$$11 \Big| \frac{13}{13} \text{ ändert Hrsq. } \Big| \text{ f } 1 \frac{4}{13} L$$

2 24, 18, 39: Auch das Ergebnis  $(24, 18, 39 \frac{1}{13})_{60}$  ist aus den genannten Gründen — diversen Rechenfehlern sowie der unzulässigen Behandlung von Sexagesimal- als Dezimalzahlen — nicht korrekt.

$$\begin{array}{r}
 1\ 8\ 6\ 6 \\
 \hline
 1\ 3\ 1 \\
 \hline
 1\ 9\ 9\ 7 \\
 \hline
 6
 \end{array}
 \text{ f }
 \begin{array}{r}
 3\ 3\ 3 - \frac{1}{6} \wedge \frac{17}{13} \Big| 1\ \frac{4}{13} \\
 \hline
 4 \\
 \hline
 \begin{array}{r}
 16 \\
 1332 \\
 1333 \\
 11
 \end{array}
 \text{ f }
 102 \left( \begin{array}{l} 36 - 4 \\ 13 \wedge 6 \end{array} \right) \frac{32}{78} \Big| \frac{16}{39} \\
 \hline
 3\ 3\ 3 - \frac{1}{6} \\
 1\ 0\ 2 + \frac{16}{39} \\
 \hline
 4\ 3\ 5
 \end{array}$$

[Dritter Ansatz]

$$\begin{array}{r}
 13 \text{ ————— } \begin{array}{l} / \\ // \\ /// \end{array} \begin{array}{l} 19, \\ 9, \\ 7 \end{array} \text{ ————— } 17 \quad \Big| \quad \frac{17}{13} \square 1 + \frac{4}{13} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 1997 \\
 \hline
 4 \\
 13) \overline{7988} \text{ f } 614 \frac{6}{13} \\
 \underline{1156} \\
 1
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1997 \\
 \hline
 4 \\
 \underline{1} \\
 1156 \\
 7988 \text{ f } 614 \\
 \underline{1333} \\
 11
 \end{array} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 \cancel{26}11 \\
 \cancel{23}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 1997 \\
 \hline
 614 \\
 \underline{\cancel{23}} \\
 \cancel{26}11 \frac{6}{13}
 \end{array}
 \end{array}$$

5

3 4 3 5 : Die Rechnung des zweiten Ansatzes wird konsequent und fehlerfrei im Dezimalsystem durchgeführt. Ihr Resultat  $4\ 3\ 5\ \frac{19}{78}$  würde mit 6 multipliziert  $(24, 18, 31\ \frac{18}{39})_{60}$  ergeben; auch dies ist nicht das korrekte Ergebnis. 6  $\frac{1997}{4}$ : Im dritten und vierten Ansatz verändert Leibniz nun die Reihenfolge der Rechenschritte: Zunächst wird die dezimale Multiplikation von 1997 mit  $\frac{17}{13}$  durchgeführt, erst danach folgt die dezimale Division durch 6 und die Wiederversechsfachung im Sexagesimalsystem.

$$\frac{4\ 3\ 5\ \frac{2}{13}}{24,\ 18,\ 30\ \frac{12}{13}}$$

$$\frac{4\ 3\ 5\ \frac{2}{13}}{24,\ 18,\ 30\ \frac{6}{13}}$$

[Vierter Ansatz]

$$13 \text{ ————— } \frac{19 + 9 + 7}{6} \text{ ————— } 17$$

$$\frac{17}{1}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 2\ 6\ 4 \\ 139\ 7\ 9 \\ 133\ 3\ 3 \\ 11\ 1 \end{array} \text{ f } 1\ 0\ 7\ 5$$

$$\begin{array}{r} 13979 \\ 1997 \\ \hline 33949 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 1997 \\ 17 \\ \hline 1 \\ 17116 \\ 33949 \\ 13333 \\ 111 \end{array} \text{ f } 2611\ \frac{6}{13}$$

$$\begin{array}{r} 1 \\ 17116 \\ 33949 \\ 13333 \\ 111 \end{array} \text{ f } 2611\ \frac{6}{13}$$

4 *Isoliert und ohne direkten Bezug:* 19 9 77 *Randnotiz mit aus S. 55 Z. 5 bezogener Ergänzung:*  $33949 \frac{6}{13} + \frac{19}{26}$ 7 *Gestrichene Nebenbetrachtung:*  $\frac{3}{33949} \text{ f } 5658\ L \quad \mathbf{9} + \frac{19}{26} \text{ erg. } L$ 

1  $4\ 3\ 5\ \frac{2}{13}$ : Konsequent gerechnet lautet das Zwischenergebnis nach der Division  $4\ 3\ 5\ \frac{19}{78}$ . Der Fehler beeinträchtigt im links dargestellten Rechengang das Endergebnis in der folgenden Zeile. Das rechts stehende Endergebnis dagegen verwendet stillschweigend den korrekten Wert des Bruchanteils, vernachlässigt jedoch einen Einerübertrag; folgerichtig gerechnet ergibt sich  $(24, 18, 31\frac{6}{13})_{60}$  (vgl. auch den vierten Ansatz, S. 55 Z. 3, rechts). 5 1 0 7 5: Versehentlich teilt Leibniz hier das Siebenfache anstelle des Siebzehnfachen von 1997 durch 13. Er erkennt den Irrtum und setzt neu an.



$$\begin{array}{r}
 \overset{23}{\cancel{26}}\overset{11}{\cancel{11}} \frac{1}{13} \\
 \underset{\cancel{666}}{\phantom{2611}} \\
 4\ 3\ 5 \frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\
 \hline
 24, 18, 31 \frac{6}{13}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{r}
 \overset{23}{\cancel{26}}\overset{11}{\cancel{11}} + \frac{6}{13} \\
 \underset{\cancel{66}}{\phantom{2611}} \\
 4\ 3\ 5 \frac{1}{6} + \frac{1}{13} \\
 24, 18, 31 \frac{6}{13}
 \end{array}$$

[Fünfter Ansatz]

$$\begin{array}{r}
 26 \text{ ————— } \frac{1997}{17} \text{ ————— } \frac{17}{26} \\
 \frac{13979}{1997} \\
 \frac{33949}{2611} \text{ f } 1\ 3\ 0\ 5 \frac{19}{26} \\
 \frac{7}{7} \\
 \hline
 2\ 1\ 7 \frac{3}{6} \\
 \hline
 12, 6, 21 \frac{18}{6} \Big| 3 \\
 \frac{3}{24} \frac{19}{26}
 \end{array}$$

5

$$\begin{array}{r}
 \overset{1}{\cancel{17}}\overset{11}{\cancel{11}} \text{ f } 1305 \frac{19}{26} \\
 \underset{\cancel{26666}}{\phantom{1711}} \\
 \frac{222}{222} \\
 \hline
 \overset{143}{\cancel{1305}} \text{ f } 2\ 1\ 7 \frac{3}{6} + \frac{19}{26} \\
 \underset{\cancel{666}}{\phantom{1305}} \\
 \frac{6}{12, 6, 45}
 \end{array}$$

10

---

9 Nebenbetrachtungen:  $\frac{38}{26} \text{ f } 1 \frac{12}{26} \qquad \frac{19}{26} \frac{3}{6} \frac{1}{26}$

---

5 26: Im fünften Ansatz multipliziert Leibniz im ersten Schritt die Dezimalzahl 1997 nicht mehr mit  $\frac{17}{13}$ , sondern mit  $\frac{17}{26}$  und verdoppelt dafür das Zwischenergebnis vor dessen Versechsfachung im letzten Schritt. 7 12, 6, 21: Richtig wäre 12, 6, 42. Leibniz korrigiert dies nicht, sondern setzt neu an.

$$\begin{array}{r} 2\ 1\ 7 \\ \hline 6 \\ 12, 6, 42 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 4\ 3\ 4 \\ \hline 6 \\ 24, 18, 24 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} \frac{2}{10} & \frac{1}{100} & \frac{7}{1000} \\ \frac{2}{60} & \frac{1}{3600} & \frac{7}{21600[0]} \end{array}$$

[Sechster Ansatz]

5

$$\begin{array}{ccc} \frac{19}{6} \Big| \frac{1}{6} & \frac{9}{36} \Big| \frac{1}{4} & \frac{7}{216} \Big| \frac{1}{27} - \frac{1}{216} \\ \frac{4}{6} & 1 & \frac{4}{27} - \frac{4}{216} \\ \hline & 13 & \\ \frac{19}{6} & \frac{9}{36} & \frac{7}{216} \end{array}$$

---

3 *Hilfsrechnung:*  $\frac{3600}{6}$   
21600

6 *Nebenrechnung:*  $\frac{2}{286} \neq 22$   
 $\frac{133}{1}$

1 *Gestrichene Nebenbetrachtung:*  $\frac{1}{434} \neq 7 \frac{1}{6} L$     2 (1) 24, (2)  $\frac{2}{10} L$   
 $\frac{66}{14}$

---

3  $\frac{2}{60} \frac{1}{3600} \frac{7}{21600[0]}$ : Leibniz vergewissert sich hier noch einmal der Bedeutung von Sexagesimalstellen und verwirft daraufhin die Ausgangsidee, eine Zahl vom Sexagesimal- ins Dezimalsystem zu transformieren, indem man die gesamte Zahl (also unterschiedslos jede Stelle) durch 6 teilt. In den folgenden Ansätzen differenziert er nun bei der Division zwischen den verschiedenen Stellen.    5  $\frac{19}{6} \Big| \frac{1}{6}$ :

Richtig wäre  $3\frac{1}{6}$ . Der Fehler belastet die weitere Rechnung bis S. 57 Z. 2, nach welcher Leibniz noch einmal neu ansetzt.

$$\begin{array}{r}
 \boxed{
 \begin{array}{r}
 13 \frac{13}{6} \quad \frac{13}{4} \quad \frac{13}{7} - \frac{13}{216} \\
 4 \frac{4}{6} \quad 1 \quad \frac{4}{7} - \frac{4}{216} \\
 17 \quad 17
 \end{array}
 } \\
 3 + \frac{1}{6} \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{7} - \frac{1}{216} \\
 \text{seu } 39 \frac{17}{6}, \quad \frac{17}{4}, \quad \frac{17}{7} - \frac{17}{216} (1)
 \end{array}$$

5

[Siebter Ansatz]

$$\begin{array}{r}
 19 \quad 9 \quad 7 \quad \frac{19}{6} \quad \frac{9}{60} \quad \frac{9}{60} \\
 \frac{19}{6} \quad \frac{9}{6} \quad \frac{9}{6} \quad 19 \frac{9}{6} \quad \frac{9}{36} \\
 \frac{19}{6} \quad \frac{9}{60} \quad \frac{9}{600} \quad \frac{24, 3 \quad 31 \frac{6}{13}}{36}
 \end{array}$$

10

5 (1) | seu nicht gestr. | 9 (2) seu (a)  $39 \frac{13}{6}, \frac{13}{4}, \frac{13}{7} - \frac{13}{216}$  (b)  $39 \frac{17}{6}, L$  7  $\frac{9}{60}$  (1)  $\frac{9}{60}$  (2)  $\frac{9}{60} L$

9 (1)  $\frac{7}{600}$  (2)  $\frac{9}{600} L$

5  $39 \frac{17}{6}$ : Leibniz multipliziert zunächst die vorangehende Zeile versehentlich mit 13 statt mit 17, korrigiert dies aber umgehend, wobei er allerdings vergisst, die 39 in 51 zu ändern. Zudem muss es  $\frac{17}{27}$  anstatt  $\frac{17}{7}$  heißen; dieser Fehler stammt aus Z. 1. Die Versehen wirken sich nicht aus, da Leibniz die Rechnung abbricht. 10 24, 3: Leibniz probiert hier am Ergebnis des vierten Ansatzes (S. 55 Z. 3, rechts) die Division der zweiten Stelle durch 6 und die der dritten durch 36 aus.

[Achter Ansatz]

$\begin{array}{r} 19 \quad 9 \quad 7 \\ 42 \quad 42 \\ \underline{6} \\ 252 \\ \underline{60} \end{array}$		$\begin{array}{r} 19 \quad 9 \quad 7 \\ 60 \\ \underline{420} \\ 6 \\ 25200 \\ \underline{450} \\ 25650 \end{array}$		$\begin{array}{r} 25650 \\ \underline{17} \\ 17955 \\ 2565 \\ \hline 121 \\ 14753 \\ 43605 \text{ f } 3354 \\ 13333 \\ 111 \\ \hline 3354 \text{ f } 55 : 54 \\ 660 \end{array}$
--	--	--	--	--

$\begin{array}{r} 2 \text{ (1)} \quad 19 \quad 9 \quad 7 \\ \underline{54} \quad 54 \\ 54 \\ \underline{252} \\ 306 \end{array}$	$\begin{array}{r} \text{(2)} \quad 19 \quad 9 \quad 7 \\ 42 \quad 42 \\ \underline{6} \\ 252 \\ \underline{60} \end{array}$	$\begin{array}{r} 25650 \\ \underline{17} \\ 17955 \\ 2565 \\ \hline 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \text{ nicht gestr.} \\ \underline{133} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 132 \\ 14094 \\ 43605 \text{ f } \\ \underline{13333} \\ 111 \end{array}$	$\begin{array}{r} 8 \\ 100 \\ 43605 \text{ f } \\ \underline{133} \\ 1 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \\ \underline{1333} \\ 11 \end{array}$
$\begin{array}{r} 3 \\ 3277 \text{ f } 54 : 37 \\ \underline{6660} \end{array}$	$\begin{array}{r} 3 \\ 3277 \text{ f } 54 : 37 \\ \underline{6660} \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \\ \underline{1333} \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \\ \underline{1333} \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \\ \underline{1333} \\ 11 \end{array}$	$\begin{array}{r} 2 \\ 140 \\ 43605 \text{ f } 32 \\ \underline{1333} \\ 11 \end{array}$
$\text{(b) } 3354 \quad \begin{array}{r} 3354 \text{ f} \\ \underline{660} \end{array} \quad \text{(aa) } 54 \quad \text{(bb) } 55 : 54 \quad L$					

2 25200: Im achten Ansatz multipliziert Leibniz die dritte Stelle anstatt der ersten mit 3600, addiert aus unklarem Grunde 450 (womöglich denkt er an 540 als dem 60-fachen von 9) und führt sodann die Multiplikation mit  $\frac{17}{13}$  durch, wobei eine Dezimalstelle verloren geht. Das Ergebnis der Multiplikation teilt er schließlich wieder durch 6 und beendet die Rechnung ohne brauchbares Resultat.

## 10. DE NUMERO JACTUUM IN TESSERIS

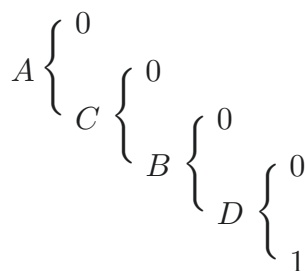
Januar 1676

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 1 r<sup>o</sup> am oberen Rand Datum und Titel des Stückes. In der oberen Hälfte dieser Seite eine fragmentarische Notiz (s. u.), in der Seitenmitte vier Tabellen (= Teil 1 unseres Stückes). Auf dem Rest der Seite das Stück VII, 1 N. 89, um Notiz und Teil 1 herum gesetzt. Auf den drei anderen Seiten des Bogens Teil 2 und 3 unseres Stückes. — Gedr.: 1. BIERMANN, *Spezielle Untersuchungen*, 1956, S. 170 (tlw. = S. 63 Z. 2 – S. 64 Z. 7); 2. PARMENTIER, *L'estime des apparances*, 1995, S. 79 f. u. 88–101 (z.T. frz. Übers.); 3. (span. Übers.) LEIBNIZ, *Obras filosóficas y científicas*, Bd. 7 B, 2015, S. 659 f. u. 662–667. Cc 2, Nr. 1281

Januar. 1676.

De numero jactuum in tesseris.  
Proposuit mihi dux Roannesius

5 *Fragmentarische Notiz inmitten des Textes:*



$$D \sqcap \frac{1}{2} \quad B \sqcap \frac{1}{4} \quad C \sqcap \frac{1}{8} \quad A \sqcap \frac{1}{16}$$

13f. De numero ... Roannesius *erg. L*    17  $D \sqcap \frac{1}{2}$   $B \sqcap \frac{1}{4}$  *gestr. L erg. Hrsg.*

14 Roannesius: Gemeint ist Artus Gouffier (1627–1696), Herzog von Roannais, ein Vertrauter Blaises Pascals. 15 Notiz: Leibniz schreibt das Stück auf einem Papierbogen nieder, auf dessen erster Seite er bereits einen Gedanken zu einem anderen Thema notiert hat. Es handelt sich bei dieser inhaltlich nicht zum Stück gehörenden Notiz um ein spieltheoretisches Zerlegungsschema, das dem in N. 7 S. 31 Z. 9 festgehaltenen gleicht.



1 dez	$a$ sans 6	$b$ avec 6
2 ...	$(a)$	$(b)$
3 ...	$\overline{a, (a)}$	$\overline{(a) \wedge b + (b) \wedge a}$
4 ...		

[Tab. 2]

5

	5 Tab. 2: (1)	1 dez	5 sans 6	1 avec 6		(2)	1 dez	5 sans 6	1 avec 6
		2 ...	$\langle 6 \rangle$	$\langle 15 \rangle$			2 ...	$\frac{15}{5, 15}$	$\frac{6}{15 \wedge 1 + 6 \wedge 5}$
		3 ...	$15 \wedge 6, + 6 \wedge 1$	$(a) 15 \wedge 5 (b) 15 \wedge 6$			3 ...		
		4 ...					4 ...		

(3)	1 dez	5a (sans 6)	1b avec 6	<i>ändert Hrsg.</i>	L
	2 ...	$\frac{15(a)}{5a, 15(a)}$	$\frac{6(b)}{15(a) \wedge 1b + 6(b) \wedge 5a}$		
	3 ...				
	4 ...				

5 Tab. 2: Leibniz nennt in dieser Tabelle zunächst konkrete Zahlen, ersetzt diese dann aber durch Buchstaben:  $a$  steht für 5,  $b$  für 1,  $(a)$  für 15 und  $(b)$  für 6. Er löscht die ursprünglichen Zahlenangaben nicht; der Lesbarkeit halber werden sie im Haupttext jedoch nicht wiedergegeben. Eine ähnliche Notation benutzt er auch in N. 7. Die Verwendung dieser Schreibweise ist wohl durch die Hoffnung motiviert, die Erkenntnisse verallgemeinern zu können: auf andere geeignete Spielgeräte wie etwa einen Oktaeder (also  $a = 7$ ) oder auf andere Anzahlen an kritischen Ausgängen, z. B. auf die 1 und die 6 (also  $b = 2$ ). Auch in dieser Tabelle betrachtet Leibniz Kombinationen mit Wiederholung, allerdings findet er nicht den richtigen Ansatz zur Berechnung ihrer Zahl. Tatsächlich ist beim Wurf von drei identischen Würfeln die Zahl an Ausgängen, in welchen eine 6 enthalten ist, gleich  $(a) + (b)$ , die der Ausgänge ohne 6 ist gleich  $\frac{7}{3}(a)$ , was sich für  $n$  Würfel zu den rekursiven Definitionen  $a_n = \frac{n+4}{n} a_{n-1}$  und  $b_n = a_{n-1} + b_{n-1}$  verallgemeinern lässt. Modern formuliert, gibt es beim Wurf von  $n$  nicht unterscheidbaren Würfeln  $\binom{n+4}{5}$  verschiedene Ausgänge, die mindestens eine 6 enthalten, und  $\binom{n+4}{4}$  Ausgänge ohne 6.

		0	1	2	3	4	5
1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	3	4	5	6	
3	1	3	6	10	15		
4	1	4	10	20			
5	1	5	15				
6	1	6					
7	1						

[Tab. 3]

			<i>A</i>					
		0	1	2	3	4	5	6
0	1							
1	1	1						
2	1	2	1					
3	1	3	3	1				
4	1	4	<i>C</i> 6	4	1			
5	1	5	10	10	5	1		
6	1	6	15	20	15	6	1	
		Unitez	Naturels	Vlaires	Pyram.	∇∇	∇P	PP

[Tab. 4]

9 Tab. 3: Leibniz will einer Lösung des Problems mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks näherkommen, wozu er dieses in zwei verschiedenen Gestalten notiert. Die in Tab. 3 gewählte Form findet sich auch in N. 36 S. 000; sie entspricht jener in Bl. PASCAL, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], Ausklapptafel vor S. 1 (PO III, S. 446). 19 Tab. 4: In Teil 2 arbeitet Leibniz mit dem Arithmetischen Dreieck in der hier gezeigten Form (vgl. S. 67 f.). — Ausgehend von Tab. 3 u. 4 setzt Leibniz auf derselben Seite zu einem zahlentheoretischen Exkurs an (VII, 1 N. 89), in welchem er eine Vermutung formuliert, die dem Kleinen Satz von Fermat sehr nahe kommt. Die beiden Tabellen gehören somit gleichermaßen zu VII, 1 N. 89 (wo sie auf S. 583 abgedruckt sind) und zum vorliegenden Stück.



[Teil 2]

1 Dez. 6 faces. a. b. c. d. e. f.

Faces de deux dez,	<i>aa</i>	<i>ba</i>	<i>ca</i>	<i>da</i>	<i>ea</i>	<i>fa</i>
	<i>ab</i>	<i>bb</i>	<i>cb</i>	<i>db</i>	<i>eb</i>	<i>fb</i>
	<i>ac</i>	<i>bc</i>	<i>cc</i>	<i>dc</i>	<i>ec</i>	<i>fc</i>
	<i>ad</i>	<i>bd</i>	<i>cd</i>	<i>dd</i>	<i>ed</i>	<i>fd</i>
	<i>ae</i>	<i>be</i>	<i>ce</i>	<i>de</i>	<i>ee</i>	<i>fe</i>
	<i>af</i>	<i>bf</i>	<i>cf</i>	<i>df</i>	<i>ef</i>	<i>ff</i>

5

Il faut ajouter au nombre Triangulaire ou des Com2naisons la somme des choses, et nous aurons le nombre des faces de deux dez.

10

2 f. a. b. c. d. e. f (1) Com2naisons de deux dez, 36. faces

aa	ab	bb	cc	dd	ee	ff
	ab	bc	cc	dd	ee	ff
	ac	bd	dd	ee	ff	ff
	ad	be	ee	ff	ff	ff
	ae	bf	ff	ff	ff	ff
	af	ff	ff	ff	ff	ff

(2) Faces L

10 le | nombres ändert Hrsg. | des (1) formes (2) faces L

2 faces: Auch in Teil 2 untersucht Leibniz zunächst das Hilfsproblem, wieviele verschiedene Ausgänge es beim Wurf von mehreren identischen Würfeln gibt. Einen solchen Ausgang bezeichnet er auf französisch als *faces*, auf lateinisch als *facies*. 9 Com2naisons: Zu den Begriffen *com2naison* und *con3naison* vgl. N. 25 S. 159 Z. 21 – S. 160 Z. 2. Siehe auch das Beispiel in VII, 1 N. 89 S. 583 Z. 8 f. sowie die Definitionen, die Leibniz in seinem Handexemplar von Bl. PASCAL, *Traité de triangle arithmetique*, 1665 [Marg.], auf der Ausklapptafel vor S. 1 (PO III, S. 446) notiert. 10 deux dez: Mit Hilfe von Binomialkoeffizienten lässt sich diese korrekte Lösung des Hilfsproblems bei zwei Würfeln als  $K_6^2 = 1 \binom{6}{1} + 1 \binom{6}{2}$  darstellen.

Pour les Faces de 3 dez, il faut chercher premierement toutes les varietez sans repetition qui sont le nombre pyramidal de 6. Il faut ajouter toutes les com2naisons doubles, par ce qu'on peut faire des faces de trois dez des com2naisons de choses, en supposans ou l'une ou l'autre des choses double.

5 Pour les faces de 4 dez. On prendra le nombre Triangulo-Triangulaire et on luy ajoutera une fois les choses, deux fois les combinaisons, trois fois les con3naisons.

Et ainsi de suite.

10 Mais lors que nous ne contons pas seulement les conjunctures, et lors que nous voulons distinguer les cas non seulement par les nombres *a. b. c. d. e. f.*, mais encor par les choses, c'est autre chose, et nous nous pouvons par exemple marquer ceux d'un des dez par *A. B. C. D. E. F.*, ceux de l'autre par *a. b. c. d. e. f.*, ainsi nous aurons:

1 Pour les (1) Con3naisons, (2) Faces  $L = 3$  par ce qv' (1) il faut (2) on peut (a) faire des combi (b) faire ... dez, des (aa) combinaisons (bb) com2naisons | de choses *erg.* |, en  $L = 6$  fois les (1) nombres; deux (2) choses,  $L = 8$  seulement (1) les diversitez (2) les conjunctures  $L$

---

1 f. varietez sans repetition: Hiermit ist die Zahl der Kombinationen ohne Wiederholung gemeint (nicht etwa die der Variationen im modernen Sinne), und diejenige für drei Würfel lässt sich aus Tab. 4 als Pyramidenzahl der 6. Zeile ablesen. 3 trois dez: Die korrekte Lösung lautet in moderner Darstellung  $K_6^3 = 1\binom{6}{1} + 2\binom{6}{2} + 1\binom{6}{3}$ ; Leibniz übersieht hier den ersten Summanden, der für „la somme des choses“, die Anzahl der Würfel also, steht. 5 4 dez: Die richtige Lösung kann man modern mit  $K_6^4 = 1\binom{6}{1} + 3\binom{6}{2} + 3\binom{6}{3} + 1\binom{6}{4}$  wiedergeben; Leibniz' Lösung dagegen berücksichtigt die Zahl der *combinaisons*  $\binom{6}{2}$  nur zweimal. 7 ainsi de suite: Aufgrund des Irrtums in der vorausgehenden Zeile lieferte eine Verallgemeinerung der Leibnizschen Lösungen kein valides Ergebnis. Das korrekte Ergebnis für  $n$  Würfel lautet vielmehr  $K_6^n = \sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1} \binom{6}{k} = \binom{n+5}{5}$ . 10 choses: Leibniz betrachtet nun also unterscheidbare Würfel. Die Ausgänge ihrer Würfe sind, modern gesprochen, Variationen mit Wiederholung. Den entsprechenden Ereignissen können gleiche Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden, so dass sich das Ausgangsproblem auf dieser Grundlage lösen lässt. Im weiteren Verlauf des Stückes steht allerdings das allgemeinere Problem im Vordergrund, in wievielen Ausgängen eines Wurfes mit mehreren Würfeln eine zuvor festgelegte Zahl an Sechsen fällt.

*Aa Ba etc.*

*Ab Bb*

*Ac Bc*

*Ad Bd*

*Ae Be*

*Af Bf etc.*

5

Ainsi les cas ou faces selon ce sens, seront les nombres de la progression senaire. Les faces de deux dez seront 36, de 3 dez 216, etc.; de même les faces de deux pentaedres seront 5, 25, 125, 625, etc., nombre de faces sans *f*. Leur difference sera le nombre des faces de deux cubes ou hexaedres où il y a le nombre *f*, la difference entre les quarrez, de 6 et de 5. Et s'il y a trois hexaedres la difference entre les cubes de 6 et de 5 donnera le nombre des faces avec *f*. Ainsi de suite. Et ces differences seront tousjours terminées par 1, parce que les termes [se terminent] tousjours par 6 et 5. 10

Il s'agit apresent de sçavoir les doublets; c'est à dire les faces où il y a *f* plus d'une fois. Et il est manifeste, qu'il n'y a qu'un seul cas dans deux hexaedres, où *f* soit double. Mais dans trois hexaedres, voyons combien de fois *f* est double; car il n'y peut estre qu'une fois triple. Pour double voyons. Il est une fois double dans deux hexaedres, ajoutons y le nombre des faces sans *f*, du 3<sup>me</sup>, qui est 5; en voila 5; il est  $\overline{6^2 - 5^2 - 1}$  fois simple dans 2 hexaedres, ce la ne se peut prendre qu'une fois, en ajoutant le 3<sup>me</sup>; et en l'y combinant avec un seul *f*. Avant que de passer outre, il sera bon d'exprimer cecy par ordre: 15 20

8f. les faces de (1) 5 dez (2) deux pentaedres ... 625, etc (a) les differences font (b) nombre ... sans (aa) f. (bb) | 6. ändert Hrsg. | leur L 10 hexaedres (1) qvi est sans une des choses par exemple sans f. (2) ou il y a | le nombre erg. | f. L 12 faces | sans ändert Hrsg. | f. L 14 sçavoir (1) combien il y a des (2) les doublets L 18 ajoutons y (1) le tro (2) les (3) le nombre des faces (a) du troisieme (b) sans f L

		0		1	2	3	[4]	[5]
		*		*				
1 Hexa- edres	$\overline{6 \text{ faces}}$	$\overline{5 \text{ faces}}$ $\overline{\text{sans } f}$	1 faces avec $f$	$\overline{1 \text{ faces à}}$ $\overline{1 \text{ fois } f}$	*			
2 ·····	36 ····	25 ····	11 ····	10 ····	$\overline{1 \text{ faces à}}$ $\overline{2 \text{ fois } f}$			
3 ·····	216 ···	125 ···	91 ····	$\underbrace{10^5 +}_{75}$ $\underbrace{25^1}_{15}$	$\underbrace{10^1 +}_{15}$ $\underbrace{1^5}_{15}$	$\overline{1 \text{ faces à}}$ $\overline{3 \text{ fois } f}$		
5 4 ·····	1296 ··	625 ···	671 ···	$\underbrace{75^5 +}_{500}$ $\underbrace{125^1}_{150}$	$\underbrace{75^1 +}_{150}$ $\underbrace{5^1}_{150}$	$\underbrace{15^1 +}_{20}$ $\underbrace{1^5}_{20}$	$\overline{1 \text{ faces à}}$ $\overline{4 \text{ fois } f}$	
5 ·····	7776 ··	3125 ··	4651 ··	$\underbrace{500^5 +}_{3125}$ $\underbrace{625^1}_{3125}$	$\underbrace{500 +}_{1250}$ $\underbrace{150^5}_{1250}$	$\underbrace{150 +}_{250}$ $\underbrace{20^5}_{250}$	$\underbrace{5^1 +}_{25}$ $\underbrace{20^1}_{25}$	$\overline{1 \text{ faces à}}$ $\overline{5 \text{ fois } f}$
6 ·····	46656 ·	15625 ·	31031 ·	$\underbrace{3125^5 +}_{18750}$ $\underbrace{3125^1}_{18750}$	$\underbrace{3125^1 +}_{9375}$ $\underbrace{1250^5}_{9375}$	$\underbrace{1250^1 +}_{2500}$ $\underbrace{250^5}_{2500}$	375	30
		etc.	etc.					$\overline{1 \text{ fac. à}}$ $\overline{6 \text{ fois } f}$

[Tab. 5]

9 *Hilfsrechnungen zu Tab. 5:*

	625	150
	$\overline{2500}$	$\overline{5}$
	3125	$\overline{750}$
		$\overline{500}$
		$\overline{1250}$

9 Nebenrechnung über Tab. 5: | 300 325  $\overset{12}{\cancel{32500}}$  } 8125 gestr. | L  
 $\overset{12}{\cancel{4444}}$  25

Ex his manifesta est Tabulae continuatio. Nimirum columnas vocabimus, series perpendiculares, numeratas numero duplicationum. Series autem horizontales notatae numero hexaedrorum. Constructio haec est. Quilibet terminus componetur ex quintuplo seriei praecedentis columnae suae, et simplo seriei pariter et columnae praecedentis, ut ita stet semper:

5

$$\begin{array}{cccc}
 A & B & C & D \\
 E & F & G & 
 \end{array}
 \quad \text{et} \quad
 \begin{array}{l}
 E \sqcap 1A + 5B \\
 F \sqcap 1B + 5C \\
 G \sqcap 1C + 5D
 \end{array}$$

	0	1	2	3	4
1	$\alpha$	$\varepsilon$			
2	$\beta$	$\zeta$	$\iota$		
3	$\gamma$	$\eta$	$\kappa$	$\xi$	
4	$\delta$	$\theta$	$\lambda$	$\mu$	$\pi$
				$\rho$	

10

[Tab.] ⊙

3 terminus (1) fiet ex sum (2) componetur L 13 Unter Tab. ⊙:

Scribatur hoc modo nicht gestr.									
1									1
$\alpha$	1				$5^1 \sim$	1	1		1
$\beta$	Z	1			$5^2 \sim$	1	2	1	gestr. L
$\gamma$	H	$\kappa$	1		$5^3 \sim$	1	3	3	1
$\delta$	$\theta$	$\lambda$	$\mu$	1					

15 Scribatur: Dieser erste Versuch, die Verteilung der Ausgänge mit Hilfe des Arithmetischen Dreiecks wiederzugeben (vgl. auch Tab. 8), ließe sich durch geringfügige Änderungen retten:

$5^1 \sim$	1			
$5^2 \sim$	1	1		
$5^3 \sim$	1	2	1	
	1	3	3	1

$\alpha = 5$	$\varepsilon \cap 1$	
$\beta = \alpha^2$	$\zeta \cap 1\alpha + 5\varepsilon \cap 2, 5$	$\iota \cap 1$
$\gamma = \alpha^3$	$\eta \cap \overline{1\beta + 5\zeta (\cap 5\alpha + 5^2\varepsilon)} \cap 3, 5^2$	$\kappa \cap \zeta (\cap 2, 5) + 5\iota (\cap 5) \cap 3, 5$
$\delta = \alpha^4$	$\theta \cap \overline{1\gamma + 5\eta (\cap 5^2\alpha + 5^3\varepsilon)} \cap 4, 5^3$	$\lambda \cap 1\eta (\cap 3, 5^2) + 5\kappa (\cap 3, 5^2) \cap 6, 5^2$
5 etc.	etc.	etc.

---

$\iota \cap 1$	$\xi \cap 1$	
$\kappa \cap 3, 5$	$\mu \cap 1\kappa (\cap 3, 5) + 5\xi (\cap 5) \cap 4, 5$	
$\lambda \cap 6, 5^2$	$\rho \cap 1\lambda (\cap 6, 5^2) + 5\mu (\cap 4, 5^2) \cap 10, 5^2$	$\pi \cap 1$

10 [Tab.] D

Ex hac jam tabulae repraesentatione Analytica, inventa est ratio inveniendi quemlibet Tabulae terminum sine Tabula. Nimirum quilibet Tabulae numerus est multiplus potestatis Numeri numero Hedrarum Polyhedri unitate Minoris, hoc loco quinarum  $\cap y$ , affectus sub numero combinatorio. Quod ut clarius pateat tabulam  $\odot$  explicatam ope  
 15 Tabulae D, sic repraesentabimus:

		0	1	2		
	1	$1, y^1$	1			
	2	$1, y^2$	$2, y^1$	1		
	3	$1, y^3$	$3, y^2$	$3, y^1$	1	
20	4	$1, y^4$	$4, y^3$	$6, y^2$	$4, y^1$	1

[Tab. 8]

21 Am Rande eine punktuelle Probe der Tabelle:  $\frac{25}{6}$   
 $\frac{25}{150}$

10 Über Tab. D:  $|\alpha \cap 5 \beta \cap (1) 5\alpha (2) \alpha^2 \gamma \cap 5\beta \cap \alpha^3$  etc.  $\varepsilon \cap 1 \zeta \cap \alpha + 5\varepsilon$  gestr. | L  
 12 numerus (1) est potestas (2) est multiplus L 14 clarius (1) patet (2) pateat L  
 17  $1, y^1 1, |y^0$  gestr. | L

Hinc multa duci poterunt theoremata singularia. Lineas perpendiculares appellabo C o l u m n a s , et transversales appellabo S e r i e s : Exponentes potestatum in columnis crescunt progressionem arithmetica naturali: in seriebus decrescunt etiam progressionem arithmetica naturali. Afficientes potestatum in columnis sunt Unitates, Numeri Naturales, Numeri Triangulares, Numeri Pyramidales, Numeri Triangulo-Triangulares, verbo 5 Numeri figurati. Afficientes potestatum in seriebus sunt characteristici Potestatum Bino- micarum. Nempe sit radix  $a + b$ , cujus characteristici 1.1, quad.  $1a^2 + 2ab + 1b^2$ , cubus:  $1a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + 1b^3$ , et ita porro.

Problema palmarium huc redit: Dato numero Tesseractum, eundem numerum laterum habentium, iisdemque characteribus similiter inscriptarum, invenire numerum facierum, 10 tum simpliciter, tum earum, in qua datus character reperitur, aut non reperitur, aut datis vicibus reperitur. F a c i e s autem voco diversitates jactuum, tum a characteribus in supereminencia superficie apparentibus ortas, tum etiam ortas ab ipsis diversis Tesseris, quod ad sensum appareret, si iidem characteres diversis tesseris colore discernerentur vel 15 magnitudine, ut si sit Tessera sola cubus characteres unius Tesserae, *A. B. C. D. E. F.*, alterius *a. b. c. d. e. f.*, patet duabus tesseris ejusmodi jactis, differre *Ab* et *aB*. Et ita ut eodem exemplo insistamus, si sint 5 tesserae cubicae, quibus sex characteres *a. b. c. d. e. f.* diversis coloribus inscripti, quaeritur quot sint facies sive jactus diversi, in quibus una aliqua harum rerum exempli gratia, *a* reperitur vicibus 4. Vel positis quatuor tesseris, 20 quot sint jactus in quibus eadem res, ut *a* vicibus duabus. Sumatur numerus laterum polyhedri 6, sumatur et numerus tesseractum 4, et numerus duplicationum. A numero Tesseractum subtrahatur numerus duplicationum,  $4 - 2 \sqcap 2$ . Residuo addatur unitas, fiet 3. Jam ponantur tot numeri unitate sola differentes quorum minimus 3, quot sunt

1 theoremata (1) admir (2) singularia. Lineas (a) trans (b) horizontales (c) perpendiculares *L*  
 2 S e r i e s : (1) Afficientes (2) Exponentes *L* 3 naturali *erg. L* 3 progressionem (1) eadem (2) arithmetica naturali (a) Exponente (b) Afficientes *L* 4 sunt (1) Numeri, (2) | Numeri *gestr.* | Unitates *L*  
 6 sunt (1) Numeri (2) characteristici *L* 9f. redit: (1) Datis lateribus (2) Dato numero laterum polyhedri, (3) dato numero Polyhedrorum | similiter signatorum *erg.* | aequalem datumque numerum hedrarum habentium, (a) et similiter (b) et similiter sig (4) Dato numero Tesseractum, (a) et (aa) laterum (bb) lat (cc) latera numeri dati ejusdem, eademque similiter signata habentium, (b) eundem ... habentium, (aa) similiterque inscriptarum, aeqv (bb) similiterque inscriptarum in (cc) iisdemque characteribus (aaa) inscriptarum (bbb) similiter *L* 13 diversis (1) polyhedris ut (2) Tesseris *L*  
 14f. vel magnitudine *erg. L* 15 sola *erg. L* 16 a. b. c. d. e. f. (1) supponendo majusculos albo, alteros nigro colore scriptos, (2) patet *L* 17 sint (1) duae (2) 5 *L* 19 vicibus 4. (1) Problema ita solvetur (2) vel *L* 21f. duplicationum. (1) 2 (2) A numero ... duplicationum | vicinali *erg. L*, *streich* *Hrsg.* |,  $4 - 2 \sqcap 2$ . *L*

unitates in numero duplicationum, hoc loco, 2, nempe 3. 4. Hi numeri ducantur in se invicem. Factus ex ipsis dividatur per factum ex totidem numeris unitate differentibus quorum minimus unitas, multiplicetur 1. 2, nempe 2,  $\frac{12}{2}$   $\square$  6. Quotiens 6 multiplicatus per potestatem numeri numero laterum unitate minoris, hoc loco 5, cujus exponens differentia numeri tesseractum et vicium 2<sub>[,]</sub> seu 5<sup>2</sup>, seu 6, 5<sup>2</sup>  $\square$  150.

[*Teil 3*]

Problema

Dato numero Laterum, 6  
 (Tessera enim si[t] Cubica, Hexaedros)  
 10 Tesseractum ut 4 (6)  
 ut si 4 (vel 6) tesseris simul jaciendum sit,  
 et Repetitionum, 2 (4)  
 ut si quaerantur jactus, in quibus eadem punctorum configuratio,  
 ut  $\bullet\bullet$  (nam omnium par ratio) bis (vel quater) reperiatur  
 15 invenire numerum facierum, id est invenire numerum jactuum a se invicem  
 differentium, in quibus dato Vicium numero repetitur configuratio proposita. Diversitas  
 autem jactuum oritur tum ab ipsis punctis jactis, ut si duabus tesseris jaciamus nunc IV  
 et 5, nunc IV et 3, tum a tesseris quibus fit jactus, ut jactus IV et 5 differet a jactu V, 4,  
 si quod majusculis characteribus exhibetur, unius tesserae, quod minusculis alterius esse  
 20 intelligatur: quod apparet, si tesserae plures coloribus, vel aliis notis discernentur.  
 Nec vero tantum eorum quae jaciuntur, sed et tesseractum quibus fit jactus ratio habenda

3 unitas (1). Quotiens multiplicetur per (2), multiplicetur  $L$  7f. |Distinctius *erg. u. wieder gestr.* | Problema (1): Dato numero Tesseractum ut 4. (6) eundem ac datum laterum numerum  $\dots$  6. habentium |et ubique ac similiter inscriptarum *erg.* |, invenire Numerum facierum, in quibus aliquid character |inscriptus *erg.* | vel punctorum configuratio, ut  $\bullet\bullet$  aliave (nam omnium eadem ratio) dato vicium numero, v. g. vicibus  $\dots$  2. (4) reperiatur. brevius: (2) Dato  $L$  11 sit, (1) invenire (2) et Repetitionum  $L$  14 ut (1)  $\bullet\bullet$  (vel  $\bullet\bullet$ ) bis (vel quater) reperiatur (2)  $\bullet\bullet$  (nam  $L$  15 invicem (1) sive apparentia eorum quae jaciuntur, sive ipsis tesseris jactis, (2) differentium  $L$  17f. nunc (1) 4. et 5. (2) IV. et 5. (a) vel (b) nunc  $\dots$  ut (aa) IV a 5. (bb) jactus (aaa) 4 (bbb) IV. et 5.  $L$  20 quod |apparebet *ändert Hrsg.* |, si  $L$



est. Quia problema nostrum servire debet ad solutionem alterius problematis quod ita conceptum est: Si convenerit inter duos ut quoties 5 quatuor Tesseris jecerit certum capiat ⟨numer⟩um denariorum, contra, quoties 5 abfuerit, certum solvat, quaeritur quid debeat esse porportio inter capiendum et solvendum, ut aequalitas servetur. Non est hic sermo.

## Solutio

5

A Numero Tesserarum  $T$ ,  $\square 4$  (vel 6) subtrahatur numerus Repetitionum  $R \square 2$  (vel 4), supererit  $T - R \square 4 - 2 \square 2$  (vel  $6 - 4 \square 2$ ). Huic residuo  $T - R$ , addatur unitas, fiet  $T - R + 1 \square 3$  (vel 3).

Scribantur totidem Numeri continue sola unitate crescentes, quorum minimus  $T - R + 1$ , sive 3 (vel 3) nempe  $T - R + 1$ ,  $T - R + 2$ ,  $T - R + 3$  etc. quot sunt unitates in numero repetitionum  $R$ , sive in 2 (4) nempe 3. 4. (vel 3. 4. 5. 6.).

Hi numeri continue crescentes unitate ducantur in se invicem: Productum 12 (360) dividatur per factum, ex totidem numeris sola unitate differentibus, seu sumtis deinceps

ab unitate, 1 in 2  $\square 2$  (1 in 2 in 3 in 4  $\square 24$ ) fiet  $\frac{12}{2} \square 6$   $\left( \begin{array}{r} 12 \\ 360 \\ 244 \\ 2 \end{array} \right) f 15$ .

Quotiens ducatur in numerum laterum tesserae, unitate minutum, hoc loco 5, toties in se ductum, quot in  $T - R$ , differentia Numeri Tesserarum et Repetitionum 2 (2) sunt unitates id est in  $5^2$  ( $5^2$ )  $\square 25$  (vel 25) fiet  $6 \wedge 25 \square 150$  ( $15 \wedge 25 \square 375$ ).

2 quoties 5 (1) tribus (2) qvatuor  $L \quad 6$  Repetitionum (1) 2 (2)  $R \square 2$ , (a) (4) fiet (b) (vel 4) supererit  $L \quad 8$  f.  $\square 3$  (| vel *erg.* | 3). (1) Ducantur in (2) Scribantur  $L \quad 10$   $T - R + 1$ , (1) qvot (2) sive 3 vel (3)  $L \quad 12$  f. invicem: (1), fiet: ⟨6⟩ (2) Productum ... per (a) totidem (b) factum,  $L \quad 13$  seu sumtis *erg.*  $L \quad 15$  ducatur (1) in numerum laterum te(r) (2) in (a) ⟨Qvadratum⟩ (b) | qvi est *nicht gestr.* | numerus (c) numerum  $L$

---

1 alterius problematis: Bei diesem handelt es sich vermutlich um das im Titel erwähnte Problem des Herzogs von Roannais. Die Lösung für den hier genannten Fall mit vier Würfeln lässt sich Tab. 5 auf S. 66 entnehmen. 6 (vel 6): Die eingeklammerten Zahlenangaben und Berechnungen in der *Solutio* fügt Leibniz nachträglich hinzu, um so ein zweites konkretes Beispiel für die Lösung des Problems zu geben. 17 Diese korrekte, bereits auf S. 69 f. beschriebene Lösung lässt sich modern wie folgt ausdrücken: Beim Wurf von  $T$  unterscheidbaren Würfeln ist die Zahl der Ausgänge, die genau  $R$  mal eine zuvor festgelegte Augenzahl zeigen, gleich  $\binom{T}{R} 5^{T-R}$ .

[*Französische Zusammenfassung*]

Le nombre des dez (6), et des repetitions (4) estant donnés trouver le nombre des doublets (375), suivant la repetition donnée (4) sans se servir d'aucune table, calcul de suite.

- 5 Du nombre des dez ostez le nombre des repetitions, ajoutez l'unité à ce qui reste (2). Et faites que ce qui provient (3) soit le moindre d'autant de nombre[s] croissans par l'unité (3. 4. 5. 6), qu'il y a d'unités dans le nombre des Repetitions (4). Multipliez tous ces nombres l'un par l'autre de suite. Et divisez le produit (360) par le produit (24) [d']autant de nombres croissans par 1 et commençans par 1 (1. 2. 3. 4) ce qui se
- 10 peut toujours faire sans reste. Multipliez le quotient (15) par la puissance de 5 (25) dont l'exposant (2) est la difference du nombre des dez et des repetitions. Et le produit (375) satisfera à la demande.

3f. sans ... suite *erg. L* 5 repetitions, (1) (reste 2) ajoutez y l'unité (3) Et vous aurez un nombre, qui sera le moindre, d'autant de nombres croissans par l'unité (2) le quel doit estre multiplié par (3) ajoutez *L* 8f. le produit (24) *erg. L* 9 croissans par (1) l'unité, ou le moindre soit l'unité meme (2) 1. et *L*

---

2 (6): Auch die französischsprachige Kurzfassung ergänzt Leibniz nachträglich um die in Klammern gesetzten Zahlenwerte eines konkreten Beispiels.

## 11. DE ANALYSEOS HISTORIA

[Oktober 1674 – Januar 1675]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 VIII 14 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S.

Cc 2, Nr. 793

Datierungsgründe: Leibniz' Ausführungen in diesem Stück setzen inhaltlich seine Studien zur Algebra in den Jahren 1673 und 1674 voraus. Ein erster *terminus post quem* ist durch die Erwähnung des *Horologium oscillatorium* von Huygens (erschienen im Frühjahr 1673) gegeben; ein erster *terminus ante quem* lässt sich aus dem Umstand ableiten, dass Rafael Bombelli, mit dessen *Algebra* sich Leibniz seit dem Frühjahr 1675 beschäftigt (vgl. VII, 2 N. 49), im Stück nicht genannt wird. Diese Eingrenzung kann weiter präzisiert werden: So schließt die Verwendung eines Ergebnisses aus dem zwischen Dezember 1673 und Juni 1674 verfassten Stück VII, 7 N. 7 eine Niederschrift vor Ende 1673 aus. Und die Bemerkungen zu Sluses *Mesolabum* deuten darauf hin, dass Leibniz das Stück erst verfasst, nachdem er Mitte 1674 jenes Werk exzerpiert (VII, 7 N. 16) und für seine eigenen Arbeiten erschlossen hat; die vorherige Lektüre der Rezension des *Mesolabum* in den *Philosophical Transactions* hätte ihm nicht die gleiche Sicherheit des Urteils verschaffen können. In seiner Bemerkung zu Boulliau schließlich bezieht sich Leibniz mit ziemlicher Sicherheit auf das Gespräch mit diesem am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31). Ein weiteres Indiz für eine Niederschrift nicht vor Oktober 1674 ist die Erwähnung Gosselins, denn Leibniz' Exzerpte aus und Marginalien in Gosselins *De arte magna* (VII, 3 N. 41) sind gesichert nicht vor Oktober 1674 (und wahrscheinlich nicht nach Januar 1675) entstanden. Die Erwähnung der *Geometriae pars universalis* von Gregory erhärtet eine Datierung auf diese Periode weiter, denn Leibniz' erste bisher bekannte Nennung dieses Werkes stammt aus dem Dezember 1674 (vgl. VII, 1 N. 13 S. 130 f.) Die Erwähnung von Girards *Invention nouvelle* spricht nicht gegen diese Datierung. Zwar wird Leibniz' bisher früheste Erwähnung dieser Publikation (VII, 2 N. 17 S. 189) auf März bis Mai 1675 datiert, und ihre erste Erwähnung im Briefwechsel ist die in Oldenburgs Brief vom 22. April 1675 (III, 1 N. 49 S. 242), doch wird sie in Schootens Appendix erwähnt, den Leibniz bereits seit Herbst 1674 zitiert (VII, 2 N. 3 S. 32). Insgesamt betrachtet ist unser Stück also sicher nicht vor Oktober 1674 und wohl eher nicht nach Januar 1675 entstanden.

## De Analyseos Historia

Calculus literalem in locum numeralis primus omnium credo introduxit Franciscus Vieta, tametsi enim Gosselinum quendam aliosque obscuriores Algebrae scriptores

27 De Analyseos Historia *erg. L*28 introduxit: Vgl. Fr. VIÈTE, *In artem analyticam isagoge*, 1591 (= VO S. 1–12), Bl. 7 r° (VO S. 8).29 Gosselinum: Vgl. G. GOSSELIN, *De arte magna*, 1577, etwa auf Bl. 82 v° u. 84 v°. 29 obscuriores: Dies trifft etwa auf Jean Borrel zu; vgl. J. BUTEO, *Logistica*, 1559, Bl. 189 r°.

literis nonnunquam usos videam, tamen nec in exemplum eorum valuit autoritas; et ad novae scientiae formam longe aliis praeterea observationibus opus erat. Vieta autem cum videret antecessores suos in quaestionibus implicatioribus pluribus una incognitis oblati duabus unitatibus fictitiis uti; satius credidit numeros cognitos incognitosque literis  
 5 exprimere. Ita enim et lineis accommodari posse easdem ratiocinationes, et Arithmeticae cum Geometria consensum apparere, exemplo Geometrarum, qui in doctrina de rationibus magnitudines literis designant et alioquin rectam extra figuram positam, ad propositionem tamen pertinentem, una litera notatam separatim exhibere solent. Idem primus rationem ostendit excitandi ex radicibus aequationem quandam propositae simili-  
 10 lem, ut ex ejus genesi propositae analysis appareret; unde factum quoque est ut Analytica appelleretur, quam alii speciosam vocant. Ego Calculum Symbolicum appellare malim.

Porro Vieta neminem Artis suae oppugnatorem habuit, praesertim cum de ejus usu modeste sentiret ipse. At Cartesius, ut erat inventorum alienorum in rem suam accommodandorum artifex insignis, cum ope calculi duo in Geometria praestitisset egregia;  
 15 digestionem in classes locorum sive linearum calculi capacium, quarum intersectione aequationes construerentur, et inventionem tangentium, per aequationes duarum radicum aequalium. Dissimulato prorsus aut contemto Vieta, in totius scientiae autorem erigere se posse credidit, cui ut pollicitationum magnitudine pretium faceret; libro edito scribere ausus est, nullum esse problema quod methodo sua solvi non possit. Cumque animadver-

2f. cum (1) observasset (2) videret *L* 4 credidit (1) pro qualibet *q* (2) quantitates literis (3) numeros *L* 6f. in doctrina ... alioquin *erg. L* 11 quam (1) alibi (2) alii *L* 14 in Geometria *erg. L* 15f. digestionem (1) locorum sive linearum Geometricarum in Classes, (2) in ... linearum (a) Analyseos, (b) calculi capacium | quarum intersectione (aa) problemata (bb) aequationes construerentur *erg. |*, et *L* 16 tangentium, (1) ope duarum radicum aequalium (2) per *L* 17 in (1) novae (2) totius *L* 18 faceret; (1) jactavit in lib (2) in libro (3) libro *L* 19–75,1 animadverteret (1) Methodos suas (2) eam *L*

---

9 ostendit: Fr. VIÈTE, *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*, 1615, insbesondere S. 128 f. (VO S. 158). 11 speciosam: DERS., *In artem analyticam isagoge*, 1591, Bl. 5 r<sup>o</sup> (VO S. 4) unterscheidet das Rechnen mit Buchstaben als *logistica speciosa* von der *logistica numerosa*, dem reinen Zahlenrechnen. 16 construerentur: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I S. 1–106. 16 tangentium: Vgl. ebd., S. 40–49. 19 nullum: Vgl. ebd., S. 1 u. 118. Eine ähnliche Kritik an Descartes übt Leibniz bereits im Sommer 1673 in seinem Stück *Fines geometriae* (VII, 4 N. 25, S. 594 f.). Das Postulat „nullum non problema solvere“ geht allerdings auf Fr. VIÈTE, *In artem analyticam isagoge*, 1591, Bl. 9 r<sup>o</sup> (VO S. 12) zurück.

teret eam ad curvilinearum dimensiones non porrigi, impossibile pronuntiavit rectam exhibere curvae aequalem, quod scilicet nulla tunc  $\epsilon\upsilon\theta\upsilon\nu\sigma\iota\varsigma$  extaret.

Ea Viri confidentia ipsi pariter Artique adversarios paravit. Erant tunc in Gallia duo Geometrae insignes, Fermatius et Robervallius, quorum ille paraboloeidum omnium quadraturas, et methodum de maximis et minimis (qua et tangentes continebantur) dederat. 5 Hic cycloeidis et solidi ejus circa axem exhibuerat dimensionem; aliaque problemata praeclara produxerat, quae manifestum erat Cartesianae Methodo non subjici, quod scilicet ad aequationes revocari non possent. Hi ergo praeterquam quod jactantiam manifeste absurdam ferre non possent; etiam illud non probabant, calculi praetextu a quibusdam constructiones Geometricas negligi, quarum elegantiae veteres cumprimis operam dedisse 10 constabat.

Thomas Hobbes a Cartesio in *responsionibus ad objectiones Metaφysicas* indigne habitus; edito libro *de Corpore*, occasionem nactus de calculo ita censuit; modeste satis;

3 Viri (1) arrogantia (2) fiducia (3) confidentia L    6 axem (1) dederat (2) exhibuerat L  
6 f. praeclara (1) solverat (2) produxerat L    7 Methodo (1) solvi non posse, (2) non L    9 praetextu  
(1) elegantes veterum (2) a quibusdam L    12 indigne (1) tracta (2) habitus L    13 nactus de (1)  
symbolica (2) calculo L

---

1 pronuntiavit: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39.    5 dederat: Fermats Extremwertmethoden wurden in P. HERIGONE, *Supplementum cursus mathematici*, 1642 u. 1644, S. 59–69, dargestellt, später auch in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255. Über die Existenz von Fermats Quadratur höherer Parabeln war Leibniz durch Roberval unterrichtet (vgl. VII, 6 N. 491 S. 507); vgl. auch den Brief von Fermat an Mersenne von Februar/März 1642, tlw. gedr. in M. MERSENNE, *Tractatus mechanicus*, 1644, praefatio, § IV, Bl. a1 v<sup>o</sup>–a2 r<sup>o</sup> (*FO* I S. 195–198; M. MERSENNE, *Correspondance* XI, S. 55–58).    6 exhibuerat: Vgl. den Brief von M. Mersenne an R. Descartes vom 28. April 1638, in: R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; M. MERSENNE, *Correspondance* VII, S. 173–179). — Robervals Quadratur der Zykloide erwähnt Leibniz bereits im Sommer 1673 (vgl. VII, 4 N. 36 S. 595).    12 responsionibus: Descartes' *Meditationes de prima philosophia* von 1641 waren als Beilage die brieflichen Einwürfe (*Objectiones*) von philosophischen Gegnern, darunter Gassendi und Hobbes, und deren Beantwortungen (*Responsiones*) angefügt. In diesen wird ein grundlegendes Unverständnis gegenüber Hobbes' Positionen deutlich.    13 censuit: Leibniz hat Hobbes' *De corpore* sowohl in der Erstausgabe von 1655 wie in der überarbeiteten Ausgabe von 1668 studiert (vgl. U. GOLDENBAUM, *Indivisibilia vera. How Leibniz Came to Love Mathematics*, in: DIES. u. D. JESSEPH (Hrsg.), *Infinitesimal Differences*, 2008, S. 53–94). Hier bezieht Leibniz sich vermutlich auf die Formulierung der Erstausgabe: „Estque Analyticae, ut ita dicam, brachygraphia, ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi. Nam etsi inter propositiones longe dissitas, facilis sit per Symbola discursus, an tamen is discursus, cum fiat

etsi inter res longe dissitas facilis sit per symbola discursus, cum tamen fiat sine ipsarum rerum ideis, an valde utilis existimandus sit, se nescire. Postea vero a Wallisio Oxoniensi Mathematico scholarum ab Hobbio contumeliose tractatarum propugnatore durius acceptus, in ipsam ejus Methodum bilem effudit, edito libro de *Emendatione Mathematicae hodiernae*, ubi non contentus inutilem pronuntiare, etiam erroneam ostendere, posse sibi visus est. Ei vero ita a Wallisio satis mea sententia factum ut de Calculi symbolici veritate possimus esse securi; solaque de utilitate disceptatio supersit.

De Utilitate autem Analyseos quem vocant, variant sententiae doctorum quoque Virorum: alii nullam agnoscunt, alii velut inveniendi principium in pretio habent, ad

2 an (1) satis (2) valde utilis (a) existimanda (b) existimandus L 4 in (1) methodum eius, id est calculum symboli (2) in (3) ipsam L 6 sibi erg. L 6 f. factum (1) est (2) ut de (a) eius (b) Calculi symbolici (aa) usu in (bb) veritate . . . securi; (aaa) nec nisi (bbb) solaque L 8 Utilitate (1) Calculi Analytici (2) autem . . . vocant, (a) duae p (b) variant L

---

sine ipsarum rerum Ideis valde utilis existimandus sit, certe nescio.“ (*De corpore*, 1655, cap. 20, S. 181.) 1668 hatte Hobbes den ersten Teil der Aussage bereits verschärft: „At Symbolica, qua permulti hodie utuntur putantes esse Analyticam, nec Analytica est nec Synthetica, sed calculationum Arithmeticarum quidem vera, Geometricarum autem falsa Brachygraphia ars quidem non docendi neque discendi Geometriam, sed inventa Geometrarum celeriter et compendio in Commentarios redigendi.“ (*De corpore*, 1668, S. 157; *HOL* I, S. 257 f.) 3 propugnatore: Leibniz bezieht sich hier wahrscheinlich u. a. auf die 1654 anonym veröffentlichte Streitschrift *Vindiciae academiarum*, welche von Wallis' Kollegen in Oxford, dem Astronomieprofessor Seth Ward und John Wilkins, dem Warden von Wadham College, verfasst worden war. Sie richtete sich gegen die Kritik an den Universitäten in Th. HOBBS, *Leviathan*, 1651, S. 179 f. (*HEW* I, S. 330–332). Wallis mischte sich mit seiner Schrift *Elenchus geometriae hobbiana*, 1655, in diese Kontroverse ein. 5 ostendere: Th. HOBBS, *Examinatio et emendatio mathematicae hodiernae*, 1660 (*HOL* III, S. 1–232). 6 factum: Vgl. J. WALLIS, *Hobbius heauton-timorumenos*, 1662, sowie DERS., *Animadversions of Dr. Wallis, upon Mr. Hobs's Late Book, De principiis et ratiocinatione geometrarum*, in: *Philosophical Transactions* I, Nr. 16 vom 6./16. August 1666, S. 289–294; DERS., *Thomae Hobbes quadratura circuli confutata*, 1669; DERS., *Thomae Hobbes quadratura circuli denuo refutata*, 1669; DERS., *An Answer of Dr. Wallis to Mr. Hobbes's Rosetum Geometricum in a Letter to a Friend in London, Dated July 16.*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 73 vom 17./27. Juli 1671, S. 2202–2209; DERS., *An Answer to Four Papers of Mr. Hobs*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 75 vom 18./28. September 1671, S. 2241–2250; DERS., *Dr. John Wallis his Answer, by Way of Letter to the Publisher, to the Book, Entitled Lux Mathematica, etc.*, in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 87 vom 14./24. Oktober 1672, S. 5067–5073. — Zumindest die Artikel und Rezensionen in den *Philosophical Transactions* waren Leibniz mit Sicherheit bekannt. Seine Haltung zu Hobbes' Positionen entwickelte sich entsprechend von fast euphorischer Zustimmung (vgl. seinen ersten Brief an Hobbes, 13./23. Juli 1670; II, I N. 25 S. 90 ff.) hin zu einer differenzierteren Sichtweise (vgl. Leibniz an Hobbes, 1674; II, I N. 119 S. 385).

demonstrandum parum valere existimant. Sunt contra qui prae symbolica linearem Methodum spernunt; a quibus omnibus diversa mihi ratio ineunda videtur. Nam qui prorsus inutilem putant experientia refutantur. Ope Analyseos Albertus Girardus vidit trisectionem anguli et aequationem quandam cubicam eodem reduci. Ope analyseos problemata ad duo loca reduci posse infinitis modis, quorum intersectione solvantur, ut Cartesius primum et egregie inprimis Slusius ostendit. Cartesius praeclaram inventionem duarum mediarum proportionalium ex hoc fonte duxit, per Circulum et Parabolam, et proprietatem Hyperbolae ad usum dioptricum. Calculo debetur praeclarum Hugonii inventum de Isochronismo Cycloedis, ego quoque qui primus Circulum reduxi ad progressionem numerorum rationalium illud de me fateor, sine symbolorum usu, per tantos anfractus quod inveni ne quaesitum quidem fuisse. 5 10

Cl<sup>mo</sup> Viro Ismaeli Bullialdo illud largior, sola Cartesiana methodo ne simplicissimam quidem quadraturarum, parabolicam, deprehendi posse; et ratio est, quia Cartesius non nisi aequationum resolutiones et constructiones tradidit; problemata autem quadraturarum ad aequationes reducere nemo docuit. Idem tamen fatebitur, locorum analyticam, si accedant principia Archimedis aut Cavalerii ad ipsas quoque quadraturas magni usus esse. 15

3 refutantur. (1) Ope Analyseos Cartesius dedit praeclaram constructionem duarum mediarum proportionalium (2) Ope L 4 analyseos (1) loca (2) problemata L 5 posse (1) constat (2) infinitis L 5 f. Cartesius primum et erg. L 7 per (1) Analysin (2) Circulum L 7 f. , et proprietatem ... dioptricum erg. L 12 sola erg. L 14 resolutiones (1) sive (2) et L 14 f. quadraturarum (1) non possunt redu (2) ad (a) aequationem (b) aequationes reducere (aa) non docuit (bb) nemo L 15 tamen (1) fateor (2) fatebitur locorum (a) doctorum (b) analyticam L

---

3 vidit: A. GIRARD, *Invention nouvelle*, 1629, D2 v<sup>o</sup>–D3 v<sup>o</sup>. — Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*, 1659, DGS I S. 345–368. 5 reduci: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I S. 1–106; R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, insbesondere *Pars altera de analysi*, S. 51–95 (von Leibniz Mitte 1674 in VII, 7 N. 16 exzerpiert). Vgl. auch das im letzten Quartal 1674 verfasste Stück VII, 7 N. 40 S. 426. 6 inventionem: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I S. 67–69. 7 f. proprietatem Hyperbolae: Vgl. DERS., *La dioptrique*, 1637, S. 89–121 (DO VI, S. 165 bis 196). 9 Isochronismo: Vgl. Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (HO XVIII S. 158–187). 9 reduxi: Vgl. die in Band VII, 6 zusammengefassten Handschriften zur arithmetischen Kreisquadratur. 12 largior: Leibniz bezieht sich hier sehr wahrscheinlich auf das Gespräch mit Boulliau am 3. Oktober 1674 (VII, 5 N. 6 S. 31), in dem dieser bestritten hatte, dass die Resultate von Archimedes, zu denen auch die hier erwähnte Quadratur der Parabel gehört, allein mit den Mitteln der Algebra erzielt werden könnten.

Analyticen demonstrare posse non est cur dubitemus, nam doctrina est de Magnitudine in universum, qua numeris, spatiis, temporibus, motibus communia traduntur; de magnitudine autem in universum demonstrationes extare nemo credo in controversiam revocabit.

5 Omnis calculi ratiocinatio non nisi axiomaticum Euclideanum, si aequalibus (proportionalibus) addas (auferas) aequalia (proportionalia) fieri aequatio (proportionalia): aequalium aequimultipla esse aequalia; totum parte majus esse, aliorumque id genus catena est: non minus quam demonstrationes lineares: ita ut plerumque alterae ab alteris non magis distare videantur, quam idem sensus verbis nunc latinis nunc Gallicis redditus  
10 a se ipso. Cum addere aut subtrahere calculus jubet, tu lineas ducis, cum ille multiplicat, tu rationes componis; cum dividit, cum regulam auream exercet, quaeris tertiam quartamve proportionalem. Cum ad potestates puras aut potestatum purarum radices assurgit, tu medias proportionales investigas. Hactenus alter alterum pari passu secutus est. Sed ubi ille ad affectum gradum protulit, ubi divisores aequationum inquirat, ubi  
15 per aequationes plurium incognitarum, inter se junctas ex similium comparatione natas per abrupta sibi viam facit; et rebus quodammodo vim infert; tu impar sequendi, velut inter nubes condentem caput vix oculis comitere. Nam saepe quae unius plagulae calculo exhibentur, vix justo volumine per lineas repraesentaveris: nullo profecto fructu; cum sub rerum multitudine lassa fatiscat imaginatio cujus potissimum causa linearum ductus  
20 adhibentur.

2 numeris, (1) lineis, motibus, communia traduntur figuris (2) spatiis L 4f. revocabit. (1) Qvare (a) demonstratio (b) praecepta Analytica Geometrice demonstrare velle, perinde est, (aa) ac praecepta (bb) ac (aaa) demonstrationes (bbb) theoremata Geometricas per Empiricae quoddam genus ostendere, quod doctissimus Geometra Joachimus Jungius in tironum usum eleganter instituerat. Qvod ut suo usu non caret, ita necessarium nunquam (aaaa) etsi (bbbb) et nisi (aaaaa) cum (bbbbbb) in illis exemplis ubi peculiari elegantia praestari potest, supervacuum (2) Omnis L 6 (proportionalia): (1) aequimultiporum aequalium (2) aequalium L 7 esse, (1) etc. (2) aliorumque L 8 plerumque (1) Geom (2) alterae L 9 non (1) maius (2) magis L 11f. dividit, |cum ... exercet erg. | quaeris tertiam (1) proportionalem (2) quartamve L 12 puras erg. L 12 purarum erg. L 14 ad (1) affectas aequationes (2) |affectas ändert Hrsq. | gradum protulit, |ubi ... inquirat erg. | ubi |per erg. | aequationes L 16 vim (1) facit (2) infert; tu (a) e (b) longinqvo (c) non nisi (d) impar L 17 comitere. Nam (1) im (2) ea saepe operationum multitudo unius plagulae calculo comprehenditur, ut lineis exhibere velle (3) Nam L 18 vix (1) integri voluminis (2) justo L 19 sub erg. L 19f. ductus (1) exhibentur (2) adhibentur L

---

5 axiomaticum: Vgl. die Liste der Axiome in EUKLEIDES, *Elementa*, I. 17 inter ... oculis: P. VERGILIUS Maro, *Aeneis*, IV, 177. 24 instituerat: Vgl. J. JUNGIUS, *Geometria empirica*, 1627.



Fateor equidem saepe fieri, ut quae prolixo calculo invenimus demonstrari possint paucis linearum ductibus. Sed tunc rursus distinguendum arbitror. Compendium enim aut verum est aut apparens. Verum cum totam ratiocinationem lineis exhibemus valde contractam, apparens cum inter demonstrandum ad alias propositiones alibi demonstratas lectorem remittimus quae rursus ex aliis pendent, ut junctis in unum omnibus futura sit demonstratio linearis ipso calculo prolixior. Cum apparens est brevitās rursus distinguo nam propositiones quibus utimur inter demonstrandum aut pulchrae sunt atque elegantes ac dignae velut ad perpetuam rei memoriam condi Archivis Geometrarum; quo casu utilis est demonstratio Geometrica veritatis calculo inventae. Calculi fructus, non in praesens tantum problema, sed in perpetuum valit(uri) ut egregia ratiocinandi compendia inter calculandum inventa theorematis inclusa servantur in usum. Sin quod ego calculo inveni, tu lineis exhibes, inversa tantum calculi vestigia describentibus; operam tuam laudare non possum. Hoc enim admissio infinitis voluminibus sine ratione Geometria onerabitur. Quando autem evenit ut demonstratio linearis vere brevis sit, nec nisi pauca lemmata, aut theoremata alibi demonstrata, requirat, tum vero plerumque eveniet, ni fallor, ut eadem brevitate per calculum quoque possit absolvi. Ibi ergo eligendi libertas esto scriptori. Ego certe malim autorem mihi analysin suam quam synthesin dare; nam eadem opera et inventionis rationem patefaciet, quae inter linearum ductus non aequē tralucet: scriptoris autem interest aliquando lineis potius quam calculis uti; nam ita et profanos longe a scientiae mysteriis arcebit, et inventis suis plus admirationis conciliabit. Ita enim plerumque comparatum est, ut quae minus intelligimus magis suspiciamus. Eoque consilio non est dubitandum ab Archimede usum indivisibilium, ab Apollonio et Pappo calculi vestigia suppressa esse, praesertim cum artes illae non nisi paucis et magnis

1 f. possint (1) paucis verbis (a) ac (b) sed tunc (2) paucis (a) linearum ductibus; idque praesertim sagaci Analytico saepe monstrat ipse Calculi exitus; quo casu adeo non improbo (b) linearum ... tunc (aa) illud (bb) rursus L 2 Compendium (1) autem (2) enim L 3 Verum (1) si (2) cum (a) nihil extra (b) totam L 4 f. ad (1) aliam propositionem (2) alias propositiones | alibi (a) demonstrationes (b) demonstratas erg. | lectorem L 7 inter demonstrandum erg. L 8 dignae (1) memorari; (2) velut L 9 inventae. (1) Cum hic sit potissimus (2) calculi (a) non fructu (b) fructus, L 10 perpetuum (1) utilis et valit(urus) (2) valit(uri) L 13 possum. (1) Ita enim infinitis (2) Hoc L 13 sine (1) usu (2) ratione L 15 pauca (1) aliunde (2) vel (3) lemmata, aut | theoremata erg. | alibi demonstrata, (a) | adhibeat nicht gestr. | (b) requirat, tum (aa) maxime ea (bb) vero L 16 brevitate (1) lineis (2) per L 16 possit (1) exhiberi. (2) absolvi. Ibi (a) vero (b) ergo L 21 f. magis (1) admiremur (2) suspiciamus (a) Idque (b) Eoque L 23 calculi (1) compendia (2) vestigia L

viris notae, apud vulgus Geometrarum erroris suspicione cauturae non fuissent; quod nunc minime metuendum est, rebus in clariore luce collocatis.

Caeterum cum soleant homines suam quisque artem plus aequo admirari, mirum non est analyticos ex adverso linearium demonstrationum usum elevasse. Neque enim nisi magnis viris et ad omnia paratis competit aequae de rebus omnibus judicia ferre. Ex quibus Schotenius eo usque proventus est, ut libros theorematum inutiles pronuntiaret, cum inquit, eadem suo quisque Marte per calculum investigare possit, intellectis semel *Elementis* Euclidis, et praeceptis Analyticis. Itane vero? Tu admiranda Archimedis inventa, et pulchra Apollonii theoremata, et exquisitas Pappi *Collectiones* inutiles pronuntias. Poteras eodem jure dicere, praeter Euclidem et Cartesium, et tuos in eum *Commentarios* omnes de Geometria libros supervacuos esse. Ego vero ita sentio hunc potissimum esse calculi fructum, ut propositiones, quae nihil aliud quam elegantia calculi compendia sunt, in aerarium publicum referantur, quo aliis imposterum quaerendi labor minuatur. Quare nec Cartesii consilium probo quod ipsum scio non secutum, qui duobus tantum uti suadebat Theorematis; (triangulorum similium latera proportionalia esse; et in Triangulo rectangulo quadratum hypotenusae quadratis duorum reliquorum laterum aequari). Nam expertus scio, ad ingentes saepe calculos, reductu difficiles attolli, quae per inventa theoremata nullo negotio conficiuntur. Adde quod saepe ne in mentem quidem nobis veniret, ejusmodi propositiones quaerere, quarum ubi aliis inventae sunt demonstrationem postea vel calculo vel lineis investigare plerumque non arduum est.

1 Geometrarum *erg.* L    4 adverso (1) linearis Geometriae usum (2) linearium L    4 f. Neque ... ferre *erg.* L    8 Itane vero? *erg.* L    10 dicere, (1) | post *nicht gestr.* | (2) praeter L    11 libros (1) inutiles (2) supervacuos L    12 ut (1) elegantia ca (2) propositiones L    13 referantur (1). Ita (2), qvo L    15 uti (1) se ajebat (2) suadebat L    15 latera (1) homologa (2) proportionalia L    17 ad (1) immensos saepe (2) ingentes saepe calculos (a) assurgi, (b), reductu L    18–20 Adde ... investigare (1) saepe nec (2) plerumque ... est *erg.* L

---

7 inquit: Vgl. z. B. Fr. van SCHOOTEN, *Praefatio ad lectorem*, in: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I Bl. 2 r<sup>o</sup> („Nec enim video, quid impraesentiarum, post mediocrem in Arithmeticae et Geometriae elementis exercitationem, calculique, eadem Introductione explicati, notitiam, Lectori moram injicere possit, quo minus inoffenso pede ad hanc Geometriam accedat“), sowie Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 206 f.    15 duobus ... Theorematis: R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 461 (*DO* IV S. 38); bei den Theoremen handelt es sich um EUKLEIDES, *Elementa*, I, 47 u. VI, 4.

Ego igitur media sententia antecedendum arbitror; egregias propositiones in literas referri, et quod hinc sequitur, ubi res postulat adhiberi debere arbitror. Proposito problemate primum elementa experiunda, antequam ad calculum accedatur qui non nisi difficilioribus *i n v e n i e n d i s* servari debet. De demonstrationibus jam inventorum si literalis pariter ac linearis, suas quaeque peculiare elegantias habeat, posse utramque exhiberi, quemadmodum nihil prohibet, duas ejusdem theorematis dari demonstrationes lineares; si alterutra earum elegans videatur, altera simplicem calculi tramitem sequatur praeferrere debere. Si neque literae neque lineae quicquam singulare exhibeant inter demonstrandum; literales demonstrationes lectori, lineares scriptori utiliores.

Exemplum subjiciam unicum a me observatum: Dixerat Cartesius ex calculo sibi constare: si Circulus parabolam secet, demissarum ex punctis intersectionis in axem parabolae perpendicularium ab uno latere summam; summae perpendicularium ab altero latere aequari. Schotenius ut theorematis veritatem calculo investigaret, tres credo paginas in suis *Commentariis* complevit; hoc cum animadvertisset Jac. Gregorius Scotus, demonstrationem investigavit Geometricam sic satis elegantem. Ego vero reperi, per analysin demonstrari posse tribus verbis: eademque opera etiam detexi qua ratione Theorema tam elegans invenerit Cartesius, et qua ratione innumera alia similia in aliis curvis, sese

1 f. egregias (1) theoremata (2) propositiones in literas (a) referendae (b) referri L 2 f. postulat (1) adhibendas cum fructu (2) adhiberi (a) posse (b) debere arbitror. (aa) De quo (bb) De demonstrationibus | <autem jam inventorum> erg. | cum ita sentio (aaa) literalem (bbb) si literalis pariter ac linearis (cc) proposito (aaa) ad inveniendum (bbb) problemate L 8 neque (1) calculus (2) literae L 9 demonstrandum; (1) calculum (2) literas (3) literales L 11 f. secet (1) in punctis (2) demissarum (a) in (b) ex ... perpendicularium (aa) summam, unius (bb) ab uno ... ab (aaa) uno (bbb) altero L 13 ut (1) theorema hoc (2) theorematis L 15 Geometricam (1) prolixius (2) non admodum (3) sic satis L 16 ratione (1) prob (2) Theorema L 17 curvis, (1) inter se (2) sese L

---

10 Dixerat: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 92. 14 complevit: Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 330–343. 15 demonstrationem: Vgl. J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 70, S. 130–132. 15 reperi: Ein kurzer algebraischer Beweis macht sich zunutze, dass sich die Schnittpunkte von Kreis und Parabel über eine Gleichung 4. Grades, bei welcher der kubische Term fehlt, berechnen lassen. Aus der Multiplikation der Linearfaktoren aber ergibt sich, dass der Koeffizient dieses kubischen Terms gleich der negativen Summe der vier Wurzeln dieser Gleichung ist, womit diese gleich Null sein muß. Bei seinen Überlegungen zur *constructio aequationum* stellt Leibniz eine Gleichung für die Schnittpunkte von Kreis und Kegelschnitt auf (vgl. VII, 7 N. 7 S. 43–48), von welcher die für den genannten Beweis benötigte ein viel einfacherer Spezialfall ist.

invicem aut circulum secantibus, aliis rectis in axis locum cum opus est adhibitis, concin-  
nari possint, quod neque Schotenus calculo suo, neque Gregorius linearum ductu praes-  
titerint. Quod si ergo haec propositio in aerarium theorematum referri deberet: nemo  
prudens in dubium revocabit; analyticam demonstrationem caeteris praestare: cum et  
5 inventi rationem detegat. Imo si mihi id negotii datum esset, ego problematis instar ita  
conciperem: Datis duabus curvis se secantibus, invenire lineam rectam in quam demissae  
ex punctis intersectionis unius lateris angulo dato, simul sumtae; sint rectis alterius la-  
teris simul sumtis aequales. Cujus problematis solutio generalis ostendet in parabola,  
rectam quaesitam esse ipsum axem; et si angulus datus sit rectus. Hoc ergo theorema,  
10 problematis generalis non nisi corollarium erit.

Quoniam ergo de propositionum Geometricarum Aerario, mentio semel iterumque  
hic incidit: adjiciam paucis: inter potissima Mathematicae doctrinae desiderata a me  
censeri, librum, omnes propositiones geometricas elegantes hactenus inventas, quanta  
licet brevitate demonstratas, ipso demonstrandi ordine continentem. Demonstrationes  
15 autem tales esse debere, cum licet, ut eadem opera inveniendi rationem ostendant. Usus  
ingens foret tum ad inveniendum, (theorematis praeclaris omnibus velut in conspectu po-  
sitis), tum ad demonstrandum. Multa enim apud Archimedes et ejus commentatorem  
Eutocium; apud Apollonium, Pappum; et alios veteres praeclare demonstrantur. Adjici-

1 locum (1) exhibitis, (2) exhiberi (3) cum *L* 2 ductu (1) invenissent (2) praestiterint *L*  
5 ego (1) theorematis (2) problematis *L* 6 duabus (1) curvis (2) curvis se (3) lineis (4) curvis *L*  
6 f. lineam (1) in quam ductae ex uno latere ex punctis intersectionis rectae angulo dato (2) rectam *L*  
9 et (1) angulum esse rectum. d (2) si angulus *L* 12 potissima (1) scientiae huius (2) Mathemati-  
cae | doctrina *ändert Hrsg.* | desiderata *L* 13 geometricas *erg. L* 14 demonstratas | continentem  
*streicht Hrsg.* |, ipso *L* 15 ostendant. (1) Possis Euclidis continuationem appellare (2) Usus *L*  
18–83,3 demonstrantur. (1) Adjecta sunt insignia quaedam theoremata (2) Adjectae sunt insignes propo-  
sitiones (3) Adjiciendae ... a (a) Galilaeo (b) Commandino, | Clavio *erg.* | ... | Stevino *erg.* | ... Gregorio  
a S. V. (aa) Robervall (bb) Cartesio (aaa) Robervallio (bbb) Fermatio ... | Pascalio *erg.* | ... | Slusio,  
Robervallio *erg.* | | Huddenio *erg.* | ... Heuratio |, Huddenio *streicht Hrsg.* |; aliis; *L*

---

17 Archimedes: Vgl. etwa ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro*; DERS., *Dimensio circuli*; DERS.,  
*De spiralibus*; DERS., *De planorum aequilibris*; DERS., *De conoidibus et sphaeroidibus*; DERS., *De pla-  
norum aequilibris*; DERS., *Quadratura parabolae*. 18 Eutocium: Vgl. EUTOKIOS, *Commentarii in  
libros Archimedis*. 18 Apollonium: Vgl. APOLLONIOS, *Conica*. 18 Pappum: Vgl. PAPPUS, *Mathe-  
maticae collectiones*.

endae sunt insignes propositiones a Commandino, Clavio, Vieta, Stevino, Luca Valerio, Galilaeo, Guldino, Cavalerio, Gregorio a S. V., Cartesio, Fermatio, Torricellio, Pascasio, Hugenio, Slusio, Robervallio, Huddenio, Wrenno, Wallisio, Heuratio; aliis; quibus saepe lubens uterer inter demonstrandum compendii causa, nisi a ratione alienum videretur; lectorem unius tuae demonstrationis intelligendae causa ad tot alios autores non omni-

5

---

1 Commandino: Federico Commandino besorgte eine Anzahl lateinischer Übersetzungen von mathematischen Werken der griechischen Antike, die er zum Teil auch kommentierte. 1 Clavio: Gemeint ist wohl Clavius' Euklidausgabe *Elementorum libri XV*, 4. Ausg. 1607 [Marg.]. Clavius war aber auch Autor eines eigenständigen, von Leibniz rezipierten Werkes zur Geometrie; vgl. Chr. CLAVIUS, *Geometria practica*, 1604. 1 Vieta: Vgl. Fr. VIÈTE, *Supplementum geometriae*, 1593 (VO S. 240–257); DERS., *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593 (VO S. 347–435); DERS., *Ad Adr. Romani problema responsum*, 1595 (VO S. 305–324). 1 Stevino: Vgl. S. STEVIN, *Problematum geometricorum libri V*, 1583, sowie die von Albert Girard herausgegebene und kommentierte Werkausgabe *Les oeuvres mathematiques de Simon Stevin*, 1634, Tl. III, *La pratique de géometrie* (S. 341–432). 1 Luca Valerio: Vgl. L. VALERIO, *De centro gravitatis solidorum*, 1604; DERS., *Quadratura parabolae*, 1606. 2 Galilaeo: Vgl. G. GALILEO, *Discorsi e dimostrazioni matematiche*, 1638 (GO VIII S. 39–318); M. MERSENNE, *Les nouvelles pensées de Galileo*, 1639. 2 Guldino: Vgl. P. GULDIN, *Centrobarryca*, 1636–41. 2 Cavalerio: Vgl. B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635; DERS., *Exercitationes geometricae*, 1647. 2 Gregorio a S. V.: Vgl. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647. 2 Cartesio: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I. 2 Fermatio: Zu Lebzeiten veröffentlichte Pierre de Fermat selbst keine seiner mathematischen Schriften. Ohne ihn als Autor zu nennen, wurde 1660 *De linearum curvarum* publiziert. Eine Reihe seiner Manuskripte, deren Ergebnisse Pariser Mathematikern oftmals schon seit längerem bekannt waren, wurde posthum in P. de FERMAT, *Varia opera*, 1679 [Marg.], abgedruckt. Darunter waren auch solche zur Geometrie, etwa die 1657–58 entstandene Schrift *De solutione problematum geometricorum* (*Varia opera* S. 110–114, *FO I* S. 118–132). 2 Torricellio: Vgl. E. TORRICELLI, *Opera geometrica*, 1644 (*TO I*, 1 S. 1–230 u. *TO I*, 2 S. 101–232). 2 Pascasio: Vgl. Bl. PASCAL, *Essay pour les coniques*, 1640 (*PO I* S. 252–260); DERS., *Histoire de la roulette*, 1658, lat.: *Historia trochoidis*, 1658 (*PO VIII* S. 195–223); sowie die unter dem Pseudonym Amos Dettonville verfassten *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*, 1658–59 (*PO VIII* S. 323–384 u. *IX* S. 1–149). 3 Hugenio: Vgl. etwa Chr. HUYGENS, *Theorema de quadratura hyperbolae, ellipsis et circuli*, 1651 (*HO XI* S. 281–337); DERS., *De circuli magnitudine inventa*, 1654 (*HO XII* S. 113–181); DERS., *Réduction de la rectification de la parabole*, 1657 (Ms.); DERS., *Recherches sur les propriétés géométriques de la cycloide*, 1658 (Ms.); DERS., *Recherches sur la théorie des développées*, 1659 (Ms.) (*HO XIV* S. 387–405); DERS., *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms.) (*HO XX* S. 229–241); DERS., *Regula ad inveniendas tangentes linearum curvarum*, 1667 (Ms.) (*HO XX* S. 243–255); DERS., *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 42–58 (*HO XVIII* S. 158–187). 3 Slusio: Hier dürfte neben dem *Mesolabum* von 1668 insbesondere Sluses Tangentenbrief in den *Philosophical Transactions* von 1672/73 gemeint sein. 3 Robervallio: Bereits M. MERSENNE, *L'optique et la catoptrique*, 1651, S. 117, hatte Gilles Personne de Roberval als „Nostre Geometre“ bezeichnet und dabei dessen geometrische Arbeiten über die Oberflächen verschiedener Brennspiegel genannt. Leibniz erwähnt diese Bemerkung Mersennes im Oktober 1674 (vgl. VII, 5 N. 74 S. 91).

bus obvios remittere: ita cogimur saepe inviti, eadem denuo demonstrare, taedio nostro pariter et lectorum peritorum. Cui malo mederetur liber si quis producet aliquando quo continuarentur quodammodo Euclidis *Elementa*, qui versaretur in omnium manibus, et quem a doctis accurate examinatum, tuto postea allegari posse constaret. Et tale quid-  
 5 dam ab Academia Scientiarum Regia expectare videtur orbis, quod ad Gloriam ejus dudum florentem magnopere pertineret. Quanquam autem Euclidis exemplo doctrinam Analyticam generalem seu de rationibus, doctrinam de magnitudinum commensurabilitate aut incommensurabilitate seu de numeris, ac denique doctrinam de spatiis et de  
 10 motibus quibus spatia aut eorum partes designantur, quae mere Geometrica est comprehendi uno opere necesse sit, scientiae enim istae non nisi ab ignaris divellerentur: ausim dicere duabus artibus, scilicet novorum quorundam symbolorum ad Geometricas designationes accommodatione, et multorum casuum particularium revocatione ad propositiones generales, effici posse, ut formae quadratae mediocris (in quarto vocant) librum non exeat volumen nulli facile praestantia et fructu cessurum. Aequitatis etiam  
 15 erit cuilibet propositioni adscribi autorem suum si modo extra controversiam sit quod unum saepe pretium laboribus suis postulant Viri summi, et tum inventa tum inventores ab oblivione et plagiariorum malitia vindicari; et thesaurum quendam publicum condi, qui novis quotidie eruditorum collationibus locupletetur.

5 quod (1) ut plurimum (2) ad Gloriam L    7 Analyticam (1) geometri (2) generalem L  
 8 f. et de (1) spatiorum mutationibus seu motibus (2) motuus (3) motibus L    11 artibus (1) altera  
 (2) scilicet L    12 accommodatione, (1) altera (2) et (a) part (b) multorum L    15 adscribi (1)  
 inventorem (2) autorem L    15 si modo ... sit erg. L    17 et plagiariorum malitia erg. L

---

**11,3** Huddenio: Die Tangentenmethode von Hudde findet sich in J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. Huddes geometrische Lösung von Gleichungen 3. und 4. Grades mit sich abwechselnden Vorzeichen gibt Schooten in seinem Kommentar zu Descartes' *Geometria* wieder; vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I, S. 325–328. **11,3** Wrenno: Vgl. Chr. WREN, *Generatio corporis cylindroidis hyperbolici*, 1669. Ergebnisse von Wren wurden auch publiziert in J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 70–76 (*WO* I S. 533–537), sowie in DERS., *Mechanica*, 1670–71, S. 556–567 (*WO* I S. 929 bis 938). **11,3** Wallisio: Vgl. J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659 [Marg.] (*WO* I S. 489–569); DERS., *Opera mathematica*, 2 Bde, 1656–57; DERS., *Mechanica*, 1670–71 (*WO* I S. 570–1063). **11,3** Heuratio: Vgl. H. van HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520.

## 12. GENERATIO CIRCULI

[November 1675 – Januar 1676]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 4 IV 13c Bl. 33. 1 Streifen ca 20 × 5 cm. 3 Z. unten auf Bl. 33 r<sup>o</sup>.  
 Darüber die Aufzeichnung VI, 3 N. 29<sub>1</sub>. Der Streifen hing ursprünglich zusammen mit  
 LH 35 X 8 Bl. 1 (= VII, 5 N. 57).  
 Cc 2, Nr. 1405 tlw.

5

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz nach dem von den Herausgebern auf November 1675 – Januar 1676 datierten VII, 5 N. 57 entstanden sein.

Videtur simplicius intelligi generatio circuli quam rectae. Sit figura quaedam certo sui puncto manens in certo loco, eo modo mutans locum, ut sibi semper ipsi similis appareat respectu eorundem extra ipsum, certum aliquod punctum in ea sumtum describet arcum circuli. Imo  $\mathfrak{A}$ . Opus ut sit plana figura.  $\mathfrak{A}$ .

10

9 Sit (1) Linea rigida quaecunqve (2) qv (3) figura *L*      11 respectu ... ipsum *erg. L*      12 sit  
 (1) planum (2) plana *L*

## 13. CYLINDER SINUUM EX APPLICATIS PARABOLICIS

[Sommer 1673]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 42 V Bl. 7. Ca  $\frac{2}{3}$  eines Bl. 2<sup>o</sup>, von dem die linke untere Ecke abgeschnitten und die rechte untere Ecke ausgerissen sind. 9 Z. auf Bl. 7 r<sup>o</sup>. Darunter eine Aufzeichnung zur Rechenmaschine (Druck in Reihe VIII vorgesehen). Bl. 7 v<sup>o</sup> leer.  
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Ende 1672 bis Herbst 1673 nachgewiesen. Die inhaltlichen Bezüge zu VII, 4 N. 26 u. VII, 4 N. 31 deuten auf eine Entstehung im Sommer 1673 hin.

$\sqrt{ax} \wedge \sqrt{ax}$  vel  $\sqrt{ax} \wedge \sqrt{a^2 - ax} = \sqrt{a^3x - a^2x^2}$ ,  $\smile a = \sqrt{ax - x^2}$ . Sinus.

$$\begin{array}{c} \wedge \\ x \quad a - x \end{array}$$

Ergo parabolicae applicatae in se inverse ductae cylindro sinuum aequantur.

$a^2 -$ ,  $a - x$  □. fieta $a^2 - a^2 - x^2 - 2ax$ .

$$\begin{array}{c} \wedge \\ a^2 + x^2 - 2ax \end{array}$$

$\sqrt{\frac{\beta a}{\gamma} x} = \sqrt{\frac{\beta^2 a^2}{\gamma^2} - \frac{\beta a x}{\gamma}} \wedge [\sqrt{\quad}] ax = \sqrt{\frac{\beta^2 a^3 x}{\gamma^2} - \frac{\beta a^2 x^2}{\gamma}}$ . Divisum per  $a$  dat

$$\begin{array}{c} \wedge \\ \frac{\beta a}{\gamma} - x \end{array}$$

$\sqrt{\frac{\beta^2 a}{\gamma^2} - \frac{\beta}{\gamma} x^2} = z$  applicata Ellipseos quia  $z^2 = \frac{\beta^2 a}{\gamma^2} - \frac{\beta x^2}{\gamma}$ . Ergo  $\frac{\beta z^2}{\gamma} = v^2 = \frac{\beta a}{\gamma} - x^2$ .

9  $\smile a$ : Leibniz rechnet hier und in der Folge fortlaufend. 11 Ergo ... aequantur: Vgl. VII, 4

N. 26 prop. 2 S. 426 sowie VII, 4 N. 31 S. 550. 12  $-2ax$ : Richtig wäre  $+2ax$ . 16  $\sqrt{\frac{\beta^2 a}{\gamma^2}}$ : Richtig

wäre  $\sqrt{\frac{\beta^2 ax}{\gamma^2}}$ . Leibniz rechnet konsequent weiter und setzt dann irrtümlich eine Gleichung für  $\frac{\beta z^2}{\gamma}$  statt

für  $\frac{\gamma z^2}{\beta}$  an. Die Versehen beeinträchtigen die Rechnungen, jedoch nicht die allgemeine Aussage.



## 14. DE MODIS EXPRIMENDI SERIES

[Herbst 1672 – Anfang 1673]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 V 3 Bl8. 1 Zettel ca. 19,3 × 5,8 cm. 1 S.  
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Zum „fundamentum“ einer Folge vgl. VII, 3 N. 1, 4, 6, 8. [noch]

5

D e m o d i s e x p r i m e n d i s e r i e s ,  
s e u d e e a r u m r e g u l i s f u n d a m e n t a l i b u s

Progressiones aliae sunt fundamenti simplicis, aliae fundamenti compositi, fundamentum simplex est: cum dato termino uno, inveniri potest sequens, fundamentum compositum est, cum opus est pluribus terminis antecedentibus ad inveniendum sequentem; et prout multis terminis opus est, fundamentum est compositum primi, secundi[,] tertii gradus. Fundamentum maxime compositum est, cum opus est omnibus terminis praecedentibus cognitis, ad inveniendum sequentem. 10

9 inveniri (1) possunt sequentes (2) potest *L*



## 16. INSTRUMENTUM AD CONSTRUCTIONEM AEQUATIONUM

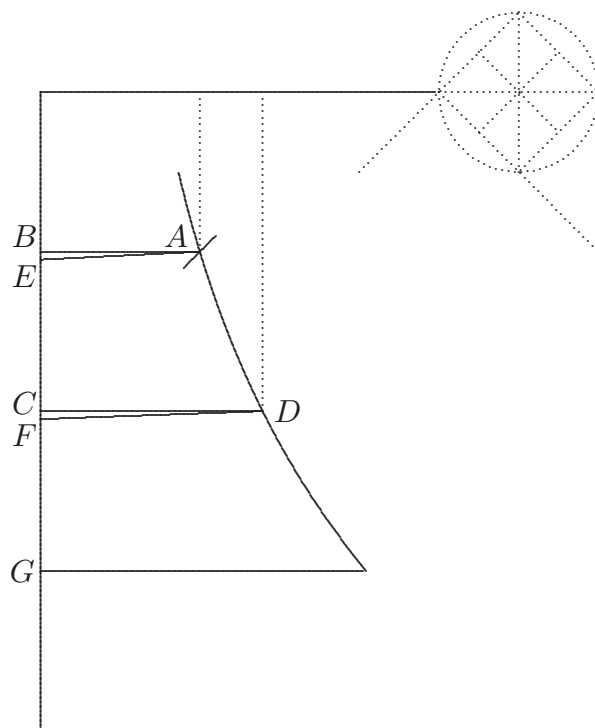
[Mitte bis Ende Oktober 1675]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca  $20 \times 18,5$  cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca  $17,5 \times 1,5$  cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca  $19,5 \times 4$  cm. 7 Z. auf Bl. 408 r°. —  
 Auf dem Rest des Trägers die Aufzeichnung zur Gleichungslösung N. 15 sowie VII, 5 N. 33; VII, 6 N. 10; VII, 7 N. 55.  
 Cc 2, Nr. 1069

5

Datierungsgründe: Bei dem vorliegenden Stück handelt es sich um Notizen, die Leibniz nach den in N. 15 und in VII, 6 N. 10 gedruckten Aufzeichnungen und vermutlich kurz nach der auf den 11. Oktober 1675 datierten Studie VII, 5 N. 33 verfasste. Sie ist vor VII, 7 N. 55 geschrieben.

10



[Fig. 1]

---

12 Über der Figur:  $x^3 - px^2 \mp qx + r$

Ope catenularum delicatarum, et lineae logarithmicae in materia solida descriptae in qua assurgere aliquid ac descendere possit, possunt construi omnes aequationes, catenulae ibunt *BAECDFG*. Sed pro exactioribus operationibus adhibendae essent regulae. Credo tamen catenulas bene elaboratas satis aptas tolerabilibus operationibus, imo in magno  
5 instrumento etiam exactis.

Forte hoc instrumento solvi poterunt etiam aequationes plurium incognitarum, ut:  
 $x^2 + y^2 \mp c_{[,] + cy + bx^2 + dx \mp e. \mathfrak{A}.$

$$7 \mp e. (1) x^2 - c (2) x \mp \frac{c - y^2}{x}. \text{ et } x \mp \frac{e - cy}{bx + d} (3) \mathfrak{A} L$$

## 17. DE CONOEIDIBUS

[1673 (?)]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 80. 1 Bl. 8°. 1 S.  
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: [noch]

5

*Trouver une ligne, surface plane, courbe, solide homogene, à une ligne[,] surface, solide. Par exemple les Elemens du Conoeide Parabolique sont en raison des appliquées du Triangle.* Eodem modo inveniri potest solidum, cujus Elementa seu plana secundum axem sint in ratione applicatarum hyperbolae, seu in ratione altitudinum reciproca. Hoc erit Conoeides Hyperboloeidicum generatum esse rotatione circa suum axem figurae, cujus applicatae sunt in ratione altitudinum reciproca subduplicata, nam harum applicatarum quadrata, erunt in ratione altitudinum reciproca. Ergo et circuli applicatarum rotatione facti. Habemusque sic Methodum generalem solvendi hoc problema: Datae figurae planae conoeides proportionale exhibere. Nimirum Figura plana cujus Elementa sint in subduplicata ratione figurae planae datae, rotetur circa suum axem; et Conoeides productum erit figurae planae datae proportionale. Hinc habemus Methodum datae cuilibet figurae planae exhibendi solidum proportionalem. Superficiem autem conoeidicam datae figurae proportionalem exhibemus ipsius figurae datae descripto Conoeide. Itaque etiam cuilibet figurae planae superficiem curvam proportionalem exhibere possumus. Lineae etiam cuilibet proportionalem figuram curvam exhiberi posse constat. Hoc autem conoides secundo aliter habebuntur aliae series quae ad priorem reducentur.

10

15

20

6 Trouver (1) un solide homogene à un plan. (2) | une *erg.* Hrsg. | ligne *L* 7 sunt *L* ändert Hrsg.

---

18 exhibemus: Die Mantelfläche des Konoids ist nicht proportional zur Fläche unter der erzeugenden Kurve. Damit ist auch die Folgerung unbegründet.

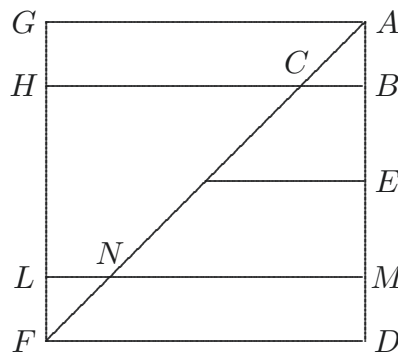
## 18. QUADRATURA PER FIGURAE COMPLEMENTUM

[Herbst 1675 (?)]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 VII 1 Bl. 25. 1 Zettel von max.  $19,4 \times 4,3$  cm. 10 Z.  
auf Bl. 25 r°. Am unteren Rand Gleichung mit binomischer Formel ohne Bezug zum Text:  
 $y^3 \sqcap x^3 + a^3 + 3a^2x + 3ax^2$ .  
Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: [Wz-Rest; noch]

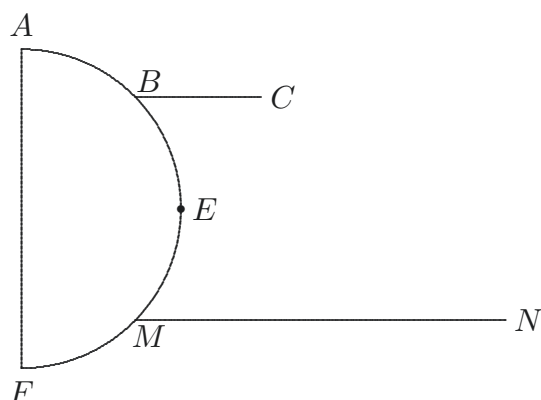


[Fig. 1]

Trianguli quaeritur area, seu summa omnium  $x$ . seu summa omnium  $AB$ . seu summa  
10 omnium  $BC$ . Hoc ut fiat necesse est ut in considerationem intret etiam finitam esse  
lineam  $ABD$ . trianguli altitudinem. Bisecetur in  $E$ . compleatur rectangulum  $ADFG$ , id  
est quadratum  $GA$ , quia supposui  $AB \sqcap BC$ . Producaturs  $BCH$  dum ipsi  $FG$  occurrat in  
 $H$ . Eodem modo ducatur  $MNL$ , posito  $DM \sqcap AB \sqcap GH$  erit  $HC \sqcap MN$ . et  $BC \sqcap LN$ .  
Ergo  $BC + MN \sqcap GA$ . et in quibuslibet aliis punctis binis simul semper fiet  $GA$ . Ergo  
15 ubi ad  $E$  ventum erit, cessabitur, et fiet rectang.  $GAE \sqcap$  Triangulo  $ADF$ .

10 omnium | AC ändert Hrsg. | Hoc L 14 fiet | GH ändert Hrsg. | ergo L

9 Trianguli quaeritur area: Vgl. VII, 1 N. 36 S. 227 f. sowie VII, 3 N. 19 S. 246.



[Fig. 2]

Haec et cycloidi et infinitis aliis idgenus applicari possunt si  $AB$  arcus  $\cap$  applicatae  $BC$ , et sit infra portio priori aequalis, et similis  $FME \cap ABE$  et  $MN \cap$  arcui  $AEM$  erit rursus  $MN + BC \cap$  curvae Totae.

---

2 cycloidi: Vgl. H. FABRI, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 382 f. und die zugehörige Figur 24 auf Tafel 3 [Marg.] (Vermerk in VII, 4 N. 1 S. 21) sowie VII, 5 N. 74.

19. LALOUVERAE SPECULATIONES GEOMETRICAE  
1673

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 III A 22 Bl. 5. 1 Zettel max. 18,5 × 3,5 cm. 5 Z. auf Bl. 5 v°. Bl. 5 r° leer.

- 5 L a l o u v e r a , nepos Jesuitae, qui in Helvetia nunc est cum Domino de S. Romain, Legato Regis Franciae 1673, habet speculationes Geometricas, quibus promittit omnia revocare ad demonstrationes faciles et manifestas.

6 Legato ... 1673 *erg. L*

---

5 L a l o u v e r a : S. de La Loubère. 5 Jesuitae: A. de La Loubère. 6 Legato: Der Gesandte M. de Harod de Senevas, Marquis de Saint-Romain, war am 18. November 1672 in Solothurn eingetroffen. 6 speculationes: vgl. S. DE LA LOUBÈRE, *De la résolution des équations, ou de l'extraction de leurs racines*, 1732.



## 20. TABULA PYTHAGORICA IN MANU NOSTRA INSCRIPTA

[nach Mitte 1674]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 I 14 Bl. 86. 1 Streifen von ca 18,5 cm × 7 cm. 1 S. auf Bl. 86 v<sup>o</sup>, Vorderseite leer.  
Cc 2, Nr. 496

5

Datierungsgründe: [noch]

## Tabula pythagorica in manu nostra inscripta

Das Einmahl eins oder die Multiplication in den Händen: Zwey Zahlen v. g. 7, et 8. deren keine größer als 10, sind gegeben in einander zu multipliciren. Thue die finger alle nieder, oder mache beyde hände zu. Alsdann hebe an der einen hand soviel finger auff, als die differenz der einen zahl 7 von 10 macht v. g., 3 an der anderen hand, soviel als die andre, 8 <differt> v. g. 2. Zehle alle finger so nieder, sind 5, multiplicire die differentien in einander sind, 6, das productum 56. Dieses muste auch angehen zum großen einmahl eins.

$$\begin{array}{rcccl}
 10 - 7 \sqcap 3. & 10 - 8 \sqcap 2. & 10 - a - b & & 15 \\
 10 - a & 10 - b & \frac{10}{100 - 10a - 10b} & + & 10 - a \wedge 10 - b \\
 & ab \quad \sqcap & & + & 100 - 10a - 10b + ab
 \end{array}$$

Unde patet difficultatem transferri a multiplicatione numerorum datorum ad multiplicationem differentiarum a 10; ideoque non habere usum nisi quando numeri dati notabiliter majores sunt differentiis suis, seu valde accedunt ad 10. Idem est de 100. Observatio haec cum sua demonstratione est in *nouveaux Elemens de Geometrie*.

7 Tabula ... inscripta erg. *L* 14f. eins. | 44,  $\wedge$  43,  $100 - 44 \sqcap 56$ ,  $100 \wedge 43 \sqcap 55$   
gestr. |  $10 - 7 \sqcap 3$ . *L*

15–17 Leibniz stellt das Verfahren auf die Probe, indem er das Beispiel  $7 \times 8$  verallgemeinert. Allerdings macht er einen Fehler an der Zehnerposition: Es müsste in Z. 15 nicht  $10 - a - b$ , sondern  $10 - (10 - a) - (10 - b)$  heißen. Nach Multiplikation mit 10 ergäbe sich in Z. 17 statt  $100 - 10a - 10b$  dann  $-100 + 10a + 10b$ , und nach Addition von  $100 - 10a - 10b + ab$  bliebe dann  $ab$  übrig, was korrekt ist. 21 *nouveaux*: [A. ARNAULD], *Nouveaux elemens de geometrie*, 1667, liv. I, § LXIII, S. 14 f.

## 21. CALCULUS PER DIVISIONES

29. Oktober 1675

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 IV 13 Bl. 19. Ca.  $\frac{1}{3}$  Bl. 2°. 1 S.  
Cc 2, Nr. 1093

5 29. Octob. 1675.

Calculus per divisiones loco multiplicationum  $\frac{a}{b}$  loco  $\frac{ac}{b}$   
 $\frac{c}{c}$

Observatio venit in mentem, qua possint omnia reduci ad meros terminos simplices continuarum divisionum, cum contra reducere soleamus omnia ad terminos continuarum multiplicationum.

10 Sit:  $\frac{a}{b} + \frac{e}{f} + \frac{g}{h} \cap x$ . Reducamus. Multiplicentur omnes termini per *cfl*. fiet:  $\frac{afl}{b} + \frac{cdl}{e} + \frac{cgl}{h} \cap cflx$ .

Rursus multiplicetur producta aequatio per *beh*. fiet:  $aeflh + bcdhl + bcegl \cap bcefhlx$ .  
Prior autem expressio aptior ad constructiones lineares.

15 Sed video id ineptum esse, si hoc modo explicetur, in  $\frac{a}{b}$ . ipsam *c*. dividere ipsam  $\frac{a}{b}$ . Tunc enim  $\frac{a}{b} \cap \frac{a}{bc}$ . Itaque sic explicabimus quasi esset:  $\frac{a}{b}$ . Nam et continuari posset  $\frac{a}{b}$ .

hoc modo  $\left( \frac{a}{b} \right)$ . Sed sufficet nos uti his tribus, nam in rei veritate  $\frac{a}{b} \cap \frac{ca}{b}$ . et vero statim  $\frac{c}{c}$ .

6 Calculus ... loco  $\frac{ac}{b}$  erg. *L* 10 Sit: (1)  $\frac{b}{c} + \frac{e}{f}$  (2)  $\frac{a}{b} + \frac{d}{e} + \frac{g}{h}$  ändert Hrsg. |  $\cap x$  *L*

10 per | dfl. ändert Hrsg. | fiet *L* 13 prior ... lineares erg. *L*

11  $+\frac{cgl}{h}$ : Richtig wäre  $+\frac{cfg}{h}$  und in der folgenden Zeile  $+bcefg$  statt  $+bcegl$ . Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

reduci potest ut  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  idem est quod  $\frac{ac}{bd}$ . Interim hoc modo exprimendo evitarem omnes

multiplicationes, sive sic diceremus  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  sive sic  $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ . Quorum illud  $\frac{ac}{b}$ , hoc  $\frac{a}{bc}$ .

Verum jam hinc ostendit natura rerum non divisionem sed multiplicationem esse naturalionem et aptiorem, quia in ipsa nullae lineoleae necessariae ad exprimendam varietatem. Interim leges calculi hujusmodi tradi possent nempe si  $\frac{ac}{b}$  velimus reducere ad 5

meras divisiones, non poterimus aliter quam scribendo sic:  $\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$  et  $\frac{a}{bc}$  sic:  $\frac{\frac{a}{b}}{c}$ .

Sed videndum quid in compositis sive comprehensionibus, ut  $b+c \wedge b-c \sqcap a^2$ . Tunc vero apparet incommoditas divisionis fiet enim  $b+c \sqcap \frac{a^2}{b-c}$ . Sed non potest  $\frac{a^2}{b-c}$  reduci ad terminos simplices, nisi infinitos; nec potest fieri nominator simplex, quemadmodum numerator. 10

3f. esse (1) rectam, quia (2) naturaliorem | et erg. Hrsq. | aptiorem L

## 22. CARTESII COGITATIONES PRIVATAE

1. u. 5. Juni 1676

**Überlieferung:** *E* Erstdruck nach nicht aufgefundenener Abschrift von Leibniz aus einer verschollenen Handschrift von Descartes: (mit frz. Übers.) FOUCHER DE CAREIL, *Oeuvres inédites de Descartes*, Bd I, 1859, S. 2–57. (Unsere Druckvorlage.) — Weitere Drucke: 1. (nach *E* mit zahlreichen Korrekturen) *DO X*, 1908, S. 213–256; 2. (teilw., nach 1.) *JB I*, 1939, S. 360–364; 3. (teilw., in engl. Übers.) DESCARTES, *Philosophical Writings* (Anscombe), 1954 (u. ö.), S. 3 f.; 4. (teilw., in frz. Übers.) DESCARTES, *Oeuvres philosophiques* (Alquié), I, 1963, S. 45–51; 5. (teilw., in japan. Übers.) DESCARTES, *Shisaku shiki-Yakukai*, 1978, S. 1–22; 1980, S. 1–37; 1982, S. 1–50; 1984, 1–31; 6. (teilw., in engl. Übers.) DESCARTES, *Philosophical Writings* (Cottingham), Bd I, 1985, S. 2–5; 7. (teilw., in japan. Übers.) DESCARTES, *Dekaruto zenshu*, Bd IV, 1993, S. 429–452; 8. (teilw., mit frz. Übers.) DESCARTES, *Les Olympiques*, 1995, S. [41]–44; 9. (teilw., in finn. Übers.) DESCARTES, *Teokset* (Jansson), Bd I, 2001, S. 33–38; 10. (niederl. Übers.) DESCARTES, *Bibliotheek Descartes*, Bd I, 2010, S. 163–194; 11. (nach 1. mit dt. Übers.) DESCARTES, *Cogitationes* (Wohlers), 2011, S. 189–233; 12. (teilw. und in anderer Anordnung) DESCARTES, *Etude du bon sens* (Carraud), 2013, S. 39–160; 13. (teilw., in türk. Übers.) DESCARTES, *Kişisel Düşünceler* (Altuner), 2014, S. 13–20; 14. (mit ital. Übers.) DESCARTES, *Opere postume* (Belgioioso), 2014, S. 1060–1095; 15. (teilw.) *DOC I*, 2016, S. 198–214, 270–274; 16. (japan. Übers.) [DESCARTES], *Shisaku shiki*, 2018, S. 79–109.

Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat spätestens im Februar 1676 Zugang zum Nachlass von Descartes erhalten, wie sich aus der auf den 24. Februar 1676 datierten Abschrift der *Remedia et vires medicamentorum* (VIII, 2 N. 76; *DO XI*, S. 641–644) ergibt. Einen Bericht über einen Besuch mit E. W. von Tschirnhaus bei Cl. Clerselier, dem Besitzer des Nachlasses, enthält die Aufzeichnung VI, 3 N. 34. Den im Text (s. u. S. 122 Z. 1–6) beschriebenen Zirkel zur Winkelteilung haben Leibniz und Tschirnhaus bereits in einer Gesprächsnotiz vom 28. März 1676 skizziert (VII, 1 N. 24 S. 182). Laut den Angaben in *E* notierte Leibniz am Beginn seiner Exzerpte am Rand das Datum des 1. Juni 1676, für die Fortsetzung seiner Abschrift den 5. Juni 1676 (s. u. S. 112 Z. 12). Die Textwiedergabe bei Foucher de Careil weicht von der von Leibniz in dieser Zeit verwendeten Orthographie ab. Die hier vorgenommene Angleichung an die entsprechende Schreibweise von Leibniz sowie in der Ausgabe üblichen Gepflogenheiten wurde ohne zusätzliche Dokumentation im Variantenapparat vorgenommen. Abgesehen von der Überschrift, die von Leibniz oder von Foucher de Careil stammt, werden die in *E* zitierten Randbemerkungen von Leibniz und Einschübe im Text, die dort Leibniz zugeschrieben werden oder vermutlich von Leibniz stammen, als Fußnoten wiedergegeben. Parallelstellen bzw. Paraphrasen zu den Exzerpten finden sich in einigen zeitgenössischen Drucken: POISSON, *Commentaire* (die entsprechenden Abschnitte sind wieder abgedruckt in: *DO X*, S. 197–198, 255, 476); BAILLET bzw. BAILLET, *Abregé* (Auszüge sind abgedruckt in *DO X* S. 179–204). Außerdem befinden sich Parallelstellen in einer Abschrift von weiteren Exzerpten mit dem Titel *Cartesius* im Leibniz-Nachlass (LH 4 I 4k Bl. 19–22, gedr.: *DO XI*, S. 647–653; erneut gedr.: CARRAUD, *Cartesius*). Diese Abschrift wurde von Leibniz’ Amanuensis J. D. Brandshagen angefertigt.

Das Wasserzeichen des Papiers ist auch für andere Abschriften von Brandshagen aus dem Herbst 1679 belegt, so dass vermutet werden kann, dass *Cartesius* auf einer Vorlage von Tschirnhaus, der sich auf seiner Rückreise von Paris Mitte Oktober 1679 in Hannover aufhielt, beruht. Eine Textstelle wurde nach dem Druck von Exzerpten aus der Handschrift von Descartes in BAILLET geändert.

Cartesii Cogitationes privatae

5

1619. Calendis Januarii.

Ut comoedi, moniti ne in fronte appareat pudor, personam induunt; sic ego hoc mundi theatrum consensurus, in quo hactenus spectator exstiti, larvatus prodeo.

Juvenis, oblatis ingeniosis inventis, quaerebam ipse per me possemne invenire etiam non lecto auctore: unde paulatim animadverti me certis regulis uti.

10

Scientia est velut mulier, quae, si pudica apud virum maneat, colitur; si communis fiat, vilescit.

Plerique libri, paucis lineis lectis figurisque inspectis, toti innotescunt, reliqua chartae implendae adjecta sunt.

---

5 Cartesii Cogitationes privatae: Die Überschrift stammt von Leibniz oder Foucher de Careil. Laut *E* notierte Leibniz am Rand den 1. Juni 1676 als Datum des Beginns seiner Abschrift des Textes.

11f. Scientia . . . vilescit: Vgl. R. DESCARTES, *Regulae ad directionem ingenii*, 1701, S. 11 (*DO X*, S. 376): „Hanc vero postea ab ipsis Scriptoribus perniciose quadam astutia suppressam fuisse crediderim, nam sicut multos artifices de suis inventis fecisse compertum est, timuerunt forte, quia facillima erat et simplex, ne vulgata vilesceret“.

Polybii cosmopolitani Thesaurus mathematicus in quo traduntur vera media ad omnes hujus scientiae difficultates resolvendas, demonstraturque circa illas ab humano ingenio nihil ultra posse praestari, ad quorumdam qui  
 5 nova miracula in scientiis omnibus exhibere pollicentur vel cunctationem provocandam et temeritatem explodendam; tum ad multorum cruciabiles labores sublevandos qui, in quibusdam hujus scientiae nodis Gordiis noctes diesque irretiti, oleum ingenii inutiliter absumunt; totius  
 10 orbis eruditis et specialiter celeberrimis in G. F. R. C. denuo oblatuſ.

---

8 *Hinter qui, von Leibniz oder Foucher de Careil ergänzt: (F. Ros. Cruc.)*

10 *Hinter G., von Leibniz oder Foucher de Careil ergänzt: (Germania)*

1 Polybiis *E* ändert Hrsg. nach *DO*

---

1–11 Polybii ... oblatuſ: Vgl. auch Descartes' Ankündigung gegenüber I. Beeckman in seinem Brief vom 26. März 1619, eine „scientia penitus nova“ vorzustellen (*DO* X, S. 154–160, hier S. 156; *JB* IV, S. 58–61, hier S. 59). Der Titel kann als Anspielung auf eine anonym publizierte Schrift verstanden werden: *Mysterium arithmeticum, sive, cabalistica et philosophica inventio, nova admiranda et ardua, qua numeri ratione et methodo computentur, mortalibus a mundi primordio abdita, et ad finem non sine singulari omnipotentis Dei provisione revelata. Cum illuminatissimis laudatissimisque; Fraternalitatis Roseae crucis famae viris humiliter et sincere dicata*, 1615. Vgl. hierzu den Hinweis bei GOUHIER, *Les premières pensées*, S. 132. Zu einer anderen Einschätzung für die Bezeichnung „Polybius cosmopolitanus“ gelangt E. Mehl; vgl. MEHL, *Descartes en Allemagne*, S. 139–146. Auffallend ist, dass J. FAULHABER, *Miracula arithmetica*, 1622, S. 59, auf den bevorstehenden Druck eines Werkes seines Freundes „Carolus Zolindius (Polybius)“ in „Venedig oder Paris“ hinweist. Vgl. hierzu HAWLITSCHKE, *Johann Faulhaber*, S. 67–70; SCHNEIDER, *Johannes Faulhaber*, S. 98 f. u. S. 181–186; MANDERS, *Descartes et Faulhaber*, S. 7–9. Zur Erwähnung von Venedig als möglichen Aufenthaltsort vgl. im Text selbst S. 103 Z. 6. Die Bedeutung von „denuo“ am Schluss des skizzierten Titels ist in der Forschung umstritten. Möglicherweise ist das Wort Resultat eines Lesefehlers, z. B. für *dono* oder für eine kontrahierte Form von *devotione*. Zur Kontraktion von *devotione* vgl. CAPPELLI, *Dizionario*, S. 96.

Larvatae nunc scientiae sunt quae, larvis sublatis, pulcherrimae apparent: Catenam scientiarum pervidenti non difficilius videbitur eas animo retinere quam seriem numerorum.

Praescripti omnium ingeniis certi limites, quos transcendere non possunt. Si qui principiis ad inveniendum uti non possint ob ingenii defectum, poterunt tamen verum scientiarum pretium agnoscere, quod sufficit illis ad vera de rerum aestimatione iudicia perferenda. 5

Vitia appello morbos animi, qui non tam facile dignoscuntur ut morbi corporis, quod saepius rectam corporis valetudinem experti sumus, mentis nunquam.

Adverto me, si tristis sim aut in periculo verser et tristia occupent negotia, altum dormire et comedere avidissime; si vero laetitia distendar nec edo, nec dormio. 10

On peut faire en un jardin des ombres qui representent diverses figures, telles que des arbres et les autres: Item, tailler des palissades, de sorte que de certaine perspective elles representent certaines figures: Item, dans une chambre faire que les rayons du soleil, passant par certaines ouvertures, representent divers chiffres ou figures: Item, faire paroistre, dans une chambre des langues de feu, des chariots de feu et autres figures en 15

10f. Adverto me si in tristibus sim, aut in periculo verser, aut tristia occupem negotia, altum dormire et comedere avidissime; si vero laetitia distendar non edo nec dormio. *E ändert Hrsg. nach BAILLET, Bd 2, S. 449 (BAILLET, Abregé, S. 339; DO X, S. 215).*

---

1f. Catenam scientiarum: Vgl. das bei POISSON, *Commentaire*, S. 73 (*DO X*, S. 255), abgedruckte Zitat: „Quippe sunt concatenatae omnes scientiae, nec una perfecta haberi potest, quia aliae sponte sequantur, et tota simul encyclopaedia apprehendatur“. 8f. Vitia . . . nunquam: Vgl. hierzu auch die Parallelstelle in *Cartesius*: „Morbi corporis facilius agnoscuntur, quam morbi mentis: quia saepius rectam corporis valetudinem sumus experti; mentis, nunquam.“ (CARRAUD, *Cartesius*, S. 5; *DO XI*, S. 653). — Die Charakterisierung der Laster als Krankheiten der Seele geht zurück auf PLATON, *Timaios*, 86b bis e. Descartes dürfte bereits im Jesuitenkolleg von La Flèche mit der Diskussion über dieses Thema in Berührung gekommen sein. Vgl. z. B. die 6. Disputation (*De affectionibus animi, quae passiones vocantur*) im einschlägigen Aristoteles-Kommentar *In libros ethicorum Aristotelis ad Nicomachum aliquot Conimbricensis cursus disputationes* (in der Ausgabe Lyon, 1608, Spalte 47–60, insbesondere 57 f.). 12–102,7 On . . . chambre: Vgl. VI, 3 Nr. 34, S. 387 Z. 14–17 sowie G. B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XVII, cap. 1–17 u. lib. XX, cap. 9, S. 259–276 u. 302; vgl. die Hinweise bei G. RODIS-LEWIS, „Machineries et perspectives curieuses“, in: *XVIIè siècle. Bulletin de la Société d'étude du XVIIè siècle*, 32 (1956), S. 461–474, sowie bei SHEA, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107 f., Anm. 50.

l'air; le tout par de certains miroirs qui rassemblent les rayons en ces points-là: Item, on peut faire que le soleil, reluisant dans une chambre, semble toujours venir du mesme costé, ou bien qu'il semble aller de l'occident à l'orient, le tout par miroirs paraboliques, et fault que le soleil donne au-dessus du toist, dans un miroir ardent, duquel le point de  
 5 la reflexion soit au droit d'un petit trou et donne dans un autre miroir ardent, lequel a le mesme point de reflexion aussi au droit de ce petit trou, et rejettera ses rayons en lignes paralleles dedans la chambre.

Anno 1620, intelligere coepi fundamentum inventi mirabilis.

Somnium 1619 nov. in quo carmen, cujus initium:

10 *Quod vitae sectabor iter? . . . A u s o n.*

Ab amicis reprehendi tam utile quam ab inimicis laudari gloriosum, et ab extraneis laudem, ab amicis veritatem exoptamus.

Sunt quaedam partes in omnium ingeniis quae vel leviter tactae fortes affectus excitant: ita puer forti animo, objurgatus, non flebit, sed irascetur; alius flebit. Si dicatur  
 15 infortunia multa et magna accidisse, tristabimur; si quem malum in causa fuisse addatur, irascemur. Transitus a passione in passionem per vicinas; saepe tamen a contrariis validior transitus, ut si in convivio hilari tristis casus repente nuntietur.

Ut imaginatio utitur figuris ad corpora concipienda; ita intellectus utitur quibusdam corporibus sensibilibus ad spiritualia figuranda, ut vento, lumine: unde altius phi-  
 20 losophantes mentem cognitione, possumus in sublime tollere. Mirum videri possit quare

9 in quo carmen 7 cujus initium *E ändert Hrsg.*      20 Cognitione, [mentem] possumus *E ändert Hrsg. nach DO*

---

8 Anno . . . mirabilis: Vgl. das Zitat einer Randbemerkung von Descartes bei BAILLET, Bd 1, S. 51 (*DO X*, S. 179): „XI. Novembris 1620. caepi intelligere fundamentum Inventi mirabilis“; vgl. auch die Bemerkung von Leibniz in den *Notata quaedam G. G. L. circa vitam et doctrinam Cartesii* (VI, 4 N. 376 S. 2057 f.). Zur Problematik der Datumsangabe sowie hinsichtlich der Frage, welche Erfindung gemeint sein könnte, vgl. zusammenfassend GOUHIER, *Les premières pensées*, S. 76–78.    10 *Quod . . . A u s o n.*: D. M. AUSONIUS, *Eclogarum liber*, II, 1. Vgl. auch BAILLET, Bd 1, S. 80–86 (*DO X*, S. 180–188) sowie G. W. LEIBNIZ, *Notata quaedam G. G. L. circa vitam et doctrinam Cartesii* (VI, 4 N. 376 S. 2057). — Die Autorenangabe wurde möglicherweise erst von Leibniz oder in *E* eingefügt.    20–103,4 Mirum . . . elucent: Vgl. die Paraphrase bei BAILLET, Bd 1, S. 84 (*DO X*, S. 184): „Car il ne croioit pas qu'on dût s'étonner si fort de voir que les Poëtes, même ceux qui ne font que niaiser, fussent pleins de sentences plus graves, plus sensées, et mieux exprimées que celles qui se trouvent dans les écrits des Philosophes.“



graves sententiae in scriptis poetarum magis quam philosophorum. Ratio est quod poetae per entusiasmum et vim imaginationis scripsere: sunt in nobis semina scientiae, ut in silice, quae per rationem a philosophis educuntur, per imaginationem a poetis excutiuntur magisque elucent.

Dicta sapientum ad paucissimas quasdam regulas generales possunt reduci. 5

Ante finem novembris Lauretum petam, idque pedes e Venetiis, si commode et moris id sit; sin minus saltem quam devotissime ab ullo fieri consuevit.

Omnino autem ante Pascha absolvam tractatum meum, et si librariorum mihi sit copia dignusque videatur, emittam ut hodie promisi, 1620, 23 Febr.

Una est in rebus activa vis, amor, charitas, harmonia. 10

Sensibilia apta concipiendis olympicis: ventus spiritum significat, motus cum tempore vitam, lumen cognitionem, calor amorem, activitas instantanea creationem. Omnis forma corporea agit per harmoniam. Plura humida quam sicca, et frigida quam calida, quia alioqui activa nimis cito victoriam reportassent, et mundus non diu durasset.

Deum separasse lucem a tenebris, Genesi est separasse bonos angelos a malis, quia non potest separari privatio ab habitu: quare non potest litteraliter intelligi. Intelligentia pura est Deus. 15

Tria mirabilia fecit Dominus: res ex nihilo, liberum arbitrium et Hominem Deum.

Cognitio hominis de rebus naturalibus, tantum per similitudinem eorum quae sub sensum cadunt: et quidem eum verius philosophatum arbitramur, qui res quaesitas feliciter assimilare poterit sensu cognitis. 20

Ex animalium quibusdam actionibus valde perfectis suspicamur ea liberum arbitrium non habere.

8 librorum *E ändert Hrsg. nach DO*      9 23 septembris *E ändert Hrsg. nach BAILLET*

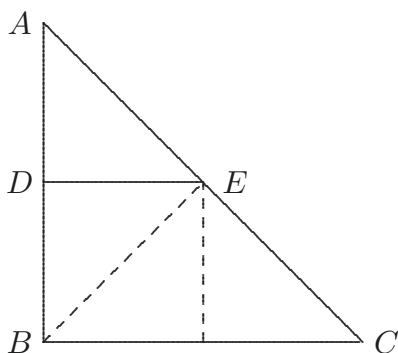
13 Plura frigida quam sicca, et humida quam calida *E ändert Hrsg. nach DO*

---

6 Lauretum: Zum Plan einer Wallfahrt nach Loreto vgl. BAILLET, Bd 1, S. 120 (*DO X*, S. 188).  
 8f. Omnino ... 23 Febr.: Vgl. BAILLET, Bd 1, S. 86 (*DO X*, S. 187f.)      10–13 Una ... harmoniam:  
 Vgl. die Hinweise von É. MEHL, *Optics*, 2022, S. 136f. u. S. 139, auf ähnliche Aussagen in J. KEPLER,  
*Epitome astronomiae Copernicanae*, lib. 4, 1620, S. 581 bzw. lib. 1, 1618, S. 119–122 (KW 7 S. 333 bzw.  
 90).

Contigit mihi ante paucos dies familiaritate uti ingeniosissimi viri, qui talem mihi quaestionem proposuit: *Lapis*, aiebat, *descendit ab A ad B una hora: attrahitur autem a terra perpetuo eadem vi, nec quid deperdit ab illa celeritate quae illi impressa est priori attractione, quod enim in vacuo moveretur semper moveri existimabat: Quaeritur quo*  
 5 *tempore tale spatium percurrat.*

Solvi quaestionem:



[Fig. 1]

In triangulo isoscelo rectangulo,  $ABC$ : Spatium motum repraesentat: Inaequalitas spatii a puncto  $A$  ad basin  $BC$  motus inaequalitatem: Igitur  $AD$  percurritur tempore  
 10 quod  $ADE$  repraesentat;  $DB$  vero tempore quod  $DECB$  repraesentat; ubi est notandum minus spatium tardiozem motum repraesentare. Est autem  $AED$  tertia pars  $DECB$ :

---

10f. *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt: si AD dimidia ipsius AB*

8 In triangulo isocelo  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$       8 motum erg. Hrsg. nach  $DO$       10  $DB$ .  
 vero semper  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$       10  $DECB$   $E$  ändert Hrsg.      11  $DECB$   $E$  ändert Hrsg.  
 7,12 ipsius  $DB$   $E$  ändert Hrsg.

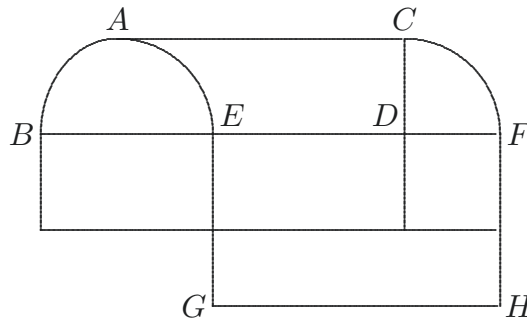
---

1 ingeniosissimi viri: I. Beekman.      2 proposuit: Vgl. zur Fragestellung  $DO$  X, S. 58–61 u. 75 bis 78 ( $JB$  I, S. 260–263 u.  $JB$  IV, S. 49–51).      8 Spatium motum: Vgl. dagegen  $DOC$  I, S. 198 sowie die Anm. 6, S. 580f., wo die alternativen Konjekturen *Spatium tempus repraesentat* bzw. *area spatium repraesentat* diskutiert werden.

Ergo triplo tardius percurret  $AD$  quam  $DB$ . Aliter autem proponi potest haec quaestio, ita ut semper vis attractiva terrae aequalis sit illi quae primo momentos fuit: nova producitur, priori remanente. Tunc quaestio solvetur in pyramide.

Ut autem hujus scientiae fundamenta jaciam, motus ubique aequalis linea repraesentabitur vel superficie rectangula vel parallelogramma vel parallelipipedo, quod augetur ab una causa triangulo, a duabus pyramide ut supra, a tribus, aliis figuris.

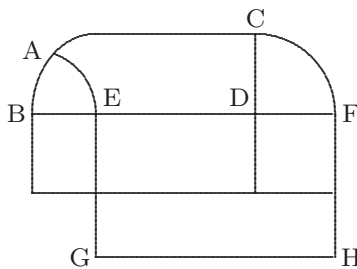
Ex his infinitae quaestiones solventur. Verbi gratia, lapis in aere descendit *viresque acquirit eundo*; quandonam incipiet aequali celeritate moveri? Quod solvetur.



[Fig. 2]

Haec linea repraesentet gravitatem lapidis in primo instanti: curvatura linearum  $AEG$  et  $CFH$  inaequalitates motus: a puncto enim  $E, F$  aequaliter moveri incipiet, quia  $AEG$  non est curva nisi ab  $A$  ad  $E$ ; ab  $E$  ad  $G$  est recta.

1-3 Dazu, laut E von Leibniz angemerkt: obscure



9 Fig. 2

E ändert Hrsg. nach DO

11 EAG E ändert Hrsg.

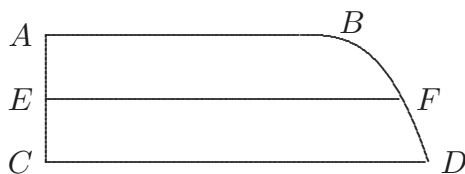
11 CFA E ändert Hrsg. nach DO

11 a puncto enim BF aequaliter E ändert Hrsg. nach DO

7f. *viresque ... eundo*: P. VERGILIUS Maro, *Aeneis*, 4, 175. JB I, S. 150, 174, 263-268.

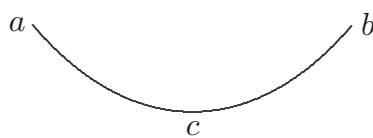
8 quandonam ... moveri?: Vgl.

Item si fax accensa in aere descendat ut etiam ignis magna levitas de gravitate aliquid tollat, cum levitatis quantitas sit nota. Item etiam gravitatis totius facis et aeris impedimentum, si quaeratur quo instanti celerrime descendat et quo instanti non descendat, ubi etiam notum esse oportet quid de face singulis momentis comburatur, aliaeque  
 5 innumerae quaestiones sunt ex geometrica pariter et mathematica progressionem.



[Fig. 3]

Ad talia pertinet quaestio de reditu redituum, g. v., mutuo accepti  $AB$ , post tempus  $AC$ , debeo  $CD$ : post tempus  $AE$ , debebam tantum  $EF$ , si  $BFD$  ducta sit linea proportionum. Linea proportionum cum quadratrice conjungenda: oritur enim [quadratrix] ex  
 10 duobus motibus sibi non subordinatis, circulari et recto.

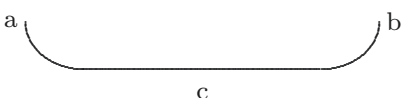


[Fig. 4]

Petiit a me Isaacus Middelburgensis an funis  $acb$  affixus clavibus  $a, b$ , sectionis conicae partem describat, quod non licet per otium nunc disquirere.

---

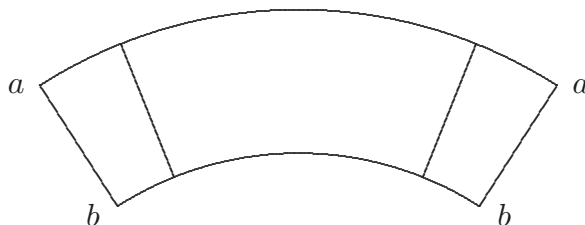
9f. *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt: id est ex numero non analyticarum*

11 Fig. 4  *E ändert Hrsg.*

---

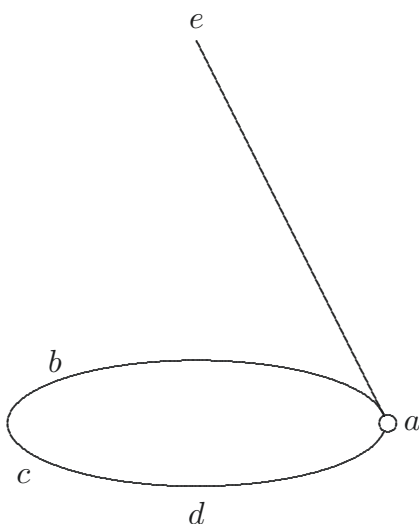
6 Fig. 3: Die Linie  $BFD$  gibt den Sachverhalt (es handelt sich um eine Exponentialkurve) nur qualitativ wieder; vgl. die Rekonstruktion bei BOS, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 245–248.  
 7–9 Ad ... proportionum: Vgl. *DO X*, S. 78 (*JB 1*, S. 51).      9 [quadratrix]: Eckige Klammern in *E*.  
 12f. Petiit ... describat: Vgl. *JB I*, S. 43–45 u. 354–359.

Idem suspicatur nervos in testudine eo celerius moveri quo acutiores sunt, ita ut duos motus edat octava acutior dum unum gravior; item quinta acutior  $1\frac{1}{2}$ , etc.



[Fig. 5]

Idem advertit quare in motu projectorum quae e manu exeunt, per vim circularem statim ad motum rectum deflectant, quod scilicet pars *aa* majorem describat circumum quam *bb*, ideoque celerius movetur: unde fit ut, dum e manu exit, partem *b* praecedat et eam post se trahat. Unde sequitur aliquid projici posse circulariter hoc modo:



[Fig. 6]

A puncto *e* pendeat pondus *a* agiteturque libere per circumum *abcd*: quia omnes partes ponderis aequaliter moventur, ideo si funis *ea* frangatur, perget moveri circulariter; id licebit experiri si in aquam decidat.

1 f. Idem suspicatur ... etc.: Vgl. *DO* X, S. 52–54 (*JB* I, S. 244 u. 246 f.).  
 ... decidat: Vgl. *JB* I, S. 167, 253–257.

4–11 Idem advertit

Idem me monet aquam congelatam plus loci occupare quam solutam; idem expertus est glaciem in medio vasis rariorem esse quam in extremitatibus: Quod fit, inquit, quia spiritus ignei qui locum occupant, initio a frigore ad medium vasis detrahuntur, unde tandem cum exeunt etiam frigore impellente, locum in medio vacuum relinquunt. Imo  
5 etiam glaciem sublevant, cum exeunt, unde fit ut majorem locum occupet glacies quam aqua.

Idem quoque dixit acus in his regionibus fieri tam acutas ut monetam argenteam perforant et tam tenues, ut aquae supernatent: Quod fieri posse existimo; parvae enim res ejusdem materiae non tam facile aquam dividunt quam magnae, quod sola superficies  
10 aquam premit, quae major est proportione in exiguo corpore quam in magno.

I n s t r u m e n t d e m u s i q u e f a i t a v e c u n e p r e c i s i o n m a t h e -

---

1–6 Idem . . . aqua: Vgl. *JB I*, S. 21 f., 60 f., 155, 215, 281. 7–10 Idem . . . magno: Vgl. *JB I*, S. 233 f. 11–109,1 I n s t r u m e n t . . . m a t h e m a t i q u e: Ein weiteres von ihm entworfenes „perfektes“ Instrument stellt Descartes in einem Brief an C. Huygens vor, der wohl auf das Jahr 1646 datiert werden kann (vgl. R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 587 f. = *DO IV* S. 678–683). Das beschriebene Spinett weist in einer Oktave insgesamt 19 anstelle der auch zu dieser Zeit üblichen 12 Tasten auf.

m a t i q u e. — Pour toucher une mandoline exactement selon mes regles de musique,

1 mandoline: *Mandoline* ist für die Entstehungszeit des Texts nicht als Bezeichnung eines Musikinstruments belegt. Als ältester Beleg für das Auftreten der ähnlich lautenden italienischen Wortform *mandolino* gilt eine Notiz auf dem Rechnungsbeleg Bibl. Vat. Arch.Barb.Gius.2016, die in F. HAMMOND, *Girolamo Frescobaldi and a Decade of Music in Casa Barberini: 1634–1643*, in: F. LIPPMANN (Hrsg.): *Studien zur italienisch-deutschen Musikgeschichte XII*, *Analecta Musicologica* 19, 1979, S. 105 Fn. 44 wiedergegeben ist. Ende des 16. Jh. und zu Beginn des 17. Jh. war vornehmlich in Frankreich ein üblicherweise mit Bündeln versehenes Instrument mit vier Saiten verbreitet, das heute basierend auf seiner französischen Bezeichnung zumeist als Mandore oder den italienischen Namensvarianten folgend als Mandora oder Mandola bezeichnet wird und einen Vorläufer der heutigen Mandoline darstellt. Charakteristisch für die Mandore ist eine Quint-Quart-Quint-Stimmung, wobei auch Variationen des Grundtons, der Saitenzahl oder des Abstands der höchsten Saite belegt sind (vgl. beispielsweise M. MERSENNE, *Harmonie universelle, Livre second des instruments*, 1636, S. 93 und M. PRAETORIUS, *Syntagma musicum II*, 1619, S. 28 u. S. 53). Durch Praetorius' *Syntagma musicum II* sind die deutschsprachigen Formen *Mandürichen* (a. a. O. Inhaltsverzeichnis, S. 28 u. S. 53), *Manduriniche* (a. a. O. S. 53) sowie *Mandör-gen* (a. a. O. Tafel XVI) als Bezeichnungen für ein in Frankreich verbreitetes Instrument, das heute als Mandore identifiziert wird, für das Jahr 1619 belegt. Als weitere Namen nennt Praetorius *Pandurina* (a. a. O. Inhaltsverzeichnis u. S. 53), *Mandoër* (a. a. O. S. 53) und *Bandürichen* (a. a. O. S. 10 u. S. 53). Alessandro Piccinini berichtet in seiner auf Italienisch verfassten *Intavolatura di liuto* von 1623, dass in Frankreich ein Instrument namens *Mandola* genutzt wird (A. PICCININI, *Intavolatura di liuto*, 1623, S. 7). Die wenigen angedeuteten Eigenschaften treffen auf eine Mandore zu. Die im vorliegenden Text auftretende Form *mandoline* kann als französische Diminutivform von *mandola* oder *mandole* verstanden werden. 1 exactement . . . musique: Hauptquelle zu Descartes' Musiktheorie ist seine Schrift *Musicae compendium*, die, obwohl bereits 1618 verfasst, erst in seinem Todesjahr gedruckt wurde (R. DESCARTES, *Musicae compendium*, 1650 (DO X S. 89–141)). Einzelne Hinweise finden sich zudem in seinem Briefwechsel, insbesondere mit I. Beeckman, C. Huygens und M. Mersenne. — Descartes vertritt ein modales System, bei dem ein von ihm festgelegtes Tonsystem in insgesamt 12 verschiedenen *modi* (heute: Kirchentonarten) genutzt wird (a. a. O. S. 139f.). Bewegt sich eine in einem *modus* gesetzte Melodie aus dem Tonumfang einer *vox* (ein Hexachord, dem in der Solmisation die Tonsilben *ut, re, mi, fa, sol* und *la* zugewiesen sind) hinaus, findet ein Wechsel in die eine Quint höher bzw. tiefer angesetzte *vox* statt, wobei den Tonstufen die Silben der neuen *vox* zugeordnet werden. Descartes' Festsetzung der (relativen) Höhen der Töne des Tonsystems gründet auf der Überzeugung, dass Konsonanz und Wohlklang erreicht wird, wenn Oktaven, Quinten, Quarten sowie große und kleine Terzen einfache Proportionen der ihnen entsprechenden schwingenden Saitenlängen aufweisen. Da die gewählten Bedingungen keine Festsetzung der Tonhöhen zulassen, bei der Erweiterungen des Tonraums durch Wechsel in benachbarte *voces* und durch Oktavieren durchgängig gleiche Ergebnisse liefern, legt Descartes für das *re* der tieferen und das *sol* der jeweils höheren *vox* leicht voneinander abweichende Positionen fest, sodass die Verhältnisse der den Tonhöhen der *voces* entsprechenden Saitenlängen identisch bleiben. Im System von Descartes sind die Wechsel auf die *vox mollis* (auf *F*), *vox naturalis* (auf *C*) und die *vox dura* (auf *G*) beschränkt. Entsprechend gibt es für *D* und *G* je zwei Ansetzungen der Tonhöhen (a. a. O. S. 116–122, insb. S. 122). — In der Praxis werden Bündel von Saiteninstrumenten zur Zeit Descartes' üblicherweise gemäß einer gleichstufigen Stimmung positioniert. Anders als Descartes' Vorschlag einer reinen Stimmung gilt das den Saiteninstrumenten zugrundeliegende Tonsystem aus Sicht der zeitgenössischen Musiktheorie nicht als exakt und mathematisch präzise.

il faut diviser l'espace depuis le sillet jusqu'au chevalet en 192 parties egales pour le *a*; en oster 12 et mettre le *b*, puis 18 pour le *c*, 2 pour le *d*, 16 pour le *e*, et 9 pour le *f*, puis accorder les cordes alternativement à la quinte et à la quarte comme on fait ordinairement: Le *c* et le *d* serviront pour le *ré* mobile, et toute musique se pourra  
 5 jouer sur cette mandoline pourvu qu'il n'y ait point de dièzes irreguliers aux cordes non destinées aux nuances.

6 destinées aux nuances *E* ändert Hrsq. nach *DO*

---

1–3 il ... le *f*: Die Längen der Abstände der resultierenden Teilungspunkte zum Steg betragen 180, 162, 160, 144 und 135 Einheiten. Zusammen mit dem Wert von 192 Einheiten für die Länge zwischen Sattel und Steg entsprechen sie somit den die Tonhöhen repräsentierenden Werten für *C*, *D*, *E* und *F* in Descartes' *Compendium*, wobei für *D* beide zur Erreichung einer reinen Stimmung festgesetzten Werte aufgeführt sind (*a. a. O.* S. 116–127, insb. S. 120 u. S. 125). — Die hier genutzte Bezeichnung des Sattels und der benachbarten Teilungspunkte des Griffbretts mit den ersten Kleinbuchstaben des Alphabets entspricht der Kennzeichnung der zu greifenden Töne in der zeitgenössischen im französischen Sprachraum verwendeten Tabulaturnotation (vgl. beispielsweise M. MERSENNE, *Harmonie universelle, Livre second des instruments*, 1636, S. 93–95, insb. Figur S. 93). 3f. accorder ... ordinairement: Versteht man die für die *mandoline* angegebene Länge zwischen Sattel und Steg von 192 Einheiten wie im *Compendium* als *b♯*, ergeben sich aufgrund der Teilungspunkte bei einer eine Quint tiefer oder eine Quart höher und somit auf *E* gestimmten Saite die in Descartes' Ansatz geforderten Proportionen der Tonhöhen von *E*, *F*, *G*, *A* und *bb* (*DO X* S. 116–127). Insbesondere überträgt sich die Dopplung des Tons *D* der *b♯*-Saite wie in Descartes' Musiktheorie vorgesehen auf *G*, den dritten Ton der *E*-Saite. Die auf der *b♯*- und *E*-Saite auftretenden Töne entsprechen genau denjenigen des Tonsystems des *Compendiums*. 4 *ré* mobile: Descartes bezeichnet im *Compendium* *D* und *G*, auf die er sich hier über die Bezeichnungen *c* und *d* für die Teilungspunkte des Griffbretts bezieht, als beweglich bzw. als Töne, die bewegt werden (*a. a. O.* S. 117 u. S. 119). *D* und *G* stellen in der *vox mollis* bzw. *vox naturalis* jeweils die Tonstufe *re* dar. 5f. pourvu ... nuances: Als *nuance* (lat. *mutatio*) werden die in S. 000 Z. 000–000 beschriebenen Wechsel zwischen benachbarten *voces* bezeichnet. Da weitere um einen Halbton tiefer bzw. höher gesetzte Töne nicht Teil des Tonsystems sind, treten bei Musik, die Descartes' Regeln folgt, die *dieses* *b* und *♯*, mit denen diese Alterationen in der zeitgenössischen Notenschrift üblicherweise gekennzeichnet werden, lediglich beim *bb* (= *fa* der *vox mollis*) und gegebenenfalls beim *b♯* (= *mi* der *vox dura*) auf der entsprechenden Linie (lat. *chorda*) der Notenzeile auf (*a. a. O.* S. 124–126).



Si, partant de Bucolia, on veut aller droit en Chemmis ou quelque autre port de l’Egypte que ce soit, il faut remarquer exactement, avant que de partir, en quel endroit Pythius et Pythias sont opposés l’un à l’autre à l’embouchure du Nil; puis apres, en quelque lieu que ce soit, si l’on veut trouver son chemin, il faut regarder seulement où est Pythias et de quelles servantes de Psyché elle est accompagnée, car par ce moyen, connaissant combien elle est éloignée du lieu où elle estoit à Bucolia, on trouve son chemin.

5

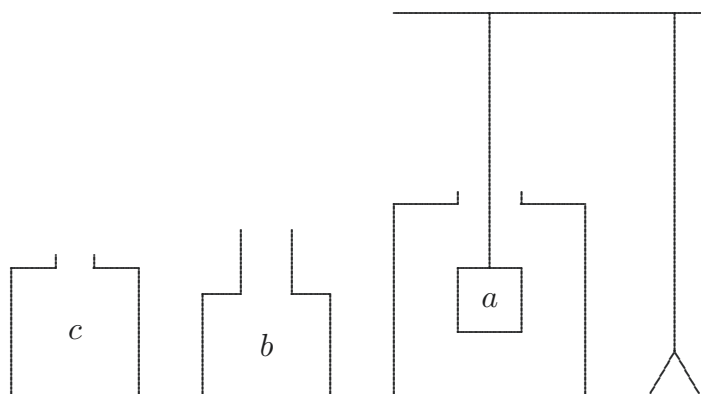
---

1–7 *Dazu, laut E von Leibniz angemerkt:* Bucolia lieu du depart, Egypte globe de la terre, embouchure du Nil lieu de depart, Pythius et Pythias  $\odot$  et  $\oslash$ , les servantes de Psyché les fixes

3 *Zu l’embouchure du Nil, laut E von Leibniz angemerkt:* (+ c’est-à-dire au depart +)

---

1–7 Si ... chemin: Descartes hat Beeckman in seinem Brief vom 26. März 1619 mitgeteilt, dass er eine Methode zur Längengradbestimmung gefunden habe (*DO X*, S. 154–160, hier S. 159 f. u. *JB IV*, S. 58 bis 61, hier S. 60). Die von Descartes hier verwendete Codierung seiner Mondstanzmethode beruht auf Motiven aus zwei antiken Romanen: Bucolia bezeichnet eine Gegend im Nildelta, Chemmis eine Stadt in Oberägypten. Beide Orte liegen auf der Reiseroute der Protagonisten Theagenes und Charikleia in den *Aithiopiká* des HELIODOROS von Emesa (vgl. I,5 u. V,9). Die beiden Protagonisten benutzen zeitweise die Tarnnamen Pythius und Pythias — Beinamen von Apollo und Artemis, die auch für Sonne und Mond stehen können —, um im Falle ihrer Trennung auf der Reise den jeweiligen Codenamen an markanten Stellen mit Tag und Stunde zu notieren (vgl. III,11 u. V,4–5). Zur Verbreitung dieses Romans innerhalb des gelehrten Diskurses des 16. und 17. Jahrhunderts vgl. z.B. Chr. RIVOLETTI, St. SEEBER (Hrsg.), *Heliodoros redivivus. Vernetzung und interkultureller Kontext in der europäischen Aithiopika-Rezeption*, Stuttgart 2018. Das zweite literarische Motiv, das der Codierung dient, die „servantes de Psyché“, ist aus APULEIUS, *Metamorphoses*, V,3, entnommen. Leibniz hat die Verschlüsselung dahingehend aufgelöst, dass er die Dienerinnen der Psyche mit den Fixsternen identifiziert, was mit den Angaben von Descartes im oben genannten Brief (*DO X*, S. 159) übereinstimmt. Offenbar wurde dieses literarische Motiv mit der platonischen Vorstellung von den Fixsternen als Sitz der nicht mit einem Körper verbundenen Seelen verschmolzen. Descartes’ Codierung ist in das Umfeld der Rezeption der neuplatonischen Diskussion um die Seelenwanderung und den Seelenwagen einzuordnen, vgl. PLATON, *Timaios*, 41d–e.



[Fig. 7]

Petiit e Stevino Isaacus Middelburgensis quomodo aqua gravitet in fundo vasis *b* aequae ac in fundo vasis *c* et *a*; item, totum vas *c* non magis gravitet quam *a* cujus pondus medium affixum est et immobile. Respondi aquam aequaliter pellere omnia circum  
 5 quaeque corpora, quibus sublatis aequae descendit si aliqua pars fundi aperiatur, atque fiet in vase *c*; ergo aequae premit fundum. Objicitur, si pars inferior vasis *b* et *c* aperiatur simul, aquam in *c* magis descensuram quam in *b*, quoniam est naturalis modus celeritatis in descensu aquae qui deberet excedi ab aqua existente in tubo vasis *b* ut repletet locum relictum ab inferiore aqua. Ubi respondeo inde sequi in motu semper minus celeriter de-  
 10 scendere aquam vasis *b* quam *c*; atqui gravitatio non e motu sumitur, sed ab inclinatione ad descensum in ultimo instanti ante motum, ubi nulla est ratio celeritatis.

Q u a e s t i o i n g n o m o n i c a. — Sit sub linea aequinoctiali horizontali horologium faciendum cujus linea aequinoctialis est data, ac praeterea tria puncta ad quae umbrae extremitas debeat pertingere, dum sol est in tropico Capricorni, quomodocun-  
 15 que data sint, modo ne in rectam lineam incidant, centrum solis horologii reperire est et

---

12 Zu Beginn des Abschnitts, laut E von Leibniz angemerkt: 5 juin 1676.

---

2–11 Petiit . . . celeritatis: Zum hydrostatischen Paradox vgl. S. STEVIN, *De Beghinselen des Waterwichts*, 1586, S. 20–22 u. 56 f.; vgl. die Beekman im Juni 1619 mitgeteilte Untersuchung: R. DESCARTES, *Aquae comprimentis in vase ratio reddita* (DO X, S. 67–74; JB IV, S. 52–55). 12–113,2 Q u a e s t i o . . . incidant: Zum dargestellten Problem vgl. MARONNE, *Une autre géométrie*, S. 313–341; zum Herausgebereingriff in den Text vgl. S. 317. 14 dum . . . Capricorni: zur Wintersonnenwende.

longitudinem styli. Hoc reducitur ad circulum tres alios inaequales tangentem, quorum centra in rectam lineam non incidant.

Nulla figura est in tota extensione in qua et circa quam circulus duci possit, quomocunque figura fiat praeter triangularem, quae Divinitatis hieroglyphicon.

In omni quadrato quadrati semper ultima nota est 1, 6, 5. 5

In omni quaestione debet dari aliquod medium inter duo extrema, per quod jungantur vel explicite vel implicite, ut circulus et parabola, ope conici. Item per duos motus compossibiles describentur. Ut motus ad [spiralem] dicendus non est cum circulari compossibilis.

Si funis mathematicus admittatur, is erit communis mensura recti et obliqui. Verum 10 dicimus admitti hanc lineam posse, sed a mechanicis tantum: ea scilicet ratione qua uti possumus statera ad aequandam cum pondere, vel nervo ad eandem comparandam cum sono; item spatio in facie horologii contento ad metiendum tempus, et similibus in quibus duo genera conferuntur.

Perlegens Lamberti Schenkeli lucrosas nugas (lib. *De arte memoriae*) cogitavi facile 15 me omnia quae detexi imaginatione complecti: quod fit per reductionem rerum ad causas, quae omnes cum ad unam tandem reducuntur, patet nulla opus esse memoria ad scientias omnes. Qui enim intelliget causas, elapsa omnino phantasmata causae impressione rursus


2 rectam lineam incidant *E ändert Hrsg. nach DOC*

5 In ... 1, 6, 5: Möglich wäre auch die 0 als Endziffer, aber in diesem Fall muss bereits die Basis der Potenz die 0 als Endziffer besitzen; vgl. auch COSTABEL, *L'initiation mathématique*, S. 641 f.

8 [spiralem]: eckige Klammern in *E*. 15–114,10 Perlegens ... fictitiae: Vgl. die Überlegungen zur *ars memoriae* in *Cartesius* (CARRAUD, *Cartesius*, S. 3; DO XI, S. 649); L. SCHENCKEL, *De memoria libri duo*, [...] *In secundo est, ars memoriae* [...], 1593; DERS., *Gazophylacium Artis Memoriae.*, 1609; DERS., *Brevis tractatus de utilitatibus et effectibus admirabilibus artis memoriae*, 1614. — Die Gedächtniskunst Schenckels wurde mit dessen Einverständnis auch von Faulhaber unterrichtet; vgl. J. FAULHABER, *Wahrhaftige und Gründliche Solution oder Auflößung einer hochwichtigen Frag*, 1618, S. 26: „Ich underschribner / Bekenne in Crafft diß gegenwertigen / von Herrn Johann Faulhabern / Mathematico und Modisten / Burgern in Ulm / das er die Kunst der gedächtnuß etc. Auch neben andern allhie zu Ulm meinen Lectionen, so von mir Lateinisch gehalten worden / beygewohnt / unnd ob er wol in Lateinischer Sprach nit vil versteht / jedoch wegen der Scharpffsinigkeit seines verstandts / hat er [...] den Inhalt der praecepten, so Ich fürgetragen / erlangt / derohalben [...] ihme [...] gebühre / was orths er sey / unverhindert zu reden [...] Lambertus A. etc. Schenkelius Dusilmius.“ — Vgl. auch J. FAULHABER, *Zwey und Viertzig Secreta*, 1622, § XXX: „Artem Memoriae Teutsch“.

facile in cerebro formabit: quae vera est ars memoriae illius nebulonis arti plane contraria, non quod illa effectu careat, sed quod chartam melioribus occupandam totam requirat et in ordine non recto consistat: qui ordo in eo est ut imagines ab invicem dependentes efformentur. Hoc ille omittit, nescio an consulto, quod est clavis totius mysterii. Ipse  
 5 excogitavi alium modum, si ex imaginibus rerum non inconnexarum addiscantur novae imagines omnibus communes, vel saltem si ex omnibus simul una fiat una imago, nec solum habeatur respectus ad proximam, sed etiam ad alias, ut quinta respiciat 1<sup>o</sup> per hastam humi projectam, medium vero per scalam ex qua descendent, et secunda per telum quod ad illam projiciat, et tertia simili aliqua ratione in rationem significationis  
 10 vel verae vel fictitiae.

Aiunt pisces capi facilius cum tedula in rete demissa. Quidni candela in vitro conclusa?

Si esset corpus quod pro aetate  $\triangleright$  mutaret pondus, daret motum perpetuum. Fiat talis rota  ubi nigrum sit alterius formae  $\triangleright$  non subditae et tota rota, ita in axe librata  
 15 ut utraque forma in naturali statu aequalis sit ponderis, haud dubie perpetuo movebitur juxta motum  $\triangleright$ .

Ponatur statua aliquid ferri habens in capite et pedibus, ponatur super funem vel virgam ferream exiguam, sed vi magnetica tinctam; item supra caput ejus alia sit, vi etiam magnetica tincta, quae altior sit et quibusdam in locis majori vi distincta. Statua  
 20 autem habeat in manibus baculum oblongum ad modum funambulis, qui sit excavatus et in eo nervo contentus, cui interea principium motus automati intus inclusi, quo levissime tacto statua omnis pedem promoveat, quoties tangitur et in locis majore vi magnetis in summo tactis sponte scilicet cum pulsabuntur instrumenta.

14 subditae ex tota *E ändert Hrsg.*

---

11 f. Aiunt ... conclusa?: Vgl. G.B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XV, cap. 5, S. 241 f.; vgl. SHEA, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107 f., Anm. 50. 13 Si ... pondus: Vgl. G.B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. I, cap. 9, S. 10. 17–23 Ponatur ... instrumenta: Vgl. POISSON, *Commentaire*, S. 156; vgl. auch G.B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. VII, cap. 27, S. 139.

Columba Architae molas vento versatiles inter alas habebit, ut motum rectum deflectat.

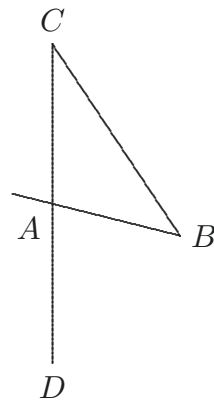
Si tria trianguli latera ducuntur in se invicem et productum per areae quadruplum dividatur, habebitur semidiameter circuli, quarto triangulo circumscripti. Sunt latera  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , area  $e$ , semidiameter erit  $\frac{abc}{4e}$ ; ut fiant latera 13, 14, 15, et area 84; semidiameter est  $\frac{65}{8}$ . 5

Describi potest sectio conica tali circino:

1 Columba arditea *E ändert Hrsg. nach DO*

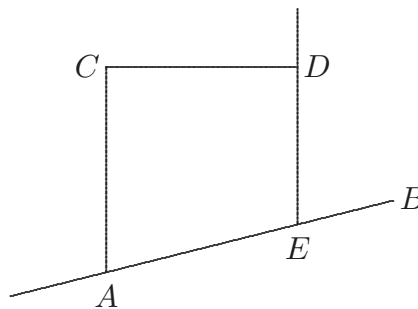
---

1 f. Columba . . . deflectat: Vgl. die entsprechende Erwähnung bei POISSON, *Commentaire*, S. 156. — Vgl. ebenso *Commentarii Collegii Conimbricensis Societatis Iesu, In octo libros Physicorum Aristotelis Stagiritae*, lib. II, cap. I, quaestio VI (in der Ausgabe Lyon, 1594, S. 217 f.); G. B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XX, cap. 10, S. 302 f. — Vgl. auch die Leibniz'sche Handschrift *Columba Architae resuscitata* vom Juni 1678 (LH 38, Bl. 91). 3–6 Si . . . est  $\frac{65}{8}$ : Das Dreieck mit den Seitenlängen 13, 14, 15 ist in der geometrischen Literatur der Zeit verbreitet: Zur Berechnung der Dreiecksfläche aus den gegebenen Seiten vgl. z. B. den Hinweis von COSTABEL, *L'initiation mathématique*, S. 642, auf Chr. CLAVIUS, *Geometria practica*, 1604, S. 175 f.; bei L. VAN CEULEN, *Fundamenta arithmetica et geometrica*, 1615, S. 122 f. u. 158 (Berechnung des Umkreisdurchmessers). — Ein Dreieck mit den Seitenlängen 13, 14, 15 wird z. B. auch von N. TARTAGLIA, *General trattato*, 1560, Teil 4, Buch 2, Bl. 34 v<sup>o</sup> bis 36 r<sup>o</sup>, im Beispiel einer Berechnung des Tetraedervolumens verwendet (vgl. SCHNEIDER, *Johannes Faulhaber*, S. 126); ebenso bei N. MAROLOIS, *Opera mathematica*, 1614, Teil 4, § 53. 4 quarto: Das Wort *quarto* ergibt an dieser Stelle keinen Sinn (vgl. *DOC I*, S. 587, Anm. 37). Vielleicht geht es auf eine tentative Lesung einer vermuteten Kontraktion wie 4<sup>o</sup>, q<sup>o</sup> oder qu<sup>o</sup> zurück; vgl. z. B. die Kontraktionen von *ipsi* oder *quaesiti* bei CAPPELLI, *Dizionario*, S. 186 u. S. 305. 7–116,8 Describi . . . distabit: MANDERS, *Descartes et Faulhaber*, S. 3 f., verweist auf das von Johann Rummelin am 9. Dezember 1620 abgelegte Zeugnis über den Besitz noch nicht öffentlich bekannter Proportionalzirkel bei Faulhaber: „Nemlich / vier neue ProportionalZirkel / mit welchen man zwischen zwo Linien zwey andere media Proportionalia, Geometrisch finden solle. Item / Wie jeder winckel auff einem Cirkelriß in drey gleiche partes Geometrisch zu theilen. Deßgleichen wie alle Conische / Cylindrische Sectiones Geometrisch zu vollbringen / von welchen andere authores grosse Bücher geschriben.“ (J. REMMELIN, *Copiae Eines uber die Inventiones, Secreta unnd Wissenschaften Herrn Johann Faulhabers / ertheilten Testimonii*, in: J. FAULHABER, *Appendix oder Anhang der Continuation deß Newen Mathematischen Kunstspiegels*, 1621, S. [4 f.]).



[Fig. 8a]

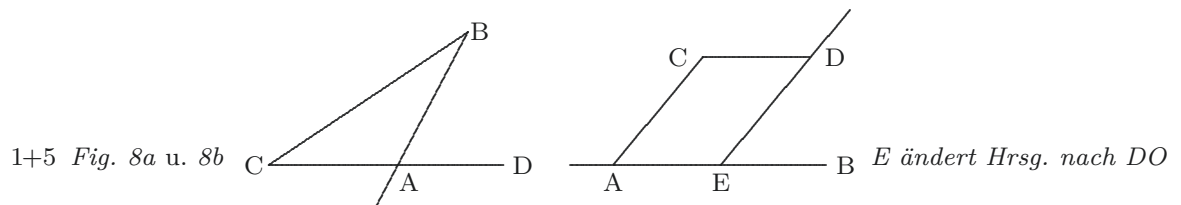
Sit  $AD$  perpendicularis superficies obliqua  $AB$ . Sit pes circini immobilis, volvatur  $BC$  supra planum obliquum, ita tamen ut  $CB$  possit brevior fieri, si imaginetur per  $C$  ascendere.



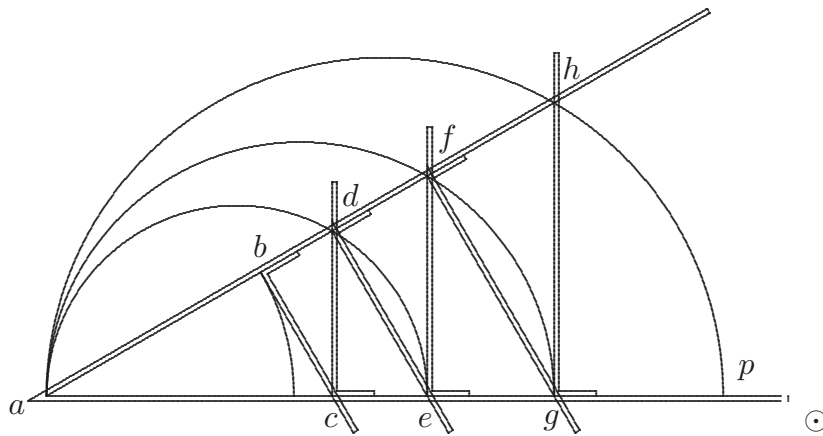
[Fig. 8b]

5

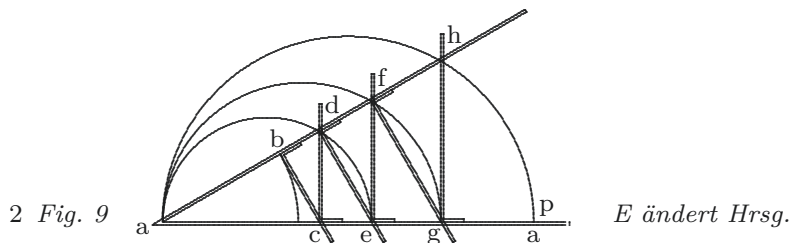
Sectio cylindri eodem pacto circino duci potest ita: sit  $ACDE$  circinus, cujus pes immobilis est, linea  $DE$  descendet vel ascendet libere per punctum  $D$  prout a plano distabit.



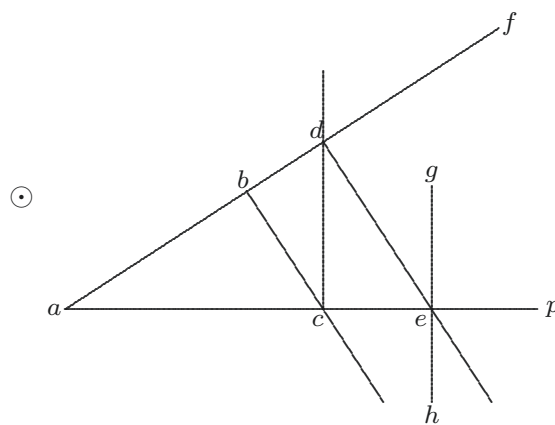
1+5 *Fig. 8a u. 8b* 2 obliqua  $CD$  *E ändert Hrsg. nach DO* 2 Sit pes circini immobiliter *E ändert Hrsg. nach DO*  
 3-6 fieri. Si imaginetur per  $B$  ascendere, sectio *E ändert Hrsg. nach DO* 6 sit  $AC, DE$  circinus, hujus pes *E ändert Hrsg. nach DO*



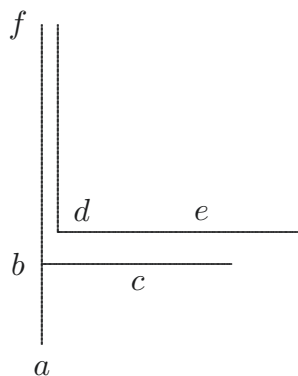
[Fig. 9]



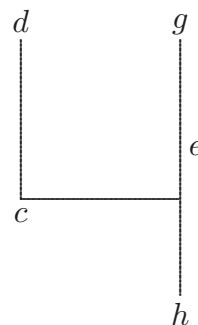
2 Fig. 9: Wegen des Textbezugs auf die Figur in S. 118 Z. 2 wurde die Reihenfolge der Figuren 9 und 10 gegenüber E vertauscht. Die in E abgedruckte Figur unterscheidet sich in der Ausgestaltung deutlich von den anderen Skizzen zu den Gleichungszirkeln und stimmt nicht komplett mit dem zugehörigen Text überein. Es ist zu vermuten, dass Foucher de Careil sie, gestützt auf die Anmerkungen von Leibniz, nach dem Druck des Proportionalzirkels in der *Géométrie* von Descartes übernommen hat. Dem Text entsprechend kann die Figur folgendermaßen rekonstruiert werden:



Inveni aequationes inter talia:  $1\zeta$  et  $7^2 + 14$ , et simile hoc.  $1^\circ$  Reduco ad  $1^2 + 2$  aequ.  $\zeta$  vel  $+1\zeta$ , quem postea multiplicabo per 7 primi circini; deinde alium circinum habere oportet quorum duae partes sunt tales:



[Fig. 10a]

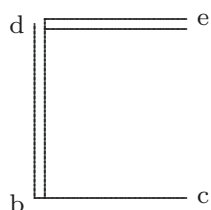


[Fig. 10b]

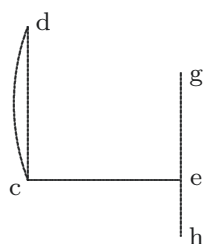
5 Prima habet lineam  $bc$  firmiter annexam ad angulos rectos lineae  $af$ , lineam autem  $de$  ad angulos quidem rectos, sed mobilem per lineam  $fb$ . Linea  $fb$  habet praeterea in

2 Zu primi circini, laut *E von Leibniz angemerkt*: Erat circinus qualis est mesolabi in *Geom. Cart.*, scilicet pars ex mesolabi duabus proportionalibus.

1f. talia 15 et  $74 + 14$  et simile hoc.  $1^\circ$  Reduco ad  $12 + 2 + c$  vel  $+ 1c$  quam postea *E ändert Hrsg.*



4 Fig. 10a u. 10b

*E ändert Hrsg.*

1–120,4 Inveni ... quaesitus: Descartes unterlaufen offenbar bei den algebraischen Lösungsversuchen in den Beispielen kubischer Gleichungen systematische Fehler. Die instrumentelle Lösung mit Kombinationen der ihm zur Verfügung stehenden Gleichungszirkel ist jedoch möglich. Zu den Gleichungszirkeln vgl. BOS, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 237–245. 19,7 circinus: Vgl. J. REMMELIN (s. o. die Erl. zu S. 115 Z. 7) sowie R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS I* S. 67–69.



puncto  $d$  stylum fixum quo lineam describat; in puncto  $f$  etiam unum sed mobilem quo aliam lineam describat hoc pacto. Secunda pars  $dcegh$  constans lineis firme invicem annexis fluat supra lineam  $ap$ , ubi affixa est prima pars, in puncto  $a$  immobili; punctum  $c$  impellit lineam  $bc$  et ita efficiet ut tota secunda pars descendat, linea autem  $cd$ , trahit lineam  $de$  per spatium  $fb$  juxta varietatem intersectionum et tum stylus  $d$  lineam primi circini describet. Linea autem  $gh$  intersecabit etiam lineam  $de$  aliamque lineam curvam stylo  $e$  mobili describet quae ultima linea secabit  $ap$  in quo  $ae$  est cubus inveniendus si  $ab$  primae partis sit unitas,  $ce$  vero secundae numerus absolutus, qui in exemplo est binarius. 5

Fit praeterea aequatio inter talia,  $\zeta$ ,  $z$ ,  $z^4$ , dummodo quot sint  $z$  tot  $z^4$ , et hoc modo: 10  
 $1\zeta$  aequ.  $6z - 6z^4 + 56$ . 1<sup>o</sup> Reduco ad numerum radicum ternarium, habeboque  $\frac{1}{2}\zeta$  aequ.  
 $3z - 3z^4 + 28$ . Deinde ex  $N$  tollo unitatem, ex residuo cubum formo cujus radici unitatem addo et quod cubice extra producitur ex illa radice est  $\frac{1}{2}\zeta$  quod si multiplicetur per 2 producet cubum quaesitum.

Sed si non sunt tot  $z$  quot  $z^4$ , reducemus ad fractiones, ita ut horum numeri superiores 15  
sint aequales hoc pacto: ut  $36 + 3z - 6z^4$  aequ.  $1\zeta$  reducam ad  $9 + \frac{3}{4}z - \frac{3}{2}\zeta$ ; quo facto

---

2 Nach hoc pacto, laut  $E$  (wohl Verweis auf Fig. 9):  $\odot$

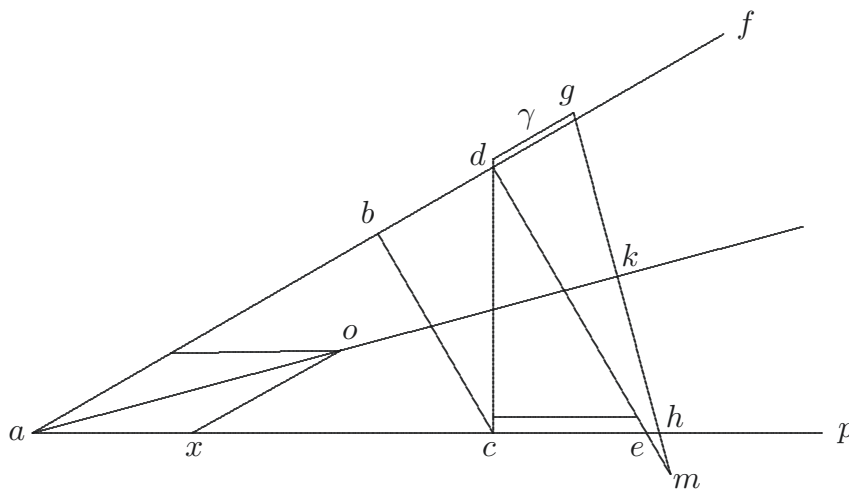
5 f. Zu lineam primi circini, laut  $E$  von Leibniz angemerkt: illam mesolabi seu pro duabus mediis de qua in *Geometria* Cartesii

1 describat in puncto etiam unam sed mobilem  $E$  ändert Hrsg. 2 describat f hoc pacto  $\odot$ .  $E$  ändert Hrsg. 4 tota prima pars ändert Hrsg. nach DO 7 stylo  $c$  mobili  $E$  ändert Hrsg. 7 quo ad est  $E$  ändert Hrsg. nach DO 10–12 talia 5, 3, 4. Nummodo quot sint 3 tot 4 et hoc modo  $15 + 6z + 64 + 56$ . 1<sup>o</sup> Reduco ad numerum radicum ternarium habeboque  $1/2$   $g3z + 24 + 28$ . Deinde ex  $N$  tollo unitates  $E$  ändert Hrsg. nach DO 13 radice est  $1/2$   $c$  quod  $E$  ändert Hrsg. nach DO 15 sunt tot 3 quot 4, reducemus  $E$  ändert Hrsg. nach DO 16 hoc pacto: ut  $36 + 3z + 64 + 1g$  reducam ad  $9 + \frac{3}{4}z - \frac{3}{2}\zeta$  pro facto  $E$  ändert Hrsg. nach DO

---

7 stylo  $e$  mobili: Zum Herausgebereingriff in den Text vgl. BOS, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 244, Anm. 26. 20,18 mesolabi: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I S. 67–69.

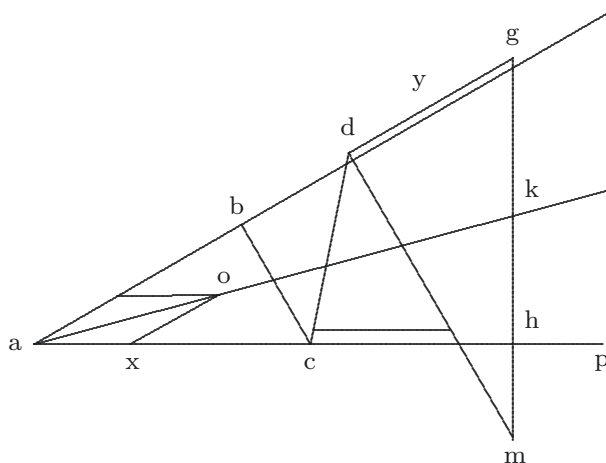
si ex  $N$  tollatur 1 et eadem hujus residui radici cubicae addatur et productum cubice multiplicetur, fiet  $\frac{1}{4}\zeta$  aequalis 27, sive  $\zeta$  erit 108. Item sit  $1\zeta$  aequ.  $26 - 3\zeta - 3^4$ . Adde unitatem numero absoluto, deinde ex radice producti unitatem demo, et producitur ex radice cubus quaesitus.



[Fig. 11]

5

1 tollatur 1 ex eadem  $E$  ändert Hrsg. 2 fiet  $1/4g$  aequalis 27 sive  $c$  erit 216. Item sit  $1g$  et  $26 - 3z - 34$ . Adde  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$



5 Fig. 11

$E$  ändert Hrsg.

Alius circinus ad aequationes cubicas  $1\zeta$  &  $OzON$ . — Si inveniendus sit cubus aequalis  $ON$   $dg$  et quadrato uni incognito, talis circinus fabricetur  $dce$  fluit supra  $ap$  fluendo pellit  $bc$  in puncto  $c$  adigitque ut descendat simulque  $af$  cui affixa est  $bc$  ad angulos rectos describitque intersectione  $af$  et  $cd$  lineam circini mesolabi. Praeterea trahit secum lineam  $dm$  quae impacta est lineae  $af$ , ita tamen ut moveatur, trahit etiam  $dg$  quae est numerus absolutus et fluit supra  $af$ ; item  $dg$  trahit  $gm$  quod impactum est lineae  $ak$  ad angulos rectos, ita ut sine illa moveri non possit, adeoque retrocedit rursus  $z$ . Intersectio autem linearum  $gm$  et  $dm$  describit aliam lineam quae intersecat  $ap$  in puncto quaesito. Ab illo  $m$  ad  $a$  est  $\zeta$  inveniendus. Sit enim, verbi gratia,  $d\gamma$   $ON$  loco  $dg$ . Quia intersectio  $de$  et  $\gamma e$  cadit in  $ap$  dico cubum  $ae$  esse aequalem quadrato  $ad$  et  $ON$   $d\gamma$ . Nam triangulus  $\gamma ae$  est isocelus propter lineam  $ak$  quae impacta est ad angulos rectos lineae  $\gamma e$  ex constructione.  $ab$  autem est unitas etiam ex constructione,  $ac$  vero radix cubi inventi. Ex his inveniri possunt aequationes inter  $1\zeta$  et  $Oz - ON$  item  $ON - Oz$  ut ex praecedenti inveniri potest inter  $1\zeta$  et  $O^2 - ON$ , item  $ON - O^2$ , sed viam aperuisse sufficiat.

5

10

15

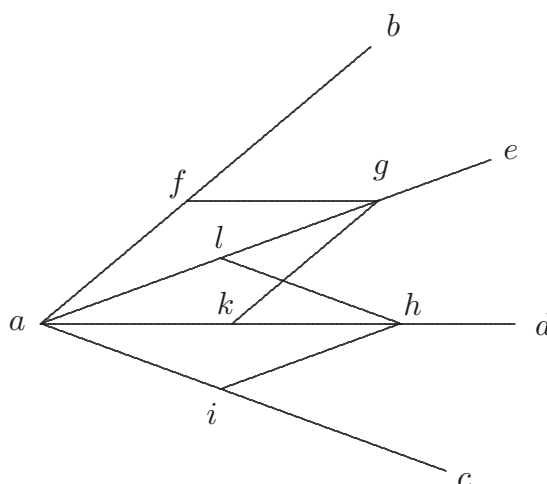
10 Zu  $d\gamma$   $ON$ , laut *E von Leibniz angemerkt*: id est absolutus

13 Zu radix cubi inventi laut *E von Leibniz angemerkt*: puto inveniri primum cubum quaesitum inde ejus radicem

1 cubicas  $1\zeta$  et  $Oz$  on *E ändert Hrsg. nach DO* 4 est  $vc$  ad *E ändert Hrsg. nach DO*  
 6 trahit  $gm$ qd *E ändert Hrsg.*; nach  $gm$ qd laut *E von Leibniz angemerkt*: (+ non video  $q$ . in figura +)  
 7 sine ulla *E ändert Hrsg. nach DO* 8 rursus  $z$  *E ändert Hrsg.* 9 quaesito ab illo in  $ada$  est  $C$ . Inveniendus sit *E ändert Hrsg.*; zum ersetzten Text, laut *E von Leibniz angemerkt*: obscure  
 9f. gratia,  $dy$   $ON$  loco  $dy$  quia intersecto  $de$  et  $ye$  cadit *E ändert Hrsg.* 10 cubum  $ac$  esse *E ändert Hrsg.*  
 12 lineae  $ge$  ex *E ändert Hrsg.* 13f. aequationes inter  $1g$  et  $Oz - ON$  item  $ON - Oz$  ut *E ändert Hrsg. nach DO*  
 14 potest inter  $1g$  et  $O^2 - ON$  item  $ON - O^2$ , sed *E ändert Hrsg. nach DO*  
 22,18 ejus radium *E ändert Hrsg. nach DO*

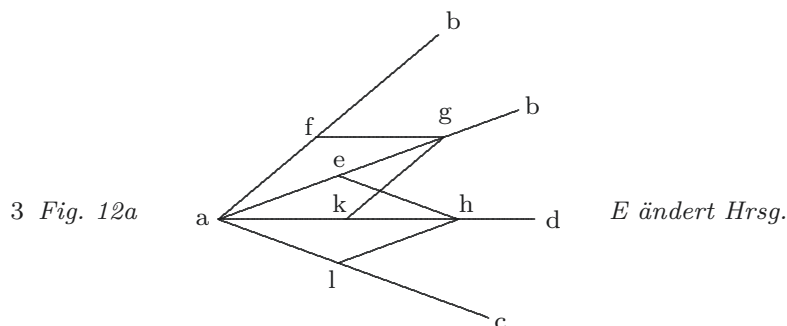
4 lineam circini mesolabi: *a. a. O.* 22,20 non ... figura: Leibniz hat offenbar die Buchstaben  $qd$ , die wir als Kontraktion von *quod* interpretieren, für zwei Punktbezeichnungen gehalten, zu denen er den Punkt  $q$  in der Figur nicht finden konnte.

Circinus ad angulum in quotlibet partes dividendum.  
Sit talis circinus



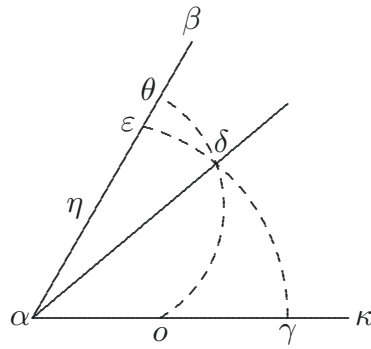
[Fig. 12a]

$ab/ae/ad/ac$  sunt aequales laminae divisae pariter in punctis  $flki$ , item  $fg$  aequalis  
5 est  $af$ , etc. Unde fit ut tres anguli  $bae$ ,  $ead$  et  $dac$  sint semper aequales, nec unus possit  
augeri vel minui quin alii etiam mutantur.



4 laminae divisae  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$ ; zu divisae laut  $E$  von Leibniz angemerkt: (+ an divisae? +)  
4 punctis feki  $E$  ändert Hrsg.

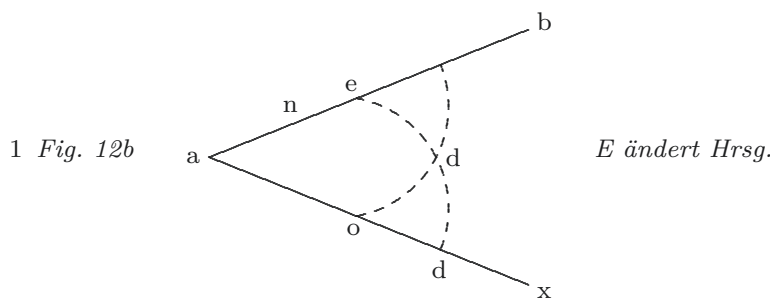
1 Circinus ... dividendum: Vgl. das Zeugnis von J. REMMELIN (s. o. die Erl. zu S. 115 Z. 7) sowie die Aufzeichnung *Sectio anguli per instrumentum* von Leibniz, dat. 28. März 1676, mit den zugehörigen Figuren von Tschirnhaus (VII, 1 N. 24 S. 182). — Zur Funktionsweise des Winkelteilungsinstruments vgl. BOS, *Redefining Geometrical Exactness*, S. 237–239.



[Fig. 12b]

Si igitur angulus  $\beta\alpha\kappa$  dividendus, applico lineam  $ac$  supra  $\alpha\kappa$ , qua ibi manente immobili, elevo lineam  $ba$  in partem  $\beta$  quae secum trahit  $ae$  et  $ad$ , lineaque describetur a puncto  $g$  talis  $\gamma\delta\epsilon$ . Deinde sumatur  $\eta\alpha$  aequalis  $af$  et ex puncto  $\eta$  ducatur pars circuli  $\theta\delta o$  ita ut  $\eta\theta$  sit etiam aequalis  $fg$ , dico lineam  $\alpha\delta$  dividere angulum in tres partes aequales; ita potest dividi angulus in plures, si circinus constet pluribus laminis.

5



1 Fig. 12b

E ändert Hrsg.

2 angulus  $\alpha x$  E ändert Hrsg.    2 supra  $\alpha x$  E ändert Hrsg.    3 partem  $b$  E ändert Hrsg.    3 trahit  $ac$  E ändert Hrsg.    4 sumatur  $n\alpha$  E ändert Hrsg.    4 puncto  $n$  ducatur E ändert Hrsg.    5 ut  $n\theta$  E ändert Hrsg.    5 lineam  $ad$  E ändert Hrsg.    6 constet plurimis E ändert Hrsg. nach DO

Si subtrahatur numeri triangularis quadratus ex quadrato sequentis triangularis, restat cubus ut 10. 15: tolle 100 ex 225 restat 125, ex 5.

Ex progressionem 1 | 2 || 4 | 8 || 16 | 32 || habentur numeri perfecti 6. 28. 496.

Vidi commodum instrumentum ad picturas omnes transferendas: constat in pede  
5 cum circino bicipiti. Aliud quoque ad omnia horologia depingenda, quod per me possum invenire: Tertium ad angulos solidos metiendos; quartum argenteum ad plana et picturas metiendas, pulcherrimum aliud ad picturas transferendas, aliud affixum viatoris

2 restat 120, ex. *E ändert Hrsg.* 7–125,1 affixum oratoris tibiae *E ändert Hrsg.*

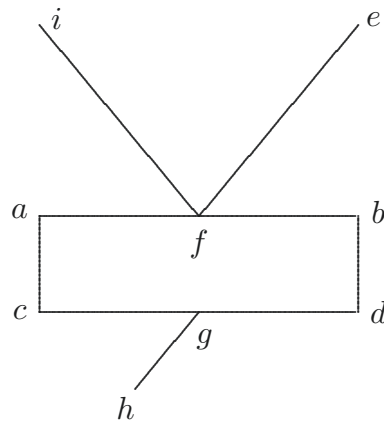
---

1 f. Si ... ex 5: Die Aussage ergibt sich aus der Umkehrung des bereits bekannten Theorems, dass die Summen der Kubikzahlen gleich den Quadraten der Triangularzahlen sind; vgl. die Tafel mit den Spalten *G* der Kubikzahlen und *H* der Quadrate der Triangularzahlen auf dem Titelblatt von J. FAULHABER, *Schriftlich Memorial*, 1622, sowie die eingehende Analyse bei SCHNEIDER, *Johannes Faulhaber*, S. 131–135. 3 Ex ... 496: Vgl. den Hinweis bei COSTABEL, *L'initiation mathématique*, S. 640 f., auf EUKLEIDES, *Elementa*, IX, 36, sowie den zugehörigen Kommentar in Chr. CLAVIUS, *Opera mathematica*, Bd I, 1611, S. 378. 4–125,1 Vidi ... dirigenda: Beim ersten und fünften Instrument der Liste handelte es sich wohl um einen Pantographen (vgl. B. BRAMER, *Bericht und Gebrauch eines Proportional Lineals*, 1617; D. SCHWENTER: *Geometriae practicae novae tractatus I*, 1618, S. 255–257; Chr. SCHEINER, *Pantographice, seu ars delineandi*, 1631); beim zweiten um ein Instrument zur Konstruktion von Sonnenuhren (vgl. z. B. Chr. CLAVIUS, *Fabrica et usus instrumenti ad horologiorum descriptionem peropportuni*, 1586; B. LEEMANN, *Sonnen Uhren zuo ryssen*, 1587; DERS., *Instrumentum instrumentorum: Horologiorum sciotericorum*, 1604); das dritte diente zum Messen räumlicher Winkel (vgl. B. BRAMER, *Kurtzer Bericht, Eines Schreg, oder Winckel Instruments*, 1615); das vierte war ein Planimeter (vgl. z. B. L. HULSIUS, *Erster Tractat Der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii: Gründtlicher, augenscheinlicher Bericht dess newen geometrischen gruntreissenden Instruments, Planimetra genandt*, 1604; J. FAULHABER, *Ein sehr nützlicher new erfundener Gebrauch eines niederländischen Instruments zum Abmessen und Grundtlegen*, 1610; DERS., *Neue geometrische und perspectivische Inventiones etlicher sonderbahrer Instrument*, 1610; B. BRAMER, *Trigonometria planorum mechanica*, 1617); das sechste Instrument war ein Schrittzähler (vgl. z. B. L. HULSIUS, *Vierdter Tractat der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii. Gründtliche Beschreibung des Diensthafften unnd Nutzbahn Instruments Viatorii oder Wegzählers*, 1605); das siebte war ein Geschützaufsatz mit einer Visiereinrichtung, die eine bei Tageslicht vorgenommene Ausrichtung einer Kanone nachts reproduzieren konnte (vgl. den Hinweis bei MEHL, *Descartes en Allemagne*, S. 49–52, auf L. HULSIUS, *Ander Tractat Der Mechanischen Instrumenten Levini Hulsii: Gründlicher unterricht des newen BüchsenQuadrants, wie derselbe, das grosse Geschütz, bey Tag oder bey Nacht zurichten, gebraucht sol werden*, 1603; vgl. auch J. FAULHABER, *Weitere Continuation deß Privilegirten Mathematischen Kunstspiegels*, 1626, S. 20–21).

tibiae ad momenta metienda, aliud ad tormenta bellica noctu dirigenda. — Petri Rothen *Arithmetica philosophica*. — Benjamin Bramerus.

Lux quia non nisi in materia potest generari, ubi plus est materiae, ibi facilius generatur caeteris paribus; ergo facilius penetrat per medium densius quam per rarius, unde fit ut refraction fiat in hoc a perpendiculari, in alio ad perpendicularem, omnium autem maxima refraction esset in ipsa perpendiculari si medium esset densissimum a quo iterum exiens radius egrederetur per eundem angulum.

5

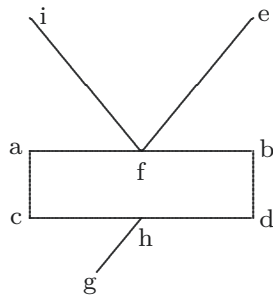


[Fig. 13]

Sit  $abcd$  medium densissimus, radius  $ef$  per  $fg$  perpendiculariter transibit per  $fg$  in  $gh$ , ita ut  $bfe$  et  $cgh$  sunt aequales anguli. Reflexio autem nihil est aliud quam productio

10

8 Fig. 13

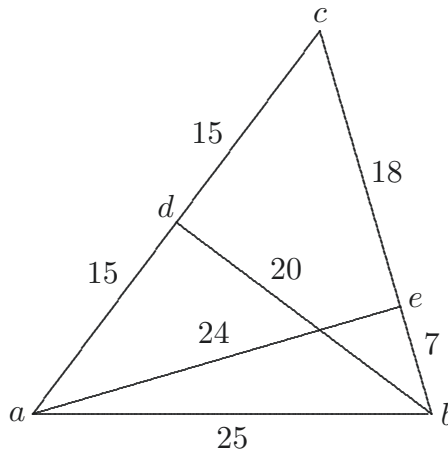


E ändert Hrsg.

9 per fh in E ändert Hrsg.

1 f. Petri ...*philosophica*: P. ROTH, *Arithmetica Philosophica, Oder schöne neue wolgegründte Über-  
auß Künstliche Rechnung der Coß oder Algebrae*, 1608. 2 Benjamin Bramerus: B. Bramer.

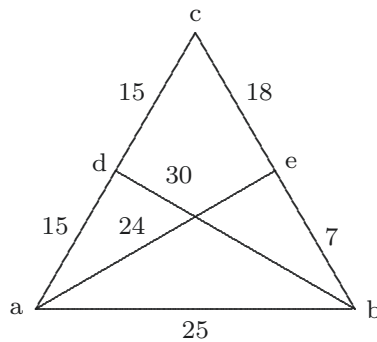
lucis a superficie opaca in partem inversam, quoniam in rectum non potest, v. g. superficies  $afb$  producit radium reflexum  $fi$  quem surrectum  $gh$  produxisset superficies  $cgd$ . Locus imaginis est in linea recta ab oculo ad primum reflexionis vel refractionis punctum producta, in quo autem illius puncto sit; hoc non apparet nisi ex situ aliorum punctorum quia distantia objecti non aliter advertitur; vel dici potest esse in perpendiculari ab objecto, id enim unum fit per accidens in quibusdam et non ex eo quod sit concursus perpendicularis.



[Fig. 14]

2 surectum E ändert Hrsg. nach DO

8 Fig. 14



E ändert

Hrsg.



Dantur  $adb$  et  $aeb$ , invenire  $ac$  et  $cb$ , differentiam inter  $ad$  ductum per  $ae$  et  $db$  ductum per  $be$ ; divido per differentiam inter quadrata ex  $ae$  et  $db$ , et productum si ducatur per  $ae$  facit  $ac$ , si per  $db$  facit  $bc$  est enim ut  $ae$  ad  $db$  ita  $ce$  ad  $dc$  atque ut  $db$  ad  $ae$  ita  $cb$  ad  $ca$ .

Nuper cum aliquas chartas comburerem, et ignis in quo comburebantur, esset acrior, 5  
animadverti characteres integros manere et tam lectu faciles quam antea: e contrario scripta vidi cum atramento sulfure mixto intra viginti quatuor horas evanescere.

Regula generalis ad aequationes quatuor terminorum 10  
completas. — Reducatur numerus quadratorum ad ternarium per divisionem; deinde si illis addita sit nota  $+$  tollantur  $\frac{1}{2}$  ex toto numero et loco illorum reponantur  $3\frac{1}{2}$ , et tollatur unitas, ac praeterea addantur tot unitates quot sunt  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , deinde procedatur ad aequationem inter  $O\frac{1}{2}$  et  $O\frac{1}{2} + ON$ . Qua inventa, addatur unitas radici inventae, et illa radix erit quae quaerebatur. Si vero quadratis addita sit nota  $-$ , tollantur  $\frac{1}{2}$  et loco illorum addantur  $3\frac{1}{2}$  et unitas[;] deinde tollantur adhuc tot unitates quot sunt  $\frac{1}{2}$  et  $\frac{1}{2}$ , ac 15  
postea si extrahatur radix ex invento nostro et ex illa extrahatur unitas, habebitur radix quaesita initio.

1 Datur  $E$  ändert Hrsg. nach DO 1 per  $ae$  et  $ab$   $E$  ändert Hrsg. nach DO 2 ex  $ad$  et  $cb$   
 $E$  ändert Hrsg. nach DO 3 utque  $E$  ändert Hrsg. nach DO 3f.  $cb$  ad  $ea$   $E$  ändert Hrsg. nach  
DO 10 tollantur ( $\sqrt{\quad}$ )  $E$  ändert Hrsg. nach DO 10 reponantur  $3\frac{1}{2}$   $E$  ändert Hrsg. nach DO  
11 sunt  $\frac{1}{2}$   $E$  ändert Hrsg. nach DO 12 inter  $O\frac{1}{2}$  et  $O\frac{1}{2} + ON$   $E$  ändert Hrsg. nach DO 12f. radici,  
inventae et illa radix erit quae quae (bis) quaerebatur.  $E$  ändert Hrsg. nach DO 13–15 tollantur et  
loco illorum addantur  $3\frac{1}{2}$  et unitas deinde addantur adhuc tot unitates quot sunt  $\frac{1}{2}$ , ac (bis) postea  $E$   
ändert Hrsg. nach DO

---

1–4 Dantur ... ad  $ca$ : Die Aussagen gelten nur für Punkte  $a, b, d, e$ , die auf einem Kreis liegen und folgen aus dem Sekantensatz. In den Dreiecken  $adb$  und  $aeb$  mit den von Descartes in der Beispielfigur angegebenen Seitenlängen ist diese Bedingung erfüllt: Die Eckpunkte liegen alle auf dem Halbkreis mit der Basis  $ab$ . (Vgl. EUKLEIDES, *Elementa*, III, 36, und den zugehörigen Kommentar in Chr. CLAVIUS, *Opera mathematica*, Bd I, 1611, S. 146–148, insbesondere S. 148 die Umkehrung des ersten Korollars, sowie das 2. Beispiel in der Handschrift *Calcul de Mons. Descartes* (HANNOVER GWLB Ms IV 381, Bl. 23, gedr. DO X, S. 674f.); vgl. auch die Aufzeichnungen von Leibniz und Tschirnhaus zu Kreisvierecken vom 2. Februar 1676, VII, 1 N. 23, S. 181, und VII, 2 N. 76, Teil 2, S. 849–851). 5–7 Nuper ... evanescere: Vgl. G. B. PORTA, *Magiae naturalis libri XX*, 1589, lib. XVI, cap. 2, S. 248f.; vgl. SHEA, *The Magic of Numbers and Motions*, S. 107f., Anm. 50.

In tetraedro rectangulo basis potentia aequalis est potentiis trium facierum simul: v. g. sint basis tria latera  $\sqrt{8}$ ,  $\sqrt{20}$ ,  $\sqrt{20}$ ; tria vero latera supra basin, 4, 2, 2, area basis erit 6; trium facierum, 2, 4, 4, quorum quadrata sunt 36, [et] 4, 16, 16, quae tria aequipollent priori. Item sunt latera basis  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{20}$ , 5 et supra basin, 2, 3, 4, area basis erit  $\sqrt{61}$ ; facierum vero 3, 4, 6, quorum quadrata sunt 61 et 9, 16, 36, aequalia priori. Hinc plurimae quaestiones ignotae solvi possunt circa tetraedra rectangula et non rectangula per relationem ad rectangula.

Haec demonstratio ex Pythagorica procedit, et ad quantitatem quoque quatuor dimensionum potest ampliari, in quo quadratum solidi angulo recto oppositi aequale est quadratis ex 4 aliis solidis simul. Sit ad hoc paradigma processio in numeris 1, 2, 3, 4; in figuris  $l$ ,  $q$ ,  $c$ ,  $qq$ ,  $\beta$ ; in angulis rectis duarum linearum, trium, quatuor.

Data basi pyramidis rectangulae, facile inveniuntur latera super basin, sint, v. g. latera basis  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{20}$  et 5; pro primo latere supra basin ponatur  $1^2$ ; pro altero  $\sqrt{13 - 1z}$ ;

---

11 Zu  $l$ ,  $q$ ,  $c$ ,  $qq$ ,  $\beta$  laut  $E$  von Leibniz angemerkt: (latus, potentia, cubus, quoque)

3f. tria sequi pollent  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$  11 figuris cp.  $cgq$ ,  $\beta$  in angulis  $E$  ändert Hrsg. 13–129,1 ponatur 14; pro altero  $13 - 1z$ , et pro tertio  $\sqrt{20} - 1z$  quorum  $E$  ändert Hrsg. nach  $DO$

---

1–11 In ... quatuor: Vgl. J. FAULHABER, *Miracula arithmetica*, 1622, Kap. 45, S. 73–76.  
 8–11 Haec ... quatuor: Der Abschnitt enthält einige Aufzählungen mit drei, vier, wohl sogar fünf, Termen, die Descartes in Analogie zur Folge der Zahlen 1, 2, 3, 4 setzt. Die Analogie besteht darin, dass sich jede dieser aufsteigenden Folgen beliebig fortsetzen lässt. — Die in  $E$  gedruckte Textstelle „cp.  $cgq$ ,  $\beta$ “ ist verderbt, aus dem Zusammenhang des Satzes lässt sich jedoch erschließen, dass es sich in der Vorlage um eine Wiedergabe einer aufsteigenden Folge von Potenzen handelte. Vom graphischen Befund her ist diese aber kaum mit der Folge der ersten drei (in  $DO$  gedruckten) oder vier cossischen Zeichen „ $e$ ,  $z$ ,  $ce$ ,  $zz$ “ (in Analogie zu den Zahlen 1, 2, 3, 4) in Übereinstimmung zu bringen. Zieht man darüber hinaus die in  $E$  dazu abgedruckte Anmerkung von Leibniz („latus, potentia, cubus quoque“) hinzu, so wäre erklärungsbedürftig, warum Leibniz erst an dieser Stelle und nicht schon vorher die cossischen Zeichen in die entsprechenden mathematischen Begriffe übersetzt hat. Plausibler erscheint, dass Leibniz hier das Auftreten einer weiteren Bezeichnungsweise notierte, nämlich der Symbole  $l$ ,  $q$ ,  $c$ ,  $qq$ ,  $\beta$  für *latus*, *quadratus* bzw. *potentia*, *cubus*, *quadratoquadratus*, *sursolidus*: Beispiele aus diesen alternativen Symbolen verwendet Descartes in der unmittelbar darauf folgenden Rechnung, nämlich  $q$  und  $qq$  sowie  $qc$  für *quadratocubus* (vgl.  $DO$  X, S. 247, Anm. b). Es muss wohl offen bleiben, ob es sich bei dem Wort „quoque“ in der Anmerkung von Leibniz nicht sogar um eine irrtümliche Auflösung von  $qq$  für *quadratoquadratus* handelt.

et pro tertio,  $\sqrt{20 - 1z}$ ; quorum duorum potentia, quia aequalis potentiae lateris est aequalis  $33 - 2z$  vel  $1z$  aeq. 4. Ergo nota basi et angulo opposito totam pyramidem possumus agnoscere ut de triangulo Euclides demonstrat. Tetraedri rectanguli latera ad basin  $a\beta\gamma$  supra basin erunt

$$\sqrt{\frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{2}\gamma q - \frac{1}{2}\beta q}; \sqrt{\frac{1}{2}\alpha q + \frac{1}{2}\beta q - \frac{1}{2}\gamma q}; \sqrt{\frac{1}{2}\beta q + \frac{1}{2}\gamma q - \frac{1}{2}\alpha q};$$

5

areae facierum

$$\begin{aligned} &\sqrt{\frac{1}{16}\alpha q q + \frac{1}{8}\beta q \gamma q - \frac{1}{16}\beta q q - \frac{1}{16}\gamma q q}; \\ &\sqrt{\frac{1}{16}\beta q q + \frac{1}{8}\alpha q \gamma q - \frac{1}{16}\alpha q q - \frac{1}{16}\gamma q q}; \\ &\sqrt{\frac{1}{16}\gamma q q + \frac{1}{8}\alpha q \beta q - \frac{1}{16}\alpha q q - \frac{1}{16}\beta q q}; \end{aligned}$$

2 aequalis,  $33 - 22$  vel  $1z$  aeq. 4 *E ändert Hrsg. nach DO*      4 basin  $a\beta\gamma$  supra *E ändert Hrsg.*

nach *DO*      4-130,5 erunt  $\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}\sqrt{q} - \frac{1}{2}(3q\sqrt{\frac{1}{2}} = +\frac{1}{2}\beta q \sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt{q}; \sqrt{\frac{1}{2}\beta q} + \frac{1}{2}\sqrt{q} - \frac{1}{2}aq$ ; areae

facierum  $\sqrt{\frac{1}{16}aq q + \frac{1}{8}(3q\sqrt{\frac{1}{2}} - \frac{1}{16}\beta q q - \frac{1}{16}\sqrt{q q} - \sqrt{\frac{1}{16}\beta q q} + \frac{1}{8} =; \sqrt{q} - \frac{1}{16}aq - \frac{1}{16}\sqrt{q q}, \sqrt{\frac{1}{16}\sqrt{q q} + \frac{1}{8} =$

$$\begin{aligned} \beta q - \frac{1}{16} = q q - \frac{1}{6}\beta q q. \text{ Area basis } &\sqrt{aq} \quad \beta q - \frac{1}{16} aqq \\ &\frac{1}{8}aq \sqrt{q} \quad \beta q q \\ &\beta q \sqrt{q} \quad \sqrt{q q} \end{aligned}$$

Totum corpus tetraedri est:  $\sqrt{\frac{1}{288}aq q \beta q} + \frac{1}{288}aq q \sqrt{q} + \frac{1}{288}\beta q q a q + \frac{1}{288}\sqrt{q q a q} + \frac{1}{288}\sqrt{q q} \beta q -$   
 $\frac{1}{144}aq B q \sqrt{q} - \frac{1}{288}aq - \frac{1}{288}\beta q c - \frac{1}{288}\beta \nu q c.$  Invenitur *E ändert Hrsg. nach DO*

3 demonstrat: Die Aussage gilt nur für gleichschenklige Dreiecke und folgt aus EUKLEIDES, *Elementa*, I, 26, eine Analogie zu den von Descartes betrachteten rechtwinkligen Tetraedern besteht jedoch nicht.

Area basis

$$\sqrt{\frac{1}{8} \begin{array}{cc} \alpha q \beta q & - \frac{1}{16} \alpha q q \\ \alpha q \gamma q & \beta q q \\ \beta q \gamma q & \gamma q q \end{array}}$$

Totum corpus tetraedri est:

$$\sqrt{\frac{1}{288} \alpha q q \beta q + \frac{1}{288} \alpha q q \gamma q + \frac{1}{288} \beta q q \alpha q + \frac{1}{288} \beta q q \gamma q + \frac{1}{288} \gamma q q \alpha q + \frac{1}{288} \gamma q q \beta q - \frac{1}{144} \alpha q \beta q \gamma q - \frac{1}{288} \alpha q c - \frac{1}{288} \beta q c - \frac{1}{288} \gamma q c}$$

- 5 Invenitur corpus pyramidis ex tribus lateribus ad basin solis cognitis, si assumatur media pars summae ex tribus illorum quadratis agregatae et rectangula radix trium quantitatum in se ductarum, quibus illa media summa excedit quadrata singulorum laterum separatimque continet sexies totum corpus hexaedri. Sint, v. g. tria latera ad basin  $\sqrt{13}$ ,  $\sqrt{20}$ , 5, media pars summae ex tribus quadratis est 29, excedens 13, 20, et 25, numeris  
 10 16, 9, 4, quae per se ducta faciunt 576 cujus radix est 24 et hujus sexta pars est 4. Ergo corpus pyramidis est 4.

6 agregatae et rectangulae radix *E ändert Hrsg. nach DO* 10 24 et cujus sexta *E ändert Hrsg. nach DO*

## 23. DE CONDENDIS TABULIS ANALYTICIS

Januar 1675

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 440. 1 Bl. 2°.  $\frac{2}{3}$  S. auf Bl. 440 r°. Rückseite leer. — Gedr.: *LDK*, 1980, S. 146 f.  
Cc 2, Nr. 898

5

Januar. 1675.

## De Condendis Tabulis Analyticis

Tabulas habemus Numerorum, Tabulas literarum, sive Combinationum dedit nemo. Quaerenda ergo ratio est condendi Tabulas ejusmodi, ut earum usus quam latissime pateat.

10

Pars I<sup>ma</sup> de aequationum unius incognitae radicibus indefinitis

Hic recensebuntur ordine omnes aequationes unius incognitae ad gradum usque vicesimum si placet, et quidem generaliter atque indefinite; v. g. pro gradu tertio  $x^3 + bx^2 + a^2cx + a^2d \neq 0$  cujus radices irrationales generaliter, et una formula (ope signorum ambiguum) exhiberi potest; idem fiat in caeteris aequationibus omnibus, si modo id fieri potest.

15

## Pars II. de aequationum tractationibus

Methodus investigandi aequationum divisores rationales atque irrationales gradu inferiores Tabulaeque quales Huddenianae. Methodus tollendi ex aequatione terminos quot

8 Numerorum, (1) restant Tabulae (2) Tabulas *L* 9 ejusmodi, (1) qvo (2) ut *L* 9–11 latissime (1) fundatur (2) pateat. (a) Pars I<sup>ma</sup> de Formulis | sive Aequationibus *erg.* | unius incognitae (aa) ibi (bb) Praemittatur omnibus Methodus investigandi divisores Rationales pariter atqve irrationales, | sed dimensione inferiores; aequationum unius incognitae *nicht gestr.* | (b) Pars I<sup>ma</sup>: de (aa) Aequationibus (bb) Aequationum unius incognitae, (cc) Aequationum *L* 11 f. radicibus | indefinitis *erg.* | (1) In (2) Hic *L* 13 indefinite; | Earumque *gestr.* | v. g. *L* 13 f. tertio (1)  $x^3 + a$  (2)  $a^4 + a^3bx + a^4$  (3)  $x^4$  (4)  $x^3 + (a)ba^2$  (b)  $abx^2$  (c)  $bx^2 + (aa)a^2cx$  (bb)  $acx + a^2d$  *erg.* |  $\neq 0$  *L* 15 omnibus, (1) Sed quoniam in altioribus imprimis aequationibus (a) incognitae (b) aequationes mult (c) radices irrationales multis exprimi possunt modis, suppositis (2) si *L* 17 aequationum (1) form (2) tractationibus *L* 19 Tabulaeque quales Huddenianae *erg.* *L* 19 Methodus (1) transformandi (2) tollendi *L*

19 tabulaeque ... Huddenianae: J. HUDDE, *De reductione aequationum*, Regel XI, *DGS* I S. 439 bis 458.

licet, praescriptis in eam rem formulis generalibus ut res sine calculo fiat. Methodus reducendi aequationes locorum parium ad proxime inferiores locorum imparium. Methodus efficiendi ut omnium aequationum radices fiant verae; Methodus reducendi aequationes ad alias inferiores ope quarundam intervenientium.

- 5 Regulae de aequationum limitibus; de resolutionibus aequationum in Analogias et formularum in portiones, sed hoc ope calculorum qui sequentur seu ope formularum plurium incognitarum. Huc alia id genus.

Pars III. de Aequationibus plurium incognitarum reducendis ad aequationes unius

- 10 Sit aequatio ascendens ad solidum incognitum; jungatur *p r i m u m* cum alia quae non ascendit nisi ad lineam incognitam, *d e i n d e* cum ea in qua linea et planum incognita, *t e r t i o* cum pari.

Totum ejusmodi Tabulae condendae artificium in eo consistet, ut sequentia praecedentibus perpetuo juventur; itaque primum simplicibus admodum utendum est aequationibus, sed multis.

2 locorum (1) parium (2) imparium *L* 3 verae; | item, *gestr.* | Methodus *L* 5 in (1) Analy (2) Analogias *L* 6 ope (1) Relat (2) formularum *L* 9 ad (1) cubum; (2) quadratum incogni (3) solidum *L* 10 ad (1) rect (2) lineam *L* 10 qva | non nisi *gestr.* | linea *L*

---

8 De ... unius: vgl. z. B. die Studie *De aequationibus pluribus ad unam reducendis* (VII, 2 N. 77) vom 7. Februar 1676.

## 24. SCHEDIASMA DE CONSTRUCTORE

Dezember 1674

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 11–15, 17. 3 Bog. 2°. 12 S. Textfolge Bl. 11, 17 r°, 17 v° (untere zwei Drittel), 12–15. Ersetzte Vorstufen von Figuren werden nicht wiedergegeben. — Auf dem oberen Drittel von Bl. 17 v° N. 28.

5

Cc 2, Nr. 827

Schediasma de constructore. Xb. 1674.

24<sub>1</sub>. PARS PRIMA

Trochoeidis parabolicae ope credo effici potest, ut qualibet data figura alia describatur quae sit in ratione logarithmorum ejus. Idque utile erit pro figuris usitatoribus, v. g. circulo figuraque angulorum, Cycloide, ipsaque Trochoeide parabolica, quod si pro ipsa Trochoeide parabolica fiat, fient logarithmi logarithmorum.

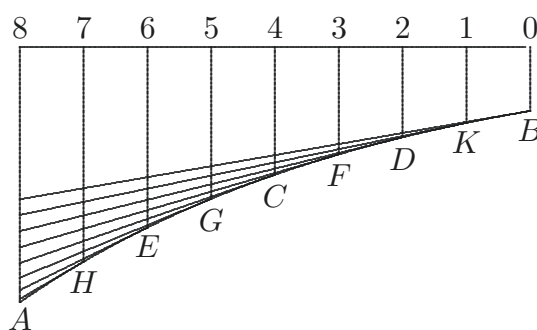
Figurae logarithmicae aequatio haec est  $x \propto a^y$ . Sed quoniam lex homogeneorum observari debet, videbimus quid futurum sit,  $x \propto \frac{b}{a^0}$  vel  $\frac{b^2}{a^1}$  vel  $\frac{b^3}{a^2}$  vel  $\frac{b^4}{a^3}$  etc. vel  $x \propto \frac{b^y}{a^{y-1}}$  vel  $xa^{y-1} \propto b^y$ .

15

---

10 *Über* usitatoribus: utilioribus

7 Schediasma ... 1674. *erg.* *L* 9 (1) Figura log (2) Trochoeidis *L* 9f. describatur (1) homogene (2) quae *L* 11 parabolica, (1) qua methodo ha (2) quod *L* 13 est (1)  $a^{y-1}x \propto a^y$   $xa^{y-1} \propto$  (2)  $x \propto a^y$  *L* 14 sit, (1) nimirum  $\frac{x}{a} \propto$  vel  $1^y$  et haec aequatio exacta est. Imo male, quia  $1^y$  seu 1 utcunqve in se ducta dat 1. Itaque (2)  $x \propto \frac{b}{a^0}$  *L*



[Fig. 1]

Talis figura per puncta describetur si rectae cuidam 012345678 cujus extremis duae ascriptae 0B. et 8A. inveniatur media 4C. et inter has tres inveniatur rursus mediae 2D. 6E, et inter has 5 rursus mediae 7H, 5G, 3F, 1K. Ita fiet ut continuatis in infinitum subsectionibus ut sint abscissae velut exponentes, et applicatae velut potestates, sive ordinatae sunt in replicata ratione abscissarum, v. g. abscissa 01 est ad abscissam 02 ut 1. ad 2. Ergo 2D est ad 0B in duplicata ratione 1K ad 0B. Hinc patet et omnes figuras logarithmicas esse inter se similes, nec nisi intervallo 08 inter duas datas applicatas sumto affine.

10 Inquirendum est in methodum qua P. Gregorius reduxit logarithmos ad spatia hyperbolica an ejus exemplo aliae figurae transcendentes reduci possint. Tangentem figurae logarithmicae describi ex punctis B K D. Applicatae ad rectam 8A sunt logarithmi, abscissae ex AE, ut numeri naturales. Videndum quid ex duarum logarithmicarum intersectione duci possit, item ex intersectione unius cum circulo aliave figura v. g.  $x \pi$

---

11f. *Dazu am Rand:* Possunt inveniri Tangentes figurae logarithmicae ope Trochoeidis.

5 sint (1), velut 12. 13. 14. 15. etc. (2) abscissae L 5 potestates, (1) |v. g. nicht gestr. | 1B ad 13, |ut nicht gestr. | 01 ad 02. ita 0B est in replicata (2) nam (3) sive L 15 possunt |invenire Tangente ändert Hrsq. | figurae L

---

10 reduxit: Vgl. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV–CXXX, S. 594–597 sowie A. A. de SARASA, *Solutio*, 1649, insbes. S. 7f.



$\frac{b^y}{a^{y-1}} \sqcap \frac{b^y}{a} \cdot a$ . Pone jam  $x \sqcap \sqrt{a^2 - y^2}$ , junctis inter se his aequationibus, fiet:  $\frac{b^{2y}}{a^{2y-2}} \sqcap a^2 - y^2$  sive:  $b^{2y} \sqcap a^{2y} \overbrace{(-2+2)} - y^2 \wedge a^{2y-2}$ , sive  $\frac{a^{2y} - b^{2y}}{y^2} \sqcap a^{2y-2}$  sive  $y^2 \sqcap a^2, -\frac{b^y}{a} \cdot \wedge b^2$  vel  $\frac{y^2}{b^2} \sqcap \frac{a^2}{b^2} - \frac{b^y}{a}$ . Id est quaeritur ratio  $\frac{y}{b}$  cujus residuum ex ratione  $\frac{a^2}{b^2}$ , aequetur reciprocae rationi datae subduplae, in ratione quaesita multiplicatae. Omnia ergo problemata quae rationum multiplicationibus et submultiplicationibus fieri possunt, solventur intersectionibus Trochoeidis parabolicae et curvae Analyticae cujusdam. Sed et quemadmodum idem problema variis potest curvis Analyticis se secantibus solvi, ita et si curva semi-analytica et analytica jungantur, mutata analytica aliquando mutabitur et semianalytica.

5

Exempli causa hae duae fieri possent aequationes  $\frac{y^2}{b^2} \sqcap \frac{x}{b}$ , sive  $y^2 \sqcap xb$ . et  $x \sqcap \frac{a^2}{b} - \frac{b^y}{a} \cdot \wedge b$ .

Ergo  $x$  componitur ex duabus  $\frac{a^2}{b}$  ordinatae rectanguli, et  $b\frac{b^y}{a}$  ordinata Trochoeidis. Intersectione ergo parabolae quoque et ejusdem Trochoeidis solvi potest idem problema.

10

Quodsi ad alios casus aliasve formas alterius generis Trochoeides adhiberi possunt, uti non dubito, eo ipso dum idem problema ad diversas Trochoeides revocari potest, ostenditur unius curvae Trochoeidem generantis in rectum extensionem ex altera pendere.

Duarum Trochoeidorum vel idgenus curvarum, v. g. etiam Trochoeidis et Cycloeidis intersectione aequationes solventur adhuc difficiliores ubi ipsae  $y$ . intrabunt in exponentes

15

---

1 *Nebenrechnung*:  $\frac{b^3}{a^2} \sqcap \frac{b^y}{a} \cdot \wedge b$

3 quaeritur (1) quantitas eius naturae, cuius (a) residuum (b) quadrato residuum ex data aequatur dato cuidam rectangulo (2) quantitas qua (3) quantitas  $\frac{y}{b}$  cuius residuum ex data quantitate  $\frac{a^2}{b^2}$ , aequetur quantitati datae (4) ratio  $L$  4 in (1) ratione rationis quaesitae ad unitatem (a) multiplicatae (b) sive ad rationem m (2) ratione  $L$  9f.  $x \sqcap \frac{a^2}{b} - \frac{b^y}{a} \cdot \wedge b$  (1) idem ergo problema quod (a) solvitur (b) solutum est (2) Ergo  $L$

---

2-4  $y^2 \sqcap \dots$  multiplicatae: Der Exponent des Bruchterms müsste  $2y - 2$  lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter und formuliert das fehlerhafte Ergebnis aus. Die allgemeine Überlegung bleibt davon unberührt.

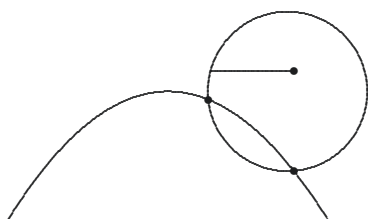
plus semel. Porro ope Trochoeidis nostrae extrahi possunt omnes radices aequationum

1-137,1 Nebenbetrachtungen:  $y^2 \sqcap \frac{ly}{2} \sim 10 + \frac{ab}{80} \quad y^2 \sqcap 2 \wedge y + 80$

$$y^3 \sqcap \boxed{ly^2} + \boxed{my} + ab$$

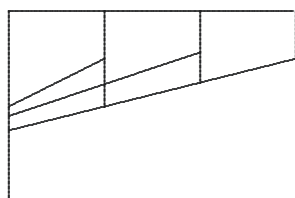
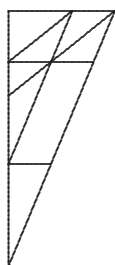
$$y^4 \sqcap \boxed{ly^3} + \boxed{my^2} + \boxed{ny} + ab$$

$$y^5 \sqcap ly^4 + my^3 + ny^2 + oy + ab$$



$$y^2$$

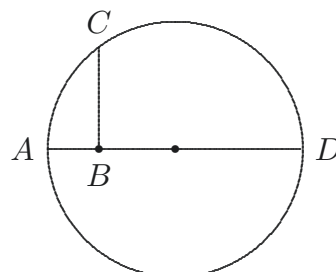
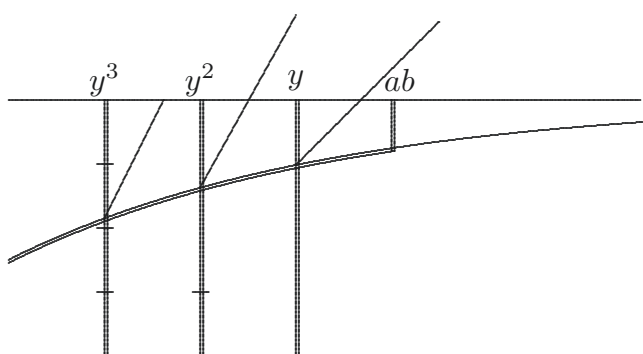
$$y^3 \quad y^4$$



1 semel. (1) Soli (2) NB. solida (a) Geometrica (b) Analytica possunt esse homogenea figuris non analyticis, quomodo animadversum est a Wallisio unquam quendam Hyperbolicam esse (3) Porro L

4,9 animadversum est: J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547f. (WO I S. 918f.); vgl. N. 28.

purarum, sed nondum video quomodo affectarum e. g. sit aequatio:  $y^3 \sqcap ly^2 + amy + a^2n$ .



$$y^2 \sqcap ab \quad y^3 \sqcap ab \quad y^4 \sqcap ab$$

$$2 \quad 4 \quad 8 \quad 3 \quad 9 \quad 27$$

$$\sqrt{16} \quad \frac{3}{\sqrt{81}}$$

$$\frac{2}{4} \frac{b}{b^2}$$

$$\frac{2}{8} \frac{b}{b^3}$$

$$\frac{2}{16} \frac{b}{b^4}$$

$$\frac{2}{32} \frac{b}{b^5}$$

*Nebenbetrachtungen auf Bl. 12<sup>v</sup>:*

$y^3 + ly^2 + my + sm. \frac{y+l}{y+s} \sqcap \frac{m}{y^2} \sqcap \frac{m}{y} \hat{\sim} \frac{1}{y}$ . Trouver un nombre le quel augmenté par 1, soit au quotient de m, divisé par le dit nombre; comme le dit nombre augmenté de s. est à soy meme. Item facile Geometrice exhiberi potest. Haec aequatio ita in duas divelletur:  $\frac{m}{y} \hat{\sim} y + s \sqcap x$  et  $y + l \hat{\sim} y \sqcap x$  quarum altera ad parabolam altera ad Hyperbolam simplicem.  $my + ms \sqcap xy. y^2 + ly \sqcap x. my^2 - xy^2 + msy \sqcap 0$

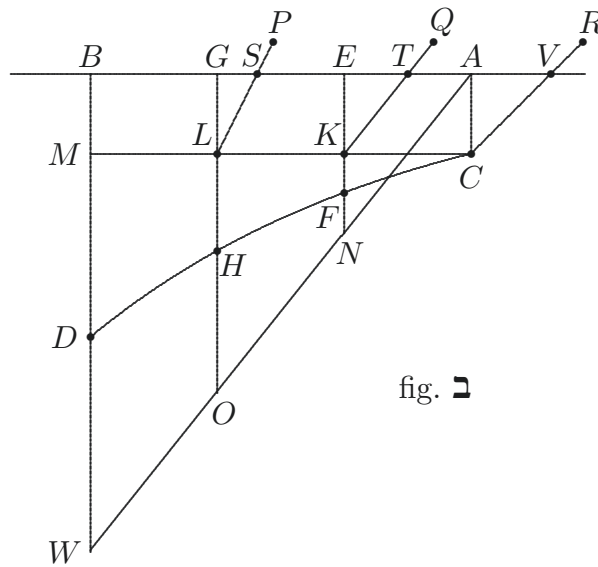


fig. 3

[Fig. 2]

seu  $y^2 \sqcap \frac{msy}{x-m} \sqcap x-ly$  sive  $y \wedge l - \frac{ms}{x-m} \sqcap x$ . Ergo  $y \sqcap \frac{x}{l - \frac{ms}{x-m}}$  et  $\sqcap \frac{ms}{x-m}$ . Fiet:

$\frac{x-m \wedge x}{lx-lm-ms} \sqcap \frac{ms}{x-m}$  et reducendo:  $x^2 - 2mx + m^2, \wedge x, \sqcap -m^2s^2, +lms \wedge x - m$ , et  $x - m$  vocando  $z$ , fiet:  $z^2 \wedge z + m \sqcap -ms^2, +lmsz$ .  $z^3 + mz^2 - lmsz + ms^2 [\sqcap 0]$ . Quae aequatio cum aequivaleat datae tum  $my + ms \sqcap xy$ . Ergo  $y \sqcap \frac{ms}{x-m} \sqcap \frac{ms}{z}$  potest a. sumi  $y \sqcap rz^2 + tz + v$ .

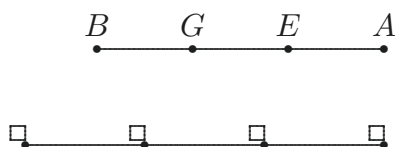
*Nebenbetrachtungen auf Bl. 13r<sup>o</sup>:*

$$\frac{\boxed{10} + 3}{\boxed{10} + 4} \sqcap \frac{m}{100} \frac{1300}{\boxed{10 \square}}. \quad 1000 + 300 \sqcap 10m + 4m. \quad [m \sqcap] \frac{1300}{14}.$$

$$\frac{y+3}{y+4} \times \frac{1300}{y^2}. \quad y^3 + 3y^2 \sqcap \frac{1300}{14} y + \frac{4 \wedge 1300}{14}. \quad y^3 \sqcap \boxed{\frac{1300}{14} y} + \frac{1300}{14} [\wedge] 4 - \boxed{3y^2}.$$

2-4 sive: Leibniz unterlaufen Versehen bei der Rechnung, die sich nicht grundsätzlich auswirken.

Ut si  $AC$  sit  $a$  sive unitas et  $BD$  sit  $\frac{ly^2 + amy + a^2n}{a^2} \square y^3$  quaeritur  $EF$ ,  $\square y$ .  
 duarum mediarum proportionalium  $EF$  et  $GH$  prior. Ex punctis  $E$ .  $G$ . educantur rectae  
 indefinitae  $EN$ ,  $GO$ . ipsis  $AC$ ,  $BD$ . parallelae, quas secabit in punctis  $K$ ,  $L$ , recta  $CM$ ,  
 ipsi  $AB$ , parallela et aequalis. Punctis  $L$ .  $K$ .  $C$ . applicentur rectae indefinitae  $LP$ .  $KQ$ .  
 $CR$ . tali angulo, ut  $GS$ ,  $ET$ ,  $AV$  sint aequales rectis  $l$ .  $m$ .  $n$ . et ut sint mobiles in 5  
 rectis  $GO$ ,  $EN$ ,  $AC$ , eodem tamen semper angulo servato. Hoc facto recta  $AB$  ponatur  
 esse asymptota figurae logarithmicae, cui recta data  $AC$ , ordinatim ex curva applicata  
 intelligatur. Datur ergo punctum  $A$ . Item punctum  $C$ . Quaeritur punctum  $B$ . et  $D$ . Recta  
 ergo  $BW$  indefinita huc usque agatur, donec eveniat, ut recta  $AB$  inventa in punctis  $G$ .  
 $E$ . aequaliter divisa, rectae ex punctis  $H$ .  $F$ .  $C$ . ductae ipsis  $LS$ .  $KT$ .  $CV$ . parallelae 10  
 abscindant rectas  $GS$ ,  $ET$ ,  $AV$ , tales ut earum summa sit ipsi  $BD$  aequalis.



[Fig. 3]

Illud primum efficiendum est, ut datis 4 punctis  $A$ .  $E$ .  $G$ .  $B$ . et  $A$ . immoto manente,  
 motoque solum  $B$ . caetera moveantur proportionaliter, seu in ratione rectorum  $AE$ .  $AG$ .  
 $AB$ . seu ita ut  $AB$ . moto utcunque puncto  $A$ . semper aequaliter a punctis  $E$ ,  $G$ . dividatur, 15  
 seu ut distantiae  $AE$ .  $EG$ .  $GB$ . semper maneant aequales.

2 GH (1) prima (2) prior. (a) per C transeat ipsi AB parallela, CHLM. secans rectas AC, EF, GL,  
 BM in punctis C, H, L, M. (aa) Cum ergo (bb) cum (cc) quae | puncta erunt data, cum nicht gestr. |  
 rectae AB, AC, BM sint (dd) | puncta nicht gestr. | A. E. G. B. item M et C. sint data (b) per p (c) ex L  
 5 l. m. n. (1) et ut rectae illae LP, (2) et L 10 LS. | CT. ändert Hrsg. | CV. L



se rediens, neque nisi in uno puncto seu annulo unam rotam tangens. Potest remedium adhiberi forte chordarum tensioni, si elaterium in loco ubi affixae, eas tendat vel in uno latere vel utrobique, sed ad usum tutiores catenae. Nota non ut alias ita hic quoque chordae simpliciter tangere debent trochleas, sed debent esse iis infixae extremitatibus, hoc si fiat, et arte quadam efficiatur, ut semper tensa sit chorda, ope Elaterii, et evitetur eodem tempore replicatio. Quod et ad Elaterium necesse est, ita enim si absit replicatio Elaterium facile tendet chordam; cum et distantiae punctorum 3. 2. 1. semper maneant eadem, quod ope axium per centra perpendiculariter ad circulorum plana transeuntium inter se linea rigida ab utroque latere connexorum [efficiatur] quia linea rigida simul cum machina recta procedit. Hac methodo non video quid etiam sine dentibus rotis, catenisque ad summam exactitudinem desiderari possit modo id unum efficiatur, ut non possit procedere machina ne in momento quidem physico, id est plane non nisi tantundem volvatur. *Il faut empêcher que la première roue 3. ne puisse glisser ou traîner sans tourner.* Efficiendum scilicet est ut prima rota 3, non possit ita procedere ut per aliquod temporis spatium eodem puncto  $B$  planum tangat. Quod impediatur si ipsi quoque chorda (vel si vis catena) sit circumplicata affixaque (elaterio in loco affixionis tendente[]) quae deinde per rectam  $BGF$  extendatur, ita fiet, ut quantum ipsa chordae relinquit in plano, id est quantum volvitur, tantum provolvatur. Praeterea utile imo necesse est rotam 3. fortiter premi contra planum in  $B$ . Ita enim elaterium in duobus affixionis punctis, altero in plano, altero in rota 3. chordam tendens non poterit subtrahere eam puncto attactus inter tendendum; et ita tensiones illae et relaxationes a natura chordae aut humiditate aeris, vel calore vel frigore ortae; non sentientur, a gyratione trochleae sive rotae. Atque ita effecimus problema Geometricum satis elegans: Efficere, ut punctis quotcunque datis in eadem recta aequidistantibus; motis omnibus praeter unum, maneant omnia aequidistantia. Quod est corollarium propositionis hujus[:]. Datis quotcunque punctis in eadem recta efficere ut moto uno caetera omnia moveantur per consequentiam in data ratione celeritatis. Id enim hic evenit, modo ponamus ex planis  $\gamma$ .  $\beta$ .  $\alpha$  regulas perpendiculares  $\delta EF$ ,  $\theta GL$ ,  $BD$ . descendere, quae a punctis contactus  $\delta$ .  $\theta$ .  $B$ . continue propellantur. Puncta autem contactus procedent in ratione Circulorum, ergo et regulae, ergo et puncta  $E$ .  $G$ .  $B$ . quibus regulae rectam  $\alpha$  vel  $AB$  secant.

14 possit | ita *erg.* | procedere | ita *nicht gestr.* | ut  $L$       16 sit (1) complicata (2) circumplicata  
| affixaque . . . tendente *erg.* | quae  $L$       23 ut (1) qvatu (2) pu (3) corpora quaedam in eadem linea (4)  
pun (5) punctis  $L$







Jam ipsam  $BD$ . pone continere figuram  $\Omega$ , quam hic adscriptam vides, ibi recta  $AM$ , ita applicata angulo quodam unitas seu  $\textcircled{A}\textcircled{\aleph}$  seu  $a \cap AC$  figurae prioris. Jam regula  $\textcircled{\aleph}\textcircled{B}$  sit eo angulo ut recta  $\textcircled{A}\textcircled{B}$  fiat ad rectam  $\textcircled{A}\textcircled{\aleph}$  ut  $b$  ad 1 seu erit  $\textcircled{A}\textcircled{B} \cap b$ . Inde parallela ipsi  $\textcircled{A}\textcircled{\aleph}$  exhibit  $\textcircled{B}\textcircled{C}$  aequalis ipsi  $y$ . seu  $EF$ . Quod fiet dum in fig.  $\blacksquare$  fingis rectam  $F\Gamma$  regulam, ab  $EF$  transire in  $BD$  angulo recto, seu ipsi  $AB$  parallelam, unde rursus exeat regula  $BG$  mobilis cum regula  $BD$  in regula  $F\Gamma$ , quae facit ob angulum  $G\Gamma B$  semirectum ut  $\Gamma G$  sit  $\cap B\Gamma \cap EF$ . Jam redi ad figuram  $\Omega$ . ubi  $\Gamma G$  prioris fig.  $\blacksquare$ , est  $\textcircled{B}\textcircled{C}$  hujus. Per puncta  $\aleph C$  transeat recta interminata  $\textcircled{\aleph}\textcircled{C}\textcircled{F}\textcircled{K}$  in qua mobiles ipsi  $AM$  semper parallelae  $\textcircled{C}\textcircled{N}\textcircled{F}\textcircled{O}$  etc.  $\textcircled{C}\textcircled{N}$  propellitur a  $BC$  [: recta  $\textcircled{B}\textcircled{C}$  fig.  $\Omega$  eadem cum recta  $\Gamma F$  fig.  $\blacksquare$  :]. Inde in  $AM$  ducatur recta  $\textcircled{C}\textcircled{D}$  angulo tali, ut  $\textcircled{B}\textcircled{D}$  fiat  $\cap ly$ . seu ut  $BC$  multiplicetur per  $l$ . atque ita propelletur linea  $\textcircled{D}\textcircled{E}\textcircled{F}$  ita ut  $E$  sit in recta  $\textcircled{C}\textcircled{N}$ , erit  $\textcircled{EF} \cap ly^2$ . Sed ob angulum  $\textcircled{FH}$ , qui multiplicat  $ly^2$  per  $\frac{m}{l}$  fiet  $\textcircled{EH} \cap my^2$ . Quae regula  $\textcircled{FH}$  propellet  $\textcircled{GHIK}$  quae secat  $\textcircled{FO}$  in  $\textcircled{I}$  unde  $\textcircled{IK} \cap my^3$  unde regula  $\textcircled{KL}$  multiplicans  $\textcircled{IK}$  per  $\frac{n}{m}$  faciet  $\textcircled{IL} \cap ny^3$ . et ita porro in infinitum. Sed si ultra cubum non procedat aequatio, contenti erimus linea  $\textcircled{GHIK}$  quae quando in curvam nostram incidit solutum est problema. Unum oblitus sum, puncta  $\textcircled{A}$ .  $\textcircled{B}$  esse immobilia, ideo rectam  $\textcircled{\aleph K}$  esse mobilem circa centrum  $\aleph$ . quia  $y$  semper mutatur, regula ergo  $\textcircled{BC}$  non propelletur, sed a recta  $\textcircled{A\aleph}$   $\cap$  rectae  $BG$  figurae  $\blacksquare$  circumagetur  $\textcircled{\aleph K}$ . Caeterae regulae propellentur. Restat quomodo termini negativi per regressum determinentur, et quomodo radices falsae.

24<sub>2</sub>. PARS SECUNDA

1 vides, (1) ubi vides  $b \cap \textcircled{A}\textcircled{B}$ . portionem rectae  $\textcircled{A}\textcircled{M}$  pone  $BC \cap by$  seu aequalem ipsi  $EF$ , multiplicatae per 2 (2) ibi  $L \quad 7$  figuram  $\Omega$ . (1) ubi regula  $BG$  prioris fig.  $\blacksquare$ , continuato (2) ubi  $L$   
 18 recta |  $\textcircled{AC}$  ändert Hrsg. |  $\cap$  rectae  $L \quad 20$  radices (1) negativae (2) falsae  $L$

4 fig.  $\blacksquare$ : s. o. Fig. 5.

9f. [: ... :]: Die eckigen Klammern stammen von Leibniz.

## Schediasmatis de constructore, Pars II.

Si Radices semper essent verae, et termini aequationum (post transpositionem in duas) semper affirmativi, jam perfectam haberemus Machinam constructricem. Et, certe, nihil immutando, ita tantum uti praecedenti parte descripta est, omnium ejusmodi aequationum quae omnes habent terminos negativos, praeter unum; haberi poterunt radices verae. Praeterea, si solis radicibus veris contenti esse volumus, sufficiet figuram  $\Omega$  bis adhibere, semel v. g. in ultimo, semel in alio, postquam scilicet aequatio in duas partes aequales utrobique affirmativas divisa erit, nam ubi utrobique puncta  $(I)$  coincident, ibi erit  $y$  quaesita. Sed quoniam ego perfectionem Geometricam, et omnes radices aequationis quaero; ideo figuram  $\Omega$  quam superioris schediasmatis fine applicui altissimae dimensionis aequationis, rectius judico adhiberi infimae seu radici. Itaque loco  $(A)(C)$  in figura  $\Omega$  erit regula  $(\aleph)(K)$  et loco ipsius  $\Pi F$  in fig.  $\Omega$  erit  $\psi\varphi$ , seu in fig.  $\Omega$   $(G)(K)$ . Recta ergo  $(\aleph)(K)$  rectam  $GK$  adducet vel propellet, prout in motu  $y$  crescunt aut decrescunt. Nam motus eodem modo procedere potest prorsum et retrorsum. Tota difficultas est efficiendi, ut etsi termini quidam intermedii absint, nihil tamen turbetur, item ut motus prorsum et motus retrorsum possint esse mixti. Et quidem ut aliquis terminus sit nullus facile effici posset, faciendo ut  $(F)(H)$  verbi gratia sit ipsi  $(F)(D)$  parallela, ita quidem  $(E)(H)$  fiet nulla, sed quoniam ita jungetur  $(D)(F)$  et  $(G)(K)$  hinc aliud malum quod ita  $(I)(K)$  fieret non  $y^3$  sed  $y^2$ . Difficile est fateor his malis mederi salva machinae simplicitate, itaque: Forte utilissimum erit aequationem propositam in aliam mutare, ejusmodi, ut omnes ejus radices sint affirmativae; quo facto termini etiam signis  $+$  et  $-$  affecti se alternatim sequentur, quod mire commodum est ad institutum nostrum. Ita enim nec machina illa circularum sive Trochlearum proportionalium opus erit. Imo quod est mirabilius poterimus resecare ipsam Trochoeidem sive curvam, tantum enim bis habebimus figuram  $\Omega$ . In una progreditur verb. gr.  $y^6 y^4 y^2 ab$  in altera  $y^5 y^3 y$ . in qualibet parte affirmative. Et quando eveniet ut summae utrobique sint aequales, seu ut lineae  $GK$  utrobique coincident, tunc habebitur vera  $y$ . Itaque tamdiu movenda est machina donec talis  $y$  reperiatur, quod aliquando, vel etiam aliquoties eveniet, si ma-

2f. (post ... duas) erg. L    6 radices (1) affirmativ (2) verae L    12f. (A)(K) L ändert Hrsg. zweimal

8 puncta  $(I)$ : Leibniz verwendet in der Folge bei den Punktbezeichnungen statt der Einrahmungen meist Klammern oder verzichtet ganz auf solche Hervorhebungen.



[Fig. 7]

Servit hoc instr<sup>um</sup> non tantum ad radices aequationum, sed et ad ordinatas curvarum in numeris habendas, condendas facile tabulas[,] examina aut tentamina facienda in opticis[,] in mechanicis. Ut machina explicari et complicari possit opus est puncturas a propellentibus utrinque attingi.

5

Felices inquisitiones quando natura rerum ipsis, insperato consentit. Inquirendum in difficultatem motus seu detrimentum ex contactu, et utrum expediat regulas quasdam inclinate aut transverse promoveri.

Commodum quod non est in curvis se secantibus quoad scil. difficile determinare puncta intersectionis, quia se valde oblique secant. Hic sectio recte determinantis semper perpendicularis nec multa puncta comprehendi possunt. Pertinent ista ad Geometriam practicam, qua examinetur quae instrumenta praxi commodiora.

10

Unitas semper ejusmodi eligi potest ut fit major qualibet radice quaesita.

In plano  $HGM$  sit ipsi  $HG$  parallela  $CF$ . et  $HC$  perpendicularis ad  $HG$ . Et in ipsa  $FC$ . supra vel infra  $C$ . sit punctum  $L$ . circa quod in eodem plano mobilis regula  $LM$ . indefinite producta versus  $M$ . Et vero quaecunque dicturus sum in eodem semper plano intelligenda sunt, nisi aliud admoneatur.

15

Quanquam lineae hic latae sint, regulae scilicet tamen danda opera est ut certarum tantum linearum subtilissimarum in ipsis ductarum ratio in designando quaesito haberi possit.

20

Descriptio I n s t r u m e n t i A l g e b r a i c i cujus ope omnium aequationum ut cunq ue a f f e c t a r u m post facilem admodum praeparationem radices geometricae et si placet eadem opera in numeris quantum licet vero

17 admoneatur | in ipsa COQF mobiles sint | perpendiculariter erg. | duae regulae OP, QT. Horizonti, sive ipsi *gestr.* |  $L$  18 sint, | ut machina haec erg. u. *gestr.* | regulae  $L$  21 (1) Esto aequatio quaedam proposita, sexti exempli causa gradus; (a) ante omnia efficiendum est, ut omnes (b) ea ante omnia ita praeparanda est, ut omnes nanciscatur radices veras; eademqve opera (aa) fieri potest (bb) fiet ut omnes eius termini sint alternatim affirmati et negati (2) Descriptio  $L$  22 utcunqve ... praeparationem erg.  $L$

15 punctum  $L$ : Leibniz hat den Punkt  $L$  zunächst auf der Geraden  $FC$  platziert, danach auf  $HC$  (s. u. S. 148 Z. 8).

propinquis sine ullo calculo reperiuntur

Esto longitudine  $BE$  indefinita, latitudine autem certa pro arbitrio sumta  $EG$ . rec-  
 tangulum  $BEGH$ ; circa cujus latus  $BE$  velut axem mobile sit planum  $BEID$  indefinite  
 continuatum et circa oppositum latus  $GH$  mobile sit planum  $HGM$ . erigendo utrumque  
 5 planum ita ut sit perpendiculare ad planum hujus paginae quod coincidit cum plano rec-  
 tanguli intermedii  $BEGH$ . Totum instrumentum formam habebit libri complicati cujus  
 dorsum sit rectangulum latera sint plana  $BEI$ ; et  $HGM$  inter se parallela et ad dorsum  
 perpendicularia. Esto jam in recta  $HCL$ . punctum  $L$ . mobile huc illuc in dicta recta; mo-  
 bilisque cum ipso pariter et circa ipsum recta seu regula  $LM$  indefinite producta versus  
 10  $M$ . Ipsi  $CL$  parallela sit regula  $OP$ . quae in puncto  $O$  rectae  $CF$  immobiliter affigi; vel  
 etiam cum opus est sursum deorsum moveri possit. Secabit autem sive si mavis praeteri-  
 bit rectam  $LM$  in puncto  $P$ . Ex puncto  $P$  regulae  $LM$  vel regulae  $OP$  (: nam alterutrum  
 idem praestat :) exeant regulae duae, altera alteri affixa; transversalis  $PQ$ . praeteriens  
 rectam immobilem  $CF$ . in puncto  $Q$ : et altera perpendicularis  $RPS$  ipsi  $CF$  parallela  
 15 quae sursum producta ipsi  $CL$ . productae occurrit in  $R$ . et deorsum tendit versus  $S$ . in-  
 definite. Hae duae regulae simul moveri possunt vestigiis suis parallelae ab  $O$ . versus  $P$ ,  
 ope cujusdam eminentiae oblongae Regulae  $PQ$  quae inseritur mobiliter crena e  
 ipsius  $OP$ . ita ut eminentia cum ipsa  $OP$  in crena congruente regula  $PQ$ . (et proinde  
 et regula ipsi affixa  $PS$ .) in regula  $OP$ , eodem semper ad eam angulo procedere possit.  
 20 Id autem fiet apertura regulae  $LM$ , quae circa centrum  $L$ , gyrata, obstantem sibi regu-

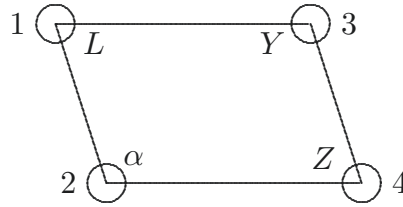
1 f. reperiuntur (1) Esto o (2) Esto (a) asser (b) planum ABCDE (c) rectangulum ABCFED. (aa)  
 per (bb) secundum longitudinem in medio sectum per rectam BE ita aliud rectangulum BEGH, circa  
 cuius extremum B latus ponam in longitudinem sumtum BE velut axem mobilis sit portio ADEB, et  
 circa ipsum planum BEGH. mobilem circa alterum latus (aaa) longitudine sumtum (bbb) suum GH, velut  
 axem in extremitate plani portionis HGFC. et circa alterum latus GH mobilis sit portio | tantum erg. |  
 HGFC. (aaaa) qvo facto considerando planum (bbbb) jam portio (cccc) Recta portionis ADEB (dddd)  
 in eodem plano habent regulas quasdam (aaaaa) vertica (bbbbbb) perpendiculares (ccccc) horizontales et  
 (ddddd) horizontales (eeee) In plano continuato portionis ADEB regulae quaedam mobiles comprehensae  
 inter ANID et aliae in plano portionis HGFC continuato (aaaaa). Unde complica (bbbbbb) comprehensae  
 in GLMF (3) Esto longitudine BE indefinita (4) Esto L 5 paginae (1) Totum instrumen (2) coincidens  
 (3) qvod L 7 rectangulum | exiguum ADEB. gestr. | latera L 9 seu regula erg. L 11 f. sive ...  
 praeteribit erg. L 13 PQ. (1) concurrens regul (2) praeteriens L 14 CL L ändert Hrsg. zweimal  
 17 cuiusdam (1) <incisurae> qva Regula PQ inseritur (2) eminentiae (a) longae (b) oblongae L 18 ut  
 (1) incisura, ipsa PQ congruens, et (2) eminentia L 20-149,1 sibi (1) rectam (2) regulam L

lam  $PQ$ . vel  $PS$ , vel aliquam earum portionem exeuntem propellet, ab  $O$ . versus  $P$ . seu directione  $OP$ . Eodemque tempore Regula  $PQ$ . in  $Q$ . praeteriens ipsam  $CF$ , ibi aliam regulam  $QT$  in crena ipsius  $CF$  congruenter mobilem offendet, propelletque directione  $QF$ . dum interim ipsa  $QT$  praeteriens  $LM$  in  $T$ . aliasque gerens regulas  $TS$ ,  $TV$ , ipsis  $PQ$ .  $PS$ . similes incisura congruente in crena ejus mobiles; descendendo faciet eas ab ipsa magis magisque aperiente sese  $LM$ , directione  $QT$ . propelli; quo fiet veluti ante ut ab ipsa  $TS$ , ipsam  $PS$  praetereunte in  $S$ . alia ibi occurrens regula  $SM$  in ipsa  $PS$ . propellatur. Quod ita continuari potest quoad res postulat. Notandum autem durante motu sive operatione rectas  $LC$ ,  $CF$  esse immobiles;  $CL$ .  $OP$ .  $QT$ .  $SM$  parallelae inter se perpetuo in una pariter atque alia operatione quemadmodum et  $CF$ .  $RPS$ .  $TV$ . inter se. Ipsae autem  $PQ$ .  $TS$ . neque erunt parallelae inter se, neque semper eundem ad parallelas et perpendiculares angulum servabunt; sed circa centra quaedam in ipsis eminentiis in crenas  $P$ .  $T$ . etc. intransibus fixa, mobiles erunt, ab initio scilicet operationis manuum opera, ut scilicet angulus illis detur, quem postulat exemplum propositum; qui semel dato, durante operatione ejus exempli, angulum illum servant, et vestigiis suis parallelae feruntur.

Jam ut ad alterum quoque planum priori post machinae complicationem libriformem, parallelum,  $BEIN$  progrediamur, supponendum est arte quadam (quam postea explicabo) effici, ut ponendo  $BA \perp HC$ . et directione  $BA$  sumendo rectam  $AN$ , dicta recta, in puncto  $N$  perpendicularis semper incedat regula  $NW$ , ita ut recta  $AN$  sit semper media proportionalis inter rectas  $CL$ . constantem; et  $OP$  motu regulae  $LM$  variantem. Motu ergo regulae  $LM$  etiam circa centrum fixum  $L$ . procedere supponemus (modo postea explicando) punctum  $N$ . Ex quo puncto  $N$ . exhibunt rectae vel regulae tres cum ipso puncto mobiles,  $NW$  ad  $BN$  perpendicularis;  $NX$  angulo quem exemplum postulat, et qui durante operatione manet, sed pro alio exemplo motu ipsius  $NX$  circa centrum  $N$  ut res postulat inclinari aut elevari potest. Tertia ex puncto  $N$ . exhibit regula  $NI$  quae durante ipsa operatione non tantum ut caeterae cum puncto  $N$  procedet, sed et circa ipsum velut centrum, ita gyrabitur, ut semper ipsi  $LM$ , motus omnis principio

1 aliquam (1) eius (a) eminentiam propellet, (b) portionem emin (c) prop (2) earum  $L$  1 versus  $P$ . (1) idem omnino praestaretur, et forte ob crenae obliquitatem factus quomodo ante si eminentia regulae  $PQ$  vel  $PS$ . intraret in crenam ipsius  $LM$ , ita enim | tum *erg.* | gyraetur  $LM$ , pars quaedam unius harum regularum cum ipsa  $LM$  propulsa et in obstantem regulam  $OP$  impingens, cedere cogetur, et ita regulae  $PQ$ .  $PS$  in crena ipsius  $LM$  descendent ut  $P$  directione  $PM$ . suis tamen semper vestigiis parallelae (2) seu  $L$

sit parallela. Quod nullo negotio, simili fere qua instrumentum parallelis lineis ducendis accommodatum, constructione efficietur.



[Fig. 8]

Nam in illo instrumento ex parallelogrammo in rhomboeidem utcunque transforma-  
 5 bili mutatis angulis semper servatur parallelismus, hic illud tantum addendum est, ut in  
 illo instrumento quadrilatero paralleliformo  $L\alpha ZY$  non tantum rectae circa moveri pos-  
 sint, ut  $LY$  et  $\alpha Z$  horizonti parallelis manentibus ipsae  $L\alpha$ ,  $YZ$  mutato ad ipsas angulo  
 parallelismum servant inter se, sed et unum latus v. g.  $YZ$  ab altero  $L\alpha$ . servato tamen  
 parallelismo longius recedere possit punctis scilicet  $YZ$  in crenis rectorum  $LY$ .  $\alpha Z$  in-  
 10 cedentibus. Nam in nostro casu non tantum  $CL$  et  $AN$  horizonti parallelae manent, nec  
 tantum  $NI$  et  $LM$  parallelae manere debent inter se; mutato ad horizontem angulo, sed  
 et distantia ipsarum parallelarum in linea horizontali sumta, seu differentia ipsarum  $CL$ ,  
 $AN$  semper mutabitur durante motu. Hoc posito ergo puncto  $Y$  in recta  $LCY$  et posito  
 puncto  $\alpha$  in recta  $L\alpha M$ : et recta  $\alpha Z$  ipsi  $LY$ , quemadmodum et  $YZ$  ipsi  $L\alpha$  aequali et  
 15 parallela. Vicissim ponendo  $AN \cap CY$ . ita ut in plano  $BEIN$  recta  $\beta I$ , respondeat rectae  
 $YZ$  plani paralleli  $HGML$ , punctum  $L$  puncto  $Y$  et punctum  $\beta$  puncto  $Z$ ; et denique  
 conjungendo puncta  $Y$  et  $N$  item  $Z$  et  $\beta$ , rectis ad plana perpendicularibus  $YN$  item  $Z\beta$ .  
 fiet ut quemadmodum incedit recta  $NI$  seu punctum  $N$  super  $AN$ , ita procedat e regione,  
 etiam punctum  $Y$ ; et quemadmodum  $\beta$  ita  $Z$ . Sed vicissim quemadmodum  $YZ$  semper  
 20 parallela est ipsi  $L\alpha M$ , ita  $N\beta I$ , ipsi  $YZ$ . et per consequens ipsi  $L\alpha M$ . Et quemadmo-  
 dum ob incessum puncti  $N$  (: ut scilicet  $AN$  semper sit media proportionalis inter  $CL$  et  
 $OP$  quod postea explicabimus :) ipsa  $YZ$  procedit in ipsis  $LY$ ,  $\alpha Z$  indefinite productis;  
 ita quia  $LM$  et proinde et  $YZ$  angulum ad horizontalem  $LY$  mutat, ideo  $NI$  quae his

6 f. possint, (1) ut mutato (2) ut  $L$  13 recta (1)  $CL$  (2) continuata directione  $CL$  cui pu (3)  
 $CLY$  (4)  $LYC$  (5)  $LCY$   $L$  15 f. rectae (1)  $L\alpha$  (2) |  $RZ$  ändert Hrsg. | plani  $L$  17 conjungendo (1)  
 $LY$  (2)  $YN$  et  $Z\beta$  prorsus ut juncta sunt (3) puncta  $L$



semper parallela esse debet consimiliter agi poterit circa centrum  $N$ . Et haec ideo fusius explicui quia in ipso plano non satis repraesentari potuere. De reliquo in plano sinistro  $BEIN$ , eadem similia evenient illis quae circa regulas alias parallelas aut perpendiculares aut transversales in priore seu dextro  $HGML$  explicui; nam regula transversalis  $NX$  ipsi  $AD$  occurrens in  $X$ . regulam  $X\gamma$  parallelam ipsi  $AN$  propellet in  $AD$  directione  $AXD$  5  
in qua regula parallela  $X\gamma$ . Duae rursus regulae:  $\gamma\delta$  perpendicularis, et  $\gamma W$  transversalis sibi invicem affixae mobiliter incedent directione  $X\gamma$  in puncto  $\gamma$  cum recta  $NI$  communi, et  $\gamma W$ . transversalis ipsi perpendiculari  $NW$  occurrens in  $W$ . propellet in dictae  $NW$  puncto  $W$  parallelam  $W\theta$ . directione  $NW$ . In cujus regulae parallelae (ipsi  $AN$  :) nempe  $W\theta$ . puncto  $\theta$  cum  $NI$  communi rursus duae regulae, una perpendicularis  $\theta\lambda$ , 10  
altera transversalis  $\theta\delta$  sibi invicem affixae, et vestigiis suis parallelae, (ut semper subintelligendum) movebuntur ex quibus transversalis  $\theta\delta$  ipsi perpendiculari praecedenti  $\gamma\delta$  occurrens in  $\delta$  ibi parallelam  $\delta\lambda I$  in dicta  $\gamma\delta$  incedere aptam impellet directione  $\gamma\delta$ . Quod perinde ut in altero latere continuari potest in infinitum, prout exemplum propositum postulat. 15

Facile autem intelligi potest movendo circa  $L$  rectam  $LM$  motum machinae dari; eamque velut aperiri cum punctum fixum  $\alpha$  elevatur seu cum recta  $L\alpha M$  a situ perpendiculari accedit ad parallelum. Contra velut claudetur et regulae omnes parallelae inter se ad se invicem accedent, cum punctum  $\alpha$  deprimitur, seu cum recta  $L\alpha M$  a situ parallelo redit ad perpendicularem. Efficiendum ergo est ut regulae quae sese ducunt 20  
se(u) propellunt cum aperitur machina, reducant cum clauditur atque adeo utrinque id contingere possint quod impellunt, libertate tamen aliqua ab eo latere quo non impellunt tunc cum non impellunt relicta, ut vides in regula  $PQ$  respectu regulae  $QT$ . Nam si **G l i s s a t o r i u m**  $Q$  (ita enim tam utilem machinae particulam appellare placet, cum latinam vocem non inveniam nisi quod probabile est, ipsam *glisser*, a latino quodam 25  
obsoleto derivatam dicamus teste glaciei vocabulo, cui Germani respondens habent, *glas*, vitro exprimendo) ab utroque in medio regulae  $PQ$  simul utrinque attingeretur; tunc angulo ipsius  $PQ$ . ad ipsam  $CQ$  magis ad rectum accedente, angustum nimis inter duo regulae  $PQ$  latera pro dicto glissatorio continendo spatium foret. Idem est in regula  $LM$

1 consimiliter (1) flectetur circa punct (2) agi  $L$  7f. in ... communi erg.  $L$  8f. in ...  
puncto  $W$  erg.  $L$  10 puncto ... communi erg.  $L$  17 cum (1)  $LM\alpha$  a situ parallelo accedit ad  
(2) punctum  $M$  elevatur seu cum (3) punctum  $L$  19 cum (1)  $L$  velut deprimitur (2) punctum ( $a$ )  
 $M$  ( $b$ )  $\alpha$  deprimitur  $L$  22 impellunt (1) furcae cuiusdam specie, ut in horologiis oscillatoriiis (2),  
libertate  $L$

ipsas  $PS$ .  $TV$  ducente, ubi tamen peculiaris difficultas quod ut duae habeantur parallela ipsius regulae  $LM$  velut latera.

### 24<sub>3</sub>. PARS TERTIA

#### Schediasmatis de constructore pars III.

5 Sumto quodam puncto  $\mu$  fixo in recta  $CL\mu$  et alio fixo  $\xi$  in recta  $\alpha\xi Z$ , ita ut  $L\mu$  sit  $\perp \alpha\xi$  regula  $\mu\xi$  cum ipsa  $LM$  indefinite producta eique parallela velut altera ejus portio censi poterit, et glissatoria,  $P$ ,  $T$ , inter duas  $LM$  et  $\mu\xi$  semper interjecta erunt, et dum aperitur machina ab  $LM$ , dum clauditur ab  $\mu\xi$  impellentur. Tanta autem minima laterum Regulae distantia perpendicularis esse debet, quanta est longitudo glissatorii quod intercipitur, nam quando evenit ut regula ad glissatorium angulum faciat rectum, (: quemadmodum facit  $LM$ , cum machina prorsus clauditur quo casu  $LM$  intelligitur parallela ipsi  $CF$ . adeoque perpendicularis parallelis ipsius  $CL$ , et glissatoriis quae in ipsis labuntur :) glissatorium quod intercipitur distantiae perpendiculari coincidit. Fateor tamen si alia commodior claudendi ratio reperiatur, aut si clauso opus non sit, has regularum duplicitates satis incommodas rescindi posse. Re recte expensa credo solam regulae  $LM$  duplicitatem sufficere qua perpendiculares cum transversalibus sibi affixis reducentur, nam de reliquo eversa machina, ut  $ABHC$  imum,  $DEGF$  summum teneat, parallelae seu horizontales regulae  $QT$ .  $SM$  pondere ipso suo in locum priorem relabentur. Quia transversales  $PQ$ .  $TS$ . ipsis amplius non obstabunt quippe regula  $LM$  20 machinam claudente, restitutae. Superest ut explicemus qua ratione efficiatur, ut ipsa  $AN$  seu  $CY$  semper sit media proportione inter  $CL$  et  $OP$ . Quod post multa tentata nondum alia commodius ratione efficere possum, quam quae sequitur. In recta  $LC\pi$  sumatur  $C\pi \perp LC$ . et producat  $FC\omega$  in  $\omega$ . Ductae regulae duae  $\pi\omega$ ,  $R\omega$ . angulos invicem perpetuo faciant rectos, quod fiet dum una in crenam alterius quodam glissatorio intrat; ita enim qui semel datus est angulus semper manet. Porro punctum  $C$ . semper, 25 punctum  $\pi$  durante hujus quidem exempli motu fixum manet, at punctum  $R$  extremitas

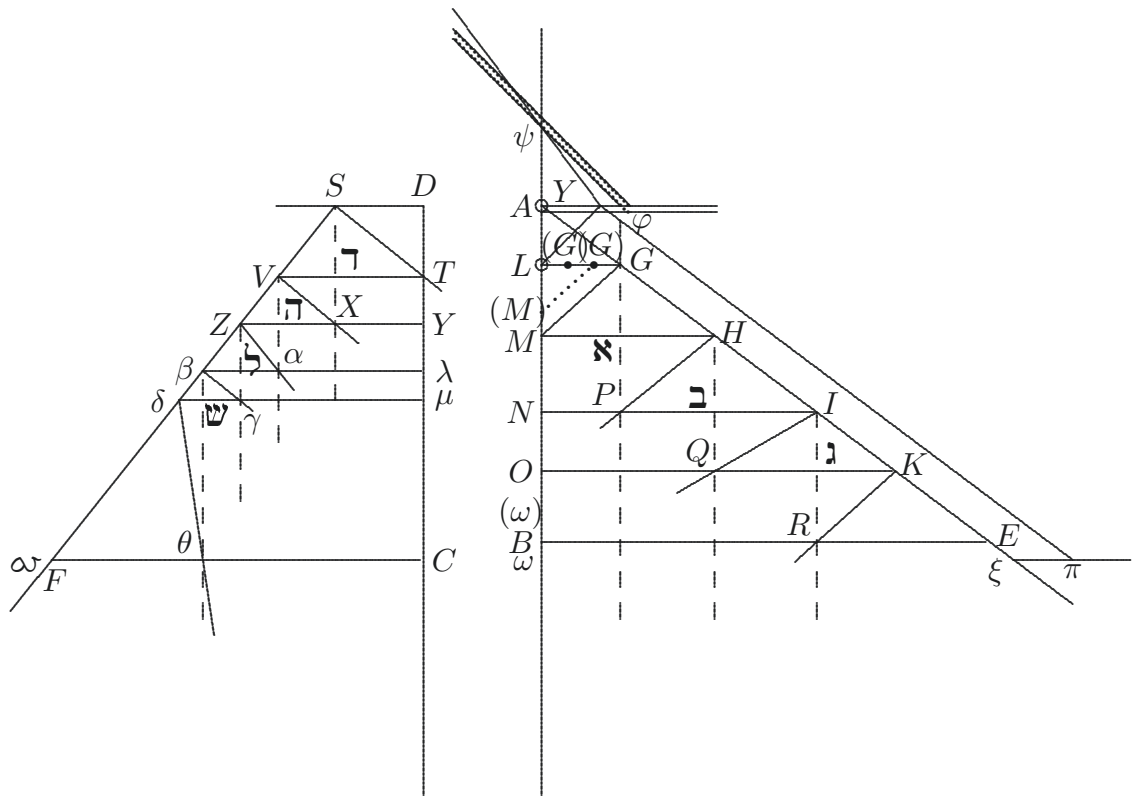
9 perpendicularis erg.  $L$  17 ut (1)  $ABY$  (a) sit imum, (b) zenith (c) Nadir (2)  $ABHC$  imum  $L$  19f. quippe (1) motu (2) regulae  $LM$  depressione elevatae (3) regula  $LM$  (a) |se nicht gestr.| (b) machinam  $L$

regulae  $RPS$ . cum hac ipsa regula ab  $LM$  in  $P$ . impellente propulsa, progredietur, ac proinde et regula  $\omega R$  cum regula  $RPS$ . seu cum puncto  $R$  progredietur, servata tamen semper anguli  $R\omega\pi$  rectitudine. Sed unum praeterea desideratur ut punctum  $\omega$  quo duae regulae  $\pi\omega$  et  $\omega R$ , junguntur semper maneat in recta  $FC\omega$  continuata. Quod ita obtinebitur si acus quaedam sive fibula ex Glissatorii extremo prodiens in rimam rectae  $C\omega$  intret, unde cum exire nequeat, proinde in ipsa recta  $\omega$  perpetuo labetur, et glissatorium quoque sive angulus rectarum  $\pi\omega$ .  $R\omega$ . Quod ut fieri possit, ipsumque triangulum rectangulum servatis puncto,  $C$ , et rectis  $C\omega$  et  $CLR$  angulique  $\pi\omega R$  rectitudine punctis vero  $R$  in recta  $CLR$ ,  $\omega$  in recta  $C\omega$ , rectisque  $\pi\omega$ ,<sup>[,]</sup>  $R\omega$  continue mutatis, omnes formas induere queat, necesse tantum erit regulam  $\pi\omega$  mobilem esse circa punctum  $\pi$  velut centrum. Atque ita  $C\omega$  semper erit media proportionalis inter  $C\pi$   $\cap$   $CL$ , et inter  $CR$   $\cap$   $OP$ . ponendo jam ex fibula  $\omega$  quam in rima mobilem dixi angulo semirecto  $C\omega Y$  descendere regulam indefinite productam  $\omega Y$  erit  $CY$   $\cap$   $C\omega$ . adeoque  $CY$  media proportionalis quaesita, in cujus puncto  $Y$  perpendicularis rigida  $YN$ , ut supra dixi duo puncta  $Y$  et  $N$ . sibi in oppositis planis parallele sive e regione respondentia connectens, a dicta regula  $\omega Y$  continue ducetur sive propelletur, et cum ea alia regula  $YZ$  vel ei in altero plano respondens  $AN$  ipsi  $LM$ , ut supra explicui, semper parallela. Et ita quidem instrumenti hujus tradita constructio motusque intelligi potest, superest ut dicamus de ejus usu ad aequationum radices inveniendas. Quod tamen antequam faciam operae pretium erit instrumentum denuo majore cum exactitudine describere:

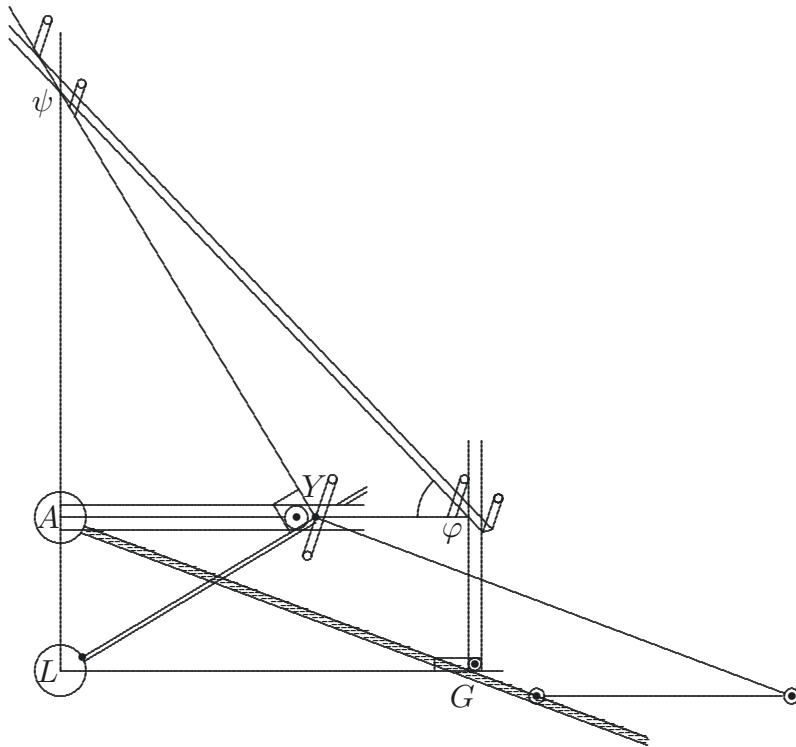
---

5 *Am Rande*: Pro glissatorio dicere possis *i n c r e n a t u r a m*.

1 impellente (1) per rectam  $OP$ . propulsa (2) propulsa  $L$  3 desideratur | quod explicare promisi  
 erg. u. gestr. | ut  $L$  14 perpendicularis rigida erg.  $L$  14 dixi (1) utriusque plano parallelo perp (2)  
 duo  $L$  16 f. vel ...  $AN$  erg.  $L$

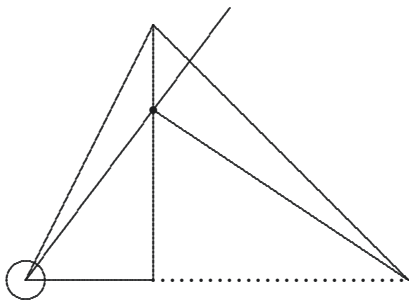


[Fig. 9]

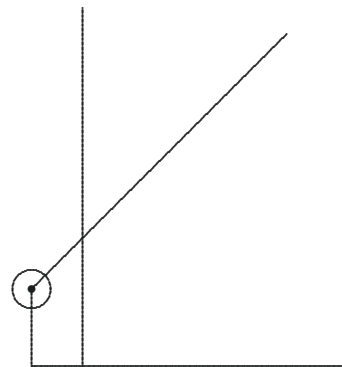


[Fig. 10]

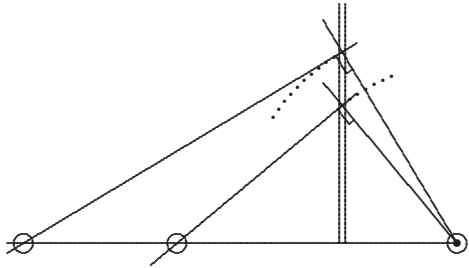
[Figuren auf Bl. 15 v<sup>o</sup>]



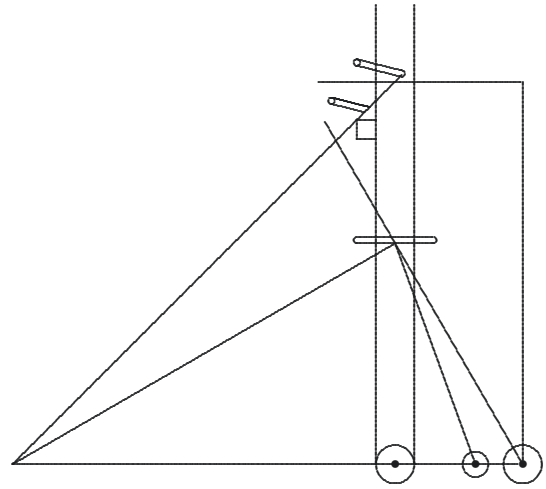
[Fig. 11]



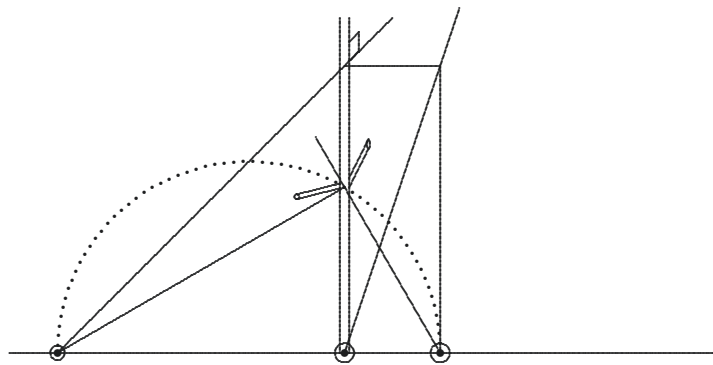
[Fig. 12]



[Fig. 13]



[Fig. 14]



[Fig. 15]

## 25. DISPOSITIONS ET COMPLEXIONS

[April – Juli 1672]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 45–47. 1½ Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 45 r° (= erster bis dritter Ansatz) u. Bl. 47 r° (= vierter Ansatz). Am Rand von Bl. 45 r° sowie auf Bl. 45 v° u. 46 r° befindet sich VII, 3 N. 3; Bl. 46 v° u. 47 v° sind leer. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 6–9. 5  
Cc 2, Nr. 519 A, B

Datierungsgründe: Das Stück befasst sich mit der Kombinatorik, wobei es inhaltlich an die *Dissertatio de arte combinatoria* (VI, 1 N. 8) aus dem Jahr 1666 anknüpft: Leibniz greift einige Begriffe jener Arbeit auf, übersetzt sie ins Französische und definiert sie kurz. Sprache und thematischer Ansatz verweisen das Stück also in die frühe Phase seiner Zeit in Paris, womit der *terminus post quem* Leibniz' Ankunft in Paris Ende März 1672 ist. Dass das Stück nicht später als Anfang 1673 entstanden ist, belegt die Symbolverwendung in dem auf demselben Träger niedergeschriebenen Stück VII, 3 N. 3, welches konkrete Beispiele zur gleichen Thematik liefert. In ihm finden sich als Gleichheitssymbole zum einen das moderne Gleichheitszeichen, welches Leibniz spätestens ab Mitte 1674 durch den stilisierten Waagebalken ersetzt; zum anderen verwendet er *f.* als Abkürzung für *facit*. Diese Notation gebraucht er jedoch nur bis Ende 1672 oder Anfang 1673. — Das Papier ist Pariser Provenienz. Sein Wasserzeichen lässt eine weitere Präzisierung der Datierung zu. Das gleiche Zeichen findet sich ansonsten nur noch bei dem Träger von VI, 3 N. 2<sub>2</sub>, dem zweiten in einer Reihe von vier auf französisch verfassten Entwürfen zu physikalischen Fragen. Selbst wenn Leibniz den ersten Entwurf N. 2<sub>1</sub> recht bald nach seiner Ankunft in Paris geschrieben haben sollte, kann der zweite Entwurf kaum vor April 1672 entstanden sein. Und der auf diesen folgende dritte Entwurf N. 2<sub>3</sub> war offensichtlich fertiggestellt, bevor Leibniz von dem am 25. Juli 1672 im *Journal des sçavans* veröffentlichten Brief von Huygens an Gallois Kenntnis genommen hatte, was wahrscheinlich ohne große Verzögerung geschehen ist. Dies spricht dafür, dass N. 2<sub>2</sub> im Zeitraum von April bis Juli 1672 verfasst worden ist. Wegen der seltenen Papiersorte wird für unser Stück das Gleiche angenommen. 10  
15  
20  
25

[*Verworfenener erster Ansatz*]

## Definitions

Pour placer une chose avec une autre, il y a trois sortes de variation. Car ou on place une chose tousjours avec une même chose, mais d'une maniere nouvelle; ou on place une chose tantost avec une tantost avec une autre. 30

Si on place une chose avec une même chose, mais d'une differe [*bricht ab*]

29 d'une (1) même (2) no (3) maniere *L*      30 tantost avec (1) l'une (2) une *L*

[*Verworfenener zweiter Ansatz*]

Soit une chose donnée, ayant certaines parties, outre les quelles il ne faut pas la  
 soubdiviser [comme sont les unitez dans le nombre, ou les atomes dans un Corps, ou  
 les personnes d'une assemblée, les quelles ne souffriroient pas d'estre coupées en pieces];  
 5 trouver tous les changemens imaginables dans cette chose donnée qu'elle peut fournir de  
 soy même, sans luy adjouster rien de nouveau. [Car s'il seroit permis d'adjouster une  
 nouvelle chose, ou diviser les parties plus outre ou d'une autre maniere, les changemens  
 iroient à l'infini, et il n'y auroit point de probleme pour les conter. Par exemple dix  
 personnes estant donnez, on peut trouver [*bricht ab*]

10

[*Dritter Ansatz*]

Certaines choses estant données, trouver en nombres toutes les dispositions imagi-  
 nables.

Les *d i s p o s i t i o n s* sont les varietez de penser à certaines choses données ou de  
 les placer dans l'esprit.

15

Par exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes  
 ensemble; ou à toutes ensemble; ou à nulles ensemble, c'est à dire à une apres l'autre.

Si vous prenez quelques unes ensemble, tantost celles cy et tantost celles là, cela  
 s'appelle Complexion.

2 donnée, (1) divisée (2) ayant *L* 3 f. [comme ... pieces.] *erg. L* 5 donnée (1) sans la quelle  
 (2) qv'elle *L* 7 parties (1) d'une (a) autre (b) autre maniere ou plus outre, (2) plus *L* 11 toutes  
 les (1) *c o n j u n c t u r e s* imaginables (2) dispositions *L* 13 sont (1) les varietez avec les qvelles  
 plusieurs choses peuuent estre placées dans l'esprit ou dans la pensée, (2) conjunctures de plusieurs  
 choses (a) Par exemple (b) Dix personnes peuuent estre considerées de plusieurs manieres (c) La (3) les  
 varietez *L* 15 penser ou à (1) toutes ensemble, ou à plus (2) qvelqves *L*

---

3–6 [comme ... [Car: Die eckigen Klammern in diesem Ansatz stammen von Leibniz selbst.

18 Complexion: Vgl. LEIBNIZ, *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, prooemium §§ 7–12 S. 4 (VI, 1  
 N. 8, S. 172 f.).



[*Vierter Ansatz*]

## Probleme General

Certaines choses d'un certain nombre connu estant données, trouver en nombres toutes les dispositions imaginables.

Les dispositions sont les varietez de penser à certaines choses, ou de les placer dans l'esprit. Par Exemple, dix personnes estant données, vous pouvez penser ou à quelques unes ensemble, ou à toutes ensemble, ou à nulles ensemble, c'est à dire à l'une apres l'autre. Car pour considerer plusieurs particularitez dans elles, ou pour considerer le tout rangé en quarré ou en polygone ou en autre figure, cela n'appartient pas à nostre tractation, par ce que nous voulons considerer les places qu'on leur donne dans l'esprit en les rapportant pas à l'espace, mais au temps, car les pensées dans l'esprit, n'ont point de difference des places, mais seulement du temps. 5 10

Si vous prenez donc quelques unes ensemble tantost celles cy, tantost celles là, et tantost d'un grand, tantost d'un petit nombre, cela s'appelle *Complexion*, dont la variation consiste dans la matiere donnée même, sans avoir égard à la forme. Par exemple dix estans donnez, *a. b. c. d. e. f. g. h. i. l.* Vous en pouvez prendre, tantost cinq ensemble, tantost seulement quatre ensemble; et si vous prenez cinq ensemble, vous pouvez prendre ou ceux cinq cy, *a. b. c. d. e.* ou ceux cinq là, *b. c. d. e. f.* etc. 15

Je nomme le Nombre de ceux qu'on prend, l'*Exponent de la Complexion*, par exemple 5 dans l'exemple precedant. 20

Et selon ce nombre ou exponent, je nomme la *Complexion* tantost une *Combinaison*, ou *Com2naison*, tantost une *Con3naison* ou *Conternaison*, tantost

3 d'un ... connu *erg. L* 9 rangé (1) ou (2) en *L* 10 considerer (1) pas (2) les *L* 10 dans l'esprit *erg. L* 11 temps, (1) par ce qve les d (2) car *L* 17 ensemble, (1) et en prennant cinq, (2) vous *L* 18 f. etc. (1) Le Nombre de ceux qv'on prend, je nomme (2) Je *L*

---

22 *Conternaison*: Die Bezeichnungen *conternatio* für eine ungeordnete Stichprobe von drei Elementen aus einer gegebenen Grundmenge und analog *conquaternatio* finden sich schon bei M. MERSENNE, *Harmonicorum libri*, 1635, etwa auf S. 135. Die Schreibweisen *com2natio*, *con3natio* und *con4natio* gebraucht Leibniz bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 11 f. S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172). Er verwendet sie auch in einer Marginalie in seinem Handexemplar von Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665 [*Marg.*] (*PO* III S. 446). Dort notiert er auf der vor S. 1 eingefügten Ausklapptafel, welche das arithmetische Dreieck darstellt, Formeln zur Berechnung der Anzahl der verschiedenen *complexions* — für *con3nationes* etwa  $\frac{y, y-1, y-2}{1, 2, 3}$ .

une C o n 4 n a i s o n , etc. bien qu'ordinairement le mot de Combinaison se prend pour la complexion en general.

Le Nombre de toutes les com2naisons ou con3naisons etc. imaginables, s'appelle: Le Nombre des complexions d'un exponent donné. Par exemple  
5 toutes les con3naisons de 10 choses données, sont 120 et toutes les con3naisons de 4 choses,  $a. b. c. d.$  sont 4 comme  $a. b. c.$  et  $b. c. d.$  et  $a. b. d.$  et  $a. c. d.$

Le nombre de toutes les complexions de tous les exponens ensemble, s'appelle  
10 simplement, le nombre des Complexions. Par exemple le nombre de toutes les Complexions de 4 est 15, sçavoir 4 1 n i t e z , quand chaque chose est mise à part ( $: a. b. c. d. :$ ) 6 C o m 2 n a i s o n s ( $: a b. b c. c d. a c. a d. b d. :$ ) 4 C o n 3 n a i s o n s ( $: a b c. b c d. a b d. a c d. :$ ) 1 C o n 4 n a i s o n ( $: a b c d$  car la variété de l'ordre  $a c b d. a d b c.$  etc. ne change pas la matiere ou complexion, mais seulement la forme:). Et ainsi en tout 15.

1 qv'ordinairement le (1) terme (2) mot L 3 Nombre (1) des Com2n (2) de toutes les com2naisons ou (a) con2naisons (b) con3naisons |etc. erg. | (aa) imaginaires (bb) imaginables L  
5 de (1) dix (2) 10 L 5f. et toutes les |con3naisons ändert Hrsg. | de ... sont 4 erg. L 8-12 Par exemple ... tout 15. erg. L

---

12 en tout 15: Die Möglichkeit, gar kein Element aus der Grundgesamtheit auszuwählen, zählt Leibniz hierbei wie bereits in der *Dissertatio*, prooemium §§ 7 u. 12 S. 4 (VI 1, N. 8 S. 172 f.) nicht mit, bedenkt sie aber sehr wohl; vgl. ebd., probl. I Tab. ⚡ S. 7 (S. 174).

## 26. CONSTRUCTOR

Dezember 1674

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III A 20 Bl. 1–5. Bl. 1–4 zwei Bog. 2°. Bl. 5 ein Bl. 2°, aus dem zwei dreieckige und ein rechteckiger Abschnitt entfernt wurden. 9S. Textfolge Bl. 5 v°, Bl. 1–4. Bl. 5 r° leer.  
Cc 2, Nr. 815, 816

5

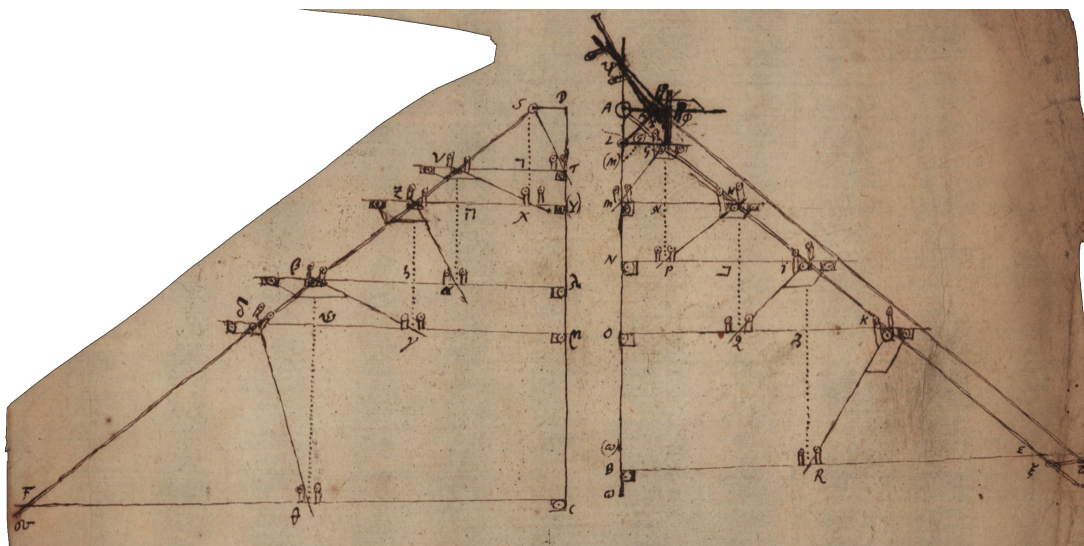
Inveni mense X<sup>bri</sup> 1674. Parisiis  
Godofredus Guilielmus Leibnitius

## C o n s t r u c t o r

## Instrumentum Algebraicum

pro inveniendis omnium Aequationum Radicibus,  
geometrice pariter, et in numeris quantumlibet exactis  
sine calculo

10



[Fig. 1]

8 (1) Gottfredus (2) Godofredus *L*

14 *Fig. 1*: Die Figur zeigt einen Ausschnitt aus LH 35 III A 20 Bl. 5 v°. Bearbeiteter Ausschnitt des Digitalisats <http://digitale-sammlungen.gwlb.de/resolve?id=00068233> der Handschrift LH 35 III A 20 der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek (GWLB). Das Digitalisat wurde von der GWLB unter einer CC0 1.0 Public Domain Dedication Lizenz zur Verfügung gestellt.

Descriptio C o n s t r u c t o r i s sive Instrumenti Algebraici

In plano hujus paginae figurae 1 rectangulum paginae parallelum  $ABCD$  designatum intelligatur et super rectis  $AB$ ,  $DC$ , alia perpendiculariter erecta plana,  $ABE$ , et  $DCF$ , sibi proinde parallela. Punctum  $A$  summum,  $B$  imum,  $E$  dextrum,  $C$  sinistrum.

5 Ex puncto  $A$  ducatur dextrorsum simul ac deorsum recta  $AGHIKE$ . secans rectas indefinite dextrorsum productas ipsi  $ALMNOB$  perpendiculares  $LG$ ,  $MH$ ,  $NI$ ,  $OK$ . Sint indefinite deorsum productae  $GP$ ,  $HQ$ ,  $IR$  perpendiculariter secantes ipsas  $NPI$ ,  $OQK$ ,  $BRE$ ; junctaeque transversales  $GM$ ,  $HP$ ,  $IQ$ ,  $KR$  indefinite deorsum pariter et sinistrorsum productae. Ipsae  $AL$ ,  $LM$ ,  $MN$ ,  $NO$ ,  $OB$  sumtae prout e re erit. Intelligantur  
10 jam rectae quidem  $AB$  et  $LG$  esse lineae rigidae impraesentiarum immobiles, sed  $MH$ ,  $NI$ ,  $OK$ ,  $BE$ , sint regulae mobiles sursum ac deorsum in ipsa  $AB$ , et  $GM$ ,  $HP$ ,  $IQ$ ,  $KR$ , dextrorsum et sinistrorsum in rectis  $GL$ ,  $HM$ ,  $IN$ ,  $KO$ ,  $EB$ , ita tamen ut durante motu tam priores quam posteriores, regulae vestigiis suis parallelae moveantur sive eosdem ad  
15 rectas ad quas moventur angulos servent. Quod eminentiis quibusdam oblongis rectilineis, crenae cuidam eique in qua moventur, rectae congruentibus quas *i n c r e n a t u r a s*, nova sed necessaria voce appellare possis praestari constat.

Qualis increnatura (fig. 2) est  $L(L)$  qua regula  $GL$  movetur super  $AB$  in crena  $(L)B$ , eodem semper angulo  $GLA$ , sive is rectus sive obliquus sit, servato. Quod si increnatura velut rotulis quibusdam circa sua centra mobilibus imposita intelligatur, ne crenam in  
20 omnibus suis punctis tangat; facilius erit motus.

1 Descriptio ... Algebraici erg. L 2 paginae (1) esto recta AB (2) figurae 1 rectangulum | paginae parallelum erg. | ABCD L 3 intelligatur | cuius summum AD, imum BC erg. u. gestr. | et super rectis | dextra erg. u. gestr. | AB, | sinistra erg. u. gestr. | DC, alia (1) erecta plana (2) perpendiculariter L 4 parallela. (1) Circa punctum A velut centrum (a) in (b) mobilis sit in ipso plano ABE, recta AE secans rectam G (2) Punctum A summum, B imum, E dextrum B sinistrum (3) Punctum L 7 indefinite | deorsum erg. | productae GP, HQ, IR | perpendiculariter erg. | secantes L 8f. junctaeqve | transversales erg. | GM, HP, IQ, KR | indefinite ... productae erg. | . Ipsae L 10 et LG | esse ... impraesentiarum erg. | immobiles L 11 ipsa AB, (1) servato semper angulo qvem (2) et L 14f. oblongis | rectilineis erg. | , crenae | cuidam erg. | eiqve L 17 (fig. 2) erg. L 17 in crena (L)B erg. L 18 is (1) perpendicularis (2) rectus L 19 circa ... mobilibus erg. L

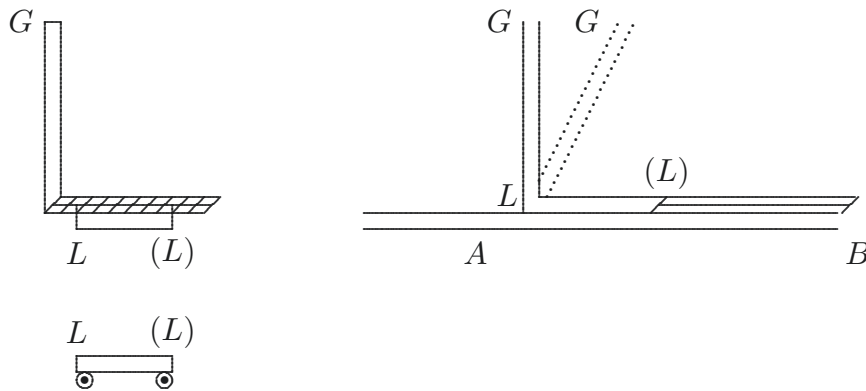


fig. 2

Ut autem aliquod motus in caetera omnia propagati principium intelligamus, cogitetur regula  $AE$ , mobilis circa  $B$ , in eodem semper plano  $ABE$ . quae elevata a situ inclinato ad minus inclinatum sive horizontali propiorem, aperiet Machinam, contrario vero motu, claudet. Quod ita intelligendum est[:]  
 Dum  $AE$  elevabitur puncta  $G, H, I, K$ , quibus  $LG, MH, NI, OK$ , secat, longius distabunt sive recedent, ab  $L, M, N, O$ . Intelligantur jam regulae transversales  $GM, HP, IQ, KR$ , intersectionis puncta sequi, et rectae  $AE$  motu per parallelas  $LG, MH, NI, OK$ , eodem semper angulo dextrorsum duci, aut etiam dum  $AE$  rursus deprimetur sinistrorsum reduci: Eodem modo, motu transversalium  $GM, HP, IQ, KR$ , per parallelas sustententes  $G, H, I, K$ , mutabuntur  $M, P, Q, R$  puncta intersectionum cum aliis parallelis uno gradu semper inferioribus,  $MH, NPI, OQK, BRE$ . Pone jam effici, ut idem sit semper punctum intersectionis  $M, P, Q, R$  in parallela,  $MH, NPI, OQK, BRE$ , aliud vero atque aliud transversalis,  $GM, HP, IQ, KR$  punctum ei respondeat (: quod ut mox dicam, facile effici potest :) necesse erit ipsas  $MH$  etc. mutatione punctorum intersectionis  $M$  etc. in transversalibus  $GM$  etc. sursum deorsumque secundum longitudinem ipsius  $AB$  duci ac reduci quod facile intelligi potest ex fig. 3.

8 per (1)  $GM$ , (2) parallelas  $L$  8 dextrorsum erg.  $L$  9 deprimetur | sinistrorsum erg. | reduci:  
 (1) Regulas autem transversales parallelis occurrentes, eas per (2) Eodem  $L$  10 transversalium (1)  
 $GM, HI, OK$ , per parallelas sustententes (2)  $GM, L$  11  $M, P, Q, R$  erg.  $L$  12 f. intersectionis (1)  
 in recta (2)  $M, P, Q, R, L$  15  $MH$  etc. (1) motu (2) mutatione  $L$



$NP$  necesse est ipsam  $NP$  descendere ad  $(N)(P)$ . Nam si mansisset ubi erat, a recta  $HP$  in  $(H)(P)$  promotam in puncto  $P$  non amplius secaretur. Ut autem recta  $HP$  rectam  $NP$  non nisi in  $P$ . secare possit, duobus obicibus ex ipsa  $NP$ , perpendiculariter ad planum  $NMH$  exeuntibus effici potest, inter quos ipsa  $HP$  inclusa libere ludit, prorsus ut in exiguis naviculis remi inter duos obices manu agitantur, ita utcunque recta  $HP$  inter hos duos obices sursum deorsumque agatur nunquam tamen a puncto  $P$  inter eos intercepto dimovebitur. Eodem modo efficitur ut recta  $AE$  translata in  $A(E)$  punctum  $H$  et cum eo recta  $HP$  transferatur in  $(H)$  vel  $(H)P$ . Neque vero aliud quicquam hoc loco postulavimus. Ut autem motus eo facilior pariter et exactior sit; regulae ipsae inter obices interceptae aciebus suis obicem alterutrum motui scilicet obstantem perpetuo prement; obex autem quilibet annulo sive tubulo sive si placet cylindro circa axem in quo fixus est obex, mobili, indutus erit ut fricanti regulae facilius cedat. Alterutrum autem, aciem vel cylindrum ex chalybe durato esse fabricatum rationis est, altero ex aere fuso; quo minus motuum reciprocationibus alterantur. Apparet quoque, ut ad fig. 1. redeamus, ab obice utrobique regulam motricem includente effici, ut quemadmodum elevatione ipsius  $AE$  aperitur machina, ita ejus depressione rursus claudatur.

Quod si quis veretur, ne vacillationibus regulae motricis intra obices punctum intersectionis velut  $H$ , aut  $P$ , instabile reddatur; is consideret quantacunque sit latitudo vel libertas regulae intra obices ludentis; punctum tamen intersectionis unum tantum censi, verbi gratia quo acies regulae cylindrum obici circumdatum aut ut mox dicam annulum quendam obicibus interjectum tangit; quod semper durante motu, eodem in loco, aut aequipollente evenit. Fateor punctum contactus habere latitudinem quandam, et repetitis contactibus; una scilicet regula aliam ducente, latius errorem propagari; sed fieri tamen arte potest, ut posterior error priorem non augeat, sed quodammodo compenset; certa semper lege, quamdiu acies aut cylindros tritu non diminutos ponimus: cum etiam ipsa diminutio temporis tractu facta quae tamen ita subito non sentietur. Supra remedium non sit. At inquires punctum contactus non esse idem in reducendo quod in ducendo, quia oppositus tunc obex premitur: sed hoc nihil turbat; quia in qua operatione ductuum ratio habetur, in ea reductuum non habetur. Effici tamen etiam potest, id-

10 suis (1) chalybe durato (2) ferratis (3) ex aere in obices perpetuo prement (4) obicem  $L$   
 13 durato (1) factum, alterum (2) esse  $L$  19 intersectionis (1) illud demum (2) unum  $L$  20f. aut  
 ... interjectum *erg.*  $L$  22 aequipollente (1) contingit; et punctum contactus physic (2) evenit  $L$   
 25 cylindros (1) nondum tritu consumi (2) tritu  $L$  29–166,1 habetur. (1) Fateor denique (2) Ut  
 increnaturae in crenis non vacillent (3) Effici | tamen *erg.* | etiam potest, | idque malim, *erg.* | ut  $L$

que malim, ut regula obicibus intercepta sit instar prismatis Triangularis trium acierum, quarum duobus obices oppositos; una annulum quendam in  $P$  nonnihil incisum et circa centrum suum in rectave axem  $NI$  mobilem tangat, ita punctum  $P$ , semper erit idem tam in ducendo quam in reducendo praesertim cum ipsa  $HP$ , durante operatione eundem semper faciat angulum ad ipsam  $NI$ , adeoque ad incisuram in qua est annulus  $P$ , quod si pro alia operatione mutetur angulus  $HPN$ . Nihil prohibet cochlea exigua etiam annuli  $P$  inclinationem mutari, ut scilicet ad axem annuli, angulus rectae  $HP$  semper sit rectus. Idem in obicibus quoque locum habet ut in eosdem semper circellos cylindris eorum incisos acies intrent. Facile autem cavebitur ut mutatio inclinationis clausa tantum machina fieri possit, durante motu non possit. Clausa autem machina sponte sua nulla peculiari manuum opera mutatam ipsius  $HP$  inclinationem consequetur laxato tunc retinaculo quodam, quod alias durante prius motu obstabat inclinationis mutationi.

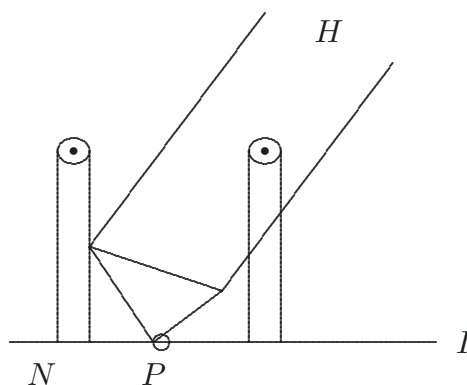


fig. 4

3 in ...  $NI$  *erg.*  $L$  8 rectus. (1) Innumera alia ab industrio artifice pro re nata (a) excogitari possent (b) excogitabuntur, ut appareat qvo usqve humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento | (aa) proficere posset (bb) profici liceat *erg.* |, qvo totius pene (aaa) Geometriam (bbb) Algebrae et Geometriae rectilineae eius certe (aaaa) cuius (bbbb) qvam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere; problemata solvuntur. et omnium curvarum a Cartesio in classes reductarum fructus | hactenus contemplationem non egressus *erg.* | continetur. Exempli praeterea causa, ut impediatur regularum (2) Idem  $L$



Praeterea ut increnaturarum aut acierum, quibus in crenis aut incisuris moventur regulae, impediatur vacillatio; faciendum est, ut eadem acies diversis incisuris sic satis invicem remotis, at perfecte parallelis et similibus, recipiatur. Nec refert quod ad exactitudinem summam omnia necesse est constructa esse, unde difficilis erit motus, nam cum celeritas non postuletur; magna profecto impedimenta necesse est quae vectis longitudine et si velis agentis vectem cochleae tarditate non vincantur. Cumque necesse sit aliquando puncta quaedam diversarum regularum, dum praeparetur machina ad novam operationem, in eadem esse recta imaginaria, hoc exacte praestari poterit quodam dioptrae genere si perforata in punctis quaesitis utraque regula, lux per omnia puncta radiet; aut videri possit. In elaborandis autem machinae partibus perspicilia adhibere artificem rationis erit; cum sit instrumentum hoc summae exactitudinis specimen futurum.

Innumera alia ab industrio artifice pro re nata excogitabuntur ut appareat quousque humana diligentia in elaborando tantae utilitatis instrumento proficere liceat. Quo omnes algebrae aequationes resolvuntur, et Geometriae rectilineae, ejus certe quam Vieta et Cartesius ad analysin reduxere, problemata solvuntur; et curvarum omnium a Cartesio in classes distributarum fructus hactenus contemplationem non egressus continetur. Sed haec postea exponam. Nunc absolvenda Machinae constructio est motusque, neque enim constructio sine motu commode explicari potest. Nimirum *redeundo ad fig. 1* elevato primo mobili *AE* motu circa centrum *A* regula transversalis *GM*, procedit in ipsa *LG* directione seu dextrorsum, quod fieri non potest, quin parallela (horizonti) *MH* moveatur in recta *ANB* directioni *NB* seu deorsum. Interea temporis transversalis *HP*, ob eandem ipsius *AE* elevationem movetur in *MH* sinistrorsum; quare parallela *NPI* cui *HP* occurrit in *P*, et ibi inter duos obices modo explicato intercipitur descendet. Eodem modo eodem tempore; transversales, *IQ*, *KR*, et si quae aliae sequuntur movebuntur sinistrorsum, parallelae *OQK*, *BRE* etc. deorsum, quod ludi genus continuabitur, quousque postulabit necessitas, et salva exactitudine sufficient vires.

2 vacillatio; (1) effici potest, ut eadem acies diversis locis simul (2) faciendum *L* 5 quae (1) vecte adhibito (2) vectis *L* 8 poterit (1) adhibitis dioptris (2) quodam *L* 10 partibus (1) microscopium aut (a) certe (b) certe (2) perspicilia adhibere (a) intererit (b) artificem *L* 12 nata (1) excogitari possunt (2) excogitabuntur *L* 18f. Nimirum | *redeundo ad fig. 1. erg.* | elevato (1) *AE*, circa centrum (a) *E* (b) *A*, movetur *GM*, directione sinistrorsum. Ergo *MH* deorsum; eodem tempore ob elevatam *AE*, movetur *HP* sinistrorsum; *GM* (2) *reg* (3) primo *L* 20 ipsa (1) *GM*, directione | *LG nicht gestr.* | seu | sinistrorsum *nicht gestr.* | (2) *LG* directione *L* 20 parallela (horizonti) *erg. L* 26 quousque (1) sufficient vires, et (2) postulabit *L*

Hactenus hujus plani nempe  $ABE$  explicatae partes, explicandae nunc et alterius  $DCF$ , ipsi paralleli et similiter positi, partes an plerisque similes. Praeter ea scilicet quae admonebo. Nimirum  $DS$  regula immobilis sit ipsi  $CF$ , vel  $BE$  parallela, et puncta  $A$ .  $D$ .  $S$ . sint in eadem recta. Efficiatur autem arte quadam, ut dum punctum  $G$  procedit  
5 sinistrorsum vel recedit dextrorsum, ob motum elevationis et depressionis ipsius  $AE$  circa centrum  $A$ ; punctum  $S$ , mobile procedat in recta  $DS$  in eundem sensum, directione scilicet  $DS$ , dextrorsum, (:etsi in pagina sive figura id sit sinistrorsum, quoniam utraque plana  $ABE$ ,  $DCF$ , non in eodem plano jacentia, ut illic repraesentantur, sed parallele erecta censenda sunt :) vel recedat, directione  $SD$ , sinistrorsum; ea tantum lege, ut  $DS$ .  
10 sit semper media proportione inter  $AL$ , et  $LG$ . et regula quaedam  $SF$ , cum puncto  $S$  procedens, et tamen circa centrum  $S$ . mobilis, sit semper ipsi  $AE$  parallela. Quae duo qua ratione obtineri possint, postea explicabo. Nunc eo supposito intelligatur transversalis  $ST$ , cum puncto  $S$  procedens propellere sursum deorsumque in recta  $DC$ . parallelam (horizonti)  $TV$ ; et motu ipsius  $SF$  in ipsa  $TV$ , aliam duci transversalem  $VX$  a qua rursus  
15 parallela  $(Y)Z$  in ipsa  $DC$ . sursum deorsumque ducatur. Idem intellige de transversalibus  $Z\alpha$ ,  $\beta\gamma$ ,  $\delta\theta$ , quae in parallelis  $(Y)Z$ ,  $\lambda\beta$ ,  $\mu\delta$ , ab ipsius  $SC$  motu huc illuc ducuntur, eodem angulo servato; et parallelas, (unaquaeque ei in qua ducitur inferiorem,)  $\lambda\alpha\beta$ ,  $\mu\gamma\delta$ ,  $C\theta F$  in recta  $DC$ . sursum deorsumque agunt. Puncta autem  $T$ .  $X$ .  $\alpha$ .  $\gamma$ .  $\theta$ . sunt in perpendicularium  $DTC$ ,  $SX$ ,  $V\alpha$ ,  $Z\gamma$ ,  $\beta\theta$  (quae omnes excepta prima imaginariae  
20 sunt,)] et parallelarum, quae omnes reales rigidaeque sunt  $VT$ ,  $ZX(Y)$ ,  $\beta\alpha\lambda$ ,  $\delta\gamma\mu$ ,  $F\theta C$ , intersectionibus.

Superest ut explicetur transitus de plano in planum, seu modus quo efficitur, ut  $DS$  sit media proportionalis inter  $AL$  et  $LG$ . et ut  $SF$  perpetuo maneat parallela ipsi  $AE$ . Porro recta  $AL$  durante motu manet situ et magnitudine eadem, at  $LG$  perpetuo

2 ipsi ... partes erg. L 2 similes. (1) Nempe supponendum tantum arte quadam (:postea explicanda:) effici, (a) ut dum LG decresci (b) ipsa LG crescit decrescitve immobili, (aa) ob plani praecedentis ipsius AE (bb) ob ap (cc) ob motum elevationis et depressionis ipsius AE, crescente aut decrescente etiam DS crescere ea tamen lege, ut (2) praeter L 3 regula immobilis erg. L 4 quadam | (:postea explicanda:) gestr. | ut L 6 in recta DS erg. L 7 scilicet DS (1) sinistrorsum (2) dextrorsum L 7 sit (1) sinistrorsum (2) dextrorsum (3) sinistrorsum L 9 directione SD, (1) dextrorsum (2) sinistrorsum L 10 et LG. (1) id qua ratione fieri possit, postea explicabo, nunc eo supposito (2) et L 13 sursum deorsumqve erg. L 14 (horizonti) erg. L 16 f. ducuntur, (1) serv (2) suis semper vestigiis parallelae (3) eodem L 18 recta DC. (1) propellunt (2) sursum L 19 perpendicularium | imaginarium erg. u. gestr. | DTC L 20 omnes (1) rigidae seu solidae sunt, (2) reales L 24 situ et magnitudine erg. L

mutatur magnitudine, manet situ; idemque erit de recta  $DS$ , caeterae situm pariter et magnitudinem mutant. Jam parallelismum ipsarum  $AE$ ,  $SF$  perpetuum, ita obtinebimus; ponatur  $Y$  in recta  $AY$  ipsi  $BE$  parallela punctum  $Y$  ita procedere, ut recta  $AY$  semper aequetur ipsi  $DS$ , seu ut sit media proportione inter  $AL$  et  $LG$ . quod modo postea explicando, obtinebimus. Eo autem supposito intelligatur alicubi in recta  $AE$ , punctum quoddam fixum  $\xi$ , unde dextrorsum prodeat recta indefinita, parallela ipsi  $BE$ , inque ea sumatur  $\xi\pi$  aequalis ipsi  $AY$  jungantur puncta  $Y$  et  $\pi$  regula solida  $Y\pi$ . Patet manente  $AY$ , utcunque elevetur aut inclinetur  $AE$ , latera opposita rhomboeidis  $A\xi\pi Y$ . manere parallela; quemadmodum instrumenti quo vulgo ad parallelas ducendas utuntur, quod ab officio rectissime parallelogrammum appelles. Hic vero illud praeterea addendum est, ut latus  $Y\pi$  in rectis indefinitis  $AY$ ,  $\xi\pi$  huc illuc incedere possit. Ex punctis  $Y$ , et  $\pi$ , exhibunt duae lineae rigidae,  $YS$ ,  $\pi\omega$  duo plana  $ABE$ ,  $DCF$  perpendiculariter jungentes, et regulam  $Y\pi$  regulae  $S\omega$  connectentes, unde  $S\omega$  vel  $SF$ , ipsi  $Y\pi$ , vel  $AE$  perpetuo parallela incedet, quod faciendum erat.

Ut autem recta  $AY$  semper media sit proportionalis inter rectam constantem  $AL$ , et continue variatam  $LG$  paulo difficilius est: quod tamen ni fallor ita consequemur; inspiciatur fig. 1 aut, quae hanc ejus partem clarius explicat, f i g u r a 5.

3 ponatur (1)  $AY$   $\pi$  (2) ipsa  $AY$  aequalis perpetuo ipsi  $DS$  | . Nempe *erg.* | puncto  $Y$  perpetuo incedente ex adverso (3)  $Y$  in  $L$  3 ut | recta  $AY$  *erg.* | semper  $L$  5 recta (1)  $AY$  punctum quoddam (2)  $AE$   $L$  6 unde (1) recta prodeat indefinita, aequalis (a) inque ea ponatur parallela ipsi  $AY$ , (b) in qua sumatur horizonti (2) dextrorsum  $L$  8 opposita *erg.*  $L$  11 possit (1) quoniam rectam  $AY$  continue magnitudinem mutare manifestum est, quoniam et  $LG$ . eam (2) | ob mutationem ipsius  $LG$ . cum sit *nicht gestr.* |  $AY$  media propo (3) Ex  $L$  12 duae (1) perpendiculares (2) lineae rigidae, (a) ad planum  $Y\omega$  (b)  $YS$   $L$  14 parallela (1) | erit *nicht gestr.* | (2) incedet  $L$  17 inspiciatur ... explicat, | f i g u r a m *ändert Hrsg.* | 5 *erg.*  $L$



Triangulum rectangulum  $\psi YL$  omnes formas induere possit, necesse erit  $LY$  mobilem esse circa  $L$ . Erit ergo  $AY$  semper media proportionalis inter  $AL$  et  $A\psi$  seu inter  $AL$  et  $LG$  utcunque varietur punctum  $G$ . Quod faciendum erat. Unde jam antedicta consequuntur.

Explicata est constructio Instrumenti Algebraici, ut appareret, ex quibus partibus compositum sit, et qua ratione partium motus alter alterum regat. Nunc superest, ut modum quoque tradamus utendi Instrumento ad Aequationum radices Geometricae, in lineis, et quod hinc sequitur Mechanice in numeris quantumlibet vero propinquis, inveniendas. Constat ex iis quae Vieta inprimis et Cartesius, tradidere, omne Problema (ordinarium, rectilineum) determinatum, reduci posse ad aequationem in qua una tantum incognita supersit; secundum quam ordinata aequatio eo usque assurgere censebitur quo usque maxima incognitae dimensio excrevit. Praeterea tradita est a Cartesio methodus efficiendi, ut omnia aequationis loca sint repleta, et ut omnes aequationis radices sint verae, ut ille loquitur, id est affirmativae: quo facto, magno commodo nostro, feliciter evenit, ut signa + et - in aequatione sese alternis sequantur, quod quam sit instituto nostro necessarium mox apparebit. Sumamus in exemplum aequationem ex decem terminis compositam, sive noni gradus, (: raro enim altius assurgetur :) quae ad radices affirmativas praeparata, atque ordinata, ita stabit:

$$y^9 - by^8 + acy^7 - a^2dy^6 + a^3ey^5 - a^4fy^4 + a^5gy^3 - a^6hy^2 + a^7ly - a^8m \sqcap 0$$

et transponendo, ut signa negativa amoveantur:

$$\odot a^8m + a^6hy^2 + a^4fy^4 + a^2dy^6 + by^8 \sqcap a^7ly + a^5gy^3 + a^3ey^5 + acy^7 + y^9$$

Ubi patet duas haberi summas sive formulas aequales inter se, alteram omnium terminorum exponentium parium, 0. 2. 4. 6. 8. alteram imparium, 1. 3. 5. 7. 9. Nec vero necesse est terminum summum, hoc loco  $y^9$  purum esse, nullaque quantitate cognita affectum: cum contra in nostro sit arbitrio purum reddere quemlibet, posito enim  $a$  esse unitatem, et omnia dividi per  $m$ , fiet aequatio:

$$\supset 1 + \frac{h}{m}y^2 + \frac{f}{m}y^4 + \frac{d}{m}y^6 + \frac{b}{m}y^8 \sqcap \frac{l}{m}y + \frac{g}{m}y^3 + \frac{e}{m}y^5 + \frac{c}{m}y^7 + \frac{1}{m}y^9$$

1  $\psi YI L$  ändert Hrsg. 5 regat. (1) nunc, cuius causa totum hoc negotium susceptum est, usum eius in Algebra, et quod hinc sequitur in Geometria imo et in Mechanicis, dicemus. su (2) nunc superest, (a) ut modum utendi (aa) in resolvendis (bb) ad resolvendas Aequationes adhibendi (b) ut  $L$  6 ad (1) resolvendas (2) inveniendas (3) Aequationum  $L$  7 Mechanice erg.  $L$  12 ut ... et ut erg.  $L$  14f. quod ... apparebit erg.  $L$

8 tradidere: Vgl. Fr. VIÈTE, *Opera mathematica*, 1646 (VO) und R. DESCARTES, *Geometria*, 1659 (DGS I S. 1–118). 11 tradita: *a. a. O.*, S. 70–75.

Illud quoque constat pro Unitate assumi posse quamlibet quantitatem datam, prout commoditas operationis exigere videbitur.

His ita positis, ajo Aequationem  $\mathfrak{D}$  in machina ita perfecte repraesentari, ut satis appareat ipsam rerum naturam, ad hoc construendi genus invitare, subsidiis dudum velut  
 5 consulto praeparatis, ut facilius exitum reperiret. Nam durante motu, quomodocunque linearum magnitudo varietur, attamen  $AL$  appellata 1, et  $DS$  appellata  $y$ , sive  $LG$ ,  $y^2$  semper verum erit ab uno latere esse

$$10 \quad \left\{ \begin{array}{l} AL \sqcap 1 \quad LM \sqcap \frac{h}{m}y^2 \quad MN \sqcap \frac{f}{m}y^4 \quad NO \sqcap \frac{d}{m}y^6 \quad OB \sqcap \frac{b}{m}y^8 \\ \text{ab altero latere vero} \\ DT \sqcap \frac{l}{m}y \quad T(Y) \sqcap \frac{g}{m}y^3 \quad (Y)\lambda \sqcap \frac{e}{m}y^5 \quad \lambda\mu \sqcap \frac{c}{m}y^7 \quad \mu C \sqcap \frac{1}{m}y^9 \end{array} \right.$$

Quod si ergo durante motu aliquando evenit, ut  $DT + T(Y) + (Y)\lambda + \lambda\mu + \mu C$ , id est  $DC$ , fiat aequalis ipsi  $AL + LM + MN + NO + OB$ , id est  $AB$ , sive ut punctum  $C$  plani unius e regione respondeat puncto  $B$  plani alterius, id est ut recta imaginaria  $BC$  sit utrique plano perpendicularis, quod in media operatione, etiam machina non  
 15 detecta, ope styli cujusdam impingentis, facile sentiri potest; tunc manifestum est, etiam  $1 + \frac{h}{m}y^2 + \frac{f}{m}y^4 + \frac{d}{m}y^6 + \frac{b}{m}y^8$  aequari ipsi  $\frac{l}{m}y + \frac{g}{m}y^3 + \frac{e}{m}y^5 + \frac{c}{m}y^7 + \frac{1}{m}y^9$  ac proinde si machina in eo statu sistatur, quae tunc fuerit  $DS$  sive  $y$ , eam fore quaesitam, cum aequationi propositae satisfaciatur.

Quod si Aequatio  $\odot$  commodior videatur ad usum, quam aequatio  $\mathfrak{D}$ , ne scilicet  
 20 omnia per  $m$  dividere necesse sit; aut etiam si alium quemlibet terminum potius quam ultimum purum reddere velimus, id factu facillimum erit, si modo tunc postuletur, ut punctum  $C$  respondeat ex adverso non ipsi puncto  $B$ , sed puncto  $\omega$ , sumta recta  $B\omega$  tali, ut sit differentia inter terminum cognitum sive ultimum, et unitatem; sumta inquam recta  $B\omega$  a  $B$  versus  $A$ , cum unitas est major termino ultimo, aut in contrarias partes,  
 25 producta  $AB$  ultra  $B$ , cum est minor. Quod, si ad aequationem  $\odot$ . applicetur, posito  $a$

1 quantitatem datam *erg.*  $L$  4 appareat (1), vix aliq (2) ipsam  $L$  4 subsidiis (1) in eam rem (2) dudum  $L$  5 reperiret. (1) Nam si (a) modo ipsi  $AB$  (fig. 1) adjicias rectam (aa) a – m (bb)  $B\omega$ , cuius valor sit a – m (b) modo in recta  $AB$  (fig. 1) producta si opus est, sumas rectam  $B\omega$ , cuius valor sit a – m, directione (2) nam  $AL$  valebit (3) Nam  $L$  6  $AL \dots y^2$  *erg.*  $L$  7 erit (1) Nam ab uno latere  $AL$  valebit 1.  $LM \sqcap$  (2) ab  $L$  13 f. id ... perpendicularis *erg.*  $L$

esse unitatem, sive 1, erit terminus ultimus sive cognitus,  $m$ . cumque necesse sit  $AL +$  vel  $- B\omega$  aequari termino cognito  $m$ , ut scilicet caeteris rectis,  $LM, MN$  etc. reliquos terminos repraesentantibus, tota aequationis  $\odot$  portio sinisterior, sive exponentium parium, a recta  $A\omega$  repraesentetur; ideo  $+$  vel  $-$  exprimendo per signum ambiguum  $\ddagger$  habebimus,  $1 \ddagger B\omega \sqcap m$  sive  $\ddagger B\omega \sqcap m - 1$ , vel  $B\omega \sqcap \ddagger m \ddagger 1$  id est  $B\omega$  erit differentia inter  $m$  et 1. et quando  $m$  major quam 1. tunc pro  $B\omega \sqcap \ddagger m \ddagger 1$ . scribemus  $B\omega \sqcap m - 1$ . Eritque  $m \sqcap 1 + B\omega$  adeoque  $B\omega$  non subtrahetur ipsi  $AB$ , sed addetur, sive sumetur in recta  $AB$  producta ultra  $B$ . Contra quando 1 major quam  $m$ , tunc pro  $B\omega \sqcap \ddagger m \ddagger 1$ , scribetur  $B\omega \sqcap 1 - m$ , adeoque erit  $m \sqcap 1 - B\omega$ . Quod significat  $B\omega$ , a recta  $AB$  subtrahendam, sive in contrarias partes sumendam esse regrediendo a  $B$  versus  $A$ . Itaque regula mobilis parallela  $BE$ , ascendendo descendendove secum aget affixam sibi, et in ipsa  $AB$  mobilem regulam  $B\omega$  et ex ejus puncto  $\omega$  exiens perpendiculariter stylus impinget in punctum  $C$  regulae mobilis  $FC$ , tunc cum rectae  $A\omega$ , et  $DC$ , fiant aequales, seu cum  $DS$  est quaesita. Cumque manifestum sit quamlibet cognitam sumi posse pro unitate sive  $AL$ , et terminum quoque cognitum sive ultimum aequationis cujusdam valorem quemlibet pro arbitrio nostro accipere posse; sub literis quoque  $a, b, c, d, e, f, g, h, l, m$ , intelligi posse quantitates cognitatas quaslibet; et in aequatione qualibet effici posse, ut quantitas cognita alicujus termini sit data, ideo imposterum formula  $\odot$  uti suffecerit cum caeteras omnes comprehendat.

Explicandum ergo nunc est, qua ratione Instrumentum aequationi cuilibet propositae accommodetur, sive quomodo effici possit, ut sit:

$$\begin{cases} AL \sqcap 1 & LM \sqcap hy^2 & MN \sqcap fy^4 & NO \sqcap dy^6 & OB \sqcap by^8 \\ B\omega \sqcap \ddagger m \ddagger 1, & \text{adeoque } A\omega \sqcap m + hy^2 + fy^4 + dy^6 + by^8 \\ \text{et vicissim ut sit ex altero latere} \\ DT \sqcap ly & T(Y) \sqcap gy^3 & (Y)\lambda \sqcap ey^5 & \lambda\mu \sqcap cy^7 & \mu C \sqcap y^9 \\ \text{adeoque } DC \sqcap ly + gy^3 + ey^5 + cy^7 + y^9 \end{cases}$$

1 cognitus,  $m$  (1), et  $B\omega \sqcap \ddagger$  (2)  $B\omega$ , esse  $1 - m$ ; | *dazu gestr. Nebenbetrachtung am oberen Rand:*  
 $1 + B\omega \sqcap m$ . Ergo  $B\omega \sqcap m - 1$       $m - 1 + 1 \sqcap m$       $1 - m$ . | (a) ideo cum ne (b) ideo (3) cumque necesse  
 $1 - B\omega \sqcap m$ . Ergo  $B\omega \sqcap 1 - m$   
 sit (a)  $AL + B\omega$  aequari termino (b)  $AL$   $L$      4 repraesentetur; (1) appellemus  $+$  vel  $-B\omega$  (2) ideo  $+$  vel  $-$  (a)  $B\omega$  appellando (aa)  $\ddagger$  (bb)  $\ddagger B\omega$ , ut scilicet signum (b) appellando  $\ddagger$ , ut (c) exprimendo  $L$   
 12 mobilem (1) rectam (2) regulam  $L$      13 regulae mobilis  $FC$  erg.  $L$

Ut scilicet in casu aequalitatis rectorum  $A\omega$ ,  $DC$  incognita  $y$  haberi possit. Hoc autem ita praestabitur, in fig. 1. regula  $LG$  moveatur, sursum deorsumve in recta  $AB$ , donec fiat  $AL$  aequalis ipsi  $a$ . seu unitati assumptae. Quo facto et radius  $AGE$ , tamdiu moveatur circa centrum  $A$ , donec rectam  $LG$  ita secet in puncto  $G$ , ut fiat  $LG$  aequalis ipsi  $AL$ , sive unitati. Jam regula transversalis  $GM$ , circa punctum  $G$ , in  $CM$  regulae increnatura qua per ipsam  $LG$  incedit fixum eoque moveatur, donec ipsi  $LMB$  occurrat in puncto  $M$  tali, ut ipsa  $LM$  valeat  $h$ . Quo obtento in eo situ sive inclinationis angulo  $LGM$ , ita firmabitur regula transversalis  $GM$ , ut durante motu sive operatione exempli praesentis inde dimoveri non possit. Idemque de caeteris transversalibus intelligendum est, earum inclinationem manuum opera mutari pro lubitu posse, quando Machina operationi praeparatur; durante operatione mutari non posse, quod effectum facillimum esse, nemo dubitat. Itaque angulus  $LGM$ , vel distantia regularum  $LG$ ,  $MH$  sumatur talis, ut sit  $LM \cap h$ . Eodem modo angulus  $MHP$  vel  $NIQ$ , vel  $OKR$  talis ut distantia  $MN$  sit  $f$ ,  $NO$  sit  $d$ ,  $OB$  sit  $b$ . Quid simplicius? In altero plano similiter anguli  $DST$ ,  $TVX$ ,  $(Y)Z\alpha$ ,  $\lambda\beta\gamma$ ,  $\mu\delta\theta$ , tales sumantur, ut sint distantiae,  $DT \cap l$ ,  $T(Y) \cap g$ ,  $(Y)\lambda \cap e$ ,  $\lambda\mu \cap c$  et  $\mu C \cap AL \cap 1$ . Quo facto Instrumentum erit praeparatum, et ajo perpetuo eventurum, durante machinae motu, utcunque elevetur aut deprimatur radius  $AE$ , circa centrum  $A$ , ut manente  $AL \cap 1$  et  $DS$  continue variante appellata  $y$ , locum habeant aequationes sive valores rectorum  $LM$ ,  $MN$ , etc. item  $DT$ ,  $TY$ , etc. recensiti sub signo  $\text{Ÿ}$ .

Quod ita demonstro, etsi Geometrae intelligenti, rem sine demonstratione ex dictis manifestam putem. Ex punctis  $G$ ,  $H$ ,  $I$ , item  $s$ .  $v$ .  $z$ .  $\beta$  in rectas  $M\aleph H$ ,  $NP\beth I$ ,  $OQ\kappa K$ ,  $BRE$  item  $T\daleth V$ ,  $(Y)X\eta Z$ ,  $\lambda\alpha\lrcorner\beta$ ,  $\mu\gamma\psi\delta$ ,  $C\theta F$  demittantur perpendiculares imaginariae  $G\aleph P$ ,  $H\beth Q$ ,  $I\aleph R$ ,  $S\daleth X$ ,  $V\eta\alpha Z\lrcorner\gamma$ ,  $\beta\psi\theta$ . Jam vero cum sit  $AL \cap 1$ ,  $DS \cap y$ , erit  $LG \cap y^2$ , quia  $LG$  inter  $AL$  et  $DS$  proportione media est, ex constructione. Hinc sequitur  $LM$  esse

2 regula  $LG$  (1) ita moveatur, ut fiat  $AL$  aequalis ipsi  $a$ , sive unitati (2) moveatur  $L$  12 dubitat. (1) Jam puncta in quibus rectae | imaginariae erg. | ipsi  $BE$  perpendiculares sive verticales,  $G\aleph P$ ,  $H\beth Q$ ,  $I\aleph R$ , a realibus, horizontalibus, sive regulis  $M\aleph H$ ,  $NP\beth I$ ,  $OQ\kappa K$  | secantur erg. | appellemus  $\aleph$ ,  $\beth$ ,  $\kappa$ . erit ipsa  $G\aleph$  (id est  $LM$ )  $\cap h$ , et quoniam | ut erg. |  $AL$  ad  $LG$ . ita  $G\aleph$  ad  $\aleph H$ , et ex hypothesi  $AL \cap LG$ , erit et  $\aleph H \cap h$ . sumta ergo  $LM \cap h$ . (2) Itaque  $L$  12 distantia (1)  $LM$  sumetur talis, ut (2) regularum  $L$  14 simplicius? (1) Similiter (2) In altero plano (a), manifestum est etiam  $DS$  fore aequalem ipsi  $AL$ , vel  $LG$ , seu unitati, cum inter duas quantitates aequales  $AL$ ,  $LG$  media quoque proportionalis  $DS$  sit aequalis, de caetero (b) similiter  $L$  21 putem. (1) Cum  $AL$  est 1, et  $DS$ ,  $y$  erit  $LG \cap y^2$ , ex constructione, supra explicata, quae efficitur ut sit  $DS$  media proportionalis inter (a) 1 et  $y^2$  (b)  $AL$  et  $LG$ . (2) Ex  $L$  22  $BRE$  erg.  $L$  22  $C\theta F$  erg.  $L$  24 quia (1)  $(DS)$  inter duas priores proportione media est, (2)  $LG$  inter  $L$



$hy^2$  quoniam initio motus cum  $LG$  esset unitas  $\sqcap AL$ , puncto  $G$  in  $(G)$  existente, et puncto  $M$  in  $(M)$  erat  $L(M) \sqcap h$ . Patet ergo angulum  $GLM$ , aequalem semper angulo  $(G)L(M)$  esse talem, ut  $LM$  sit aequalis producto ex multiplicatione ipsius  $LG$  per  $f$ . Nam  $LM$  est ad  $L(M)$  seu ad  $h$  ut  $LG$  ad  $L(G)$  seu ad 1. Ergo  $LM \sqcap \frac{LG \text{ multiplicata per } h}{\text{divisa per } 1}$ . Et quia  $LG \sqcap y^2$  ex dictis, erit  $LM \sqcap hy^2$ . 5

Eadem methodo et caetera demonstrantur, nam quia  $LM$  vel  $G\aleph$  est  $hy^2$ , ideo  $\aleph H$  erit  $hy^4$ , cum in quolibet Triangulo ipsi  $ALG$  simili, quale est  $G\aleph H$ , altitudo ut  $G\aleph$  per  $y^2$  multiplicata det basin ut  $\aleph H$ . quandoquidem  $\aleph H$  est ad  $G\aleph$ , ut  $y^2$  ad 1. seu ut  $LG$  ad  $AL$ . Adeoque  $\aleph H \sqcap \frac{G\aleph y^2}{1}$  sive  $hy^4$ . Porro cum  $y^2$  esset 1. seu  $LG \sqcap AL$  tunc  $\aleph H$  erat  $h$ . eodem autem tempore per praeparationem instrumenti paulo ante factam  $MN$ , sive  $\aleph P$  erat  $f$ . Idem autem semper manet angulus  $\aleph HP$ , etiam in progressu operationis, ergo ut  $\aleph P$  erat ad  $\aleph H$  tunc cum  $y$  vel  $y^2$ , esset 1, seu ut  $h$  ad  $f$ , ita nunc quoque quocumque assignabili motus momento, qualiscumque sit  $y^2$  vel  $LG$ ;  $\aleph P$  ad  $hy^4$ , sive  $\aleph H$  erit; nempe  $\frac{\aleph P}{hy^4} \sqcap \frac{f}{h}$ . ergo  $\aleph P \sqcap fy^4 \sqcap MN$ . Iisdem prope verbis ostendetur  $NO$ , vel  $\beth Q$  semper valere  $dy^6$ , et  $OB$ ,  $by^8$ . In altero plano, patet  $DT$  esse  $ly$ , nam tunc cum  $DS$  vel  $y$  esset 1.  $DT$  erat  $l$ , ergo tunc erat  $DT$  ad  $DS$ , ut  $l$  ad 1. At eadem perpetuo manet ratio ob eundem semper angulum  $DST$ , ergo nunc quoque cum  $DT$  valet  $y$ .  $DS$  vel  $S\daleth$  valebit  $ly$ . Hinc porro sequitur,  $\daleth V$  valere  $ly^3$  quoniam  $SF$ , parallela ipsi  $AB$ , unde Triangulum  $S\daleth V$  simile Triangulo  $ALG$ , adeoque  $\daleth V$  ad  $ly$  seu  $S\daleth$ , seu ut  $AL$  ad  $LG$  seu  $y^2$  ad 1. Unde  $T(Y)$  vel  $\daleth X \sqcap gy^3$ . Nam quando  $y$  est unitas  $\daleth V$  sive  $ly^3$ , erit  $l$ , 10

jam ex praeparatione, quando  $y$  est 1,  $\daleth X$  aut  $T(Y)$  est  $g$ . Est ergo tunc  $\daleth X$  ad  $\daleth V$  ut  $g$  ad  $l$ . Jam eadem semper manet ratio, quoniam idem durante motu angulus  $\daleth VX$ . et 15

$\beth Q$  semper valere  $dy^6$ , et  $OB$ ,  $by^8$ . In altero plano, patet  $DT$  esse  $ly$ , nam tunc cum  $DS$  vel  $y$  esset 1.  $DT$  erat  $l$ , ergo tunc erat  $DT$  ad  $DS$ , ut  $l$  ad 1. At eadem perpetuo manet ratio ob eundem semper angulum  $DST$ , ergo nunc quoque cum  $DT$  valet  $y$ .  $DS$  vel  $S\daleth$  valebit  $ly$ . Hinc porro sequitur,  $\daleth V$  valere  $ly^3$  quoniam  $SF$ , parallela ipsi  $AB$ , unde Triangulum  $S\daleth V$  simile Triangulo  $ALG$ , adeoque  $\daleth V$  ad  $ly$  seu  $S\daleth$ , seu ut  $AL$  ad  $LG$  seu  $y^2$  ad 1. Unde  $T(Y)$  vel  $\daleth X \sqcap gy^3$ . Nam quando  $y$  est unitas  $\daleth V$  sive  $ly^3$ , erit  $l$ , 20

1 initio motus *erg.*  $L$  7  $hy^4$ , (1) cum (a) angulus (aa)  $ALG$ , (bb)  $G\aleph H$ , ipsi  $ALG$  aequalis semper efficit, ut multiplicet per  $y^2$ , sive efficiat, ut  $G\aleph$  in (b) Triangulum  $G\aleph H$ , ipsi  $ALG$  simile (c) angul (d) in Triangulo, (2) quia (3) cum  $L$  12 seu ... ad  $f$ , *erg.*  $L$  14  $\sqcap MN$ . (1) simili methodo demonstratur (2) totidem (3) iisdem  $L$  15  $by^8$ . (1) et  $DT$ , (a)  $LY$  (b)  $ly$ , et  $TY$ ,  $gy^3$ , et  $Y\lambda$ ,  $ey^5$ , et  $\lambda\mu$ ,  $cy^7$ , et  $\mu C$ ,  $y^9$ , quoniam ex hypothesi tunc cum  $y$  esset unitas valebant  $d$ ,  $b$ ,  $l$ ,  $g$ ,  $e$ ,  $c$ ,  $1$ , ex hypothesi factae praeparationis, (aa) Triangula autem (bb) anguli autem transversalium ad parallelas, durante motu iidem semper mansere. (2) In  $L$  18 vel  $S\daleth$  *erg.*  $L$  18 f.  $SF$ . ... unde *erg.*  $L$  19  $S\daleth$ , (1) | ut *nicht gestr.* |  $y^2$  ad 1 (2) seu  $L$  20 Unde (1) demonstratur  $\daleth X$  vel (2)  $T(Y)$  vel  $L$  20 unitas  $\daleth V$  (1) valebit  $l$ . (et) (2) (:id est  $ly^3$  :) (3) sive  $L$  21 f. ut  $l$  ad  $g$ . *L ändert Hrsg.*

proinde Triangulum  $V\Gamma X$  semper simile manet; quare semper  $\Gamma X$  ad  $ly^3$  sive ad  $\Gamma V$  ut  $g$  ad  $l$ , sive  $\frac{\Gamma X}{ly^3} \propto \frac{g}{l}$ , unde  $\Gamma X \propto gy^3 \propto TY$ . Iisdem prope verbis ostendetur  $Y\lambda$  sive  $\Pi a$  valere  $ey^5$ , et  $\lambda\mu$ ,  $cy^7$ , et  $\mu C$ ,  $y^9$ . Ac proinde veritas aequationum omnium sub signo  $\wp$  recensitarum ostensa est.

5 Quoniam vero eadem aequatio plures habere potest radices reales, hinc etiam toties durante machinae motu evenire debet, ut  $A\omega$  et  $BC$ , fiant aequales, ac proinde una eademque operatione inveniuntur radices Aequationis omnes, quod in numerosa potestatum resolutione qualem Vieta invenit, non procedit; hoc loco autem in numeris non minus quam lineis praestatur. At, inquires, ignorari quousque motus continuari debeat, ad ra-  
10 dices omnes inveniendas. Respondeo per doctrinam de Aequationum determinationibus sive limitibus facile praefiniri terminos, quos  $y$  inutiliter excedat: Sed et sine calculo, manifestum est, cum hoc loco omnes radices sint verae, maximam ex ipsis, esse termino cognito secundo, summae scilicet omnium, minorem. Quare inventis etiam aliquot ex ip-  
15 sibus, facile et summa residuarum, quam maxima ex ipsis excedere non possit, cognoscitur. Quantitatem autem qualibet aequationis propositae radice minorem haberi necesse est, non enim perinde decrescendo, ut crescendo in infinitum iri potest; facile enim ad finem motus regrediendo sive claudendo machinam pervenietur; ut proinde radicem si qua est inferior unitate, occurrere necesse sit. Porro inventae in lineis radices, facile in numeris  
20 habentur, quantumlibet exactis, si circino ad scalam quandam quantum satis est subdivisam transferantur. Unum desiderari dicit aliquis, ut scilicet radices in numeris veris habeantur, quando sunt rationales, quod praestat calculus Vietae. Sed quanquam ad usum, id necesse non sit, ausim tamen ab hac quoque machina promittere. Nam statim agnosceretur, si divisores ultimi termini, inventis radicibus proximi, aequationem multiplicatione producere potuerunt. Idem etiam re ad numeros non reducta (: constructio  
25 enim per instrumenti naturam pure Geometrica est :) ad radices aequationum literalium rationales, si quae sunt, facile agnoscerentur sufficit. Breviter ab hoc Instrumento unico tantum momento praestatur in lineis quantum prolixis et variis praeparationibus

18–20 Porro ... transferantur *erg.*  $L$  26 f. instrumento (1) exacte elaborato (2) unico tantum | momento *erg.* | praestatur  $L$  27 quantum (1) omnium curvarum in Geometriam a Cartesio introductarum (2) omnibus prolixis curvarum praeparationibus (3) prolixis  $L$

---

8 invenit: Fr. VIÈTE, *De numerosa potestatum resolutione*, 1600 (VO S. 163–228).

curvarum omnium in Geometriam a Cartesio introductis; et in numeris quantum calculo praeclare sane sed mire anxio et impedito, a Francisco Vieta invento: ut nesciam an in eo genere aliquid ultra exactam Instrumenti elaborationem vel optari possit. F i n i s.

2 praeclare sane sed *erg. L*

## 27. DE TABULIS ANALYTICIS CONDENDIS

[24. Dezember 1674 – Anfang 1675 (?)]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 444. 1 Bl. 2<sup>o</sup>. 2 S. Textfolge Bl. 444 v<sup>o</sup>, Bl. 444 r<sup>o</sup>.  
Cc 2, Nr. 899

5 Datierungsgründe: [noch]

## De Tabulis Analyticis condendis

Cum Calculo Analytico sive literali per instrumenta vix subveniri possit (: excepto unico meo, quod Machinam Combinatoriam appello :), danda opera est, ut Tabulae quaedam condantur, quibus habitis pleraque facile exequi liceat. Eae vero Tabulae longe al-  
10 terius erunt naturae, quam Algebraista quispiam sibi persuasurus fuisset. Neque enim sufficit Aequationes unius incognitae ad aliquot usque dimensiones exhibere, earumque dare radices; item formularum recensere divisores. Sed ad aequationes etiam, imo potissimum, plurium incognitarum ascendendum est. Porro quod attinet formularum divisores  
15 racionales, non puto opus esse tabulis, nam ope artificii Huddeniani, nunc unam nunc aliam literam pro incognita sumendi, facile judicari potest, an formula quaedam sit divisibilis. Sed et in aequationibus tam literalibus quam numericis, divisores racionales si qui sunt, momento exhibet instrumentum meum Algebraicum, quoniam exhibitis reapse radicibus statim ostendit, quinam termini ultimi divisores ei proxime accedant. Idem instrumentum meum ad calculorum comprobationes more servit, ipsum enim errori nullo

8 f. quaedam (1) oper (2) condantur *L* 10 quispiam (1) communis – (2) sibi *L* 10 fuisset. (1) Neque enim id (a) est (b) magni facio (aa) aequationes ordi (bb) aequationum formulas recensere, earumque divisores recensere; (2) Neque *L* 11 incognitae (1) exhi (2) ad *L* 12 divisores. (1) Nam quod ad radices attinet, eae si sunt irrationales, (a) nunc quide (b) separatae sunt tractationis, (2) sed *L* 13 est. (1) Primum (2) Porro *L* 14 esse (1) mul (2) tabulis *L* 15 an (1) ae (2) formula *L* 15 f. divisibilis. (1) In (a) numeris (b) numericis quoque aequationibus quoniam radix in numeris (2) Sed *L* 17 quoniam (1) statim e (2) exhibitis *L*

---

8 Machinam Combinatoriam: Vgl. N. 31. 14 ope artificii Huddeniani: Vgl. J. HUDDE, *De reductione aequationum*, 1659, *DGS* I S. 406–506, insbesondere Regel 21, S. 496 f. 17 instrumentum meum Algebraicum: Vgl. N. Cc 2, Nr. 827, Cc 2, Nr. 815 und Cc 2, Nr. 816.

subjectum est, saltem non magno; etsi minus exacte Elaboratum poneretur. Sed quod attinet ad divisores irrationales, eorum velim tabulam condi, ut appareat, an formula quaedam proposita dividi possit per irrationalem, minoris dimensionis quam quae est ipsius formulae. Nam si ipsi formulae dimensione est aequalis: comprehendetur in Tabula generali radicum irrationalium omnium aequationum, quam inveniri posse non despero. Velim ergo primo dari Aequationum omnium unius incognitae generalissime expressarum radices irrationales, dimensione aequales, ad  $10^{\text{mum}}$  v.g. gradum usque, aut  $100^{\text{mum}}$  si velis; credo enim habitis aliquot, in caeteris progressionem apparituram. Deinde velim exhiberi earum certo modo affectarum radices irrationales dimensione inferiores si qui sunt. Inde velim exhiberi formularum quarundam nobiliorum divisores rationales; a divisoribus progrediendum erit ad componentes; nempe eadem formula in multas alias resolvi potest infinitis fere modis, ex quibus quaedam etiam irrationales; ibi vero sufficet formularum nobiliorum exhiberi componentes. Cumque etiam Aequatio turbari possit; seu ex Aequatione converti in Analogiam; specimina elegantiorum exemplorum dari intererit sed haec de componentibus et analogiis pro parergis habenda. Primarium enim est, ut data aequatione, inveniamus incognitae valorem. Itaque primum aequationum unius incognitae, utcunque affectarum recensendae radices; sive incognitarum valores puri. Inde ascendendum ad aequationes duarum incognitarum, ubi primum aequationes duarum incognitarum, quae sunt ad eundem locum, recensendae; ut scilicet aliae oblatae ad eas reducantur; et hic erit catalogus Curvarum Analyticarum in plano descriptibilium. Loca autem intelligenda sunt, rectarum ad curvarum terminatarum, quae omnes vel parallelae inter se, vel in uno puncto concurrentes; et si parallelae vel angulos ad directricem facientes rectos, vel obliquos. Post

2 irrationales, (1) eos velim (2) eorum L 6 dari (1) Aequationum omnium unius incognitae Radices (2) Tabulam Aequationum omnium unius incognitae (3) Aequationum L 7 irrationales, (1) quales ad  $20^{\text{mum}}$  (2) dimensione L 9 exhiberi (1) earum di (2) memorabiliores ex ipsis divisores (3) earum divisores irrationales (4) earum L 9f. affectarum, (1) ration (2) radices L 13 infinitis fere modis *erg.* L 15f. Analogiam; (1) exemplo (2) specimina L 17 habenda. | Itaque *gestr.* | primarium L 20f. ubi (1) explicanda erunt prima loca (2) primum L 22 catalogus (1) plana (2) Curvarum L 23 sunt, (1) para (2) ductarum ex a (3) rectarum L

curvarum catalogum, quales Huddenius proximo supra Conicas gradu ait esse circiter 50. Nimirum primo exhibebuntur aequationes secundi gradus duarum incognitarum; inde tertii gradus duarum incognitarum; inde quarti, etc. et ita catalogus omnium curvarum Geometricarum ad gradum usque decimum aut ultra. Adjici poterunt earum tangentium, 5 centrorum, focorum, dimensionum aliarumque functionum calculi sive Tabulae, describendi quoque modi illustriores; et theoremata insignia. Recensitis aequationibus duarum incognitarum, et ad certa loca sive curvas reductis; veniendum est ad combinationem duarum aequationum duarum incognitarum. Et exhibitis aequationum catalogis, positus scilicet duabus aequationibus duarum incognitarum inter se combinatis, e regione ponendus est cujuslibet incognitae valor absolutus. Jam progrediendum ad aequationes trium 10 incognitarum, seu ad loca ad superficiem, et exhibendus primum Catalogus omnium superficierum Analyticarum ad certum usque gradum, ut appareat determinatus earum numerus; adjiciendae earum tangentes, functiones; centra, foci, etc. et theoremata nobiliora ex calculi natura pendentia. Post catalogum locorum trium incognitarum veniendum 15 ad combinationes duarum aequationum trium incognitarum ut appareat quomodo reduci possint, ad aequationes duarum incognitarum scilicet nunc hac nunc illa incognita elisa, unde quaelibet regulariter combinatio aequationum 2 incognitarum poterit revocari tribus modis diversis ad duas aequationes duarum incognitarum. V. g. si duae aequationes et tres incognitae, v. g.  $x$ .  $y$ .  $z$ . potest elidi  $z$ , et restabunt duae aequationes in quibus non nisi  $x$ . et  $y$ . Eodem modo elidi potest  $x$ , vel  $y$ . Ubi rursus considerandum est fieri posse, ut inter illas tres aequationes jam sint, in quibus non sunt omnes incognitae. Tandem 20 veniendum est ad con3nationes aequationum trium incognitarum, et singularum dandus

1 f. catalogum, (1) exhi (2) qvales Huddenius | proximo *erg.* | supra ... 50. (a) ipsae aequationes erunt recensendae. explicandumqve. Forte (b) Nimirum  $L$  5 dimensionum *erg.*  $L$  5 functionum | et describendi modi *erg.*  $L$ , *streich* *Hrsq.* | calculi  $L$  5f. describendi ... insignia *erg.*  $L$  11 superficiem, (1) qvarum exhibendus (2) et  $L$  15 appareat (1) qvot (2) | qvot modis *ändert* *Hrsq.* | reduci  $L$  17 regulariter (1) aeqvatio trium c (2) combinatio  $L$  18 ad (1) aeqvatio (2) duas  $L$  18 incognitarum. (1) Inde veniendum (2) V. g.  $L$  20  $y$ . (1) vel aliter (2) Eodem  $L$  20 vel |  $y$ . *ändert* *Hrsq.* | (1) potest etiam fi (2) Ubi  $L$  22 ad (1) con3nationes (2) con3nationes  $L$

---

1 Huddenius ... ait: Eine Methode Huddes zur sukzessiven Generierung von Kurven höherer Ordnung stellt Schooten im Abschnitt *De lineis curvis superiorum generum* in Fr. v. SCHOOTEN, *Exercitationum mathematicarum libri quinque*, 1657, S. 475–480 vor. 21 tres aequationes: Bismal hat Leibniz in diesem Stück nur Kombinationen aus zwei Gleichungen betrachtet.

valor purus. Eodem modo ad altiores praecedendum v. g. ad decimum usque gradum, et in singulis procedendum ordine, v. g. aequatio 6 dimensionum primum 6 terminorum, deinde 5 terminorum etc. et si 5 terminorum decent vel secundus, vel tertius, vel quartus etc. Quando autem loquor de aequationum formulis loquor de plane absolutis seu generalibus, v. g.  $y^3 + ly^2 + amy + a^2n \sqcap 0$ . ut omnibus accommodari possint. Itaque ego meam aequationem eodem tractans modo novas habeo aequationes collatitias, nam v. g. si sint aequationes duae (: vide schediasmata Xb. 1674. *De trochoeidibus* :)

$$\begin{aligned} x^3 + 2ax^2 + 4afx + 2af^2 \sqcap 0. \quad \text{et} \quad x^2 - 2fx + f^2 \sqcap 0 \\ + 2f \quad + \quad f^2 \quad \quad \quad - 2\frac{y^2}{a} \dots - y^2 \\ - 4z^2 \end{aligned}$$

quaero in Tabula harum duarum aequationum combinationes:

$$x^3 + lx^2 + amx + a^2h \sqcap 0 \quad \text{et} \quad x^2 + nx + ap \sqcap 0$$

Elidendo  $x$ , invenietur in Tabula aequatio haec:

---

12 *Dazu am Rand*: NB. pro  $2af^2$ , pone  $a^2h$ .

1 praecedendum (1) Hoc (2) v. g.  $L$  2 v. g. (1) primum aeqv (2) aequatio 6 (a) incognita (b) dimensionum  $L$  5 ut | postea *gestr.* | omnibus  $L$  8–11  $\sqcap 0$  (1) suppono pro priore (2) quaero  $L$  11 Tabula (1) has (2) harum  $L$  12  $amx + (1) 2af^2$  (2)  $a^2h$   $L$  13 elidendo (1) fiet (2)  $x$ , (a) fiet aequatio hoc (b) invenietur  $L$  13–182,1 haec (1)  $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{2af^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-2af^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$  (2)  $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{ha^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-ha^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2} L$

---

7 *De trochoeidibus*: VII, 5 N. 18. 11–182,3 quaero ...  $\frac{f^2 - y^2}{a}$ : Ein eigenständiges Werk von

Leibniz mit solchen Kombinationen zweier Gleichungen konnte nicht gefunden werden. Den Lösungsansatz des allgemeinen Problems, bestehend aus den Gleichungen und der Beziehung, die sich aus der durch Vorzeichenfehler beeinträchtigten Elimination von  $x$  ergibt, übernahm Leibniz aus VII, 5 N. 18 S. 166 Z. 18 bis S. 167 Z. 7. Dabei wurde nachträglich, wie in der Randnotiz in Z. 14 vermerkt,  $2af^2$  durch  $a^2h$  ersetzt.

Richtig müsste die linke Seite der Gleichung von S. 182 Z. 1 lauten:  $\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap - n^2ap}{-ha^2 + lap - 2nap + nam - ln^2 + n^3}$ .

— Hier und in den folgenden Gleichungen (Z. 12 – S. 182 Z. 3) bezeichnet  $a$  sowohl einen der Koeffizienten des zu lösenden Problems aus Z. 8–10 als auch denjenigen des generellen Problems in Z. 12 und seines Lösungsansatzes.

$$\frac{-a^2mp + a^2p^2 + lnap + n^2ap}{ha^2 - lap + nam - ln^2 + n^3} \sqcap \frac{-ha^2 + lap - nap}{am - ap - ln + n^2}$$

Quae aequatio jungatur novis assumtis aequationibus:

$$l \sqcap 2a + 2f. \mid am \sqcap 4af + f^2 - 4z^2. \mid a^2h \sqcap 2af^2. \mid n \sqcap -2f - \frac{2y^2}{a}. \mid p \sqcap \frac{f^2 - y^2}{a}.$$

Habemus ergo aequationes 6. incognitas 7. ex quibus elisis caeteris retinendae, seu pro  
 5 cognitiss sumendae  $y$ . et  $z$ . Atque ita rursus in tabula sub 6 aequationum conjunctione,  
 invenies statim sine calculo valorem. Ubi maximus apparet usus dispersionis in minuta seu  
 multas aequationes particulares, ut sine calculo inveniatur valor. Video jam, non videri  
 necessarium, ut separatim exhibeantur conternationes et combinationes 4 aequationum;  
 10 semper enim eas quas elidere non vis cognitas finges, et res semper reducetur ad casum  
 problematis determinati. Sufficit ergo tantum in Tabulis exhiberi omnium incognitarum  
 valores datis totidem aequationibus.

2 aeqvatio (1) conferatur novis (a): (b) assu (2) jungatur L 3 f<sup>2</sup> | + ändert Hrsg. | 4z<sup>2</sup> L  
 5 z. (1) Et huc jam illud video non esse. (2) Atqve L 8 exhibeantur (1) redu (2) conternationes L  
 8f. aeqvationum; (1) qvoniam (2) semper L

---

4–7 Habemus ... valor: In den Überlegungen zur Lösung des benannten Gleichungsproblems in Z. 1–3 wirkt sich die doppelte Verwendung des Koeffizienten  $a$  aus. Zudem ordnet Leibniz hier die Koeffizienten des ursprünglichen Problems von S. 181 Z. 8–11 den Unbekannten zu.



## 28. DE SOLIDIS ANALYTICIS

[Dezember 1674]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 11+17. 1 Bog. 2°.  $\frac{1}{3}$  S. auf Bl. 17v°. — Auf dem restlichen Bogen N. 24<sub>1</sub>.

Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: N. 28 ist vor dem auf Dezember 1674 datierten N. 24<sub>1</sub> auf den Bogen geschrieben worden, vermutlich in Zusammenhang mit den Exzerpten aus J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–1671 (VIII, 2 N. 8).

Solida Analytica possunt homogenea esse figuris quadratricibus non analyticis. Imo id quotidie evenit, quia solidorum elementa sunt spatia quorum spatiorum saepissime non habetur quadratura. 10

Cylindri Hyperbolici residuum ungula semiquadrantali absecta est homogeneum figurae logarithmorum. Idem de aliis solidis facile fingi potest. Hinc etiam quoties problema quoddam Mechanicum eo redactum est, ut quaeratur descriptio cujusdam figurae quadratricis, exhibeatur solidum quoddam Geometricum, id figurae quaesitae homogeneum 15 erit. Et dici poterit vires esse ut solidorum ejusmodi portiones.

9 analyticis. | Exemplum in Hyperbola dari potest. *gestr.* | Imo *L* 12 f. homogeneum (1) figurae quae sit f (2) figurae *L*

---

12 ungula semiquadrantali: Leibniz kennt den Ausdruck aus J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–1671, pars 2, S. 547 f. (*WO* I S. 918 f.); vgl. VII, 6 N. 34 S. 385.

## 29. NOTA AD SOVERUM

[Oktober 1676 – März 1679 (?)]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 XI 18 A S. 439–440. 1 paginierter Zettel 17,5 × 2,5 cm. 1 S. auf S. 439, S. 440 leer.

- 5            Datierungsgründe: Leibniz notierte sich in der zweiten Oktoberhälfte 1676 Informationen über das Buch von Soverus aus dem Gregory-Collins-Briefwechsel (III, 1 N. 88<sub>2</sub> S. 487). Möglicherweise hat Leibniz bereits damals ein Exemplar in der Royal Society konsultiert, spätestens dürfte er die Notizen anhand des aus dem Nachlass von Martin Fogel für die herzogliche Bibliothek in Hannover erworbenen Exemplars (Nm-A 754) gemacht haben, in das er auf den S. 373 u. 377 Randbemerkungen eingetragen
- 10 hat. Am 10./(20.) März 1679 hat Leibniz ausgehend vom Beweis der Prop. 4 in Buch 6 (S. 378 f.) seine Untersuchung *Tentamen ad dimensionem arcus alicujus circularis* (LH 35 VII 1 Bl. 34–48) begonnen.

Bartholomaeus Soverus in proportione curvi ad rectum promota defendit motum esse Geometricae tractationis. Quaedam demonstrat theoremata, ut ostenderet quibus Datis habituri essemus Quadraturam Circuli. Jam observavit illam in Hyperbola numerorum decretionem. Editus est ejus liber 1630. apud Variscum Varisci. Patavii 4°.

---

13 defendit: B. SOVERUS, *Curvi ac recti proportio promota*, 1630, S. 271–276, 361.    13 demonstrat: *a. a. O.*, S. 371–373 [Marg.].    14 f. observavit: *a. a. O.*, S. 359 f.

## 30. MEA GEOMETRIA

[Juli – September 1676 (?)]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 V 14 Bl. 21. [**Größe: noch**]. 3 Zeilen auf Bl. 21 v<sup>o</sup>. Vorderseite leer. — Gedr.: Cc 2, Nr. 991.  
Cc 2, Nr. 991.

5

Datierungsgründe: Ausschlaggebend bei der Datierung erweisen sich Leibniz' Vergleiche seiner eigenen Leistungen mit denjenigen Descartes. Anfangs verweist Leibniz lediglich auf Bewertungen der Arbeiten von Descartes durch Fachkollegen (VII, 1 N. 6<sub>3</sub>, 110, 114 (= VII, 4 N. 16<sub>4</sub>); VII, 4 N. 36; VII, 7 N. 10, 11, 15) oder geht Hinweisen auf Unzulänglichkeiten des Werks nach (z. B. VII, 7 N. 48), ohne seine eigenen Beiträge zur Geometrie im Vergleich dazu einzuordnen. Mit den fortschreitenden Arbeiten zur Kreisquadratur erarbeitet Leibniz sodann ein Narrativ, in dem er seine Abweichungen gegenüber Descartes und seine Neuerungen in der Konzeption der Geometrie und der Systematisierung von Kurven durch ein Anknüpfen an andere Traditionslinien motiviert (so z. B. III, 1 N. 38, 39; VII, 3 N. 38<sub>12</sub>; VII, 4 N. 36; VII, 5 N. 26; VII, 7 N. 49; VII, 8 N. 6). Gleichzeitig vermeidet er, direkte Kritik an Descartes zu äußern, seine eigenen Leistungen explizit zu benennen oder sie gar als überlegen zu bezeichnen. Für den Sommer 1676 ist schließlich eine intensive Beschäftigung mit der inversen Tangentenmethode belegt (III, 1 N. 89; VII, 5 N. 88–91). Leibniz ist überzeugt, im Vergleich zu Descartes eine in jeder Hinsicht vorzuziehende Methode entwickelt zu haben, die insbesondere die nach allgemeiner Auffassung bestehenden *difficilia* und *impossibilia* des descartesschen Ansatzes zu lösen im Stande sein soll (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 51). Kontrastierend zur noch kurz zuvor stets sachlich formulierten inhaltlichen Kritik (z. B. VII, 6 N. 20) weist er bei der Lösung der 2. Debeauneschen Aufgabe zudem wiederholt darauf hin, dass er Descartes in der Geschwindigkeit der Lösung nun um ein Vielfaches übertreffen könne (VII, 5 N. 90, 91; VII, 6 N. 49<sub>1</sub>, 51). In der Kritik an Descartes nimmt er außerdem Gedanken aus einem wohl Ende Mai 1676 von Collins an Tschirnhaus gerichteten Brief (III, 1 N. 82) auf, die schließlich den letzten Baustein eines neuen Narrativs ausmachen. Bereits im August 1676 wird dieses durch einen Brief an Oldenburg (III, 1 N. 89) einem größeren Personenkreis sichtbar. Wenn auch deutlich weniger konkret in seiner Kritik und um vieles zurückhaltender im Tonfall, weist das vorliegende Stück eine große Übereinstimmung mit dem Grundtenor dieses neuen Narrativs auf. Zudem besteht im letzten Satz des Stücks eine Ähnlichkeit in der Formulierung mit VII, 5 N. 91 S. 605 Z. 4–6 von Juli 1676. Somit kann das vorliegende Stück mit aller Vorsicht in die Zeit von Juli 1676 bis zu Leibniz' Abreise nach England datiert werden.

10

15

20

25

30

## M e a G e o m e t r i a

Jam eo mihi videor pervenisse ut non habeam cur sim amplius de Geometria valde sollicitus. Possum nunc non minus audacter loqui quam Cartesius et fortasse majori jure. Praesertim cum absolverim quae video ei difficilia visa, et partim impossibilia.

34 absolverim | multa *gestr.* | quae *L*    34 ei (1) difficilis imposs (2) difficilia *L*

## 31. DE MACHINA COMBINATORIA, SIVE ANALYTICA

[September 1674 – Anfang 1675 (?)]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III A 26 Bl. 13. 1 Bl. 4°. 1 1/2 S. Auf Bl. 13 v<sup>o</sup> am rechten Rand unten quer geschriebene Notiz in unbekannter Hand: ad. 50. — Gedr.: COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 572 (tlw. = Z. 25–27).  
Cc 2, Nr. 818.

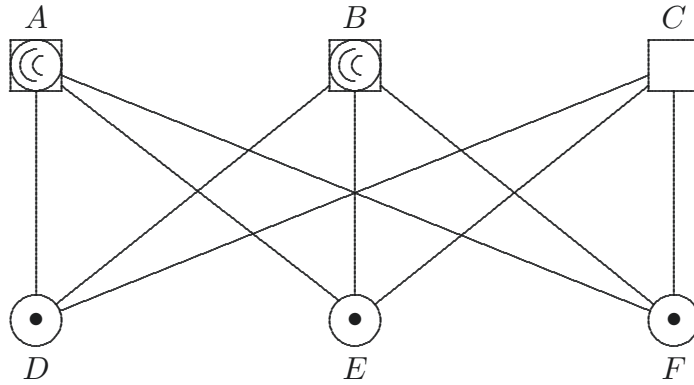
Datierungsgründe: Leibniz nutzt die Bezeichnung *Machina Analytica* erstmals in VII, 1 N. 8. Obwohl die Bezeichnung im später entstandenen Stück VI, 3 N. 44 im Desiderat einer *Machina, quae pro nobis faciat operationes analyticas*, erneut anklingt, findet sich diese oder eine andere Bezeichnung der dort beschriebenen *machina* im gesamten Stück nicht. Durch die Charakterisierung der Funktionen wird deutlich, dass VI, 3 N. 44 dieselbe *machina* wie das vorliegende Stück zum Gegenstand hat. Aufgrund der fehlenden Bezeichnung und der zugleich auftretenden Unterschiede zur in VII, 1 N. 8 benannten *Machina Analytica* kann VI, 3 N. 44 als Auftakt zur Arbeit an der im vorliegenden Stück als *Machina Analytica sive Combinatoria* titulierten *machina* gewertet werden. Die Entstehung von VI, 3 N. 44 stellt somit einen *terminus post quem* für N. 31 dar. Versteht man die Verwendung von *Machina Combinatoria* als alleinige Bezeichnung in N. 27 als Aufgabe der in VII, 1 N. 8 für eine in ihren Grundprinzipien abweichende *machina* verwendeten Bezeichnung *Machina Analytica*, um eine bessere Unterscheidbarkeit beider Ideen zu erzielen, so ist die Entstehung von N. 27 nach derjenigen von N. 31 anzusetzen. Eine solche Datierung zwischen VI, 3 N. 44 und N. 27 ist insofern stimmig, als dass Leibniz im vorliegenden Stück *signa ambigua* erwähnt, mit denen er sich im relevanten Zeitraum intensiv beschäftigt. Auch die Ausführung der Darstellungen der Kugeln im Diagramm stimmt mit der Art und Weise in anderen Handschriften derselben Zeit überein. Ebenso werden in diese Zeit Stücke datiert, in denen er sich intensiv und systematisch mit dem Lösen von Gleichungen beschäftigt und die Lösung von Systemen mehrerer Gleichungen behandelt.

Saepe cogito de Machina Combinatoria, sive Analytica, qua et calculus literalis perficiatur. Ut si sint aliquot aequationes, et totidem incognitae, id agitur ut omnes ordine incognitas tollamus usque ad unam. Omnis calculus iste redit ad additionem subtractionem Multiplicationem et divisionem.

26 ut (1) inveniamus valorem abs (2) omnes *L*

---

25 f. perficiatur: Einzelheiten eines instrumentellen Ansatzes zur Lösung desselben technischen Problems führt Leibniz in VII, 1 N. 142 aus.



[Fig. 1]

Sint plurima frusta, *A. B. C* tot scilicet quot ad summam membra habere potest calculus qui faciendus est. Haec frusta poterunt quidem facile ad numerum millenarium ascendere; pro calculis complurium incognitarum, sed et ille sufficet credo. Sint totidem globi, *D. E. F.* quot literae sive cognitae sive incognitae. Ex quolibet globo exeat filum ad quodlibet frustum, quo filo regetur forma aenea vel stannea gerens literae characterem. Cum globum tanges in omnibus frustis litera ejus apparebit, si modo omnibus frustis laxata sunt frena. Nam in quibus laxata non sunt non apparebit. Quod Elaterioli ope fieri potest, quod cedet, tunc cum totum resistet. Aliisque multis modis pro multitudine scilicet frustorum, simplicioribus: aperies autem tot frusta quot membra calculus habere debet. Imo statim ab initio utile erit plura aperire frusta pro uno eodemque calculo;

5  
10

ita ut idem membrum appareat saepius, ut si debeat multiplicari  $\begin{matrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & r \end{matrix}$ , novem

aperiantur frusta pro ipso *a* novem alia pro ipso *b*, et totidem pro *c*. Erunt ergo aperta 27 frusta nam et sub finem calculi tot erunt termini. Inde ex his frustis ipsius *a*, tria, item ex frustis ipsius *b* tria, et ex frustis ipsius *c*. itidem tria tantum aperiantur, quando trahimus globum *d*, et quando globum *e*, et quando globum *f*. Denique horum 27. frustorum triens aperietur cum tanges per *g*, et alius triens cum tanges *h*, et alius cum tanges *r*.

15

2 *A. B. C* erg. *L* 3 est, (1) sint *f* (2) Haec *L* 4 calculis (1) decem incognitarum (2) complurium *L* 6 regetur (1) character (*a*) ge (*b*) pergerens (2) forma *L* 6 gerens (1) nomin (2) nomen charact (3) literae *L* 10 membra (1) | ad nicht gestr. | rem (2) calculus *L* 12 in (1) h  
g  
(2) h, (*a*) novem (*b*) sex (*c*) novem *L* 14 a, (1) pari (2) tria, *L* 17 cum | tangens ändert Hrsg. |  
r  
h, *L*

Sed quoniam calculus ostendere potest longe post debere adhuc id ipsum multiplicari per  
 aliam quantitatem ut  $n$  tunc quilibet ex terminis prioribus, ut *aer* rursus debet triplicari,  
 vel si mavis  $m$ ,  $27^{\text{cuplari}}$ , et  $n$  itidem, et  $p$  itidem: et tunc non globos, sed frusta illa 27. in  
 quibus *adg*, *adh*, etc. trahes, horum fila ad globos respondentia, mediantibus globis rursus  
 5 trahent quidem ubique, sed non nisi apertis in locis apparebunt, ut primum in omnibus  
 27. ipsius  $m$ , post in omnibus 27 ipsius  $n$ , et denique ipsius  $p$ . In hoc ergo consistet  
 artificium potissimum, ut non tantum trahantur frusta sed et trahant. Ita enim totus  
 calculus factus momento propagari potest. Aperire frusta poterimus v. g. deprimendo  
 nonnihil, ita, ut ipsa tractura facta rursus in statum ordinarium se restituant. Signa  
 10 peculiari filo in singulis frustis repraesentari possunt, +. opus habet nullo, sed pro filo  
 – hoc fieri potest, ut bis tractu se mutet in + seu abeat, tertia tractura se restituat.  
 Idem poterit esse de quibuslibet aliis signis ambiguis litera repraesentatis. Cum idem  
 globus saepius tactus idem quoque frustum saepius trahit cum effectu fit ut in eo frusto  
 eadem litera ad plures ascendat dimensiones. Sed cum rursus ipso frusto aliud frustum  
 15 trahimus, difficile mihi videtur efficere, ut idem numerus dimensionum in frusto quoque  
 tracto sit. Et vix aliud concipi poterit medium quam hoc; ut eo ipso dum repetitis  
 initio tractionibus crevit in frusto nunc trahente literae trahendae columna. An forte  
 rectius fila plura ab eodem globo ad idem frustum ibunt parallela inter se, sed uno  
 tractu non nisi unum habebit effectum (nulla nova apertura, sed ex natura rei) et ita  
 20 unum post alterum, etsi literae non multiplicetur character forte, sed in eodem characterem  
 numerus circumgyratione quadam. Quando autem trahitur frustum non per globum sed  
 per aliud frustum, omnia fila quae in frusto trahente jam velut *c a p t a* sunt simul  
 agent, etsi globum tantum trahant, et per globum aliud frustum, plus tamen ut faciant  
 fieri potest, quam si traheret ipse globus, quia forte facere possumus, ut prolixius seu  
 25 longius vel brevius attrahatur; quam si globum manu tetigissemus. Et ita cesset artificium

1 quoniam (1) ex (2) calculus L 1 longe post *erg.* L 2 quantitatem (1) Ubi utile (2) ut (a)  
 m  
 3 (b) n L 2 ut | ael ändert Hrsq. | rursus L 4 horum (1) gl (2) fila L 4 respondentia, (1) per  
 p  
 (2) mediantibus L 5 ut (1) in (2) primum L 9 ipsa *erg.* L 9 in (1) totum (2) statum L  
 10 habet (1) 0 (2) nullo L 13 cum effectu *erg.* L 15 dimensionum *erg.* L 17 columna | ,  
 seu filum eius ita factum brevius *gestr.* | . An L 18 rectius | ut *nicht gestr.* | | filo cuilibet additum sit  
 aliud filum *gestr.* | fila L 21 quadam. (1) Ut an (2) Sed (3) Quando L 23 trahant, (1) sed p (2)  
 tamen plus (3) et L 24 si (1) traherent ipsum frustum (2) traheret L

singularitatis florum. Sed nondum satisfacit, subvenit tandem aliud artificium, nimirum globus trahit v. g. ter, literam cujusdam frusti. Ergo quaedam notae ut respondeant in frusto fieri potest. Ergo cum postea hoc frustum elevabitur filum illud transiens has notas ter vellicabitur, et ita exprimet tres dimensiones: et ita de caeteris, et hoc credo fere unicum esse remedium. 5

Porro eadem methodo etiam dividere poterimus; vel contrario motu, vel potius quia fila non possunt esse rigida atque adeo non servit regressus trahendo altius, seu longius. Sed tunc aperiemus non nisi ubi multiplicationis limitem tractio praeteriit, ne scilicet simul multiplicet et dividat.

Porro quoniam utile est non tantum conclusionem sed et vestigia calculi extare in charta, ideo impressoria arte, ex his characteribus semper exprimemus quae sunt ibi. Cum fiat, ut ex diversis multiplicationibus, idem membrum saepius conflatur, hinc facilitate opus ad ista in unum jungendum aut destruendum. Ideo jam opus esset quoad frusta, ut in plano in quo sunt moveri sibiique adjungi aut dejungi possint. Sed hoc caeterorum difficillimum, ob chordas sese implicantes. 10 15

Nota plura frusta non possunt simul elevari, alioqui idem globus simul tangeretur a pluribus quod confunderet. Nota etiam rectius deprimi quam elevari frusta.

Non ausim sperari hanc transpositionem in instrumento fieri posse.

1 satisfacit, (1) nimirum non (2) subvenit L 1 f. nimirum (1) filum (2) globus L 2 ut erg. L  
 5 fere erg. L 6 eadem (1) opera (2) methodo L 9 f. dividat. (1) Sed quoniam labor describen (2)  
 Porro L 12 multiplicationibus, (1) iidem (2) idem L 13 esset erg. L 13 f. frusta, (1) ut etsi  
 summitas eorum sit in eodem plano, alia tamen aliis profundius per descendant (2) ut L 16 possunt  
 |simuli ändert Hrsg. | elevari L

11 impressoria arte: vgl. die Überlegungen zur technischen Umsetzung einer Verbindung von Setzen und Drucken in VII, 1 N. 56.

## 32. GENERALIS DIATYPOSIS

Ende 1676

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 249. 1 Bl. 4°. 2 S. Der Träger des Stückes hing ursprünglich mit jenem von N. 39 zusammen.

5 Cc 2, Nr. 00

Sub finem anni 1676

## Generalis Diatyposis Methodorum meorum circa Mathesin puram

Methodi quas habeo sunt vel calculi, vel constructionis. Calculi initium est, ut nomina omnibus formis imponamus; ut absolvamus Tabulam formarum, et quomodo formae  
 10 ex se invicem ducantur. Tabulae multiplicationum et divisionum; tum si literae aequiformes *a. b. c.* tum si sint affecti progressionis Geometricae unius vel plurium  $a + bx + cxx$ , vel  $a + bx + cy + dxy$ , etc. Quin et Tabulae Differentiarum et Summarum ex quibus appareat quomodo plura in unum addita aliquando dent formulas satis simplices. Tabulae potestatum et regressus ex ipsis seu methodus extrahendi radices rationales, ex formulis.  
 15 Summae et differentiae potestatum. Methodi directae sunt multiplicare, exaltare, differentias invenire. Methodi recip(rocae) seu regressuum, sunt dividere, extrahere, summas invenire. Hae non semper absolvi possunt, nisi Signis praefixis. Huc pertinet quantitates in speciem impossibiles reducere ad possibiles, quando id fieri potest, vel saltem notare quod ad eas reducuntur virtualiter.

20 De Rationibus et proportionibus, item de ratione replicata et communi mensura.

7 Methodorum (1) meorum (2) meorum *L* 7f. puram (1) Sunt |Methodi, *erg.*| vel Calculi vel Constructiones. Et co (2) Methodi . . . sunt vel (a) communes Numeris et lineis, vel propriae (aa) lineis (bb) Numeris, vel proprii (b) calculi, vel constructionis. (aa) Calculus (bb) Calculi *L* 9 imponamus; (1) quod ostendi (2) ut . . . formarum; (a) Calculus directus (b) et quomodo *L* 10f. multiplicationum (1) et (a) formae (b) potestatum formulae; (2) et divisionum; . . . aequiformes (a), tum si sint affecti ejus (b) a. b. c. *L* 12 Tabulae (1) Summarum, seu quae (2) Differentiarum *L* 13 simplices. (1) (Calculus regressus) (2) quorsum et Differentialia (3) Tabulae *L* 15 exaltare (1) reciproce, dividere (2), differentias *L* 16 seu regressuum *erg.* *L*



De aequationibus et aequationum radicibus, seu radicibus affectis, et quando exacte extrahi possunt. De Resolvendo et ejus resolutione. De aliis resolvendi modis per extractiones utrinque. De extractionibus vel exactis vel per seriem infinitam, qualis et in potestatibus puris succedit. De aequationibus aequationem propositam dividendis, de radicibus aequalibus. De uniformiter crescentibus aliisque. De aequationibus plurium incognitarum. Et primum fingendo eandem literam velut diversam, ita ut omnia reducantur ad aequationes rectangulares simplices quae si incompletae videndum quomodo suppleri possint. Hac methodo videtur compendiose obtineri posse resolutio aequationum, seu reductio radicum affectarum ad puras. Ordinaria vero methodus tollendi incognitas in eo consistit, ut semper exaltetur aequatio multiplicando eam per literam tollendam. Et omnes exaltatas componendo inter se, ut tollantur ordine potentiae altiores omnes. Methodus investigandi generalia pro seriebus indefinitis. Quod fit gradatim ascendendo ut obtineatur progressio. Hoc jam ante opus ad resolutiones aequationum unius incognitae. Methodus tollendi incognitam unam ex aequationibus duabus duarum incognitarum, coincidit cum extractione radice per seriem infinitam tum scilicet tantum valor purus invenitur. Promovendus gradus ad tollendas incognitas plurium aequationum. Et inveniendos valores puros. Habita Tabula Tollendarum incognitarum, prope omnis calculus Algebraicus in potestate est, terminos Tabulae tantum explicando in nostris exemplis. Hinc jam veniendum ad methodum tollendi irrationales; et quomodo aequationis radix irrationalis exprimi possit per formulam. Jam veniendum ad problemata diophantea pro integris et pro numeris rationalibus. Et duplex solvendi methodus, una qua usu sum pro

1 aequationibus et (1) aequalis (2) aequationum divisoribus, et quando (3) radicibus, L 3f. de extractionibus... succedit *erg. L* 5 aliisque. (1) De Methodo tollendi (2) de aequationibus L 10 tollendam *erg. L* 11 omnes. | Hac methodo etiam extrahitur radix pro seriebus infini *erg. u. wieder gestr.* | Methodus L 15f. tum... invenitur *erg. L* 16 tollendas (1) aequatio (2) incognitarum (3) incognitas L 18 est, (1) (Tabulas) (2) terminos Tabulae tantum (a) exprimendo (b) explicando L 19f. quomodo (1) aequatio quae radices rationales non habet (2) aequationis L 20 formulam. (1) Item (a) (quo) (b) de modo (aeqv) (2) Jam L 21 rationalibus *erg. L*

20 problemata diophantea: Leibniz scheint sich vor allem im Zeitraum von August bis Oktober 1674 intensiver mit diophantischen Gleichungen beschäftigt zu haben (vgl. VII 1, S. 468). Sie sind der Gegenstand einer Reihe an Stücken, die in VII, 1 gedruckt sind. So untersucht er dort in N. 116–124 Methoden, um diophantische Gleichungen zweiten Grades mit zwei Unbekannten in ganzen und in rationalen Zahlen zu lösen. In N. 116 behandelt er dabei auf S. 715 insbesondere auch ihre Beziehung zu Kegelschnitten.

reducenda novissime Curva Conica ad Quadraturam rationalem; altera, reducendi rem ad integros, et integros, exhibendo, donec ex progressionem aliorum semper minorum integrorum necessaria, appareat in integris solvi non posse. De divisibilibus, de Numeris primitivis, ubi methodus mea ex progressionem Geometrica inveniendi an datus numerus sit primitivus, aut quos habeat divisores. De summis numerorum, ubi de Numeris Combinatoriis. Item de Methodo pro summis ex summis radicum aequationibus, et re-  
 5 tangulorum, nam et summae re- tangulorum ex potestatum summis; et ex summis re- tangulorum, caeterarum formularum eodem modo compositarum omnium. De summis quantitatibus ex progressionem Geometrica derivatarum, id est <cum> Abscissae progres-  
 10 sionis Geometricae, quaeritur summa ordinatarum. Item pro progressionem Arithmetica, ubi est utile, procedere per  $x - 1$ ,  $x$ ,  $x + 1$ . De calculo differentiali serierum; seu ex data differentiarum proprietate invenire seriem. Quo pertinet inventio summarum. Ostensio quod quaedam talia Algebraice impossibilia exhiberi. De serierum Terminationibus et duarum serierum Concursu. De seriebus replicatis. Cum seriei progressio determinatur  
 15 per Terminos praecedentes. De quantitatibus in quibus exponens indeterminata ingreditur exponentem, de tollenda incognita ex exponente per seriem infinitam. De modo reducendi series infinitas ad finitas, quando id licet. Sive de modo agnoscendi quando series infinita sit reducibilis ad aequationem finitam, vel algebraicam vel transcendentem. Item quia omnia problemata in non transcendentibus terminis concepta, revera  
 20 tamen transcendentia reduci possunt ad summam seriei infinitae absolutae, vel terminationem Concursumve cum alia seriei replicatae; potest semper fingi aequatio homoptotos ad aliquam Parametrum, vel etiam aequatio cujus differentialis sit data. Restat duplex Methodus pro exhibendis optime quantitatibus determinatis, v. g. ratione Circuli ad qua-

2 ad integros, et (1) solvendo in integris (2) integros L 7 nam (1) ex summis, re- tangulorum et (2) et summae L 9 f. id est <cum> (1) Numeri (2) Term (3) Abscissae progressionis (a) Arithmeticae (b) Geometricae L 11 ubi (1) opus est consc (2) est utile L 13 talia erg. L 13 exhiberi. (1) De Quantitatibus Transcendentibus (2) | de nicht gestr. | quantitatibus (3) de serierum L 14 Concursu |, seu gestr. | de seriebus L 14 Cum (1) series dantur supponendo (2) seriei L 15 indeterminata (1) oritur (2) ingreditur L 18 aequationem (1) incog (2) finitam L 21 aequatio (1) <homoeoptotis> (2) <homoeoptotis>, seu (3) homioptotos (4) homoptotos L 22 Restat (1) una (2) duplex L

---

1 reducenda: Vgl. VII, 6 N. 31 S. 368 u. N. 51 S. 618–621 (Quadratura prop. 43 sowie Scholium).  
 3 De divisibilibus: Vgl. VII, 1 N. 86–92. 21 homoptotos: Es handelt sich um eine spezielle Kurve; vgl. VII, 1 N. 61 S. 61 Z. 18–21.

dratum circumscriptum, quae determinat etiam, utrum sit possibile exhibere per finitam Algebraicam, et una quidem est per quotientes replicatos, ubi semel habebitur methodus, et contra inveniendi quotientes replicatos ex data aequatione, et contra ab aequatione ad series replicatas regrediendi. Altera methodus non minus determinata, sed ad praxin utilior, est reducere ad infinitos terminos progressionis Geometricae, vel bimalis, quod 5 simplicissimum vel alterius, ut decimalis. Sed optimum erit loco decimalium sumere bimalis potentias, ut octonariam vel sedecimalem progressionem; vel etiam altiorum; et has unius ejusdemque progressionis progressionem conferre inter se. Hac ratione exprimantur omnes quantitates, quarum in praxi usus. Hinc quia omnis fractio exprimitur per seriem infinitam terminorum ex progressionem Geometricam excerptorum periodicam, investiganda 10 periodus, quam et jam inveni, et ope considerationis primitivorum, referendo ad divisiones terminorum progressionis Geometricae. Eodem modo progressio pro irrationalibus investiganda, ubi est periodi alteratio aliqua perpetua. Et hinc pro omnibus aequationibus algebraicis, denique pro transcendentibus. Hic methodus duplex calculandi, una admodum exotica nec dum satis excussa, per perpetuas Alternativas; altera per egregium 15 compendium additionis characterum, cujus occasionem dedit Examen abjectionis Novenarii. Cum enim summa characterum certa lege inita, numeri divisibilis per alium; sit divisibilis per summam characterum, eadem lege initam numeri divisoris. Et quae in unum addita aliquid componunt, eorum characterum summae etiam characterum alterius summam, eodem modo componant; hinc cum idem incognitum, ex diversis modis 20

2f. replicatos, (1) exhib (2) ubi ... methodus (a) ex qvotientibus replicatis regrediendi ad aequationes (b), et contra (aa) ex his datis (bb) inveniendi (aaa) per (bbb) Qvotientes L 7 etiam (1) progressionem (2) altiorum L 9 omnes (1) Numeri (2) qvantitates L 9 usus. (1) (Hinc vel) (2) Hic opus <ex-> <inv> (3) Hinc L 10 infinitam (1) geometrice (2) geometric<am vel> periodicam (3) terminorum (a) progressionis (b) ex progressionem L 11 inveni (1) ope divisionis et considerationis (2), et ope L 13 Et (1) deniqve (2) hinc L 14 Hic (1) egregius da (2) egregia (3) methodus L 14f. calculandi, (1) ali<us> admodum exoticus (a) per (b) nec dum satis excussus (2) una L 16f. dedit (1) proba (2) Examen abjectionis Novenarij. (a) Hac Methodo si tot hab (b) Cum L 17 characterum (1) certo modo (2) certa lege inita, (a) aeqvatur (b) numeri L 18 divisoris. (1) Hinc si idem numerus ex pluribus dividi possit, vel eo (2) Hin (3) Et si duo characteres summentur (4) Et aequalium characterum (5) Et qvae L 19 eorum (1) summae etiam characteres (2) characterum L 20 idem (1) incognitis, (2) incognitum, ex (a) pluribus cognitis (b) diversis L

---

16 compendium: Vgl. VII, 5 N. 7, insbesondere S. 58.

ex cognitis componi possit, certa quadam lege variationis servata, hinc si finiti ejus characteres (quod fit reductis omnibus ad integros rationales, si quidem quaesitum haberi potest) finito numero compositionum determinabuntur, sin vero infiniti, etiam infinitis modis variandum erit, servata certa progressionem, donec habeatur characterum progressio. Caeterum est et alia Methodus pro inveniendis quaesitis determinatis per radicem aequationis Algebraicae (vel transcendentis) finitae quando id fieri potest. Si id quod quaeritur determinatum habeatur per aequationem infinitam pluribus communem; seu duarum incognitarum, et deinde fingatur adhuc nova aequatio duarum incognitarum; et harum duarum aequatione tollatur una incognita, quod si jam alterius incognitae valor inde haberi potest per seriem finitam, explicando arbitrariam sic, ut progressio terminetur; habebitur quaesitum. Sin minus seu id impossibile demonstratur, tunc etiam impossibile est reduci id quod quaeritur ad aequationem finitam algebraicam.

Haec methodus serviet etiam ad altiora; pro aequationibus duarum incognitarum infinitis, reducendo ad aequationes duarum incognitarum finitas, quando id fieri potest. Nimirum aequatio duarum incognitarum quaesita revocetur ad aequationes duas infinitas trium incognitarum, ipsam determinantes, seu a loco ad lineam, ad locum ad superficiem. Et fingendo aequationem finitam etiam trium incognitarum, harum trium aequationum ope, eam conferendo cum una infinitarum inveniatur aequatio finita duarum incognitarum, et conjungendo cum altera infinitarum debet prodire aequatio finita duarum incognitarum eadem quae ante.

Applicatio hujus calculi ad Geometriam sequitur, et quae in lineis propria. Et primum methodus generalis problemata Geometri[c]a revocandi ad calculum, hoc fit tot sumendo aequationes quot sunt loca, quorum intersectione habetur quaesitum. Demonstrationes habebuntur optime aequationes revocando ad lineas rectas et earum rationes quod semper fieri potest, perpetuo triangula similia adhibendo. Omnis formula enim hoc modo considerari potest quasi compositum ex lineis rectis. Constructio quaerenda per

1 f. characteres (1) vel periodici; hinc (2) (quod L 4 f. progressio. (1) Est et ali (2) Caeterum L  
6 potest. (1) Nimirum, v. g. si quaerat (2) Si id L 7 communem; (1) et deinde fingatur aequatio  
nova (2) seu duarum L 9 et (1) huius ope (2) harum (a) tollarum op (b) duarum aequatione (aa)  
toll (bb) tollunt unam incognitam (cc) tollatur L 10 finitam, (1) sumendo ar (2) explicando L  
15 Nimirum (1) fingatur (2) fingantur (3) aequatio L 18 ope, (1) toll (2) eam L 18 aequatio (1)  
infinita trium (2) finita duarum incognitarum, (a) quam jungendo (aa) cum (bb) ipsa fict(a) habebitur  
aequatio duarum incognitarum, finita quaesita, (b) et conjungendo L 19 aequatio (1) infinita eadem  
(2) finita L 22 fit (1) per intersec (2) tot L 24 optime (1) rationes (2) aequationes L

locorum intersectiones: De variis modis exhibendi loca, imprimis loca ad Circulum, rectam, et Conicas. De locis ad superficiem et horum intersectionibus. Quomodo sciatur gradus problematis propositi; si planum est quomodo optime per rectam et circulum vel plures rectas pluresque circulos, praeparatorios, qui denique ultimos circulos producant ultimas rectas, construere, construi possit. Ubi enumerationes omnes posibles habentur, et ex illis seligi possunt optima. Idem pro Conicis utilem pro altioribus non est operae pretium. De modo seligendi incognitas quas quaeri utile est, de modo revocandi problema ad loca plura, libere seu a se invicem independenter enuntiata. De catalogo curvarum; de modo eas describendi per organa apta. De generali descriptione curvarum per intersectionem duarum rectarum parallele diversimode motarum, de aliis curvas describendi modis. De focus. De Tangentibus curvarum, et de proprietatibus earum conferendo ipsarum diversas ordinatas inter se. Ubi et de proprietatibus paradoxis, seu quae an posibles sint magna dubitandi ratio est, donec contrarium appareat. Tangentes respondent differentiis, de calculo differentiali seu de tangentibus, vel de angulis curvae. De Curvedine seu quantitate anguli contactus plane nova, aliaque universalia. De curvarum proprietatibus, ut de earum parallelismo. De quadraturis et summis. De quadraturarum aliarum reductione ad rationales, et de rationalium gradibus, et quomodo ad Hyperbolas imaginarias reducantur, et videndum an res ita semper redeat ad Logarithmos. De curvis transcendentibus, et earum tangentibus mira. De calculi differentialis theorematibus generalibus. De summis summarum et differentialibus differentialium. Semper tolli possunt summae, ut maneant solae differentiae. De variis aequationibus differentialibus

2 horum (1) intersectionis (2) intersectionibus. (a) Geometria (in) (b) (de lo) (c) de ae (d) quomodo L 4 f. denique (1) ultimum circulum (2) ultimos circulos producant (a) ultimam rectam, constructam, pro (b) ultimas L 8 enuntiata. (1) De curvilineo (2) De curvarum tangentibus seu differentiis (a) seu de modo (b) seu de collatione ordinarum ejusdem (3) De catalogo L 9 De generali (1) conside (2) descriptione L 10 diversimode (1) mod(o) (2) motarum L 13 f. appareat (1) de mod (2) Tangentes respondent differentiis, de (a) modo ex (b) calculo differentiali seu de (aa) modo ex data tangentium proprietate inveniendi curvam, seu ex angulo eius. (bb) tangentibus. (aaa) et (bbb) est (ccc) vel de (aaaa) angulo curvae (bbbbb) angulis curvae. L 16 ut erg. L 19 mira (1); et Quomodo differentiale (2). De calculi L

---

11 De focus: Vgl. VII, 7 N. 33. 15 Curvedine: Vgl. VII, 1 N. 32. 16 parallelismo: Vgl. VII, 7 N. 53 u. 54. 16 De quadraturis et summis: Vgl. VII, 3 N. 38. 17 f. Hyperbolas: Vgl. VII, 7 N. 58. 18 f. De curvis transcendentibus: Vgl. deren Behandlung in VII, 6 N. 51 sowie in VII, 7 N. 49.

ex eadem aequatione ducibilibus. Si aequatione differentiali data quaeratur ejus summa-  
 trix seu absoluta, id fieri potest pluribus modis, unus est reducendo ad seriem infinitam,  
 quod semper fieri potest, et tunc quaerenda infinitae reductio ad finitam methodo supra  
 dicta. Quaerenda tamen methodus esset serierum infinitarum se cum licet finientium.

5 Alius modus est effingendo seriem absolutam quasi jam habitam, sive algebraicam sive  
 transcendentem, et inde ducendo differentialem, ea combinetur cum data differentiali et  
 sublatis differentialibus. Habebitur denique absoluta adhuc semel, quae coincidere debet  
 cum efficta. Alius modus pro quadraturis est specialiter per polygona; ubi res redit ad se-  
 riem replicatam terminorum finitas differentias habentium. Et quaerenda est parameter  
 10 et aequatio seriei absoluta vel algebraice vel transcendentem; sed ut terminatio invenia-  
 tur alia methodus certo analytica haec est, si diversis methodis infinitis polygonorum  
 progressionem sumendo quaeratur calculus generalis progressionem exhibens variis gradis  
 communis, et tunc ipsam incognitam plerumque in exponentem ingredientem, licebit pro  
 arbitrio sic explicare.

15 Nondum hic egi de mirabili nova characteristicam geometriae, qua omnia effici possunt  
 quae calculo, sic ut characteres perpetuo, situm et motum expriment. Hoc admirandi usus  
 pro Machinis inveniendis, et machinis a natura adhibitis divinandis.

Utile adhiberi semper eas series, quae, si finibiles, se ipsas finiunt ut idem ex ter-  
 minis primis fiat quod ex secundis. Haec methodus incognitas absolute transcendentem  
 20 exhibet, etiam incognitas determinatas, et ejus quoque ope inveniri poterit, an aliquando  
 aequatio determinata transcendens solubilis in numeris. Constructio transcendentium,  
 motu curvarum materialium se rectis <vel> aliis curvis applicantium. Fingantur aequatio-  
 nes plurium incognitarum plures; et ponendo quasdam incognitas esse curvas. Assumta  
 curva algebraica generali et substituendo differentias in differentialibus, ut obtineatur  
 25 differentialis data.

1 aequatione (1) ducibilis (2) ducibilibus. (a) Data (b) Si L 3 tunc (1) methodo sae (2) quae-  
 renda L 5 sive (1) simpliciter Tran (2) algebraicam L 8 f. seriem (1) finitam (2) replicatam L  
 10 absoluta (1). Quae si (2) vel L 10 transcendentem; (1) si (2) vel etiam (3) sed L 20 an | an  
*streich* Hrsq. | aliquando (1) expo (2) problema transcendens solubile (3) aequatio L 22 applicantium.  
 (1) Fingatur aequatio generalis (2) Fingantur L

---

8 f. seriem replicatam: Vgl. VII, 4 N. 40.

15 nova characteristicam geometriae: Vgl. VII, 1 N. 9.

## 33. PASCALII FRAGMENTUM

[4. Juni 1675 – Januar 1676]

**Überlieferung:**

- L* Abschrift nach einer nicht mehr vorhandenen Vorlage: LH 35 XV 1 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1  $\frac{1}{4}$  S.  
(Unsere Druckvorlage.) 5
- A* Abschrift in der Hand von P. Guerrier nach nicht mehr vorhandenen Vorlagen: Premier Recueil Guerrier, n° 66, S. 232–234 (Privatbesitz).
- E* Erstdruck nach *A*: PASCAL, *Oeuvres complètes* (Bossut), Bd IV, 1779, S. 408–411. — Weitere Drucke: 1. PASCAL, *Oeuvres. Nouvelle Édition* (Lefèvre), Bd IV, 1819, S. 356 bis 359; 2. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Hachette), Bd III, 1864 u. ö., S. 219 f. — Drucke nach *L* und *E*: 3. PASCAL, *PO* III, 1908, S. 305–308; 4. (mit frz. Übers.) PASCAL, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S. 71–74, S. 1402–1404; 5. (mit frz. Übers.) PASCAL, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S. 101–103. — Druck nach *L* und *A*: 6. (mit franz. Übers.) PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, 1970, S. 1031–1035. — Weitere Drucke: 7. (mit frz. Übers.) PASCAL, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd I, 1998, S. 169 bis 173; 8. (mit dt. Übers.) *Pascal im Kontext*, 2006; 9. (mit ital. Übers.) PASCAL, *Opere Complete* (Romeo), 2020, S. 344–347. 10  
Cc 2, Nr. 1500 A 15

Datierungsgründe: Leibniz bestätigt am 4. Juni 1675 den Erhalt von Pascal-Handschriften (vgl. III, 1 N. 53, S. 253). In diesem Konvolut befand sich auch die Vorlage für unser Stück, wie aus Leibniz' Brief an H. Oldenburg vom 12. Juni 1675 hervorgeht (vgl. III, 1 N. 55, S. 255 f.). Leibniz erwähnt an dieser Stelle auch, dass er nach Rückgabe dieser Handschriften Manuskripte Pascals zu den Kegelschnitten erhalten werde. Am 28. Dezember 1675 schreibt Leibniz an Oldenburg, dass er demnächst weitere Handschriften von Pascal bekommen werde (III, 1 N. 70, S. 329). Aus der Datierung der Gesprächsaufzeichnung *Hexagrammum Pascalianum* (VII, 7 N. 61, S. 576) geht hervor, dass Leibniz die Manuskripte zu den Kegelschnitten spätestens im Januar 1676 zur Verfügung hatte. Die vorliegende Abschrift müsste folglich zwischen dem 4. Juni 1675 und Januar 1676 verfasst worden sein. — Eine detaillierte Untersuchung der Schrift von Pascal findet sich bei TATON, *L'oeuvre de Pascal en géométrie projective*, 1964; vgl. ebenso den ausführlichen Kommentar in PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), II, 1970, S. 1021–1031. 20  
25

P a s c a l i i f r a g m e n t u m  
C e l e b e r r i m i s M a t h e s e o s p r o f e s s o r i b u s :

Haec vobis, doctissimi ac celeberrimi viri, aut dono, aut reddo; vestra enim esse fateor, quae non nisi inter vos educatus mea fecissem, propria autem agnosco, quae adeo  
5 praecellentibus Geometris indigna video. Vobis enim non nisi magna et egregie demonstrata placent. Paucis vero genium audax inventionis; paucioribus (uti reor) genium elegans demonstrationis; paucissimis utrumque. Silerem itaque nihil vobis congruum habens nisi ea benignitas quae me a junioribus annis in erudito Lyceo sustinuit, et haec oblata qualiacunque sint exciperet.

10 Horum opusculorum primum magna ex parte agit de ambitibus, seu peripheriis numerorum quadratorum, cuborum, quadrato-quadratorum et in quocunque gradu constitutorum; et ideo de n u m e r i c a r u m p o t e s t a t u m a m b i t i b u s inscribitur.

Secundum circa n u m e r o s a l i o r u m m u l t i p l i c e s versatur, et ut ex sola additione characterum agnoscantur, methodum tradit.

15 Deinceps autem si juvat Deus prodibunt et alii tractatus, quos omnino paratos habemus, et quorum sequuntur tituli:

De n u m e r i s m a g i c o - m a g i c i s seu methodus ordinandi numeros omnes in quadrato-numero contentos, ita ut non solum quadratus totus sit magicus, sed et quod difficilius sane est, ut ablatis singulis ambitibus reliquum semper magicum remaneat,  
20 idque omnibus modis possibilibus, nullo omisso.

1 P a s c a l i i f r a g m e n t u m e r g . L

---

2 M a t h e s e o s p r o f e s s o r i b u s : Nach den Recherchen von J. Mesnard dürfte damit der Kreis von Mathematikern gemeint sein, der sich bis 1654 regelmäßig bei J. Le Pailleur versammelte (vgl. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), II, 1970, S. 1022 f.). 10 primum: Vgl. Bl. PASCAL, *Potestatum numericarum summa*, 1665, sowie die Marginalie in N. 41<sub>5</sub>. 13 Secundum: Vgl. Bl. PASCAL, *De numeris multiplicibus*, 1665, sowie die Marginalie in N. 41<sub>6</sub>. 17 De n u m e r i s m a g i c o - m a g i c i s : Zum Druck der Bl. Pascal zugeschriebenen Schrift *Solution d'un des plus célèbres et de plus difficiles problèmes d'arithmétique, appelé communément les quarrés magiques* vgl. A. ARNAULD, *Nouveaux Éléments de Géométrie*, 1667, S. 327–340 (PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), IV, 1992, S. 1586 bis 1600).



Promotus Apollonius Gallus id est Tactiones Circulares, non solum quales veteribus notae et a Vieta restitutae, sed et adeo ulterius promotae, ut vix eundem patiantur titulum.

Tactiones sphaericae pari amplitudine dilatae quippe eadem methodo tractatae. Utrarumque autem methodus singula earum problemata per plana resolvens, ex singulari Conicarum sectionum proprietate oritur, quae aliis multis difficillimis problematis succurrit, et vix unam adimplet paginam. 5

Tactiones etiam conicae, ubi ex quinque punctis et quinque rectis datis quinque quibuslibet  $\langle \text{---} \rangle$  Conisection  $\langle \text{---} \rangle$  quae data  $\langle \text{---} \rangle$

Loci solidi cum omnibus casibus et omni ex parte absolutissimi. 10

Loci plani, non solum illi quos a veteribus tempus abripuit, nec solum illi quos his restitutis perillustris hujus aevi geometra subjunxit sed et alii huc usque non noti, utrosque complectentes, et multo latius exuberantes, methodo ut conjicere est omnino nova, quippe nova praestante, via tamen longe breviori.

Conicorum opus completum, et Conica Apollonii et alia innumera unica fere propositione amplectens, quod quidem nondum sedecimum aetatis annum assecutus ex-cogitavi et deinde in ordinem congeffi. 15

Perspectivae Methodus qua nec inter inventas, nec inter inventu posibles ulla compendiosior esse videtur, quippe quae puncta ichnographica per duarum solummodo rectarum intersectionem praestet, quo sane nihil brevius esse potest. 20

1–8 Promotus ... conicae: Zur Auseinandersetzung von Pascal mit den bei PAPPOS, *Mathematicae collectiones*, Buch II, überlieferten Hinweisen auf APOLLONIOS, *Tactiones*, und die erweiterte Behandlung in Fr. VIÈTE, *Apollonius Gallus*, 1600 (VO S. 325–346), sowie mit den in der Folge genannten Problemen vgl. den Brief von Pascal an P. de Fermat vom 29. Juli 1654 (PO III, S. 375–393).

8–10 Tactiones ... absolutissimi: Zu Leibniz' Nennung der Schriften von Pascal vgl. seinen Brief an É. Périer vom 30. August 1676 (III, 1 N. 90). 9 quibuslibet: Leibniz hat im folgenden Text drei Lücken gelassen, die auch in der Abschrift von Guerrier dokumentiert sind; vgl. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, S. 1035.

11 Loci plani: Vgl. die Hinweise auf Pascals Methode im Brief von R.-Fr. de Sluse an C. Brunetti vom Oktober 1657 (PO VII, S. 243–245). 12 perillustris ... geometra: Gemeint ist P. de Fermat. 15 Conicorum ... completum: Vgl. VII, 7 N. 60–64 u. N. 72 sowie den bereits erwähnten Brief von Leibniz an É. Périer vom 30. August 1676 (III, 1 N. 90).

15 Conica Apollonii: APOLLONIOS, *Conica*.

Novissima autem ac penitus intentatae materiae tractatio scilicet de compositione  
aleae in ludis ipsi subjectis, quod Gallico nostro idiomate dicitur (*faire les partys des  
jeux*) ubi anceps fortuna aequitate rationis ita reprimitur, ut utrique lusorum quod jure  
competit, exacte semper assignetur. Quod quidem eo fortius ratiocinando quaerendum  
5 est quo minus tentando investigari possit. Ambiguae enim sortis eventus fortuitae con-  
tingentiae potius quam naturali necessitati merito tribuuntur. Ideo res hactenus erravit  
incerta, nunc autem quae experimento rebellis fuit, rationis dominium effugere non po-  
tuit. Eam quippe tanta securitate in artem per Geometriam reduximus, ut certitudinis  
ejus particeps facta jam audacter prodeat, et sic matheseos demonstrationes cum aleae  
10 incertitudine jungendo, et quae contraria videntur conciliando ab utraque nominationem  
suam accipiens, stupendum hunc titulum jure sibi arrogat aleae Geometria.

Non de Gnomonica loquor nec de innumeris miscellaneis, quae satis in promptu habeo,  
verum nec parata nec parari digna.

De Vacuo quoque subticeo, quippe brevi typis mandandum, et non tantum vobis  
15 ut ista, sed et cunctis proditurum, non tamen sine nutu vestro, quem si mereatur nihil  
metuendum; quod equidem aliquando alias expertus sum, maximo in instrumento illo  
Arithmetico, quod timidus inveneram, et vobis hortantibus exponens, agnovi approba-  
tionis vestrae pondus.

---

14 *Über* vobis: NB.

1 penitus (1) intractatae (2) intentatae L    4 exacte (1) ubique (2) semper L    7 incerta, (1)  
ideo quae (2) nunc L    15 mereatur *gestr.* L, *erg. Hrsq.*

---

1–3 compositione ... *jeux*: Vgl. hierzu Pascal an P. de Fermat vom 20. Juli 1654, vom 24. August  
1654 und vom 27. Oktober 1654 (PO III, S. 375–393, S. 399–412, S. 429) sowie die posthum erschienene  
Abhandlung *Usage du Triangle Arithmétique pour déterminer les partis qu'on doit faire entre deux  
joueurs qui jouent en plusieurs parties*, 1665 (PO III, S. 478–498).    2 partys: Mit dieser Frage befasst  
sich Leibniz in N. 7, abgefasst am 7. Januar 1676.    14 De Vacuo ... mandandum: Eine wohl bereits  
1651 fertig gestellte Abhandlung über das Vakuum (*Traité du Vide*) ist in dieser Form nicht gedruckt  
worden. Seine einschlägigen Forschungen sind posthum erschienen in Bl. PASCAL, *Traité de l'équilibre  
des liqueurs et de la pesanteur de la masse de l'air*, 1663 (PO III, S. 143–292).    16 instrumento: Das  
erste Exemplar einer von Pascal entworfenen Zweispezies-Rechenmaschine stammt von 1642, vgl. hierzu  
ausführlich R. TATON, *Sur l'invention de la machine arithmétique*, in: P. COSTABEL [u. a.], *L'oeuvre  
scientifique de Pascal*, Paris 1964, S. 207–228.

Illi sunt Geometriae nostrae maturi fructus, felices et immane lucrum facturi, si hos impertiendo quosdam ex vestris reportemus.

Datum Parisiis, 1654.

B. Pascal.

3 1654. (1) B. Pascalius (2) B. Pascal. *L*

## 34. EXTRAIT D'UN FRAGMENT DE PASCAL

[Januar – September 1676 (?)]

**Überlieferung:** *L* Abschrift einer nicht aufgefundenen Vorlage: LH 35 XV 1 Bl.13. 1 Bl. 4°. 1 S. — Gedr.: 1. GERHARDT, *Desargues und Pascal*, 1892, S.202–204; 2. *PO IX*, 1914, S.291–294; 3. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S.602–604; 4. ITARD, *L'introduction*, 1962, S.269–286, Faksimile S.276–277; 5. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S.359; 6. ITARD, *L'introduction*, 1962, S.270–272, Faksimile S.276–277; Nachdruck, 1964, S.103–107, Faksimile S.104–105; 7. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S.435–437; 8. (dt. Übers., teilw.) ZWIERLEIN, *Pascal*, 1997, S.126–128; 9. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Le Guern), I, 1998, S.140–142, 1041–1042; 10. DESCOTES, *Géométries de Port-Royal*, 2009, S.85–90; 11. (mit ital. Übers.) PASCAL, *Opere complete* (Romeo), 2020, S.278–283.  
Cc 2, Nr. 1501

Datierungsgründe: Leibniz hat G. Filleau des Billettes vermutlich bereits 1672 kennengelernt. 1679 erinnert er sich in einem Brief an N. Malebranche (II, 1 N. 207, S. 724 f.), dass er A. Arnauld und Filleau des Billettes „un petit dialogue“ gezeigt habe. Es handelt sich dabei mit Sicherheit um die *Confessio philosophi* (VI, 3 N. 7), von der er im November/Dezember 1672 eine Reinschrift anfertigen ließ. In der *Theodicée* erwähnt Leibniz, dass er Arnauld die *Confessio philosophi* ungefähr 1673 gegeben hatte (*Theodicée* Praef., GERHARDT, *Phil. Schr.* 6, S. 43). Filleau des Billettes lebte im Haus von Arnauld. Unter den Schriften von Pascal aus dem Besitz von Arnauld befinden sich auch Abschriften von der Hand Filleau des Billettes' (vgl. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard), III, 1991, S. 430). Leibniz hat Pascals Handschriften zu den Kegelschnitten im Januar 1676 von E. Périer erhalten und im August zurückgegeben, nachdem er Exzerpte daraus angefertigt hatte. Falls die Bemerkung am oberen Rand zu diesen Exzerpten nicht wesentlich später entstanden ist als die vorliegende Abschrift, hat Leibniz letztere nicht vor Januar 1676 angefertigt.

Extrait d'un Fragment de l'Introduction  
à la Geometrie de Mons. Pascal,  
que Mons. des Billets m'a communiqué

Premiers principes et definitions

Principe 1. L'objet de la pure Geometrie est l'espace, dont elle considere 5  
la triple étendue en trois sens divers qu'on appelle dimensions, les quelles on distingue par  
les noms de longueur [,] largeur et profondeur en donnant indifferemment  
chacun de ce noms à chacune de ces dimensions, pourveu qu'on ne donne pas le même à  
deux ensemble. Elle suppose que tous ces termes là sont connus d'eux mêmes.

[+ Etendu est ce qui a des parties sensibles tout à la fois. Partie est une 10  
chose la quelle avec une autre chose; est le même qu'une troisieme que nous appellons  
Tout. Successif est ce qui a toutes ses parties Sensibles, en autant de temps  
differens. L'espace est une chose étendue et rien d'avantage. Un corps est une  
chose estendue capable d'agir. Agir est estre cause d'un changement. Cause est  
une chose prise dans un certain estat dans le quel elle ne peut estre sans qu'une autre 15  
arrive; et peut estre entendue parfaitement avant l'autre. L'autre s'appelle l'effect.  
Ou: *Effectus est, quicquid sequitur alio posito, et est natura posterius ipso. Natura  
prius est, quod ante alterum perfecte intelligi potest.* Deux choses sont continües

---

1–3 *Am oberen Rand: Alia Pascalii vide in Conicis.*

1 Extrait ... de l' *erg. L* 9f. mêmes. [+ (1) l'espace est (a) une chose etendue d'un  
certain (b) un lieu etendu (aa) d'un certain point (bb) d'une partie en tous sens; ou c'est un lieu (aaa)  
dans lequel un point peut estre pris et (bbb) qui a des parties (aaaa) de tous (bbbb) en tous sens, d'un  
point qui y peut estre pris. (2) Etendu *L* 13 differens. (1) Le lieu (2) L'espace *L*  
14 estendue (1) sensible. (2) capable *L* 14 Agir est (1) causer *nicht gestr.* (2) estre cause d' *L*  
15 chose (1), dont (a) une certaine qualité estant (b) un certain mode est (2) la quelle prise d'un (3)  
prise *L* 15f. autre (1) s'vit aussi en même temps (2) arrive *L* 18 prius | posterius *ve*  
*gestr.* | est, ... potest |, aut non potest *gestr.* | Deux *L*

---

1,19 *Alia ... Conicis: Vgl. VII, 7 N. 60–64 u. 72. 10–204,4 [+ ...]: Die eckigen Klammern  
stammen von Leibniz.*

quand elles ont une partie commune. Le Lieu est une chose dont l'espace a une partie qui est la même avec l'espace d'une autre chose. L'espace d'une chose est dont l'étendue est égale et semblable à celle de la chose; et chaque partie de l'une de ces étendues est apperçue avec chaque partie de l'autre.]

5 Princip. 2. L'espace est infini selon toutes les dimensions.

Princip. 3. Et immobile en tout et en chacune de ses parties.

Definition du corps Geometrique de la surface, de la ligne, du point, Princip. 4. 5. 6.

Princip. 7. Les poincts ne different que de situation; 8. les lignes de situation, de grandeur, et de direction. Les droites par le plus court chemin.

10 Princip. 9. La distance de deux poincts est la ligne droite.

Princip. 10. Les surfaces peuvent differer de situation, de longueur, de largeur, de contenu, de direction. Les surfaces planes sont bornées de toutes parts par des lignes droites, et qui s'étendent directement de l'une à l'autre.

15 (: *An minimae superficierum inter datas lineas. An cujus partes quibuslibet congruere possunt, ut et recta.* :)

Avertissement, nous ne considerons icy que les plans. Une ligne est egale à une autre quand l'étendue de l'une est egale à celle de l'autre.

#### Theoremes connus naturellement

1. Les lignes droites egales entre elles ne different que de situation, l'une estant quant  
20 au reste toute semblable à l'autre.

2. Les cercles qui ont les semidiametres égaux, sont égaux. Et les cercles égaux ne different que de situation.

1 commune (1) Estre éloigné (2) Le lieu (a) est un pa (b) d'un corps, et (3) Le Lieu est (a) la partie d'un espace qui sert à trouver une (b) une chose dont l'espace (aa) contient (bb) comprend l'espace d'une autre chose. Comprendre est estre le même en tout ou en partie. (aaa) Ergo (me) (bbb) donc ainsi plustost: (4) Le Lieu L 2 avec (1) la partie (2) l'espace L 4 f. l'autre. | (1) Et (alors) on peut dire que le corps est dans l'Espace (2) Une chose est Dans une autre quand toutes les parties de la première ne (a) sont sensibles (b) peuvent estre apperçues qv'avec au tant de parties de l'autre. Ainsi (aa) un tout est (bb) une partie est dans son tout: le corps dans une Vase aux bricht ab (3) NB. on ne dira pas que l'espace est dans le corps qui le remplit. Estre dans une chose, est estre placé en sorte que pour estre avec l'un, il faut estre |auparavant erg. | avec l'autre gestr. | Princip. L 7 f. 4. 5. 6. | prop. ändert Hrsg. | 7. L 8 poincts (1) sont (2) ne different L 9 de (1) forme nicht gestr. (2) direction. L 11 f. largeur, (1) de forme, (2) de contenu, L

3. Les arcs égaux de mêmes cercles ne different que de situation.

4. Les chordes des arcs egaux de deux cercles egaux ou d'un même cercle, ne different (: que de situation :) ou sont egales entre elles.

5. Tout diametre divise la circomference en deux portions égales dont chacune est appellée demycercle. 5

6. L'intersection de deux lignes est un poinct.

7. Si par un poinct pris au dedans d'un espace borné de toutes parts par une ou par plusieurs lignes passe une ligne droite infinie, elle coupera les lignes qui bornent cet espace en deux points pour le moins.

8. S'il y a deux points l'un au deça, l'autre au dela d'une ligne droite; alors une ligne droite qui tend d'un point à l'autre coupe la ligne droite qui est entre [les] deux, en un poinct, et en un seul. 10

9. La ligne droite infinie qui passe par un poinct qui soit au dedans d'un cercle coupe la circomference en deux points et en deux seulement.

10. La circomference qui passe par deux poincts, l'un au dedans d'un autre cercle, et l'autre au dehors, le coupe en deux points, et en deux seulement. 15

11. Si deux circomferences ont reciproquement des points l'un au dedans de l'autre, elles s'entrecouperont en deux points, et en deux seulement.

12. Si une circomference a un de ses poincts au-deçà d'une ligne droite infinie, et son centre au dela ou dans la même ligne droite, elle coupera la même ligne droite en deux points. 20

19 poincts | au dela ändert Hrsg. | d'une L

## 35. DE TABULA COMBINATORIA PERFECTA

[31. Oktober – November 1675]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 VIII 11 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 10 Zeilen auf Bl. 4 r° unten. Auf dem übrigen Blatt VII, 1 N. 17 sowie VII, 5 N. 41. — Gedr.: *LKK* 1, 1973, S. 71 (tlw. = Z. 10–12).  
Cc 2, Nr. 1097 tlw.

5

Datierungsgründe: Das auf demselben Blatt geschriebene VII, 1 N. 17 ist auf den 31. Oktober 1675 datiert.

Pro Tabula combinatoria perfecta desiderantur: ut formae perfectae quaelibet tum  
10 inter se, tum cum inferioribus jungantur. Primum pro duabus literisque adeoque et dua-  
bus aequationibus ad  $10^{\text{mum}}$  gradum, erunt combinationes formarum 10. numero 1024.  
Quod si contenti simus octo incognitis uti, non erunt nisi 256. Quae ab aliquot personis  
facile anni spatio elaborabuntur; praesertim si Tabula multiplicationum formularum per-  
fectarum (diverse affectarum) adhibeatur; et praeterea progressionem observentur; quae  
15 ordine sine dubio progredientur.

Si ad octo usque gradus procedemus poterimus etiam Aequationes ad nonum usque  
gradum reddere puras. Difficultas quod oblitus sum, nam una combinatur cum pluri-  
bus inferioribus similibus. Hoc enim in calculo meo oblitus sum. Nota duae ejusmodi  
similes inferiores reductae ad unam ascenderent longe altius quam proxime major, et ita  
20 idem erit figuram v. g.  $10^{\text{mi}}$  gradus conjungere cum duabus perfectis noni gradus, quam  
conjungere cum una  $18^{\text{mi}}$ . Calculus instituat generalis de reductione figurarum perfec-  
tarum similium ad se invicem, ut progressionem seu regulam generales mox inveniantur.  
Ideo sumamus exponentes ipsos indeterminatos, incipiendo non a primo seu infimo, sed  
a summo. Conferatur hoc calculus cum ordinario ubi incipitur ab imo.

10 duabus | curvis *gestr.* | literisque *L* 11 ad (1)  $15^{\text{mum}}$  (2)  $10^{\text{mum}}$  *L* 11 combinationes (1)  
aequationum (2) formarum *L* 13 f. multiplicationum (1) formulas per (2) formularum perfectarum (  
(a) hanc (b) diverse *L* 14 f. quae | mox *gestr.* | ordine *L* 16 Aequationes (1) adeo (2) ad *L*  
19 ascenderent (1) forte (2) longe *L* 21 una (1)  $8^{\text{vi}}$  (2)  $18^{\text{mi}}$  *L* 23 indeterminatos, (1) sive a (2)  
incipiendo non a primo (a) sed ab (b) seu *L*

---

9 Tabula combinatoria perfecta: Vgl. S. 304 Z. 8–23.



36. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM

36<sub>1</sub>. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES PRIMA ET SECUNDA

Januar 1675

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III A 34 Bl. 1–4. 2 Bg. 2<sup>o</sup>. 8 S. — Gedr.: LKK 2, 1976, 5  
 S. 16–36.  
 Cc 2, Nr. 900.

Januar. 1675.

De formulis omnium dimensionum:

novo analyseos et characterum genere ex artis combinatoriae principiis. 10

Et calculus explicationis per binomium

De intercalatione numerorum combinatoriorum

Tentandum est, an Analysis promoveri possit longius adhibitis formulis, quae sint simul omnium dimensionum. Ut pro  $by^4 + acy^3 + a^2dy^2 + a^3ey + a^4f$ , scribemus:  $by^z + acy^{z-1} + a^2dy^{z-2} + a^3ey^{z-3} + a^4fy^{z-4}$ . etc. Quod si ponamus  $z \sqcap 4$ . seu  $z - 4 \sqcap 0$ . patet 15  
 $y$  in ultimo termino omitti posse: et etc. quoque omitti debere. Sin minus continuari poterit, donec fiat exponens ipsius  $y$  ipsi 0. aequalis. Quemadmodum autem hic incepti a summo, ita incipi potuisset ab imo, hoc modo:

$$a^z f + a^{z-1} ey^{+1} + a^{z-2} dy^2 + a^{z-3} cy^3 + a^{z-4} by^4 \text{ etc.}$$

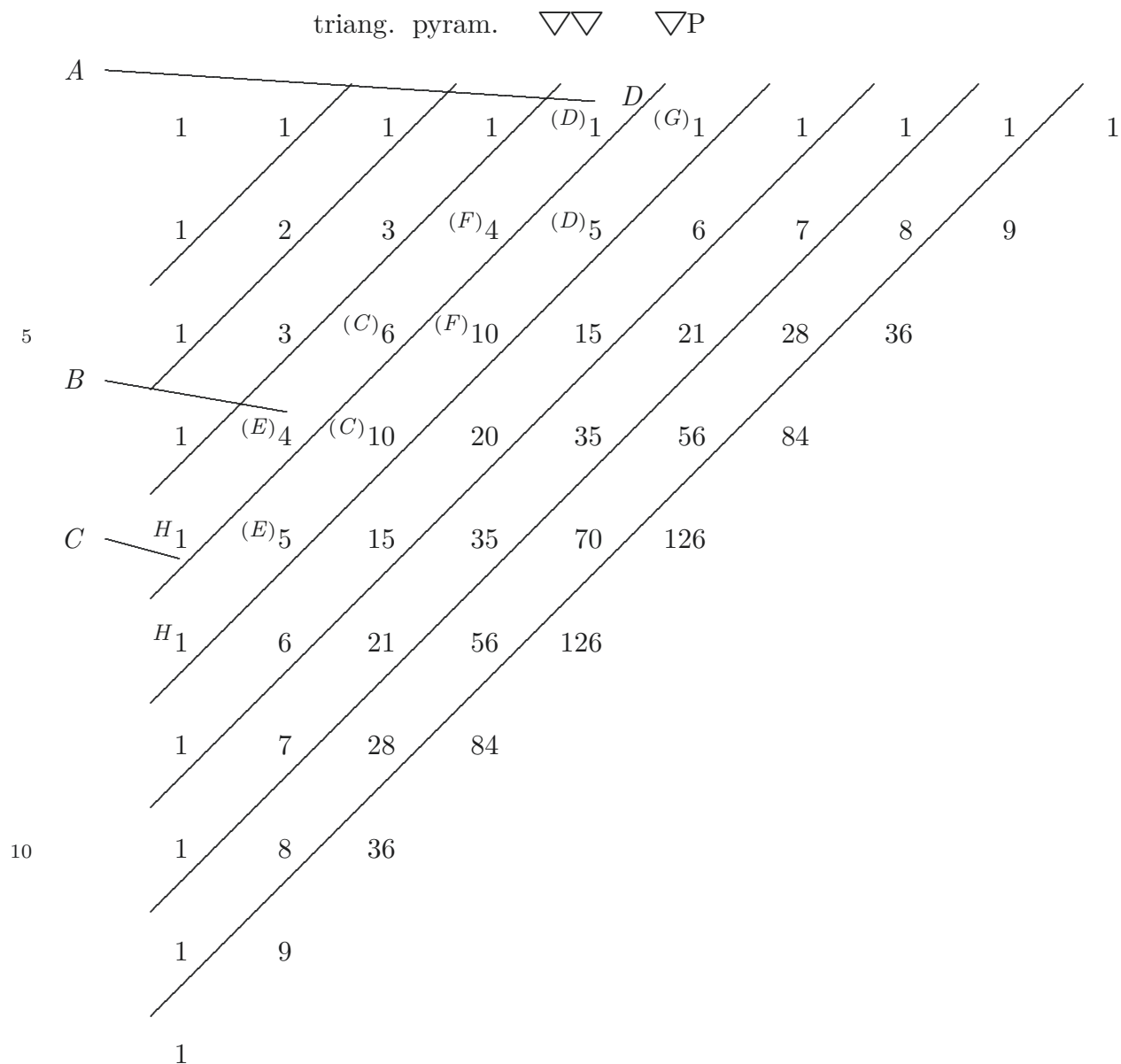
Ponamus jam quantitatem  $y$  exponente  $z$  affectam esse explicandam sive esse  $y \sqcap$  20  
 $x + b$ . quo modo generaliter explicabimus:  $y^z$ ? Jam repertum est dudum a edoctissimis

10f. novo ... binomium *erg. L* 12 De ... combinatorium *erg. L* 13 est, (1)  
 ad (2) an *L* 18f. modo: (1)  $a^4f + a^3ey^{+1}$  (2)  $a^zf + a^{z-1}ey^{+1} + a^{z-2}dy^2 + (a) a^{z-3}dy^3 + a^{z-4}cy^4$   
 (b)  $a^{z-3}cy^3 + a^{z-4}by^4$  *L* 20f.  $y \sqcap$  (1)  $a + b$  (2)  $x + b$  *L*

---

21–208,1 edoctissimis Geometris: Welche Ereignisse Leibniz als Entdeckungen der figurierten Zahlen ansieht, konnte nicht ermittelt werden. Die im Folgenden genannten Personen führt Leibniz zum Verweis auf weitere Eigenschaften der figurierten Zahlen und des arithmetischen Dreiecks auf.

Geometris, numeros quos vocant Figuratos, 1. 2. 1. 1. 3. 3. 1 etc.



1-3 Figuratos, (1) 1. 1. (2) 1. 2. 1. 1. 3. 3. | 4 ändert Hrsg. | (a) itaque (b) etc. | triang. ...  $\nabla P$  ver-  
schiebt Hrsg. um eine Spalte nach rechts | A 1 (aa) 2 (bb) 1 L 4 (F)4 (1) (C)5 (2) (D)5 L 8f. 126  
(1)  $H_1$  (2) 1 L 11-209,1 9 | 45 gestr. | 1 | 10 55 gestr. | (1) itaque  $x + b,^4 \square 1x^4 + (a) x (b) 4x^3 + 6$   
(2) itaque L

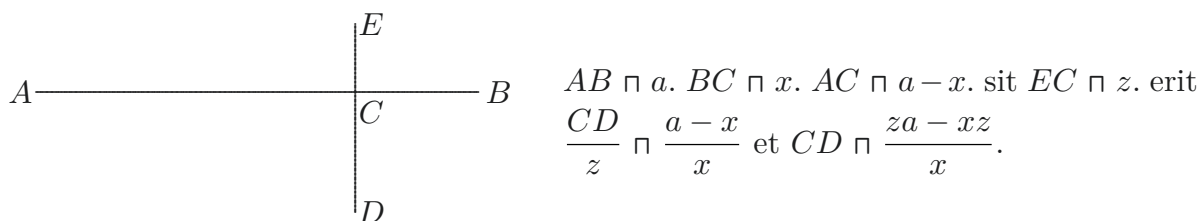
Itaque

$$x + b,^4 \sqcap 1x^4 + 4x^3b^1 + 6x^2b^2 + 4x^1b^3 + 1b^4.$$

Jam si dimensionis exponens non sit 4, sed universalis exempli causa  $z$ . explicanda ratio est, per quam ex data  $z$  exhibeantur caeteri numeri transversales, nempe quomodo ex data 8, inveniuntur 28, 56, 70, et ex data 9 inveniuntur 36, 84, 126. et ita in caeteris. Hoc vero fieri poterit, non quidem per unam quandam aequationem, attamen per unam quandam regulam; nam per Theorema a Maurolyco, Fermatio, Pascaliis aliisque observatum. In progressionem naturali ab unitate incipiente numerus quilibet ductus in proxime

5

1 *Am Rand:*



10  $a - x$  (1) erit (2) sit  $EC \sqcap z$ . erit (a)  $\frac{EC}{CD}$  (b)  $EC$  (c)  $\frac{ED}{z}$  (d)  $\frac{CD}{z} L$  3 si (1) non dimension(um) (2) dimensionis  $L$  5 70 (1) 56, et ex data 9, 36 (2) et  $L$  8 proxime (1) minorem (2) majorem  $L$

10 fig: Die Figur zeigt Spuren der Überarbeitung: Leibniz ersetzt eine etwas weiter links ausgeführte und wieder getilgte vertikale Linie, die in ihrem oberen Abschnitt von Text unterbrochen ist, durch  $DE$ . Das obere Ende der getilgten Linie wurde ebenfalls mit  $E$  gekennzeichnet. Leibniz wählt Lage und Länge der Strecken derart, dass die in der begleitenden Rechnung auftretenden Verhältnisse im Diagramm eingehalten werden. Insbesondere gilt  $CD : AC = CE : CB$ . Die Endpunkte der getilgten Linie liegen mit  $B$  und  $E$  bzw.  $A$  und  $D$  jeweils auf gedachten Geraden, die gemäß den im Diagramm auftretenden Streckenverhältnissen zueinander parallel sind. Oberer und unterer Abschnitt der getilgten Senkrechten stehen somit im selben gleichen Verhältnis zum rechts bzw. links vom gemeinsamen Schnittpunkt befindlichen Abschnitt von  $AB$  wie die entsprechenden Abschnitte  $DE$ . 7 Maurolyco: vgl. F. MAUROYCO, *Arithmeti corum libri duo*, 1575, S. 5, Buch 1, Propositio 7. 7 Fermatio, Pascaliis: Fermats Beobachtung wurde veröffentlicht als Observatio D. P. F., in: *Diophanti Alexandrini De Multangulis Numeris Liber Unus*, 1670, S. 16 (FO I S. 341). Zuvor hatte Fermat seinen Befund Mersenne in einem Brief von Anfang Juni 1638 (FO II S. 70; CM VII S. 279) mitgeteilt. Im Anschluss an seine eigene Formulierung als Proposition 11 in Bl. PASCAL, *Traitté des ordres numeriques*, 1665, S. 5 [Marg.] (PO III S. 509–510) verweist Pascal auf Fermats ihm aus der Korrespondenz bekannte Fassung und gibt diese in französischer Übersetzung wieder. Diese Version von Fermats Beobachtung ist die Grundlage für Leibniz' Übersetzung in Z. 8 – S. 210 Z. 3.

majorem producit duplum sui trianguli; idem numerus ductus in  $\nabla^{\text{lum}}$  proxime majoris, producit triplum pyramidis; idem numerus ductus in pyramidem proxime majoris producit quadruplum Triangulo-Triangularis etc. Sed jam video offerri propius theorema ad usum nostrum; nempe consequentiam 12<sup>mam</sup> tractatus Pascalii de Triangulo Arithmetico, 5 nempe observat ille, in linea quadam transversa (ipse vocat basin) numerum quendam  $E$ , ut 4, esse ad proxime superiorem  $C$ , ut 6. ut numerus unitatum  $CB$  ad numerum  $BA$  sive ut numerus cellarum inferiorum quarum summa  $E$ , ad numerum cellarum superiorum quarum infima  $C$ .

Itaque sit dimensionis numerus,  $z$ , v. g.  $E$ . seu 4. numerus unitatum  $AC$  seu numerus 10 numerorum transversalium lineae  $CD$  est  $z+1$ . Unde si auferatur  $BC$  seu  $\gamma$ , nempe 2 vel

3. vel 4, fiet  $z+1-\gamma$ , et erit  $\frac{\text{Numerus datus}}{\text{ad proxime sequentem in eadem transversali}} \sqcap \frac{\gamma}{z+1-\gamma}$ .

Unde si  $E \sqcap z$ . et quaeratur  $C$ , fiet  $\frac{C}{z} \sqcap \frac{z+1-\gamma}{\gamma}$  et  $C \sqcap \frac{z^2+z-\gamma z}{\gamma}$ , ubi  $\gamma \sqcap 2$ .

et fiet:  $C \sqcap \frac{z^2+z-2z}{2} \sqcap \frac{z^2-z}{2}$ , et rursus  $\frac{F}{C}$  seu  $\frac{F}{z^2-z \smile 2} \sqcap \frac{z+1-3}{3}$ , sive  $F \sqcap$

$\left. \begin{array}{l} z^3 - 1z^2 \\ - 2.. + 2z \end{array} \right\} \smile 2, 3. \text{ porro } \frac{D}{F} \text{ sive } \frac{D, 2, 3}{\dots} \sqcap \frac{z-3}{4} \text{ et fiet } D \sqcap \left. \begin{array}{l} z^4 - 1z^3 \\ - 2... + 2z^2 \\ - 3... + 3.. \\ + 6.. - 6z \end{array} \right\} \smile$

15 2, 3, 4 quam formulam si rursus multiplices per  $\frac{z-4}{5}$  fiet:

1 proxime (1) minoris (2) majoris  $L$  3f. ad |idem *gestr.* | usum  $L$  6 numerus (1)  $BC$  ad numer (2) |unitatum *erg.* |  $CB$   $L$  9 sit (1) Numerus  $AC \sqcap z$ . (2) dimensionis (a)  $z$  numerus, 4 (b) numerus,  $L$  9  $AC$  (1) est  $z$  (2) seu  $L$  10f. 2 |vel *erg.* | 3  $L$  11 fiet (1)  $z-\gamma$  (2)  $z+1-\gamma$   $L$

11 erit (1)  $\frac{E}{C} \sqcap$  (2)  $\frac{\text{Numerus datus}}{\text{ad } \dots \text{ transversali,}} (a) \text{ ut } \gamma \text{ ad } (b) \sqcap \frac{\gamma}{z+1-\gamma}$ .  $L$

---

4 consequentiam 12<sup>mam</sup>: Vgl. Consequence douziesme in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, 1665, S. 7–8 (PO III S. 455–457).

$$\begin{array}{r}
 z^5 - 1z^4 \\
 \sim - 2\dots + 2z^3 \\
 \sim - 3\dots + 3\dots \\
 \sim + 6\dots - 6z^2 \\
 \sim - 4\dots + 4\dots \\
 \sim + 8\dots - 8\dots \\
 \sim + 12\dots - 12\dots \\
 \sim - 24\dots + 24z
 \end{array}
 \left. \vphantom{\begin{array}{r} z^5 \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \\ \dots \end{array}} \right\} \sim 2, 3, 4, 5 \cap G.$$

5

Hinc patet semper fieri summam  $\cap 0$ . si sit  $z \cap 1$ .

Nimirum,  $E \cap z$

10

$$C \cap z \sim \frac{z-1}{1}$$

$$F \cap \frac{z}{1}, \frac{z-1}{2}, \frac{z-2}{3}$$

$$D \cap \frac{z}{1}, \frac{z-1}{2}, \frac{z-2}{3}, \frac{z-3}{4}$$

$$G \cap \frac{z}{1}, \frac{z-1}{2}, \frac{z-2}{3}, \frac{z-3}{4}, \frac{z-4}{5}.$$

Unde patet hos numeros, ut 1, 5, 10, 10, 5, 1. esse productos continuorum, seu fractionum, quarum numerator decrescit, nominator crescit arithmetice. Unde pendet praxis notabilis Ganierii apud Pascalium pag. 32. tractatus de combinationibus. Observavit Huddenius hoc sane memorabile, si haec series 1 -2 +1 multiplicetur per progressionem Arithmeticam quamcunque, productum semper fieri aequale nihilo. Videamus an propositio sit universalior, sive an sequens

15

ducta in

$$\begin{array}{cccc}
 1 & -3 & +3 & -1. \\
 1 & 3 & 6 & 10 \\
 \hline
 +1 & -9 & +18 & -10
 \end{array}$$

faciat productum: nihil aequale, idque verum est. Hinc illud sequitur memorabile. Si qua sit aequatio quae tres habeat Radices

20

9 1. (1) z (2) | I nicht gestr. | 1 (3) | Nimirum, erg. | E  $\cap$  z L 15 1 | 3, ändert Hrsg. | (1) 30, (2) 10, L 17 notabilis | Domini gestr. | Ganierii L 18 si (1) propositio (2) haec L

17 Ganierii: A. de Gagnières; vgl. Bl. PASCAL, *Combinaciones*, 1665, S. 32–33 (PO III S. 586–593).  
 18 Huddenius: Vgl. J. HUDDE, *Epistula secunda de maximis et minimis*, 1659, DGS I S. 508.



Multa in hoc dispositione memoranda, sed quae omnia ex hoc capite pendent, quod nimirum terminus cujuslibet lineae multiplicatus per 2. vel 3, vel 4, dat sequentem, non ergo considerandi nisi qui lineas incipiunt, hi enim per 1 + 2 vel 1 + 3, vel 1 + 4, etc. multiplicati dant reliquos, sunt autem:

1. vel 1	vel 1	vel 1	nempe 1		5
	-1	-2	. -3	1. 2. 3.	
		-1	-2	2 3 6	
		+2	-1	6	
			. +6		
			+3		10
			+2		
			. -6		

Piget adhuc unum calculare, etsi res forte mereatur. Caeterum inspiciendo apparet hoc calculandi modo non in summa tantum, sed et per partes idem quod ante provenisse. Caeterum summis initis fiunt aequationes:

$$1z. \quad 1z^2 - 1z \quad 1z^3 - 3z^2 + 2z \quad 1z^4 - 6z^3 + 11z^2 - 6z$$

et denique:  $1z^5 - 10z^4 + 35z^3 - 50z^2 + 24z$ . Porro semper numeri cujuslibet termini inter se juncti sunt aequales nihilo, multiplicetur haec formula, per  $z - 5$ ,

---

16 <i>Am Rand:</i>	8 □ 8
	8 □ 4 + 4
	7 □ 4 + 3
	3 + 4

3 per (1) 1 + 3 (a) multiplica (b) vel 1 + 2, (2) 1 + 2 L    5 1. vel (1) 1 - 1. vel (a) 1 - 2 + (b)  
 1 - 2 (2) 1 L    13 calculare, (1) credo vero (2) etsi L    19 8 □ (1) 2 ^ 4 (2) 8 L    18 per (1)  
 - 1 +  
 z - 4, fiet:

	$z^6$	-	$10z^5$	+	$35z^4$	-	$50z^3$	+	$24z^2$
			- 4. ....		+ 40. ...		- 140. ...		+ 200. . - 96z
seu	$1z^6$	-	$14z^5$	+	$75z^4$	-	$190z^3$	+	$224z^2$ - 96z.
	<del>X</del>		<del>A</del>		<del>Z</del>		<del>8</del>		<del>8</del>

Ubi notandum omnes (a) te (b) numeros simul sumtos semper aequari nihilo. (2) z - 5, L

$$\begin{array}{r}
 \text{fiet} \left\{ \begin{array}{r} 1z^6 - 10z^5 + 35z^4 - 50z^3 + 24z^2 \\ - 5\dots\dots + 50\dots\dots - 175\dots + 250 - 120z \end{array} \right. \\
 \text{seu} \begin{array}{r} 1z^6 - 15z^5 + 85z^4 - 225z^3 + 274z^2 - 120z \\ \mathfrak{X} \quad \mathfrak{Z} \quad \mathfrak{Y} \quad 0 \quad \mathfrak{X} \quad \mathfrak{O} \end{array}
 \end{array}$$

5 Ubi notandum inductione apparere, quod semper crescent cognitae terminorum, usque ad penultimum, qui est omnium maximus; at ultimus rursus decrescit. Termini secundi sunt numeri triangulares, 0. 1. 3. 6. [10.] 15. Termini ultimi, 1. 2. 6. 24. 120. sunt producti numerorum continui deinceps ab unitate, nempe 1. (1, 2) 2. (1, 2, 3) 6. (1, 2, 3, 4) 24. (1, 2, 3, 4, 5) 120.

10 Sed reliquorum difficilior determinatio, v. g. tertiorum: 2. 11. 35. 85 etc. Patet tamen eos esse quodammodo sumtos ex pyramidalibus, 1. 4. 10. 20. 35. 56. 84. Quarti sunt 6. 2 11 35 85 50. 225. etc. qui quomodo ex Triangulo-Triangularibus deriventur non ita facile judicatur; et opus est prolixis inductionibus ad ista indaganda.

Si in qualibet formula in seriem ipsarum cognitarum seu numerorum inquiramus, 15 omissio ultimo, ut,

1.	1.	3.	1.	6.	11	1.	10.	35.	50.	1.	15.	85.	225.	274
	2		5.	6		9	25	25		14.	70	140	49	
			1			16	0			56	70	91		

---

15 *Am linken Rand:*

$$\begin{array}{r}
 7 \\
 \underline{7} \\
 49 \\
 \underline{7} \\
 343 \\
 \underline{7} \\
 2401
 \end{array}$$

15 *Am rechten Rand:*  $5^0 \wedge 3 \sqcap 3$ . NB.

14 in (1) qvolibet termino (2) qvalibet L

---

17f. 5. 6 ... 16 0: Einzelne Differenzen sind fehlerhaft. Die Fehler setzen sich in den nachfolgenden Zeilen fort.



Sed his nunc quidem missis redeamus ad nostras formulas generales:

Esto formula quaelibet:

$$\frac{by^z + ca^1y^{z-1} + da^2y^{z-2} + ea^3y^{z-3} + fa^4y^{z-4}}{gy^z + hay^{z-1} + ka^2y^{z-2} + la^3y^{z-3} + ma^4y^{z-4}}$$

Quaeratur ejus differentia a formula quae hoc solo ab ista differat, quod pro  $y$  ponatur  $y + \beta$ : ut autem res in numeris habeatur et vitetur error calculi, scribemus:

5

$$\frac{\begin{matrix} 2b & 625y^{4z} & + & 7ca & 125y^{4z-1} & + & 5da & 225y^{4z-2} & + & 4ea & 35y^{4z-3} & + & 8fa & 45^0y^{4z-4} \\ 4 & 2401 & & 5 & 343 & & 8. & . & 49 & & + & 2. & . & 7 & + & 10 & 7^0 \end{matrix}}{\begin{matrix} 10g & 5^4y^{4z} & + & 11ha & 5^3y^{4z-1} & + & 13ka & 25^2y^{4z-2} & + & 14la & 35y^{4z-3} & + & 16ma & 45^0y^{4z-4} \\ 11 & 7 & & + & 13 & 7 & & + & 14 & 7 & & + & 16 & 7 & & + & 17 & 7^0 \end{matrix}}$$

Numerator Termini proxime majoris ejusdem seriei, in qua  $y + 4\beta$  ponatur in locum ipsius  $y$ , erit:

$$\begin{matrix} 6 & 2b & 625y^{4z} & + & (1) & 5 & (2) & 7ca & 125y^{4z-1} & + & (a) & 4 & (b) & 5 & L & 6 & 343 & (1) & 7 & (2) & 8 & L & 6 & 13ka & 25^2 & |y^{z-2} \\ \text{ändert Hrsq.} & | & + & L & 7 & \text{Numerator} & \text{erg.} & L \end{matrix}$$

$$\begin{aligned}
 & 2b5^4y^{4z} + 2b4z4\beta^15^3y^{4z-1} + 2b4\beta^26_{\ll \frac{z, z-1}{1,2} \rr} 5^2y^{4z-2} + 2b4\beta^34_{\ll \frac{z, z-1, z-2}{1,2,3} \rr} 5^1y^{4z-3} + 2b4\beta^41_{\ll \frac{z, \dots, z-3}{1,2,3,4} \rr} 5^0y^{4z-4} \\
 & 4:7 . \quad 4. \quad 7. \quad . \quad 4. \quad . \quad 7. \quad 4. \quad \dots \quad 7 \quad 4. \quad \dots \quad 7 \\
 & \quad + 7ca \dots \quad + 7ca \quad 4\beta^3 \ll z-1 \rr \dots \quad + 7ca \quad 4\beta^2 3 \ll \frac{z-1, z-2}{1,2} \rr \dots \quad + 7ca \quad 4\beta^3 1 \ll \frac{z-1, \dots, z-3}{6} \rr \dots \\
 & \quad + 5\dots \quad \dots \quad 5 \quad \quad \quad 5 \quad \quad \quad 5 \\
 5 \quad & \quad \quad + 5da^2 \dots \quad + 5da^2 \quad 4\beta^2 \ll \frac{z-2}{1} \rr \dots \quad + 5da^2 4\beta^2 1 \ll \frac{z-2, z-3}{2} \rr \dots \\
 & \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad 8 \quad \quad \quad 8 \\
 & \quad \quad \quad \quad + 4ea^3 \dots \quad + 4ea^3 \quad 4\beta^1 \ll \frac{z-3}{1} \rr \dots \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad 2 \quad \quad \quad 2 \quad \dots \\
 & \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 8fa^4 \dots \\
 10 \quad & \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 10.
 \end{aligned}$$

Nominator ejusdem manet idem, mutatis tantum quibusdam literis, nempe cognitis, scilicet

$$\begin{aligned}
 10g \bullet \dots + 10g \bullet \dots \bullet \quad + 10g \dots \quad \bullet \bullet \quad + 10g \dots \quad \bullet \bullet \quad + 10g \dots \quad \bullet \bullet \\
 11 \quad 11 \quad \quad \quad 11 \quad \quad \quad 11 \quad \quad \quad 11 \quad \quad \quad 11 \\
 \quad + 11ha \quad \bullet \quad + 11ha \quad \bullet \bullet \quad + 11ha \dots \quad \bullet \bullet \quad + 11ha \dots \quad \bullet \bullet \\
 15 \quad + 13\dots \quad \quad \quad 13 \quad \quad \quad 13 \quad \quad \quad 13 \\
 \quad \quad \quad + 13ka^2 \dots \bullet \bullet \quad + 13ka^2 \dots \quad \bullet \bullet \quad + 13ka^2 \dots \quad \bullet \bullet \\
 \quad \quad \quad \quad 14 \quad \quad \quad 14 \quad \quad \quad 14 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad + 14la^3 \dots \bullet \bullet \quad + 14la^3 \dots \quad \bullet \bullet \\
 20 \quad \quad \quad \quad \quad \quad 16 \quad \quad \quad 16 \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad + 16ma^4 \dots \bullet \bullet \\
 \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad 17
 \end{aligned}$$

1 Am Rand:  $z, \dots, z-3 \sqcap z, z-1, z-2, z-3$ .

$$\begin{aligned}
 & 1 \quad 2b5^4y^{4z} (1) + 2b4z5^3y^{4z-1} + 2b6_{\ll \frac{z, z-1}{1,2} \rr} 5^2y^{4z-2} + 2b4_{\ll \frac{z, z-1, z-2}{1,2,3} \rr} 5^1y^{4z-3} + 2b1_{\ll \frac{z, \dots, z-3}{1,2,3,4} \rr} 5^0y^{4z-4} \quad 4.7.4.7.4.7.4. \dots 74\dots 7 + 7ca3_{\ll z-1 \rr} \dots (2) \\
 & 2b4z4\beta^15^3y^{4z-1} L \quad 5 \quad 5da^2 4\beta^2 1 \ll \frac{z-2, \dots, z-4}{2} \rr \text{ ändert Hrsg.} | \dots L \quad 7 \quad 4ea^3 4\beta^1 \ll \frac{z-3, z-4}{1} \rr \text{ ändert Hrsg.} | \dots L
 \end{aligned}$$

Differentia harum duarum fractionum quaerenda esset multiplicatione per crucem, sed cum illa futura sit prolixissima, sufficiet singulos terminos cum aliis de quibus mox loquar, conferendos excerpti.

Terminus summus I }  
 Numeratoris }  
 † 2 b 10 g 5 y<sup>②4z</sup> }  
 4 . 11 . 7 • }  
 † . . . . • • • }      π 0 }      Unde habemus

Term. II }  
 † 2 b }  
 4 }  
 10 g 4 z 4 β }  
 11 }  
 11 ha }  
 13 }  
 7 ca 10 g }  
 5 11 }

† 10 g }  
 11 }  
 2 b 4 z 4 β }  
 4 }  
 7 ca }  
 5 }  
 11 ha 2 b }  
 13 4 }

5  
10

demonstrationem Theorematis, de evanescentibus semper duobus Terminis maximis Numeratoris differentiae.

6 Am linken Rand: I † z. † z 5y<sup>②4z-1</sup> † z, +z - 1. † z - 1, z.  
 7

2 prolixissima, (1) utile erit ea (2) eo (3) sufficiet L 4 summus (1) Nominatoris (2) Numeratoris  
 (a) +2b10g5y<sup>②4z</sup> π 20n5y<sup>②4z</sup> idemqve (aa) +2b π 20n (bb) 10g (b) †2b10g5y<sup>②4z</sup> (aa) π  
 -4.11.7. 44 7 +4. 44. 11. 4 11 4.11.7.

I 20n5y<sup>②4z</sup> idemqve (bb) } L 15 (1) 4, 1, 1, 4 y<sup>②4z-1</sup> 3, 2, 2, 1 y<sup>②4z-2</sup> (2) II (3) I † z,  
 44 7 } π 0 † . . . . • • • π  
 I 10n5y<sup>②4z</sup>: ergo π π 0

| + z gestr. | † | z, gestr. | z 5y<sup>②4z-1</sup> † z, +z - 1. † z - 1, z. | III 5y<sup>②4z-2</sup> † z, z - 2. z - 1, z - 1 gestr. | L  
 7 7

7 † 2b }  
 4 }  
 10g 4z4β }  
 11 }  
 11ha }  
 13 }  
 7ca 10g }  
 5 11 }

5y<sup>②4z-1</sup> gestr. | † 10g }  
 7 }  
 2b 4z4β }  
 11 }  
 7ca }  
 5 }  
 11ha2b }  
 13 4 }

14-218,1 differentiae. | Exponentes Term I.

(1) †, zSA + zIP, , †, zIP + zSA π 0 T (2) ② 4z - 1 π †, zSA + zIP, , †, zIP + zSA π 0 Term II.  
 ② 4z - 2 π † erg. u. gestr. | Sed L

Sed antequam pergamus, tentemus rescindere laborem calculi inutilem, inde ab initio: ad hoc enim praestandum generales ejusmodi formulae sunt in primis utiles, cum ea ratione plerumque etiam theoremata memorabilia offerantur; nam exempli causa, Methodus Huddeniana de Maximis et Minimis ejusmodi *r e s c i s s i o n u m* consecarium  
 5 est, ut Hugenius quoque ex Fermatiana Methodo ostendit.

Itaque formulam Anteriorem, sive sumtam, appellabimus A. Posteriorem seu in qua pro  $y$  substituimus  $y + \beta$ . appellemus P. Numeratorem quia Superior in qualibet formula appellemus  $S$ , Nominatorum quia inferior vocemus  $I$ . Termini autem qui reperiuntur in  $AS$ , vel  $AI$ , vel  $PS$ , vel  $PI$ . nominabuntur ab exponentibus nempe  $zAS$ .  $z - 1$ ,  $AI$ .  
 10  $z - 2$ ,  $PS$  etc. Jam primum hos terminos inter se comparabimus: nempe Terminos ipsius  $P$ , operae pretium erit explicare per terminos ipsius  $A$ . nempe

---

3–5 Methodus: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516.      5 Hugenius ... ostendit: Chr. HUYGENS, *Demonstratio regulae de maximis et minimis*, 1667 (Ms., gedr. in *Ouvrages*, 1693, S. 326 bis 330; *HO* XX S. 228–241).



Atque ita habemus formulam quae una est ex utilissimis totis Analyseos, continuata enim exhibet generaliter *Explicationem formulae cujuscunque* per binomium. Unde facile habetur et explicatio trinomiali, scilicet explicando rursus ipsam  $\beta$ . per binomium; et per consequens habetur explicatio formulae cujuscunque per polynomium quodcunque. Progressiones hic occurrunt et harmoniae quocunque te vertas, et sufficet inspexisse Tabulam, ad eas advertendas. Quot autem harmoniae, tot deteguntur theoremata generalia omnibus formulis communia, quae manifestum est, ex ipsa combinationum natura suam originem habere.

Illud praeterea notandum est videri posse in hac Tabula sive formula generali vel

10 literas  $\begin{matrix} b & c & d \\ g & h & k \end{matrix}$  vel exponentes terminorum, ut  $ASz$ .  $ASz - 1$ .  $ASz - 2$ . superfluas, cum una

alterae indigentur: verum usum hunc habet earum conjunctio, ut ex ipsa statim Tabula appareant exponentes pariter et literae. Literae quidem, ut reliquus calculus literarum absolvi possit, exponentes, ut generalia de exponentibus theoremata facilius condantur. Omisi autem numeros probatorios hoc loco, ne formulam plane novam, et per se multiplicem adhuc magis onerarem; praesertim cum in his formulis ipsis numeris probatoriis careri possit; nam ipsae series non interruptae neque dissimiles sibi probationis sunt loco. Operae pretium autem est formulam hanc inventam scribere paulo distinctius, ut ejus constitutio magis oculis objiciatur:

1 f. Analyseos, (1) exhibet enim (2) |continuata enim *erg.*| exhibet generaliter (a) Potestatem binomiali cuiuscunque (b) *Explicationem* L 5 quodcunque (1) progressio hic occurrit (2) Progressiones L 6 et (1) loco (2) sufficet L 9 est (1) tametsi (2) videri posse (a) vel literas (b) in L 10 vel (1) series (2) exponentes L 12 appareant (1) series (2) exponentes L 12 literae. (1) Expo (2) Literae L 12 literarum *erg.* L 13 ut (1) reliquus calcul (2) generalia L



Ubi considerandum est simplicissimum constructionis Tabulae fundamentum sumendum esse non tam in perpendiculari aut horizontali etsi hic quoque non desunt harmoniae, sed transversali, ita enim transversaliter habetur:  $z. z - 1. z - 2. z - 3.$

$$z - 4. \text{ et } \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1} \textcircled{1}. \parallel \text{ et } \textcircled{\frac{z}{1}} \cdot \textcircled{\frac{z-1}{1}} \textcircled{\frac{z-2}{1}} \textcircled{\frac{z-3}{1}} \parallel \textcircled{\frac{z, z-1}{1, 2}} \cdot \textcircled{\frac{z-1, z-2}{1, 2}}.$$

$$5 \quad \textcircled{\frac{z-2, z-3}{1, 2}} \parallel \textcircled{\frac{z, \cdot, z-2}{1, 2, 3}} \cdot \textcircled{\frac{z-1, \cdot, z-3}{1, 2, 3}} \parallel \textcircled{\frac{z, \cdot, \cdot, z-3}{1, 2, 3, 4}} \mid. \text{ Eodem modo crescunt}$$

decreascuntve transversaliter potentiae ipsarum  $\beta$  et  $a$ . Sed et notandum  $z$  parenthe-

ticum semper tot esse dimensionum, quot  $\beta$  ascriptum, v. g. in  $\textcircled{\frac{z, \cdot, z-2}{1, 2, 3} \beta^3}$ , id est

$$\textcircled{\frac{z, z-1, z-2}{1, 2, 3} \beta^3} \text{ ductis his in se invicem assurgetur ad } \textcircled{z^3}. \text{ ubi notandum est, maxi-}$$

10 mum numerum dividendum, ex his, 1, 2, 3. esse 3. Innumerae id genus observari possent

harmoniae sed ut ad rem denique nostram veniamus, examinandum jam est, si formula

explicatrix ducatur per crucem in explicatam quid inde proveniat: Nimirum Numerator

producti erit  $\dagger$  Aggregatum Combinationum omnium Terminorum  $AS$  cum omnibus

Terminis  $PI$ , singulorum unius cum omnibus alterius;  $\dagger$  aggregatum Combinationum

15 omnium Terminorum  $AI$ , cum omnibus Terminis  $PS$ . Nominator vero: combinationes

omnium terminorum  $AI$ , cum omnibus  $PI$ . Ex his combinationibus eas in unum colli-

gemus, quae ad unum assurgunt ipsius  $y$  exponentem  $z$ . Et quidem maximus omnium

2z. Nam combinationibus fiunt multiplicationes quantitatum, et additiones exponentium.

Habebimus ergo terminos hos:  $2z. 2z - 1. 2z - 2. 2z - 3. 2z - 4. 2z - 5. 2z - 6. 2z - 7.$

$2z - 8.$  etc. Jam  $2z$ . componi potest non nisi ex  $z + z$ , ut scilicet neuter terminorum

20 excedat  $z$ . Itaque fiet

$$DS2z \cap \dagger b AS, z + PI, z \\ \dagger g . I . + . S .$$

$$1 \text{ Tabulae erg. } L \quad 4 \quad \textcircled{\frac{z-3}{1}} (1) \frac{z-4}{1} (2) \parallel \textcircled{\frac{z, z-1}{1, 2}} L \quad 5 \quad \textcircled{\frac{z-1, \cdot, z-3}{1, 2, 3}} \parallel \parallel \textcircled{z, \cdot, \cdot, z-3}$$

ändert Hrsg.  $\parallel$ . Eodem  $L$  11 proveniat: (1) Nimirum faciendae sunt omnes Terminorum  $AS$ , cum om-

nibus terminis  $PI$ , et contra om (2) Nimirum (a) Nominator (b) Numerator producti erit (aa) Combinat

(bb)  $\dagger L$  14 Terminorum (1)  $PI$  (2)  $AI$   $L$  15 terminorum (1)  $AS$  (2)  $AI$   $L$  15 omnibus (1)  $A$

(2)  $PI$ .  $L$  17 exponentium. (1) Combi (2) habebimus  $L$  18  $2z - 4$ . (1) Ex  $2z - 5. 2z - 6$  (2)  $2z - 5$ .  $L$

20 excedat  $z$ . (1) Eodem modo eadem (2), itaqve  $L$  21-223,1  $DS2z \cap$  (1)  $\dagger AS, z + PI, z, \dagger AI, z + PS, z,$

(2)  $\dagger AS, z + PI, z$  (3)  $\dagger bAS, z + PI, z$  (a) nempe terminum superiorem cuius exponens sit  $2z$ , differi

$$\dagger . I . + . S . \quad \dagger g . I . + . S .$$

Numer (b)  $s(-)$  (c) id est  $L$



Id est in Differentiae parte Superiore seu Numeratore; terminum cujus exponens  $2z$ . componi ex duabus quantitatibus; una Signo † altera Signo † affecta ita ut prior fiat ex ductu termini exponentem habentis  $z$  in Anterioris formulae nempe explicandae Superiore parte seu Numeratore reperti; in terminum ejusdem exponentis,  $z$ , in PI, seu Posterioris formulae, nempe explicatricis parte Inferiore seu Nominatore reperti. Jam 5 explicando PI,  $z$  et PS,  $z$  per valores supra inventos, fiet  $DS2z \cap 0$ .

$$\begin{aligned}
 DS, 2z - 1 \cap \dagger b \quad AS, z \quad + PI, z - 1 \\
 \dagger g \quad . \quad I \quad . \quad + . \quad S \\
 \dagger ca \quad AS, z - 1 + PI \quad z \\
 \dagger ha \quad I \quad \quad \quad S
 \end{aligned}
 \tag{10}$$

Ubi rursus explicando PI,  $z-1$ . et PI,  $z$  per valores supra inventos fiet  $DS, 2z-1 \cap 0$ .

$$\begin{aligned}
 A \quad \quad \quad A
 \end{aligned}$$

3 termini (1) AS (id est anteri (2) exponentem  $L$  3 nempe explicandae erg.  $L$  4 reperti; (1) (-) in (-) (2) In  $L$  7-10  $DS, 2z-1 \cap$  (1) † AS,  $z+PI, z-1$  † AS,  $z-1+PI, z$  (2) † AS,  $z$  +  $PI, z-1$  † AI,  $z+PSz$  . † . I . . . + . S . † . I . . + . S † AS  $z-1+PI z$  † I S

(3) † b AS,  $z$  +  $PI, z-1 L$   
 † g . I . + . S  
 † ca AS  $z-1+PI z$   
 † ha I S

$$\begin{array}{l}
 DS, 2z - 2\pi \left\{ \begin{array}{l} \dagger b \quad A \left\{ \begin{array}{l} S, z \\ I. \end{array} \right. \\ \dagger g \quad . \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + P \left\{ \begin{array}{l} I, z - 2 \\ S \dots \end{array} \right. \\ . \end{array} \right. \end{array} \left\{ \begin{array}{l} gAIz \left( \frac{z, z-1}{1, 2} \right) \beta^2 + haAIz - 1 \left( \frac{z-1}{1} \right) \beta^1 + ka^2 AI z \quad \textcircled{1} \beta^0 \\ b \quad S \quad ca \quad S \quad da^2 \quad S \end{array} \right. \\
 \begin{array}{l} : ca \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : ha \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : da^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 0 \\ : ka^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \dots \left( \frac{z}{1} \right) \beta^1 + \dots \textcircled{1} \beta^0 \\ \dots \textcircled{1} \beta^0 \end{array} \\
 5 \quad DS, 2z - 3\pi \left\{ \begin{array}{l} b \quad : z \quad + \cdot \quad : z - 3 \\ g \quad : z \quad + \cdot \quad : z - 3 \end{array} \right. \dots \left( \frac{z, \dots, z-2}{1, 2, 3} \right) \beta^3 + \dots \left( \frac{z-1, z-2}{1, 2} \right) \beta^2 + \dots \left( \frac{z-2}{1} \right) \beta^1 + \frac{la^3}{ea^3} A_S^I \left[ z - 3 \right] \textcircled{1} \beta^0 \\
 \begin{array}{l} : ca \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 2 \\ : ha \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 2 \\ : da^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : ka^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : ea^3 \quad : z - 3 \quad + \cdot \quad : z - 0 \\ : la^3 \quad : z - 3 \quad + \cdot \quad : z - 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \dots \left( \frac{z, z-1}{1, 2} \right) \beta^2 + \dots \left( \frac{z-1}{1} \right) \beta^1 + \dots \textcircled{1} \beta^0 \\ \dots \left( \frac{z}{1} \right) \beta^1 + \dots \textcircled{1} \beta^0 \\ \dots \textcircled{1} \beta^0 \end{array} \\
 DS, 2z - 4\pi \left\{ \begin{array}{l} b \quad : z \quad + \cdot \quad : z - 4 \\ g \quad : z \quad + \cdot \quad : z - 4 \end{array} \right. \dots \left( \frac{z, \dots, z-3}{1, 2, 3, 4} \right) \beta^4 + \dots \left( \frac{z-1, \dots, z-3}{1, 2, 3} \right) \beta^3 + \dots \left( \frac{z-2, z-3}{1, 2} \right) \beta^2 + \dots \left( \frac{z-3}{1} \right) \beta^1 + \frac{ma^4}{fa^4} A_S^I \left[ z - 4 \right] \textcircled{1} \beta^0 \\
 10 \quad \begin{array}{l} : ca \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 3 \\ : ha \quad : z - 1 \quad + \cdot \quad : z - 3 \\ : da^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 2 \\ : ka^2 \quad : z - 2 \quad + \cdot \quad : z - 2 \\ : ea^3 \quad : z - 3 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : la^3 \quad : z - 3 \quad + \cdot \quad : z - 1 \\ : fa^4 \quad : z - 4 \quad + \cdot \quad : z - 0 \\ : ma^4 \quad : z - 4 \quad + \cdot \quad : z - 0 \end{array} \\
 \begin{array}{l} \dots \left( \frac{z, \dots, z-2}{1, 2, 3} \right) \beta^3 + \dots \left( \frac{z-1, z-2}{1, 2} \right) \beta^2 + \dots \left( \frac{z-2}{1} \right) \beta^1 [+ \dots \textcircled{1} \beta^0] \\ \dots \left( \frac{z, z-1}{1, 2} \right) \beta^2 + \dots \left( \frac{z-1}{1} \right) \beta^1 + \dots \textcircled{1} \beta^0 \\ \dots \left( \frac{z}{1} \right) \beta^1 + \dots \textcircled{1} \beta^0 \\ \dots \textcircled{1} \beta^0 \end{array}
 \end{array}$$

12f.  $\left[ \dots : z - 1 \right] \left| \dots \left( \frac{z}{1} \right) \beta^1 \right.$  ändert Hrsg.  $\left. \left[ \dots \textcircled{1} \beta^0 \right] \right| \left[ \dots \textcircled{1} \beta^0 \right] \left| \dots \textcircled{1} \beta^0 \right.$  ändert Hrsg.  $\left. \left[ \dots \textcircled{1} \beta^0 \right] \right| L$

$DS, 2z - 5 \square$	$\begin{array}{l} : \frac{b}{g} \cdot : z - 4 \cdot : z - 5 \\ : ca \cdot : z - 1 + \cdot : z - 4 \\ : ha \cdot : z - 2 + \cdot : z - 3 \\ : da^2 \cdot : z - 3 + \cdot : z - 2 \\ : ka^2 \cdot : z - 4 + \cdot : z - 1 \\ : ea^3 \cdot : z - 5 + \cdot : z - 0 \\ : la^3 \cdot : z - 6 + \cdot : z - 0 \\ : fa^4 \cdot : z - 1 + \cdot : z - 5 \\ : ma^4 \cdot : z - 2 + \cdot : z - 4 \end{array}$	5
$DS, 2z - 6 \square$	$\begin{array}{l} : \frac{da^2}{ka^2} \cdot : z - 3 + \cdot : z - 2 \\ : \frac{ea^3}{la^3} \cdot : z - 4 + \cdot : z - 1 \\ : \frac{fa^4}{ma^4} \cdot : z - 5 + \cdot : z - 0 \\ : \cdot : z - 6 + \cdot : z - 0 \\ : \cdot : z - 1 + \cdot : z - 6 \\ : \cdot : z - 2 + \cdot : z - 5 \\ : \cdot : z - 3 + \cdot : z - 4 \\ : \cdot : z - 4 + \cdot : z - 3 \\ : \cdot : z - 5 + \cdot : z - 2 \end{array}$	10
$DS, 2z - 7 \square$	$\left\{ \begin{array}{l} \dagger \quad A \left\{ \begin{array}{l} S, z - 7 + P \left\{ \begin{array}{l} I z - 7 \\ S \dots \end{array} \right. \\ I \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \cdot \end{array} \right. \\ : \cdot : z - 1 + \cdot : z - 6 \\ : \cdot : z - 2 + \cdot : z - 5 \\ : \frac{ea^3}{la^3} \cdot : z - 3 + \cdot : z - 4 \\ : \frac{fa^4}{ma^4} \cdot : z - 4 + \cdot : z - 3 \\ : \cdot : z - 5 + \cdot : z - 2 \end{array} \right.$	15
	$\begin{array}{l} : \cdot : z - 1 + \cdot : z - 6 \\ : \cdot : z - 2 + \cdot : z - 5 \\ : \frac{ea^3}{la^3} \cdot : z - 3 + \cdot : z - 4 \\ : \frac{fa^4}{ma^4} \cdot : z - 4 + \cdot : z - 3 \\ : \cdot : z - 5 + \cdot : z - 2 \end{array}$	20

14 *Darüber:* Plag. 2. Schediasmatis de formulis omnium Dimensionum

- |                                      |                                      |   |                                     |                                     |                                     |
|--------------------------------------|--------------------------------------|---|-------------------------------------|-------------------------------------|-------------------------------------|
| 1 $\frac{b}{g}$ <i>erg. L</i>        | 2 $\frac{ca}{ha}$ <i>erg. L</i>      | 3 $\frac{da^2}{ka^2}$ <i>erg. L</i>   | 4 $\frac{ea^3}{la^3}$ <i>erg. L</i> | 5 $\frac{fa^4}{ma^4}$ <i>erg. L</i> | 9 $\frac{da^2}{ka^2}$ <i>erg. L</i> |
| 10 $\frac{ea^3}{la^3}$ <i>erg. L</i> | 11 $\frac{fa^4}{ma^4}$ <i>erg. L</i> | 13 <del><math>z - 6 + \cdot : z - 0</math></del>   vide seq plag <i>gestr.</i>   DS, 2z - 7 L |                                     |                                     |                                     |
| 18 $\frac{ea^3}{la^3}$ <i>erg. L</i> | 19 $\frac{fa^4}{ma^4}$ <i>erg. L</i> |   |                                     |                                     |                                     |

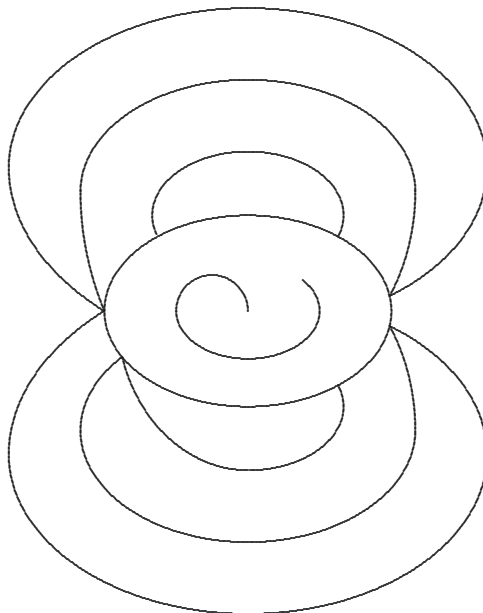


ipsam  $z$  hoc loco  $\sqrt{3}$  dividas in partes aequales pro arbitrario, v. g.  $\frac{z}{3}$ , aut si numerum partium aequalium definire nolis initio:  $\frac{z}{\mu}$ . fiet enim  $z - \frac{z}{\mu}$ .  $z - \frac{2z}{\mu}$  etc. et  $\mu$  erit numerus rationalis.

Quid si  $\mu$  sit numerus irrationalis non video commodum exprimendi modum, quemadmodum et nondum video rationem explicandi binomium, ope exponentis secti in partes inaequales. Illud primo in numeris experiendum, et inde ad caetera traducendum foret: Caeterum ex his in mentem venit, etiam rationalium exponentium potestates explicari posse binomiis infinitis, nempe si sit:  $y^{z-\mu}$   $y^{z-2\mu}$ .  $y^{z-3\mu}$ . pone  $z$ . et  $\mu$ . sive rationales sive irrationales esse inter se incommensurabiles aut certe multiplicatos per numeros naturales uno  $\mu$ , nunquam productum alteri  $z$ . coincidere; tunc certe in infinitum producetur explicatio. Ut autem finita sit explicatio non est necesse ipsam  $\mu$  esse unitatem, sed tantum ipsi  $z$ . commensurabilem per numerum naturalem. Sed quidsi jam longius adhuc progrediamur, et loco  $-\mu -2\mu -3\mu$ , adhibeamus:  $-2\mu -4\mu -6\mu$ ,  $-8\mu$ . vel etiam incipiendo aliter.  $-\mu -3\mu -5\mu -7\mu$ . ubi quaeritur an semper incipiendum sit necessario ab unitate, et an intervallum sumi possit quodlibet.

Nimirum Tabula numerorum combinatoriorum condi potest, non tantum etsi generator non sit unitas, sed etiam etsi sit numerus irrationalis. Finge jam aliud: in Tabula quadam numerorum combinatoriorum quaeri medios, aut bimedios, aut trimedios etc. Sed et finge continua ejusmodi mediarum interpositione describi lineas combinatorias, quibus repraesentantur numerorum figurarum progressiones. Videndum an secundo has lineas in partes inaequales, sed invicem respondententes binomiorum tamen potestates exprimi queant. Tantum sumendum est Triangulum Arithmeticum et in partes inaequales secandum, etc. Ut autem ista universaliter demonstrantur; dividenda quaelibet potestas in infinitas ratiunculas; et ostendendum ista coincidere cum lineis istis combinatoriis.

1  $\frac{z}{3}$ , (1) seu  $\frac{\sqrt{3}}{3}$  item quid si (2) aut  $L$  6 f. foret: (1) nempe  $y^4$  (2) Caeterum  $L$  8 pone (1)  $\mu$  esse numerum vel (2)  $z$   $L$  9 incommensurabiles (1) usus aut certe multiplicatione (2) aut  $L$  9 f. numeros (1) num (2) naturales (a) nunqva (b) uno  $L$  20 quibus |repraesentur *ändert Hrsq.* | (1) numeris figuratis (2) numerorum  $L$  24 cum (1) numeris (2) lineis (a) figurarum (b) istis  $L$



[Fig. 1]

		$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$			
	$\frac{1}{2}$	1	1	1	1	1
5		$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$			
	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4	
		$\frac{1}{2}$	$\frac{5}{2}$			
	$\frac{1}{2}$	1	3	6		
		$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{2}$			
10		$\frac{1}{2}$	4			
		$\frac{1}{2}$				
	$\frac{1}{2}$	1				

Nimirum manifestum est, si generator non sit unitas sed  $\frac{1}{2}$  et ita porro subdividendo in infinitum. Adeoque intelligi potest sumto quolibet generatore, si modo unus coincidat coincidere omnes.

$$3 \frac{1}{2} (1) 0 (2) 1 L \quad 5 \frac{1}{2} (1) 0 (2) 1 L \quad 7 \frac{1}{2} (1) 0 (2) 1 L \quad 9 \frac{1}{2} (1) 0 (2) 1 L$$

---

2-11  $\frac{1}{2} \dots 4 \frac{1}{2} \frac{1}{2} 1$ : Leibniz versucht, durch Interpolation ein Pascalsches Dreieck mit Basis  $\frac{1}{2}$  aus einem Dreieck zur Basis 1 zu erzeugen. Dafür müsste er eigentlich nur wie in S. 234 Z. 2-6 bei allen Einträgen des Dreiecks mit Basis 1 den Nenner  $\frac{1}{2}$  ergänzen.

Esto ergo Theorema: Figura combinatoria quaelibet coincidit cuilibet, quicumque sit generator, modo unitas sit eadem: Hinc etsi diversa sit unitas omnia tamen proportionalia sunt, sive, diversae Figurae Combinatoriae sunt similes inter se. Figuram autem Combinatoriam voco, cujus curva transit per extremitates omnium rectorum numeros combinatorios, secundum ordines numericos repraesentantium, a d h i b i t a interpolatione indefinite continuata. Si interpolatio in infinitum absolvi intelligatur, et Figurae Combinatoriae reddantur Geometricae (: hactenus enim non nisi Arithmeticae sunt, desinent: Triangulares in parabolam; pyramidales in paraboloeidem cubicam simplicem; et caetera in paraboloeides simplices altiores [:]).

In transversali Tabulae Combinatoriae, ut *H. E. C. F. D. G.* terminus quilibet, ut *E* est ad proxime superiorem, ut numerus inferiorum cum ipsa *E*, ad numerum superiorum cum ipsa *C.* sive ut numerus ordinis ipsius inferioris *E*, ad exponentem ordinis ipsius superioris *C.* nempe ut numerus ipsarum *H. E*, nempe 2, ad numerum ipsarum *C. F. D. G.* nempe 4. Summa ergo semper numerus terminorum lineae transversalis hoc loco 6.

Itaque si omnes sequentes, ab aliqua praecedente vel superiore vel inferiore deriventur, et intervallum ordinis primi, quod hoc loco per unitatem repraesentatur appelletur  $\beta$ , et numerus omnium terminorum lineae transversalis vocetur  $q$ , tunc uno ex terminis cujus ope scilicet alii investigandi sunt, appellato  $z$ , fiet Terminus sequens ad hunc  $h$ , ut

1 quaelibet | concidit *ändert Hrsg.* | cuilibet,  $L$  4f. numeros (1) Triangul (2) combinatorios  $L$  5f. interpolatione (1) in infinitum continuata (2) indefinite  $L$  7f. sunt, (1) | degenerabunt in *nicht gestr.* | (2) desinent  $L$  8 cubicam | (1) puram (2) simplicem *erg.* |; et  $L$  9 paraboloeides (1) altiores (2) simplices  $L$  10 In (1) basi (2) transversali  $L$  10 G. (1) num (2) terminus  $L$  11 proxime (1) sequentem, ut (2) superiorem, (a) | ut *nicht gestr.* | (aa) G (bb) C (b) ut  $L$  12 ut (1) exponens ordinis (2) numerus ordinis (a) demto ⟨un⟩ (b) pri (c) inferioris (d) ipsius  $L$  19 fiet (1)  $z$

(2) ut (a) terminus sequens, ad hunc; ut  $z$ , sive hic ipse ad  $q - z$  adeoque: Terminus sequens  $\pi \frac{z^2}{q - z}$ ,

et terminus tertius seu sequens sequentem, ad sequentem  $z^2 \cup q - z$ , ut ipse sequens  $z^2 \cup q - z$ , ad

$q, -, z^2 \cup q - z$ , sive sequens sequentem  $\pi \frac{z^4}{q^2 - 2qz + z^2} \cup \frac{q^2 - qz - z^2}{q - z} \pi$  (aa)  $z^4 \cup q - z \cup qz$  (bb)

$z^4 \cup q - z \cup q^2 - qz - z^2 \pi z^4 \cup q^3 - q^2z \left( \begin{array}{c} - qz^2 \\ + \dots \end{array} \right) - z^3 \pi z^4 \cup q^3 - 2q^2z - z^3$  et ita porro. tamque

(aaa) harum (bbb) intelligi (aaaa) posset (bbbb) possit a termino | quodam in medio sumto vel descendi vel ascendi tunc judicari potest duplicem semper esse valorem harum Quantitatum. *Dazu, nicht gestr.* Imo, video me committere errorem hoc de quolibet termino enuntiando, (aaaaa) cum sit verum, (bbbb) falsum est enim (ccccc) sic ergo redinchoandum: | (b) Terminus  $L$

$p$  ad  $q - p$  adeoque terminus sequens  $\sqcap hp \cup q - p$ . et sequens sequentem, ad sequentem  $hp \cup q - p$ , ut  $p \mp \beta$  ad  $q - p \mp \beta$  adeoque sequens sequentem erit  $\sqcap hp^2 \mp hp\beta \cup q - p \cup q - p \mp \beta$ . Ascenditur autem vel descenditur, prout  $q - p$ , vel  $p$  inferior aut superior, et prout  $\mp$ . significat  $+$  aut  $-$ . Si  $h$  sit  $\sqcap z$ . seu primi ordinis tunc  $h$  et  $q$  differunt unitate ipsius  $\beta$ .

5 Itaque  $z$  adhibere utilius; itaque notandum priora resumari posse, modo pro 1, ponamus  $1\beta$ , unde fiet v. g.  $E \sqcap \frac{z}{1}$ .  $C \sqcap \frac{z, \hat{z} - 1\beta}{1, 2}$ ,  $D \sqcap \frac{z, z - 1\beta, z - 2\beta}{1, 2, 3}$  etc. Itaque si sit

potestas:  $y^z$ . possumus  $z$  resolvere in quotcunque  $\beta$  inter se aequales, vel in numeros, vel in alias quantitates racionales vel surdas, vel fractas, ut si  $z$  sit 2, seu  $y^z \sqcap y^2$ , ponendo  $y \sqcap x + \gamma$  binomium hoc quadraticè in se multiplicatum erit, etiamsi non scribatur:

10  $x^2 + 2\gamma x + \gamma^2$ , sed v. g. pro 1. sumatur  $\frac{1}{2} \sqcap \beta$  unde binomii hujus quadratum erit

compositum ex quatuor terminis, nempe fiet:  $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$ .

Unde facile intelligi potest, eodem modo etiam explicari posse per binomia, potestatem cujus exponens est irrationalis, v. g.  $\sqrt{2}$ . dividendo eam in partes quotcunque aequales.

15 Horum omnium veritas tum numeris tum calculo explicari debet. Prioris et calculo et in numeris, posterioris non nisi in numeris. Notandum vero hanc formulam in qua exponens fractus, semper reduci posse ad formulam exponentium integrorum, ope aequationis; sed si exponentes sint irrationales, non videre me modum reducendi ad ordinarios, utcunque formetur aequatio.

20 Illud tantum superest excutiendum, an aliqua ratione sive arte possint ipsae  $\beta$ . esse inaequales, ut scilicet necesse non sit exponentes crescere vel decrescere aequaliter.

Caeterum valor ipsius  $y^2$ , ita more Communi expressus, daret:  $y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^2 + 2\sqrt{x^3}\gamma + 3\gamma x + 2\sqrt{\gamma^3}x + \frac{1}{2}\gamma^2$ . quod facile in numeris experiri licebit, modo  $x$  et  $\gamma$  intelligantur

1 sequens (1)  $\sqcap p \cup q - p$  (2)  $\sqcap hp \cup q - p$  L 8 racionales | sive fra *erg. u. gestr.* | vel L  
8f.  $y^z \sqcap y^2$ , (1)  $\mu$  (2) ponendo (a)  $y \sqcap x + \beta$  (b)  $y \sqcap x + \gamma$  L 9 hoc (1) cubice (2) quadraticè L  
9f. scribatur: (1)  $y^2$  (2)  $x^2 + (a) 2\beta$  (b)  $2\gamma x + \gamma^2$  L 10 pro 1. (1) compon (2) sumatur L  
10 unde (1) binomium (2) binomii | huius quadratum *erg.* | erit L 11 fiet: (1)

$y^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta x^{\frac{4}{2}} + \frac{6}{2}\beta^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{4}{2}}x^{\frac{4}{2}}$  (2)  $y^2 \sqcap \frac{1}{2}\beta x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\beta^{\frac{4}{2}}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\beta^{\frac{2}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\beta^{\frac{4}{2}}$  (3)  $y^2 \sqcap \frac{1}{2}\gamma x^{\frac{4}{2}}$  (4)

$y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{1}{2}}x^{\frac{3}{2}} + \frac{6}{2}\gamma^{\frac{2}{2}}x^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}\gamma^{\frac{3}{2}}x^{\frac{1}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$  L 13 partes | quodcunque *ändert Hrsg.* | aequales L

21 daret: (1)  $1\gamma$  (2)  $\frac{1}{2}x^2 + (a)2x^3(b)2x\sqrt{x\gamma} + 3\gamma x + 2y^2\sqrt{x\gamma}$  (3)  $y^2 \sqcap L$



esse numeri quadrati, nempe sit  $x \sqcap 9$ . et  $\gamma \sqcap 4$ , fiet:  $y \sqcap x + \gamma \sqcap 9 + 4 \sqcap 13$ . Jam  $13 \wedge 13 \sqcap 39$ . Unde

$$\frac{13}{169} y^2 \sqcap \frac{1}{2}x^2 + 2x\sqrt{x\gamma} + 3\gamma x + 2\gamma\sqrt{\gamma x} + \frac{1}{2}\gamma^2$$

$$169 \quad \frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2} + 2 \wedge 9\sqrt{36} \sqcap 108 + 108 + 2 \wedge 4 \wedge 6 \sqcap 48 + 8. \quad \text{Sed}$$

hic calculus non consentit.

5

Ideoque rei investigandae causa scribamus:  $bx^2 + cx\sqrt{x\gamma} + d\gamma x + e\gamma\sqrt{\gamma x} + f\gamma^2 \sqcap ax^2 + 2a\gamma x + a\gamma^2$ . et junctis in unum irrationalibus caeterisque ordinatis:

$$B \begin{cases} + b x^2 \\ - a \dots \end{cases} D \begin{cases} + d \gamma x \\ - 2a \dots \end{cases} F \begin{cases} + f \gamma^2 \\ - a \dots \sqcap - e\gamma \dots \end{cases}$$

et quadrando,

10

$$B^2 x^4 + 2BD x^3\gamma + 2BF x^2\gamma^2 + D^2 \dots + 2DF x\gamma^3 + F^2 \gamma^4 \sqcap 0.$$

$$- c^2 \dots - 2ce \dots - e^2 \dots$$

Jam ponatur  $b \sqcap f$ . adeoque  $B \sqcap F$ . item  $c \sqcap e$ . quod ex ipsa calculi natura pendet, cum enim  $x$  et  $\gamma$ . sint indefinita, altera pro altera sumi potest, neque ulla diversitatis ratio intelligi potest, cum non nisi situ sive ordine varient, idem enim est  $x + \gamma$ . et  $\gamma + x$ . quare et quadrata eorum eadem, aequatio ergo et pro  $F$  ponendo  $B$ , et pro  $e$  ponendo  $c$ , ita stabit

15

---

4 <i>Am Rand:</i>	2		
	9	18	36
	<u>6</u>	<u>6</u>	<u>3</u>
	108	108	

1 fiet: (1)  $y \sqcap x + 9$  (2)  $y \sqcap x + \gamma$ . L 4 169 (1)  $\frac{96}{2} \sqcap 48$  (2)  $\frac{81}{2} \sqcap 40\frac{1}{2}$  L 14 ponatur (1)  $B \sqcap F$ . (2)  $b \sqcap f$ . L 17 ergo (1) per  $B^2$  sive  $F^2$  divisa, (2) (eas) ponendo (3) et pro (a) f b (b) F L

$$B^2 x^4 \left\{ \begin{array}{l} + 2BD x^3\gamma + 2B^2 x^2\gamma^2 + 2BD x\gamma^3 + B^2 \gamma^4 \\ \quad \quad \quad + D^2 \\ - c^2 \quad \dots - c^2 \quad \quad - c^2 \end{array} \right. \quad \odot$$

Jam haec aequatio cum alia simili ejusdem valoris conferatur, scilicet:  $x^2 + 2x\gamma + \gamma^2$ ,

5 ducatur in  $x^2 + \frac{h}{a}x\gamma + \gamma^2$ . productum ducatur in  $B^2$ , fiet:

$$\begin{aligned} B^2 x^4 + 2B^2 x^3\gamma + B^2 x^2\gamma^2 \\ + B^2 \frac{h}{a} \dots + 2\frac{B^2 h}{a} \dots + \frac{B^2 h}{a} x\gamma^3 \\ + B^2 \dots + 2B^2 \dots + B^2 \gamma^4 \end{aligned} \quad \text{D.}$$

Hanc formulam priori non similem tantum sed et coincidentem esse, intelligi potest,  
10 si fingamus formulam  $bx^2 + cx\sqrt{x\gamma}$  etc. esse aequationem duarum radicum aequalium  
potius, quam formulam quadrati binomii. Unde suffecerit eam potius aequalem poni  
nihilo quam alteri  $ax^2 + 2ax\gamma + a\gamma^2$  adeoque ommissa  $\underline{a}$ . ponemus  $B$  et  $b$ , vel  $D$  vel  $d$ ,  
et  $F$  vel  $f$ . aequales. Aequationes ergo collatitiae oriuntur duae, una, per quam  $D \sqcap$   
 $\frac{2B^2 a + B^2 h - c^2 a}{2Ba}$ . adeoque

$$\begin{aligned} 15 \quad D^2 \sqcap + 4a^2 B^4 \left( \frac{-4a^2 B^2 c^2}{\text{II}} \right) + a^2 c^4 \sqcup 4B^2 a^2 \\ \left( \frac{+4ah}{\text{II}} \right) - 2ah \\ + h^2 \end{aligned}$$

quem valorem inserendo alteri collatitiae, fiet:

$$\begin{aligned} 20 \quad \left( \frac{8B^4 a^2}{\text{I}} \right) \left( \frac{+4a^2 B^2 c^2}{\text{II}} \right) \left( \frac{-4B^4 ha}{\text{II}} \right) \dots \sqcap 0. \\ - 8 \dots \end{aligned}$$

4 scilicet: (1)  $ax^2 + 2ax\gamma + a\gamma^2$ , (2)  $x^2 + 2x\gamma + \gamma^2$  L    5 in |h gestr. |  $x^2 + \frac{h}{a}x\gamma + \gamma^2$ . (1) fiet:  
(2) productum L    9 priori (1) et (2) non L    13 collatitiae erg. L

---

3  $-c^2 \dots - c^2 - c^2$ : Hier und im Folgenden bis S. 233 Z. 2 treten einzelne Verschreibungen und kleinere Versehen bei den Umformungen auf, die sich auf die Bestimmung der Gleichungen von S. 233 Z. 10–12 auswirken.

Habemus ergo inventas aequationes duas, unam  $D \sqcap 2aB^2 - ac, \cup 2aB$ , alteram:  
 $+ h$

$h^2 - \frac{2c^2a}{B^2}h + \frac{a^2c^2 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$ . Unde duae habebuntur arbitrariae, nempe  $B$ . et  $c$ . quas

determinare licebit, si cogitemus si velimus habere qualitatem numerorum combinato-  
 riorum, ut scilicet, ex duobus primo  $\beta$ , ut alias pro Tabula combinatoria appellavimus,  
 sive ut hoc loco vocabimus  $b$ ; et secundo antea appellato  $z$ , hoc loco vero  $c$ , caeteri se-  
 quantur, proxime scilicet sequentem nempe  $D$  (quem supra appellaveramus  $c$ ) faciendo

$\frac{z, z - \beta}{1, 2}$ . Imo praeterea necesse est hoc loco  $c$  (supra  $D$ ) seu  $\frac{z, z - 1\beta, z - 2\beta}{1, 2, 3}$  aequari

ipsi  $c$  hoc loco  $z$ , ut scilicet numerorum combinatoriorum natura servetur, Denique ne-  
 cesse est ipsam  $b$  (supra  $\beta$ ) aequari ipsi  $f$  sive per numerorum combinatoriorum naturam,

ipsi  $\frac{z, z - 1\beta, z - 2\beta, z - 3\beta}{1, 2, 3, 4}$ . Habemus ergo aequationes:  $D \sqcap 2aB^2 - ac \cup 2aB$ , et  
 $+ h..$

$h^2 - \frac{2c^2a}{B^2}h + \frac{a^2c^4 + 4a^2B^4}{B^2} \sqcap 0$  et  $D \sqcap \frac{c, c - B}{1, 2}$  et  $c \sqcap \frac{c, c - B, c - 2B}{1, 2, 3}$ , et denique

$B \sqcap \frac{c, c - B, c - 2B, c - 3B}{1, 2, 3, 4}$ . Quae aequationes cum sint numero quinque, incognitae

autem sint  $D, h, c, B$  adeoque quatuor tantum, hinc praesumendum est calculum esse  
 impossibilem, nisi theorema subsit, cujus subtilitate ipsa rerum natura calculo consu-  
 luisse putanda sit. Itaque si nihil aliud hoc scilicet ex ejusmodi inquisitione discemus, an  
 scilicet Numerorum Combinatoriorum Tabulam interpolatam potestatibus exponentium  
 fractorum accommodare possibile sit, nam si de fractis impossibilitas detegatur, non erit  
 cur de surdis laboremus.

4f. appellavimus, (1) hoc (2) hoc loco vero b. (3) sive  $L$  6f. faciendo (1)  $z -$  (2)  $\frac{z, z - \beta}{1, 2}$  (a)

incognitas ergo habemus  $D$  (supra  $c$ )  $B$  (supra  $\beta$ )  $c$  (supra  $z$ ) (b) Imo  $L$  7 loco (1)  $e \sqcap c$  (2)  $c \sqcap$   
*nicht gestr.* | (supra (a)  $z$  (b)  $D$ ) ( $aa$ ) aequari ( $bb$ ) seu  $L$  9 ipsi  $f$  (1) hoc loco (2) sive  $L$  11  $C \sqcap$

(1)  $z, z - 1$  (2)  $\frac{C, C - B, C - 2B}{1, 2, 3}$ ,  $L$  14 subsit, (1) in quo ipsa na (2) cuius  $L$  16 Tabulam (1)

Subsectione (2) interpolatam  $L$  17 fractis (1) spes non (2) impossibilitas  $L$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{2}$	$\frac{2}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{4}{2}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{6}{2}$		
$\frac{1}{2}$	$\frac{4}{2}$			
$\frac{1}{2}$				

5

Si  $y \sqcap x + \gamma$ . deberet esse

$$y^{\frac{4}{2}} \sqcap + \frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + \frac{6}{2}x^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{3}{2}} + \frac{1}{2}\gamma^{\frac{4}{2}}$$

10 Sed hoc esse absurdum facile judicari potest, quia ponendo  $x$ . et  $\gamma$  numeros esse quadratos, et  $x$  imparem et  $\gamma$  parem vel contra; patet non posse non summam esse numerum fractum, cum tamen  $y^{\frac{4}{2}}$  sit numerus integer, nisi velis aequationem esse inter  $\frac{1}{2}y^{\frac{4}{2}}$  et  $\frac{1}{2}x^{\frac{4}{2}} + \frac{4}{2}x^{\frac{3}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}}$  etc. quemadmodum  $1y^2 \sqcap 1x^2 + 2x\gamma + 1\gamma^2$ . Sed nec sic res procedet, fiet enim binomium istud nimis magnum; itaque haec Tabulae Combinatoriae interpolatio locum non habet, per  $\frac{1}{2}$ .

15 Generaliter quaestio eo redit, magnitudinis datae potentiam datam, datis magnitudinis et potentiae partibus exprimere. Quod si res per numeros combinatorios exitum reperire non potest, quaerendi sunt alii ope methodi supra praescriptae, per aequationes similes, et inductione aliquot casuum facta. Construat Tabulae species, quae forte et ad irrationalia poterit extendi.

3  $\frac{1}{2}$  (1)  $\frac{1}{2}$  (2)  $\frac{2}{2}$  L 4  $\frac{1}{2}$  (1)  $\frac{3}{4}$  (2)  $\frac{3}{2}$  L 6 f.  $\frac{1}{2}$  (1)  $\frac{5}{2}$   $\frac{1}{2}$  (2) Si L 9 hoc (1) imposs (2) esse (a) ge (b) absurdum L 15 redit, (1) datam potentiam cuiusdam literae, aliarum literarum potentia exprimere, (a) da (b) magnitudine | et *nicht gestr.* | (aa) ratione in partes sectis, (b) potentia | datis *erg.* | in partes sectis, (c) magnitudini (2) magnitudinis L 19–235,1 extendi. (1)  $y^{\frac{4}{2}}$  seu (2)  $y^{\frac{4}{2}}$  seu  $\sqrt{y^4}$  (3)  $y^{\frac{3}{2}}$  seu  $\sqrt{y^3} \sqcap \beta x^{\frac{1}{2}} + 1x^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + 2x^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta$  | x *gestr.* |  $\gamma^{\frac{3}{2}}$  (c)  $\sqrt{y^3} \sqcap \beta x^{\frac{1}{2}} + zx^{\frac{2}{2}}\gamma^{\frac{1}{2}} + zx^{\frac{1}{2}}\gamma^{\frac{2}{2}} + \beta\gamma^{\frac{3}{2}}$  (4) Qvonia L

Quoniam necesse non est, numeros illos esse combinatorios, et quoniam semper erunt arbitrariae literae, hinc eae ita explicentur semper constante modo, ut inde Tabula numerorum ejusmodi condi possit, etsi plane diversa a combinatoria vel combinatoria interpolata, modo constans. Denique quaerendum est quod inveniri possint expressiones pro exponentibus surdis. Malum est quod tunc ista reductio institui non potest. Sed videtur alia institui posse reductio per appropinquationes perpetuas, pro surdis sumendo fractorum seriem simul appropinquantem more meo, at videndum an ita res reduci possit ad analysin, seu an harum appropinquationum Termini reperiri possint. 5

Sequitur Schediasma *de Exponentibus Fractis et Surdis*.

36<sub>2</sub>. DE FORMULIS OMNIUM DIMENSIONUM, PARTES TERTIA ET QUARTA 10  
 TA  
 Februar 1675

**Überlieferung:** L Notiz: LH 35 III A 34 Bl. 5. 1 Bl. 4<sup>o</sup>. 1 S. auf Bl. 5 r<sup>o</sup>. Rückseite leer.  
 Cc 2, Nr. 909

Feb. 1675 15

De formulis omnium dimensionum  
 De Exponentibus Fractis et Surdis  
 De infiniti et indefiniti differentia

Vide Schediasma Januarii 1675. *de formulis omnium dimensionum* constans duabus partibus. 20

Constat si exponentes sint integri aut rationales, numeris combinatoriis valores binomiorum exprimi. At vero si sint fracti, aut irrationales nullam video rationem inter-

1 combinatorios, (1) hinc procedendo per omnes series eligatur nova (2) et L 16 De ...  
 dimensionum *erg. L* 18 De infiniti ... differentia *erg. L* 19 Vide (1) pro (2)  
 Schediasma L 21 rationales, (1) eos exprimi numeris combinat(-) valores (2) numeris L

---

7 more meo: vgl. VII, 3 N. 33. 9 *de Exponentibus*: vgl. N. 36<sub>2</sub>. 19 *de formulis*: vgl. N. 36<sub>1</sub>.

polandi numeros combinatorios, praeter inquisitionem analyticam, non nisi pro fractis tamen tentabilem. Hoc loco vero venit in mentem rationis, quae hoc nititur fundamento, quod omnis numerus irrationalis repraesentari potest infinita serie rationalium; et omnis numerus fractus infinita serie integrorum; quare videamus an numerorum quoque combinat[or]iorum seriebus infinitis uti liceat.

Experiamur primum in finitis, sit  $y \cap x + b$ , videamus quid sit  $y^{z-\omega}$ , fiet

$$1y^{z-\omega} [ + ] \frac{z-\omega}{1} y^{z-\omega-1} [ + ] \frac{z-\omega, z-\omega-1}{1, 2} y^{z-\omega-2} \text{ etc.}$$

Cumque  $z$  et  $\omega$  sint integri, et posito eorum numero finito etiam  $z - \omega$ , sit integer, patet modo series numerorum  $z - \omega$  etc. sit finita, succedere hunc numerorum combinatoriorum usum.

$$\frac{1}{1+b} \cap 1 \left( \frac{-b}{1+b} \right) - b \left( \frac{+b^2}{1+b} \right) + b^2 - b^3 \frac{+b^4}{1+b}.$$

$b$  autem est integer ideo  $b^3 \cap b^2$ . Sed et  $-b + b^2 \cap -b^3 + b^4$ . Itaque non potest demonstrari quod de finitis quotcunque verum est, de infinitorum quoque serie verum esse. Quoniam scilicet posteriora non decrescunt; ideoque nec locum habet ratiocinatio Archimedeae, per deductionem ad absurdum; unde sequitur fallacem esse Methodum infinitorum, neque admittendam, nisi quando deductione ad absurdum demonstrari potest; alioqui enim demonstrari posse, ex eo quod in finitorum numero quancunque res

1 numeros (1) combinat(-) (2) combinatorios, (a) nisi qvam nunc (b) praeter L 1f. fractis | illic *gestr.* | tamen L 5f. liceat. (1) Sit  $y^{4-1}$  (2) Experiamur ... sit (a)  $y^{4-1}$  et (aa)  $y \cap x + a$  (bb)  $y \cap x + b$ . fiet:  $y^{4-1} \cap 1x^{4-1} + (b) y^{z-\omega} \cap (c) y \cap x + b$  L 10f. usum (1)  $\frac{a}{a+b} \cap (a) 1 + \frac{-b}{a+b}$  (b)  $a \left( \frac{-b}{a+b} \right)$  (2)  $\frac{1}{1+b}$  L 12  $b^3 \cap b^2$ . (1) Videndum an sit  $1 - b \cap b^2 - b^3$  (2) Sed et (a)  $b^2 - b^3$  (b)  $-b^2 + b$  (c)  $-b + b^2$  L 12f. potest (1) effici (2) demonstrari L

6 fiet: Anstatt wie angekündigt  $y$  durch  $x + b$  zu ersetzen, substituiert Leibniz  $y$  mit  $y + 1$ . Dies beeinträchtigt die grundsätzliche Überlegung nicht. 11  $\frac{1}{1+b}$ : Auf der rechten Seite der Gleichung wendet Leibniz sukzessive die ersten Schritte einer Entwicklung einer Reihendarstellung durch fortgesetzte Division auf  $\frac{1}{1+b}$  an. Den Term  $\frac{-b}{1+b}$  der ersten Zerlegung von  $\frac{1}{1+b}$  stellt Leibniz im darauffolgenden Schritt als  $-b + \frac{b^2}{1+b}$  dar,  $\frac{b^2}{1+b}$  im Anschluss als  $b^2 - b^3 + \frac{b^4}{1+b}$ . Die Streichung der ersetzten Terme kennzeichnet Leibniz, indem er diese einklammert. Die rechte Seite ist somit als  $1 - b + b^2 - b^3 + \frac{b^4}{1+b}$  zu lesen. 14f. ratiocinatio: vgl. ARCHIMEDES, *Quadratura parabolae*, prop. XXIII u. XXIV.

succedit, idem succedere etiam in infinito. Unde sequitur illustri exemplo quantum inter-  
 sit inter infinitum, et indefinitum. Quod enim de indefinito terminorum numero verum  
 est, non est de infinito. Et certe: indefinitus terminorum numerus est finitus; non ergo  
 infinitus. Indefinitum ergo non est infinitum. Sed si fractio resolvi posset in integros infi-  
 nitos in infinitum decrescentes; verum foret, quod scilicet numerorum Combinatoriorum 5  
 adhiberi posset interpolatio; ad numeros potestatum exprimendos; deductione ad absur-  
 dum; assumpta differentia, si scilicet error adsit et continuata serie ad terminos usque  
 differentia majores; quin etiam etsi termini crescant, si tamen differentiae terminorum  
 $-b^3 + b^4$ , etc. concrevissent, idem potuisset demonstrari. Hinc sequitur si qua metho-  
 dus demonstratur de fractis, eandem demonstrari posse de s u r d i s , hac ad absurdum 10  
 deductione, quia omnes surdae quantitates possunt resolvi in fractas rationales, ita ut  
 termini continue decrescant. Methodus autem pro fractis videtur indagari posse, ea quam  
 coepi ratione in schediasmate *de formulis omnium dimensionum* parte 2<sup>da</sup>, nempe per ar-  
 bitrarias ascriptas, reducta postea aequatione, cum enim sint literae arbitrariae, videtur  
 methodus quaedam generalis ipsius  $z$  ope caeteras inveniendi literas haberi posse. Quo 15  
 semel facto, omnium figurarum quadraturae analyticae poterunt haberi; et laborandum  
 erit postea de reductione expressionum transcendentium, quando id fieri potest.

6 exprimendos; (1) demon (2) s(um) (3) deductione L      7 error (1) absit (2) adsit L  
 10 s u r d i s , (1) quia mutato (2) hac L      11 rationales, (1) qvare si qvi possu (2) Tantum ergo (3)  
 ita L      17 reductione (1) figura (2) expressionum L

---

13 parte 2<sup>da</sup>: vgl. N. 36<sub>1</sub> ab S. 227 Z. 16.

## 37. DE AEQUATIONE QUADRATICA

[Frühjahr 1673]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIV 2 Bl. 76–77. 1 Bog. 2°. 2 S. zweiseitig beschrieben. Textfolge Bl. 76 r°, 77 v°. Rest des Bogens leer.  
Cc 2, Nr. 849<sub>1</sub>

5

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für das Frühjahr 1673 und von Herbst 1674 bis Frühjahr 1675 belegt. In den Jahren 1673–1675 verwendet Leibniz das Gleichheitszeichen = bis Mitte 1674, *Rq* als Quadratwurzelzeichen bis Herbst 1673. Das vorliegende Stück wird durch VII, 2 N. 1 fortgesetzt.

10

Des Cartes *Geom.* lib. 1. lit. K. pag. 6. edit. 1659.

Si habeatur aequatio:  $z^2 = az + b^2$ . ut inveniam  $z$ . facio Triangulum rectangulum  $NLM$ . cujus unum latus  $LM$ . sit aequale  $b$ . radici videlicet  $\square^{\text{tae}}$  quantitatis cognitae  $b^2$  alterum autem latus  $LN$ . =  $\frac{1}{2}a$ . Deinde producta  $MN$ . base ejusdem Trianguli usque ad

$O$ . ita ut  $NO$  sit aequalis  $NL$ . erit tota  $OM = z$ . Ergo:  $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . Quodsi

15

habeatur  $y^2 = -ay + b^2$ . a base  $MN$ . aufero  $NP$ . aequalem  $NL$ . eritque reliqua  $PM$ . aequalis  $y$ . Ita ergo  $y = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . (Nota hic Cartesius jungit lineola capiti imminente partes ejusdem quantitatis, ubi potest esse aequivocatio. Item Cartesius semper dicit potius  $y^2 = -ay + b^2$ . quam  $y^2 = b^2 - ay$ . ut malit praefigere – initio, quam ordinem illum turbare.)

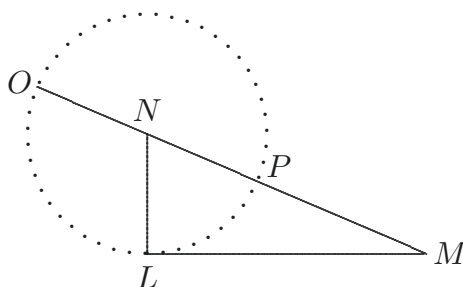
---

10 *Darüber:* NB. *Transact. Phil.* num. 64 et num. 63 ubi de lib. Slus. et Ferguson num. 49.

---

10 Des Cartes: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, DGS I S. 6 f. 1, 20 f. *Transact.* . . . num. 49: Gemeint sind *An account of two books. I. Renati Franc. Slusii Mesolabum*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903–912; J. COLLINS, *An account, concerning the resolution of equations in numbers*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 46 vom 12./22. April 1669, S. 929–934; *An Accompt of four books. III. Labyrinthus Algebrae, auct. Joh. Jac. Ferguson*. In: *Philosophical Transactions* IV, Nr. 49 vom 19./29. Juli 1669, S. 996–999.

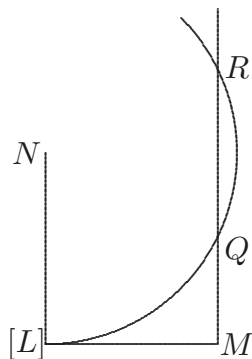




[Fig. 1]

Denique si habeatur  $z^2 = az - b^2$ . facio  $NL = \frac{1}{2}a$ . et  $LM = b$ . ut ante. Deinde non duco lineam per puncta  $M$  et  $N$ . ut in duobus aliis casibus sed duco  $MQR$ . parallelam ipsi  $LN$ . centroque  $N$  descripto per  $L$ . circulo secante  $MQR$  in punctis  $Q$  et  $R$ . erit  $MQ$ . vel  $MR$ . aequalis lineae quaesitae  $z$ . Hoc enim casu illa duobus modis exprimitur: 5

$$z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2} \text{ vel } z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}.$$



[Fig. 2]

Si circulus centrum habens in puncto  $N$ . transiensque per punctum  $L$ . non secet nec tangat rectam  $MQR$ ; nullam aequatio radicem admittet, seu problema erit impossibile. Possunt autem hae radices infinitis ferme aliis modis inveniri, sed hae sunt simplicissimae. 10

Beaunius ad hoc locum duplices annotat demonstrationes, alteras Geometricas, alteras Algebraicas. Missis Geometricis, Algebraicam consideremus.  $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$  ita demonstrat: Ergo  $\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} = z - \frac{1}{2}a$ . Et eorum  $\square^{\text{ta}}$ .  $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$ . Ergo  $z^{[2]} = b^2 + az$ . Ita demonstrabitur  $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . Nam ideo

5  $y + \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . Et horum  $\square^{\text{ta}}$   $y^2 + ay + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 + b^2$ . Ergo  $y^2 = -ay + b^2$ . Ita demonstrabitur  $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ . Ergo:  $z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ . Ergo horum  $\square$ .  $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$ . Ergo  $z^{[2]} = az - b^2$ . Ita demonstrabitur quoque ultimus modus tertii casus  $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ . Ergo  $\frac{1}{2}a - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ . Et  $\square^{\text{ta}}$   $\frac{1}{4}a^2 - az + z^2 = \frac{1}{4}a^2 - b^2$ . Ergo  $z^2 = az - b^2$ .

10 Tota inventi ratio eo nititur, ut statuendo incognitos in eodem loco, adscriptoque aliquo cognito posset extrahi Radix. Cum nec Cartesius nec alii dicant hanc aequationes reducendi Methodum ab ipso inventam, nec ego id dicere ausim. Est tum utique summae utilitatis Beaunii demonstratio contraria forma resoluta, monstrat inventi modum. Sed hoc notabile est, quod ex ipsius Cartesii lib. 3. p. 69. annotat Schotenius, eandem

15 aequationem  $z^2 = az + b^2$  aliam quoque habere Radicem, minorem quam nihil, nempe loco  $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$  hanc  $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . Quod eodem modo demonstratur.

1 ad (1) hunc Cartesii *nicht gestr.* (2) hoc locum (a) duas (b) duplices L

---

1 annotat: Fl. de BEAUNE, *Notae breves*, 1659, *DGS* I S. 112–114. 14 annotat: Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 162 f. u. 281–283.

$z - \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . Ergo  $\square =$  sunt:  $z^2 + \frac{1}{4}a^2 - az = -\frac{1}{4}a^2 + b^2$ . Hic quaestio oritur an jam cum Schotenio istud  $-\frac{1}{4}a^2 + b^2$ , ubi videtur totum  $\frac{1}{4}a^2 + b^2$  esse – seu adimi debere nihilo, possit concipi, ut  $b^2 - \frac{1}{4}a^2$ . Quae quaestio ad aliam redit, an radicis nihilo minoris quadratum possit esse aliquid. Rem in numeris experiamur, si  $2 - 4. = 0 - 2$ . ducas in se habebis priore modo  $4 + 16 - 16 = 4$ . perinde ac si multiplicasses  $4 - 2$ . Si 0. adhibeas habebis:  $0^2 + 4 - 4. \hat{=} 0$ . en ergo 4. Loco numeri ergo nihilo minoris intelligenda ejus inversa. Sed haec innituntur isti regulae  $- \hat{=} - = +$ .  $0 - 4. \hat{=} 0 - 3. = 12$ . Nota cum dicitur  $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$  cum  $z$ . sit minor 0. ideo  $0 - z = \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} - \frac{1}{2}a =$  aliquid. Et ideo  $0 - z$  (etc.) non est semper numerus nihilo minor, si scilicet ipse  $z$ . sit nihilo minor. Eodem modo Schotenus admonet  $y^2 = -ay + b^2$ . habere non tantum radicem  $y = -\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$ . sed et pro  $+\sqrt{\quad}$ . ponendo  $-\sqrt{\quad}$ . radicem falsam. Idem in  $z = \frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}$ . et aliis Schotenus non dicit, sed videtur subintelligi posse,

4–7 *Nebenbetrachtung: NB.* additio numeri nihilo minoris est subtractio, et subtractio ejus additio, alterius numeri nihilo majoris.

$1 + b^2$ . (1) Ergo  $\square$ .  $z^2 + \frac{1}{4}a^2 - \frac{1}{2}az = -\frac{1}{4}a^2 + b^2$ . Ergo  $z^2 - az = -b^2$ . Ergo  $z = -b^2 + az$ . Ego ergo ex demonstratione ista reperi errasse Schotenus, non enim oritur ut ipse ait (2) Ergo  $L$  experiamur, (1) esto  $z = \frac{1}{2}a - \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}$  (a) esto 1 et b esto: (2).  $\frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{16}{4}}$ . Ergo  $z = \frac{2}{4} - (a) \frac{17}{4} = (0 - \frac{15}{4})$  (b) Rq  $\frac{17}{4}$  Ergo  $z - \frac{1}{2}a = -\sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2} + \frac{2}{4} - \text{Rq } \frac{17}{4} - \frac{2}{4} = -\text{Rq } \frac{17}{4}$ . Ergo  $\square^{\text{ta}}$  eorum  $z^2 + \frac{1}{4}a^2 - az = -\frac{1}{4}a^2 + b^2$ ,  $+\frac{1}{4} + \frac{16}{4}$ ,  $+\frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \text{Rq } \frac{17}{4} = (2)$  si  $L$

1  $\square =$  sunt: Leibniz erkennt zunächst nicht, dass das Minuszeichen durch das Quadrieren wegfällt, und vermutet einen Fehler bei Schooten. Kurz danach erkennt er seinen Irrtum, korrigiert aber den Text nicht durchgehend.

etsi hoc ille non innuat. Notat Cartesius eodem modo si has aequationes habeas:  $x^4 = -ax^2 + b^2$  tunc  $x = \sqrt{-\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ . Addit Schoten: Si sit  $z^4 = az^2 + b^2$  fore  $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}}$ . Item si sit  $z^4 = az^2 - b^2$ . fore  $z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 - b^2}}$ . Radix ex  $z^4 - az^2 + \frac{1}{4}a^2 = \frac{1}{2}a - z^2$ .

- 5 Schoten ad Cartes. lib. 1. lit. M. p. 164. Quoties in problemate Geometrico determinata est unitas, seu linea quaedam quae pro unitate habetur, tunc radicem quadratam extrahere ex linea quadam, est invenire mediam proportionalem inter ipsam et unitatem. (: Addo 1 — 2 — 3 — (6). Multiplicare lineam per lineam eo casu est invenire quartam proportionalem quae ita sit ad secundam, uti tertia ad primam, vel quae ita sit ad secundam, ut prima ad tertiam, ac proinde invenienda est linea, 10 quae ita est ad unam datarum, ut altera datarum est ad unitatem. Dividere lineam per lineam est 3 — 6 — 1 — (2) itidem invenire quartam proportionalem, 6 — 3 — 1 —  $\left(\frac{1}{2}\right)$  seu invenire lineam quae ita sit ad unitatem, ut duae datae sunt inter se. Et haec linea quaesita repraesentat duarum linearum rationem. [:]) Quotiescunque in 15 problemate geometrico eadem quantitas ex partibus inaequalium dimensionum componitur, toties necesse est unitatem esse datam; alioquin problema non est Geometricum, sed in Numeris solvendum. Data unitate dimensio minor supponenda multiplicari per unitatem, ut aequetur majori. (: Si unitas data non est tunc multiplicatione linearum et augetur dimensio, divisione et radicum extractione minuitur, ratio est, quia pro unitate 20 supponitur Quadratillum vel Cubulus minor qualibet dabili. :) Caeterum si nobis data sit aequatio Geometrica in qua unitas in linea quadam data est, multiplicatio ista divisioque et differenda est, dum absoluta sit aequationis politura seu reductio. Et reductio facienda est, quasi problema esset in Numeris, facta politura, fiant multiplicationes divisionesque etc. [per] 1 ut adhibita data unitate.

1 Cartesius (1) idem esse, si loco (a)  $z = (b) z^2 = az + b^2$ . intelligas  $z^4 = az^2 + b^4$ . fieri enim

$$z = \sqrt{\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a^2 + b^2}} \quad (aa) \quad \text{Et si } y \quad (bb) \quad \text{Et si } x^4 = -a \quad (2) \quad \text{eodem } L$$

Schoten ad Cartes. lib. 1. lit. M. p. 164. *Geom.*

In aequatione data  $z^2 = az - b^2$ . necesse est  $b$  non esse majus quam  $\frac{1}{2}a$ . alioquin aequatio est impossibilis. Debet enim  $b^2$  subtrahi ex  $\frac{1}{4}a^2$ . Sed cum sit  $z^2 - az = -b^2$ . seu  $az - z^2 = b^2$ . et fiat:  $z^2 - az + \frac{1}{4}a^2 = b^2 + \frac{1}{4}a^2$  non video quid coegerit Schotenium dicere  $b^2$  subtrahi debere ex  $\frac{1}{4}a^2$ . cum addantur potius sibi. Idem in numeris experiamur. 5

$a$  esto 6.  $b$  esto 4. patet  $b$  esse majus quam  $\frac{1}{2}a$ . Quaeritur  $z$ . Cum  $z$ . sit  $Rq \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + a$ .

$b^2 = 16$ .  $\frac{1}{4}a^2 = 9$ .  $a = 6$ . Ergo  $Rq \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + a$

$$\begin{array}{r} 16 + 9 \\ \sqrt{\phantom{x}} \\ Rq \quad 25 = 5 + 6 = 11. \end{array}$$

10

Sed hoc absurdum. Ratio est quod non dicendum  $z = Rq \sqrt{b^2 + \frac{1}{4}a^2} + a$ . quasi fuisset initio quidem  $z - a$ . Nam quid in eodem jure dici potuisset  $a - z$ . Utrum ergo eligi debeat ex aequatione determinandum, et aequatio data monstrat  $a$  esse majus quam  $z$ . quoties  $b$

4f. *Dazu:* Recte Schotenius. Vide sequentem plagulam. NB.

1 Schoten ... *Geom. erg. L* 3  $\frac{1}{4}a^2$ . (1) Cum fiat  $z^2 + az - \frac{1}{4}a^2 = b^2 - \frac{1}{4}a^2$  (2) sed (3) sed  $L$  6f.  $+a$ . (1) Erit  $6 + Rq$  (2) Erit  $6 + (Rq \sqrt{a^2 + 9})$  5. Ergo  $z$  erit 11. probemus (aa)  $z^2 = b^2$  (bb)  $z^2 = az - b^2$ . (b)  $4 + 9 = Rq 13$ .  $z = Rq 13 + 6$ . Ergo  $z^2 = 13 + 36 + Rq 156$  (12) Ergo  $z^2 = az - b^2$  (3)  $b^2 = 16$   $L$  12  $z - a$ . (1) sed intelligi debet (2) Nam  $L$  13 qvam 61 36 + 21 circiter 36 circiter  $\sqrt{\phantom{x}}$  57c.

$z$ . (1) est enim  $z^2 = az - b^2$  (2) quoties  $L$

4 fiat: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung müsste  $-b^2$  stehen. Leibniz glaubt zunächst irrümlich an einen Fehler bei Schooten, erkennt aber später seinen Irrtum und merkt dies an. Im Folgenden beeinträchtigen weitere Versehen die Rechnungen.  $6 + a$ : Richtig wäre  $\frac{1}{2}a$ . Der Fehler pflanzt sich fort. 6,14 sequentem plagulam: VII, 2 N. 1.

est majus quam  $\frac{1}{2}a$ . Quod quaeremus ex ipsa aequatione. Necessaria enim ista inquisitio est, ad extrahendas radices ex Apotomis.  $z = az - b^2$ . Jam  $z$  supponitur esse quantitas nihilo major, ergo  $az$  est majus quam  $b^2$ . Ergo  $az = b^2 + bx$ . Ergo  $\frac{az}{b} = b + x$ . Ergo  $\frac{az}{b} - b = x$ . seu  $\frac{az - b^2}{b} = x$ . Jam supponitur  $a$  majus quam  $b$ . seu  $b + y = a$ . Erit

5  $\frac{bz + yz - b^2}{b} = x$ . seu  $bz + yz - b^2 = xb$ . vel  $bz + yz = xb + b^2$ . vel  $z = \frac{xb + b^2}{b + y}$ . Sed quaerenda est brevior via.

$$z^2 = az - b^2. \text{ Ergo } z = Rq_1 az - b^2_1.$$

$$z^2 + b^2 = az. \quad z^2 + b^2 + 2zb = az + 2zb.$$

$$z + b = Rq_1 az + 2zb_1.$$

10 Item:  $z^{[2]} + 2az + a^2 = 3az + a^2 - b^2$ .

$$\text{Ergo } z + a = Rq_1 3az + a^2 - b^2_1.$$

$$\text{Similiter } 2az + b^2 + a^2 = z^2 + 2b^2 + az.$$

$$\text{Ergo } a + b = Rq_1 z^2 + 2b^2 + az_1.$$

15 Sed jam quaeramus  $a - b$ . quoniam  $a$  supposuimus majus quam  $b$ . et videamus qualia caetera futura sint. Id ita fiet:

$$z^2 + b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab. \text{ Ergo}$$

$$b^2 + a^2 - 2ab = az - \cancel{b^2} + \cancel{b^2} + a^2 - 2ab - z^2. \text{ Ergo cumque } a \text{ sit majus ex hypothesi}$$

pro eo supponamus  $b + c$ . Ergo erit

$$\cancel{b^2} + \cancel{b^2} + c^2 + \cancel{2cb} - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} = bz + cz + \cancel{2b^2} + \cancel{2c^2} + 4cb - \cancel{2b^2} - \cancel{2bc} - z^2.$$

20 Ergo  $c = Rq_1 bz + cz + 4cb - z^2$ .

$$\text{Ergo } c^2 + z^2 = bz + cz + 4cb.$$

$$c^2 = bz + cz + 4cb - z^2.$$

$$\text{Ergo } z^2 = bz + cz + 4cb - c^2.$$

4 seu (1)  $a + y = b$ . erit  $\frac{az + yz - b^2}{b} = x$  (2)  $b + y = a$  L 7 Ergo  $|z^2 \text{ ändert Hrsq.}| = Rq L$

11 f.  $z + a = Rq_1 3az + a^2 - b^2_1$  (1) Similiter  $z + b^2 + 2zb = az + 2zb$  Ergo  $z -$  (2) Similiter L 14 jam (1) constituamus  $a -$  (2) quaeramus L

---

2  $z = az - b^2$ : Leibniz weicht ab von der Anfangsgleichung  $z = az - b^2$ , zu der er ab Z. 7 zurückkehrt.  
 12 Similiter: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term  $+a^2$ , die anschließende Folgerung ist nicht richtig.  
 18 Ergo erit: Die folgenden Umformungen sind fehlerhaft.

Ergo  $\frac{z^2}{z} = z = b + c + \frac{4cb}{z} - \frac{c^2}{b}$ .

Ergo si  $a$  est majus quam  $b$ . tunc  $z$ . est majus quam  $b$ . item majus quam  $c$ . Restat inquirendum an sit majus quam  $b + c = a$ . Quod sciemus si determinabimus utrum majus

sit  $\frac{4cb}{z}$  an  $\frac{c^2}{b}$ .  $\frac{4cb}{z} \times \frac{c^2}{b} = \dots \frac{4cb^2 - c^2z}{zb}$ .  $4cb^2$  etc. =  $c^2z$  etc. Ergo  $\cancel{Ab^2} \frac{etc.}{c^4} = \frac{cz}{4} \frac{etc.}{c^4}$ .

Ergo  $b = \frac{Rq\ cz}{2}$ . Ergo  $c^2 = z \wedge \frac{Rq\ cz}{4} + cz + 4c Rq \frac{cz}{2} - z^2$ .  $c^2 = \frac{Rq\ z^3c}{2} + cz + \frac{Rq\ 16c^3z}{2} - z^2$ . 5

$c^4 + z^4 + \cancel{z}z^2c^2 = \frac{z^3c}{2} + \cancel{c^2z^2} + \frac{8c^3z}{2}$ . Nondum Exitum reperio. Per numeros manifestum

est  $z$ . non esse majus quam  $a$ . sed contra dicendum  $a - z = Rq\ b^2 + \frac{1}{4}a^2$  = 5. Ita enim

<sup>6</sup>  
 $a = 5 + z$ . Ergo  $a - 5 = z$ . Ergo  $z = 1$ .

4 Nebenrechnung:  $\frac{4cb^2 - c^2z}{zb}$

8 Darunter: Vide seq.

3  $b + c = a$ . (1) Redeamus ad initia.  $z^2 = az - b^2$ . si  $a = b$ . Ergo  $z^2 = bz - b^2$ . Ergo  $z^2 + b^2 +$  (2)

Qvod  $L$  8  $z = 1$ . | (1)  $z =$  (2)  $z^2 = az - b^2$  Male calcularam initio (3)  $\frac{aa + 4zz = 4az}{4}$   $4az - aa = 4a$

$\wedge z - a$   $4zz$   $4az -$  gestr. |  $L$

6  $c^4 + z^4 + \cancel{z}z^2c^2$ : Leibniz unterlaufen beim Quadrieren Flüchtigkeitsfehler. Er versucht eine numerische Probe. **8,10** Vide seq.: Leibniz setzt die Untersuchung in VII, 2 N. 1 fort.

38. DE AEQUATIONIBUS PER LOGARITHMOS RESOLUTIS  
Juni 1675

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 94–97. 2 Bog. 2°. 8 S.  
Cc 2, Nr. 985

5 38<sub>1</sub>. DE AEQUATIONIBUS PER LOGARITHMOS RESOLUTIS (NUM. 1)

Junii 1675

De Aequationibus per Logarithmos resolutis (num. 1)

6f. Junii 1675 | De Aequationibus ... (num 1) *erg.* || Hac Schedula sub finem continetur Resolutio omnium aequationum per logarithmos: et inventio geometrica logarithmi binomii propositi ex datis logarithmis nominum; et quantitatibus; et logarithmis ac (1) nominibus (2) quantitatibus nominum alterius binomii unum cum proposito nomen commune habentis, cuius (a) logarithm (b) binomii logarithmus datur. *erg. u. gestr.* | *Dazu, nicht gestr.:* appropinquando concedo. *L*



Si sit  $z \square m + n$

fiet ...  $z^2 \square m^2 + n^2, + 2mn \hat{\ } 1$

$z^3 \square m^3 + n^3, + 3mn \hat{\ } m + n$   
⌋

$z^4 \square m^4 + n^4, + 4mn \hat{\ } \underbrace{m + n}_{z^2} \square - \frac{1}{2}mn$ . Nempe  $m^4 + \underbrace{4m^3n + 6m^2n^2 + 4mn^3}_{z^2} + n^4$

$$4mn \hat{\ } m^2 + \frac{6}{4}mn + n^2$$

5

$z^5 \square m^5 + n^5, + 5mn \hat{\ } \underbrace{m + n}_{z^3} \square$  fere

$$m^5 + \underbrace{5m^4n + 10m^3n^2 + 10m^2n^3 + 5mn^4}_{z^3} + n^5$$

$$5mn \hat{\ } m^3 + \frac{10}{5}m^2n + \frac{10}{5}mn^2 + n^3$$

$z^6 \square m^6 + n^6, + 6mnz^4$  fere

$$z^6 \square m^6 + \underbrace{6m^5n + 15m^4n^2 + 20m^3n^3 + 15m^2n^4 + 6mn^5}_{z^4} + n^6$$

$$6mn \hat{\ } m^4 + \frac{15}{6}m^3n + \frac{20}{6}m^2n^2 + \frac{15}{6}mn^3 + n^4$$

$z^7 \square m^7 + n^7, + 7mnz^5$  fere

$z^8 \square m^8 + n^8, + 8mnz^6$  fere

10

1-11 Nebenbetrachtung:

1	1	1	<del>1</del>	
2	3	4	5	<del>6</del>
3	6	10	15	<del>20</del>
4	10	20	35	<del>50</del>
5	15	35	70	<del>105</del>
6	21	56	<del>105</del>	<del>140</del>
7	28	84	<del>140</del>	<del>175</del>
8	36	<del>105</del>	<del>175</del>	<del>210</del>
9	45	<del>140</del>	<del>210</del>	<del>252</del>
10	55	<del>175</del>	<del>252</del>	<del>300</del>

4 -  $\frac{1}{2}mn$  erg. L

Nota  $+ 1m^3 \frac{2mn \wedge m + n}{+2m^2n + 2mn^2} + 1n^3$  debet esse cubus, conferatur cum  $p^3 + 3pq \wedge + c \dots$

$p + q, +p^3$  erit  $p \sqcap m\sqrt{\textcircled{3}1 + c}$  et  $3mn\sqrt{\textcircled{3}1 + 2c + c^2} \sqcap 2mn$ . Ergo  $1 + 2c + c^2 \sqcap \frac{8}{27}$  et  $q \sqcap n \dots\dots\dots$

$c \sqcap 1 \mp \sqrt{\frac{8}{27}}$ . Ergo dici potest:

5  $z^5 \sqcap + m^3 + n^4 + 5mnz^3 - 5mn \wedge -c \wedge m^3.$   
 $1 \quad n^3$

$z^3 \sqcap -3mnz$   
 $+ m^2 + mn + n^2 \wedge z$

10  $z^3 \sqcap m^2z - 2mnm$   
 $+ 2mnn$   
 $+ n^2 \wedge m - n$

$z^5 \sqcap * + qz^3 * - rz + s \sqcap 0$ . Erit  $m \sqcap \frac{q}{5n}$  et  $m^5 \sqcap \frac{q^5}{5n^5}$ . Erit  $\frac{q^5}{3125n^5} + n^5 \sqcap s$ .

12 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r} 5 \\ 5 \\ \hline 25 \\ 5 \\ \hline 125 \\ 25 \\ \hline 625 \\ 250 \\ \hline 3125 \end{array}$$

1-12 Nota ...  $+n^5 \sqcap s$  erg. L

1-12 Nota ...  $+n^5 \sqcap s$ : Vgl. S. 272 Z. 11-16.  $3 \ 3mn\sqrt{\textcircled{3}1 + 2c + c^2} \sqcap 2mn$ : Leibniz ver-  
 gisst auf der linken Seite der Gleichung einen Faktor  $\sqrt[3]{1+c}$  und verfehlt so das Ergebnis  $c = -\frac{1}{3}$ .

Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.  $4 \ c \sqcap 1 \mp \sqrt{\frac{8}{27}}$ : Folgerichtig gerechnet ergibt sich

$c = \mp \sqrt{\frac{8}{27}} - 1$ .  $5 \ z^5 \sqcap$ : Auf der rechten Seite der Gleichung müssten die ersten Terme  $+m^5 + n^5$   
 lauten.  $7-11 \ z^3 \dots + n^2 \wedge m - n$ : Leibniz versucht den Ansatz  $z = m - n$ .

Unde hoc tandem colligo:

$z \sqcap m + n$ $z^2 \sqcap m^2 + n^2 + 2mn \overset{h}{\wedge} 1$ $z^3 \sqcap m^3 + n^3 + 3mn \wedge m + n$ $z^4 \sqcap m^4 + n^4 \wedge \wedge + 4mn \wedge \wedge \wedge m^2 + 2mn + n^2$ $z^5 \sqcap m^5 + n^5 \wedge \wedge + 5mn \wedge \wedge \wedge m + n \boxed{3}$ $z^6 \sqcap m^6 + n^6 \wedge \wedge + 6mn \wedge \wedge \wedge m + n \boxed{4}$ $z^7 \sqcap m^7 + n^7 + 7mn \wedge m + n \boxed{5}$	$\oplus$ <div style="border: 1px solid black; padding: 5px; width: fit-content; margin: 0 auto;"> <math display="block">\odot</math> <math display="block">\triangleright</math> <math display="block">-\frac{1}{2}mn \wedge</math> <math display="block">-\frac{2}{2} \left\{ \begin{matrix} m^2n \\ mn^2 \end{matrix} \wedge \right.</math> <math display="block">-\frac{3}{2} \left\{ \begin{matrix} m^3n \\ mn^3 \end{matrix} \wedge -\frac{\cancel{X}}{3}m^2n^2 \wedge \right.</math> <math display="block">\odot \not\propto \mathfrak{A}</math> <math display="block">-\frac{4}{2} \left\{ \begin{matrix} m^4n \\ mn^4 \end{matrix} \wedge -\wedge 2 + \frac{2}{3} \wedge m^3n^3 \right.</math> </div>	$\text{vel } z^4 \sqcap 4mn \wedge \wedge m + n \boxed{2} \wedge \wedge + m^2 - n^2 \boxed{2}$ $\text{vel } z^6 \sqcap 6mn \wedge m + n \boxed{4} \wedge \wedge + m^2 - n^2, \boxed{3}, -6m^2n^4, +m^3 - n^3, \boxed{2}$ $\text{sive } z^6 \sqcap 6mn \wedge m - n \boxed{4} - 6m^2n^2 \wedge \wedge \frac{m^2}{n^4}$
---	---	---

6 Nebenbetrachtung:  $z^4 \sqcap * \begin{matrix} \textcircled{4}mnz^2 + m^3 + m^2n \\ 5mn \end{matrix} [+ ] mn^2 + n^3z + 2mn$   
 $z^4 \sqcap$

8 Neben  $-\frac{\cancel{X}}{3}m^2n^2$ : Error

---

8  $-\frac{\cancel{X}}{3}m^2n^2$ : Richtig wäre  $-\frac{8}{3}m^2n^2$ . Leibniz erkennt den Fehler und markiert ihn, korrigiert ihn aber nicht. Auch die folgenden Gleichungen für  $z^6$  sind fehlerhaft.  
 10  $-\wedge 2 + \frac{2}{3} \wedge m^3n^3$ : Richtig wäre  $-5(m^3n^2 + m^2n^3)$ .

Sit Trinomium:  $z \sqcap m + n + p$ . Cubus erit:  $m^3 + 3m^2n + 3mn^2 + n^3$ .  
 $+ 3m^2p \quad \cdot 2np + 3n^2p$   
 $\quad \quad \quad \cdot p^2 + 3np^2$   
 $\quad \quad \quad + p^3$

5 Videamus an disserari possit haec propositio in multipulum ipsius  $m + n + p$ . et in multipulum  $m^2 + 2mn + 2mp, + n^2 + 2np + p^2$ . Scilicet excerpemus:  $2mn + 2mp \hat{=} m + n + p \sqcap$

$2m^2n + 2mn^2 + \left(\frac{2}{4}\right)mnp, + 2m^2p + \left(2mnp\right) + 2mp^2$ , et restat:

$$m^3 + 2m^2n + 2mn^2 + n^3$$

1-251,8 *Nebenbetrachtung auf Bl. 97r<sup>o</sup>*:

$$\begin{array}{r} m^3 + 3m^2n + 3mn^2 \quad n^3 \\ \quad \quad \quad p \quad 2np \quad 3n^2p \\ \quad \quad \quad \quad \quad p^2 \quad 3np^2 \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad \quad p^3 \end{array} \quad \begin{array}{l} m + n, \left(\frac{3}{3}\right) \\ m + p, \left(\frac{3}{3}\right) \end{array} \quad -m^3 + 3mnp$$

$$\begin{array}{l} 6mnp \quad 3n^2p + 3np^2 \\ \text{seu} \dots \quad 3np \hat{=} n + p \\ \text{seu} 3np \hat{=} \underbrace{n + p + m}_y \end{array}$$

$$m^3 + n^3 + \frac{q^3 a^3}{27n^3} \sqcap a^2l$$

$$\odot m^3 + 3m^2n + 3mn^2 \quad n^3 \\ \quad \quad \quad 3mnp \quad \sqcap a^2l \\ 3m^2p \quad 3mp^2 \quad p^3$$

$$\frac{aq}{3} + 3nm + 3n^2 + \frac{3qam}{3n} + \frac{3q^2a^2}{9n^2} \sqcap 0$$

$$\begin{array}{l} 3mn \hat{=} m + n \\ 3mp \hat{=} m + p \\ \quad \quad \quad \wedge \quad \quad \quad \wedge \\ \quad \quad \quad + \frac{qa}{3n} \quad + \frac{qa}{3n} \end{array} \quad + \frac{aq}{3}m \quad p \sqcap \frac{qa}{3n}$$

$\frac{aqm}{3} [+ ] 3nm + 3n^2 + \frac{3q^2a^2}{9n^2} + \frac{3q^2a^2}{9n^2} \sqcap a^2l$ . Separetur aequatio  $\odot$  in duas, unam,  $m + n \sqcap 0$

alteram:  $\frac{aqm}{3} + \frac{q^3a^3}{27m^3} + \frac{3q^2a^2}{9m^2} + \frac{3q^2a^2}{9m^2} \sqcap a^2l$  et rursus faciendo  $\frac{q^3 \mathbb{N}^9}{a^9 27m^3} \sqcap \frac{a^2l \mathbb{N}^3}{a^3}$ . sive

$$m \sqcap \frac{\mathbb{N}^2}{v}. \text{ fiet } \frac{aq \mathbb{N}^4}{v} + \frac{3q^2a^2}{9v^2} + \frac{3}{3} \text{ [bricht ab]}$$

$$\begin{array}{r}
 p \\
 2np \\
 p^2 \\
 3n^2p \\
 3np^2 \\
 p^3
 \end{array}$$

Videamus jam an quadrati ab  $m + n + p$  multiplum invenire possimus. Excerpendo:  $m^3 + 2m^2n + 2m^2p, +mn^2 + 2mnp + mp^2$  restabit:  $mn^2 + 2mnp + mp^2, +n^3 + 3n^2p + 3np^2 + p^3$ . sive restabit  $n + p$ , [2],  $\wedge m$ . et  $n + p$ , [3]. 5

Ergo erit  $z^3 \sqcap mz^2 + m \wedge n + p, z + m \wedge n + p$  [2].  
 $+ n + p$  [3]

Conferatur aequationi. Sit jam aequatio:

$$y^3 * ahy + a^2l \sqcap 0. \text{ Pro } y \text{ pone } z + c \text{ fiet } z^3 + 3cz^2 + 3c^2z + c^3 \text{ erit } m \sqcap 3c. \text{ et } 10 \\
 + ah \cdot + ahc \\
 + a^2l$$

$cn + cp \sqcap 3c^2 + ah$ , sive  $n + p \sqcap \frac{3c^2 + ah}{c}$ . Unde denique:

$$\frac{9c^4 + 6c^2ah + a^2h^2}{\frac{c}{3}} + \frac{27c^6 + 27ahc^4 + 9a^2h^2c^2 + a^3h^3}{c^3} \sqcap c^3 + ahc + a^2l.$$

Fiet:  $53c^6 * + 44ahc^4 - a^2lc^3 + a^2h^2c^2 * + a^3h^3 \sqcap 0$ . quae reapse cubica est. 15

Quod etsi nihil dederit quod desideravimus, haec tamen binomiorum expressio memorabile exhibet theorema.

Invenio hinc quaedam memorabilia duci circa logarithmos.

Aequationes omnes potestatum reducimus ad aequationes inter logarithmos binomiorum, ut  $\log \overline{y + f}$ .  $\log \overline{y + g} \sqcap \log \overline{y + h} + \log \overline{y + l}$ . 20

Jam logarithmus alicujus numeri velut  $b$ . est ad logarithmum a 10 cognitum, quem vocabo  $\aleph$  aliumve certi numeri constantis, qui etiam est cognitus, ut  $10 - \frac{100}{2} + \frac{1000}{3} -$

$$\begin{array}{r}
 7f. \text{ Daneben: } y^3 \ d\aleph y^2 \ \aleph^2 qy \ \aleph^3 \sqcap 0 \\
 m \sqcap d\aleph \quad d\aleph \wedge n + p \sqcap \aleph^2 q
 \end{array}
 \begin{array}{r}
 27 \\
 18 \\
 45
 \end{array}$$

9–15 Conferatur ... cubica est: Beim Koeffizientenvergleich unterlaufen Leibniz mehrere Versehen.  
 21 logarithmus alicujus numeri: Leibniz verwendet im Folgenden irrtümlich die Reihenentwicklung für  $\ln(1 + x)$  zur Darstellung von  $\ln(x)$ . Das Versehen beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

$$\frac{10000}{4} \text{ etc. est ad } \frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \text{ etc. seu } \log \bar{b} \propto \frac{\frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4} \text{ etc.} \hat{=} \mathfrak{N}}{\frac{10}{1} - \frac{100}{2} + \frac{1000}{3} - \frac{10000}{4} \text{ etc.}}$$

Ideoque in aequatione omnia poterunt dividi per  $\frac{10}{1} - \frac{100}{2} + \frac{1000}{3}$  etc. adeoque perinde

erit evanescenti illo multiplicatore et divisore perpetuo ac si dicas  $\log b \propto \frac{b}{1} - \frac{b^2}{2} + \frac{b^3}{3} - \frac{b^4}{4}$

etc. Notandum est tamen, ipsum  $b$ . esse numerum minorem unitate seu fractionem. Ergo

5 si sit  $b$  vel  $z \propto a + n$ . binomium, tunc erit logarithmus a  $m + n$  aequalis a:

$$\begin{array}{l|l} +\frac{z}{1} & + \frac{m+n}{1} \\ -\frac{z^2}{2} & - \frac{m^2}{2} + \frac{n^2}{2} + \frac{2mn}{2} \hat{=} 1 \\ +\frac{z^3}{3} & + \frac{m^3}{3} + \frac{n^3}{3} + \frac{3mn}{3} \hat{=} m+n \\ -\frac{z^4}{4} & - \frac{m^4}{4} + \frac{n^4}{4} + \frac{4mn}{4} \hat{=} \llcorner m+n, \boxed{2}, -\frac{1}{3} \frac{m^2 n^2}{4} \llcorner \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

10

Jam  $\frac{m}{1} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4}$  [etc.] est logarithmus a  $m$ ; et  $\frac{n}{1} - \frac{n^2}{2} + \frac{n^3}{3} - \frac{n^4}{4}$  etc.

logarithmus a  $n$ . Et quoniam in serie infinita  $-\frac{2mn}{2} \hat{=} 1 + \frac{3mn}{3} \hat{=} m+n - \frac{4mn}{4} \hat{=} m+n, \boxed{2}$  etc.

evenit feliciter ut qui termini multiplicantur per 2 vel 3 etc. iidem per eosdem numeros dividuntur, hinc fit divisa tota serie per  $mn$  ut series fiat progressionis

15 geometricae, atque ideo omisso primo termino,  $-mn \hat{=} 1$ , reliqui summa erit:  $\frac{m+n}{1+m+n}$ .

Supersunt termini qui supra in  $\odot$  qui non sunt nisi binomia facta ex  $mn$ , vel  $m^2n$  etc., ita tamen ut semper solida sibi respondentia jungantur, in terminos unius seriei descendentes.

Prima series descendens est  $\odot \mathcal{D}$ . ubi primus terminus  $mn$  quia nihil in eo variabile, secundus  $m^2n$ . et  $mn^2$ , tertius  $m^3n$  et  $mn^3$  etc. Ubi rursus hoc commodum habemus,

20 quod numeri divisores, qui sunt progressionis arithmeticae evanescent ob respondentes

---

16 supra in  $\odot$ : s. o. S. 249 Z. 4-9.

eosdem multiplicatores ex natura binomii. Praeterea etiam totum  $\odot$  dividi potest per  $mn$ . Restat ergo ut reliquarum illarum serierum in infinitum procedentium, quarum prima  $\mathfrak{D}$  incipit ab  $mn$  secunda  $\mathfrak{C}$  incipit ab  $m^2n^2$ . sequens  $m^3n^3$  ab aliis inciperet, et quarum quaelibet resolvi potest in duas progressionis ex Geometricis deformatas, multiplicando quemlibet terminum per numerum respondentem progressionis Geometricae. Exempli causa series  $\odot \mathfrak{D}$ . multiplicata prius per 2. (: quemadmodum sequens  $\mathfrak{C}$  multiplicanda est per 3. et alia quae crescit ab  $m^3n^3$  per 4, ut scilicet fractiones evanescant) resolvetur in has duas:

$$\begin{aligned} \text{unam} & \quad + mn - 2m^2n + 3m^3n - 4m^4n + 5m^5n \text{ etc.} \\ \text{et alteram} & \quad - 2mn^2 + 3mn^3 - 4mn^4 + 5mn^5 \text{ etc.} \end{aligned}$$

5  
10

Quarum quaelibet si numeri arithmetici auferantur est Geometrica continua multiplicatione per  $mn$  producta.

$$\begin{aligned} \text{Nimirum prima series divisa per } n, \text{ dat: } & + m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 + 5m^5 \text{ etc.} \\ \text{secunda per } m \text{ dabit} & \quad - 2n^2 + 3n^3 - 4n^4 + 5n^5 \text{ etc.} \end{aligned}$$

Quales series necesse est ratione quadam ad Logarithmorum valores contraria reperiri. Nam Logarithmus est  $m - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4} + \frac{m^5}{5}$  etc. Si esset:  $\frac{m}{1} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^3}{3} - \frac{m^4}{4}$

15

$$+ \frac{m^5}{5} - \frac{m^6}{6} \text{ etc. Pone esse ordinatam } z \sqcap 1 \wedge 1 - 2 \wedge 2y + 3 \wedge 3y^2 - 4 \wedge 4y^3 + 5 \wedge 5y^4 \text{ etc.}$$

Summa omnium  $z$ , posito ultimam esse  $m$ , erit:  $\sqcap \frac{1 \wedge 1m}{1} - \frac{2 \wedge 2m^2}{2} + \frac{3 \wedge 3m^3}{3} + \frac{4 \wedge 4m^4}{4}$  etc. Quaerenda est ergo figura cujus ordinata  $z$ , eo quo dixi, modo exprimi possit.

Et potest rursus fingi ipsam  $-z$  auferendo inde  $1 \wedge 1$  et postea signa mutando aequari summae omnium  $1 \wedge 1 \wedge 1 - 2 \wedge 2 \wedge 2v + 3 \wedge 3 \wedge 3v^{[2]}$  etc. Sed haec ad majores potius quam minores difficultates ducunt, id ergo agendum est, ut quaeratur figura quaedam, cujus ordinata aequetur a,  $1m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4 + 5m^5$  etc. ponendo  $m$ . esse abscissam. Sed haec per ordinatam fieri non potest, itaque quaerendum per summam aliarum ordinarum, nempe quaerenda exempli causa summa omnium ordinarum quarum una

20  
25

$$\sqcap 1 - \frac{1}{y} + \frac{1}{y^2} - \frac{1}{y^3} + \frac{1}{y^4}. \text{ Jam talium serierum: } \frac{1}{y^2} \text{ aut } \frac{1}{y^3} \text{ aut } \frac{1}{y^4} \text{ summas secundum}$$

$$17 - \frac{m^5}{5} + \frac{m^6}{6} \quad L \text{ ändert Hrsg.} \quad 20 \text{ ipsam } | - \text{ erg. } | z | \text{ auferendo } \dots \text{ mutando erg. } | \text{ aequari } L$$

*Arithmetica infinitorum* Wallisii quaerere operae pretium erit. Nempe figura quaelibet simplex seu quae aequatione binomia exprimitur, est ad Rectangulum Circumscriptum, ut 1 ad  $\varpi + 1$  ponendo  $\varpi$ . esse seriei indicem. Jam reciprocarum indices sunt negativi, unde pro  $\varpi$  ponemus  $-\varpi$ . et fiet  $\frac{\text{omn. } y \text{ seu summa ordinarum}}{\text{ad } mv. \text{ Rectang. Circumscriptum}} \varpi \frac{1}{-\varpi + 1}$  seu omn. ponendo  $m$  esse ultimam abscissam  $v$ . ultimam ordinatam

$y \varpi \frac{mv}{-\varpi + 1}$ . vel summa omnium  $-y \varpi \frac{mv}{\varpi - 1}$ . Quod faciendum tunc cum  $\varpi$  major quam 1. Sed cum  $\varpi$  fractio est, seu cum valor ordinatae  $y$  est  $\varpi \sqrt{ax}$ . vel  $\sqrt{ax^3}$  etc. ponendo  $x$ . abscissam, pone jam  $\varpi \varpi \frac{1}{2}$ . vel  $\frac{2}{3}$  vel  $\frac{3}{4}$  vel  $\frac{4}{5}$  etc. et generaliter expo-

10 nentem esse fractionem, in qua numerator a nominatore differt unitate tunc eveniet ut habituri simus expressionem spatii, vel summae ordinarum non per fractionem sed per integrum v. g. sit aequatio  $y \varpi \frac{1}{\sqrt{\textcircled{3}x^2}}$  quae est reciproca Heuratianae parabolae, cujus parabolae curvam dimensus est Heuratus (idemque locum habet in omnibus aliis Reciprocis figurarum quarum curvas dimensus est Heuratus,) erit  $\varpi \varpi \frac{2}{3}$ . adeoque omn.

15  $y \varpi \frac{mv}{-\frac{2}{3} + 1} \varpi \frac{mv}{-\frac{2}{3} + 3} \varpi \frac{3mv}{1}$ . Idemque in caeteris habet locum, itaque ut quaera-

tur summa hujus seriei  $1m - 2m^2 +$  [etc.] quaerenda ergo figura; est autem  $v \varpi \frac{1}{\sqrt{\textcircled{3}m^2}}$

adeoque  $3mv \varpi \frac{3m \sim \sqrt{\textcircled{3}m^2}}{1}$ . Ergo summae figurarum numero fracto carentes sunt:

1 f. quaelibet (1) circumscripta est ad (2) simplex (a) est ad Rectangulum circumscriptum ut (b) seu quae aequatione (aa) pura ex (bb) binomia  $L \quad 4 \varpi \frac{1}{-\varpi + 1}$  (1) Qvod si jam ponamus (2) seu  $L$  10 unitate | (1) qualis (2) qualium scilicet curvas definivit Heuratus *erg. u. gestr.* | tunc  $L \quad 12$  aequatio (1)  $y \varpi (a) \sqrt{a}$  (b)  $\sqrt{\textcircled{3}y^2}$  (c)  $\sqrt{\textcircled{3}x^2}$  qualis est illius parabolae Heuratianae primi gradus, eius index erit (2)  $y \varpi \frac{1}{\sqrt{\textcircled{3}x^2}} L$

---

13 dimensus: H. van HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum in lineas rectas*, 1659, DGS I S. 517–520.



	$\frac{2m \smile \sqrt{2}m}{1}$	$\frac{3m \smile \sqrt{3}m^2}{1}$	$\frac{4m \smile \sqrt{4}m^3}{1}$	$\frac{5m \smile \sqrt{5}m^4}{1}$
a figura:	$y^2 \sqcap 2ax$	$y^3 \sqcap ax^2$	$y^4 \sqcap ax^3$	$y^5 \sqcap ax^4$
sed deberet esse:	$\frac{2M \frown M}{1}$	$\frac{3M \frown M^2}{1}$	$\frac{4M \frown M^3}{1}$	$\frac{5M \frown M^4}{1}$

Sed patet facile ex his istam seriem esse cum inventa inconciliabilem nec proinde per ordinatas paraboloeidum aut hyperboloeidum seriei:  $1m - 2m^2 + 3m^3 - 4m^4$  etc. iniri posse summam. 5

Generaliter in numeris  $\frac{1}{m} - \frac{2}{m^2} + \frac{3}{m^3} - \frac{4}{m^4}$  etc.

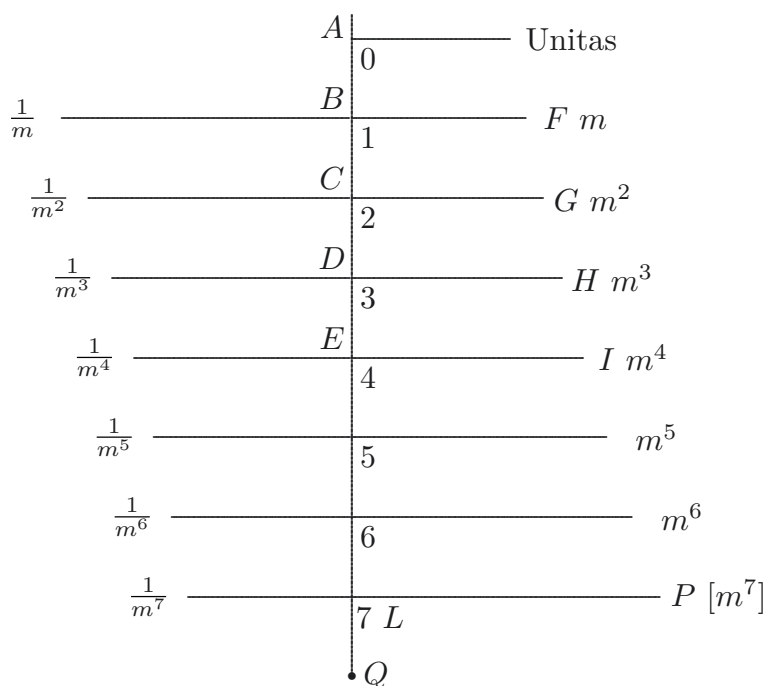
summae sunt:  $\frac{1}{m} - \frac{m-2}{m^2} + \frac{m^2-2m+3}{m^3} - \frac{m^3-2m^2+3m-4}{m^4}$

Unde patet summam seriei in qua numeri progressionis Geometricae directae multiplicantur per numeros progressionis arithmeticae ordine ad ordinem exponentium inverso, 10

9-256,2 *Nebenbetrachtungen u. Nebenrechnungen:*

$2 \frown 1$	1	}	0 [+ 1]	9	32	64
$4 \frown 2$	9		8 + 1	<u>24</u>	<u>5</u>	<u>6</u>
$8 \frown 3$	33		32 + 1	33	160	384
$16 \frown 4$	97		96 + 1	<u>64</u>		
$32 \frown 5$	257		256 + 1	97		
$64 \frown 6$	641		640 + 1	<u>160</u>		
				257		
$+\frac{1}{2} \frown 1$	$\frac{1}{2}$			<u>384</u>		
				641		
$-\frac{1}{4} \frown 2$	+0					
$+\frac{1}{8} \frown 3$	$\frac{3}{8}$					
$-\frac{1}{16} \frown 4$	$\frac{2}{16}$					
$+\frac{1}{32} \frown 5$	$\frac{9}{32}$					
$-\frac{1}{64} \frown 6$	$\frac{12}{64}$					

reduci ad summam seriei progressionis geometricae multiplicatae per numeros arithmeticos ordine exponentium directo. Videntur autem utique directae esse inversis naturaliores ac tractabiliores. Ecce theorema valde memorabile.



[Fig. 1]

5 Sit Axis  $ABCDE$  etc. Applicentur aequali[bu]s intervallis ordine, termini  $m$ .  $m^2$ .  $m^3$ .  $m^4$ . Ducantur in distantias a basi quadam  $LP$  seu a puncto  $Q$  proximo ultra  $L$  cui omnium ultima v. g.  $LP$  seu  $m^7$  applicata est, fiet:

$$7m. 6m^2 \quad 5m^3 + 4m^4 + 3m^5 + 2m^6 + 1m^7.$$

Applicentur reciprocae ex opposito latere, quae ducantur in distantias ab  $A$ , fiet

10  $\frac{1}{m}$ .  $\frac{2}{m^2}$ .  $\frac{3}{m^3}$  etc. Summa eorum rectangulorum ponatur  $y$ . Haec summa erit ad summam rectangulorum sub directis et distanti[i]s a vertice, ut una directa est ad unam reciprocam, seu ut  $\frac{1}{m}$  ad  $m$ . seu ut 1 ad  $m^2$ ; qui una est ad unam ut alia ad aliam respondentem.

6 quadam (1) EG sumta seu a puncto 7F | (a) ultra (b) proximo (aa) post (bb) ultra (cc) ultra F erg. | cui omnium ultima, v. g. (aaa) FG (bbb) LP (2) M (3) LP seu ... ultra | F ändert Hrsg. | cui L

Summa ergo rectangulorum ex directis et a vertice distantis erit  $m^2y$ . at  $y$  etiam aequatur summae rectangulorum ex directis in a basi distantias, aut potius a puncto  $Q$  ultra basin unitate remoto, excepto tantum ultimo, ob unitatem, breviter, differentia saltem inter eas duas summas nota est, quam vocabimus  $\mathfrak{A}$  vel  $-\mathfrak{A}$ . Erit  $y + \mathfrak{A}$  aequalis summae horum rectangulorum sub terminis directis et distantis a basi, vel puncto 5  
 ultra basin, etc. Jam summa harum duarum summarum rectangulorum sub directis et distantis a basi et sub directis et distantis a vertice, simul sumta aequatur summae omnium horum terminorum, in rectam constantem  $AL$  vel si mavis  $AQ$  ductorum, vel saltem differentia nota est, quam vocabimus  $\Delta$  vel  $-\Delta$ . Datur autem haec summa quam vocabimus  $S$ . et fiet:  $m^2y + y + \mathfrak{A} \sqcap S + \Delta$  eritque  $y \sqcap \frac{S + \Delta - \mathfrak{A}}{m^2 + 1}$ . Ergo inventa est summa 10  
 numerorum progressionis geometricae finitorum, per arithmetica ordine directo vel inverso multiplicatorum, nec refert termini se sequantur per  $+$  et  $-$  an quomodocunque, dummodo constanti regula interrumpantur.

Ausim dicere hoc problema inter subtilissima et utilissima, et addo difficillima eorum quae novi censendum esse. 15

Hinc enim habetur jam ratio admirabilis profecto, per quam summa facilitate calculari possit logarithmus binomii ex logarithmo partium sine ullo calculo; qua ratione longe melius habebimus logarithmos altiorum terminorum, quam quod in tabulis esse possint.

---

**14,1-4** *Nebenbetrachtung*: In aequatione 4. dimensionum hoc modo 15 habebuntur arbitrariae scribendo non  $y + b$ . sed  $\frac{1}{a}y + b$ . ex quibus quatuor insumuntur in comparationem analogiae in aequationem, tres aut quatuor in destructionem fractionum  $\frac{1}{y + e}$ . reliquae in  $\frac{1}{1 + y}$ . vel  $\frac{1}{1 - y^2}$  destruendas quousque licet.

2 in a (1) vertice (2) basi  $L$  4 vel  $-\mathfrak{A}$  erg.  $L$  4f. aequalis |summae erg. | horum  $L$   
 6 summa (1) horum rectangulorum (2) harum  $L$  8 ductorum (1) datur autem haec summa (2),  
 vel  $L$  9 vel  $-\Delta$  erg.  $L$  17 partium, (1) et quod est majoris longe momenti hinc haberi poterit  
 resolutio omnium aequationum facillima, per logarithmos. In numeris quantum libet vero propinquis sine  
 calculo prorsus nullo. Qvod ne sperare quidem audebam. (2) sine  $L$

Quod attinet ad aequationes, primum si sumamus  $\frac{y+a, \hat{y}+c}{y+b, \hat{y}+d} \cap \frac{y+e, \hat{y}+f}{y+g, \hat{y}+h}$ .

$$\boxed{\frac{y^2 + dy + bd}{+ b.}}$$

Unde  $\log. \frac{y+a}{y+b} + \log. \frac{y+c}{y+d} - \log. \frac{y+e}{y+g} - \log. \frac{y+f}{y+h} \cap \log. \frac{y+e}{y+g} + \log. \frac{y+f}{y+h} - \log. \frac{y+g}{y+h} - \log. \frac{y+h}{y+h}$ .

5 Unde patet quando aequalis est logarithmorum affirmativorum et negativorum numerus, tunc tolli logarithmum incognitae ex aequatione, si scilicet logarithmos quaeramus binomiorum.

Nimirum  $\log. \frac{y+a}{y+b} \cap \log. y. \log. e., +ye \hat{y} \frac{1}{y+e} + \odot$ . Vicissim si cognita sit  $y$ .

hinc inveniemus accurrate summam infinitae progressionis  $\odot$  ope hujus aequationis et  
 10 quantitas  $\odot$  quam volumus propinque inveniri potest tum  $\odot \mathfrak{D}$ , tum  $\odot \mathfrak{F}$  et sequentes; miscendo tamen valorem,  $y$ . ita scilicet, ut habeamus  $\frac{1}{1-y}$ . vel similia et  $\frac{1}{1-y^2}$ . etc. neque aliter reperietur  $y$ . in valore ipsius  $\odot$ . nisi quatenus contingit etiam aliquando  $\frac{y}{cognita}$  et  $y^2$  cognita scilicet  $\frac{y}{cognita}$  et  $\frac{1}{1-y^2}$  ob  $\odot \mathfrak{D}$  et  $\frac{y^2}{cognita}$  et  $\frac{1}{1-y^2}$  ob  $\odot \mathfrak{F}$  et ita de caeteris et raro opus erit ire ultra  $y^2$ . Poterunt  $\odot$  sequentia post  $\odot \mathfrak{F}$  negligi plerumque.

15 Porro  $\frac{1}{1-y}$  et  $\frac{1}{1-y^2}$  occurrentes in logarithmo unius binomii occurrent eodem modo in logarithmo alterius binomii eo solo discrimine, ut in uno sit v. g.  $\frac{1}{1-y}$  in altero erit

8 *Dazu am Rand:* Correxī  $\frac{1}{y-e}$ . cum debent reddi  $\frac{1}{y+e}$  item  $\frac{1}{1-y^2}$ .

8  $+ye \hat{y} (1) \frac{1}{y-e} (2) \frac{1}{y+e} (3) \frac{1}{y+e} L$  8f. Vicissim ... aequationis *erg.* L 12 quatenus  
 (1) tota  $\odot$  multiplicetur (2) contingit L

8 Nimirum: Entsprechend der Zerlegung der Potenzen des Binoms im Schema S. 249 Z. 2–10 würde die Reihenentwicklung des Logarithmus zu folgender Formel führen:  $\ln(1 + (y + e)) = \ln(1 + y) + \ln(1 + e) - ey \left( \frac{1}{1 + (e + y)} + \odot \right)$ .

v. g.  $\frac{f}{1-y}$  quod non auget difficultatem. Quod si jam efficiamus ut summa omnium logarithmorum cognitarum binomia ingredientium sit nihilo aequalis, quod fieri poterit, quia sine dubio ex tot literis aliqua erit arbitraria, quam sumamus talem affirmativam vel negativam, prout e re erit, ut ejus logarithmus aliorum omnium logarithmos destruat. Si velimus aliter sumere arbitrariam ut non logarithmi, sed ipsae literae cognitae binomia ingredientibus se destruant, tolletur  $\frac{1}{1-y}$ . Si faciamus ut eorum quadrata se destruant destruetur  $\frac{1}{1-y^2}$ , et ita porro.

5

Corollarium autem quod hinc sequitur potissimum est, quod hac methodo aequatio gradus altioris non est difficilior quam aequatio gradus inferioris. Et res eodem redit, nam an progredi necesse sit ad  $\frac{1}{1-y^3}$ , non dependet ab altitudine dimensionum aequationis sed a numeris cognitis, prout scilicet judicari potest accurrationis appropinquationis causa, longius eundem esse, quo serviet methodus Schotenii multiplicandi radices aequationis, quo fit, ut non sit opus longe ire appropinquando.

10

Unde an  $\mathfrak{X}$  [*bricht ab*]

14 *Darunter*: Imo error. Quia non tantum habetur  $\frac{1}{y+e}$ . sed et  $\frac{1}{y+f}$  etc. Itaque invenienda est methodus destruendi summam harum fractionum, fit autem ex illis reductis aequatio duplo altior data. Sed nil refert, nam quoniam tot in ea arbitrariae, ob analogiam, etiam post quasdam ob comparationem reductas, poterit aequatio illa altior, v. g. octo dimensionum dividi per aequationem 7 dimensionum; Restabit aequatio unius dimensionis, cujus termini duo nihilo aequales ponantur, opus est non nisi duabus adhuc explicationibus, et habebimus quaesitum, ope ut patet trium arbitrariarum hactenus supernumerariarum.

2 logarithmorum (1) terminorum cogni (2) cognitarum  $L$  4 destruat (1), imo eodem possumus faciendo ope alterius arbitrariae et ita po (2) si  $L$  15,17 aequationem 7 | dimensionem *ändert Hrsq.* |; Restabit  $L$  15,20 supernumerariarum. | sed hic malum quod similiter tribus aliis impensis arbitrariis tolli deberet *gestr.* |  $L$

12 methodus: Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 294 f. 14 Unde an  $\mathfrak{X}$ : S. o. S. 258 Z. 8.

Hic aliquid obiter tentandum[:]

$$\frac{y + b, \wedge \frac{c}{a}y + d}{\frac{e}{a}y + f \wedge \frac{g}{a}y + h} \sqcap \frac{y + b \wedge y + m}{\frac{n}{a}y + p \wedge \frac{q}{a}y + r} \text{ sive:}$$

$$\frac{\frac{c}{a}y^2 + dy + bd + \frac{bc}{a}}{\frac{eg}{a^2}y^2 + \frac{eh}{a}y + fh + \frac{fg}{a}} \sqcap \frac{\boxed{y^2 + my + bm + b.}}{\frac{y + b}{y + p}}$$

et multiplicando per crucem:

2-261,9 *Nebenbetrachtung*: Videamus in aequatione adhuc uno gradu inferiore.

$$\frac{y + b}{y + b} \sqcap \frac{y + c}{\frac{d}{a}y + e} \sqcap \frac{\boxed{\begin{array}{l} \frac{d}{a}y^2 + \frac{d}{a}by \\ + ea. + bea \\ -1y^2 - ca. \\ - ba. - bca \end{array}}}{d - a}$$

conferenda cum  $y^2 + fy + ag \sqcap 0$  erit  $\frac{df - af + ca - ea}{d - a} \sqcap b \sqcap f + \frac{ca - ea}{d - a}$  adeoque

$$f e a \frac{-c^2 a^{\cancel{2}} + 2 c e a^{\cancel{2}} - e^2 a^{\cancel{2}}}{c a} \sqcap a g. \text{ Ergo } c - e \text{ pro una quantitate habenda.}$$

---

16,7 adeoque: Richtig wäre  $\frac{f e a}{d - a} + \frac{-c^2 a^{\cancel{2}} + 2 c e a^{\cancel{2}} - e^2 a^{\cancel{2}}}{(d - a)^2} \sqcap a g.$

$$\left. \begin{array}{l}
 \frac{c}{a} y^3 + d y^2 + bdy \\
 + \frac{bc}{a} .. \\
 + \frac{pc}{a} .. + pd. + pbd \\
 + \frac{pbc}{a} . \\
 - \frac{eg}{a^2} ... - \frac{eh}{a} .. - fh. \\
 - \frac{fg}{a} .. \\
 - \frac{beg}{a^2} .. - \frac{beh}{a} . - bfh \\
 - \frac{bfg}{a} .
 \end{array} \right\} \square 0.$$


---


$$\frac{ac - eg}{a^2}$$

5

Aequationem productam comparemus cum aliqua cubica data, ut  $y^3a + aly + m \square 0$ . 10

Ut ergo  $da^2 + bca + pca - eha - fga - beg \square 0$ . fiet:  $d \square \frac{beg + fga + eha - pca - bca}{a^2}$

et  $d \square \frac{acm - egm + bfha^2}{pba^2}$  fiet:

$b^2egp + fgapb + ehapb - p^2cab - b^2cap \square a^3cm - a^2egm + bfha^2$  et erit

$$f \square \frac{\overset{eg}{\swarrow} p^2ca \cancel{b} \left( + b^2cap - b^2egp \right) - \overset{eghp}{\swarrow} ehap \cancel{b} \left( - a^3cm - a^2egm \right)}{gap \cancel{b} - bha^2} \square \frac{epg}{a} \wedge \frac{p+h}{gp-ha} \square f \text{ po-}$$

nendo  $ca \square eg$ .

15

Tertius valor  $d \square \frac{fha^2l + behal + bfgal - pbc\cancel{al}, + a^2cl - aegl}{a^2b + a^2p}$ .

12  $d \square \frac{acm - egm + bfha^2}{pba^2}$ : Richtig wäre  $d = \frac{acm - egm + bfha^2}{pba^2}$ .

14  $f \square$ : Leibniz

ersetzt im Zähler des folgenden Bruches irrtümlich  $ea$  durch den Wert  $eg$  für  $ca$ .

16 Tertius valor:

Die Erweiterung der ersten vier Terme im Zähler mit  $\frac{l}{a}$  ist unbegründet.

Unde conferendo valores ipsius  $d$ . primum et tertium fiet:

$$b^2eg + bfga + beha - bpca - b^2ca + pbeg + pfga + peha - p^2ca - pbca$$

adeoque

$$f \sqcap \frac{\boxed{b^2eg} + beha - \overset{eg}{\downarrow} bpca - \boxed{b^2ca} + \boxed{pbeg} + pfga + peha - p^2ca - \overset{eg}{\downarrow} pbca - behl + \overset{\frac{eg}{a}}{\downarrow} pbcl - \boxed{a^2cl + aegl}}{\boxed{bga + pga} \quad \boxed{-hal - bgl}}$$

$$+ b \hat{ } ga \quad ha \hat{ } - l$$

$$+ p \quad bg$$

5

$$\left\{ \begin{array}{l} eha \hat{ } p + b \quad pg \hat{ } pa \\ pbeg \hat{ } - 1 \quad fa \\ \quad \quad \quad + \frac{l}{a} \\ -behl \end{array} \right. \quad [\sqcap] \quad \frac{-behl}{p \quad bga + ha \hat{ } - l} \quad \sqcap \quad \frac{epg \hat{ } p + h}{a \quad gp - ha}$$

10

$$\text{Unde } b \sqcap \frac{peha + pg \hat{ } pa, \frac{pga - hal}{gp - ha} \hat{ } p + h}{eha - peg + \frac{pegl}{a} - ehl \quad \frac{-ga \hat{ } \frac{epg}{a}}{\frac{p + h}{gp + ha}}}$$

Ubi certe nisi  $b$  fiat magnitudinis infinitae aut infinite parvae, non video quid exitum vetet. Ponendo  $p \sqcap 0$  fuisset et  $f \sqcap 0$  et fieret  $b \sqcap \frac{\cancel{h^2al} \sim \cancel{h^2a}}{eha - ehl} \sqcap \frac{Kla^2}{eKa - eKl}$ . Sed hoc est

---

1 Unde conferendo: Beim folgenden Koeffizientenvergleich unterläuft Leibniz eine Reihe von Versehen. Er zweifelt schließlich das Ergebnis an.



absurdum, valorem ipsius  $b$ . haberi per solam  $l$ . sine  $g$ . Suspectus ergo hic calculus esse debet, memorabilis interim haec inquisitio est de origine aequationum ex analogiis.

$$\frac{y^2 + by + ca}{y + d} \sqcap \frac{\frac{f}{a}y^2 + gy + ha}{y + d}. \text{ Reducendo fiet:}$$

$$\begin{aligned} & y^3 + by^2 + cay \\ & + d.. + db. + dca \\ & - \frac{f}{a}y^3 - gy^2 - ha. \\ & - \frac{df}{a}.. - dg. - dha \end{aligned}$$

5

Ubi patet jam evitatio prolixitatis inutilis. Primum ducantur in se quae debent, (omisso multiplicatore vel divisore communi) et quia plures literae simul reperiuntur fiet

ex una  $y^2 + by + ca$  item  $\frac{f}{a}y^2 + gy + ha$ , reducendo multitudinem literarum ad paucas. 10

Jam fac rursus quantitati  $1 - \frac{f}{a}$ , item  $b - g$ , item  $c - h$  attribue unum nomen, fiet formula

qualis  $y^2 + ky + aw$ . Nam  $1 - \frac{f}{a}$  habenda pro unitate. Quae formula multiplicanda per

$y + d$ . Itaque res reducitur ad investigationem aequationum, comparando cum excitata ex radicibus. Ubi nihil novi, eadem methodo procedendum pro investigandis analogiis, nisi quod  $y + d$  non occurret bis. Res eadem in diversis analogiae terminis. 15

$$\text{Sit } \frac{1}{y + n} \mp \frac{1}{y + p} (\mp) \frac{1}{y + q} \sqcap 0. \text{ Fiet:}$$

$$\begin{aligned} & y^2 + py + pq, \mp \wedge y^2 + ny + nq (\mp) y^2 + ny + np \sqcap 0. \\ & \qquad \qquad \qquad q. \qquad \qquad \qquad q. \qquad \qquad \qquad p. \end{aligned}$$

1 f. *Dazu am Rand:*  $\frac{\odot}{(\odot)} [\sqcap] \frac{h}{e}$ . Ergo  $\odot \sqcap (\odot) \frac{h}{e}$ . Error commissus est ingens. Falsum

enim  $\odot$  et  $(\odot)$  habere rationem constantem.

17 et | $\odot$  ändert Hrsq.| habere L 8 jam (1) ratio errori (2) evitatio L 15f. bis (1) in multiplicatore simul et divisore (2) in diversis terminis (3). Res eadem (a) in (aa) multiplicato (bb) Numeratoribus oppositis aut in (b) in ... terminis. (aa) Elegantior paulo inquisitio est (bb) sit L

Imo opus est dici non  $\frac{1}{y+n}$  sed  $\frac{1}{\frac{h}{a}y+n}$  et ita in caeteris excepto uno. Et ita faciendum

erat ab initio in analogiis nostris ad logarithmos reducendis. Unde in tanta multitudine  
 5 arbitrariarum cum sint hic numero 5 explicandae sunt tres hoc loco, ut destrui possit  
 haec formula non attingendo ipsam  $y$ . Sed tunc non satis habebimus arbitrariarum  
 ad ipsas analogias. Quod si in qualibet aequatione haec possent fieri nihilo aequalia,  
 et tamen reliquae arbitrariae ad analogiam sufficerent, tunc omnis aequatio esset reso-  
 lubilis per quadraticam. Primum enim ponendo terminos analogiae dividentes aequales  
 numero multiplicantibus, seu logarithmos negatos affirmatis tolletur logarithmus inco-  
 gnitae: Porro ponendo aequationem ex fractionibus incognitam continentibus productam  
 10 destructis singulis terminis sublatam; tunc tollentur omnia  $\textcircled{4}$  simul, cujuslibet binomii  
 logarithmici, et restabit aequatio inter logarithmos cognitos, et plures  $\textcircled{\ominus}$ ; in  $\textcircled{\ominus}$  autem est  
 $m$ . incognita, et  $n$  cognita, pro  $n$  substituatur summa omnium cognitarum binomium lo-  
 garithmicum ingredientium. Imo video hoc fieri non posse. Sed ita videtur procedendum,  
 unum  $\textcircled{\ominus}$  haberi potest. Sumatur aliud pro  $n$  ponendo aliam literam, ut  $f$  patet singulos  
 15 terminos unius esse ad terminos respondententes, alterius ut  $f$  ad  $n$  ergo et summae seu  
 totae  $\textcircled{\ominus}$  ita erunt inter se. Ex aequatione ergo logarithmica:

$$\log y + l + \log y + f \textcircled{\cap} \log y + g + \log y + h + \log y + e$$

fieri poterit aequatio haec:

$$\log \overline{y+e} \left[ \begin{array}{l} + \log y \\ + \dots \\ - \dots \\ - \dots \end{array} \right] + \log h \left[ \begin{array}{l} - yh \wedge \frac{1}{y+h} \\ - yg \wedge \frac{1}{y+g} \\ + yl \wedge \frac{1}{y+l} \\ + yf \wedge \frac{1}{y+f} \end{array} \right] + yh \wedge \frac{\textcircled{\ominus}h}{e} \textcircled{\cap} 0.$$

Destruendo ergo omnia inter  $\left| \right|$  duas lineas comprehensa, quod fit reducendo fractiones  
 et aequationem inde ortam per aliquam uno gradu inferiorem, aut duobus divisibilem

7 analogiae (1) aequales, et affirmatos (2) dividentes  $L$  12 pro  $n$  (1) ponatur (2) subintelligatur  
 suum (3) substituatur  $L$  14 potest (1) est autem unum a  $l$  (2) sumatur  $L$  23 comprehensa, (1)  
 dum scilicet reducitur aequatio (2) quod (a) in (b) fit  $L$  24 aliquam (1) arbitrari (2) uno  $L$

faciendo, et quotientis singulos terminos qui non nisi duo aut tres sunt destruendo, explicatione totidem arbitrariarum. Est autem

$$\odot \sqcap \log \overline{y+e} - \log y - \log e - ye \wedge \frac{1}{y+e}$$

Ergo tota aequatio quotcunque graduum, reducitur ad eandem formam, in quam ingrediuntur tantum haec:  $y$ .  $\log y$ .  $\log \overline{y+e}$ . Et patet nihil referre quantus sit numerus ipsarum 5  
quantitatum:  $h$ .  $g$ .  $f$ .  $l$ . seu dimensionum; et una reducta nempe quadratica, reducuntur aequationes aliae omnes; sed radices habentur non nisi duae. Videtur hoc esse ultimus subtilitatis humanae gradus in his rebus.

Et hinc patet etiam mirabilis ratio, inveniendi logarithmos binomiorum, datis logarithmis nominum, et datis nominum quantitibus, et dato logarithmo alterius binomii 10  
unum nomen commune habentis, cujus etiam nominum quantitates et logarithmi dantur. Quoniam semper deest  $\odot$  tantum quod dicto modo facile invenitur, quia rationem habet notam ad alterius binomii  $\odot$  cognitam.

### 38<sub>2</sub>. DE AEQUATIONE PER LOGARITHMOS (NUM. 2)

Jun. 1675

15

#### De Aequatione per Logarithmos (num. 2)

Sit Analogia  $\frac{y+b \wedge \frac{c}{a}y+d}{\frac{e}{a}y+f, \wedge \frac{g}{a}y+h} \sqcap \frac{y+l}{m}$  in quam aequatio cubica resoluta intelligi

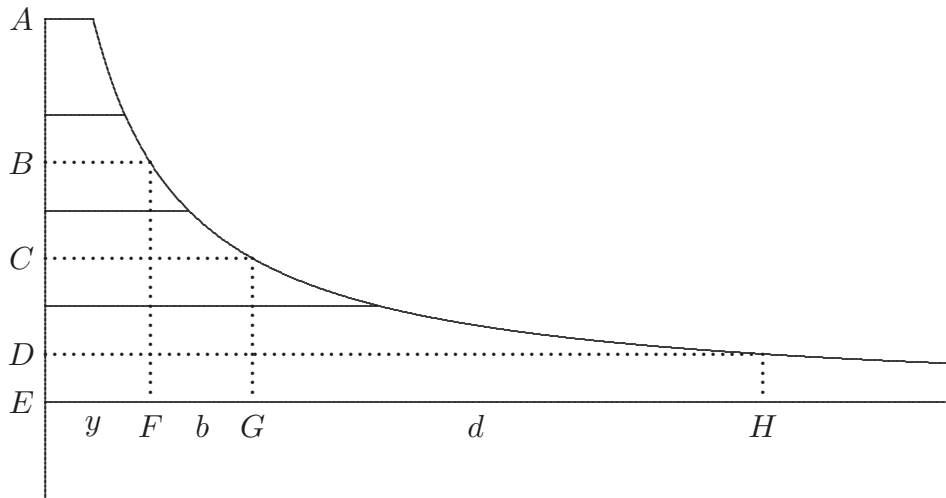
possit. Erit aequatio Logarithmica talis:

$$-L \overline{y+b} - L \overline{\frac{c}{a}y+d} - L \overline{m} + L \overline{y+l} + L \overline{\frac{e}{a}y+f} + L \overline{\frac{g}{a}y+h} \sqcap 0.$$

2 arbitrariarum. (1) Est autem  $\odot \sqcap \log y + \log e + ye \wedge \frac{1}{y+e}$  (2) Est  $L$  9 binomiorum, (1) uno

dato semper enim datos logarithmos alterius bin (2) datis  $L$  10 alterius (1) nomini (2) binomii  $L$   
16 De ... Logarithmos | resoluta erg. u. gestr. | (num. 2) erg.  $L$

3  $\odot \sqcap$ : S. o. die Erl. zu S. 258 Z. 8.



[Fig. 2]

Unus Logarithmorum, v. g.  $L \sqrt{y+l}$  consideretur nunc in exemplum. Constat, et sequitur ex demonstratis a Gregorio a S. Vincentio et Nic. Mercatore, Logarithmum alicujus quantitatis ut  $z$ , esse  $\pi \frac{z}{1} - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{4} + \frac{z^5}{5} - \frac{z^6}{6}$  etc. Aliquando est  $\frac{z}{1} + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \frac{z^4}{4}$  etc. aliquando:  $\frac{1}{1z} \mp \frac{1}{2z^2} + \frac{1}{3z^3} \mp \frac{1}{4z^4}$  etc. prout scilicet  $z$ . est major minorve unitate, sed quicquid sit semper caetera exempla ad instar hujus tractari possunt quod proponam.

$$\text{Est ergo logarithmus } y+l \pi \left\{ \begin{array}{l} +y \\ +l \end{array} \right. \mp \frac{1}{1} \mp \left\{ \begin{array}{l} +y^2 \\ +2yl \\ +l^2 \end{array} \right. \mp \frac{1}{2} \mp \left\{ \begin{array}{l} y^3 \\ 3y^2l \\ l^3 \end{array} \right. \mp \frac{1}{3} \mp \left\{ \begin{array}{l} y^4 \\ 4y^3l \\ 6y^2l^2 \\ 4yl^3 \\ l^4 \end{array} \right. \text{ etc.}$$

id est componitur ex  $\frac{y}{1} \mp \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \frac{y^4}{4}$  etc. seu logarithmo ab  $y$ . itemque ex

$$5 \mp \frac{1}{4z^4} \text{ etc. (1) | sed nicht gestr. | hi om (2) prout } L$$

3 ex demonstratis: Vgl. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI; A. A. de SARASA, *Solutio*, 1649; N. MERCATOR, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 28–30 [Marg.]. Leibniz verwendet in der Folge wieder irrtümlich die Reihenentwicklung für  $\ln(1+z)$ .

$\frac{l}{1} \mp \frac{l^2}{2} + \frac{l^3}{3} \mp \frac{l^4}{4}$  etc. logarithmo ab  $l$  ac praeterea ex quantitatibus ex ipsarum  $y$ . et  $l$ . aut potestatum ab ipsis in se invicem ductu factis, nempe  $\mp \frac{2yl}{2} + \frac{3y^2l + 3yl^2}{3} \mp \frac{4y^3l + 6y^2l^2 + 4ly^3}{4}$  etc. Quam quantitatem appellabimus  $\ominus$ . Ergo ita dicere licebit:

$$L \overline{y+l} \cap L \bar{y} + L \bar{l} + \ominus.$$

Si sumatur jam alius Logarithmus ut  $L \frac{e}{a}y + f$ . isque eodem tractetur modo, comperietur 5

similiter resolvi posse in tres partes, Logarithmum scilicet ab  $\frac{e}{a}y$ . Logarithmum ab  $f$ . et

tertiam partem, quae respondet ipsi  $\ominus$ , et quae ita procedet:  $\mp \frac{\frac{2e}{a}yf}{2} + \frac{\frac{3e^2}{a^2}y^2f + \frac{3e}{a}yf^2}{3} \mp$

$\frac{\frac{4e^3}{a^3}y^3f + \frac{6e^2}{a^2}y^2f^2 + \frac{4e}{a}yf^3}{4}$  etc. Porro pars  $\ominus$  superiore plagula resoluta in duas  $\uparrow$  et

$\odot$ . et quidem seriei  $\uparrow$ . haberi potest summa quae est  $-mn \wedge \frac{1}{1+n}$ . Pars  $\odot$  dividetur

in partes  $\triangleright$ .  $\wp$ . etc. quarum summa haberi non quidem exacte potest, attamen per 10  
 appropinquationem, quia methodum reperi dandi summam terminorum progressionis  
 geometricae per arithmeticos multiplicatorum numero finitorum.

Notabile est  $\frac{ey}{1} \mp \frac{e^2y^2}{2} + \frac{e^3y^3}{3} \mp \frac{e^4y^4}{4}$  etc.  $\cap \frac{e}{1} \mp \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} \mp \frac{e^4}{4}$  etc. „  $+$   $\frac{y}{1} \mp \frac{y^2}{2} + \frac{y^3}{3} \mp \frac{y^4}{4}$   
 [etc.]

Inquiramus in summam finitorum Terminorum progressionis Geometricae multipli- 15  
 catorum per terminos progressionis harmonicae: v. g.

Termini	$1 \quad \frac{1}{1e}$	$\frac{1}{2e^2}$	$\frac{1}{3e^3}$	$\frac{1}{4e^4}$
Summae: 1	$\frac{1e+1}{1e}$	$\frac{2, 1e^2+2e+1}{1, 2e^2}$	$\frac{3, 2, 1e^3+3, 2e^2+1}{3, 2, 1, e^3}$	$\frac{4, 3, 2, 1, e^4+4, 3, 2e^3+4, 3e^2+4e+1}{4, 3, 2, 1, e^4}$

3f. Ergo ... +  $\ominus$  erg.  $L$       16f. v. g. (1)  $\frac{e}{1} + \frac{e^2}{2} + \frac{e^3}{3} + \frac{e^4}{4}$  etc. (2)  $\frac{1}{e} + \frac{1}{2e^2} + \frac{1}{3e^3} + \frac{1}{4e^4}$  summae  
 erunt (3) Termini  $L$

8 superiore plagula: S. 249 Z. 2–10.      18 Summae: Der Zähler des vierten Terms müsste  $3, 2, 1e^3 + 3, 2e^2 + 3e + 2$  lauten, der Zähler des fünften Terms  $4, 3, 2, 1e^4 + 4, 3, 2e^3 + 4, 3e^2 + 8e + 6$ .

Unde patet summam ejusmodi seriei

$$4, 3, 2, 1e^4 + 4, 3, 2e^3 + 4, 3e^2 + 4e + 1$$

redire ad priorem, quod patet dividendo totam per  $4, 3, 2, 1 e^4$ .

Differentiae  $\frac{1e-1}{1e}$   $\frac{2e-1}{1, 2e^2}$   $\frac{3e-2}{2, 3e^3}$   $\frac{4e-3}{3, 4e^4}$  etc. Cujus seriei haberi

5 potest summa. Sed haec satis manifesta de seipsis. Tamen pro  $e$  ponendo  $f + 1$ . Posset sic dici: Haberi summam seriei:

$$\frac{f}{f+1} + \frac{2f+1}{1, 2, f^2 + 2f + 1, } \frac{3f+2}{2, 3, f^3 + 3f^2 + 3f + 1, } \frac{4f+3}{3, 4, f^4 + 4f^3 + 6f^2 + 4f + 1}$$

etc. Quae series separari potest in duas, quarum una data daretur etiam altera:

Prior  $\frac{f}{f+1}$   $\frac{f}{1, f+1, [2], }$   $\frac{f}{2, f+1, [3], }$  etc. Multiplicetur ea per  $f + 1$ . divi-

10 daturque per  $f$ . Conferendo unitatem quae est ab initio habebitur logarithmus ipsius  $\frac{1}{f+1}$ .

Posterior portio est  $\frac{1}{2, f+1, [2], }$   $\frac{1}{3, f+1, [3], }$  etc. Quae etiam facit logarithmum

ab  $\frac{1}{f+1}$  demto tantum aliquo et signis forte mutatis.

Et haec addita priori (scilicet reductae seu divisae et minutae ut dixi) faciet loga-

15 rithmum quadrati  $\frac{1}{f+1}$ . Logarithmus enim numeri duplicatus est logarithmus quadrati.

Sint ergo duae quantitates  $A$ . portio prior et  $B$ . portio posterior. Datur  $A + B \cap$  cognito

$\gamma$ . et  $A$  divisa per cognitum  $\frac{f}{f+1}$  et minuta unitate dabit  $\frac{A \wedge f+1}{f} - 1 \cap B + 1 \cap$

Log  $\frac{1}{f+1}$  sive  $\frac{A \wedge f+1}{f} \cap \frac{B+2}{\wedge \gamma - A}$  et  $Af + A1 \cap \gamma f - Af + 2f$ . Unde haberetur valor

13f. mutatis. (1) Una partium (2) sint (a) part (b) ergo duae series, non (3) Et L

---

7  $\frac{f}{f+1}$ : Die Zähler der folgenden Terme müssten  $2f + 1, 3f + 1, 4f + 1$  lauten. Der Fehler beeinträchtigt die abschließende Zerlegung, so dass die Folgerungen unbegründet bleiben. Leibniz rechnet nicht konsequent weiter und zweifelt schließlich das Ergebnis an.

ipsius  $A$ , nempe ipsius logarithmi absolutus, quod non est verisimile. Crediderim ergo potius ipsam  $A$ . reducendo destrui.

Alibi demonstratum est a me momentum differentiarum dare summam figurae; unde omittendo  $\frac{1e-1}{1e}$  et reliquos terminos multiplicando per 1. 2. 3. etc. fiet:  $\frac{2e-1}{2e^2}$   $\frac{3e-2}{3e^3}$

etc. Sed optime sic faciemus: Differentias partiemur in duas portiones. Prior  $\frac{1e}{1e} \cdot \frac{2e}{1, 2e^2}$ . 5

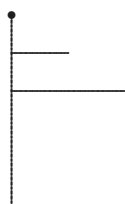
$\frac{3e}{2, 3e^3} \cdot \frac{4e}{3, 4e^4}$  etc. ubi omittendo  $\frac{1e}{1e} \cap 1$ . reliquos terminos  $\frac{2e}{1, 2e^2}$   $\frac{3e}{2, 3e^3}$  multiplicando

per 1. 2. 3. etc. fiet  $\frac{2e}{2e^2}$   $\frac{3e}{3e^3}$  etc. sive  $\frac{1}{e} \cdot \frac{1}{e^2}$  etc. termini scilicet progressionis Geome-

tricae, quorum haberi potest summa. Altera portio est:  $\frac{-1}{1e}$   $\frac{-1}{1, 2e^2}$   $\frac{-2}{2, 3e^3}$   $\frac{-3}{3, 4e^4}$  etc.

quam multiplicando per 1. 2. 3. 4. fiet  $\frac{-1}{e}$   $\frac{-1}{1e^2}$   $\frac{-2}{2e^3}$   $\frac{-3}{3e^4}$  etc. quae est itidem pro-

gressio Geometrica adeoque summabilis. Habetur ergo summa omnium rectangulorum 10  
ex differentiis in distantias ductis. Adeoque et supplementum summae ordinarum. Sed hoc mihi suspectum. Daret enim rursus expressionem logarithmi. Et credo in eo esse errorem quod non ducuntur in distantias uti jacent sed una pars sic alia aliter.



[Fig. 3]

Methodus interim ista qua quaeruntur summae serierum ducendo earum differentias 15  
in numeros arithmeticos magnos habet usus. Nam sic etiam videtur inveniri posse summa

3 differentiarum (1) aeqvari summae (2) dare  $L$  8 f. est (1)  $-\frac{1}{1e} - \frac{1}{1, 2e^2} - 1$  (2):  $\frac{-1}{1e} \dots \frac{-3}{3, 4e^4}$

etc. (a) ubi rursus omittendo  $\frac{-1}{1e}$  et reliqua multiplicando per (b) quam  $L$

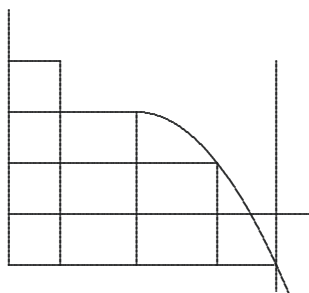
---

3 Alibi: Vgl. VII, 4 N. 40<sub>4</sub> S. 705 u. VII, 3 N. 40.

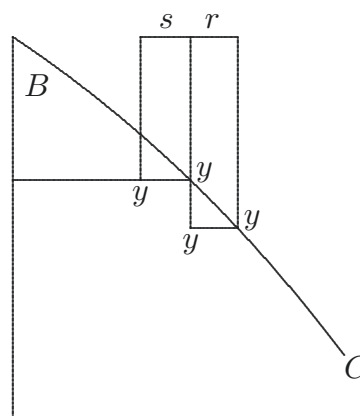
hujus seriei:  $1m$   $2m^2$   $3m^3$  etc. Ejus enim summa est supplementum summae figurae, cujus differentiae sunt  $m$ .  $m^2$ .  $m^3$ . At summa figurae cujus differentiae sunt  $m$ .  $m^2$ .  $m^3$ . etc. haberi potest. Est enim progressionis Geometricae (cum differentiae sint progressionis Geometricae), ergo et ejus supplementum haberi potest, id est summa figurae,  $1m$ .  $2m^2$   
 5  $3m^3$  etc. Idemque locum habet turbatis etiam numeris arithmetiis.

Hinc si  $\overbrace{\frac{m}{1} \frac{m^2}{2} \frac{m^3}{3} \frac{m^4}{4} \text{ etc.}}^A$  ducatur in distantias, fiet  $\overbrace{m \cdot m^2 \cdot m^3 \cdot m^4}^B$  Geometrica.

Ergo momentum differentiarum Figurae summatricis, seriei Harmonicogeometricae, id est supplementum ipsius figurae summatricis haberi potest. Ergo et ipsa summatricis figurae summatricis. Ergo quanquam non semper ipsa figura summatricis. Nam quando figurae  
 10 alicujus tangens haberi non potest tunc ex data summatricis non datur figura. Sed hic videtur subesse error, ut:



[Fig. 4]



[Fig. 5]

$\frac{1}{y}$  ductae in distantias dant parallelogrammum. Sint  $y$ . lineolae Applicatis Hyperbolae proportionales[,]  $BC$  linea logarithmica. Rectangula omnia erecta  $ry$ .  $sy$ . inter  
 15 se aequalia erunt. Hinc tamen jam video non ideo haberi supplementi summam, quia

7 Ergo (1) si A harmonico-geom (2) summatricis (3) supplementum summae (a) summatricis harmonico-geometricarum (b) summarum harmonico-geometricae (4) Ergo summatricis (5) id (6) | id est nicht gestr. | (7) differentia (8) momentum  $L$  9 quanquam non semper erg.  $L$  9f. summatricis. (1) Unde videtur seqvi (2) | Nam ... figura erg. | Sed  $L$



ipsa basis vel altitudo geometricae non habetur. Et ratio hic particularis, quia omnino destruitur incognita.

$$z \square m - n. \text{ Ergo } z^5 \square m^5 - n^5 - 5mn \hat{m} - n \boxed{3} + m^2n^2 \hat{m} - n.$$

$$\text{Aliter } z^5 \square -5mn \hat{m} - n \boxed{3} + m^4 + m^3n + m^2n^2 + mn^3 + n^4.$$

$$\begin{aligned} \text{Unde } z^5 \square -5mn \hat{m} - n \boxed{3} + m^4 + mn \hat{m}^2 \hat{m} - n. & \quad 5 \\ & + n^4 \quad n^2 \\ & + m^2n^2 \end{aligned}$$

Itaque si aequatio surdesolida quaevis nullum alium habeat terminum, quam primum et alterutrum ex duobus mediis reddi potest quadrato-quadratica.

$$\text{Sit enim aequatio surdesolida: } z^5 \square ahz^3 + a^4r. \quad 10$$

$$z^6 * 2apz^3 + a^2p^2 \square h^2z^4 + aqz^3 + a^3rz^2 + a^4sz + a^5t + 2ap \cdot a^2p^2$$

$$\frac{hz^2 \quad \frac{aq + 2ap}{2h}z \quad \frac{a^3r}{2h} - \frac{a^2q^2 + 4aqp^2 + 4a^2p^2}{8h^3}}{\quad}$$

$$\frac{2hz^2 \quad + \frac{aq + 2ap}{2h}z}{\quad}$$

$$- \frac{a^2q^2 + 4a^2qp + 4a^2p^2}{4h^2} z^2$$

15

$$\boxed{2hz^2 \quad \frac{-aq - 2ap}{h}z}$$

$$\frac{z^6 - p^3 \square ahz^5 + lz^3 + mz^2 * p^3}{z + p \quad n}$$

9 Darunter: Error

14  $2hz^2 + \left| \frac{ap + 2ap}{2h} \right|$  ändert Hrsg. | L

---

3 Ergo: Bei den folgenden Umformungen unterlaufen Leibniz Fehler, die seine Schlussfolgerung beeinträchtigen. Er erkennt den Irrtum und markiert ihn.

$$z^4 - a^2 p^4 \sqcap h^2 z^2 + a^2 qz + a^3 r \f h^2 z + a^2 q$$

$$\frac{- a^2 p^2 \quad - h^2 p}{z + p}$$

$$- h^2 p .$$

5

$$\boxed{z + p}$$

$$- a^2 qp$$

$$+ h^2 p^3$$

$$z^9 - a^4 p^2 \sqcap z^7$$

$$z^5 \sqcap m^5 + \underbrace{5m^4 n + 10m^3 n^2 + 10m^2 n^3 + 5mn^4}_{5mn \wedge m^3 + \frac{10}{5}m^2 n + \frac{10}{5}mn^2 + n^3} + n^5$$

10

$$\text{sive } 5mn \wedge \underbrace{m^3 + 2m^2 n + 2mn^2 + n^3}_{z \boxed{3} - mn \wedge z}$$

Aliter inde faciamus cubum, nempe faciamus  $\frac{+1}{c} m^3 + 2m^2 n + 2mn^3 + 1n^3$ . Quaeritur qualis sit quantitas  $c$ , ut totum fiat cubus, comparetur cum  $p^3 + 3pq \wedge p + q + q^3$ , fiet  $p \sqcap m\sqrt{\textcircled{3}} 1 + c$ . et  $q \sqcap n\sqrt{\textcircled{3}} 1 + c$ . et erit:  $3pq \wedge p + q$ , id est  $3 \boxed{mn \wedge m + n}$ ,  $\wedge 1 + c \sqcap 2 \boxed{mn \wedge m + n}$  et  $c \sqcap \frac{2}{3} - 1$ . sive  $c \sqcap -\frac{1}{3}$  et erit

15

$$z^5 \sqcap m^5 \quad 5mn \wedge \frac{2}{3}z^3 + \frac{1}{3}m^3 \wedge mn$$

$$n^5 \quad \dots n^3$$

Sit jam aequatio:  $z^5 \sqcap * aqz^3 + a^4 t$ . erit  $m \sqcap \frac{3aq}{10n}$  et  $m^5 \sqcap \frac{243a^5 q^5}{100,000n^5}$  et  $\frac{1}{3}m^3 \sqcap$

$\frac{27a^3 q^3}{1000, n^3}$  et  $\frac{243a^5 q^5}{100,000n^5} + n^5 + \frac{3aq}{2} \wedge \frac{1}{3}n^3 + \frac{27a^3 q^3 \wedge \frac{3aq}{2}}{1000n^3} \sqcap a^4 t$ . Ubi ponendo radices aequationis datae multiplicatas per  $n$ , aequatio proposita fieret plana, si nullus in calculo error, videamus in Cubo: Nec video quomodo aliquis existere possit dividi enim poterunt omnia:

20

---

15  $\wedge mn$ : Richtig wäre  $\wedge 5mn$ . Der falsche Wert wird in S. 273 Z. 4 übernommen.

$$\frac{z^5 * aqz^3 * z^2 * z + \frac{n^5 t}{a} \quad \square 0}{z^5 * \frac{10mn}{3} z^3 * * + \left. \begin{array}{l} m^5 \\ + n^5 \\ + mn \wedge \frac{1}{3} m^3 \\ + \frac{1}{3} n^3 \end{array} \right\} \square 0}$$

5

Conferantur hae duae aequationes; fiet:  $m \square \frac{3q}{10}$  adeoque  $\frac{m^3}{3} \square \frac{27q^3}{3,1000}$  et  $m^5 \square \frac{243q^5}{100000}$  et fiet: [bricht ab]

$$\frac{z^y \quad lz^{y-1} \quad mz^{y-2} \quad nz^{y-3} + p \quad f \quad z^{y-1} + lz^{y-2}}{q \quad - p}$$

$$\frac{\boxed{z + p}}{- pz^{y-1}} \quad \frac{\boxed{z + p}}{- lpz^{y-2} + p^2}$$

10

2 Darunter Koeffizientenvergleich der kubischen Terme:  $5mn \square \frac{3aq}{2}$

6  $m \square (1) \frac{3nq}{10a}$ . adeoque  $\frac{m^3}{3} \square \frac{27n^3q^3}{3,1000, a^3}$ . et  $m^5 \square \frac{243n^5q^5}{10000, a^5}$  (2)  $\frac{3q}{10} L$  7 fiet:  $\frac{243n^5q^5}{100,000z^3} + n^5$   
 $+ \frac{27n^3q^3 \wedge 3}{3,1000, a^3} + \frac{1}{3} n \square ta^4$  gestr. | Dazu, nicht gestr. nuga  $L$







$$\begin{array}{r}
 z^5 \quad N \quad P \quad Q \quad R \quad S \\
 \quad \quad nz^4 \quad pz^3 + qz^2 + rz + s \quad \square 0. \\
 \\
 \text{Sit } z^5 \quad \square \quad \frac{\textcircled{n}}{y^5} + \frac{\textcircled{p}}{5y^4b} + \frac{\textcircled{q}}{10y^3b^2} + \frac{\textcircled{r}}{10y^2b^3} + \frac{\textcircled{s}}{5yb^4} + b^5 \\
 Nz^4 \quad \square \quad \frac{y^4}{y^4} + \frac{4y^3b}{4y^3b} + \frac{6y^2b^2}{6y^2b^2} + \frac{4yb^3}{4yb^3} + b^4 \quad 5 \\
 Pz^3 \quad \square \quad \frac{y^3}{y^3} + \frac{3y^2b}{3y^2b} + \frac{3yb^2}{3yb^2} + b^3 \\
 Qz^2 \quad \square \quad \frac{y^2}{y^2} + \frac{2yb}{2yb} + b^2 \\
 Rz \quad \square \quad \frac{y}{y} + b \\
 S \quad \square \quad S
 \end{array}$$

Ergo  $n + 5b \square 0$ .  $b \square -\frac{n}{5}$ . Quod si possit esse etiam:  $q + 3pb + 6nb^2 + 10b^3 \square 0$ . 10

$$\text{Nempe } q - \frac{3n}{5p} + \frac{6n^3}{25} - \frac{\textcircled{10}n^3}{\textcircled{125}} \square 0 \text{ seu } q - \frac{3np}{5} + \frac{4n^3}{25} \square 0.$$

Itaque  $N + 5B - \frac{3}{5}N + 5B, P + N4B + 10B^2, + \frac{4}{3}\textcircled{3}N + 5B, \square 0$ . Quae res per aequationem Cubicam effici potest praeformando; quaerendo scilicet valorem ipsius  $b$ . primae explicationis, quae ejusmodi relationem, dabit  $q - \frac{3np}{5} + \frac{4n^3}{25} \square 0$ . sumendo scilicet  $N. P. Q. R. S.$  pro cognitis aequationis ut initio posita est, et  $n. p. q. r. s.$  pro 15

3  $\textcircled{n} \dots \textcircled{s}$  erg. L 4 sit (1)  $y^2 \square bz^2 + cy + dx + ea$  (2)  $z^5 L$  5 (1)  $n$  (2)  $Nz^4 \square |n^\wedge$  erg. u. gestr. |  $y^4 L$  6 (1)  $p$  (2)  $Pz^3 \square |p^\wedge$  erg. u. gestr. |  $y^3 L$  7 (1)  $q$  (2)  $Qz^2 \square |q^\wedge$  erg. u. gestr. |  $y^2 L$  8 (1)  $r$  (2)  $Rz \square |r^\wedge$  erg. u. gestr. |  $y L$  10  $q + 3 |p$  erg. |  $b + 6 |n$  erg. |  $b^2 L$  13 praeformando; (1) quo effectos habebimus (2) quaerendo L 14  $\square 0$ . (1) qva obtenta (2) sumendo L

---

10 Ergo: Leibniz rechnet mit den im Schema Z.3-9 ergänzten und wieder gestrichenen Faktoren  $n, p, q$ .

productae aequationis cognitis<sup>[,]</sup> literam  $B$  pro arbitraria prima, literam  $b$  pro secunda. His positis non video quid impediatur hos terminos simul tolli:

$$\begin{array}{r}
 z^3 \qquad y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3 \\
 pz^2 \qquad p.. + 2pb . + pb^2 \\
 5 \quad qz \qquad q . \quad qb \\
 r \qquad \qquad \qquad r
 \end{array}$$

Ut duo termini secundus et tertius simul tollantur, erit:  $b \sqcap -\frac{p}{3}$  et  $b^2 \sqcap \frac{p^2}{9}$  et  $b^2 \sqcap \frac{-2pb - q}{3} \sqcap \frac{p^2}{9} \cdot \frac{p^2}{3} \sqcap +\frac{2p^3}{9} - q \cdot -6pb - 3q \sqcap p^2$  et  $b \sqcap \frac{p^2 + 3q}{-6p} \sqcap \frac{p^2}{9}$ . sive  $6p^3 - 3p^2 - 9q$ .

Denuo: Suppono semper a nobis effici posse ut terminus  $q$  sit affirmativus, pone enim negativum esse ab initio, ergo adjectis  $3b^2 + 2pb$  affirmativis (nam  $p$  semper potest esse affirmativa) reddi potest quantuscumque cum  $b$ . sit tantae magnitudinis quantum volumus. Hoc posito cum velimus nunc facere ut duo termini secundus et tertius simul absint, habebimus aequationes duas,  $3b + p \sqcap 0$ . et  $3b^2 + 2pb + q \sqcap 0$ . Ex prima aequatione

$b \sqcap -\frac{p}{3}$ . Ergo  $b^2 \sqcap \frac{p^2}{9}$ . Inserantur hi valores in secunda, fiet:  $\boxed{\frac{3p^2}{9}} - \frac{\boxed{2}p^2}{3} + q \sqcap 0$ . et

15 erit  $q \sqcap \frac{p^2}{3}$  adeoque  $3b^2 + 2pb + q \sqcap \frac{9b^2 + 6pb + p^2}{3}$ . Ubi destructis omnibus redit prior aequatio:  $\frac{p^2}{3} \sqcap q$ . Ad hanc ergo praeformationem obtinendam alia opus est methodo, et

adhibenda est explicatio major. Videndum aute(m). Contra sit:

$$\frac{3b^2 + 2pb + q}{b^3 + pb^2 + qb + r} \boxed{2} \sqcap \frac{9b + 3p}{b^3 + pb^2 + qb + r} \text{ sive}$$

$$\frac{\boxed{9b^4}}{\cancel{\quad}} \frac{\boxed{+12b^3p}}{\cancel{\quad}} \frac{\boxed{+6b^2q}}{\cancel{\quad}} + \frac{\boxed{4}}{\cancel{\quad}} p^2 b^2 \frac{\boxed{+2pbq}}{\cancel{\quad}} + q^2 \sqcap$$

7-9  $b^2 \sqcap \frac{-2pb - q}{3} \sqcap \frac{p^2}{9}$ . (1) et (2) eritque: (3)  $\left| \frac{p^2}{3} \sqcap +\frac{2p^3}{9} - q \text{ erg.} \right| -6pb \dots \sqcap +\frac{p^2}{9}$ . | sive ...  
 -9q erg. | (a) id est:  $-6B^2 - 18B^2 - 6PB - 9B^2 - 2PB - Q \sqcap 9B^2 + 6PB + P^2$  (b) Denuo  $L$

8  $\frac{p^2}{3} \sqcap$ : Leibniz unterlaufen in der Rechnung einige Flüchtigkeitsfehler. Er setzt danach neu an.  
 19  $\boxed{+2pbq}$ : Richtig wäre  $+4pbq$ . Der Fehler beeinträchtigt die weitere Abschätzung.



$$\frac{9b^4}{\cancel{\quad}} + \frac{9b^3p}{\cancel{\quad} + \cancel{\quad} 3pb^3} + \frac{9}{\cancel{\quad} 3} qb^2 + 9br + \frac{3p^2b^2}{\cancel{\quad}} + \frac{3}{\cancel{\quad}} pbq + 3pr$$

Unde  $p^2b^2 + q^2 \sqcap 3qb^2 + 9br + pbq + 3pr$ . Suppono non esse  $3qb^2 \sqcap p^2b^2$ , quia nondum  $3q \sqcap p^2$ .

$$\text{Ideo } b^2 \left\{ \begin{array}{l} - 9rb \\ - pq \\ \hline p^2 - 3q \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} + 81r^2 \\ + 18rpq \\ + p^2q^2 \end{array} \right. \sqcap \left\{ \begin{array}{l} 81r^2 \quad -q^2 \\ 18rpq \quad +3pr \\ \hline p^2q^2 \end{array} \right. \quad 5$$

$$\frac{\quad}{4p^4 - 24p^2q + 36q^2} \quad \frac{\quad}{4p^4 - 24p^2q + 36q^2}$$

$\bullet \dagger 9r^2 \bullet \dagger p^2q \sqcap \bullet \dagger 2p^2 \bullet \dagger 6q \wedge \sqrt{+q^2 + 3rp}$ . Pone  $\boxed{q^2} + 3rp \sqcap \boxed{q^2} + 2qg + g^2$  erit  $q \sqcap$

$$\frac{3rp - g^2}{2g}. \text{ et fiet } \bullet \dagger 9r^2 \bullet \dagger p^2 \wedge \frac{3rp - g^2}{2g} \sqcap (\bullet \dagger) 2p^2 (\bullet \dagger) 6 \wedge \frac{3rp - g^2}{2g} \wedge \frac{3rp \overset{+}{\boxed{-}} g^2}{2g} \boxed{+g}$$

8 (1) | debet esse *nicht gestr.* |  $81r^2 + 18rpq + p^2q^2 \sqcap 8p^4q^2 - 12p^5r$  (2)  $\bullet \dagger 9r^2 L$

5f.  $-q^2$ : Die beiden Terme müssten durch  $p^2 - 3q$  geteilt werden, nicht durch  $4p^4 - 24p^2q + 36q^2 + 3pr$

8  $\bullet \dagger 9r^2$ : Der folgende Ansatz ergibt sich nicht konsequent aus den vorhergehenden Rechnungen.



$EC : \frac{AB}{x} :: dc : dx$  fiet  $EC$  aequ.  $\frac{dc}{dx}x$  et  $TC$  aequ.  $TE + EC$ , seu  $TC$  aequ.  $AT \frac{dy}{dx} + \frac{dc}{dx}x$ .

Jam  $AT^2 + TC^2$  aequ.  $xx + yy$ . Sit  $AT$  aequ.  $\theta$ , et  $TC$  sit  $z$  fiet  $\theta^2 + z^2$  aequ.  $xx + yy$  unde differentialiter fiet:  $\theta d\theta + z dz$  aequ.  $x dx + y dy$ .

$AT : AE :: dx : dc$  seu  $AT$  aequ.  $AE \frac{dx}{dt}$ .

5

$MA : MB$  seu  $t - x : x :: AE : BC, y$ .

Ergo  $AE$  aequ.  $\frac{ty - xy}{x}$ . Ergo  $AT$  aequ.  $\frac{ty - xy}{x} \frac{dx}{dc}$ . Est autem  $t$  aequ.  $y \frac{dx}{dy}$ . Ergo

$AT$  seu  $\theta$  aequ.  $\frac{yy d\bar{x}^2}{x dy dc} - y \frac{dx}{dc}$ . Jam data curvae quadratura datur  $\int \theta dc$ , et eadem data

datur  $\int y dx$ . Ergo data curvae quadratura datur  $\int \frac{yy d\bar{x}^2}{dy}$ . Quam relationem in curva

praesenti habent  $AT, TC, AC$ , eam in trochoide ejus habent  $CB, BP, PC$ .

10

$AT$  ductae in  $GC$ , seu  $\theta$  in  $dc$ , sunt in trochoide ipsae  $y$  ductae in  $dx + dp$ .

Data trochoide invenire ejus generatricem, reducitur ad hoc problema, dato elemento trochoidis invenire curvam. Nam data curva dantur ejus  $AP$ , ergo et differentiae ipsarum; sunt autem ipsae eadem cum ipsis  $GC$  generatricis, seu cum curvae generatricis Elementis. Contra ex data methodo inveniendi generatricem, videndum an habeatur methodus inveniendi curvam elementi quaesiti. Et desideratur, ut ex datis differentiis

15

1  $TE + EC$ . (1) fiet: (2) seu  $L$  3f. fiet ... differentialiter erg.  $L$  5 seu (1)  $AE$   $t - x$  (2)

$AT$  aequ  $L$  7  $\frac{ty - xy}{x}$ . Ergo (1)  $AE$  (2)  $AT$   $L$  12 Data (1) curva invenire eius trochoidem, est (2)

trochoide  $L$  12f. problema, (1) data curva invenire elementum curvae (2) dato elemento | trochoide ändert Hrsg. | invenire  $L$  13 data (1) Trochoide (2) curva  $L$  14–16  $GC$  (1) Trochoidis, seu cum curvae trochoidis (2) generatricis, ... Elementis. (a) Et contra si data (b): sed non contra licebit ex data generatric (c) contra ex | dato ändert Hrsg. | methodo inveniendi generatricem, (aa) non habetur methodus (bb) videndum ... inveniendi (aaa) curvae (bbb) curvam  $L$

---

6  $t - x : x$ : Leibniz setzt  $t = MB$ . Das korrekte Verhältnis lautet daher  $(t - x) : t = AE : y$ . Der Fehler belastet die Überlegungen bis Z. 9. Das dortige Ergebnis für die Quadratur wird durch weitere Versehen beeinträchtigt.

ipsarum  $AP$  habeatur curva; seu ut ex datis  $dx + d\frac{\overline{dy}y}{dx}$  aequ.  $dx x''$  fiet  $x + \frac{dy y}{dx} \sqcap$   
 $\int \overline{dx x''}$  et  $x dx + dy y$  aequ.  $\overline{dx \int \overline{dx x''}}$  seu  $\frac{1}{2}xx + \frac{1}{2}yy$  aequ.  $\int \overline{dx \int \overline{dx x''}}$ . Unde patet opus  
 prius esse ad quadraturas, ad hoc ut ex data methodo inveniendi trochoidis generatricem,  
 reperiatur methodus pro elemento curvae. Prius enim invenienda (trochoides) curva cujus  
 5 differentiae  $AP$  sint datae quod fit ut dixi per quadraturas.

1 ex datis (1)  $x$  et (2)  $dx + (a) dy (b) \frac{d\overline{dy}y}{dx} (c) d\frac{\overline{dy}y}{dx} L$  2  $x dx + dy y (1)$  aequ.  $\int \int (2)$  aequ.  
 (a)  $\int \overline{dx \int \overline{dx x''}}$  (b)  $\overline{dx \int \overline{dx x''}} L$  4 invenienda (1) tro (2) (trochoides)  $L$

1  $x''$ : Leibniz erklärt diese ungewöhnliche Notation hier nicht. Ihre Bedeutung ergibt sich aus der Gleichung, in der sie verwendet wird. Diese ist äquivalent zu  $dx x'' = dx + dp$  und lässt sich zu  $x'' = 1 + \frac{dy^2}{dx^2}$  beziehungsweise zu  $x'' = \left(\frac{dc}{dx}\right)^2$  umformen;  $x''$  ist hier also das Quadrat des Bogenelements. — Andere Stücke, in welchen sich Leibniz dieser Notation bedient, sind einige Jahre jünger (etwa LH 35 VIII 10 Bl. 1–2, datiert auf den 29. November 1681). Zwar verwendet er die Notation auch in dem gut drei Jahre älteren Stück VII, 4 N. 39<sub>2</sub> auf S. 650, dort allerdings ist sie nur ein merktechnisches Hilfsmittel.

40. AUS UND ZU PIERRE COURCIER, SUPPLEMENTUM SPHAEROMETRIAE

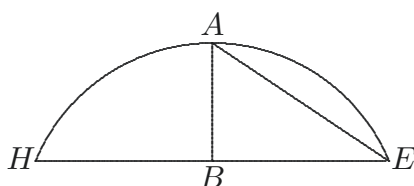
8. März 1676

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 206. 1 Bl. 2°. 2 S. — Leibniz hat im separierten Index, S. 73–76 des Druckes (LH 35 XIII 3 Bl. 207–208; Cc 2, Nr. 1350 B), die auf S. 73 befindliche Überschrift *Index* ergänzt zu: „Index Supplementi Sphaerometriae P. Courcier“. — Wörtliche Zitate werden kursiviert, dabei werden Auslassungen von einzelnen Wörtern in der Regel nicht eigens vermerkt. Orthographie und Interpunktion von Leibniz, gegebenenfalls abweichend von der Quelle, werden stillschweigend übernommen. Cc 2, Nr. 1350 A

8. Martii 1676.

*Supplementum Sphaerometriae, sive Triangulum et aliarum in Sphaera figurarum quoad areas mensuratio per R. P. Courcier S. J. Mussiponti apud Claudium Cardinet 1675.*

*Superficies cujuslibet integrae portionis Sphaerae demta sua circulari basi est aequalis circulo, cujus semidiameter aequatur lineae rectae ductae a vertice ad circumferentiam basis illius portionis.*



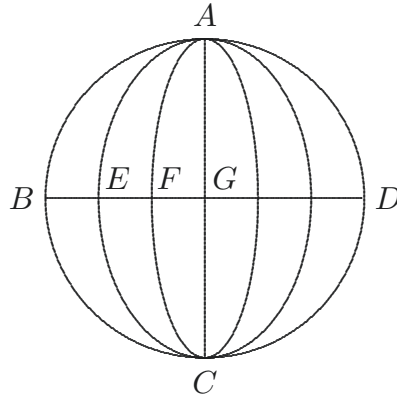
[Fig. 1]

Circulus rad.  $AE$   $\cap$  superf.  $AHE$ .

Quae linea est chorda subtendens arcum maximi circuli transeuntis per verticem dictae portionis, et in ejusdem peripheriam cadentis ad angulos rectos; portio sphaerae comprehensa duobus semicirculis magnis in eisdem polis se secantibus, vocatur *Sectionalis*.

12 sive |Triangulorum ändert Hrsg. | et (1) aliorum (2) aliarum *L* 16f. ad (1) basim (2) circumferentiam basis *L* 18f. Fig. 1 ... AHE erg. *L*

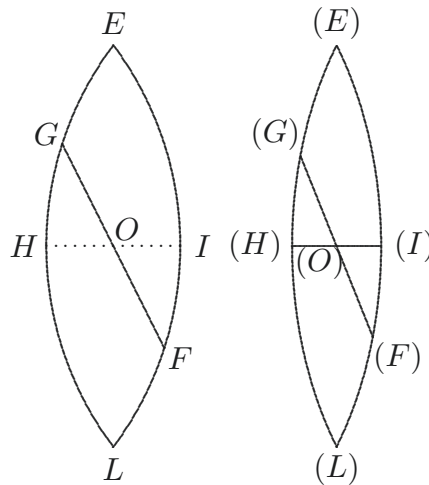
Residua sphaerae portio sectio Antipeponalis. Sectio peponalis ab aequatore secatur in duo Triangula, quae vocat birectangula, quia duo anguli ad aequatorem recti. Complementum Trianguli ad superficiem hemisphaerii vocat Anti-birectangulum.



[Fig. 2]

5 Theor. 1. *In sectionibus peponalibus est area ad aream, ut angulus ad polum ad angulum.*

Seu sectiones peponales sunt ut anguli ad polum. Hoc non satis probat, etsi satis videatur clarum. Ut *totum ad totum*, ait, *ita pars similis ad similem partem*. Anguli et sphaera eodem modo secantur.



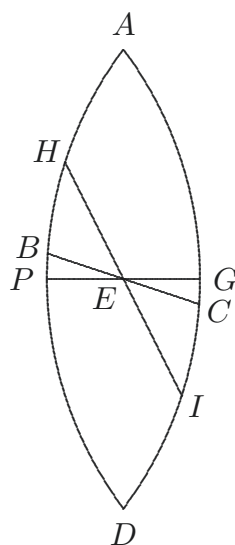
[Fig. 3]

10

5 ad polum erg. L

Theor. 2. In Triangulis Sphaericis (+ circulis magnis comprehensis +) in quibus duo latera simul sumta semicirculo aequalia, se habent areae, ut anguli duobus lateribus comprehensi scilicet  $GEFG$  ad  $(G)(E)(F)(G)$ , ut angulus in  $E$  ad ang. in  $(E)$ . Nam  $GEFG$  Triangulum aequale Triangulo  $HEI$ . si arcus  $GOF$  transeat in  $O$  medio per aequatorem. Nam utrumque sectionis peponalis dimidium. Patet sectiones peponales esse ut angulos, ergo et eorum dimidia.  $GE + EF$  faciunt semicirculum, ut patet. 5

Prop. 3. Problema: Triangulo sphaerico cujus duo latera simul sumta sunt aequalia semicirculo invenire aliud aequale quod habeat vel latus vel angulum datum, cum duobus lateribus semicirculo aequalibus. Hoc facile.

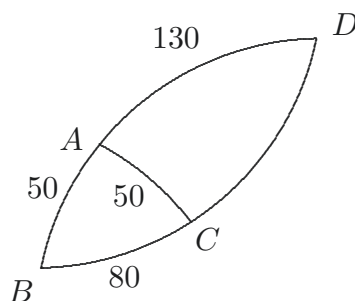


[Fig. 4] 10

Datum  $ABC$ . quaesitum cujus angulus  $AH$ , erit  $HAI$ , et  $I$  determinatur circuli magni arcu ducto  $HEI$ .

Nunc progrediamur ad Triangula in quibus latera simul sumta non faciunt semicirculum et Prop. 5. Problema: Invenire aream Trianguli Sphaerici isoscelis cujus crura simul sumta sunt semicirculo majora aut minora. 15

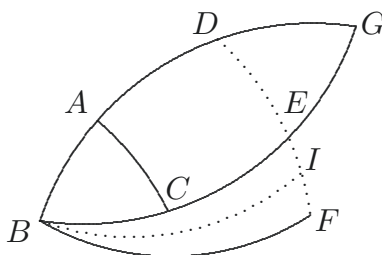
4 medio erg. L 6f. patet | Iam porro progressus ostendit, qvomodo dato Triangulo Sphaerico (magno scil.) aliud inveniri possit, cuius duo latera simul aequalia semicirculo. gestr. | (1) In (2) Hoc praestat (3) prop. L



[Fig. 5]

Sit Triang.  $ABC$ .  $AB \perp AC$ .  $BA$  et  $BC$  continua in  $D$  ut sectio peponalis fiat erit  $ADC$  Triangulum cujus duo latera  $AD$ ,  $AC$  faciunt semicirculum (nam  $AD + AC \perp AD + AB$ .) Ergo Triangulum  $ADC$  haberetur, ergo si auferatur a sectione peponali, etiam data, restabit area dati  $ABC$ .

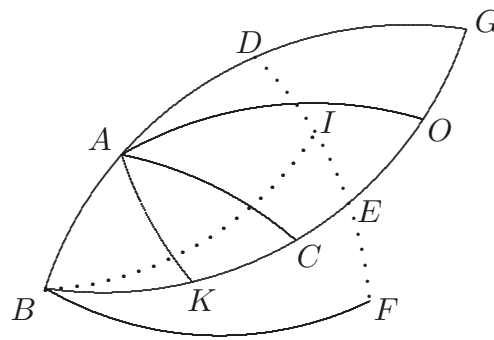
Hinc problema solvit *prop. 6. Invenire isosceles birectangulum dato alteri isosceli aequale*: hoc modo: Si[t] propositum triangulum isosceles, tolle supplementum anguli verticalis, ex summa angulorum ad basin residuum, erit angulus verticalis Trianguli birectanguli aequalis cum isoscele dato. *Scilicet p r o p. VI. Invenire isosceles birectangulum dato alteri isosceli aequale*:



[Fig. 6]

*Dati isoscelis ABC. producaturs basis BC. lat., AB. ut fiat pepo. [...] Anguli ABC. duplus ABF. Ergo Birectangulum DBF  $\perp$  peponi ABCG. Si tollas GAC ex pepone sive ex DBF vel quod eodem recidit, ut patet ex prop. 2. Si tollatur angulus GAC vel ipsi sumtus aequalis DBI ex DBF remanebit verticalis angulus  $\nabla^{\text{li}}IBF$ , quod aequale  $\nabla^{\text{lo}}$  isosceli dato ABC.*





[Fig. 7]

*Prop. VII. Invenire isosceles birectangulum dato Triangulo rectangulo vel scaleno  
 cuilibet non rectangulo aequale. In isoscele ABC. ducatur a vertice A. perpendicularis  
 arcus AK, ergo bisecatur isosceles in duo aequalia Triangula rectangula. AKB. AKC.  
 utriusque area, seu birectangulum ei aequale sic invenietur facile. Si ex  $\nabla^{\text{ang.}} ABC$ . dimi- 5  
 dio anguli ABF tollatur angulus ABI seu dimidus anguli CAG relinquetur enim angulus  
 IBE qui est verticalis, angulus Trianguli birectanguli IBE quod est aequale cum rec-  
 tangulo AKB vel AKC in isoscele ABC. Hic enim processimus per medietates sicut in  
 praecedenti problemate per totalitates. Ut autem se habet totum ad totum, ita medietas ad  
 medietatem. Eodem modo in omnibus rectangulis Triangulis reperiri potest birectangulum 10  
 aequale, ut satis patet, si nempe ex altero acutorum tollatur dimidium supplementum du-  
 plicati alterius acuti anguli, id est, dimidium supplementum anguli BAC qui est angulus  
 duplicatus anguli BAK. Quod enim relinquetur erit angulus verticalis birectanguli cum  
 dato rectangulo aequalis. [...] Hinc autem satis patet idem quod supra contingere, id est  
 obtineri birectangulum aequale dato rectangulo, sive istud datum sit pars isoscelis ut con- 15  
 tingit in triangulo isoscele ABC, sive sit pars Scaleni, ut contingit in triangulo Scaleno  
 ABO. Semper enim eodem modo obtinebitur dictum birectangulum dato rectangulo ae-  
 quale. Imo hinc colligitur modus facillimus metiendi Triangula sphaerica quaelibet. Nam  
 isosceles birectangulum aream suam prodit angulo suo verticali. Quodlibet autem isosce-  
 les non birectangulum facile revocatur ad birectangulum, sicut et quodlibet rectangulum 20  
 revocari potest ad birectangulum. Imo et quodlibet etiam scalenum revocari potest ad bi-  
 rectangulum, quia dividi potest in duo rectangula, et duo rectangula ad duo birectangula,  
 et duo birectangula ad unum birectangulum, cujus videlicet angulus verticalis adaequet  
 duos angulos verticales duorum aliorum birectangulorum.*

*Prop. 8. Triangula aequalia sphaerica habent aequalem summam angulorum.*

Et prop. 9. est hujus conversa. Sequuntur aliquot problemata usque ad prop. 15. quae horum consequentiae; item alia in quibus ex tribus datis Trianguli reliqua inveniuntur, et area anguli unius vel lateris locum subit. Meminisse autem oportet per Trigonometriam, quodlibet trianguli latus facile reperiri, datis aut repertis angulis  $\nabla^{\text{li}}$  sphaerici.

Prop. 25 ad 29. notanda habet Problemata de arcuum trientibus, exempli causa, si latus aequilateri Trianguli facti ad verticem isoscelis birectanguli abscindat in tertia parte complementum anguli verticalis dicti isoscelis, erit istud aequilaterum illi isosceli aequale.

Prop. 31. Si sphaerico isosceli birectangulo fiat ad ejus verticem aliud isosceles aequale prioris tantae parti, quanta ipsum posterius est pars certi polygoni regularis, et habens in vertice centram angulum istius certi polygoni; angulus ad basin istius posterioris isoscelis compositus erit ex semiangulo polygoni rectilinei regularis cujus assumptus est centralis angulus, et ex dimidia parte tantae portionis anguli verticalis prioris isoscelis, quot habet polygonum latera. Nimirum ut habeantur polygonorum regularium centrales anguli oportet tantum dividere 360 per numerum laterum polygoni, quotiens enim erit centralis angulus. Ut vero habeantur anguli polygoni rectilinei, tollendus est angulus centralis polygoni ex 180. residuum erit angulus polygoni rectilinei.

<i>Polygona:</i>	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
<i>Centrales anguli</i>	120	90	72	60	$51\frac{3}{7}$	45	40	36	$32\frac{8}{11}$	30
<i>Anguli polygoni rectilinei</i>	60	90	108	120	$128\frac{4}{7}$	135	140	144	$147\frac{3}{11}$	150
<i>Semiang. polyg. rectil.</i>	30	45	54	60	$64\frac{2}{7}$	$67\frac{1}{2}$	70	72	$73\frac{7}{11}$	75

In Prop. 41. ait autor se dare jam dimensionem omnium arearum superficiei sphaerae, circulis comprehensorum non vero linearum aliarum quae in superficie sphaerae describi possent, ut parabolicae, Hyperbolicae, Ellipticae, de quibus inquit olim nobis sermo fuit in opusculo de Sectione Conicae, Sphaericae, Cylindricaе, superficierum ab in-

15 polygonorum (1) rectilineorum (2) regularium L

26 opusculo: P. COURCIER, Opusculum de sectione superficiei sphaericae, 1663.

vicem. NB (+ non capio quomodo in sphaerae superficie describi possent hujusmodi curvae. +)

*Determinare limites angulorum quos habet quodlibet polygonum regulare. Prop. 32. Polygona regularia [Sphaerica] non habent se semper eodem modo in quantitate suorum angulorum, sicut polygona rectilinea, quae angulos suos semper eosdem habent. Puta Trigona semper habent angulos grad. 60. Tetragona 90. [...] At sphaerica angulos illos variant, cujus variationis limites hic postulatur. Quoniam autem ex praecedenti propositione et Corollario angulus polygoni Sphaerici componitur ex angulo polygoni rectilinei et tanta parte anguli verticalis isoscelis birectanguli polygono Sphaerico aequalis, quot habet polygonum latera fit ut minimus limes tunc habeatur, si anguli polygoni rectilinei nihil addatur; maximus vero si angulo polygoni rectilinei tanta portio addatur, quanta est pars numeri 360 per numerum laterum polygoni divisa in quotiente relictis. Quorum limitum differentia excursio angulorum nominari potest. [...] Et haec excursio juncta cum primo sive minimo limite, dat limitem maximum.*

His omnibus si jam addatur Archimedis artificium quo invenit portiones sphaericae superficiei, et circulo parallelo comprehensas, jam omnes denique circulorum in sphaera intersectiones puto haberi possunt.

Hinc subjicit problema *Prop. 42. Data trium in terrae superficie locorum longitudine et latitudine, invenire aream superficiei interceptam.*

Et *Prop. 43.* hoc notat: *Areae triangulorum Sphaericorum habentium aequalia cum Triangulis rectilineis latera aliquando sunt minores areis rectilineorum, aliquando majores aut aequales.*

*Non est hic, inquit consulenda imaginatio sola, quae gibbositatem sphaericae superficiei considerans facile sibi persuadebit, nunquam contingere, ut areae Triangulorum sphaericorum habentium aequalia cum rectilineis latera, sint minores areis rectilineorum. Verum rationem et experientiam sequendo dico, innumera, esse tam quae majorem, quam quae minorem habeant aream: Hic libentissime (inquit in fine) subjicerem tabulam quam pro gradibus et minutis compositam birectangulorum quam peponum habeo, sed cogit omittere defectus typorum numeralium.* Subjicit recapitulationem.

21 minores | angulis ändert Hrsg. | rectilineorum L

## 41. MARGINALIEN IN BLAISE PASCAL, TRAITÉ DU TRIANGLE ARITHMETIQUE

**Überlieferung:** *LiH* Marginalien und Unterstreichungen in Bl. PASCAL, *Traité du triangle arithmétique*, Paris, 1665: HANNOVER *Leibniz-Bibl.* Nm–A 605. — Gedr.: VII, 3 N. 28 S. 323 Z. 25–29 (tlw.)  
Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: Leibniz' Beschäftigung mit Pascals Schriften, die 1665 im Band *Traité du triangle arithmétique* erschienen sind, spiegelt sich in zahlreichen Stücken wider. Für alle Texte mit Ausnahme von N. 41<sub>6</sub> finden sich Belege, die die einzelnen Marginalien und Unterstreichungen in verschiedenen Zeiträumen zwischen Frühjahr 1672 und Frühjahr 1673 sowie Ende 1673 bis Mitte 1674 verorten.

10

Aufschluss auf die Datierung der Marginalien an N. 41<sub>6</sub> gibt die letzte Anmerkung, die in Verbindung mit der Notiz LH 35 XII 2 Bl. 1 v<sup>o</sup> und dem Konzept *De periodis fractionum decimalibus* (LH 35 III A 25 Bl. 1–3 u. 7–10) steht. Inhaltlich baut das Konzept auf den Arbeiten an den Stücken LH 35 III A 25 Bl. 15 r<sup>o</sup> u. 14 v<sup>o</sup> sowie LH 2 V 2 Bl. 46 v<sup>o</sup> auf. Leibniz' Datierung der Schrift *De periodis fractionum decimalibus* auf Januar 1687 sowie sein Hinweis, dass die zugrundeliegenden Beobachtungen erst kürzlich entstanden seien, lässt eine Entstehung der Marginalie im Winter 1686/87 erschließen. Aus formalen und inhaltlichen Gründen ist von einer zeitgleichen Entstehung der übrigen Marginalien an diese Schrift Pascals auszugehen.

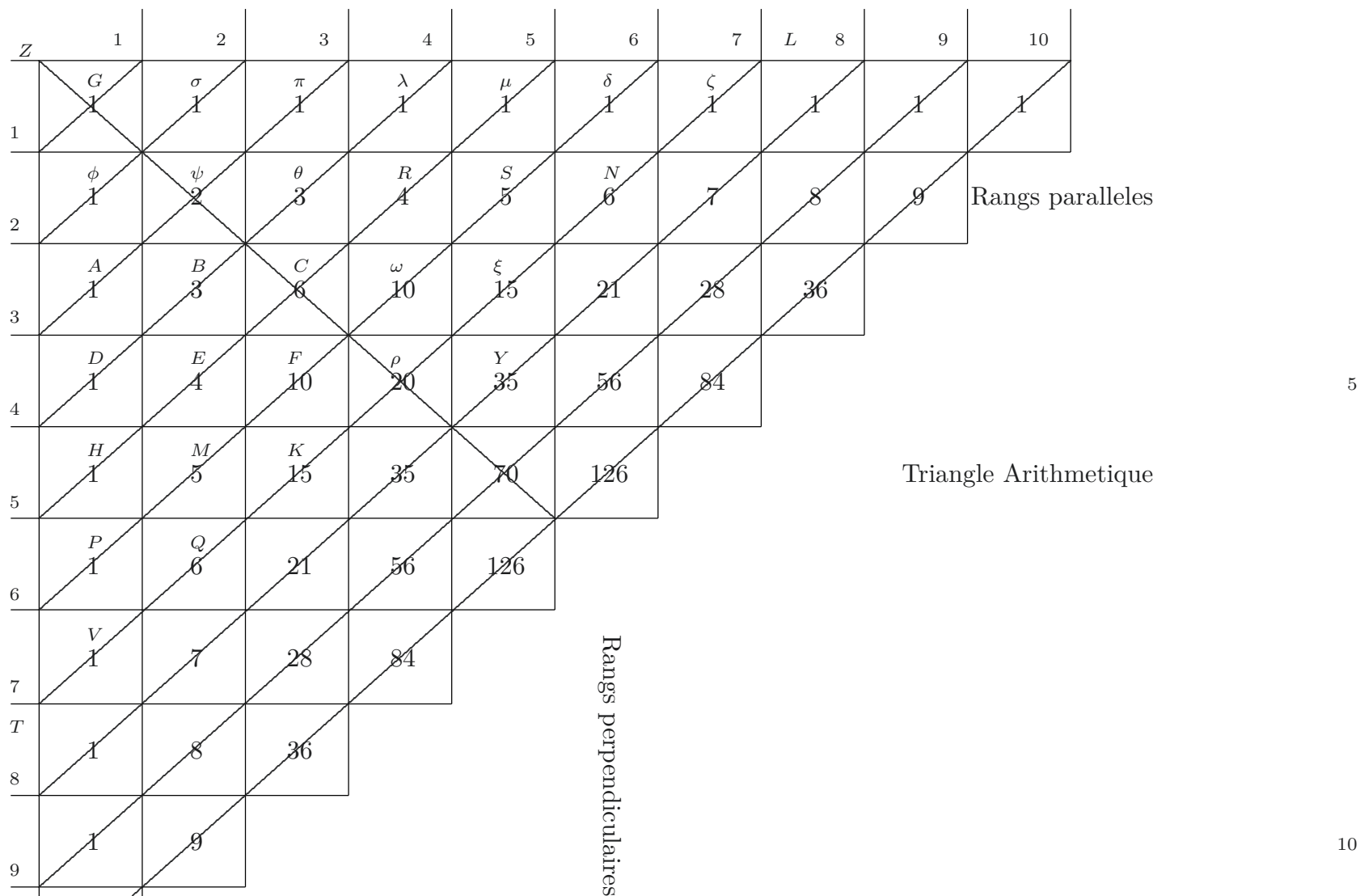
15

Die Schriften des Marginalienexemplars erscheinen als Text, die zugehörigen Seitenzahlen sind in eckigen Klammern vorangestellt. Die Orthographie und ein Großteil der Textauszeichnungen wurden an die Grundsätze der Textgestaltung dieser Ausgabe angepasst. Kursivierungen einzelner Wörter oder kurzer Passagen, mit denen in den Schriften von Pascal Einzelheiten wie neue Bezeichnungen oder in den konkreten Rechenbeispielen allgemeiner Lösungsansätze auftretende Werte hervorgehoben werden, wurden nicht mit übernommen. Marginalien aus Leibniz' Hand werden als Fußnoten zum Text wiedergegeben, seine Unterstreichungen durch Sperrung der entsprechenden Passagen hervorgehoben.

25

41<sub>1</sub>. ZUR KLAPPTAFEL  
[Frühjahr – Herbst 1672]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.



**2,4** *Daneben:*

Combinaisons				<i>in Tabula</i>
1	dans 6 se peut prendre à	6	differentes fois	<i>N</i>
2	.....	15	.....	<i>ξ</i>
3	.....	20	.....	<i>ρ</i>
4	.....	15	.....	<i>K</i>
5	.....	6	.....	<i>Q</i>
6	.....	1	.....	<i>V</i>

**2,5** *Daneben:*

<i>y rerum diversae</i>	{	unitates	$\frac{y}{1}$
<i>y rerum</i>		com2nationes	$\frac{y, y - 1}{1, 2}$
		con3nationes	$\frac{y, y - 1, y - 2}{1, 2, 3}$
		con4nationes	$\frac{y, y - 1, y - 2, y - 3}{1, 2, 3, 4}$

**2,8** *Daneben in Spalte 6:*  $\text{III} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \dots \text{III} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \dots \text{II} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix} \dots \text{I} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \end{matrix}$

**2,10** *diversae erg. LiH*

**3,2–8** Combinaisons: Vgl. Bl. PASCAL, *Divers usages du triangle arithmetique*, 1665, S. 4f. [Marg.] (PO III S. 469–471) und DERS., *Combinaciones*, 1665, S. 22 u. S. 32f. [Marg.] (PO III S. 557 u. 586–593). Vgl. auch Leibniz’ Auseinandersetzung mit dieser Thematik in N. 25. **3,10–13** *y rerum diversae*: Leibniz gibt hier die *a. a. O.*, S. 32f. [Marg.] (PO III S. 586–593) dargestellten Zusammenhänge wieder. N. 25 belegt ebenfalls Leibniz’ Beschäftigung mit diesem Thema, enthält jedoch keine Ansätze zur

Formalisierung. **3,14**  $\text{III} \begin{matrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{matrix} \dots$  : Gleiche und ähnliche Figuren finden sich in VII, 3 N. 3 S. 21–26.

41<sub>2</sub>. ZUM TRAITTÉ DES ORDRES NUMERIQUES

[Herbst 1672 – Winter 1672/73]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 5f.]

... La maniere dont il a pris cette mesme proposition est telle. 5

En la progression naturelle qui commence par l'unité, un nombre quelconque estant mené dans le prochainement plus grand, produit le double de son triangle.

Le mesme nombre estant mené dans le triangle du prochainement plus grand, produit le triple de sa pyramide.

Le mesme nombre mené dans la pyramide du prochainement plus grand, produit le quadruple de son triangulo-triangulaire; et ainsi à l'infiny, par une methode generale et uniforme. 10

Voila comment on peut varier les enonciations. Ce que je monstre en cette proposition s'entendant de toutes les autres, je ne m'arresteray plus à cette maniere accommodante de traiter les choses, laissant à chacun d'exercer son genie en ces recherches, où doit consister toute l'estude des Geometres: car si on ne sçait pas tourner les propositions à tous sens, et qu'on ne se serve que du premier biais qu'on a envisagé, on n'ira jamais bien loing: ce sont ces diverses routes qui ouvrent les consequences nouvelles, et qui, par des enonciations assorties au sujet, lient des propositions, qui sembloient n'avoir aucun rapport dans les termes où elles estoient conceües d'abord. ... 15 20

---

5 il: Bei der Passage in Z. 6–12 handelt es sich um eine französischsprachige Wiedergabe einer Beobachtung von Fermat, die dieser in einem Brief von Anfang Juni 1638 (*FO* II S. 70; *CM* VII S. 279) Mersenne mitgeteilt hatte. Später wurde sie als *Observatio D. P. F.* in *Diophanti Alexandrini De Multangulis Numeris Liber Unus*, 1670, S. 16 (*FO* I S. 341) veröffentlicht. Leibniz bezieht sich auf diese Übersetzung in S. 209 Z. 8 – S. 210 Z. 3. 13 *varier les enonciations*: Leibniz weist auf die unterstrichene Passage in *Aus und zu Galileis Discorsi*, VI, 3 N. 11<sub>2</sub> S. 167 Z. 10f. sowie später in VI, 3 N. 22<sub>2</sub> S. 331 Z. 8–11 hin.

41<sub>3</sub>. ZU DE NUMERORUM CONTINUORUM PRODUCTIS

[Ende 1672 – Frühjahr 1673 sowie Ende 1673 – Mitte 1674]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 13]

5

De numerorum continuorum productis,

seu

De numeris qui producuntur

ex multiplicatione numerorum serie naturali procedentium.

10 Numeri qui producuntur ex multiplicatione numerorum continuorum a nemine, quod sciam, examinati sunt. Ideo nomen eis impono nempe, producti continuorum.

...

[S. 16]

...

---

7 *Neben der zweiten Überschrift:* Producti continuorum cum progressionem harmonicam, plurimum habent connexionis. Sed hoc Pascalius non observavit. Nimirum:

$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad \frac{1}{4}$  etc. est series progressionis harmonicae, reducendo omnes ad unum nomen fiet:

$$\frac{2, 3, 4 + 1, 3, 4 + 1, 2, 4 + 1, 2, 3}{1, 2, 3, 4}$$

14f. continuorum (1) sunt progressionis harmonicae. (2) cum progressionem harmonicam | plurimum habent connexionis *erg.* |, sed ... non (a) noverat (b) observavit *LiH*

---

14–18 Producti ...  $\frac{2, 3, 4 + 1, 3, 4 + 1, 2, 4 + 1, 2, 3}{1, 2, 3, 4}$ : Leibniz' Beschäftigung mit der Summation der

ersten Glieder der harmonischen Folge und die in der späteren Ergänzung der Marginalie angegebene Partialsumme sind in VII, 3 N. 10 S. 134f. sowie in N. 11 S. 140f. belegt. Zudem sind der Summe der harmonischen Progression die Stücke VII, 3 N. 27 und 28 gewidmet. In letzterem weist Leibniz explizit auf S. 323 Z. 2 – S. 324 Z. 5 auf den in der Marginalie erwähnten Zusammenhang zwischen den Produkten aufeinanderfolgender Zahlen und der harmonischen Progression hin.



## Problema.

Dato quocunque numero, invenire tot quot imperabitur, numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus, sit maximus ejus speciei qui in dato numero contineatur.

Oportet autem datum numerum non esse minorem producto totidem numerorum ab unitate continuorum. 5

Datus sit numerus verbi gratia 4335. Oporteatque reperire verbi gratia quatuor numeros continuos ex quorum multiplicatione factus numerus sit maximus qui in dato 4335 contineatur, eorum omnium qui producuntur ex multiplicatione quatuor numerorum continuorum. 10

Sumantur ab unitate tot numeri continui quot sunt numeri inveniendi, nempe quatuor in hoc exemplo, 1, 2, 3, 4, quorum per productum, 24, dividatur numerus datus sitque quotiens, 180. Ipsius quotientis inveniatur *r a d i x o r d i n i s* numerici non quidem quarti sed sequentis nempe quinti sitque ea, 6. Ipse, 6, est primus numerus, secundus 7, tertius 8, quartus 9. 15

...

41<sub>4</sub>. ZU NUMERICARUM POTESTATUM GENERALIS RESOLUTIO

[Ende 1672 – Frühjahr 1673]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 19] 20

...

## Problema.

Dato quolibet numero invenire radicem propositae potestatis maximae quae in dato contineatur.

---

13 *r a d i x o r d i n i s*: Die von Leibniz unterstrichene Passage steht in einem inhaltlichen Bezug zu Bl. PASCAL, *Numericarum potestatum generalis resolutio*, 1665, S. 19 [Marg.] (*PO* III S. 550 f.), die Leibniz ebenfalls mit einer Unterstreichung und einer Anmerkung versehen hat. VII,1 N.106 S.673 Z. 19 f. belegt Leibniz' Auseinandersetzung mit dem von Pascal vorgestellten Problem.

Sit datus numerus v.g. 4335, et invenienda sit radix gradus v.g. quarti maximi numeri quarti gradus seu quadrato quadrati qui in dato numero contineatur.

Inveniantur, ex praecedente tractatu, quatuor numeri continui, quia quartus gradus proponitur, quorum productus sit maximus ejus speciei qui in 4335 contineatur, sintque ipsi, 6, 7, 8, 9.

...

#### 41<sub>5</sub>. ZU POTESTATUM NUMERICARUM SUMMA

[Juli – Dezember 1672]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

10 [S. 36]

...

Ad summam Potestatum cujuslibet progressionis inveniendam  
unica ac generalis methodus.

15 Datis quotcunque numeris, in qualibet progressionem, a quovis numero inchoante,  
invenire quarumvis potestatum eorum summam.

---

#### 14 *Ergänzung von arithmetica über progressionem*

3 *Gestr. Bem. an praecedente tractatu*: Sed in praecedente tractatu opus fuit radicem extractione. *LiH*

---

3 *praecedente tractatu*: Vgl. Bl. PASCAL, *De numerorum continuorum productis*, 1665 [Marg.] (*PO* III S. 528–543), insbesondere *Problema*, S. 538–543. **15** opus fuit: Beim Verweis auf die Stelle im vorausgehenden Traktat in VII, 1 N. 106 S. 673 Z. 19 f. erwähnt Leibniz den vermeintlichen Fehler Pascals nicht. **17** *arithmetica*: Die Anmerkung, dass Pascals Beobachtung nur für die arithmetische Progression gilt, findet sich ebenso in VII, 3 N. 4<sub>3</sub> S. 442 Z. 15–17.

41<sub>6</sub>. ZU DE NUMERIS MULTIPLICIBUS

[Winter 1686/87]

Datierungsgründe: Vgl. N. 41.

[S. 42]

De numeris multiplicibus.

5

Ex sola characterum numericorum additione agnoscendis.

...

[S. 42 f.]

...

Propositio unica.

10

Agnoscere ex sola additione characterum dati cujuslibet numeri, an ipse sit alterius dati numeri multiplex.

Ut haec solutio fiat generalis, litteris utemur vice numerorum. Sit ergo divisor, numerus quilibet expressus per litteram  $A$ ; dividendus autem, numerus expressus per litteras  $T V N M$ , quarum ultima  $M$  exprimit numerum quemlibet in unitatum columna collocatum;  $N$ , vero, numerum quemlibet in denariorum columna;  $V$ , numerum quemlibet in columna centenariorum;  $T$ , autem numerum quemlibet in columna millenariorum, et sic deinceps in infinitum: ita ut si litteras in numeros convertere velis, assumere possis loco

15

---

6 *Im Anschluss:* Non haec tantum sed et his ampliora mea methodo inveni.

18–298,2 *Am Rand:*

10 –  $fA$  aequ.  $B$

100 –  $fA10 - gA$  aequ.  $C$

1000 –  $fA100 - gA10 - hA$  aequ.  $D$

---

**19** mea methodo: Gemeint sind wohl Ergebnisse, die Leibniz in seinem Konzept *De periodis fractionum decimalibus* (LH 35 III A 25 Bl. 1–3 u. 7–10) vom Januar 1687 vorstellt. Auf die vorliegende Schrift Pascals verweist Leibniz zuvor schon in VII, 2 N. 5 S. 37 Z. 11. Den dort verfolgten Ansatz arbeitet Leibniz jedoch nicht vollständig aus.

ipsius,  $M$ , quemlibet ex novem primis characteribus verbi gratia 4, loco  $N$  quemlibet numerum ut 3, loco  $V$  quemlibet numerum ut, 5; et loco  $T$ , quemlibet numerum ut 6; et collocando singulos illos characteres numericos in propria columna; prout collocatae sunt litterae quae illos exprimunt, proveniet hic numerus, 6534, divisor autem  $A$  erit  
 5 numerus quilibet ut 7. Missis autem peculiaribus his exemplis generali ista enunciatione omnia amplectimur.

Dato quocumque dividendo  $TVNM$ , et quocumque divisore  $A$ , agnoscere ex sola additione characterum numericorum  $T, V, N, M$ , utrum ipse numerus  $TVNM$  exacte dividatur per ipsum numerum  $A$ .

10 Ponantur seorsim numeri serie naturali continui 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, et caet. a dextra ad sinistram sic.

et caet.	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
et caet.	$K$	$I$	$H$	$G$	$F$	$E$	$D$	$C$	$B$	1

Jam ipsi primo numero, 1, subscribatur unitas.

15 Ex ipsa unitate decies sumpta, seu ex 10 auferatur  $A$  quoties fieri poterit, et supersit  $B$  qui sub 2 subscribatur.

Ex  $B$  decies sumpta seu ex 10  $B$ , auferatur  $A$  quoties poterit, et supersit  $C$  qui ipsi 3 subscribatur.

Ex 10  $C$ , auferatur  $A$  quoties poterit et supersit  $D$  qui ipsi 4 subscribatur.

20 Ex 10  $D$ , auferatur  $A$  etc. in continuum.

Nunc sumatur ultimus character dividendi  $M$ , qui quidem et primus est a dextra ad sinistram, scribaturque seorsim semel; primo enim numero 1, subjacet unitas.

Jam, sumatur secundus character  $N$  et toties repetatur quot sunt unitates in  $B$ , qui secundo numero subjacet, hoc est multiplicetur  $N$  per  $B$  et sub  $M$  ponatur productus.

25 jam sumatur tertius character  $V$ , et toties repetatur quot sunt unitates in  $C$ , sub tertio numero subjecto, seu multiplicetur  $V$  per  $C$  et productus sub primis ponatur.

Sic denique multiplicetur quartus  $T$  per  $D$ , et sub aliis scribatur.

Et sic in infinitum.

---

21 *Marginalie im Druck:*

$M$

$N$  in  $B$

$V$  in  $C$

$T$  in  $D$

Dico prout summa horum numerorum,  $M$ ,  $\dagger N$  in  $B$ ,  $\dagger V$  in  $C$ ,  $\dagger T$  in  $D$ , est ipsius  $A$  multiplex aut non, et quoque ipsum numerum  $T V N M$ , esse ejusdem multiplicem, vel non.

Etenim si propositus dividendus unicum haberet characterem  $M$  sane prout ipse esset multiplex ipsius  $A$ , numerus quoque  $M$  esset ejusdem  $A$  multiplex, cum sit ipse numerus totus. 5

Si vero constet duobus characteribus,  $N M$ , dico quoque, prout  $M$ ,  $\dagger N$  in  $B$ , est multiplex  $A$ , et ipsum numerum,  $N M$ , ejusdem multiplicem esse.

Etenim character  $N$  in columna denarii, aequatur  $10 N$ ,

Verum ex constructione, est	$10 - B$ . multiplex $A$ .	10
Quare ducendo $10 - B$ in $N$ est	$10 N - B$ in $N$ multiplex $A$ .	
Si ergo contingit et esse	$M$ , $\dagger B$ in $N$ multiplicem $A$ .	
Ergo ambo ultimi multiplices juncti	$10 N \dagger M$ erunt multipl. $A$ .	
Id est $N$ in columna denarii et $M$ in columna unitatis, seu numerus	$N M$ est multiplex $A$ .	15

Q. E. D.

Si numerus dividendus constet tribus characteribus,  $V N M$ , dico quoque ipsum esse aut non esse multiplicem  $A$ , prout,  $M$ ,  $\dagger N$  in  $B$   $\dagger V$  in  $C$ , erit ipsius  $A$  multiplex, vel non.

Etenim character  $V$ , in columna centenarii, aequatur  $100 V$ . 20

At ex constructione, est	$10 - B$ , multiplex, $A$ .	
Quare multiplicando $10 - B$ per $10$	$100 - 10 B$ , multip. $A$ .	
Et ducendo ipsos in $V$	$100 V - 10 B$ in $V$ , mult. $A$ .	
Sed est etiam ex constructione,	$10 B - C$ , multip. $A$ .	
Quare ducendo in $V$ ,	$10 B$ in $V - C$ in $V$ , mult. $A$ .	25

---

10–15 *Am Rand:*

$10 - B$  aequ.  $fA$

$10N - BN$  aequ.  $NfA$

$10N - BN + BN + M$  aequ.  $NfA + VA$

Ergo  $10N + M$  aequ.  $NfA + VA$

Sed ex ostensis  $100V - 10B$ , in  $V$ , mult.  $A$ .  
 Ergo juncti duo ultimi  $100V - C$  in  $V$ , mult.  $A$ .  
 Jam vero ostendemus ut in secundo casu  $10N - B$  in  $N$ , mult.  $A$ .  
 Ergo juncti duo ultimi  $100V \dagger 10N - C$  in  $V - B$  in  $N$ , mult.  $A$ .  
 5 Ergo si contingat hos numeros  $C$  in  $V \dagger B$  in  $N \dagger M$ , esse mult.  $A$ .  
 Ambo ultimi juncti nempe  $100V, \dagger 10N, \dagger M$ ; et mult.  $A$ .  
 Seu  $V$  in columna centenarii  $N$  denarii et  $M$  unitatis, hoc est numerus  $VNM$ , est  
 multiplex,  $A$ . Q. E. D.

10 Non secus demonstrabitur de numeris ex pluribus characteribus compositis. Quare  
 prout etc. Q. E. D.

Exemplis gaudeamus.

Quaero, qui sint numeri multiplices numeri 7? Scriptis continuis, 1, 2, 3, 4, 5, etc.  
 subscribo, 1, sub 1.

15 
$$\begin{array}{cccccccccc} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ & 6 & 2 & 3 & 1 & 5 & 4 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{array}$$

Ex unitate decies sumpta, seu ex 10 aufero 7 quoties potest, superest 3 quem pono  
 sub 2.

Ex 3 decies sumpto, seu ex 30 aufero 7 quoties potest, superest 2 quem pono sub 3.

Ex 20 aufero 7 quoties potest, superest 6 et pono sub 4.

20 Ex 60 aufero 7 quoties potest, superest 4 et pono sub 5.

Ex 40 aufero 7 quoties potest, superest 5 et pono sub 6.

Ex 50 aufero 7 quoties potest, superest 1 et pono sub 7.

Ex 10 aufero 7 quoties potest, et redit 3 et pono sub 8.

Ex 30, aufero 7 quoties potest, et redit 2 et pono sub 9.

---

299,21–300,6 *Am Rand:*

$$\begin{array}{rcl} 100V - 10BV & & \text{aequ. } 10VfA \\ + 10BV & & \text{aequ. } VgA \\ - CV & & \\ + 10N - BN & & \text{aequ. } NfA \\ \quad CV + BN + M & & \text{aequ. } VA \\ \hline 100V + 10N & + M & \text{aequ. } \dots A \end{array}$$

Et sic redit series numerorum, 1, 3, 2, 6, 4, 5, in infinitum.

...

1 *Bemerkung am Rand:* Est periodus residuorum decimalis fractionis dati numeri

1 *BCDEF*  
 0132645132645132 etc. nam:  $\frac{1}{7}$  aequ. 0142857142857 etc.

1 *BCDEF*  
 1111111 *PQRSTU*  
~~10000000~~ f 01428257  
 7777777

$$\begin{aligned} AP + B &\text{ aequ. } 10 \\ AQ + C &\quad B0 \\ AR + D &\quad C0 \end{aligned}$$

*B. C. D.* etc. sunt minores quam 7.

3f. periodus (1) decimalis fractionis dati numeri  $\frac{1}{7}$  aequ. 0132645 (*a*) imo error: non sunt (*b*) imo error est, (*aa*) non sunt (*aaa*) numeri, sed (*bbb*) quotientes periodici, sed residui (*bb*) nam  $\frac{1}{7}$  aequ.

0142857142857 etc (2) residuorum ... numeri (a)  $\frac{1}{7}$  ABCDEFGHI KLMN  $\frac{1}{7}$  BCDEF  
 etc *LiH* 5-8 01428257 (1) AP aequ. 10 (2) AP + B aequ 10 (a) P. Q. R. (b) B. C. D. etc. *LiH*  
 AQ aequ. B0 AQ + C B0  
 AR aequ. C0 AR + D C0

*PQRSTU*  
 5 01428257: Leibniz gibt die Dezimalperiode von  $\frac{1}{7}$  fehlerhaft an. 6-8 AP + B aequ. 10 ...

C0: Vgl. S. 298 Z. 14-20. 10-12 132645: Dieselbe falsche Annahme, dass es sich bei der ursprünglich angegebenen Zahlenfolge 132645 um die Dezimalperiode von  $\frac{1}{7}$  handelt, findet sich ebenso im Stück LH 35 XII 2 Bl. 1 v<sup>o</sup>, in dem sich Leibniz mit der vorliegenden Schrift Pascals auseinandersetzt. Leibniz erkennt dort den Fehler und korrigiert ihn.





tunc formas Elementares appello concordantes ut  $m^2n$ , vel quod coincidit  $mnm$  (NB.

$$\begin{array}{ccc} \cdot v & & \cdot n \\ n^2 m & & mvm \\ \cdot v & & \cdot v \\ v^2 m & & nv n \\ \cdot n & & \cdot v \end{array}$$

ubi ut obiter dicam has duas formas coincidere est theoremata demonstrabile et quod alias in infinitum formas extenditur, et tamen quivis videt esse identicam propositionem, re resoluta usque ad characteres simplicissimos. Ut hinc appareat theoremata nihil aliud dare quam modum contrahendi cogitationes per characteres ut facilius reddatur ratiocinatio sed hoc obiter) discordantes essent si quilibet terminus haberet

peculiarem affectorem, ut si esset  $\frac{1}{b}m^2n$ . Semiconcordantes sunt, si concordant  $cm^2v$  etc.

quaedam partes formae, ut  $bm^2n$ . et harum sunt varii gradus. Nam fieri potest, ut non sit

$$\begin{array}{c} v \\ cn^2 m \\ v \end{array}$$

hoc in singulis partibus ut si his addatur adhuc  $dv^2m$ . Partiales formae sunt,  $e..n$

quaecunque enuntiandi aliquod compendium constans accipere possunt, ut  $m^2n$ . Totum

enim affectionem habet communem. Rectius appelles Membrum, etc. Potest fieri semi concordantia, si forma aliqua concordet quae ipsa per se constituit perfectam formam,

1 f. formas |Elementales ändert Hrsg. | appello (1) consonas (2) concordantes (a). Sin mi (b) ut  $m^2n$ , (aa) Sin (bb) vel |quod coincidit erg. |  $mnm$  (|NB. erg. | ubi L 6 obiter |, ändert Hrsg. | (1)

$$\begin{array}{ccc} \cdot v & & \cdot n \\ n^2 m & & mvm \\ \cdot v & & \cdot v \\ v^2 m & & nv n \\ \cdot n & & \cdot v \end{array}$$

praetere (2) discordantes L 7 peculiarem (1) multiplicatorem, (2) affectorem, L 8 quaedam (1) formae, quae ipsae per se perfectae intelligi possent, aliis scilicet literis (2) partes L 8 ut (1) m (2)  $bm^2n$ . L 9 adhuc (1) m (2)  $dv^2m$ . L 11 appelles (1) Coef (2) coaffectas (3) Membrum, L

$$\begin{array}{c} v \\ cn^2 m \\ v \\ e..n \end{array}$$

12 constituit (1) gradum (2) perfectam L

ut  $mm$ . est perfecta per se, si non accedat litera  $v$ . Unde melior est dispositio haec:  $mm$   
 $n$   $n$   
 etc. quam  $m^2n$  etc. quia praecedens distinguit formas per se perfectas. Haec de formis  
 $v$

Elementaribus. Sequuntur Formae Graduum, quae scilicet gradum integrum complent,  
 ut: si in unam surgas,  $m^2 + mn$   $m$  item  $m^3$   $mn$   $m$  |  $m^2$   $mn$   $m$ . Eaeque rursus sunt  
 $n^2$   $n$   $n^3$   $n$  |  $n^2$   $n$   
 $A$   $B$

5 aut repetunt formas graduum priorum, aut omnes aut quasdam ut  $A$ .  $B$ . simul, aut non  
 repetunt ut  $A$ . tantum. Hae jam formae continent apicem Combinatoriae artis, et ipsius  
 Calculi generalis in universum.

Condantur jam Tabulae, ubi statim si inceperimus nonnihil Caetera se ipsis pate-  
 bunt, ac scribi poterunt prima pro formis illis Elementaribus Concordantibus, quae du-  
 10 cantur in se invicem, prodibunt aliae graduum superiorum, et hinc jam apparet resolutio  
 aliarum similium. Et modus formam datam investigandi, sitne divisibilis an indivisibilis  
 etc. et quo nam addito vel adempto fiat resolubilis. Hoc elegantissima theoremata dabit pro  
 concordantibus, et forte modum resolvendi omnes aequationes etc. Pro discordantibus,  
 eodem procedendum modo, et habebitur etiam progressio ac tabula, ut imposterum talia  
 15 nullo negotio scribi possint. Condita discordantium Tabula, sequetur major illa Tabula,  
 qua continetur apex combinatoriae. Nimirum Tabula tollens literas, ob plures aequationes.  
 Nimirum formulae graduum cogitentur esse aequationes, sive nihilo aequales, et ope  
 tabularum superiorum facilius calculabitur, admirabilis illa Tabula, qua semel data et  
 ad gradus satis altos continuata, restabit calculus omnis et omnes multiplicationes, divi-  
 20 siones, radicum extractiones, fient imo saepe et formularum additiones et subtractiones  
 fient transscribendo tantum ex tabula, et quasdam in ea literas supponendo nihilo aequa-  
 les. Hac Tabula continetur omnis comparatio formarum, cum enim quaedam coincidere  
 dicimus aequationem dicimus. Comparatio autem formarum combinatoria est. Hactenus  
 omnis consideratio fuit non nisi rationalium, at ex iisdem jam oriuntur irrationalium

1 haec: (1)  $m^2$  (2)  $mm$   $L$     3 Sequuntur (1) formae perfectae (2) Formae  $L$     4 item (1)  $m^2 v^3$   
 $n$   
 (2)  $m^3$   $mn$   $m$  | (a)  $m^2$   $mn$  (b)  $m^2$   $mn$   $m$ .  $L$     12 elegantissima (1) dabit (2) theoremata | dabit erg. |  
 $n^3$   $n$  |  $n^2$   $n$   $n^2$   $n$   
 $A$                     aut                     $B$   
 (a) qvo (b) pro  $L$     18 superiorum (1) facillime cal (2) facilius  $L$     21 f. aequales. (1) Haec Tabula  
 comparetu (2) Hac  $L$

inventiones omnes. Nimirum cum comparando obtinetur pura quaedam potestas coincidens cuidam dato. At affectae quaelibet potestas secundi gradus reddi potest pura. Et Cubica reddi potest pura ex data secundi gradus affecta. Et ita porro in infinitum. Id est pro cubo resolvendo habetur aequatio  $x^6 \cdot x^3 \cdot x^0 \sqcap 0$ . pro quadrato-quadrato:  $x^{12} \cdot x^8 \cdot x^4 \cdot x^0 \sqcap 0$ . pro surdesolido  $x^{20} \cdot x^{15} \cdot x^{10} \cdot x^5 \cdot x^0 \sqcap 0$ . Quaelibet autem aequatio data surdesolida v. g.  $y^5 \cdot y^4 \cdot y^3 \cdot y^2 \cdot y^0 \sqcap 0$ . reduci potest ad ejusmodi aequationem 20<sup>mi</sup> gradus per artem infallibilem analyticam; quod ope Tabulae superioris jam conditae, nullo negotio fiet. Hinc jam progrediemur ad resolutiones per irrationales aequationum plurium incognitarum, quando scilicet fieri potest, ut nulla ex pluribus incognitis in irrationali contineatur, vel una non, vel duae non, etc. Sed et hic explicabitur quando aequatio aliqua dividi potest per aliam rationalem vel irrationalem; ut simplicissimae obtineantur reductiones.

Omni theoremate compendioso oblato quaerendus est modus quo commode inveniri potuisset, quod semper fiet per certos quosdam novos characteres, ipsam relationem sive progressionem indicantes combinationum. Quando calculando redimus ad aequationem similem datae, et quasi per Circulum, signum est tamen quibusdam sublatis vel destructis, potuisse nos hoc praevenire. In Geometria jam situs addendus, cujus ope plurima compendiose habentur, quaerendus semper modus demonstrandi per analysin compendiosam, theorema Geometricum, et contra per ductum linearum theorema analyticum. Hunc enim velut lapidem lydium nobis natura dedit et originem inventionum. Memini quae calcularam de meae curvae anonymae ad cissoeidem ventione facile ostendi per  $\nabla^{la}$  similia. Praeclarum illud Vietae de Supplemento Geometriae. Quaerendae constructiones simplicissimae ex ipsa Geometria: Novis opus ad eam rem characteribus. Geometria sine

1 obtinetur (1) quantitas quaedam (2) pura L 4 est (1) cubus reducitur (2) pro L 6 v. g. (1)  $x^5 \cdot x^4$  (2)  $y^5 \cdot y^4 \cdot y^3 \cdot y^2 \cdot y^0 \sqcap 0$ . L 7 analyticam; (1) si scilicet (2) |quod erg. | ope L 22 de (1) situ (2) Supplemento L

21 f. quae . . . similia: Gemeint sind die Berechnungen in VII, 6 N. 8 S. 94–106, die Leibniz in der auf dieser Vorlage basierenden französischsprachigen Fassung III, 1 N. 39<sub>2</sub> wohl im Oktober 1674 an Huygens gesendet hatte. In beiden Stücken wählt er für die von ihm erstmals in VII, 6 N. 8 S. 94 Z. 11 – S. 95 Z. 12 eingeführte Kurve die auch hier genannte Bezeichnung. Auf die Verwendung der Kurve in J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*, 1668, prop. VI, S. 23f. hatte Huygens Leibniz allerdings bereits in seinem Antwortschreiben III, 1 N. 40 vom 6. November 1674 hingewiesen. Vgl. die Erl. zu VII, 6 N. 8 und zu III, 1 N. 39<sub>2</sub> u. N. 40. 22 Vietae: Fr. VIÈTE, *Supplementum geometriae*, 1593 (VO S. 240–257).

figuris demonstrari potest imo demonstratur reapse. Nam non magis figurae necessariae ad demonstrationes Geometricas quam moduli ad Mechanicas. Itaque falsum est Geometriam servire ad imaginationem nam et ipsa contrahit ideas, adhuc magis quam Algebra, quemadmodum doctrina de motu adhuc magis quam utraque. Nam ejus characteres plus  
5 essentiae involvunt, nam Geometria per magnitudinem etiam situm seu locum; Motus praeterea et ordinem sive tempus. Data descriptione Logarithmicae et Quadraticae uno tractu, sive sectrice anguli et sectrice rationis, constructiones omnes Geometricae eo reduci debent, unde videndum quomodo sine analysi ex ipsis ducantur irrationales per ductum tantum linearum.

1 figuris (1) demonstratur (2) demonstrari *L*      7 sive (1) sectione (2) sectrice *L*

## 43. DE DISCERPTIONIBUS NUMERORUM

[April – Dezember 1670 (?)]

**Überlieferung:** L Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 17. 1 Bl. 2<sup>o</sup>. 1 S. auf Bl. 17 r<sup>o</sup>. Bl. 17 v<sup>o</sup> leer. —  
 Gedr.: LKK 2, 1976, S. 256–258.  
 Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: Aus inhaltlichen Gründen fällt das vorliegende Stück in die Anfänge von Leibniz' Auseinandersetzung mit Zerfällungen. Die Erwähnung der *Dissertatio de arte combinatoria* legt Ende März 1666 als gesicherten *terminus post quem* für die Entstehung fest. Die intensive Verwendung diakritischer Zeichen spricht für eine Datierung noch vor Leibniz' Aufenthalt in Paris. Vor diesem Hintergrund erweist sich Leibniz' Hinweis auf den Begriff *Zerfällung* als deutschsprachige Entsprechung für *discerptio* ebenfalls als stimmig. Unmittelbar im Anschluss an die *Dissertatio de arte combinatoria* führt Leibniz lediglich Arbeiten zum Teilbereich der juristisch-kombinatorischen Themen fort, und dies auch nur in geringem Umfang. Insbesondere sind für diese Zeit keine Hinweise auf eine Weiterführung der Beschäftigung mit Fragen der Kombinatorik oder die kombinatorische Behandlung mathematischer Probleme im überlieferten Textkorpus vorhanden. Erst um die Zeit des ersten Briefs an Athanasius Kircher vom 16. Mai 1670 (II, 1 N. 20<sub>a</sub>), in dem sich Leibniz auf Kirchers 1669 neu erschienene *Ars Magna Sciendi sive Combinatoria* bezieht und sich selbst als Gelehrten im Bereich der Kombinatorik vorstellt, beginnen Bezüge auf die Kombinatorik erneut und in der vollen Breite des thematischen Spektrums sichtbar zu werden — sei es durch Verweise auf seine *Dissertatio*, der Verwendung der Kombinatorik als Methode in den Rechtswissenschaften, dem Auftreten der Kombinatorik als Methode und als Teilbereich der Mathematik, oder auch im grundsätzlichen Verständnis der Welt als *combinatio* etwa in Bezug auf Materie oder Bewegungen von Planeten. Somit liegt eine genauere Datierung des vorliegenden Stücks in die Zeit ab etwa April 1670 nahe. Leibniz verweist außerdem auf die Nutzung maschineller Rechenverfahren zur Lösung umfangreicher Berechnungen. Zudem bestehen enge inhaltliche und methodische Bezüge (Gewichte; Rechenverfahren; als *Zerfällungen* auffassbare Zahlenzerlegungen auf LH 42, V Bl. 16 r<sup>o</sup>; Verwendung von Differenz-Schemata als Analysemittel) zu Passagen auf dem Bogen LH 42 V Bl. 15–16, auf dem sich auch der Anfang von Leibniz' ältestem überlieferten Konzept *Instrumentum arithmeticum* (Druck in Reihe VIII) zur Rechenmaschine befindet. Üblicherweise werden die ältesten erhaltenen Arbeiten zu Leibniz' Rechenmaschine in das Jahr 1670 datiert. Die Entstehungszeit des vorliegenden Stücks lässt sich dadurch weiter auf die Zeit bis Ende 1670 eingrenzen.

30

De Discerptionibus numerorum dixi nonnihil in *Arte combinatoria*. Discerptio *Zerfällung* est enumeratio partium omnium numeri dati. Duo hic indagari summam merentur, primum via exhibendi dati numeri discerptiones omnes, deinde discerptio ex qua componi possunt numeri omnes. De illo alibi. Delibavi nonnihil in  
 5 *combinatoria*, ubi ostendi numeros progressionis Geometricae duplae componi ex omnibus complexionibus numeri dati.

De Discerptione ex qua omnes numeri componantur nunc aliquid dicam. Sciendum ergo ex numeris progressionis geometricae duplae ab unitate deinceps componi numeros

alios omnes qui non sint summo progressionis majores, v. g. 1. <sup>1</sup> 2. <sup>2</sup> 4. <sup>4</sup> 8. <sup>8</sup> 16. <sup>16</sup> 32.  
 0 1 2 3 4 5

10 64. 128. 256. 512. 1024. 2048. 4046. 8192. Sume numerum minorem quam 8192. Is  
 6 7 8 9 10 11 12 13

componetur ex quibusdam numeris antecedentibus simul sumtis. Ultimus semper ex omnibus addito 1. ut 16 ex 1. 2. 4. 8 + 1. Numerus datus 5205 ex 4096. Hujus rei ratio

1024  
 64  
 16  
 4

---

1 Darüber am oberen Rand des Blatts:

8

4 12  
 2 6 18  
 1 3 9 27

14–17 (1) ⟨12⟩ *teilw. gestr.* (2) ⟨8⟩ L 2 dati. (1) Notabile (2) duo L

6 18 4 12  
 3 9 27 2 6 18  
 1 3 9 27

4f. in |practica *gestr.* | combinatoria, L 9 v. g. (1) 1. 2. (2) 1. L 10 8192. (1) sumere (2)  
 1 2 0 13

sume L

---

14–17 Das Zahlenschema erläutert den Zusammenhang zwischen den beiden Gewichtssätzen in Aufgabe XI in Teil 9 von Schwenters *Deliciae Physico-Mathematicae*, auf die sich Leibniz auf S. 309 Z. 19 f. bezieht. 1 dixi nonnihil: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 9 f. u. S. 55–57 (VI, 1 N. 8 S. 176 u. S. 209 f.). 4 alibi: Vgl. N. 45 und N. 44. 5 ostendi: *Dissertatio de arte combinatoria*, 1666, S. 9 f. (VI, 1 N. 8 S. 176).

profundius consideranti facile apparet. Quia eadem est differentia differentiarum, quae-  
 sita differentia, progressionum et cum additae semper praecedentes in progressionibus  
 differant unitate, idem erit in differentiis progressionum, jam semper differentiae dif-  
 ferentiarum unitate pauciores et differentiae differentiarum de differentiis rursus et ita  
 porro, ergo prodeunt numeri omnes, quod non fit in aliis progressionibus. Seco numerum 5  
 datum in binas partes, et partes rursus. Datus ergo numerus vel est aliquis horum vel non  
 est sed datus minor, si non est sume progressionem proxime minorem. Si addes ei omnes  
 sequentes, habebis ipsum duplum, sed hic non debet duplus ergo in caeteris continetur  
 v. g. in 1. 2. 4. 8. 16. Si esset 15. contineretur in 1. 2. 4. 8. simul si esset 14. continere-  
 tur in 8. 4. 2. ita ademisti 1. Si esset 13. contineretur in 8. 4. 1. ita ademisti rursus 1. 10  
 ergo semper procedendo potes adimere unitatem. Ergo omnes numeros exhibere. Et hoc  
 verum est de omnibus numeris progressionis geometricae duplae etiam non incipientibus  
 ab unitate. Dummodo progrediaris usque ad fractiones.

Ex hac proprietate multa sequuntur usus non contemnendi, primum enim si pon-  
 dera, mensurasque tam longitudinum quam capacitatum ita ordines, non erit opus nisi 15  
 tot ponderibus quot sunt numeri progressionis duplae, et non nisi semel quolibet. V. g.  
 pone libram divisam esse in 8192. partes, et te habere 14 illa pondera enumerata quorum  
 primum ponderet  $\frac{1}{8192}$ . secundum  $\frac{2}{8192}$ , tertium  $\frac{4}{8192}$  etc. Poteris cuilibet ponderi dato  
 minori his solis inter se conjunctis aequipondium dare. Animadvertit jam quiddam tale  
 Schwenterus. Potest et alius esse usus in divinando. Divinabo enim numerum sumtum ab 20  
 alio non nominatum modo ordine detraham numeros progressionis Geometricae duplae.  
 Pone numerum sumtum divinandum esse 19. Jubeo eum dicere sitne numerus supra 100.  
 aut 200 aut 500. Si dicit esse infra 100 v. g. jubeo detrahare 64. Si negat se posse jubeo de-  
 trahere sequentem etc. Si potest jubeo detrahare 64 inde 32. quamdiu potest. Ubi desinit

1 apparet. (1) Quia omnes praecedentes differunt unitate a sequente (2) quia  $L = 3$  semper (1)  
 differentia differentiae unitate minor (2) differentiae  $L = 6$  et (1) dat (2) partes  $L = 7$  sume (1) datum  
 qu (2) progressionem  $L = 9$  in 1. 2. 4. 8. 16 (1) sume 8. (2) Si  $L = 9$  in | 1. 2. 3. 4. 8. ändert Hrsg. |  
 simul  $L = 10$  in 8. 4. 2. (1) 1. Si (2) ita  $L = 11$  exhibere (1) Ex hac p (2) Et  $L = 16$  duplae, (1)  
 usque (2) | et erg. | non  $L = 17$  et | de ändert Hrsg. | habere  $L = 17$  pondera (1) praecedentia (2)  
 enumerata  $L = 18$  cuilibet (1) numero (2) ponderi  $L = 24$  detrahare (1) 32 (2) 64  $L$

19 Animadvertit: D. SCHWENTER, *Deliciae Physico-Mathematicae oder Mathematische und Phi-  
 losophische Erquickstunden*, 1636, Teil 9, XI. Aufgabe, S. 368 f. 20 usus in divinando: a. a. O., Teil 1,  
 I. Aufgabe, S. 17–19.

posse numeros pares continuos detrahere noto, sumo proximum per saltum unum duosve et ita usque ad unitatem sumendi a. numeri progressionis duplae palliati, v. g. pro 16 detrahe 9. 3. 2. si non potest successive omnes jam scis non posse detrahere 16. Ultimus maximusque usus erit, ut puto, in multiplicando et dividendo ope practicae Italicae huc  
 5 restrictae. Esto numerus 5205. multiplicandus per 365. Sume omnes discerptiones numeri multiplicandi 5205. ex numeris progressionis duplae, omnes item multiplicantis 365. illius sunt enumeratae paulo ante, hujus sunt 256. 64. 32. 8. 4. 1. Jam debet esse Tabula pythagorica magna, cui jam omnium numerorum progressionis duplae in se invicem multiplicationes sint inscriptae. His inter se additis habebis productum. Sed cogitandum hic  
 10 de compendiis primum inveniendi dati numeri discerptiones, deinde addendi. Utrumque praestandum per machinam. Nota pro 256 possunt in se duci 3. et 5. etc.

1.  $3^4 \cdot 5^9 \cdot 7^{16} \cdot 9^{25}$ . Notum est numeros quadratos differre numeris imparibus deinceps ab unitate, hinc sequitur ex numeris quadratis quoque inter se compositis posse oriri alios omnes. v. g. 23. ex 16.  $9 - 2$ . 18 ex 16 + 4 - 2. Paulo aliter res instituenda.

1 pares (1) detrahere noto (2) continuos *L* 3 omnes *erg. L* 5 per (1) 301 (2) 365 *L*  
 6 multiplicandi *erg. L* 6 f. multiplicantis 365. (1) nempe (2) illius sunt (a) enumerata (b) enumeratae *L*  
 11 Nota ... etc. *erg. L* 14 alios | detraho 1. *erg. u. gestr.* | omnes. *L* 14 ex 16. (1)  $9 + 1$ . (2)  $9 - 2$  *L*  
 14 instituenda. | Summae numerorum imparium constituunt numeros progressionis Geometricae duplae,  
 v. g. (1) 1. 2. (2) 1. 3. 5. 7. 9 *gestr.* | *L*  
 4 8.



## 44. REGULA DISCERPTIONUM UNIVERSALIS

[Juli – Dezember 1672]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 III B 14 Bl. 4. Fragment eines Blattes, max. [noch] cm × [noch] cm. Obere Kante gerade beschnitten, unten und links ursprüngliche Blattränder, auf der rechten Seite erstreckt sich von der oberen Ecke bis etwa [noch] cm über der unteren Ecke eine max. [noch] cm keilförmig nach innen reichende Schnittkante, wobei die schmalste Stelle des Blattes ca. [noch] cm über dem unteren Rand liegt. Bl. 4 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 1 Bl. 15 (N. 45) die unteren beiden Drittel eines Blattes 2°. 1 S. auf Bl. 4 v°. Bl. 4 r° leer. An der linken Schnittkante fehlen Teile einzelner Zeichen, die auf LH 35 XII 1 Bl. 15 r° erhalten sind. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 261. Cc 2, Nr. 520 A

Datierungsgründe: S. N. 45.

## Regula Discerptionum Universalis

Si qua quaeritur discerptio dati Numeri et Exponentis seu partium numeri, quaerantur discerptiones exponentis unitate minoris omnium numerorum praecedentium, ita tamen ut semper adimatur a sequentis numeri discerptionibus numerus numerorum praecedentium, quorum discerptiones assumuntur, productum erit discerptiones dati exponentis quaesitae. Haec est solutio universalis, cujus compendia particularia pro numerorum et exponentium ratione privata methodo inveniri possunt.

13f. Universalis (1) Sumantur (a) excerptiones (b) excerpt (c) discerpti (2) Si *L*

14f. Exponentis | seu partium numeri *erg.* |, (1) quaeratur discerptio (2) quaerantur (a) com2nationes, (b) discerptiones com2natae eius numeri, (3) discerptiones *L*

## 45. REGULA DISCERPTIONUM ET TRISCERPTIONUM UNIVERSALIS

[Juli – Dezember 1672]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 15. Unregelmäßig beschnittener Teil eines Blattes, das ursprünglich zusammen mit LH 35 III Bl. 4 (N. 44) die unteren beiden Drittel eines Blattes 2° bildeten, max. [noch] cm × max. [noch] cm. Linke Kante gerade beschnitten, obere Kante bogenförmig beschnitten, rechte und untere Kante ursprüngliche Ränder des Blattes. In der rechten unteren Ecke fehlt N. 44. 1 S. auf Bl. 15 r°. Bl. 15 v° leer. An der Schnittkante Fragmente von Zeichen von N. 44. — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 259–261. Cc 2, Nr. 520 B

- 5
- 10 Datierungsgründe: N. 44 wurde nach N. 45 auf demselben Textträger begonnen. Der letzte Absatz von N. 45 entstand nach Abschluss von N. 44, aber noch vor der physischen Trennung beider Stücke. N. 44 befand sich ursprünglich zwischen S. 315 Z. 19 und S. 316 Z. 1 von N. 45. — Das Wasserzeichen des Papiers ist für Juli – Dezember 1672 belegt. Die Verwendung von  $f$  als Gleichheitszeichen und die Nutzung von  $f$  als Abkürzung von *facit* in Gleichungen verweisen ebenfalls auf eine Entstehung von
- 15 N. 45 zu Beginn von Leibniz' Aufenthalt in Paris.

## Regula discerptionum et triscerptionum universalis

[Erster Ansatz]

1	1	6				
2	3	5 + 1.	4 + 2.	3 + 3.		
3	3	4 + 1 + 1.	3 + 2 + 1.	2 + 2 + 2.		
4	2	3 + 1 + 1 + 1.	2 + 2 + 1 + 1.			
5	1	2 + 1 + 1 + 1 + 1.				
6	1	1	1	1	1	1

16 Regula ... universalis *erg. L*    20 3 (1) 4 + 2 + (6) (2) 4 + 1 + 1. *L*    21 3 + 1 + 1 + 1. (1) 2 + 1 + (2) 2 + 2 + 1 + 1. *L*



Quaerere summam discerptionum sine Tabula, id ego aliis relinquo.

Usus quidam discerptionum Harsdorf. Recreat. 2. contin. 2. pars 1. prop. 21. Adde Arnaldi Elementa Geometrica.

[Zweiter Ansatz, gestrichen]

5	1	1	1)	1.				
		1	1)	2				
	2	2	1)	1 + 1.				
		1	1)	3				
		2	1)	2 + 1.				
		3	1)	1. 1. 1.				
10	3	3	1)	1. 1. 1.				
		1	1)	4				
		2	2)	3 + 1.		2.	2.	
		3	1)	2. 1. 1.				
	5	4	1)	1. 1. 1. 1.				
		1	1)	5				
15		2	2)	4. 1.		3.	2.	
		3	2)	3. 1. 1.		2.	2.	1.
		4	1)	2. 1. 1. 1.				
		7	1)	1. 1. 1. 1. 1.				
20		1	1)	6				
		2	3)	5. 1.		4.	2.	3. 3.
		3	3)	4. 1. 1.		3.	2. 1.	2. 2. 2.
		4	2)	3. 1. 1. 1.		2.	2. 1. 1.	
		5	1)	2. 1. 1. 1. 1.				
		11	6	1)	1. 1. 1. 1. 1. 1.			

2 Harsdorf. (1) Scr. (2) Recreat. 2 (a) contin 1. (b) contin. L 9f. 2 + 1. (1) 6 (2) 3 L 12 3 + 1. (1) 2 + 2 (2) 2. 2. L 13f. 2. 1. 1. (1) 10 (2) 5 L

2 Harsdorf ... prop. 21.: G.Ph. HARSDÖRFFER, *Delitiae mathematicae et physicae. Der Mathematischen und Philosophischen Erquickstunden zweyter Theil*, 1651, Teil 1, 21. Aufgabe, S. 23–25.

3 Arnaldi ... Geometria: [A. ARNAULD], *Nouveaux elemens de Geometrie*, 1667, Solution d'un des plus celebres et des plus difficiles Problèmes d'Arithmetique, appelé communement Les Quarrez Magiques, S. 325–345.



Nota sunt tot discerptionum colligendarum classes quot numeri antecedentes, semper prima novae classis jam continetur in prima classe, et secunda novae classis in 2<sup>da</sup> classe, et si plures sunt vel totidem classes (seu numeri praecedentes) quot termini novae tota nova nihil valet seu non nisi repetitio est. Hinc statim apparet quae classes abolendae ea  
5 scilicet cujus discerptiones (exponentis praecedentis) non sunt plures unitatibus numeri classium praecedentium. Et si una classis ergo omnes classes numerorum reliquorum minorum.

1 Nota (1) semper prima discerptio sumta a discerptionibus (2) sunt L 5 praecedentis) (1) pauciores (2) non L

## 46. DE NUMERO FORMARUM

Februar 1676

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 18. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 18 r°. Bl. 18 v° leer. —  
 Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 264f.  
 Cc 2, Nr. 1342

5

Febr. 1676.

## De Numero Formarum.

Exemplum memorabile fallentis inductionis. Nimirum  
 sex primi termini numerorum hujus seriei coincidere  
 cum sex primis terminis seriei Numerorum primitivorum. 10  
 Reliqui vero expectationi non respondere

10 terminis (1) numerorum (2) seriei Numerorum (a) primorum (b)  
 primitivorum *L* 11-318,2 respondere (1) 0 0 (2) Diff<sup>riae</sup> 1 a. (a) b (b) 1 *L*

	Diff <sup>iae</sup>	1	$a$ .	
		1		
		2	$a^2 \quad ab$	
		1		
5		3	$a^3 \quad a^2b \quad abc$	
		2		
		5	$a^4 \quad a^3b \quad a^2b^2 \quad a^2bc \quad abcd$	
		2		
		7	$a^5 \quad a^4b \quad a^3b^2 \quad a^3bc \quad a^2b^2c \quad a^2bcd \quad abcde$	
10		4		
		11	$a^6 \quad a^5b \quad a^4b^2 \quad a^4bc \quad a^3b^3 \quad a^3b^2c \quad a^3bcd \quad a^2b^2c^2 \quad a^2b^2cd \quad a^2bcde \quad abcdef$	
		4		
		15	$a^7 \quad a^6b \quad a^5b^2 \quad a^5bc \quad a^4b^3 \quad a^4b^2c \quad a^4bcd \quad a^3b^3c \quad a^3b^2c^2 \quad a^3b^2cd \quad a^3bcde \quad a^2b^2c^2d \quad a^2b^2cde \quad a^2bcdef \quad abcdefg$	
		5		
15		20	$a^8 \quad a^7b \quad a^6b^2 \quad a^6bc \quad a^5b^3 \quad a^5b^2c \quad a^5bcd \quad a^4b^4 \quad a^4b^3c \quad a^4b^2c^2 \quad a^4b^2cd \quad a^4bcde \quad a^3b^3c^2 \quad a^3b^3cd \quad a^3b^2c^2d \quad a^3b^2cde \quad a^3bcdef \quad a^2b^2c^2d^2 \quad a^2b^2c^2def \quad a^2bcdefg \quad abcdefgh$	
		5		
		25	$a^9 \quad a^8b \quad a^7b^2 \quad a^7bc \quad a^6b^3 \quad a^6b^2c \quad a^6bcd \quad a^5b^4 \quad a^5b^3c \quad a^5b^2c^2 \quad a^5b^2cd \quad a^5bcde \quad a^4b^4c \quad a^4b^3c^2 \quad a^4b^3cd \quad a^4b^2c^2d \quad a^4b^2cde \quad a^4bcdef \quad a^3b^3c^3 \quad a^3b^3c^2d \quad a^3b^3cde \quad a^3b^2c^2def \quad a^3bcdefg \quad a^2b^2c^2d^2e \quad a^2bcdefgh \quad abcdefghj$	

6 f. 2 (1) 4 (2) 5 L    15  $a^4b^2c^2$  (1)  $a^4bcde$  (2)  $a^4b^2cd$  (a)  $a^4b^2cd$  (b)  $a^4bcde$  (aa)  $a^4$  (bb)  $a^3b^3c^2 \dots a^3b^2cde$  (aaa)  $a^2$  (bbb)  $a^3bcdef$  |  $a^2b^2c^2d^2$  erg. |  $a^2b^2cdef$  L    16 f. 5 (1) 24 (2) 25 L    17  $a^2b^2c^2d^2e$  erg. L

14–17 5 20 ... *abcdefghj*: Die Angaben zu den Anzahlen der Formen vom Grad 8 und 9 beziehen sich auf den Stand in der Handschrift vor der Ergänzung der Einträge  $a^2b^2c^2d^2$  in Z. 15 und  $a^2b^2c^2d^2e$  in Z. 17. Tatsächlich gibt es zusammen mit den nicht aufgeführten Formen  $a^2b^2c^2de$  bzw.  $a^3b^2c^2d^2$ ,  $a^3b^2c^2de$ ,  $a^2b^2c^2def$  und  $a^2b^2c^2defg$  insgesamt 22 Formen vom Grad 8 und 30 vom Grad 9. Die Differenzen zu den Anzahlen an Formen vom vorausgehenden Grad müssten korrekt 7 und 8 betragen.



Patet hinc facile esse aliquando condere Hypothesin primis initiis satisficientem. Ut hoc loco si quis ordine ponat seriem numerorum ab unitate crescentium quorum differentiae sint Numeri progressionis Geometricae duplae geminati, continuando ad sextum usque terminum eosdem reperiet numeros cum sex prioribus numeris primitivis 1. 2. 3. 5. 7. 11. coincidentes. 5

Hinc si quis aestimare velit probabilitatem successus, sive quanto pignore contra aliud datum a quovis propositum pignus, certandum sit: considerare debet quam variis modis satisfieri possit huic problemati: seriem invenire, quae propositos numeros habeat terminos primos.

Deinde considerare debet quae possit esse inter seriem propositam et hypothesin a nobis factam, connexio. 10

Hoc loco tres habemus Hypotheses seu serierum fundamenta, quae sex dant primos numeros 1. 2. 3. 5. 7. 11. eosdem. Prima est seriei numerorum primitivorum. Secunda est seriei quae continet Numeros formarum in quolibet gradu; tertia est seriei, cujus terminorum differentiae sunt numeri progressionis Geometricae duplae ab unitate incipientis geminati. 15

Facile est Numerum formarum gradus cujusdam dati concinnare ex Numero formarum graduum praecedentium certa ratione alteratorum. Unde regula habebitur naturam explicans progressionis.

4 terminum (1) eundem reperiet terminum (2) eosdem  $L$  8f. habeat, (1) pro terminis primis (2) terminos  $L$  12 serierum (1) regulas (2) fundamenta, quae (a) omnes (b) sex (aa) habent (bb) dant  $L$  13 Prima est (1) series (2) seriei  $L$  13f. Secunda est (1) series (2) seriei  $L$  14 est (1) series, qv (2) seriei,  $L$

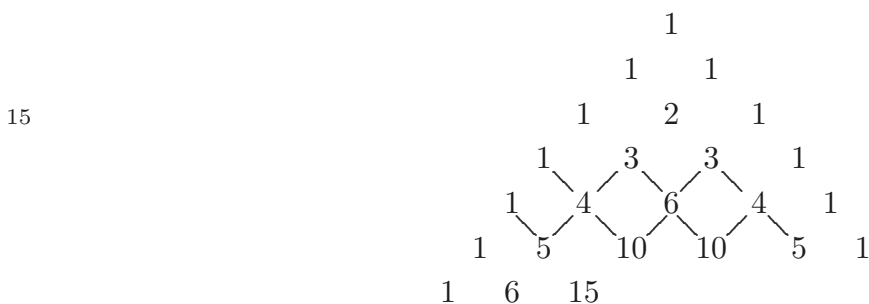
47. NOTAE AD TRIANGULA NUMERORUM ET AD ALGEBRAM  
 [Erste Hälfte Mai 1676]

**Überlieferung:** *LuT* Aufzeichnung (Tschirnhaus für Leibniz mit Bemerkungen von Leibniz):  
 LH 35 XV 5 Bl. 16. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 16 v°. — Auf Bl. 16 r° Leibniz' eigenhändiger  
 Auszug seines Briefes an H. Bond vom 13. Mai 1676 (II, 1 N. 127 bzw. III, 1 N. 80<sub>2</sub>).  
 Cc 2, Nr. 1418

Datierungsgründe: Die Anordnung der beiden Stücke lässt vermuten, dass das vorliegende Stück  
 zuerst auf dem Blatt gestanden hat. Es dürfte aber nicht wesentlich früher als der Auszug anzusetzen  
 sein. Der Brief an H. Bond war bereits am 18. Mai 1676 in London (s. III, 1 S. 374), woraus sich die  
 Datierung ergibt.

[*Erster Teil*]

[*Tschirnhaus*]



0 1 2 3 4 5 6 7

1	3	5	7	9	2	3		
2	4	6	8	10		9		
						27		
						81		81
					24			<u>24</u>
								57

---

1,13–19 Die Verbindungsstriche sowie einige der Einsen des Schemas stammen möglicherweise von Leibniz' Hand. 20 Den Verbindungsbogen hat wahrscheinlich Leibniz hinzugefügt; vgl. VII, 1 N. 92 S. 594 (Februar 1676) u. N. 94 S. 613 (April 1676).

[Zweiter Teil]

[Leibniz]

$$\begin{array}{l} 0, 1, \text{ „ } + 1 \sqcap 1 \\ 1, 2, \text{ „ } + 2 \sqcap 4 \\ 2, 3, \text{ „ } + 3 \sqcap 9 \text{ etc.} \end{array}$$

5

---


$$\begin{array}{l} 0, 1, 2, \text{ „ } + 1 \sqcap 1 \\ 1, 2, 3, \text{ „ } + 2 \sqcap 8 \\ 2, 3, 4, \text{ „ } + 3 \sqcap 27 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1, 4, \text{ „ } + 4, 3 \sqcap 16 \\ 3, 6, \text{ „ } + 6, 3 \sqcap 36 \end{array}$$

10

[Dritter Teil]

[Tschirnhaus]

$$\begin{array}{c} \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \\ 1 \text{ — } 2 \text{ — } 3 \\ a + b, \neq 2c \end{array}$$

15

$$\frac{1}{a} + \frac{2}{a+b} + \frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{2a+b} + \frac{3}{a+2b} + \frac{1}{b}$$

---

17 Darunter in Tschirnhaus' Hand, schräg gesetzt und verwischt:  $\frac{2c + 4cc - 2c^3}{2c \cdot 2c^3}$

6 0, 1, 2 ...  $\sqcap$  1 erg. L    9 (1) 3, 4, „ + 4  $\sqcap$  16    (2) 1, 4, „ L    15 a + c,  $\neq$  2b T, ändert Hrsg.  
 3, 6, „ + 3, 6  $\sqcap$  36  
 3, 6, „ + 3, 4  $\sqcap$

16  $\frac{1}{a} \left( \frac{2}{a+b} \right) + \frac{1}{c}$  T, ändert Hrsg.

---

13-17  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$ : Vgl. das drei Monate zuvor von Tschirnhaus in VII, 3 N. 55 S. 732 Z. 11 – S. 733  
 Z. 6 entwickelte harmonische Dreieck.

[Vierter Teil]

$$\begin{array}{l} a + b \neq cc + 2cd + dd \\ a \neq cc \qquad b \neq 2cd \end{array}$$

$$a^2 + 2ab + b^2 \neq c^2 + 3cd + 3c^2d + d^3$$

5	$\begin{array}{l} a^2 \neq c^3 \\ a \neq \sqrt{c^3} \end{array}$	$\begin{array}{l} 2ab \neq 3c^2d \\ b \neq \frac{3c^2d}{2a} \end{array}$	$\begin{array}{l} b^2 \neq 3cd^2 + d^3 \\ \frac{9c^4dd}{4c^2} \neq 3c^3d + d^3 \\ \frac{9cdd}{4} \\ \hline 9cdd \neq 12c^3d + d^3 \\ 9cd \neq 12c^3 + dd \\ \hline dd \neq 9cd - 12c^3 \\ \hline d \neq 3c + \sqrt{9cc - 12c^3} \\ d \neq 3c + c\sqrt{9 - 12c} \end{array}$
10			

$$3 \ b \neq 2cd \ | a+b \neq \text{gestr.} \ | T \quad 5 \ (1) \ b^2 \neq d^2 \ (2) \ b^2 \neq 3cd^2 + d^3 \ T \quad 6 \ (1) \ c^3 + 3c^2d + \frac{9c^4dd}{4a^2} \neq 3c^3d + d^3 \ (2) \ \frac{9c^4dd}{4c^2} \neq 3c^3d + d^3 \ T$$

---

1-323,13 Vierter Teil: Im letzten Teil des Stückes werden Gleichungen der Form  $(a+b)^n = (c+d)^{n+1}$  für  $n = 1, 2$  und  $3$  betrachtet, wobei jeweils  $a^n = c^{n+1}$  sowie  $na^{n-1}b = (n+1)c^nd$  gesetzt wird.

3  $b \neq 2cd$ : Unter den gegebenen Voraussetzungen ergibt sich  $d = 0$  und folglich auch  $b = 0$ . Außer den trivialen Lösungen der so reduzierten Gleichung existieren für  $n = 1$  keine Lösungen.

4  $c^3 + 3cd^3 + 3c^3d + d^3$ : Gemeint ist  $c^3 + 3c^2d + 3cd^2 + d^3$ . Das Versehen geht in die rechte Gleichung von Z. 6 ein und belastet so die Berechnung von  $d$  im vorliegenden Ansatz; weitere Fehler treten hinzu. Im Neuansatz ab S. 323 Z. 1 geht Tschirnhaus von der korrekten 3. Potenz des Binoms  $c + d$  aus und gelangt zu einem aussagekräftigen Ergebnis. Diesem zufolge existieren für  $n = 2$  auch nicht-triviale reelle Lösungen der Gleichung. Dabei legt die Wahl einer der Größen die drei anderen fest.

$$\begin{array}{lll}
 a^2 \neq c^3 & 2ab \neq 3c^2d & b^2 \neq 3cd^2 + d^3 \\
 a \neq \sqrt{c^3} & 2b\sqrt{c^3} \neq 3c^2d & \frac{9ddc}{4} \neq 3cd^2 + d^3 \\
 & 2b \neq \frac{3c^2d}{2\sqrt{c^3}} & 9ddc \neq 12cd^2 + 4d^3 \\
 & b \neq \sqrt{\frac{9c^4dd}{4}} & 9dc \neq 12cd + 4dd \\
 & b \neq \sqrt{\frac{9cdd}{4}} & 9c \neq 12c + 4d \\
 & b \neq \frac{3d}{2}\sqrt{c} & 0 \neq 3c + 4d \\
 & bb \neq \frac{9ddc}{4} & -3c \neq 4d
 \end{array}$$

5

[Leibniz]

$$\boxed{a^3} + \boxed{3a^2b} + 3ab^2 + b^3 \cap \boxed{c^4} + \boxed{4c^3d} + 6c^2d^2 + 4cd^3 + d^4$$

$$a^3 \cap c^4 \quad 3a^2b \cap 4c^3d \quad b \cap \frac{4c^3d}{3a^2 \cap 3\sqrt[3]{c^8}} \quad a \cap \sqrt[3]{c^4}$$

10

$$\text{Ergo } b \cap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{d^3}{c^2}} \quad b \cap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{d^3}{c^2}} \quad ab \cap \frac{4c^3d}{3\sqrt[3]{c^4}}$$

$$3ab^2 \cap 3\sqrt[3]{c^4}, \frac{16d}{9}\sqrt[3]{\frac{1}{c^2}} + b^3$$

$$3\sqrt[3]{c^2}, \frac{16d}{9} + \frac{64}{27}\frac{d^2}{c^2} \cap 6c^2d^2 + 4cd^2 + d^3 \quad [\text{Rechnung bricht ab}]$$

$$10f. \ b \cap \frac{4c^3d}{3a^2 \cap 3\sqrt[3]{c^8} \text{ erg.}} \quad a \cap \sqrt[3]{c^4} \quad (1) \text{ Ergo } \frac{3\sqrt[3]{c^4}, 16c^6d^2}{3\sqrt[3]{c^8}} + \frac{64c^9d^3}{\cdot} \quad (2) \text{ Ergo } 3a \quad (3) \text{ Ergo } b \cap$$

$$(a) \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{c^3d^3}{c^8}} \quad (b) \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{d^3}{c^2}} \quad L$$

$$11 \ b \cap \frac{4}{3}\sqrt[3]{\frac{d^3}{c^2}}: \text{ Richtig wäre } b = \frac{4}{3}d\sqrt[3]{c}. \text{ Zusammen mit weiteren Versehen in der Gleichung der}$$

nächsten Zeile belastet der Fehler die Rechnung bis zu ihrem Abbruch. — Tatsächlich gilt für  $n = 3$ , dass die Gleichung nur triviale Lösungen mit  $b = 0$  und  $d = 0$  besitzt. 12  $3ab^2 \cap \dots b^3$ : Leibniz

rechnet fortlaufend, daher besteht keine Gleichheit zwischen den beiden Seiten der Gleichung.

## 48. DE AEQUATIONIBUS CUBICIS ET BIQUADRATIS REDUCTIS

[Oktober – Dezember 1676]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 XII 2 Bl. 150. 1 Bl. 2°. Ca  $\frac{2}{3}$  S. auf Bl. 150 v°. Die erste Zeile der Seite gehört zu VII, 3 N. 73 (vgl. ebd., S. 835 Z. 13). — Auf Bl. 150 r° der Rest von VII, 3 N. 73 sowie VIII, 2 N. 99. Beschriftung der beiden Seiten des Blattes gegenläufig.  
Cc 2, Nr. 1515 B

Datierungsgründe: Vgl. die Gründe für die Datierungen von VII, 3 N. 73 sowie VIII, 2 N. 99, insbesondere die Erwähnung von J. B. TAVERNIER, *Les six voyages*, 2 Bde, Paris, 1676 in letzterem Stück. Wie wir aus einem Brief von Leibniz an Ferdinand von Fürstenberg aus dem Dezember 1676 (I, 2 N. 209 S. 239) wissen, hatte er das am 1. Oktober 1676 erschienene Werk noch zur Kenntnis genommen, bevor er drei Tage darauf Paris verließ. Da auf dem Blatt offensichtlich zuerst VII, 3 N. 73, dann VIII, 2 N. 99 und zuletzt unser Stück niedergeschrieben wurde, stellt der 1. Oktober 1676 den *terminus post quem* dar. Das Papier stammt aus Paris; sein Wasserzeichen ist ansonsten für März bis August 1676 belegt. Eine Verwendung des Papiers in den auf Leibniz' Abreise aus Paris folgenden Monaten ist naheliegend.

$$x^4 * qx^2 + rx + s \sqcap 0$$

$$x \sqcap \frac{ay + b}{cy + d} \quad x^2 \sqcap \frac{a^2y^2 + 2aby + b^2}{c^2y^2 + 2cdy + d^2}$$

$$x^4 \sqcap \frac{y^4 + 4by^3 + 6b^2y^2 + 4b^3y + b^4}{c^4y^4 + 4c^3dy^3 + 6c^2d^2y^2 + cd^3y + d^4}$$

Et aequatio erit:

$x^4$	$1 \wedge$	$a^4y^4$	$+ 4a^3by^3$	$+ 6a^2b^2$	$+ 4ab^3y$	$+ b^4$
$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$	$*$
$qx^2$	$q \wedge$	$a^2c^2y^4$	$2a^2cdy^3$	$a^2d^2y^2$	$2abd^2y$	$d^2b^2$
			$2abc^2y^3$	$4abcdy^2$	$2b^2cdy$	
				$c^2b^2y^2$		
$rx$	$r \wedge$	$ac^3y^4$	$3ac^2dy^3$	$3acd^2y^2$	$ad^3y$	$bd^3$
			$bc^3y^3$	$3bc^2dy^2$	$3bcd^2y$	
$s$	$s \wedge$	$c^4y^4$	$4c^3dy^3$	$6c^2d^2y^2$	$4cd^3y$	$d^4$

18 f. erit: (1)  $| 1 y^4 + 4b y^3 + 6b^2 y^2 + 4b^3 y + b^4$  nicht gestr. | (2)  $x^4 1 \wedge L$   
 $s \cdots + 4sc^3d \cdots + 6sc^2d^2 \cdots + 4scd^3 \cdots + d^4s$

$$d \text{ n } - \frac{4b + 2qbc^2 + rbc^3}{2qc + 3rc^2 + 4sc^3}, b$$

$$c^2$$

1,17–19 Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} a^2 y^2 + 2ab y + b^2 \\ c^2 y^2 + 2cd y + d^2 \\ \hline + a^2 d^2 y^2 + 2abd^2 y \quad d^2 b^2 \\ + 2a^2 cd y^3 + 4acdb \quad \cdot + 2cdb^2 \quad \cdot \\ a^2 c^2 y^4 + 2abc^2 \quad \dots + c^2 b^2 \quad \cdot \end{array}$$

1,20 f. Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r} a y + b \\ c y + d \\ \hline ad y \quad db \\ ac y^2 \quad bc y \\ \hline c^2 y^2 + 2cd y + d^2 \\ ad^2 c y^2 \quad ad^3 y \quad d^3 b \\ \hline d^2 bc \quad \cdot \\ \hline + 2acd^2 y^2 + 2cd^2 b y \\ + 2ac^2 d y^3 \quad 2bc^2 d y^2 \\ \hline ac^2 d y^3 \quad c^2 bd y^2 \\ ac^3 y^4 \quad c^3 b y^3 \end{array}$$

1 d n: Konsequent gerechnet ergäbe sich  $d = -\frac{4a^3 + 2qac^2 + rc^3}{2qa^2c + 3rac^2 + 4sc^3} b$ . Der Fehler geht darauf zurück, dass Leibniz den Koeffizienten  $a$  und seine Potenzen in S. 324 Z. 16–26 erst ergänzt, nachdem er bereits die Gleichung für  $d$  aufgestellt hat. Auch die verbesserte Gleichung in der folgenden Zeile ist noch belastet. Der Ansatz, den Leibniz hier verfolgt, um  $d$  zu bestimmen, ist ohnehin untauglich: Zwar formt er die Gleichung  $x^4 * qx^2 + rx + s \text{ n } 0$  erfolgreich in eine andere Gleichung 4. Grades um (S. 324 Z. 19–26), doch ist die neue Gleichung nicht mit der Ausgangsgleichung identisch, da er in dieser nicht lediglich  $x$  substituiert, sondern sie zudem mit  $(cy + d)^4$  multipliziert hat. Die Voraussetzungen für einen Koeffizientenvergleich sind somit nicht gegeben.

$2zqa + 3rc^2a + 4sc^2 \neq 0$ . Tunc in termino secundo non supererit  $d$ , adeoque ope ipsius  $d$  possumus tollere terminum penultimum nulla habita ratione secundi. Sed malim quod evanescit  $b$ .

$$\begin{array}{r}
 x^3 * qx + r [\neq 0] \\
 \\
 5 \quad x \neq \frac{y+b}{cy+d} \quad x^3 \neq \frac{y^3 + 3by^2 + 3b^2y + b^3}{c^3y^3 + 3c^2dy^2 + 3cd^2y + d^3} \\
 \\
 \begin{array}{r}
 1x^3 \quad [1] \wedge \quad y^3 + 3by^2 \quad 3b^2y \quad b^3 \\
 * \quad * \quad * \quad * \quad * \\
 qx \quad [q] \wedge \quad c^2y^3 \quad bc^2y^2 \quad 2bcdy \quad bd^2 \\
 \quad \quad \quad \quad 2cdy^2 \quad d^2y \\
 10 \quad r \quad [r] \wedge \quad c^3y^3 \quad 3c^2dy^2 \quad 3cd^2y \quad d^3
 \end{array} \\
 \\
 d \neq -\frac{+3 + 1c^2}{2c + 3c^2} b
 \end{array}$$

---

8f. *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{r}
 c^2y^2 + 2cdy + d^2 \\
 \quad \quad \quad y + b \\
 \hline
 + bc^2y^2 \quad 2bcdy \quad bd^2 \\
 c^2y^3 \quad 2cdy^2 \quad d^2y
 \end{array}$$

2 terminum (1) ultim (2) penultimum  $L$     3 quod (1) rursus quia (2) evanescit  $L$

---

11  $d \neq$ : Leibniz verfolgt auch für die reduzierte Gleichung 3. Grades den untauglichen Ansatz des Koeffizientenvergleichs. Dabei berücksichtigt er allerdings die Koeffizienten  $q$  und  $r$  nicht.



## 49. NOTAE AD RADICUM SERIES

[Frühjahr bis Sommer 1673]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 38 Bl. 22. 1 Bl. 4<sup>o</sup>.  $\frac{1}{4}$  S. quergeschrieben auf Bl. 22 r<sup>o</sup>. — Auf dem Rest der Seite um 90<sup>o</sup> gedreht VIII, 1 N. 11 sowie eine nicht von Leibniz' Hand stammende fragmentarische Notiz, welche die Aussage „72 + 5 (id <est> 77) ad rd ita [ut] 72 ad tang“ und darunter stehend das Wort „rad“ umfasst. Rückseite leer. Cc 2, Nr. 1557

5

Datierungsgründe: Das auf derselben Seite des Blattes niedergeschriebene Stück VIII, 1 N. 11 wird von den Herausgebern aus inhaltlichen Gründen auf Sommer 1673 datiert. Sehr ähnliche Formeln wie in unserer Notiz finden sich in den Stücken VII, 4 N. 15<sub>2</sub> und 16<sub>1</sub>. Diese datieren die Herausgeber auf Frühjahr bzw. spätes Frühjahr 1673. Bei unserer Notiz könnte es sich um eine nicht zu Ende geführte Nebenbetrachtung zu den dortigen Überlegungen handeln.

10

$$\begin{array}{cccc}
 \gamma & 2\gamma - 1 & 3\gamma - 3 & 4\gamma - 6 \\
 \hline
 & & \gamma & \\
 \frac{\gamma}{\gamma} & \frac{2\gamma - 1}{\gamma} & \frac{3\gamma - 1 - 2}{\gamma} & \frac{4\gamma - 1 - 2 - 3}{\gamma} \\
 \gamma & \gamma & \gamma & \gamma \\
 Rq \gamma & Rq 2\gamma - 1, & Rq 3\gamma - 3, & Rq 4\gamma - 6, \\
 & Rq 2\gamma - 1 \frac{\gamma}{\gamma} = & & \\
 & Rq \gamma, \wedge 2 - \frac{1}{\gamma} & & \\
 Rq 1 & Rq 2 - \frac{1}{\gamma} & Rq 3 - \frac{3}{\gamma} & Rq 4 - \frac{6}{\gamma} \\
 & \frac{2\gamma}{1} = 2 & \frac{3\gamma}{3} = & \frac{4\gamma}{6} = \frac{5}{15} & \frac{6}{21}
 \end{array}$$

15

$$14 \frac{2\gamma - 1}{\gamma} \quad (1) \quad \frac{3\gamma - 3}{\gamma} \quad (2) \quad \frac{3\gamma - 1 - 2}{\gamma} \quad L$$

$$13 \frac{\gamma \dots 4\gamma - 6}{\gamma}: \text{Vgl. diese Darstellung mit der in VII, 4 N. 15}_2 \text{ S. 246 Z. 4, wo im Nenner allerdings}$$

$\beta$  anstelle von  $\gamma$  steht. 16  $Rq \gamma \dots Rq 4\gamma - 6$ : Diese Zeile ist fast identisch mit ebd., S. 255 Z. 2 sowie mit ebd., N. 16<sub>1</sub> S. 256 Z. 22; dort wird jedoch jeweils die Dreieckszahl 3 übersprungen.

## 50. TENTAMEN AD PROBLEMA SEX QUADRATORUM

[September – Dezember 1672]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 197–198. 1 Bog. 2°. 3 S. überwiegend zweispaltig beschrieben. — Auf Bl. 198 v° VII, 3 N. 2. Hierzu auch einige Hilfsrechnungen am Rand von Bl. 197 r°.  
Cc 2, Nr. 530 tlw.

5

10

15

20

25

Datierungsgründe: Inhaltlich führt das Stück die in VII, 1 N. 42–44 angestellten Untersuchungen zum Sechs-Quadrate-Problem fort. Es ist auf Papier gleicher Art wie das mittlere dieser drei Stücke geschrieben und knüpft unmittelbar an dort erarbeitete Gleichungen an. Es ist also sehr wahrscheinlich im gleichen Zeitraum entstanden. Diese Gruppe aus drei Handschriften wurde bislang auf Juni bis August 1674 datiert. Es gibt jedoch Argumente, die für eine frühere Entstehung unseres Stückes sprechen, womit auch die Datierung der drei genannten Stücke zu revidieren wäre. So lassen etwa die noch wenig ausgebauten algebraischen Fertigkeiten, die Leibniz in unserem Stück zeigt, eine Entstehung während der frühen Phase seiner Auseinandersetzung mit dem Problem plausibel erscheinen. Auch der Symbolgebrauch spricht gegen eine Datierung auf Sommer 1674: In unserem Stück wie auch in VII, 1 N. 42 stellt Leibniz die Quadratwurzel mit  $Rq$  dar, was nach dem Sommer 1673 nur noch selten vorkommt. Sein Gebrauch des modernen Gleichheitszeichens  $=$  in allen vier Stücken begrenzt die mögliche Entstehungszeit ebenfalls, da Leibniz Mitte 1674 zum stilisierten Wagebalken  $\pi$  wechselt. Und die Notation  $\mp$ , die sich in VII, 1 N. 42 findet, hätte Leibniz, nachdem er im Verlauf des Jahres 1673 beginnt, eigene Doppelporzeichen zu entwickeln, in einem Konzept kaum mehr verwendet. Das Wasserzeichen des Trägers spricht ebenfalls für eine frühere Entstehung: Es ist ansonsten bei Stücken anzutreffen, die zwischen Sommer 1672 und Anfang 1673 entstanden sein dürften; insbesondere ist es für das im Herbst 1672 verfasste *Breviarium Consilii Aegyptiaci* (IV, 1 N. 16) belegt. Auf eine Entstehung im Herbst 1672 verweist schließlich auch der Umstand, dass das Stück VII, 3 N. 2, welches auf der vierten Seite des Bogens (Bl. 198 v°) niedergeschrieben wurde und höchstwahrscheinlich kurz nach unserem Stück entstanden ist, von den Herausgebern auf September oder Oktober 1672 datiert wird. Unser Stück dürfte also zumindest noch im Jahr 1672 verfasst worden sein.

Aequationem hanc habemus:

[*Erster Ansatz*]

30

$$a^4 dd + 2a^3 dd - add - d^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9}$$

30  $a^4 dd$ : Leibniz beginnt seine Überlegungen mit der Gleichung aus VII, 1 N. 43 S. 256 Z. 11–13. Beim Aufstellen dieser Gleichung sind ihm dort allerdings mehrere Versehen unterlaufen; vgl. ebd., Z. 4 u. 11. Auch im vorliegenden Stück begeht er einige Fehler und bricht wiederholt ab, um neu anzusetzen.

$$a^4 + 2a^3 - a - 1 = \frac{4a^2}{d^2 9} + \frac{4a}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9} + 1 - 2a^3 + a$$

$$a^3 \wedge a+2 - a - 1 = \frac{4}{d^2 9}$$

$$3a^3 \wedge 1+2 - 1 - a = \frac{\langle 16 \rangle}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9 a}$$

$$a \wedge a^2 3 - 1, - 1 = \frac{20}{d^2 9} \left[ + \frac{4}{d^2 9 a} \right]$$

$$\frac{4}{d^2 9 a} - \frac{4}{d^2 9 a} = \frac{4}{d^2 9 a} + 1$$

$$da \wedge a^2 3 - 1, - d = \frac{4}{18a} + \frac{20}{18} = \left| \frac{72}{18 \wedge 18a} + \frac{360a}{18 \wedge 18a} \right|$$

5

[Zweiter Ansatz]

$$a^4 d^2 + 2a^3 d^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9} + a d^2 + 1 d^2 + 2a^3 d^2$$

$$a^4 d^2 + 2a^3 d^2 - a d^2 - d^2 = \frac{4a^2}{9d^2} + \frac{4a}{9d^2 a} + \frac{4}{9d^2 a^2}$$

$$\frac{1}{a} \quad \frac{1}{a^2}$$

1 (1)  $a^4 + 2a^3 - a - 1 = \frac{4a^2}{d^2 9} + \frac{4a}{d^2 9} + \frac{4}{d^2 9}$  (2)  $a^4 + 2a^3 - a - 1 = \frac{4}{d^2 9}$  erg. L

8 f. (1)  $a^4 d^2 + 2a^3 d^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9} + a d^2 + 1 d^2$  (2)  $a^4 d^2 \dots 2a^3 d^2 \quad | \quad 4a^3 d^2 - a^4 d^2 - 2a^3 d^2,$   
 gestr. |  $a^4 d^2$  L

3  $\frac{4}{d^2 9 a}$ : Leibniz verwendet im Nenner Ozanams Schreibweise für Exponenten, schreibt also  $d^2$  an Stelle von  $d^2$ . Auch im weiteren Verlauf des Stückes findet sie sich gelegentlich, ohne dass ihre Verwendung einer strengen Linie folgt. Hier und im Folgenden werden die Exponenten wie in der Handschrift wiedergegeben. Leibniz lässt sich von dieser Notation offenbar selbst in die Irre leiten: So erhält er in Z. 5 f., nachdem er  $\frac{4}{d^2 9 a}$  mit  $d$  multipliziert,  $\frac{4}{18a}$ , und aus  $\frac{20}{d^2 9}$  wird auf gleiche Weise  $\frac{20}{18}$ .

$$da \wedge a \wedge 3, -1, -\frac{4}{18a} = \frac{20d}{18d} + d = \frac{21d}{18d}$$

[Dritter Ansatz]

$$a^4 d^2 + a^3 d^2 - ad^2 - d^2 = \frac{4a^2}{9} + \frac{4a}{9} + \frac{4}{9} - a^3 d^2$$

$$d^2 a^3 \wedge a+1 \quad d^2 \wedge a+1 \quad \frac{4a}{9} \wedge a+1 + \frac{4}{9 \wedge a+1} - \frac{a^3 d^2}{a+1}$$

5 Fiet  $d^2 a^3 + d^2 = \frac{4a}{9} + \frac{4}{9 \wedge a+1} - \frac{a^3 d^2}{a+1}$

vel  $a^3 + 1 = \frac{4a}{9d^2} + \frac{4}{9d^2 \wedge a+1} - \frac{a^3}{a+1}$

vel  $a^3 + 1 + \frac{a^3}{a+1} = \frac{4a}{9d^2} + \frac{4}{9d^2 \wedge a+1}$

vel  $2 + \frac{1}{a+1} = 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2 \wedge a+1}$

vel  $2 = 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2 \wedge a+1} - \frac{1}{a+1}$

10 vel  $2a + 1 = 4a^5 + 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2}$

$$2a + 1 - 4a^5 - 4a^4 = \frac{4a^3}{9d^2}$$

vel  $\frac{2a}{4a^3} + \frac{1}{4a^3} - \frac{4a^5}{4a^3} - \frac{4a^4}{4a^3} = \frac{1}{9d^2}$

---

1 Daneben:  $\frac{20d}{18d} \begin{matrix} + \\ \times \\ - \end{matrix} \frac{1d}{1} = 20d$

3  $-d^2 = \frac{4a^2}{|\text{Ø3 ändert Hrsg.}|} + \frac{4a}{9} L$     10 vel (1)  $2a + 2 = 4a^5 + 4a^4 + \frac{4a^3}{9d^2} - 1$  (2)  $2a + 1 L$

---

3  $a^2 d^2$ : Für den dritten Ansatz schreibt Leibniz die Ausgangsgleichung aus S. 328 Z. 30 in die hier wiedergegebene Gleichung um.

[Vierter Ansatz]

Reassumam.

Duae aequationes fundamentales hae sunt:

$$4a^4 + 8a^3 - 4a - 1 \hat{=} dd = ee. \text{ Et}$$

$$ee = \left(\frac{16}{9}\right) \frac{64a^2}{36} + \frac{64a}{18} \left(\frac{32a}{9}\right) + \frac{32}{18} \left(\frac{16}{9}\right) \text{ vel}$$

5

$$\frac{32a^2}{18} + \frac{64a}{18} + \frac{32}{18} \text{ vel}$$

$$ee = \frac{16a^2}{9} + \frac{32a}{9} + \frac{16}{9}. \text{ Ergo}$$

$$4a^4 + 8a^3 - 4a + 1 \hat{=} dd = \frac{16a^2}{9} + \frac{32a}{9} + \frac{16}{9}$$

$$\text{—————} \hat{=} dd9 = 16a^2 + 32a + 16.$$

$$\text{Ergo } \frac{dd\mathcal{O}}{1} = \frac{16a^2 + 32a + 16}{4a^4 + 8a^3 + 4a + 1, \hat{=} 9} = \frac{4a^2 + 8a + 4 + 1}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1, \hat{=} 9} [=] \frac{4a + 8 + \frac{4}{a}}{a^3 + 2a^2 + 4 + \frac{1}{a}}. \quad 10$$

2f. Reassumam. (1) Propositae (2) duae L 5 ee = |  $\left(\frac{16}{9}\right) \text{ erg.} | \frac{64a^2}{36} + (1) \frac{64a}{36} (2) \frac{64a}{18} | \left(\frac{32a}{9}\right)$

erg. | +  $\frac{32}{18} | \left(\frac{16}{9}\right) \text{ erg.} | \text{ vel } L$

$$10 \frac{16a^2 + 32a + 16}{4a^4 + 8a^3 + 4a + 1, \hat{=} 9} (1) \text{ Ergo } dd = 4a (2) \text{ Hi } (3) = \frac{4a^2 + 8a + 4 | + 1 \text{ erg.} |}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1, \hat{=} 9} L$$

3 Duae aequationes: Für den vierten Ansatz greift Leibniz noch einmal auf die beiden Gleichungen, die in VII, 1 N. 43 zur Ausgangsgleichung führten, zurück: Die erste Gleichung hat er in ebd., S. 255 Z. 25 entwickelt, die zweite übernimmt er aus ebd., S. 256 Z. 10, wobei er den dort beim Quadrieren von  $e = \frac{8}{6}a + \frac{4}{3}$  begangenen Flüchtigkeitsfehler korrigiert. Richtigerweise hätte er jedoch von  $e = \frac{3}{2}ad + \frac{3}{4}d$  ausgehen müssen; vgl. ebd., Anm. zu Z. 4. 8 +1: Hier dreht Leibniz versehentlich ein Vorzeichen, in der übernächsten Zeile im Zähler der Brüche ein zweites. Weitere Flüchtigkeiten treten dort hinzu.

10  $\frac{4a^2 + 8a + 4 + 1}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1, \hat{=} 9}$ : Leibniz addiert im Zähler nachträglich eine 1, ergänzt den Summanden aber

nicht in allen folgenden Schritten. Erst in die fehlerbehaftete Überlegung in S. 332 Z. 11–13, deren Ergebnis Leibniz nicht weiter verwendet, und dann ab S. 334 Z. 8 geht der ergänzte Term mit in die Rechnung ein.

Notandum hic est, rem esse perutilem ab una parte terminum, ab altera rationem habere. Quia ratio jam per multiplicationes et divisiones et radicum extractiones tractari, poliri, reduci potest, salva rationis identitate, termino altero intacto. Est ergo ratio materia aequationum in aequatione.

5 Idque hic egregio exemplo patet cum enim  $\frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1}$  sint aequalia *dd* quadrato. Videndum est, quae quibus divisa producant quadratum, et ante omnia certum est quadratum numerum divisum per quadratum producere quadratum. Quare quanquam talis solutio non futura sit reciproca, ita ut extra eam alia esse non possit, erit tamen vera, si  $\frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1}$  censeatur aequale = *ff* □<sup>to</sup>  
 10 et  $\frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1}$  censeatur aequale = *gg* □<sup>to</sup>.

Aequatio ergo est:  $4a^2 + 8a + 4 + 1 = ff$   
 $a^2 + 2a \cancel{+ 2} = \frac{ff}{2} - \frac{2}{1}$   
 $a \hat{=} a + 2 = \frac{ff - 4}{2}$

15 Nota si *a* sumatur 1, superior quidem terminus est quadratum. Sed non inferior. Si tamen ei adjiciatur 1, est et ipse □<sup>tum</sup> 9.

4,10 *Darüber der Ansatz zu einer Nebenrechnung:*  $\frac{8a + 4a^2 + \cancel{4} \cancel{+} \cancel{1}}{4a + a^4 + 2a^3 + \cancel{1}} \int 2$

4 *Am Rande:*  $a \quad b \quad a + b \quad ab \quad ba \quad \begin{matrix} aa + bb + 2ab \\ bb \end{matrix}$

10 *Probe für a = 2 am Rand:*  $\begin{matrix} 2 & 16 \\ 2 & 16 \\ 2 & 9 \\ 2 & \overline{41} \\ \overline{16} + 16 + 8 + 1 & \overline{9} \\ & \overline{369} \end{matrix}$

5 f. quadrato (1) Necessè est utrumqve rationis terminum esse aequalem cuidam quadrato, neqve (2) videndum *L* 7 numerum *erg. L* 11 +1 *erg. L*

[*Vierter Ansatz, verworfener Abschnitt*]

Invertatur ratio, et loco  $dd = \frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 1}$  dicatur  $\frac{1}{dd} = \frac{a^4 + 2a^3 + 4a + 1}{4a^2 + 8a + 4}$ .

Addatur superiori 1, erit et ipse  $\square^{\text{tum}}$ , supposito quod  $a$  sit 1, et accedet toti  $\frac{1}{dd} -$

$\frac{1}{4a^2 + 8a + 4} = \frac{a^4 + 2a^3 + 4a + 2}{4a^2 + 8a + 4}$ . Sed ita omnia perturbabuntur.

Ergo alia ratio investiganda est, qua ex divisione numeri dati per datum fit quadratum.  $\frac{a}{b} = cc$ . Ergo  $\frac{a}{bc} = c$ . Similiter ergo ut ad nostrum casum redeamus, si

$$\begin{aligned} \frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 2} &= dd \\ \text{Ergo } \frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4 + 2a^3 + 4a + 2} \text{ erit} &= d \\ \text{Ergo } \frac{4a^2 + 8a + 4}{a^4d + 2a^3d + 4ad + 2d} &= d \\ \frac{4a^2 + 8a}{a^4d + 2a^3d + 4ad + 2d} &= d - \frac{4}{a^4d + 2a^3[d] + 4ad + 2d} \end{aligned} \quad 10$$

Si Numerus per alium divisus producit qua datum  $\frac{8}{2} \text{ f } 4$  tunc numerus divisor quadratum multiplicans, producit dividendum ergo  $a^4 + 2a^3 + 4a + 2 \text{ } \hat{=} dd = \frac{4a^2 + 8a + 4}{9}$ .

---

<b>7,3</b>	<i>Am Rande:</i>	$\frac{14}{9}$	$\frac{16}{9}$
		$\frac{126}{126}$	$\frac{144}{144}$

3 toti (1)  $\frac{1}{4a} + 8$  (2)  $\frac{1}{4a^2 + 8a + 4}$  (3)  $\frac{1}{dd} - L$  4f. perturbabuntur (1) Alia nicht gestr. (2) ergo alia L 10  $d - \frac{4}{a^4d + 2a^3 + 4ad + 2d} \mid \frac{4a^2}{a^4d + 2a^3d + 4ad + 2d}$  gestr. | Si Numerus (1) qvi (2) per ... datum (a) est numerus 4 (b) est numerus qvi (c)  $\frac{8}{2} \text{ f } 4 L$

[Vierter Ansatz, Fortsetzung des gültigen Textes]

$$\begin{array}{r}
 4a^2 + 8a \quad f \\
 2a \quad 4a \\
 \hline
 2a \quad 4a + a \quad 4a + 2a
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{r}
 3a \\
 \cancel{4a} \\
 8a + 4 + 1 \\
 \hline
 2a \quad a \\
 \hline
 2a \quad 4a + a \quad 4a + 2a
 \end{array}$$

5 Ex hac divisione patet, ut  $4a^{[2]} + 8a + 4$  fit quadratum  $2a$  [*bricht ab*]

$$\begin{array}{r}
 3a \\
 \cancel{4a} + \quad 8a \quad + 4 \\
 \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\
 \hline
 2a \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 2a \quad \cancel{4a} + 2a
 \end{array}$$

Ergo  $3a + 4 + 1 = 4a + 3$   
 $3a + 2 = (4a) 3a + a$   
 $2 = a$

10

$$\begin{array}{r}
 \cancel{4a} + a \quad 2 \quad 1 \\
 4a
 \end{array}$$

Si jam  $a$  supponatur esse 2, tunc prior quidem terminus  $4a^2 + 8a + 4 + 1$  erit quadratus, sed non posterior.

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \cancel{4a} + \quad 8a \quad + 5 \\
 \hline
 2a \quad 1 \quad 1 \\
 \hline
 \cancel{4a^2} \quad \cancel{4a + 1} \\
 4a + 2 + 1
 \end{array}$$

15

Ex hoc calculo sequitur, impossibile esse, ut  $4a^2 + 8a + 5$  sit Numerus quadratus, qualiscunque supponatur  $a$ , quia scilicet oriretur aequatio inter 4 et  $2 + 1$ , seu  $4 = 3$ ,

---

12 Probe darunter:  $16 + 16 + 5$

$2 + 1$  erg. L 8 Ergo (1)  $3a + 4 = 4a + 3$ . Seu  $3a + 1 = 4a$ . Ergo  $3a + 1 = 3a + 1a$ . Ergo  $a = 1$ .  
 (2)  $3a + 4 + 1 = 4a + 3$  L 12 tunc (1) 4 (2)  $4a + 8a + 4 + 1$ . erit (3) | tunc *streicht Hrsg.* | (a) prioris  
 (b) prior quidem terminus |  $4a^4$  ändert Hrsg. |  $+ 8a$  L

---

2–11 Leibniz' Versuch, die Wurzel aus  $4a^2 + 8a + 4$  zu ziehen, missglückt.



quod est impossibile. Notandus est hic modus satis elegans probandi an aliquid possit exprimi calculo. Sed vereor ut sit plane sufficiens. Imo est, cum is a quo subtrahendum subtrahendo major, aliud cum minor, tunc enim mutanda potius radix.

Nunc ex tota fractione radicem quadratam extrahamus, si modo id possibile est: id ita tentabimus. Nota  $f$  repraesentat nominatorem nostrae fractionis ne toties scribi opus sit.

$$\frac{4a^2}{f} + \frac{8a}{f} + \frac{5}{f} \quad [\text{bricht } ab]$$


---

[Fünfter Ansatz]

$$d3 = Rq \frac{4a^2 + 8a + 5}{4a^4 + 2a^3 + 4a + 1} \tag{10}$$

$$4a^4 + 2a^3 + 4a + 1, \hat{=} ff = 4a^2 + 8a + 5$$

$$4a^4 ff + 2a^3 ff + 4a ff + ff = 4a^2 + 8a + 5$$

Ergo  $4a^4 f + 2a^3 f + 4a f + f = \frac{4a^2}{f} + \frac{8a}{f} + \frac{5}{f}$

$$4a^4 3d + 2a^3 3d + 4a 3d + 3d = \frac{4a^2}{3d} + \frac{8a}{3d} + \frac{5}{3d}$$

$$12a^4 d + 6a^3 d + 12ad + 3d = \frac{4}{3} a^2 + \frac{8}{3} a + \frac{5}{3} - 3d \tag{15}$$

$$\frac{5}{3d} - \frac{3d}{1} = 12a^4 d + 6a^3 d + 12ad - \frac{4a^2}{3d} - \frac{8a}{3d}$$

5–7 tentabimus | Nota ... sit erg. | (1)  $\frac{4a^2}{gg}$  (2)  $\frac{4a^2}{f.} + \frac{8a}{f} + (a) \frac{4}{f} (b) \frac{5}{f} L$

10 (1)  $\frac{dd}{9}$  (2) | dd9 = nicht gestr. |  $16a^2 + 32a$  (3)  $d3 = Rq. \frac{4a^2 + 8a + 5}{4a^4 + (a) 8 (b) 2 | a^3 + 4a + 1} L$

---

5  $f$ : In S. 332 Z. 9f. bezeichnet Leibniz den Nenner noch mit  $gg$  und den Zähler mit  $ff$ . In Z. 11–13 steht  $f$  wiederum für  $3d$ . 10  $d3$ : Leibniz setzt neu an, indem er aus dem ersten und dem dritten Ausdruck der Gleichungskette in S. 331 Z. 10 die Wurzel zieht. Hierbei schreibt er im Nenner des Bruchs versehentlich  $4a^4$  anstelle von  $a^4$ , was die weitere Rechnung in diesem Ansatz beeinträchtigt.

Dividantur omnia per  $d$ , fiet:

$$\frac{5}{3dd} - 3 = 12a^4 + 6a^3 + 12a - \frac{4a^2}{3dd} - \frac{8a}{3dd}$$

$$\frac{5}{3dd} + \frac{4a^2}{3dd} + \frac{8a}{3dd} = 12a^4 + 6a^3 + 12a [+3]$$

$$\frac{\frac{5}{3dd}}{\frac{9dd}{3dd}} = \frac{5}{9dd}$$

5 Et 5 est majus quam  $9dd$ . Ergo  $d$  est fractio.  
Si [*bricht ab*]

[*Sechster Ansatz*]

$$\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \hat{\sim} 3dd}{\frac{4a^2}{3d^2} + \frac{8a}{3dd}} \times \frac{5}{9dd} = \frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \hat{\sim} 27d^4}{20a^2 + 40a \text{ seu } 20a \hat{\sim} a + 1}$$

$$\frac{12a^{\cancel{5}4} + 12a + 6a^{\cancel{4}3} + 6a + 12a^{\cancel{2}} + 12a \hat{\sim} 27d^4}{20a}$$

4f.  $\frac{5}{9dd}$  (1)  $\frac{\cancel{4a^2}}{3dd}$  – (2) hac ratio major illa (3) et 5  $L$

8-337,2 (1)  $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a}{\frac{4a^2}{3d^2} + \frac{8a}{3dd}}$  (2)  $\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \hat{\sim} 3dd}{\frac{4a^2}{3d^2} + \frac{8a}{3dd}} \times$  (a)  $\frac{5}{3dd} = \frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \hat{\sim} 9d4}{20a^2 + 40a \text{ seu } 20a \hat{\sim} a + 1}$

$$\frac{12a^{\cancel{5}4} + 12a + 6a^{\cancel{4}3} + 6a + 12a^{\cancel{2}} + 12a \hat{\sim} 9d4}{20a} = \frac{12a^4 + 6a^3 + 12a + (12 + 6 + 12) 30 \hat{\sim} \cancel{9d4}}{((20 \cup ((9d4) = 36d)) 720d)}$$

(b)  $\frac{5}{9dd} = \frac{12a^4 + 6a^3 + 12a \hat{\sim} |9 \text{ ändert Hrsg. | d4}}{20a^2 + 40a \text{ seu } 20a \hat{\sim} a + 1} \dots$

$$\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a + (12 + 6 + 12) 30 \hat{\sim} \cancel{9d4}}{540 \hat{\sim} 4 = 2160 | (((20 \cup ((9d4) = 36d)) 720d \text{ nicht gestr. | } L}$$

8-337,2  $12a^4$ : Leibniz greift für den sechsten Ansatz erneut die Gleichung aus Z. 3 auf, wobei ihm bereits beim Aufstellen der Ausgangsgleichung und sodann auch bei den weiteren Umformungen verschiedene, teils gravierende Fehler unterlaufen. Auch seine anschließende durchgehende Korrektur vermag den Ansatz nicht zu retten.

$$\frac{12a^4 + 6a^3 + 12a + (12 + 6 + 12) 30 \wedge \cancel{27}d^4}{540 \wedge 4 = 2160d}$$

$$\frac{2a^4 + a^3 + 2a + 5}{360d} \quad [\text{bricht ab}]$$

[Siebter Ansatz]

Videatur an extrahi possit radix quadrata a divisore  $f$ .

$$\begin{array}{r} \cancel{9}a^4 + \cancel{18}a^3 + \frac{33a}{\cancel{36}a} + 9 \\ \hline 3a^2 \quad 3a \\ \hline \cancel{3}a^2 \wedge \cancel{3}a^2 \\ \hline 6a^2 + \cancel{3}a \\ \hline 6a^2 + 6a \end{array} \quad 5$$

Hinc sequitur, si totum sit Numerus Quadratus, necesse esse ut  $6a^2 + 6a$  metiatur  $33a + 9$ . 10

$$\begin{aligned} \text{Seu ut } 6a \wedge a + 1, + 1. 1. 1 \text{ etc.} &= 33a + 9 \\ \text{seu } 6a \wedge a + 1, + 1 \text{ etc.} &= 33a + 9 \\ \text{erit } 6a \wedge a + 1 \wedge 1r &= 33a + 9 \\ 6a^2r + 6ar &= 33a + 9 & 15 \\ 33a &= 6a^2r + 6ar - 9 \\ 11a &= 2a^2r + 2ar - 3 \end{aligned}$$

---

2 Hilfsrechnung:  $\begin{array}{l} \cancel{3} \\ \cancel{21} \cancel{60} \text{ f } 360 \\ \cancel{666} \end{array}$

---

**9,13** (9d4) = 36d: Auch hier führt die Verwendung der Exponentenschreibweise Ozanams zu einem Fehler. Leibniz gibt  $9d^4$  mit  $9d4$  wieder und setzt diesen Term mit  $36d$  gleich. 4–17 radix: Im siebten Ansatz versucht Leibniz erfolglos, die Wurzel aus dem in S. 332 Z. 10 notierten, dort noch als  $gg$  bezeichneten Nenner zu ziehen.

[*Achter Ansatz*]

$$24 + 6 = 15 + 15$$

$$18 + 6 = 12 + 12$$

5 Si ab aequalibus auferas inaequalia, residua sunt inaequalia quidem, sed indagandum est tum, habeantne aliquam rationem inter se. Hoc difficile erit determinatu, quia nec ex rationibus partium datis inveniri potest ratio totorum, si partes summari in unum non possint.

---

2f. *Dazu Hilfsrechnungen:*

$$\begin{array}{ccc}
 \left| \frac{24}{15} \right| \frac{8}{5} & \left| \frac{6}{15} \right| \frac{2}{3} & \frac{18}{24} \left| \frac{3}{4} \right. \\
 18 \quad 12 & \frac{3}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{6}{2} & \frac{24}{30} \\
 6 \quad 12 & & \\
 18 \text{ f } 3 & \cancel{18} \text{ f } 1 & \cancel{18} \text{ f } \frac{6}{4} \left| \frac{3}{2} \right. \\
 6 & \cancel{12} & \cancel{12} \\
 & & \frac{12}{6} \text{ f } 2
 \end{array}$$

## 51. NUMERUM DATUM DIVIDERE IN DUOS QUADRATOS

Mai 1675

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 IX 11 Bl. 7–8. 1 Bog. 2°.  $\frac{1}{3}$  S. gestrichenen Textes auf Bl. 7 r°. 5

— Über dem gestrichenen Text die Datierung „May 1675“ und der zum Text auf dem Rest des Bogens gehörende Titel „Frottement part. (2)“. Unterhalb des gestrichenen Textes Teil 2 von VIII, 2 N. 34<sub>1</sub>, auf Bl. 7 v° u. 8 r° Teil 3 von VIII, 2 N. 34<sub>1</sub>, auf Bl. 8 v° der Beginn von VIII, 2 N. 34<sub>2</sub>.

Cc 2, Nr. 965 A teilw.

Maji 1675

$y^2 + x^2 \sqcap ab$ . Sit  $y$  pariter et  $x$  talis ut fractus quoque possit esse et quidem major unitate, ergo dividendo numeratorem per suum nominatorem habebimus  $\beta + \frac{\gamma a}{\gamma + \delta} \sqcap y$  et  $\theta + \frac{\lambda a}{\lambda + \mu} \sqcap x$ . Unde  $\beta^2 + \frac{2\beta\gamma a}{\gamma + \delta} + \frac{\gamma^2 a^2}{\gamma^2 + 2\gamma\delta + \delta^2} + \theta^2 + \frac{2\theta\lambda a}{\lambda + \mu} + \frac{\lambda^2 a^2}{\lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2} \sqcap ab$ . 10

$ab - x^2 \sqcap y^2$ . Pone  $ab \sqcap c^2 + da$ , fiet:

$c^2 + da - x^2 \sqcap y^2$ . Extrahendo jam radicem:

12f.  $\sqcap ab$ . (1)  $\beta^2\gamma^2 + \beta^2 2\gamma\delta + \beta^2\delta^2 -$  (2)  $ab - x^2 \sqcap y^2$  *L* 14–340,1 radicem: (1)  $y \langle \sqcap \rangle c^2$

$$(2) y \sqcap \frac{c^2 + da - x^2}{\cancel{c}} \quad (3) \text{ sit jam } L$$

4 May 1675: Die Datierung gehörte ursprünglich wohl zum vorliegenden Stück und lautete lateinisch „Maji 1675“. Leibniz hat sie nicht gemeinsam mit dem Stück gestrichen, sondern lediglich in „May 1675“ geändert, als er den französischen Titel für den später auf dem übrigen Bogen niedergeschriebenen Text ergänzte. 10  $y^2 + x^2 \sqcap ab$ : Das vorliegende Stück enthält Nebenbetrachtungen zu dem zahlentheoretischen Problem, wann eine gegebene natürliche Zahl in eine Summe aus zwei Quadraten zerlegbar ist. Leibniz behandelt dieses von Ozanam an ihn herangetragene Problem in VII, 1 N. 78 u. 79 eingehender. Die Bedeutung des Problems hebt Leibniz in seinem Brief an Oldenburg vom 20. Mai 1675 hervor (vgl. III, 1 N. 51 S. 249). — Die Setzung  $x^2 + y^2 = ba$ , bei der Leibniz im vorliegenden Stück dreimal ansetzt, findet sich in VII, 1 N. 78 S. 539 Z. 16.

$$\text{Sit jam } x^2 \sqcap z^2 + \frac{6zc}{5} + \frac{9c^2}{25}. \text{ Unde } \frac{\frac{16}{25}c^2 - \frac{6}{5}zc - z^2}{+ da}$$

$$\frac{\frac{4}{5}c - \frac{6}{8}z}{\frac{8}{5}c}$$

$$\text{Et fiet: } \frac{36}{64}z^2 \sqcap ab - c^2, \text{ quod est nihil.}$$

$$+1$$

$$ab - x^2 \sqcap y^2, \text{ seu } da + c^2 - x^2 \sqcap y^2. \text{ Pone } da \sqcap ec \dagger xe, \text{ et } y \sqcap \frac{fc \dagger fx}{a}. \text{ Fiet } e + c \dagger x$$

$$\sqcap \frac{f^2c \dagger f^2x}{a^2}. \quad \frac{aec \dagger xea}{a} + c^2 \sqcap ab.$$

$$5 \quad ea^2 + ca^2 \dagger xa^2 \sqcap f^2c \dagger f^2x \text{ seu } x \sqcap \frac{ea^2 + ca^2 - f^2c}{\dagger a^2 \dagger f^2} \sqcap \frac{-a^2b + ac^2 + aec}{\dagger ea}.$$

---


$$2 \text{ Hilfsrechnung: } \frac{36}{\frac{64}{100}}$$

$$3 \text{ Pone } da \sqcap (1) ec \dagger xe, \text{ et } y \sqcap fc \dagger fx (2) \mid \frac{ec \dagger xe}{a}, \text{ ändert Hrsg.} \mid \text{ et } y \sqcap \frac{fc \dagger fx}{a} \text{ fiet } e + c \dagger x$$

$$\sqcap \frac{f^2c \mid \dagger \text{ ändert Hrsg.} \mid f^2x}{a^2}. (a) ec \dagger xe (b) \frac{aec \dagger xea}{a} L$$

$$5 \text{ seu } x (1) \sqcap \frac{a^2b - c^2a - e}{c \dagger x} \sqcap (2) \sqcap \frac{ea^2 + ca^2 - f^2c}{\dagger a^2 \mid \dagger \text{ ändert Hrsg.} \mid f^2} L$$

---


$$2 \text{ nihil: Aus den Setzungen ergibt sich tatsächlich } (1 + \frac{36}{64})z^2 - ab + c^2 = 0.$$

52. MACHINA CONSTRUENDI AEQUATIONES PER LOGARITHMICAM  
[November 1676]

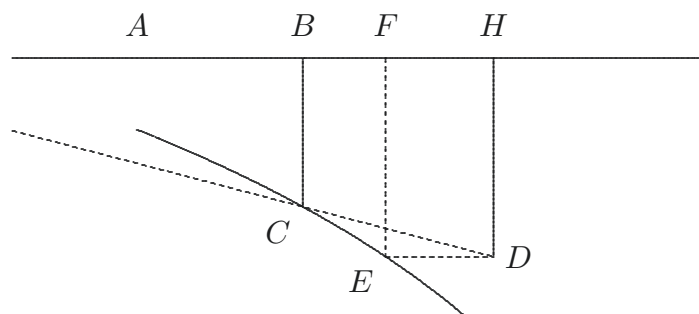
**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 V 12 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°.  $\frac{2}{3}$  Seite auf Bl. 4 v°. Auf Bl. 3 r°–4 r° VII, 5 N. 96. In einer Randnotiz auf Bl. 3 r° nennt Leibniz den Titel des vorliegenden Stücks (vgl. VII, 5 N. 96 S. 612 Z. 16–17). Geringfügiger Textverlust durch einen Wasserschaden entlang von Falzkanten, die aus einer Verringerung der Größe auf 16° durch zweimaliges Falten des Bogens resultieren. 5  
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist nach VII, 5 N. 96, das von Leibniz auf November 1676 datiert wurde, auf demselben Bogen begonnen worden. Die restlose Nutzung der Ränder von Bl. 3 r° und Bl. 4 r° für Nachträge zu VII, 5 N. 96 legt nahe, dass Bl. 4 r° nicht mehr für weitere Ergänzungen zur Verfügung stand. Die Entstehung des vorliegenden Stücks ist somit vor Abschluss der Arbeiten an VII, 5 N. 96 zu verorten und damit in unmittelbarem zeitlichen Zusammenhang zu diesem zu sehen. 10

M a c h i n a   c o n s t r u e n d i   a e q u a t i o n e s   p e r   L o g a r i t h m i c a m

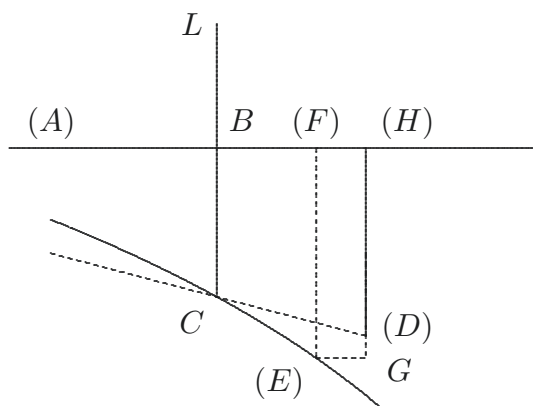
Machinam tandem generatus videor pro locis aequationis semper describendis ope 15  
curvae logarithmicae, imo potius superficies logarithmicae cylindricae. Nimirum sit aequatio  $x^3 + px^2 \sqcap qy$ .

14 M a c h i n a . . . L o g a r i t h m i c a m   e r g . L   15 pro (1) linea aequationum semper describenda (2) loco (3) locis . . . semper | describenda ändert Hrsg. | ope L   16 f. aequatio (1)  $x^3 + x^2 \sqcap y$  (2)  $x^3 + px^2 \sqcap qy$  L



[Fig. 1]

- Sit  $AB \propto x$  cuicumque,  $BC \propto$  ejus logarithmo.  $CE$  est curva logarithmica.  $HD \propto EF$ . logarithmi triplo.  $AF$ , numero logarithmi Tripli seu Cubo seu erit  $AF \propto x^3$ . Scilicet debet semper  $CD$  sibi parallela ita progredi, ut et (i)nitio sic esse locata ut sit  $DH$  tripla  $BC$ .
- 5 Ex puncto  $D$  autem pro(duci)tur f(irmi)ter regula  $DE$  parallela ipsi  $AH$  gerens in  $DE$  perpendiculariter in(vic)em  $EF$  ita ut semper determinetur  $AF \propto x^3$ .



[Fig. 2]

- 3  $AF \propto x^3$  (1) debent (a) scilicet Angulus (b)  $BC$  talis esse (c) esse A (2) scilicet  $L$
- 5 pro(duci)tur |f(irmi)ter erg. | regula (1) ipsi (2)  $DE$   $L$

1 Fig. 1: Die Krümmungsrichtung der Kurve in Fig. 1 ist mit der Ansetzung von  $BC$  als Logarithmus von  $AB$  in Z. 2 nicht vereinbar. Aus der gegebenen Situation ergibt sich stattdessen wie in N. 16 Fig. 1 und N. 59 Fig. 4 eine Logarithmuskurve, deren Asymptote senkrecht zu  $ABFH$  steht und durch  $A$  verläuft. Fig. 2 ist von derselben Problematik betroffen. Die grundsätzliche Überlegung wird hier und im Folgenden jedoch nicht von dieser Unstimmigkeit beeinträchtigt. 7 Fig. 2: Leibniz tilgt bei den Bezeichnungen  $B$  und  $C$  die ursprünglich wie im Text gesetzten Klammern und visualisiert so die in S. 343 Z. 5–9 benannten Entsprechungen mit der Situation in Fig. 1.

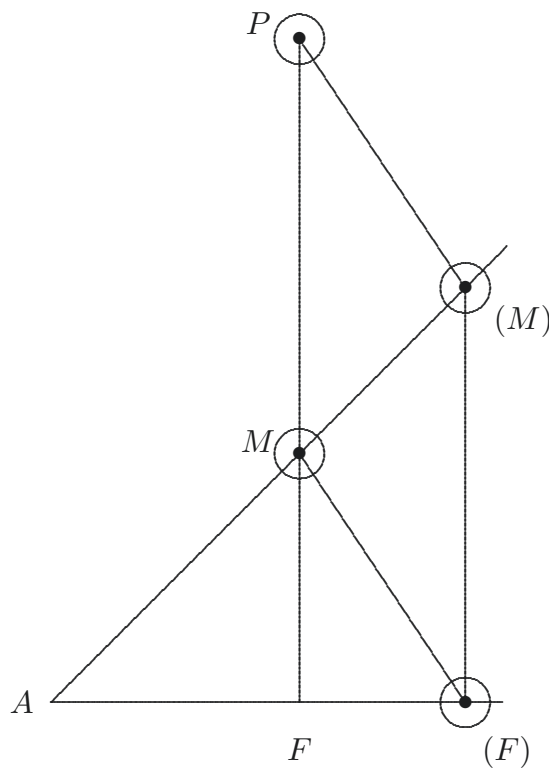


Sit in 2<sup>da</sup> figura rursus  $(A)(B) \cap x$ . et  $(B)(C)$  ejus logarithmus sed  $(H)(D)$  sit dupla  $BC$ , non ut ante tripla. Et  $(D)G$  logarithmus ipsius  $p$ . semper constans, erit  $(H)G$  vel  $(F)(E)$  log. a  $px^2$ , et  $A(F)$  erit  $px^2$ . Ponatur jam  $(A)(F)$  ipso facto sive ipso motu addi ipsi  $AF$  quod dupliciter fieri potest vel efficiendo, ut punctum  $(A)$  incidat in punctum  $F$  figurae superioris. Dum unum alterum portat ac reportat, et ita etiam ipsi  $(A)$  mobili, alia logarithmica erit annexa, vel si volumus rectam  $CD(D)$  esse unicam tantum, ut et curvam logarithmicam,  $CE(E)$ , efficiendum, ut  $A(F)$  transferatur in  $F$  seu addatur ad  $AF$ . Video portationem non procedere, quia portaretur et  $BC$ , ob  $C$ , portatum. Ergo et curva opus esset connexionem faciente ut eadem semper sit  $AB$ .

5

Optimum foret ambas  $AF$ , addi in  $BL$ .

10

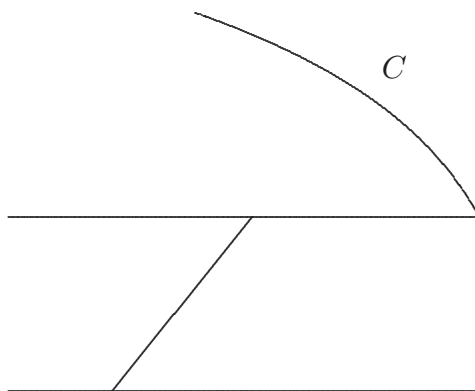


[Fig. 3]

4 vel (1) portando (2) efficiendo, L 6 volumus (1) |(A), (C), (B) nicht gestr. | esse in (2) rectam L

11 Fig. 3: Vgl. VII, 7 N. 67 S. 599 Fig. 1, in der ebenfalls ein bewegliches Parallelogramm ( $\varphi EBD$ ) zur Addition zweier Größen ( $\varphi E$  und  $VX$ ) eingesetzt wird.

Vel etiam ita res fiet, sit angulus  $MAF$  graduum 45. Erit  $FM \perp AF$ , et  $(M)(F) \perp A(F)$ . Addetur  $(F)(M)$  ad  $FM$ , ope parallelogrammi mobilis, dum centrum  $M$ , prop(elli)tur  $FM$ , a recta  $AM$ , item  $(M)$  et  $(P)$  centra propelli possunt, ita  $MF$  semper manebit recta data (modo  $\langle M$ , inter —to, ita ut — instituetur)), et  $PM$  quo(que), unde manebit  
 5 semper parallelogrammum. Eodem modo et ipsi  $P$  connectetur tertia  $((F))$ , ut ipsi  $(M)$  secunda et ita porro.



[Fig. 4]

Connecti poterunt omnes affirmativi termini inter se et omnes negativi retro computando seu incipiendo a novissimo affirmativo. Sed observandum ut ultimus terminus  
 10 aequationis sit affirmativa quantitas, (semper fieri potest, quia possumus facere scilicet summum terminum negativum) et ita semper affirmata praevalebunt negatis, nec unquam cis  $AF$  versus  $C$  excurretur.

Illud habebit commodi hoc instrumentum, ut etiam irrationales simplices ipsius  $x$  valores tractari possint non sublata irrationalitate, ut  $\sqrt{x^3} + p^3/x^5 \perp z$ .

1 erit  $FM \perp AF$ , (1) addendo (2) et (a)  $MF$  (b)  $(M)(F)$  L 4 instituetur)), (1) | et nicht gestr. |  
 (proinde) (2) et L 5 f. ipsi | M ändert Hrsg. | secunda L 10 sit (1) | aut streicht Hrsg. | non (2)  
 affirmativa L 14 ut (1)  $\sqrt{x^3} + p^2/$  (2)  $\sqrt{x^3} + p^4/x^5 \perp z$  L

---

2 parallelogrammi mobilis: Eine ähnliche Konstruktion zur instrumentellen Addition der Längen zweier paralleler Strecken durch bewegliche Parallelogramme nutzt Leibniz auch im Konzept eines Instruments zur Gleichungslösung in VII, 7 N. 67.

## 53. COMBINATORIA

[Oktober 1674 – Januar 1675]

**Überlieferung:** *L* Notiz: Zettel, ca 24 × 5,5 cm. 4 Z. r<sup>o</sup>, 9 Z. v<sup>o</sup>. Textfolge v<sup>o</sup>, r<sup>o</sup>. Der Streifen bildete ursprünglich zusammen mit N. 54 ca 1 Bl. 2<sup>o</sup> und wurde (wohl von Leibniz) durch Schnitt abgetrennt. Über N. 53 und links neben N. 53 u. N. 54 auf v<sup>o</sup> Reste weiteren Textes, der abgeschnitten wurde. Oben Bibliotheksvermerke: „gefunden in Otho Venius, Theatre moral. Brux. 1672 fol.“ und „jetzt in Comm. epist. Collins 1712“ sowie „zu IV 379<sup>a</sup>“. Die beiden Blattfragmente wurden später wieder zusammengefügt und in Leibniz' Handexemplar des *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota*, 1712, Ms IV 379a, eingelegt. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von Herbst 1674 bis Januar 1675 belegt. Das Gleichheitszeichen  $\pi$  verwendet Leibniz ab Juni 1674. Im Text von N. 54 (S. 350 Z. 2) erwähnt er die von ihm im Oktober 1674 gefundene Trochoide der Parabel.

## C o m b i n a t o r i a

Theoremata artis Combinatoriae sunt Generalia de formis rerum. In illis a priori demonstrare difficile; nisi profecta doctrina de qualitate, ut est illa de quantitate, ex<sup>pl<sup>o</sup></sup> Joh. Christoph. Sturmii, multa cum per inductionem, tum etiam a posteriori, ope scientiae quantitatis, applicatione ad Calculum facta demonstrari possunt.

Calculus est subordinatus Combinatoriae, ut Arithmetica calculo; est enim calculus combinatio quorundam characterum in quaedam composita, ea lege facta, ut quantum uni adimitur vel additur omnibus, quantum uni super- vel subscribitur omnibus adimatur, addatur, super- vel subscribatur; aliisque paucis regulis observatis. Jam patet fingi posse combinationes mille aliis legibus praescriptis.

Quemadmodum caecus natus scientiam opticam discere potest, imo et in ea invenire

15 C o m b i n a t o r i a *erg. L*      22 vel additur *erg. L*

17 ex<sup>pl<sup>o</sup></sup>: J. Chr. STURM, *Universalia Euclidea*, 1661; vgl. dazu auch Leibniz' Bezugnahme in *De arte combinatoria*, 1666, S. 23–25 (VI, 1 N. 8, S. 186 f.). 25–346,1 Quemadmodum ... instrumenta: Leibniz spielt möglicherweise auf den Fall von Ulrich Schönberger an, der als Kleinkind erblindete und bis zu seinem Tod 1649 an der Universität Königsberg lehrte und Instrumente erfand; vgl. die spätere Erwähnung in den *Nouveaux essais* (VI, 6 S. 106).

theoremata, vel instrumenta; ita nos demonstrare possumus de Deo et infinito, etsi neuter habeat ideam sui objecti.

Data formula omnes modos enumerare, quibus enuntiari potest nullo forinsecus assumto: v. g.

5  $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \sqcap a^3, +3ab \wedge a + b, +b^3, \sqcap a^2, \wedge a + 3b, +b^2, \wedge 3a + b.$   
 (unde forinsecus assumendo:  $a^2 + b^2, \wedge 3a + 3b, -2a^2 - 2b^2$ ). Item  $\sqcap a + b, \wedge +a + b, \wedge a + b,$   
 vel  $a^2 + 2ab + b^2, \wedge a + b.$  Assumptiones forinsecae saepe utiles ad alia accedentia, destruenda.

7 alia (1) prolata (2) accedentia L

## 54. CHARACTERISTICA ET COMBINATORIA

[Oktober 1674 – Januar 1675]

**Überlieferung:** *L* Notiz: 1 Bl. ca 2°. Textfolge v°, r°. Das Blatt bildete ursprünglich zusammen mit N. 53 ca 1 Bl. 2° und wurde (wohl von Leibniz) durch Schnitt abgetrennt. Über dem Streifen N. 53 und links neben N. 53 u. N. 54 auf v° Reste weiteren Textes, der abgeschnitten wurde. Oben auf N. 53 Bibliotheksvermerke: „gefunden in Otho Venius, Theatre moral. Brux. 1672 fol.“ und „jetzt in Comm. Epist. Collins 1712“ sowie „zu IV 379a“. Die beiden Blattfragmente wurden später wieder zusammengefügt und in Leibniz' Handexemplar des *Commercium epistolicum D. Johannis Collins et aliorum de analysi promota*, 1712, Ms IV 379a, eingelegt. Cc 2, Nr. 00

5

10

Datierungsgründe: s. N. 53.

## C h a r a c t e r i s t i c a   e t   c o m b i n a t o r i a

Characteristica de arte formandi characteres. Novis enim opus est characteribus, qua linearum quoque ductus exprimentur, quarum ope id praestetur, et perfectius etiam quod vocabulis, ut scilicet sine visa figura omnia intelligi possint et figura si velis ex hac sola instructione duci, et ut mutari has characterum formulas idem sit, quod mutari figuram. Adjiciendi characteres, qui expriment actionem, scilicet locum, tempus, (unde motus;) et cogitationem. Sed locus jam figuris geometricis continetur, adjiciendum tempus ergo tantum.

15

20

Separata in characteristica est doctrina Combinatoria, seu de eodem et diverso generaliter; sive de qualitate, sive de formis, ubi de similitudine loco aequalitatis, sive de identitate, loco aequationis. Nimirum calculus nihil aliud quam combinationum operatio est; synthesis quam productio alicujus formulae secundum certam combinationis legem; Analysis origo formulae secundum eandem legem investigata per comparisonem cum formulis similibus quarum nota origo est. Et hinc origo in calculo, comparandi aequationes similes, quae non nisi consequentia est artis comparandi formulas similes. Theorema nihil aliud quam calculi compendia; seu modus quo statim ab initio ex aliqua formula

25

13 Characteristica et combinatoria *erg. L* 14 Darüber Il y a une grotte dans les pyrenees, de 2 heures de profondeur *gestr. L* 24 est; (1) Analysis (2) synthesis *L*

praevideri potest qualis futurus sit calculi finis, ipso licet non facto. Unde paret, quid sit  
 omnis scientia humana, quid demonstrationes, calculi scilicet recitatio. Definitiones vero  
 nihil aliud quam explicationes characterum quibus utimur, ut postea inter ratiocinan-  
 dum valores eas substituere possimus in locum ipsarum. Doctrina de eodem et diverso in  
 5 genere, manifestum est, eandem esse cum combinatoria; nam tot characteribus assumtis  
 quot diversae res calculum ingrediuntur videmus quid ex earum combinatione nascatur.  
 Doctrina de Harmonia est calculus quidam combinationum, seu doctrina de quantitate in  
 ipsam doctrinam de combinationibus reflexa, est enim quaedam identitatis et diversitatis  
 compensatio. Sunt in combinationibus quemadmodum in verbis, literae, vocabula, com-  
 10 mata, cola; periodi: quemadmodum in calculo comprehensiones. Additiones et subtractio-  
 nes in calculo Mathematico vocabula seu terminos faciunt; multiplicationes non mutant  
 vocabula, sed in ipsis coalescunt; quod scilicet ita compendiosissime omnia exprimi posse  
 appareret, etsi hoc non sit necessarium. Quando subtrahimus signo quod differentia id  
 dicimus; expectare nos differentiae id ipsum quod subtrahendum est addi debeat; ut tunc  
 15 destructione mutua additio illa subtractioni compensetur; cum pro divisione subscribimus  
 id velimus; expectandum esse, dum id quod subscriptum est superscribatur, ut mutua  
 compensatione tollatur sub- et superscriptio. Divisio et radicum extractio est operatio  
 analytica, sed et resolutio rei in partes ex quibus composita est; doctrinam de radicibus  
 et divisoribus hactenus Analystae tractavere, non de discernitionibus; cum tamen ejus ope  
 20 quoque inquiri possit in figurarum quadraturas, destructiones aliaque magni momenti;  
 sed haec calculo mathematico altiora longa in ipsa Combinatoria habent fontem. Imo est  
 et cum multiplicatio et additio res contrahit, cum v. g.  $\frac{y^2}{y^3 + y^2 + y + 1}$ , multiplicata per  
 $1 - y^2$ , dat  $\frac{y^2 - y^4}{1 - y^4}$ . Eodem modo fit aliquando ut additio reddat rem simpliciore, v. g.

5 combinatoria; (1) nihil dici (2) nam  $L = 6$  f. nascatur. (1) Quoniam (2) doctrina de Harmonia (a)  
 eadem est (b) quodam (c) calculus  $L = 8$  f. diversitatis (1) combinatio (2) compensatio. (a) subtractiones  
 et divisiones (b) sunt  $L = 10$  quemadmodum in calculo (1) combinationes (a) et fractiones (b) et fra-  
 (c) signa sunt fractionum (2) comprehensiones  $L = 11$  seu terminos erg.  $L = 17$  radicum | attractio  
 ändert Hrsg. | (1) | est nicht gestr. | analysis (2) est  $L$

---

22 multiplicata: Das gewünschte Ergebnis wird nicht durch eine Multiplikation mit  $1 - y^2$ , sondern  
 durch eine Multiplikation mit dem Faktor  $1 + y = \frac{1 - y^2}{1 - y}$  erzielt.

ad  $\frac{x^2}{\sqrt{2ax - x^2}}$ , adde  $\sqrt{2ax - x^2}$ , fiet summa:  $\frac{2ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$ , quae formula priore simplicior.

Doctrina de Commatibus seu distinctionibus; etc. est combinatoriae; characteristica est quasi quaedam orthographia; formulae Etymologia quaedam; operationes quaedam syntaxis. Nimirum haec scientia est Grammatica rationis. Agendum ipsa longe rectius, quod homines vocabulis agere quotidie conantur, sed perfunctorie; et ideo multis erroribus. Vocabula saepe novis inveniendi ratiocinandique principia sunt. Cum in ingentibus rationum ductibus, quales in calculo algebraico videmus, exempli causa cum tangentes investigantur; impossibile sit imaginationem humanam per tot combinationes ire necessarii fuere characteres. Eodem modo generali inventa characteristica, non est dubitandum mira theoremata et problemata in omni doctrina inventum iri; quae nulla humana imaginatio alioquin detegere potuisset. In iis in quibus agit natura, saepe experimentis compendium ingentium calculorum fieri potest; prorsus quemadmodum calculi combinatorii ope numerorum; qui eum quodammodo sensibus subjectum reddunt. Ideo instrumentum meum Arithmeticum Empiricae combinatoriae generali et inductionibus serviet combinatoriis; eodem modo ope experimenti optici statici, detegi possunt, quae alioquin nemo invenisset a priori. Sed characteristica in has quoque scientias introducta, et arte inveniendi theoremata et problemata, non est dubium innumera detecta iri, et experimentis comprobatura; quae alioquin nemo fuisset suspicatus, quaeque nunquam alias inventa fuissent. Scientia logica est quaedam combinatoriae in seipsam reflexio; seu cujus ego magni facio inventum, cum ejus ope possint homines adigi ad fatenda quae nolunt.

Scientia inveniendi theoremata in arte combinatoria, erit a priori ex ipsis ejus visceribus, notando quibus casibus fieri per synthesin possit, pro variis legibus combinationum, ut res faciem valde mutant; et inprimis ut ex valde compositis fiant valde simplices. In omni calculo utimur comprehensionem quae multiplicationem tantum aut divisionem certae quantitatis in omnes comprehensas ducendae notant; eodem modo non est dubium alias comprehensiones intelligi posse, additionum ac subtractionum quibus intelligatur, datam omnibus addendam. Aequationes non nisi formulae sunt factae ex multiplicatione formularum in quibus semper eadem quantitas; et alia; quae alia quantitas est radix; ideo fit, ut radices semper aut sensu aut cogitatione haberi possint. Ope divisionis continui in infinitum, spatiique et motus haberi possunt, ut quae alioquin seu si distincte haberi non licet, seu pro imaginariis habendae essent, inveniantur, ut quantitates irrationales; inte-

3 orthographia; (1) caeterae operationes (2) formulae L 6 sunt (1) sed considerandum est animum (2) Cum L

grae lineae fractis formulis aequales; ablationes eorum quae non insunt; constructiones problematum Tetragonisticorum ope motus. ⟨Uti⟩ de linea mea Mesolaba, qua ratio in data ratione secetur. Sunt quaedam mira, et aegre fortasse tamen tandem per combinatoriam invenienda; v. g. lineam invenire quae se describat evolutione sui: modum invenire  
 5 describendi parabolam qua na⟨vigatio⟩ utitur, in inflatione velorum; et item in aquarum jactibus. Lineam invenire quae se describat evolutione sui est unum ex problematibus plusquam difficilibus; cum in illis ne ulla quidem formula data sit, quae alioquin data est metho-  
 10 do functionum, seu tangentium inversarum.

Saepe fit ut res citius et facilius inveniatur vel demonstretur; per calculum Gene-  
 10 ralem; aliquando citius per domestica Geometriae principia, v. g. quod in parabola a circulo secta, summa ordinarum in axem demissarum utrinque aequalis statim patet ex calculo, quia aequatione facta secundus terminus deest. At idem non nisi per ambages Geometricae demonstratur. Contra in plerisque simplicioribus fatendum est ea facilius in-  
 15 veniri Geometria quam calculo, si modo daretur ars characteristicae Geometriae propria; ratio est, quia calculo separatur situs a magnitudine, unde fit ut separatim inquisitis magnitudinibus, postea et de situ sit cogitandum, unde constructiones plerumque fiunt prolixae, at in geometriae purae inquisitionibus situs a magnitudine nunquam divellitur; cujus rei illustre est exemplum quod Dn. Matthion mihi proposuit. Hinc etiam scien-  
 20 dum est posse Geometriam seu artem mutandi calculum analyticum in Geometricum servire ad compendia calculorum etiam in arte combinatoria generali; nam certe saepe facillime fiunt linearum ductu, quae non nisi maximis calculi ambagibus. Doctrina de formularum comparationibus vera est Analysis et omnium inventionum clavis una; altera est admiranda methodus ubi calculatis aliquot exemplis, investigatur eorum continuatio in infinitum; et hoc saepe facile est; et hac methodo infiniti calculi praeveniri possunt.  
 25 Interdum vero paulo difficilius divinare originem aliquot datarum formularum; huc pertinet Gregorii inquisitio inveniendi quantitatem quae eodem modo componatur ex infinita quaedam serie. Quae cum non succedat, nisi raro licebit ipsam potius invenire per quadraturas, e. g. quadratura parabolae. Et haec est doctrina Hypothesium datis aliquot

---

2 linea mea Mesolaba: Es handelt sich um die Trochoide der Parabel, vgl. VII, 3 N. 38<sub>12</sub>, S. 486. 10–13 quod . . . demonstretur: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 92, Fr. VAN SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 330–343, sowie Leibniz' Bemerkungen in N. 11 S. 81 Z. 10 – S. 82 Z. 5 und seine algebraische Lösung des Problems in VII, 7 N. 7 S. 43–48. 18 exemplum: Möglicherweise handelt es sich um das von Leibniz in VII, 1 N. 11 gelöste Problem, ein Dreieck aus zwei gegebenen Seiten und gegebener Fläche zu bestimmen. [noch] 26 inquisitio: J. GREGORY, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667.



formulis invenire regulam quandam ipsis communem; et tunc maxime perfecta est haec regula cum reciproca est, ut non tantum in quolibet seriei termino vera reperiatur, sed et contra ubi ipsa sit, termini sint, inprimis si talis est, ut ope regulae termini etiam non dati inveniri possint; quod si una observatione seu regula praestari non potest, poterit pluribus inter se junctis.

5

Ecce ergo duas artes analyticas, alteram per demonstrationem alteram conjecturalem. Hac Conjecturali quoque praeclara in Geometria et numeris detegi posse, patet inductionibus Frenicli; *Arithmeticae infinitorum* Wallisii aliisque infinitis exemplis. Nota Characteribus pro Geometria inventis, fiet credo ut etiam Characteres habeantur ipsius quasi-situs spatiorum imaginariorum, aut potius dimensionum transcendentium, quales solvis altiores, sed exprimentur ope curvarum homogenearum; quemadmodum parabola pyramidem repraesentat. Et videndum an non arte quadam in parabola etiam soliditas pyramidis praesentari possit. Trilineum parabolicum pyramidem repraesentat; ipsa parabola sphaeram; Triangulum repraesentat conoeidem parabolicam, etc. Quemadmodum utile plana solidis homogenea, ita utile habere curvas spatiis homogeneas; utile quoque postea eas curvarum sectiones ope trochoeidum exprimi in plano, ope meae methodi tangentium inversae; item ope differentiarum reciproca; possunt figurae semper inveniri talibus quasi satisficientes, ut error negligi queat; et earum ope demonstrari et ratiocinari de istis licebit; et facile apparebit in quo possint istae demonstrationes applicari ad lineas veras indescriptibiles: ita hac arte inveniri poterunt calculo linearum analyticarum tangentes aliaque; supponendo eas per appropinquationem descriptas et calculando; et postea errores corrigendo; collatione cum iis, quae alioquin de figura vera esse constet.

10

15

20

Nota facilius est ars dechiffrandi, cum nobis ipsis licet invenire terminos quoslibet ut in scientiis juris examinandos; difficilius cum certus numerus ut cum ex datis experimentis hypothesis, ex datis aliquot literis dechiffratio quaeritur. Dechiffratio serie data plerumque in eo consistit, ut inveniamus quantitatem arithmetice cum seriebus crescentem,

25

6 per (1) analysin, alter (2) comparationem aliam per in (3) demonstrationem  $L$  15 utile (1) habere solida lineis repr(−) (2) plana  $L$  23 f. ut ... juris erg.  $L$  24 difficilius (1) cum (— —) ut (2) cum  $L$

---

8 inductionibus: B. FRÉNICLE DE BESSY, *Solutio duorum problematum circa numeros cubos et quadratos*, 1657; J. WALLIS, *Arithmetica infinitorum*, 1656 (*WO I S.* 355–478). 16 f. ope trochoeidum ... reciproca: vgl. die einschlägigen Studien zwischen Oktober 1674 und Januar 1675 (VII, 3 N. 38–40; VII, 5 N. 7–29).

eodem modo ex quolibet termino compositam. Gregorius rem quaerit longe difficiliorem, invenire e a n d e m quantitatem eodem modo ex quolibet seriei termino compositam. Cumque ope quadraturarum inveniri possit quod ille postulat, inveniri etiam poterit facilius quod nos postulamus ope earundem; notandum est tamen id illum postulare in  
5 seriebus quarum jam nota regula ⟨sed⟩ nobis ipsa regula quaeritur.

---

1 quaerit: s. o. Erl. zu S. 350 Z. 26.

## 55. NOTE SUR LES NOUVEAUX ELEMENS DE GEOMETRIE

[Mitte 1674 – Ende 1675 (?)]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 I 19 Bl. 67. Papierfragment von unregelmäßiger Gestalt, rechts Blattekante, an den übrigen Seiten Risskanten, Größe ca  $8 \times 3,5$  cm. 7Z. auf Bl. 67 v<sup>o</sup>, Vorderseite leer. 5  
Cc 2, Nr. 495

Datierungsgründe: Die Verwendung des Französischen im vorliegenden Stück lässt eine Niederschrift in der Pariser Zeit vermuten. In unserem Stück wie auch in N. 20 (das nach Mitte 1674 entstanden sein muss) nennt Leibniz nur den Titel des anonym erschienenen Werkes von Arnauld, nicht aber den Autor. Womöglich war er zum Zeitpunkt der jeweiligen Niederschrift über dessen Namen noch nicht orientiert; andernfalls hätte er ihn als besondere Information wahrscheinlich mit angeführt. Wie er am 27. Juni/7. Juli 1690 an Vincent Placcius schreibt, hat er aber noch während seines Aufenthaltes in Paris von Arnauld selbst erfahren, dass dieser der Autor des Werkes sei (VI, 2 N. 80 S. 327). Am 12. Dezember 1675 schreibt Leibniz an Arnauld und übersendet ihm seine Ausarbeitungen zu einem von diesem gestellten Problem zur Zahlentheorie (III, 1 N. 69). In diesem Zusammenhang findet ein mündlicher Austausch statt, bei welchem Leibniz möglicherweise auch von Arnaulds Autorschaft erfährt. Somit wäre Ende 1675 ein *terminus ante quem*. Wenn man nun noch unterstellt, dass N. 20 und das vorliegende Stück auf dieselbe gründliche Lektüre der *Nouveaux elemens* zurückgehen, müsste unser Stück nach der Jahresmitte 1674 entstanden sein. Zwingend ist eine solche Datierung jedoch keineswegs; eine Entstehung des Fragments nach Leibniz' Abreise aus Paris kann nicht ausgeschlossen werden. Eine zweite Auflage des Werkes von Arnauld erschien 1683. In Leibniz' Kurzzitat aus Arnaulds Werk lautet die Schreibung wie in der zweiten Auflage *voye*, nicht *voie* wie in der Erstausgabe. Dies könnte man als Hinweis darauf werten, dass Leibniz aus der zweiten Auflage zitiert. Tatsächlich ist aber bei Leibniz generell die Schreibweise *voye* zu finden. Gewichtiger erscheint der Umstand, dass Leibniz mit der *similitude* von geometrischen Objekten argumentiert. Dies deutet darauf hin, dass seine Überlegungen aus einer Zeit stammen, in der er die Grundlagen seiner *Analysis situs* bereits entwickelt hatte, was auf eine Entstehung in der frühen Hannoveraner Zeit verweist. — Über den Verbleib der anderen Teile des ursprünglichen Trägers ist bisher nichts bekannt, so dass sich auf diesem Wege keine Informationen über den Entstehungszeitraum des Stückes gewinnen lassen. [noch] 10  
15  
20  
25

*Nouv. El. de Geom.* lib. XII artic. 28. Apres avoir dit que *les circonférences des cercles sont comme leur diamètres* et l'avoir prouvé selon Euclide par *voye* des polygones, il adjoute: *c'est la seule voye*. Cependant j'en ay trouvée une autre par la definition de la similitude. 30

---

30 *Nouv. El. de Geom.*: [A. ARNAULD], *Nouveaux elemens de geometrie*, 1667, S. 258 f.

## 56. TABULA DIFFERENTIARUM ET SUMMARUM

[April 1675]

**Überlieferung:** L Konzept: LH 35 V Bl. 6–7. 1 Bog. 4°. 8Z. in drei Spalten kopfstehend im oberen Viertel von Bl. 7r°. Im zweiten Viertel der Seite, ebenfalls kopfstehend, VIII, 2 N. 33. Untere Hälfte der Seite sowie Rückseite leer. Auf Bl. 6r° u. v° Teile von VIII, 2 N. 32.  
Cc 2, Nr. 945 D

Datierungsgründe: Das Stück VIII, 2 N. 32 zur mechanischen Reibung, das das andere Blatt des Bogens sowie einen weiteren Bogen einnimmt, ist von Leibniz selbst auf April 1675 datiert.

$$\begin{aligned}
 10 \quad xy \sqcap a^2. \text{ Ergo } y \sqcap \frac{a^2}{x}. \text{ Ergo } z \sqcap \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x+\beta} \text{ seu } z \sqcap \frac{a^2x + a^2\beta - a^2x}{x^2 + x\beta}. \text{ Ergo } z \sqcap \frac{a^2\beta}{x^2}. \\
 z \sqcap \frac{a^3}{x^2}. \text{ Unde } \frac{a^3}{x^2} - \frac{a^3}{x^2 + 2x\beta \boxed{+\beta^2}} \sqcap \omega. \text{ Unde: } \frac{\boxed{a^3x^2} + 2a^3x\beta \boxed{-a^3x^2}}{x^4}. \text{ Ergo} \\
 \omega \sqcap \frac{2a^3\beta}{x^3}. \\
 \frac{a^4}{x^3} - \frac{a^4}{x^3 + 3x^2\beta \boxed{+3x\beta^2 + \beta^3}} \sqcap \wp. \frac{\boxed{a^4x^3} + 3a^4x^2\beta \boxed{-a^4x^3}}{x^6} \text{ seu } \frac{3a^4\beta}{x^4} \sqcap \wp.
 \end{aligned}$$

10  $xy \sqcap a^2$ : Wie in VIII, 2 N. 33, das offensichtlich nach unserem Stück auf derselben Seite niedergeschrieben wurde, startet Leibniz mit einer Kegelschnittgleichung (dort lautet sie  $ax = y^2$ ). Hier wie dort wird sodann eine Größe  $z$  bestimmt: hier über  $z := y(x) - y(x + \beta)$ , dort einmal ebenso (ebd., S. 285 Z. 15 f.), einmal über  $z := y(x + \beta) - y(x)$  (ebd., Z. 13; vgl. auch VIII, 2 N. 31<sub>2</sub> S. 263 Z. 12).

10  $z \sqcap \frac{a^2\beta}{x^2}$ : Leibniz berechnet hier das infinitesimale Element der Ordinate;  $z$  entspricht dabei  $dy$  und

$\beta$  entspricht  $dx$ . Die Vereinfachung zum Ergebnis  $z = \frac{a^2\beta}{x^2}$  entspricht dem zu dieser Zeit üblichen Verfahren, ebenso der Verzicht auf ein mögliches negatives Vorzeichen, da nur Streckenlängen betrachtet werden.

11  $z \sqcap \frac{a^3}{x^2}$ : Leibniz berechnet nun die Differenzen der Differenzen etc. Die Gleichung für  $z$

wird homogen als  $z = \frac{a^3}{x^2}$  angesetzt,  $\omega$  entspricht also  $dz$  bzw.  $ddy$ . Bei der Ansetzung der Gleichung für

$\wp$ , also  $d\omega$  bzw.  $ddy$ , lässt Leibniz den Faktor 2 weg, gibt ihn aber danach in der Tabelle an.

$\frac{a^2}{x}$	$\frac{a^3}{x^2}$	$\frac{2a^4}{x^3}$	$\frac{3a^5}{x^4}$	. . . .
Termini	Differentiae 1 <sup>mae</sup>	2 <sup>dae</sup>	tertiae	etc.
$a$	Omn. $a$ $x$	Omn. $x$ $\frac{x^2}{2a}$	Omn. $x^2$ $\frac{x^3}{3a^2}$	Omn. $x^3$ $\frac{x^4}{4a^3}$
Termini	Summae 1 <sup>mae</sup>	2 <sup>dae</sup>	tertiae	
$a$	$\frac{a^2}{x}$	$\frac{a^3}{2x^2}$	$\frac{a^4}{3x^3}$	$\frac{a^5}{4x^4}$
	Omn. $\frac{a^2}{x^2}$	Omn. $\frac{a^3}{x^3}$	Omn. $\frac{a^4}{x^4}$	Omn. $\frac{a^5}{x^5}$

5

2 *darunter gestrichen:*       $x$        $\frac{x^2}{2a}$        $\frac{x^3}{3a^2}$        $\frac{x^4}{4a^2}$        $L$

Termini Summae  
1<sup>mae</sup>      2<sup>dae</sup>      tertiae

## 57. ÜBERWÄRTSDIVISIONEN UND RECHENPROBEN

[Dezember 1675]

**Überlieferung:** *L* Rechnungen: LH 35 XII 1 Bl. 250. An drei Seiten zum Teil unregelmäßig beschnittenes Blatt, ca 18,5 × 16 cm, 1 S. auf Bl. 250 v<sup>o</sup>. Die Schnittkanten trennen Teile der Rechnungen ab. Am unteren Rand findet sich rechts zudem, durch eine Linie von den Rechnungen isoliert und der Schreibrichtung folgend durchgeschnitten, das unleserliche Fragment einer Bemerkung. — Auf Bl. 250 r<sup>o</sup> VII, 3 N. 53<sub>1</sub>. Cc 2, Nr. 1180 tlw.

5

Datierungsgründe: Das Stück *Progressio harmonica* (VII, 3 N. 53<sub>1</sub>) auf der Vorderseite des Blattes trägt das Datum *Decemb. 1675*.

10

	$\begin{array}{r} \langle - \rangle \\ \langle - \rangle \\ \langle - \rangle \\ \langle - \rangle \\ \langle - \rangle \quad f - \rangle \\ \underline{\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}} \\ \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \\ \text{X}\text{X}\text{X} \end{array}$	$\begin{array}{r} \langle \text{X}\text{X} \rangle \\ \langle \text{Z}\text{X}\text{X} \rangle \\ \langle \text{Z}\text{X}\text{X}\text{X} \rangle \\ \langle \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \rangle \\ \langle \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \rangle \\ \langle \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \rangle \\ \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \quad f \quad 4926 \\ \underline{\text{Z}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}} \\ \text{Z}\text{X}\text{X}\text{X} \\ \text{Z}\text{Z} \end{array}$	143
--	--	--	-----

20

25

$$\begin{array}{r} 6 \\ \underline{\text{X}\text{X}} \\ \text{X}\text{X} \quad 2 \\ \underline{\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}} \\ \text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \quad 0 \\ \underline{\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}} \quad f \quad 593 \\ \text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}\text{X} \quad 9 \\ \underline{\text{X}\text{X}\text{X}\text{X}} \\ 16 \end{array}$$

16 f 4926: Der obere Teil der beiden ersten Rechnungen ist abgeschnitten. Von einem dritten Ansatz sind nach Zuschneiden des Blattes lediglich die drei Ziffern 143 übrig geblieben.

	$\begin{array}{r} \cancel{X} \\ \cancel{26} \\ \cancel{298} \\ \cancel{378} \\ \cancel{8182} \\ \cancel{XAXAZ44} \text{ f } 496 \text{ [bricht ab]} \\ \cancel{28999} \\ \cancel{288} \\ \cancel{2} \end{array}$	$\begin{array}{r} \cancel{Z} \\ \cancel{88} \\ \cancel{88} \\ \cancel{888} \\ \cancel{X181} \\ \cancel{8888} \\ \cancel{XAXAZ44} \text{ f } (496) \\ \cancel{28888} \\ \cancel{888} \\ \cancel{8} \end{array}$	5
			10

$$\begin{array}{r} 4962 \\ \underline{159} \\ 44658 \\ 24810 \\ \underline{4962} \\ 788958 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{88} \\ \cancel{311} \\ \cancel{4798} \\ \cancel{87884} \\ \cancel{788888} \text{ f } 4962 \\ \cancel{111188} \\ \cancel{8888} \\ \cancel{88} \end{array}$$

$$\begin{array}{r} \cancel{8} \\ \cancel{191} \\ \cancel{1878} \\ \cancel{33281} \\ \cancel{788888} \text{ f } 4962 \\ \cancel{188888} \\ \cancel{1888} \\ \cancel{11} \end{array}$$

15

1,25 f 593: 99501 ist nicht durch 1659 teilbar. — Leibniz erweitert hier die übliche Rechentechnik der Überwärtsdivision. So markiert er nun die einzelnen Schritte eines Durchgangs der Division, indem er die erste Stelle des Divisors und die von diesem betroffenen Stellen des Dividenden einmal durchstreicht, die zweite doppelt, die dritte dreifach und die vierte durchkreuzt. Nach jedem Durchgang umrahmt er die ausgeschiedenen Teile der Rechnung. — In der vorliegenden Rechnung unterläuft ihm im zweiten Durchgang ein Fehler: Er rechnet dort  $75 - 9 \times 6 = 11$ . Im Anschluss an den zweiten Durchgang schreibt er den Divisor noch ein drittes Mal an, bevor ihm auffällt, dass die Rechnung bereits an ihr Ende gelangt ist. 7 f 49: Leibniz rechnet im linken Ansatz irrtümlich  $73 - 4 \times 8 = 31$  und bricht nach dem nächsten Schritt ab, womöglich, weil er als Divisor eigentlich wie im folgenden Ansatz 289 verwenden wollte. 7 f 496: Wahrscheinlich hat Leibniz in den Dividenden der mittleren Rechnung versehentlich an der vierten Position eine zusätzliche 4 eingefügt und bricht die Division ab, als es dies erkennt. 7 f 4962: In der Rechnung rechts überprüft Leibniz das korrekte (ihm entweder bereits bekannte oder aus S. 358 Z. 6 erhaltene) Ergebnis 496 der Division  $143344 : 289$ , wobei er von rechts nach links rechnet. 15 f 4962: Leibniz konstruiert ein weiteres Beispiel, macht zunächst die Rückwärtsprobe und führt dann die Überwärtsdivision durch, wobei er jeweils die erweiterte Rechentechnik anwendet.

$  \begin{array}{r}  4 \\  \cancel{8} \\  \cancel{XZ7} \\  \cancel{303} \\  \cancel{0X73} \\  \cancel{XA33A4} \text{ f } 49 \text{ [bricht ab]} \\  \cancel{2809)} \\  \langle \cancel{28} \rangle  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  26 \\  \cancel{3A} \\  \cancel{0X7} \\  \cancel{XA33A4} \text{ f } 49 \text{ [bricht ab]} \\  \cancel{2809)} \\  \langle \cancel{28} \rangle  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  X \\  \cancel{28} \\  \cancel{207} \\  \cancel{3735} \\  \cancel{0X73} \\  \cancel{XA33A4} \text{ f } 496 \\  \cancel{28099)} \\  \cancel{288} \\  \langle \cancel{2} \rangle  \end{array}  $
--	---	--

---

1 Weitere Rechnungen in der Ecke unten links, die letzte gestrichen:

$  \begin{array}{r}  79 \\  \underline{26} \\  474 \\  \underline{158} \\  2064 \\  79  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  79 \\  \underline{36} \\  474 \\  \underline{237} \\  2844  \end{array}  $	$  \begin{array}{r}  97 \\  \underline{16} \\  582 \\  \underline{97} \\  1552  \end{array}  $
--	---	--

---

7 f 49: Leibniz rechnet im linken Ansatz im ersten Durchgang irrtümlich  $313 - 4 \times 9 = 307$  und bricht nach dem zweiten Durchgang ab. 7 f 49: Im mittleren Ansatz rechnet Leibniz im ersten Durchgang irrtümlich  $313 - 4 \times 9 = 247$  und bricht einen Schritt später ab. 3,15 2064: Korrekt wäre 2054.



58. DE APPROPINQUATIONIBUS ANALYTICIS  
[noch]

**Überlieferung:** L Konzept: LH 35 V 14 Bl. 19. 1 Bog. 2<sup>o</sup> mit einem rechteckigen Ausschnitt von etwa [noch] cm Höhe über die volle Seitenbreite in der unteren Mitte von Bl. 19. 13 Zeilen auf Bl. 19 v<sup>o</sup> oben und 10 Zeilen auf Bl. 19 r<sup>o</sup> oben. Auf dem übrigen Bogen N. 59. 5

—  
Cc 2, Nr. 986 tlw. u. 989.

Datierungsgründe: S. N. 59.

## De appropinquationibus analyticis

Praescripta jam olim fuit Methodus qua ex numeris exactam radicem non habentibus 10  
adjectione cyphrarum radix extrahitur quam proxime videndum an aliquod simile in  
aequationibus tentari possit: ut ex  $x^3 * - abx + a^2c \sqcap 0$  extrahenda radix Cubica.

$$\frac{x^2 * - ab}{ac} \sqcap \frac{-a}{x}. \text{ Jam } x^2 - ab \sqcap x - \sqrt{ab}, \wedge x + \sqrt{ab} \text{ fiet } \frac{x - \sqrt{ab}}{a} \wedge \frac{x + \sqrt{ab}}{c} \sqcap \frac{-a}{x}.$$

Itaque  $\overline{\text{Log}}, x - \sqrt{ab} + \overline{\text{Log}} x + \sqrt{ab} - \overline{\text{Log}} a - \overline{\text{Log}} c \sqcap + \overline{\text{Log}} -a - \overline{\text{Log}} x$ . Eaque 15  
arte semper aequatio ad quandam aequationem logarithmorum, quorum numeri cogniti  
aut incognita simplex, quantitate aliqua cognita minuta vel aucta, reduci potest.

Et quoniam Logarithmi numerorum progressionis Arithmetici nempe  $x - \sqrt{ab}$ .  $x$ .  
 $x + \sqrt{ab}$ . sunt progressionis Geometricae, hinc trium istorum Logarithmorum haberi pote-

18 *Kennzeichnung des als falsch identifizierten Geometricae durch eine Streichung sowie über progressionis Geometricae: error verschrieben*

12f. Cubica (1)  $x^3 * - abx \sqcap -a^2c$  (2)  $\frac{x^2 * -ab}{ac} \sqcap \frac{-a}{x}$ . Iam (a)  $x^2 + ab$  (b)  $x^2 - ab \sqcap x - \sqrt{ab}, \wedge$   
|  $x + \sqrt{ab}$  ändert Hrsg. | fiet L 14 itaque (1) Logarithmus ab  $x - \sqrt{ab} + \text{Logarithmus}$  (2)  $\text{Log} \sqrt{x - \sqrt{ab}}$   
+  $\text{Log} \sqrt{x + \sqrt{ab}}$  (a) + L (b) -  $\text{Log} a$  (3)  $\overline{\text{Log}}, x - \sqrt{ab} L$  15f. cogniti aut erg. L

10 Methodus: vgl. VII, 3 N. 38<sub>15</sub> S. 519 Z. 10–S. 520 Z. 10. 12f. Cubica: Leibniz trennt den  
nachfolgenden, auf Vorder- und Rückseite desselben Bereichs des Blatts geschriebenen Abschnitt an  
dieser Stelle mit einer horizontalen Linie von der vorhergehenden Textpassage ab.

rit summa, quoniam trium quantitatum progressionis Arithmeticae semper haberi summa potest. Sed ea summa erit per duos, itaque tres illi Logarithmi in quibus includitur incognita, reduci hic poterunt ad duos. Quae utique tractabilior: potuissemus aliam formare

analogiam  $\boxed{\frac{x^2}{a^2} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{x}}$ , vel  $\frac{x^3}{a^3} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{a}$  id est  $3\overline{\text{Log } x} - 3\overline{\text{Log } a} \sqcap \overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c} - \overline{\text{Log } a}$ ,

5 seu  $3\overline{\text{Log } x} - \overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c} \sqcap 2\overline{\text{Log } a}$ .

Videndum an addi possint vel subtrahi duo Logarithmi  $\overline{\text{Log } x}$  et  $\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}$ . Pro  $c$  pone  $\frac{b}{a}e$ , fiet:  $\overline{\text{Log } x} + \overline{\text{Log } b} - \overline{\text{Log } a} + \overline{\text{Log } x + e} \sqcap 2\overline{\text{Log } a}$  seu  $3\overline{\text{Log } x} + \overline{\text{Log } x + e} \sqcap$

$3\overline{\text{Log } a} - \overline{\text{Log } b}$ . Jam  $x + c \sqcap \frac{1}{\frac{1}{x+c}}$  et  $\frac{1}{x+c} \sqcap \frac{c}{x+c} \smile c$ . et  $\frac{c}{x+c} \sqcap \frac{c}{x} - \frac{c^2}{x^2} + \frac{c^3}{x^3} - \frac{c^4}{x^4}$ .

$\frac{x+c}{x} \sqcap 1 + \frac{c}{x}$ .

1 trium (1) numero (2) quantitatum  $L$  2f. incognita, (1) semper (2) reduci  $L$  3f. formare (1) hoc modo: (2) analogiam  $L$  4 est (1) logarithmus (2)  $3\overline{\text{Log } x} - 3\overline{\text{Log } a}$   $L$  6 vel subtrahi *erg.*  $L$  7f. seu ...  $3\overline{\text{Log } a} - \overline{\text{Log } b}$ . *erg.*  $L$  8 et  $\frac{1}{x+c} \sqcap$  (1)  $1 - \frac{x}{c+x}$  (2)  $x$  (3)  $\frac{c}{x+c} \smile c$ .  $L$

---

4 analogiam: Die angegebenen Gleichungen  $\frac{x^2}{a^2} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{x}$  und  $\frac{x^3}{a^3} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{a}$  weichen von der Ausgangssituation in S. 359 Z. 12 in einem Vorzeichen ab. Leibniz nutzt die zweite Gleichung ebenfalls in S. 364 Z. 3 fälschlicherweise als Umformung von  $x^3 * abx + a^2c \sqcap 0$ . 7 fiet: Leibniz bildet zunächst die Summe aus  $\overline{\text{Log } x}$  und  $\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}$ . Die bis Z. 8 bei der Gleichsetzung mit  $2\overline{\text{Log } a}$  nötigen Anpassungen führt er nur unvollständig durch.

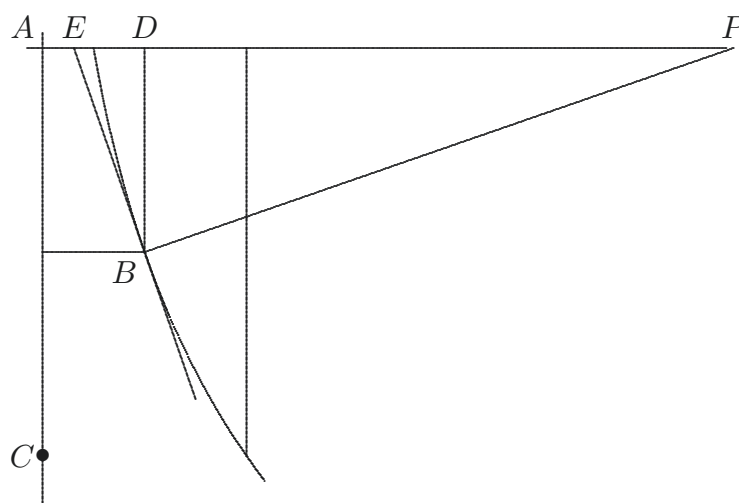
## 59. LOGARITHMICA CURVA

[noch]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 35 V 14 Bl. 18–19. 1 Bog. 2° mit einem rechteckigen Ausschnitt von etwa [noch] cm Höhe über die volle Seitenbreite in der unteren Mitte von Bl. 19. 2 S. auf Bl. 18, 15 Zeilen auf Bl. 19 r° unten, 15 Zeilen auf Bl. 19 v° unten. Auf dem übrigen Bogen N. 58. — 5  
Cc 2, Nr. 986 tlw., 988 u. 990.

Datierungsgründe: Die Anordnung der beiden Texte auf dem Bogen lässt darauf schließen, dass N. 59 vor N. 58 begonnen wurde. Da Leibniz in N. 59 ab S. 364 Z. 1 auf Inhalte von N. 58 zurückgreift, ist davon auszugehen, dass N. 58 vor N. 59 beendet wurde, sodass die Abfassung von N. 58 in die Zeit der Arbeiten an N. 59 fällt. Beide Stücke weisen eine inhaltliche Nähe zum Stück N. 38 auf, dessen nachträglich ergänzter Titel ähnlich zu dem von N. 59 gewählt ist. [noch] 10

Logarithmica Curva  
Solutio aequationum per logarithmos



[Fig. 1]

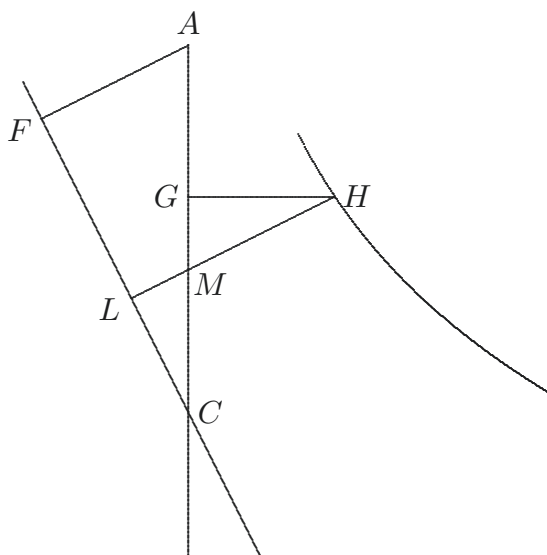
15

14–362,1 logarithmos (1) Linea Logarithmica data atqve descripta rectam invenire, qvae curvam in dato (2) Dato (a) Log (b) Lineae *L*

Dato Lineae Logarithmicae puncto  $B$  aliquo, et Asymptoto, invenire rectam quae in dato puncto curvam tangat. Fiat ut  $ED$  ad  $DB$  ut est 1 ad  $\frac{1}{AD}$  seu ut  $AD$  ad 1.

Ergo  $ED \propto \frac{DB \cdot AD}{1}$ , seu  $\frac{t}{y} \propto \frac{x}{1}$  ponendo  $ED \propto t$ .  $DB \propto y$ .  $AD \propto x$ . Jam  $tp \propto y^2$ , seu  $t \propto \frac{y^2}{p}$ . Ergo hunc valorem priori inserendo fiet:  $\frac{y^2}{yp} \propto \frac{x}{1}$  seu  $\frac{y}{p} \propto \frac{x}{1}$ . seu  $p \propto \frac{1y}{x}$ . Habetur

5 autem summa Omn.  $p$ . nempe  $\frac{y^2}{2}$ . Summa ergo omnium Logarithmorum per numeros suos divisorum (: nam  $y$  est Logarithmus,  $x$ . numerus :) haberi potest. Sed et cubi et quadrato-quadratica etc. omnium  $p$ . methodo Barroviana haberi possunt. Eodem modo et aliarum figurarum ad analysin irrevocabilium habebuntur quadratrices, et vicissim harum quadratricium tangentes; seu differentiae.



[Fig. 2]

10

5f. *Am Rand:* Subest nonnihil erroris, numerus est  $\frac{1}{2}x$ .

1 et (1) axe (2) Asymptoto  $L$  2 ut (1) AD ad D (2) ED  $L$  4 ergo (1) jungendum hu (2) hunc  $L$  5 nempe (1)  $\frac{1}{2, t^2}$  (2)  $\frac{y^2}{2}$   $L$

7 methodo Barroviana: I. BARROW, *Lectioes geometricae*, 1672, S. 85–88 [Marg.]; vgl. VII, 5 N. 43 S. 304–306.

Sit  $AC$  lineae logarithmicae Asymptota sumatur alia quaelibet recta  $FC$  quae eam secet in puncto  $C$ . ita ut  $AF$ .  $FC$  sint datae. Sit  $AF \sqcap f$ .  $FC \sqcap c$ .  $AG \sqcap y$ . seu logarithmus,  $GH \sqcap x$ . seu numerus. Quaeritur ratio inter  $HL \sqcap z$ . et  $CL \sqcap \omega$ . Ante omnia  $AC \sqcap \sqrt{f^2 + c^2}$ .  $GC \sqcap \sqrt{f^2 + c^2} + x$ . Erit  $HM \sqcap \frac{y\sqrt{f^2 + c^2}}{c}$   $\frac{LM}{\omega} \sqcap \frac{f\omega}{c}$ .

$$CM \sqcap \sqrt{\omega^2 + \frac{f^2\omega^2}{c^2}} \sqcap \frac{\omega}{c} \sqrt{c^2 + f^2}. \quad 5$$

$$GM \sqcap \frac{yc}{f}.$$

$$\text{Ergo } GC \sqcap \frac{yc}{f} + \frac{\omega}{c} \sqrt{c^2 + f^2} \sqcap \sqrt{f^2 + c^2} + x.$$

Et quia ex natura Logarithmorum vel progressionis Geometricae:  $x \sqcap a^y$ . fiet aequatio:

$$\frac{c}{f}y + \frac{\sqrt{c^2 + f^2}}{c}\omega \sqcap \sqrt{f^2 + c^2} + a^y. \quad 10$$

$$\text{Denique } LM + MH \sqcap z. \text{ seu } \frac{\sqrt{f^2 + c^2}}{c}y + \frac{f}{c}w \sqcap z.$$

Ope igitur harum duarum ultimarum aequationum alterutra incognitarum  $y$  vel  $w$ .

eliminari potest. Eliminataque  $w$  substituto ejus valore  $\frac{c}{f}z - \frac{\sqrt{f^2 + c^2}}{f}y$  fiet:

$$\frac{c}{f}y + \frac{\sqrt{c^2 + f^2}}{f}z - \frac{f^2 + c^2}{fc}y \sqcap \sqrt{f^2 + c^2} + a^y.$$

Utile foret figuram invenire, in qua  $x \sqcap a^{\frac{y}{a}} + b^{\frac{y}{a}+1} + c^{\frac{y}{a}+2} + d^{\frac{y}{a}+3}$  etc. quousque scilicet continuare liceat, sed talem figuram non ausim sperare. 15

1 AC (1) axis (2) lineae logarithmicae | Asymptotos ändert Hrsg. | (a) sive (b) sumatur L 4 Erit

$$(1) \frac{HM}{x} \sqcap \frac{\sqrt{f^2 + c^2}}{c} \quad (2) HM \sqcap (a) \frac{x\sqrt{f^2 + c^2}}{c} \quad (b) \frac{y\sqrt{f^2 + c^2}}{c} L \quad 15 \quad x \sqcap (1) a^y + b^{y+1} + c^{y+2} + d^{y+3}$$

$$(2) a^{\frac{y}{a}} + b^{\frac{y}{a}+1} + c^{\frac{y}{a}+2} + d^{\frac{y}{a}+3} L$$

2f. AG ... numerus: Leibniz vertauscht  $x$  und  $y$  im folgenden Ansatz von  $GC$  und  $HM$ . Dadurch und durch weitere Unachtsamkeiten wird die weitere Rechnung bis Z. 14 beeinträchtigt.

$x^3 + abx + a^2c \sqcap 0$ . vel  $xy + \frac{b}{a}x^{y-2} + c \sqcap z$ . Quaeritur  $x$ . Quaeritur scilicet applicata lineae logarithmicae, ad cuius logarithmi triplum applicata aequetur lineae.

Aequatio  $x^3 * abx + a^2c \sqcap 0$ . Unde Analogia:  $\frac{x^3}{a^3} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{a}$ .

Unde aequatio Logarithmica:  $\overline{\overline{\overline{\oplus} 3 \overline{\overline{\overline{\text{Log } x}}}} \ominus \overline{\overline{\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}}}} \sqcap \overline{\overline{\overline{\ominus} 2 \overline{\overline{\overline{\text{Log } a}}}}}$ .

5 Videamus an ne liceat ad Logarithmos logarithmorum:  $\frac{1}{1} \sqcap \frac{-2 \overline{\overline{\overline{\text{Log } a}} + \overline{\overline{\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}}}}}{+3 \overline{\overline{\overline{\text{Log } x}}}}$ .

Ergo  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } : -2 \overline{\overline{\overline{\text{Log } a}} + \overline{\overline{\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}}}}}} \sqcap \overline{\overline{\overline{\text{Log } : 3 \overline{\overline{\overline{\text{Log } x}}}}}}$ . Sed nihil hinc lucis.

Omnis formula ad quosdam factores reduci potest, in quibus non nisi  $x$ . simplex cum quadam cognita.

10 Si sit  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}}}$ . semper potest reduci ad  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } x + e}}}$  ponendo enim  $\frac{b}{a}e \sqcap c$ . sive  $e \sqcap \frac{ac}{b}$ . Fiet  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } \frac{b}{a}x + c}} \sqcap + \overline{\overline{\overline{\text{Log } b}} - \overline{\overline{\overline{\text{Log } a}} + \overline{\overline{\overline{\text{Log } x + e}}}}}}$ .

Ex eadem Aequatione Analytica plures elici possunt Logarithmicae. Ut Aequatio proposita, etiam in hanc Analogiam resolvi potest:

$\frac{x^2 + ab}{ac} \sqcap \frac{-a}{x}$ . Ponendo  $ab$  esse quantitatem negativam  $\sqcap -af$ . fiet  $x^2 + ab \sqcap x^2 - af$ .

15 Jam  $x^2 - af \sqcap x + \sqrt{af} \wedge x - \sqrt{af}$ . Unde fiet aequatio Logarithmica  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } x + \sqrt{af}}}} + \overline{\overline{\overline{\text{Log } \mp x \mp \sqrt{af}}}} - \overline{\overline{\overline{\text{Log } a}} - \overline{\overline{\overline{\text{Log } c}}}} \sqcap \overline{\overline{\overline{\text{Log } - a}} - \overline{\overline{\overline{\text{Log } x}}}}$ . Explicando  $\mp$  per  $+$  et  $\mp$  per  $-$  et transponendo aequationem habebimus:

1 vel (1)  $x^{y+}$  (2)  $x^y +$  (a)  $abx^{y-2}$  (b)  $\frac{b}{a}x^{y-2} +$  (aa)  $c^{y-0}$  (bb)  $c^0$  L 1 quaeritur  $x$ . (1) est illa cuius Loga (2) quaeritur L 2 logarithmicae, (1) Cuius triplus (2) ad L 3 f.  $\frac{\frac{b}{a}x + c}{a}$  (1) Unde Logarithmus (2) Unde L 12 f. potest: (1)  $\frac{x^2}{a^2}$  (2)  $\frac{x^2 + ab}{ac} \sqcap \frac{-a}{x}$ . L 14 f.  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } x + \sqrt{af}}}} +$  (1)  $\overline{\overline{\overline{\text{Log } x - \sqrt{af}}}} (2) \overline{\overline{\overline{\text{Log } \mp x \mp \sqrt{af}}}} L$

3 Analogia:  $\frac{x^3}{a^3} \sqcap \frac{\frac{b}{a}x + c}{a}$  entsteht nicht aus der zuvor angegebenen Gleichung, entspricht jedoch derjenigen, die Leibniz in S. 360 Z. 4 nutzt. Im folgenden tritt ein weiterer Vorzeichenfehler auf. 16 habebimus: Die Unachtsamkeit bei der Umformung beeinträchtigt die nachfolgende Argumentation bis S. 365 Z. 7 nicht.



Videndum an aliquod contribuere possit Hyperbolae  $\square$ tura ut aequatio est  $-3\overline{\text{Log } x} + \overline{\text{Log } x + e} \square$  cognitae quantitati, ad quam aequationem quaelibet aequatio Cubica reduci potest. Ergo sit Hyperbola cujus centrum  $A$ . vertex  $E$ . latera  $AB \square BE$ .  $ABE$  ang. rect.  $AC \square x$ .  $CF \square e$ . cognita. Ordinatae  $FG, CD, BE$ . Debet spatium  $EBCDE$  bis  
 5 ablatum in spatio  $DCFGD$  semel relinquere quantitatem cognitae aequalem, quaeritur punctum  $C$ .

Videndum ut formulae omnes aequationum demta incognita in compositas ex his:  $x$ .  $x + b$ .  $x + c$ .  $x + d$ . resolvi possint, v. g.  $x \wedge x + b \wedge x + d \square a^2e$ . Fiet enim:  $x^3 + bx^2 + dbx - a^2e \square 0$ . Videamus an conferri possit datae:  $x^3 + lx^2 + amx - a^2e \square 0$ . Fiet  
 +  $d \dots$

10  $b + d \square l$  seu  $d \square l - b$  adeoque  $db \square lb - b^2 \square am$ , unde fit aequatio  $b^2 - lb [+ ] am \square 0$ . uno gradu inferior, ideoque solubilis et semper hoc modo quaelibet aequatio comparari potest aequationi cujus incognitae partes hoc modo productae, cujus rei ratio est, quia idem est ac si omissa  $a^2e$ , aequationem  $x^3 + lx^2 + amx$ , id est  $x^2 + lx + am$ , factae ex radicibus comparares, ubi semper ejusdem gradus redit aequatio. Alia via semper efficere poteris,  
 15 ut aequatio Cubica resolvatur in terminos factorum simplicium, ope solius aequationis simplicis, ut si ponas:  $x^3 \square -lx^2 - amx + a^2e$ . ubi tantum formula  $-lx^2 - amx + a^2e$ . resolvenda in factores, quid ope aequationis rationalis seu simplicis, seu uno gradu ea formula inferioris fieri potest. Eodem modo quadrato-quadratica per quadraticas resolveretur in factores simplices, imo forte adhuc per simplicem, methodo Slusiana analogiarum.  
 20 Posito jam hoc modo propositam aequationem in factores simplices resolutam, nihil aliud produceretur  $\overline{\text{Log } x}$ .  $\dagger \overline{\text{Log } x + h}$ .  $(\dagger) \overline{\text{Log } x + g}$  etc.  $\square ((\dagger))$  cognitis. Et omnibus cognitis ad unam communem mensuram redactis tentando facilius inveniretur  $x$ . Sed quoniam tentare incommodum, ideo rite quadam motus adhibita effici poterit, ut semper summa omnium logarithmorum, ejusmodi, quocumque modo sumatur  $x$  haberi possit aequalis  
 25 recta et apparebit, quando ea accedat ad datam; ibi vero postea invento semel puncto

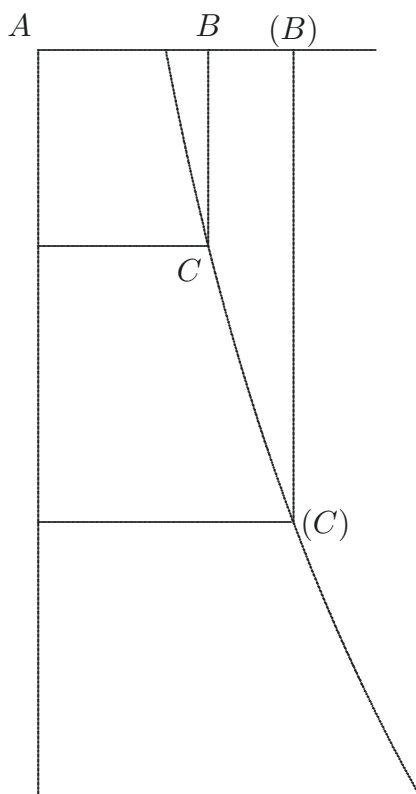
6 f. punctum C. (1)  $x$ .  $x^2$  (2) Non video quid (3) Videndum  $L$  8 v. g. (1)  $x \wedge x + b \wedge x + c \wedge x + d$   
 (2)  $x \wedge x + b \wedge x + c$  ändert Hrsg. |  $\square L$  11 quaelibet (1) formula reduci (2) aequatio  $L$  12 aequationi  
 (1) fact (2) cuius  $L$  13 f. radicibus (1) comparab (2) comparares, ubi semper (a) eadem (b) ejusdem  $L$   
 16 ponas: (1)  $\frac{x^3}{1}$  (2)  $x^3 L$  21  $\square ((\dagger))$  cognitis erg.  $L$  24 logarithmorum, (1) rectae (2) ejusmodi  $L$

19 methodo Slusiana: vgl. R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabium*, 1659, 2. Aufl. 1668, S. 84–88. 23 motus: vgl. N. 16 und N. 24.



circiter exactissime in quadam grossiore modo descripta logarithmica, mox exactissime in subtilissime descripta, reliquum tentando, momento absolvendo. *Les affirmatives par leur chainette, meneront une regle, les negatives rameneront un point sur la regle et il semble que c'est chose assez aisée.* Resolvere omnes aequationes in Analogias simplices:  $AB. A(B)$  nombres,  $BC. (B)(C)$  logarithmes.

5



[Fig. 4]

Hoc etiam ex hac methodo commodum oritur, quod ita multiplicationes nullae sunt ipsius incognitae, per lineas quasdam datas, quod antea more me districtum tenerat. Et credo semper simplicibus aequationibus subsidiariis, resolvi posse formulas in ejusmodi

1 exactissime (1) postea id (2) in  $L$  1 mox (1) exactius (2) exactissime  $L$  2 descripta, (1) abso (2) reliquum  $L$  3 chainette, (1) meneront, les (2) meneront  $L$  4 aisée, (1) de resoudre t (2) Resolvere  $L$  8 incognitae, (1) unde (2) per  $L$  9 aequationibus (1) inde (2) subsidiariis  $L$

---

6 Fig. 4: vgl. S. 89 Z. 12 Fig. 1.

factores simplices, quia facile in factores uno gradu inferiores resolvuntur, et hi rursus facile in tales v. g.  $x^4 + bx^3 + acx^2 + a^2dx$ . potest intelligi facta ex  $x^3 \cdot x^2 \dots x \cdot x + \dots$  et  $x^3$  etc. rursus facta ex  $x^2$  etc.  $\cdot x + \dots$  et ita porro.  $x^2 + bx \sqcup x \cdot x + d \sqcap x^2 + dx$ .  $\parallel x^3 + bx^2 + acx \sqcup x^2 + dx \cdot x + e \sqcap x^3 + dx^2 + edx$ . venit ad aequationem quadraticam.  $+ e \dots$

- 5 Ergo  $e \sqcap \frac{ca}{d}$ .  $d \sqcap b - \frac{ca}{d}$ . Et  $x^4 + fx^3 + aex^2 + a^2fx \sqcup x^3 + bx^2 + acx \cdot x + g$ .  $\sqcap x^4 + bx^3 + acx^2 + acg[x]$  venit ad aeq. Cubicam.  $b \sqcap f - g$ .  $c \sqcap ae - fg + g^2 \sim a$ . Ita  $+ g \dots + gb \dots$

video non hoc semper facile obtineri posse hanc in factores inquisitionem.

$$x^2 + bx + ac \cdot x^2 + dx \sqcap x^4 + bx^3 + acx^2 \quad \sqcup x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx \\ + d \dots + bd \dots + acdx$$

$$b \sqcap l - d. \quad ac \sqcap am - dl + d^2. \quad amd - d^2l + d^3 \sqcap a^2n.$$

- 10 Satius ergo quadrato-quadraticam resolvi in duas quadraticas quam in Cubicam et simplicem. Nam Cubica rursus ope quadraticae resolvenda in quadraticam et simplicem, ut quadratica ope simplicis resolvitur in simplicem. Videndum an non aliquid praestari possit, aequationem discernendo, ut pro  $x^3 + bx^2 + acx + a^2d \sqcap 0$ . ponendo:  $\frac{b}{a}x^3 + fx^2 + acx + a^2h \sqcap \frac{e}{a}x^3 + fx^2 + agx \begin{matrix} + a^2h \\ - a^2d \end{matrix}$ . Ita spes est cubicam resolvi posse in simplicem  $+ ag \quad - b \dots$

- 15 et quadraticam per solam simplicem, et forte altiores quoque semper ad inferiores. Hoc si generaliter succederet foret pulcherrimum et summae ad logartihmos utilitatis.

1 simplices, erg. L 2 v. g. (1)  $x^4 + bx^3 + cx^2 + a^2dx + a^3e$ . (2)  $x^4 + bx^3 + acx^2 + a^2dx$  (a) fieri (b) potest intelligi facta ex (aa)  $x^3 \dots$  (bb)  $x^3 \cdot x^2 \dots x L$  3 ex (1)  $x^3$  (2)  $x^2 L$  3 porro (1) praeterea potest hoc modo fieri:  $x \cdot \frac{n}{a}x + d \cdot \frac{r}{a}x + e \cdot \frac{s}{a}x + f$  etc. productumque comparandum datae formulae (2)  $x^3$  (3)  $x^2$  | + erg. Hrsg. |  $bx$  (a) | + nicht gestrichen |  $ac + cd$  (b)  $\sqcup L$  4 venit  $\dots$  quadraticam erg. L 5 ergo (1)  $c \sqcap$  (2)  $e \sqcap \frac{ca}{d}$ .  $d \sqcap b - \frac{ca}{d}$ . (a) Ergo  $x^3 + bx^2 + acx \sqcap x \cdot x + b - c$ ,  $\cdot x + c$  (b) et L 6 venit  $\dots$  Cubicam erg. L 6 f.  $c \sqcap |ae - fg - g^2 \sim a$  ändert Hrsg. | (1) quod jam (2) ita | video erg. | non L 7 f. inquisitionem. (1)  $x^2 \quad dx + dc \cdot x^2 + bx$  (2) |  $x^2 \quad bx \quad ac \cdot x^2 + dx$  ändert Hrsg. |  $\sqcap L$  10 f. et (1) quad (2) simplicem L 13 ponendo: (1)  $\frac{e}{a}x^3$  (2)  $\frac{b}{a}x^3 + L$

$\frac{b}{a}x + c. \quad \frac{d}{a}x + e.$  Pone  $x \sqcap \frac{f}{a}y + g.$ fiet:  $\frac{bf}{a^2}y + \frac{b}{a}g$  pro  $\frac{b}{a}x + c.$  Et item pro  $\frac{d}{a}x + e$   
 $+ c$

fiet:  $\frac{df}{a^2}y + \frac{dg}{a}.$  Sit  $\frac{\frac{bf}{a^2}y + \frac{bg}{a}}{\frac{df}{a^2}y + \frac{dg}{a}} \sqcap \frac{h}{a}.$  Debet esse  $\frac{bf}{a}y \sqcap \frac{dfh}{a^2}y.$  adeoque  $h \sqcap \frac{ba}{d}.$  Ita reducta

fractione evanescet  $y.$  Jam  $bg + ca \sqcap \frac{dg}{a} \sim \boxed{h} \frac{ba}{d}.$  seu  $\boxed{bg} + ca \sqcap \boxed{gb} + \frac{eba}{d}.$  ergo  
 $+ e$

patet arbitrarias  $f. g.$  evanescere, et ut ad unam mensuram incognitos continente reduci  
 possint debere esse  $c \sqcap \frac{eb}{d}$  et tunc uno per alterum diviso priore per posterius provenire 5

$\frac{h}{a}$  seu  $\frac{b}{d}.$  Haec tamen utilia saepe, ut quando fieri potest eligamus ita analogias ut res  
 procedat. Item si una sit quadratica formula cujus logarithmus quae resolubilis in alias.

1 fiet: (1)  $\frac{bf}{a^2}x$  (2)  $\frac{bf}{a^2}y$  L 1 item erg. L 3 Jam (1)  $\frac{bg}{c}$  (2)  $bg + ca$  L 4 patet (1) ut (2)

arbitrarias L 6 seu  $\frac{b}{d}.$  (1) Aliter si facias (a)  $\frac{bf}{a}$  (b)  $\frac{h}{a} \sqcap (c)$  et  $\frac{b}{d}$  (2) si his habeantur (3) Haec L

60. L'INSTRUCTION DE LONGIMETRIE PAR UNE STATION  
4. September 16[76]

**Überlieferung:** A Abschrift von unbekannter Hand nach einer nicht aufgefundenen Vorlage: LH 37 IV Bl. 11. 1 Bl. 1<sup>o</sup>, das auf der Rückseite quer beschrieben wurde. Das Bl. wurde zu einem Bog. 2<sup>o</sup> gefaltet und im Falz getrennt. — Anders als die Bemerkung von Leibniz vermuten lässt, dürfte die Abschrift nicht von Candor selbst angefertigt worden sein. Duktus und Orthographie des Schreibers stimmen nicht mit denen in den überlieferten Textzeugen aus Candors Korrespondenz mit Leibniz überein. Außerdem war der Kopist mit der französischen Sprache nicht gut vertraut. Leibniz hat die zahlreichen Verschreibungen größtenteils korrigiert sowie eine Auslassung ergänzt. Weitere, von Leibniz nicht korrigierte, offensichtliche Verschreibungen werden stillschweigend berichtet.  
Cc 2, Nr. 00

L'Instruction de Longimetrie par une Station du Corps  
et de l'oeil par le miroir Immobile

Sa construction.

Cet Instrument n'est qu'un quart de 90 dont le demidiametre est d'un pié ou de 2 pour le mieux, qui sont icy représentéz par 2 pouces sur le coté  $IE$ , le quel coté doit etre tenu ou posé orizontalement: Au centre de ce quart est posé, aussy orizontalement un petit miroir marque  $E$ . Sur la circonference  $IK$  court une pinule qui s'avance autant que le centre du miroir fixe, il faut que cette pinule se trouve de tous côtéz sur le côté  $KE$  se met une petite Lame qui se hausse au dessus de  $K$  quand il en est besoin, Et quelle aye ou une pointe ou un petit bouton ou un petit trou.

---

14 *Dazu am unteren Rand von Leibniz' Hand:* L'inventeur de cet instrument est le R. P. Charles Bourgoïn religieux Augustin de la Communauté Reformée de Bourges, qui me l'a communiqué à Paris l'an 1676. le 4 septembre. C'est M. Candor, professeur des langues modernes à Wolfenbutel, qui a écrit tout cela, et je l'ay fait copier de sa main.

25 1667 *LiA ändert Hrsg.*

---

25 Candor: G. Lereimate, gen. Candor.



## Son usage.

Il faut poser ce quart de sorte que le coté  $IE$  soit parallele à l'orizon, et prendre la mesure de sa distance jusques à la terre plane, Et le disposer en sorte que l'oeil  $A$  regardant par la pinule mobile sur la circonference  $IK$  puisse voir l'Image de l'extremité de la hauteur (comme  $B$ ): au centre du miroir plan, ainsy que l'oeil  $A$  le voit, puis du point du milieu de la pinule il faut mener le rayon  $AE$  avec quelque crayon qui se puisse effacer, mais auparavant il faut mirer le point  $B$  par la meme pinule, et en meme lieu de la circonference, Et marquer le point par où passe le rayon sur le côté  $KE$ , comme  $AB$  quoy passe par le point  $C$ , ce qui se peut faire en remuant la petite lame qui coule; contre  $KE$ , En y mettant quelque petite pointe. Apres quoy il faut aussy mener  $AC$  avec le crayon, bien delicat, puis mener  $AG$  parallele à  $IE$ ; apres quoy il faut porter la distance  $CG$  en  $M$  depuis  $G$ : puis de  $M$  mener  $MD$  parallele a  $AE$ , puis tirer  $DC$ ; cela etant tout tracé avec le crayon vous avéz le petit triangle  $ACD$  proportionel à celui qu'auroient fait les deux stations réelles l'une en  $A$  et l'autre en  $H$ , lequel auroit été  $ABH$ ; apres cela mesurez  $AD$ , et voyez combien de fois la d.  $AD$  est contenue en  $AG$  qui est la moitié de la distance de la seconde station, vous connoitrez la distance entiere, et le coté d'embas du grand triangle: mesurez aussy  $AC$  et  $DC$  et  $CG$  vous conoitrez la hauteur  $B$  et le point  $L$ : mesurez la distance de  $A$  vers la terre et l'ajoutez à  $L$ , ce sera tout fait.

## Demonstration.

Tout ce qui est hors du quart de 90 ne sert que pour la demonstration. Le rayon d'Incidence, comme  $BE$  fait tousjours son rayon de reflexion faisant un angle égal au sien avec les corps opaque en reflechissant, C'est un principe qui parle pour premier, neantmoins il se peut prouver, Car si l'object, etoit  $K$  et que  $K$  fut un Luminaire et que son rayon tombait sur le miroir  $E$ , ce rayon luy seroit perpendiculaire. Il ny a point de raison pourquoy son rayon de reflexion iroit plutot d'un côté que de l'autre. Et la raison pourquoy il retourneroit vers  $K$  est que le miroir  $E$  luy est opposé perpendiculairement. C'est donc la situation ou disposition du corps reflechissant qui cause la situation du rayon reflechi; si donc il decline de cette situation de perpendiculaire, de 10 deg. par ex. il faut necessairem. que le rayon de reflexion decline d'autant: mais de quelle ligne? De la perpendiculaire; De sorte que si  $K$  (par ex.) etoit à 10 deg. plus loing de  $A$ , son rayon de

28 f. par ex. | est tant ändert Hrsg. | necessairem. A

reflexion sur le miroir  $E$ , remontant passeroit à 10 deg. pres de  $EK$ : parceque ledit miroir seroit decliné de 10 deg. du rayon d'Incidence, lequel rayon decline aussi de 10 degréz du rayon perpendiculaire  $KE$ . Car c'est un axiome que plus une chose est éloignée de l'état auquel elle fait un certain effect, plus aussy et à proportion son effect est éloigné de l'état auquel estoit son premier effect avant cet éloignement. Cela donc étant je dis que le petit triangle  $ACD$  est proportionel au grand  $ABH$ , qui auroit été trouvé si l'on avoit fait deux Stations réelles aux points  $A$  et  $H$ . J'entens que l'oeil eût esté posé aux points  $A$  et  $H$ , Car par la 2 du 6. Si l'on mene une ligne parallele, à l'un des costéz du Triangle, Icelle coupera les autres costéz d'iceluy proportionelment: Or est il que  $CD$  est parallele au côté  $HB$  du trianglé  $ABH$ , donc elle coupe les cotéz  $AB$  et  $AH$  proportionnellement. De plus ces deux triangles sont equiangles puis qu'ils ont les costéz proportionaux, par la 5. 6. Mais vous me demandez quel moyen il y aura de mener la ligne;  $CD$  parall. à  $BH$ , veu que le rayon d'Incidence  $BE$  est hors de l'Instrument? Je reprendray qu'apres avoir mené  $MD$  il ne faut que mener  $CD$ . Car  $M$  etant aussy éloignée de  $G$  que  $C$ , Si vous menez  $MF$  paral. à  $EB$ , puis  $FC$ ; les deux lignes  $CF$  et  $MF$  avec  $CM$  feront la moitié d'un Rhombe, et pour faire l'autre il faudra mener  $MD$  et  $DC$ ; ses deux moitez sont egales et proportionelles, puis qu'étant mises l'une sur l'autre elles conviendroient selon le 8<sup>e</sup> axiome. Le coté  $DC$  sera parallele au côté  $MF$  qui est parall. à  $HB$  prolongée jusques en  $E$ , Donc  $DC$  sera aussy parall. à  $HB$  prolongée en  $E$  puisqu'elle est parall. à celle qui luy est parallele: Mais comme nous ne pouvons pas tirer  $MF$  parall. à  $EH$  ou à  $BH$  prolongée, nous menons  $MD$  parall. à  $EA$  qui est dans nostre Instrument, et nous ne faisons que le demy Rombe  $MDC$ , aussy n'avons nous besoin que de cela, Car si le triangle  $CFM$  estoit renversé sur sa base  $CM$ ; ses deux cotéz tomboient sur  $MD$  et  $DC$ , aussy voyez vous que l'angle de reflexion  $AEI$  etant egal à celuy d'incidence  $NEH$ , et tirant de  $M$  la ligne  $MD$  parallele à  $EA$ , elle se doit terminer en un point également distant de  $G$  que  $F$ , Et que tirant par apres  $DC$ , elle se doit trouver parallele à  $MF$  et à  $EH$ : cela estant, comme  $AD$  sera à  $AH$ , double de  $AG$ , ainsi  $AC$  sera à  $AB$  et  $DC$  à  $HB$ , et comme au triangle  $DCG$ ,  $DG$  sera a  $CG$  ainsy sera  $HL$  à  $LB$ ; Car si vous portéz

26–28 Elle ... sera à  $CG$  erg. *LiA*

---

8 la 2 du 6.: EUKLEIDES, *Elementa*, VI, 2. 12 la 5. 6.: EUKLEIDES, *Elementa*, VI, 5. 18 le 8<sup>e</sup> axiome: EUKLEIDES, *Elementa*, I, Ax. 4 (in zeitgenössischen Ausgaben Ax. 8).

le triangle  $CDG$  l'angle  $D$  sur  $H$ , et  $DG$  sur  $HL$ , il sera aussy proportionel au triangle  $BHL$ , pour la meme raison;

Et comme  $AC$  à  $CG$ , ainsy  $AB$  à  $BL$  partant nous trouvons fort bien tout ce que nous est necessaire dans nostre quart de 90 deg. J'ay marqué les distances par lignes à  
5 cause que ce quart est petit. *Haec sunt paucula donec suggerantur ampliora.*

*Laus Trinitati DEO uni*

3 BI A ändert Hrsg.



61. TEIL EINER GESPRÄCHSAUFZEICHNUNG MIT TSCHIRNHAUS

[Mai 1676]

**Überlieferung:** *LuT* Fragment einer Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XII 1 Bl. 1. Papierstreifen mit leicht geschwungener Unterkante, ca 21,2 × 6,6 cm. 1 S. auf Bl. 1 v<sup>o</sup>. — Auf der Vorderseite VII, 3 N. 59. Cc 2, Nr. 1425 tlw.

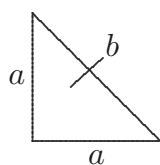
5

Datierungsgründe: Das Stück VII, 3 N. 59 auf der anderen Seite des Blattes trägt das Datum *24. Maii 1676*.

[Leibniz]

$$\sqrt{2} \qquad a \frac{a}{b+c} \quad \text{---} \qquad \sqrt{2aa^2} \qquad \sqrt{ay} \langle \pi x \rangle^2 \qquad 10$$

[Tschirnhaus, um 150° gedreht]



[Fig. 1]

$$\begin{array}{l} \sqrt{2aa} \quad \sqrt[3]{2aa} \\ \sqrt{2aa} \\ a \end{array}$$



[Fig. 2]

15

[Leibniz, um -90° gedreht]

$$\frac{1}{2}$$

---

10  $\sqrt{ay}$ : Der Schnitt, der die Unterkante des Papierstreifens hergestellt hat, verläuft durch die Gleichung. An der Unterkante befindet sich zudem ein kleiner Rest einer Zeichnung, ihr Hauptteil ist abgeschnitten. Das Fragment ist wahrscheinlich durch Zerschneiden einer umfassenderen Aufzeichnung, die Leibniz und Tschirnhaus während eines Gesprächs gemeinsam angefertigt hatten, entstanden.

62. DIVERSE FIGUREN SOWIE WURZEL AUS  $-3$ 

[Frühjahr 1676]

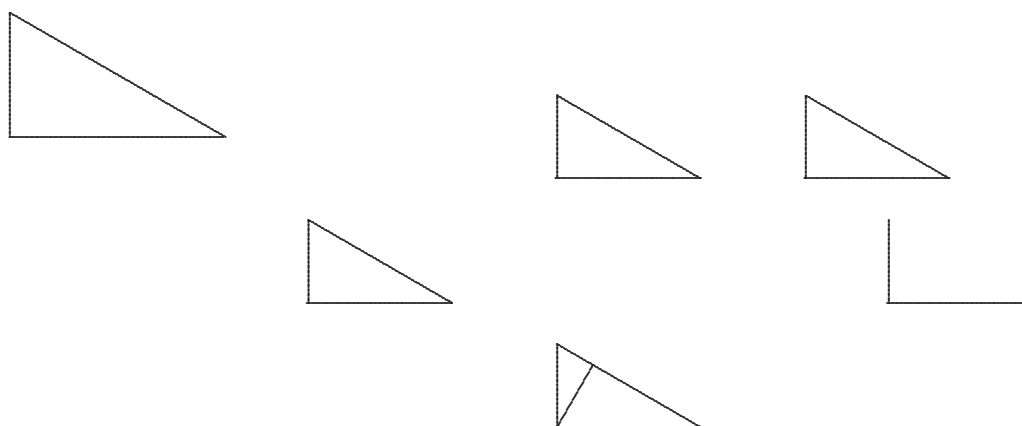
**Überlieferung:** *L* Fragmente: LH 38 Bl. 172. 1 Blatt, ca  $13 \times 22$  cm, an drei Seiten beschnitten, untere Schnittkante unregelmäßig. 1 S. auf Bl. 172 v<sup>o</sup>. Die Schnitte verlaufen zum Teil durch Text oder Figuren. — Auf der Vorderseite VIII, 1 N. 71. Cc 2, Nr. 1188 tlw.

5

10

Datierungsgründe: Das Stück *Trouver les pignons* (VIII, 1 N. 71) auf der Vorderseite wird von den Herausgebern auf Frühjahr 1676 datiert. Den entscheidenden Hinweis auf eine Entstehung in diesem Zeitraum liefern dabei die Fragmente von Rechnungen am Rande jenes Stückes. Diese ähneln stark solchen Rechnungen, die sich auf der Rückseite von LH 4 III 9 Bl. 10 befinden. Auf diesem Blatt wiederum hat Leibniz später das Stück VI, 3 N. 73 niedergeschrieben und mit dem Datum 15. April 1676 versehen. Die Rechnungen auf diesem Blatt müssen vorher entstanden sein, wahrscheinlich also auch die auf der anderen Seite unseres Trägers. — Das Wasserzeichen des Trägers stützt diese Datierung: Es ist für andere Stücke belegt, für welche die Herausgeber eine Entstehung im April 1676 annehmen.

15



[Fig. 1]

16 Am oberen Blattrand, der Länge nach durchgeschnitten:  $x \langle x \rangle x$

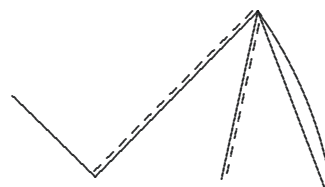
$$\begin{aligned}
 & -a \pi - 1 \hat{+} a \\
 & + \sqrt{-3} \\
 & + \sqrt{-3} \\
 & - \hat{-} 3 \\
 & +
 \end{aligned}$$

$3^2$

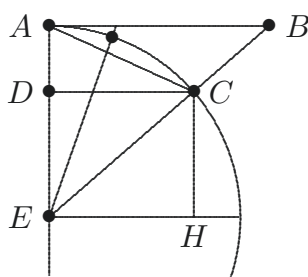
5



[Fig. 2]



[Fig. 3]



[Fig. 4]

5 In der Blattmitte, gestrichen:  $\langle A \rangle ng$

2  $\sqrt{-3}$ : Der imaginäre Ausdruck  $\sqrt{-3}$  ist Teil von Überlegungen, als deren Ergebnis Leibniz die Identität  $\sqrt{1 + \sqrt{-3}} + \sqrt{1 - \sqrt{-3}} = \sqrt{6}$  formuliert. Diese teilt er etwa Huygens in einem wohl Mitte September 1675 abgefassten Brief mit (III, 1 N. 61 S. 278) und leitet sie in einem auf Oktober 1675 zu datierenden Stück, dessen Untertitel *De radicibus realibus, quae interventu imaginariarum exprimuntur* lautet, her (VII, 2 N. 51 S. 683). Ein Jahr darauf stellt Leibniz sie für Oldenburg und Collins erneut auf (III, 1 N. 96<sub>1</sub> S. 625, verfasst am 18.–29. Oktober 1676). Es kann vermutet werden, dass das vorliegende Fragment mit solchen Überlegungen zusammenhängt. 7 Fig. 3: Der untere Teil der Figur ist abgeschnitten. Sie und die folgende Figur gehören möglicherweise zu Überlegungen zur Dreiteilung von Winkeln; vgl. etwa VII, 1 N. 27 S. 189.

## 63. ÜBERLEGUNG ZU BINOMISCHEN AUSDRÜCKEN

[November 1675]

5 **Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 46. 1 Blatt, ca 19,5 × 10,8 cm, rechts unregelmäßig, unten leicht geschwungen beschnitten. 1 S. auf Bl. 46 v<sup>o</sup>. Die Schnitte verlaufen zum Teil durch die Rechnungen. — Auf der Vorderseite VII, 7 N. 58. Cc 2, Nr. 1134 tlw.

Datierungsgründe: Das auf der Vorderseite niedergeschriebene Stück *Imaginarie usus ad comparationem circuli et hyperbolae* (VII, 7 N. 58) trägt das Datum 29. November 1675.

$$\begin{array}{r}
 x^3 \sqcap 3a^2b + 3ab^2 + a^3 \\
 \phantom{x^3 \sqcap} \phantom{3a^2b +} + b^3 \\
 x^2 \sqcap a^2 + 2ab + b^2 \\
 x \sqcap a + b
 \end{array}$$

10

$$\frac{x^3 \sqcap}{\langle x^2 \rangle} \quad \frac{3a^2b + 3ab^2 + a^3}{\langle a^2 + 2ab \rangle + b^2} \quad \frac{-3ab^2 + a^3 \sqcap \odot}{-2b^3} \quad \frac{\phantom{-3ab^2 + a^3 \sqcap \odot}}{a^2 + 2ab + b^2 \sqcap x^2} \quad \wedge x^2 \sqcap x^3$$

$$\underbrace{3bx^2 - 3ab^2 + a^3 \sqcap x^{(3)} - 2b^3}_{\langle \sqcap \odot \rangle}$$

---

12 „ $\wedge x^2$ “: Leibniz rechnet fortlaufend. 14  $\sqcap \odot$ : Der unterhalb der geschweiften Klammer liegende Teil der Betrachtung ist abgeschnitten.

## 64. PROPOSITIONES DE TRIANGULIS RECTANGULIS NUMERICIS

[12. – 31. Dezember 1675]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 51. 1 Blatt, ca  $18,5 \times 9,7$  cm, an drei Seiten beschnitten.  $1\frac{1}{3}$  S. 6 Z. auf Bl. 51 r<sup>o</sup>, 8 Z. auf Bl. 51 v<sup>o</sup>.  
Cc 2, Nr. 00

5

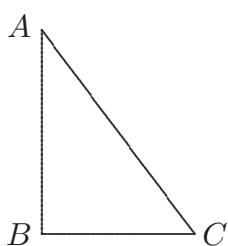
Datierungsgründe: Die hier festgehaltenen Sätze entstammen teils Frénicles postum erschienenem *Traité des triangles rectangles en nombres*, teils knüpfen sie an dort formulierte Sätze an. Das Manuskript von Frénicles *Traité* bereitet Mariotte nach dessen Tod im Januar 1675 für den Druck vor, und er macht es Leibniz noch vor der Veröffentlichung zugänglich. Am 12. Dezember 1675 verwendet Leibniz Ergebnisse hieraus, als er das ihm am Tag zuvor von Arnauld angetragene Problem behandelt, eine allgemeine Regel zu formulieren, mit der sich die pythagoreischen Tripel finden lassen (III, 1 N. 69). Zwei Teile dieser Studie betitelt Leibniz mit *De triangulo rectangulo numerico*, was den Bezug auf Frénicles Werk verdeutlicht. Das wesentliche Ergebnis der Studie findet sich direkt am Anfang unserer Notiz, diese ist also nach jener entstanden. Unsere Notiz steht auch mit fünf weiteren Stücken, die allesamt auf Dezember 1675 zu datieren sind, in einem engen inhaltlichen Zusammenhang: Als Vorarbeiten zu III, 1 N. 69 sind die Stücke VII, 1 N. 81 u. 82 zu betrachten; insbesondere in N. 82 verwendet Leibniz eine Reihe an Definitionen und Sätzen aus dem *Traité*. Dem ersten der in unserer Notiz festgehaltenen vier Sätze widmet Leibniz zwei Beweisversuche (VII, 1 N. 83 u. 84). Den Ansatz zum zweiten der vier Sätze notiert Leibniz auch in einer gemeinsam mit Tschirnhaus angefertigten Gesprächsaufzeichnung (VII, 2 N. 61). Dort skizziert er zudem ein rechtwinkliges Dreieck mit ganzzahligen Seitenlängen. Unsere Notiz stammt wohl aus derselben Phase wie diese fünf Stücke und dürfte daher noch im Dezember 1675 entstanden sein.

10

15

20

[Prop. I]



[Fig. 1]

$AB \sqcap b^2 - d^2$ .  $BC \sqcap 2bd$ .  $AC \sqcap b^2 + d^2$ . Latera  $\triangle^{\text{li}}$  Rectanguli numerici. Area Trianguli  $\triangle^{\text{li}}$  erit  $b^3d - bd^3$ . Ait Fréniclus non posse aequari quadrato, et hanc aequationem  $b^3d - bd^3 \sqcap x^2$  esse in numeris impossibilem. Sit  $x \sqcap be + de$ , fiet:  $b^3d - bd^3 \sqcap b^2e^2 + 2bde^2 + d^2e^2$ , et dividendo utrobique per  $b+d$ , fiet aequatio haec:  $b^2d - bd^2 \sqcap e^2b + e^2d$ , aequatio impossibilis et  $b^2d - bd^2 \sqcap b+d$  aequatio rursus impossibilis in numeris.

25

23  $AB \dots b^2 + d^2$ : Dieses Bildungsgesetz für pythagoreische Tripel formuliert Leibniz in III, 1 N. 69, S. 324. 24 Fréniclus: B. FRÉNICLE DE BESSY, *Traité des triangles rectangles en nombres*, 1676, prop. 39, S. 100–103 [Marg.]. Leibniz versucht sich in VII, 1 N. 83 u. 84 an einem Beweis des Satzes.

[Prop. II]

$$x^4 - y^4 \sqcap$$

$$x^2 - y^2 \wedge x^2 + y^2$$

$$x - y \wedge x + y, \wedge x^2 + y^2 \sqcap \text{quadrato}$$

5      Impossible est differentiam quadrato-quadratorum esse quadratum.

[Prop. III]

Impossible est, si duo quadrati faciunt quadratum, illum quadratum junctum alterutri eorum facere rursus quadratum.

[Prop. IV]

10      Impossible est trium quadratorum progressionis Arithmeticae differentiam esse quadratum.

7f. *Darüber:* 16 + 9  $\sqcap$  2510f. *Darunter:* 1. 4. 9. 16.

30	16
	64
	<u>10</u>
	90

5 est (1) differentiarum (2) differentiam  $L$       7 si (1) qva (2) duo (a) quadrata (b) quadrati (aa) faciant (bb) faciunt  $L$

---

1 Prop. II: Der Satz entspricht der *conséquence* IV von prop. 39; ebd., S. 108f. Aus ihm lässt sich der Fall  $n = 4$  des Großen Fermatschen Satzes ableiten. Leibniz lässt hier lediglich Frénicles Angabe weg, dass das einfache Quadrat ungerade sein soll. — Vgl. auch die Gleichung  $y^4 - x^4 \sqcap z^2$ , die Leibniz in einer während eines Gesprächs mit Tschirnhaus entstandenen Aufzeichnung notiert (VII, 2 N. 61 S. 746 Z. 7).      6 Prop. III: Der Satz lässt sich leicht aus dem Bildungsgesetz pythagoreischer Tripel in S. 379 Z. 23 ableiten.      9 Prop. IV: Auch diese Aussage lässt sich aus prop. 39 ableiten. Sie ist äquivalent mit deren *conséquence* V; ebd., S. 109.

65. DIVERSES CONSIDÉRATIONS MATHÉMATIQUES, NOTAMMENT SUR  
LA COURBE DE BERTET ET SUR UN CANAL À SECTION TRAPÉZOÏ-  
DALE

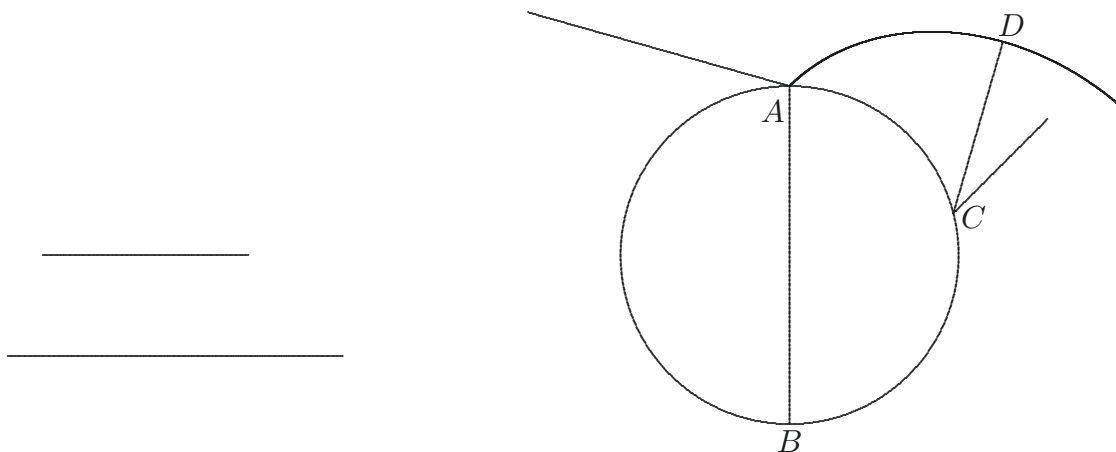
[Um den 9. Februar 1676]

**Überlieferung:** *L* Konzept: LH 4 III 9 Bl. 10. 1 Bl. 2<sup>o</sup>. 1 S. auf Bl. 10 v<sup>o</sup>, großteils mit VI, 3 N. 71 überschrieben. Auf Bl. 10 r<sup>o</sup> Anfang von VI, 3 N. 71.  
Cc 2, Nr. 1381

Datierungsgründe: Leibniz' Datierung des über die Notizen geschriebenen Stücks legt den 16. April 1676 als *terminus ante quem* fest. Die Verbindung zwischen der Figur der Bertetschen Kurve im vorliegenden Stück und den beiden Figuren von LH 35 VIII 30 Bl. 12 (III, 1 N. 68 und VII, 5 N. 45) belegen den 3. November 1675 als *terminus post quem*. Das Wasserzeichen stützt diese Datierung. In diesen Zeitraum fällt eine Phase der intensiven Beschäftigung mit geometrischen und harmonischen Reihen und insbesondere der Summe der reziproken natürlichen Zahlen, die kurz nach dem 8. Februar mit VII, 3 N. 55 ein vorübergehendes Ende nimmt. In den Notizen mit geometrischen Progressionen findet sich in der Umarbeitung von S. 383 Z. 1 derselbe Übergang von Einheiten auf Brüche wie in VII, 3 N. 54 vom 8. Februar 1676 auf S. 724f. Auf den 9. Februar sind Notizen eines Gesprächs von Leibniz mit Bertet datiert (N. 70 (tlw. = III, 1 N. 76)), die eine Beschäftigung mit der Quadraturmethode von Bertet belegen. Als Beispiel erscheint eine Figur, die die *antiparabola* von Bertet als Abgrenzung des Bereichs mit stark bewegtem Wasser beim Einströmen von Wasser aus einem schmalen in einen breiten Kanal darstellt (N. 70 Fig. 5). Leibniz' Figur zum Querschnitt des Kanals im vorliegenden Stück (Fig. 4) weist Übereinstimmungen mit Bertets Figur zur Quadratur am Beispiel eines Dreiecks auf (N. 70 Fig. 2), wobei beide Figuren um 180° zueinander gedreht sind. Die Textpassage zur Bestimmung des Volumens des Kanals lässt sich somit als eine Weiterführung von Themen des Gesprächs auffassen, die auf einer eher assoziativen Reinterpretation der Figur beruht. Auf einen Bezug zum Treffen weist auch die Bertetsche Kurve am Anfang des Blatts hin (Fig. 1), die Gegenstand von Leibniz' Schreiben zur Kontaktaufnahme mit Bertet von Anfang November 1675 war (III, 1 N. 68), dessen Konzept die Grundlage für die Übertragung der Größen in die erste Figur im vorliegenden Stück geliefert hatte. Das Dreieck ohne weitere Bezüge zum Stück (Fig. 3) kann ebenfalls als nicht weiterverfolgter Rückgriff auf Inhalte der Unterredung aufgefasst werden. Die Gleichungsumformungen wurden im Anschluss an die Betrachtungen zur geometrischen Progression ergänzt. Ein Bezug zu einem anderen Stück konnte nicht festgestellt werden, sodass sich keine weitere Eingrenzung der Entstehung dieser Passage ergibt.

[Zur Bertetschen Kurve, vollständig überschrieben]

AB AC AD



[Fig. 1]

5

[Zur geometrischen Progression]

1 2 4 8 16

2 4

2 6 18

36

10

2

7f. 4 (1) 1 5 (2) 2 L

4 Fig. 1: Leibniz hat die Längen der horizontalen Strecken aus der Figur in III,1 N. 68 S. 308 übernommen, wobei die obere der Länge der Senkrechten von  $E$  an die Gerade durch  $A$  und  $B$ , die mittlere dem Durchmesser des Kreises und die untere dem Abstand von  $E$  zum gedachten Schnittpunkt des Kreises mit der Geraden durch  $A$  und  $B$  entspricht, der in der Handschrift mit einem Punkt markiert ist. Der Punkt  $D$  in der Figur des vorliegenden Stücks liegt nahe an der Entsprechung des Punktes  $E$  der Vorlage. Die Kurve der Vorlage und somit auch ihr erster Ansatz im Stück weisen dieselben charakteristischen Abweichungen vom eigentlichen Verlauf der Bertetschen Kurve auf. Leibniz korrigiert sie leicht. Die Größenverhältnisse der horizontalen Strecken sind somit nicht mit der Situation in einer Figur mit einer exakt ausgeführten Kurve kompatibel. Die Proportionen der drei horizontalen Strecken wurden in der Figur beibehalten, wobei die Länge der mittleren mit dem Durchmesser des Kreises übereinstimmt. Die Lage von  $D$  wurde so gewählt, dass die Richtungen der Strecken in der Figur erhalten bleiben.



$$1 \quad \frac{33}{100} \quad \frac{1089}{100}$$

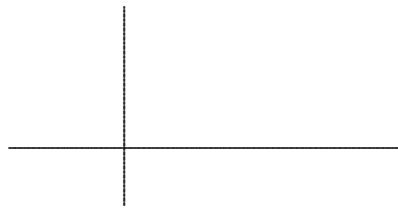
$$a \quad b \quad y$$

$$\frac{a}{b} \sqcap \frac{b}{y}$$

~~$$\frac{y}{b}$$~~

$$\frac{y}{b} \sqcap \frac{bb}{a}$$

5



[Fig. 2]

$$y \sqcap \frac{b^2}{a}$$

1 *Dazu am Rand:*

$$\begin{array}{r} 33 \\ \underline{33} \\ 99 \\ \underline{99} \\ 1089 \end{array}$$

$$1 \ 1 \ (1) \ 33 \ (a) \ 33 \ (b) \ 1089 \ (2) \ \frac{33}{100} \ L$$

---

1 1 ...  $\frac{1089}{100}$ : Leibniz führt die nachträglichen Änderungen nicht konsequent aus. 7 Fig. 2: Die Figur bewahrt die Parallelität der gedachten Geraden durch die Endpunkte der langen Teilabschnitte zu derjenigen durch die Enden der kurzen Abschnitte der Linien in der Handschrift.

[Zur Reihe der reziproken natürlichen Zahlen, überwiegend überschrieben]

$$\begin{array}{cccccc}
 & +1 & & 1 & & \\
 1. & & 2. & & 3. & & 4. & & 5. \\
 \frac{1}{1} & \frown & \frac{1}{2} & \frown & \frac{1}{3} & \frown & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5}
 \end{array}$$

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{12}$

5

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$
24	12	8	6

$$\frac{24}{8} \sqcap \frac{12}{4} \quad \frac{12}{6} \sqcap \frac{4}{2}$$

---

4-6 Daneben:  $\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{6}$

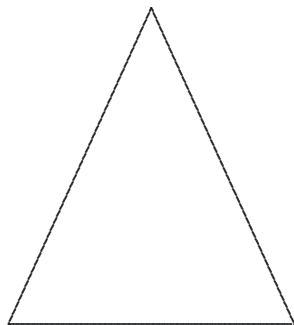
$$\frac{1, \cancel{2}}{\cancel{2}} \quad \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{2} \quad \frac{4}{12}$$

$$\begin{array}{r}
 1 \\
 \underline{2} \\
 \underline{3} \\
 6 \\
 \underline{4} \\
 24
 \end{array}$$

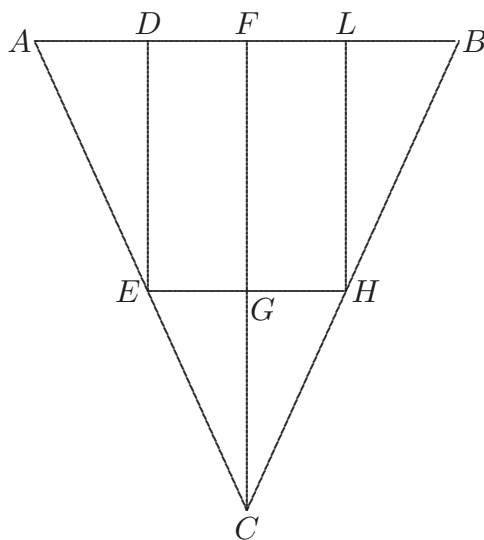
$$2 \cdot 2 \cdot (1)^2 \cdot (2)^1 \cdot 3 \cdot L \quad 5f. \frac{1}{4} \cdot (1) \frac{24}{1} \cdot (2) \cdot 24 \cdot L$$

[Dreieck ohne Bezug zum weiteren Stück, nicht überschrieben]



[Fig. 3]

[Über einen Kanal mit trapezförmigem Querschnitt, nicht überschrieben]



[Fig. 4]

5

$AB \sqcap 40$

	1500	longueur d'un canal	
$b \sqcap AB \sqcap 40$		pieds largeur superieure	
$g \sqcap DE \sqcap FG \sqcap 20$		profondeur	10
$e \sqcap EH \sqcap 25$		pieds largeur inferieure	

7 f. Daneben und darüber mit unklarem Bezug zum Text: 300  
Lieue

9  $b \sqcap AB \sqcap \text{erg. } L$     10  $g \sqcap DE \sqcap FG \sqcap \text{erg. } L$     11  $e \sqcap EH \sqcap \text{erg. } L$

$$\frac{AB \cap b}{EH \cap e} \cap \frac{FC \cap g + y}{GC \cap y}$$

$$\frac{b}{e} \cap \frac{g + y}{y}. \quad yb \cap eg + ey. \quad yb - ey \cap eg. \quad y \cap \frac{eg}{b - e} \cap \frac{25, 20}{15} \cap \frac{20, 5}{3}$$

$$GC \cap y \cap \frac{100}{3} \quad FC \cap g + \frac{eg}{b - e} \cap \frac{bg}{b - e} \quad ABC \cap \frac{gb}{2} + \frac{egb}{2, b - e} \cap \frac{gb^2}{2, b - e}$$

$$\frac{e^2 g}{2, b - e} \quad \frac{gb}{2}$$

$$5 \quad \frac{gb^2 \overbrace{(-gbe + gbe)} - e^2 g}{b - e} \cap \frac{gb^2 - ge^2}{b - e} \cap \boxed{\frac{gb + ge}{2}}$$

$$20$$

$$\frac{25}{500}$$

5 Dazu Nebenrechnungen oben und rechts auf dem Blatt:  $\frac{b^2 - e^2}{b - e} \cap b + e$

$$\begin{array}{r} b + e \\ + b - e \\ \hline - eb - e^2 \\ + b^2 + eb \\ \hline + b^2 \quad - e^2 \end{array}$$

6–387,12 Daneben mit unklarem Bezug zu den Berechnungen: 40 –

~~18~~

385,11–386,1 inferiore (1)  $\frac{AB}{EH} \cap \frac{FC}{GC}$  (2)  $\frac{AB \cap b}{EH \cap e} L$  2  $\frac{eg}{b - e}$  (1)  $\frac{25, 15}{15} \cap \frac{50}{1}$  (2)  $\frac{25, 20}{15} L$   
15 (1) 100 (2) | 200 gestr. L | 40 L

4f.  $\frac{gb}{2}$ : Der Faktor 2 fehlt auch im Folgenden zunächst im Nenner der Brüche. Leibniz ergänzt ihn schließlich wieder beim Gesamtergebnis.

$$\begin{array}{r}
 800 \\
 \underline{5} \\
 1300 \\
 \underline{650} \\
 65 \\
 15000 \\
 \underline{325000} \\
 65 \\
 \underline{975000} \\
 20 + \frac{100}{3} \\
 \underline{33 +} \\
 53 + \frac{1}{3}
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 \\
 \\
 \\
 5 \\
 \\
 \\
 \\
 10 \\
 \\
 \\
 \end{array}$$

[Gleichungsumformungen, nach S. 383 Z. 2 eingefügt, nicht überschrieben]

$$3b - 1, \boxed{2}. \quad \boxed{9b^2} - 6b + 1 \cap \boxed{b^2} - 2cb + c^2. \text{ eritque } b \cap \frac{b^2 + c^2}{3}$$

$$\begin{array}{r}
 3b - 1 \\
 \underline{3c - 1} \\
 - 3b + 1 \\
 - 3c \\
 + 3bc \\
 \hline
 3bc - 3b - 3c + 1
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{l}
 15 \\
 \\
 \\
 \\
 \\
 20
 \end{array}$$

10f. Dazu Nebenrechnung:

$$\begin{array}{r}
 \mathcal{X} \\
 \cancel{\mathcal{X}} \mathcal{f} \ 33 \\
 \cancel{\mathcal{X}}
 \end{array}$$

1f. 800 (1) 15 (2) 5 L

10f.  $\frac{100}{3}$ : Leibniz übernimmt den ganzzahligen Anteil des Bruchs in die nachfolgende Zeile.

19 + 3bc: Richtig wäre hier und in der folgenden Zeile + 9bc.

## 66. QUADRATURA CIRCULI EX HYPERBOLIS DERIVATA [noch]

**Überlieferung:** L Konzept: LH 42 V Bl. 27. 1 Bog. 2<sup>o</sup>, oben auf der linken Seite von Bl. 27 r<sup>o</sup> fehlt eine halbe Seite, oben rechts ein Fünftel einer Seite.  $\frac{1}{2}$  S. auf der linken Seite von Bl. 27 r<sup>o</sup>. Der Text wurde quer über Berechnungen zur Rechenmaschine geschrieben. Auf der rechten Seite weitere Berechnungen und N. [noch]. Auf Bl. 27 v<sup>o</sup> Figuren zu [noch].  
[noch]  
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: S. N. [noch].

$$\langle - \rangle \frac{a^3}{a^2 + y^{(2)}} \langle - \rangle \frac{2a^4y}{a^2 + y^2}$$

$$\frac{a^3}{a + y}, \square \wedge \frac{a^3}{a^2 + y^2} (= x) = \frac{a^4 + a^3y}{a - y + \frac{2y^2}{a + y}}.$$

Ergo  $a^2x + y^2x + a^3$ .

$$a^2 + y^2 - x^2 = 0.$$

$$a^2 + y^2 = \frac{a^2 - y^2 + 2y^2}{a + y} = a - y + \frac{2y^2}{a + y}.$$

$$15 \quad a^2 + y^2.$$

$$\frac{a^2}{y} + y, \wedge y.$$

$$\frac{a^2}{\frac{a^2}{y} + y, \wedge y}$$

$$10 \text{ f. } \frac{2a^4y}{a^2 + y^2} \quad (1) \quad \frac{a^2}{a^2 + y^2} = x \quad \text{Ergo } a^2x + y^2x + a^2 \quad (2) \quad \frac{a^3}{a^2 + y^2} = x \quad \text{Ergo } a^2x + y^2x + a^3$$

$$(3) \quad a^2 + y^2 \quad (4) \quad \frac{a^3}{a^2 + y^2} \quad L \quad 14 \quad a^2 + y^2 = (1) \quad a^2 - y^2 + 2y^2 \quad (2) \quad \frac{a^2 - y^2 + 2y^2}{a + x} = a - y + \frac{2y^2}{a + x}$$

$$(3) \quad \frac{a^2 - y^2 + 2y^2}{a + y} \quad L \quad 15 \text{ f. } a^2 + y^2. \quad (1) \quad |a + y, y - \text{streicht Hrsg.}| \quad (2) \quad \frac{a^2}{y} + y, \wedge y \quad L$$

---


$$14 \quad a^2 + y^2 = \frac{a^2 - y^2 + 2y^2}{a + y}: \text{Leibniz rechnet hier fortlaufend.}$$

$$\frac{\frac{a^2}{y}}{\frac{a^2}{y} + y} = \frac{\frac{a^2}{y^2}}{\frac{a^2}{y^2} + 1} = \frac{x}{a}. \text{ Ergo } \frac{\frac{1}{y^2}}{\frac{a^2}{y} + y} = \frac{x}{a^3}.$$

$$\frac{\frac{a^2}{y}}{\frac{a^2}{y} + y} = \frac{x}{a} = 1 - \frac{y}{\frac{a^2}{y} + y} = 1 - \frac{y^2}{a^2 + y^2}.$$

$$\frac{\frac{a^2}{y}}{y + \frac{a^2}{y}} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{\frac{a^4}{y^3}}{y + \frac{a}{y}} = \frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4 + ay^3} = \frac{a^2y^4 + a^3y^3 - a^4y^2}{y^6 + ay^5} =$$

$$\frac{a^3}{a^2y^2 + a^3y - a^4} = \frac{x}{a}.$$

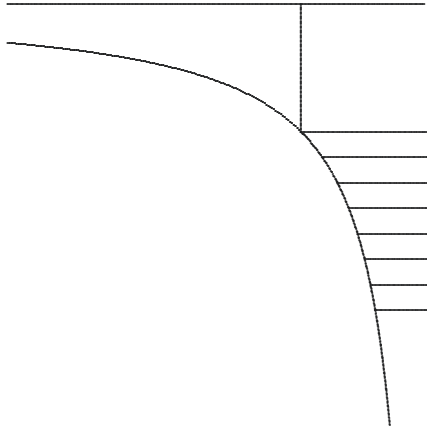
Patet	{	$\begin{cases} +\frac{a^3}{y^2 + ay} = \frac{a^3}{y + a \wedge y} \\ +\frac{a^4}{y^3 + ay^2} \\ -\frac{a^5}{y^4 + ay^3}, \end{cases}$	} scil. momentum ejus est cylinder hyperbol. cujus momentum est figurae praecedentis seu primae cylinder cujus momentum est figurae 2 <sup>dae</sup> cylinder	} Ergo ex harum trium figura- rum quadratu- ra sequitur quadratura circuli.	5
-------	---	---	--	--	---

$$1 = \frac{\frac{a^2}{y^2}}{\frac{a^2}{y^2} + 1} \text{ erg. } L \quad 6 \text{ momentum | rursus } gestr. | \text{ est } (1) \text{ figura praecedens } (2) \text{ figurae}$$

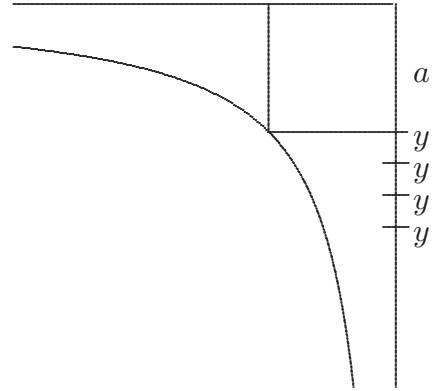
praecedentis | seu primae erg. | cylinder L

$$3 \frac{\frac{a^2}{y}}{y + \frac{a^2}{y}} = \dots = \frac{a^2}{y^2} - \frac{a^4}{y^4 + ay^3} : \text{ Die Auswirkungen der beiden fehlerhaften Umformungen ziehen}$$

sich bis ans Ende durch die Berechnungen.



[Fig. 1a]



[Fig. 1b]

$$\frac{a^3}{y^2 + ay} = \frac{a^3}{y \underbrace{a+y}_p} = \frac{a^3}{yp}$$

$$a^3 - \cancel{xyy} - ayx = 0.$$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ p - y \\ | \\ -pyx + \cancel{y^2x} \end{array}$$

Ergo  $a^3 - pyx = 0.$

$$\begin{array}{c} \wedge \\ a + y \end{array}$$

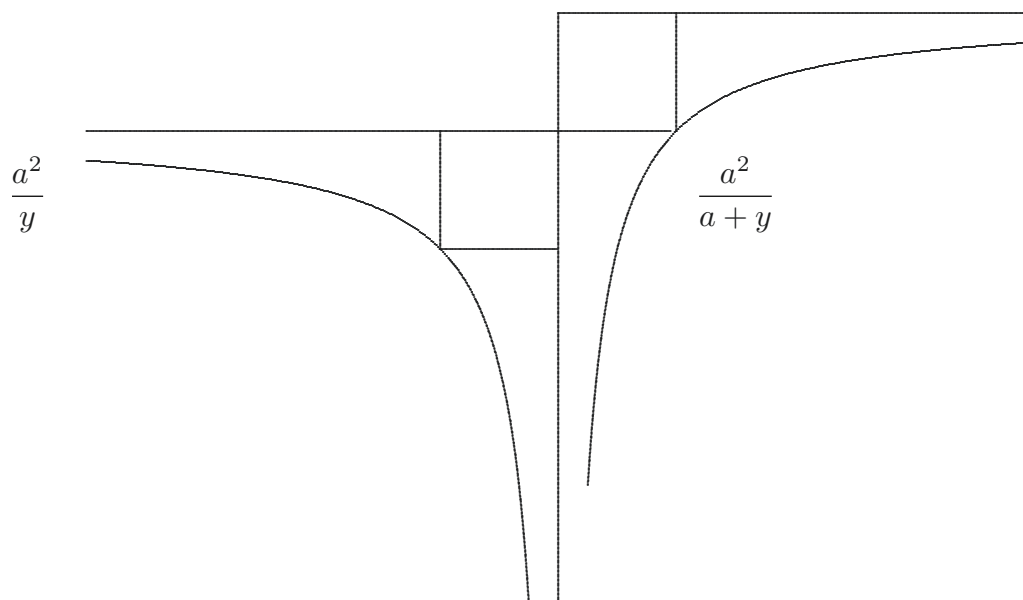
$$\frac{a^2}{a + y} \hat{=} \frac{a^2}{y}.$$

5

$$2f. \frac{a^3}{yp} \quad (1) \begin{array}{c} \wedge \\ a^3 - \cancel{xyy} - ayx \\ \wedge \\ p - \end{array} \quad (2) \begin{array}{c} \wedge \\ a^3 - \cancel{xyy} - ayx \\ | \\ p - y \\ | \\ -pyx + \cancel{y^2x} \end{array} L$$

$$4f. 0. (1) \text{ fiet } a^3 - ayx \quad (2) \frac{a^2}{a + y} \hat{=} \frac{a^2}{y} L$$





[Fig. 2]

Ejusdem Hyperbolae applicatae ita ut hoc loco positae, in se invicem ducantur.

67. MARGINALIEN IN PHILIPPE DE LA HIRE, DE CYCLOIDE  
[15. September 1676 – 25. April 1678]

**Überlieferung:** *LiH* Marginalien in Ph. DE LA HIRE, *De cycloide*, Paris, 1676: GOTHA  
*Forschungsbibl.* A 448–449.

5 Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Der Druck ist auf den 15. September 1676 datiert. [noch]

[*auf S. 1*]

Phil. de la Hire  
De Cycloide.

10 [ ... ]

---

8 *Oberhalb des Ornaments am oberen linken Rand: De Coni sect. la Hire*

9 *Rechts am Rand als Fortsetzung des Titels: et Conicis sectionibus*

Propositio I<sup>a</sup>

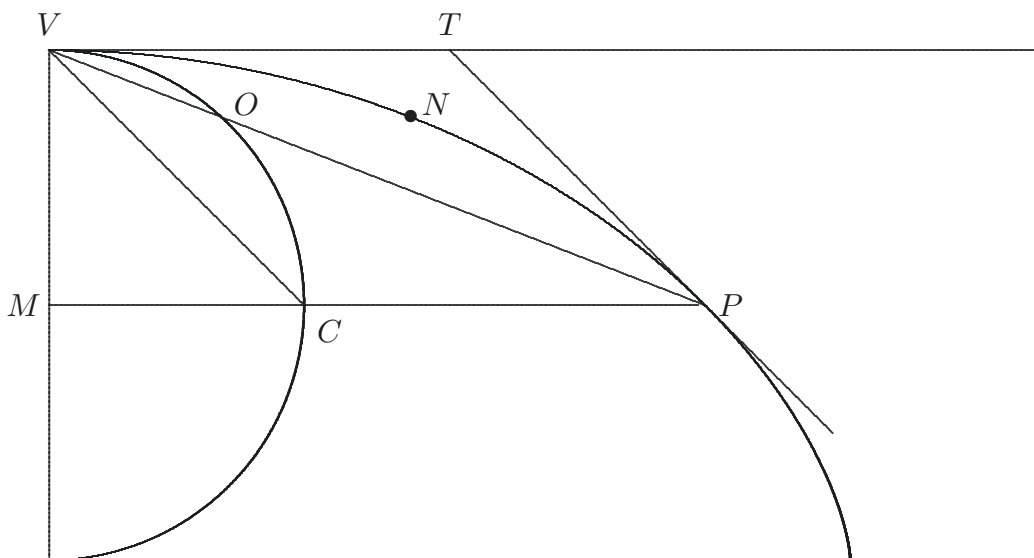
Exposita semicycloide ut supra. Ducta contingente  $TV$  in vertice  $V$  et parallela basi. Agatur recta  $PT$  contingens Cycloidem in aliquo puncto  $P$ , et  $PC$  parallela basi, et connectatur  $CV$ : Dico triangulum mixtilineum  $PTV$  esse aequale Circuli segmento correspondenti  $VC$ .

5

[ ... ]

2 *Marginalie im Druck:* Fig. 1.

2–5 *Am Rand:*



Theorema meum: Retorta  $VOCPNV$  dupla segmenti cycloidalis  $VPNV$ . Si  $M$  ponatur centrum circuli erit Triang.  $VMC$  aequ. Segmento cycloidali  $VPNV$ .

11 Triang. *erg. L*

10f. Theorema ...  $VPNV$ : Leibniz übernimmt die Bezeichnungen  $V, C, P$  und  $T$  und die Konstruktionszusammenhänge aus de La Hires Fig. 1.

## 68. DE SECTIONE POTESTATUM PER SERIES

[Ende 1675 – Anfang 1676 (?)]

**Überlieferung:** *L* Notiz: LH 35 XIII 1 Bl. 446. 1 Zettel ca 18,2 × 3,5 cm. 1 S.  
Cc 2, Nr. 00

5            Datierungsgründe: Das verwendete Gleichheitszeichen  $\sqcap$  zeigt, dass die Aufzeichnung nicht vor Mitte 1674 entstanden ist. Möglicherweise besteht ein inhaltlicher Bezug zu den Untersuchungen von Potenzen mit gebrochenen oder irrationalen Exponenten von Januar (N. 36<sub>1</sub>) und Februar 1675 (N. 36<sub>2</sub>). Das Wasserzeichen des Papiers stimmt mit jenem von VI, 3 N. 33<sub>4</sub> überein, was auf eine Entstehung im Zeitraum von Ende 1675 bis Anfang 1676 hindeutet.

10             $x \sqcap b+c$ . erit  $x^{\frac{1}{2}} \sqcap \overline{b+c}^{\frac{1}{2}}$ , seu  $\sqrt{x} \sqcap \sqrt{b+c}$ . Ponatur  $\sqrt{x} \sqcap \sqrt{b} + \sqrt{c} + d\sqrt{bc}$  et quaeritur valor ipsius  $d$ . Fiet  $\sqrt{b+c} \sqcap \sqrt{b} + \sqrt{c} + d\sqrt{bc}$  et  $\sqrt{b+c} - \sqrt{b} - \sqrt{c} \sqcap d\sqrt{bc}$  sive  $b+c - 2\sqrt{b^2+bc} - 2\sqrt{c^2+bc} + 2\sqrt{bc} + b+c$ , breviter quaerendus potius valor ipsius  $d\sqrt{bc}$ . Sed res eodem redibit. Ita tentabimus invenire seriem, quae sectiones potestatum minus regularium adhibeat. Ex his poterunt forte interpolari series quae exprimunt

15 numeros figuratos, quibus ad sectiones potestatum usus est.

14 forte (1) suppleri (2) interpolari *L*

69. PROBLEMATA TANGENTIUM INVERSA

[November 1675 – Ende 1676 (?)]

**Überlieferung:** L Konzept: LH 35 XIII 2b. Bl. 14. 1 dreieckiger Zettel max. 12 × 6,5 cm.  
 2 S.  
 Cc 2, Nr. 00

5

Datierungsgründe: Das in der Nebenbetrachtung verwendete Integralsymbol führt Leibniz Ende Oktober 1675 ein. [**noch**]

P r o b l e m a t a   t a n g e n t i u m   i n v e r s a

Seriem invenire in qua terminus antecedens aequetur summae omnium sequentium.  
 Est Geometrica dupla.

10

Seriem invenire, cujus area aequetur altitudini in constantem:  $\begin{matrix} 1 & a \\ 2 & b \\ 3 & c \\ 4 & d \end{matrix}$

$a \sqcap 1 \wedge a. a + b \sqcap 2a. Ergo b \sqcap 3a. Ergo est ad triangulum.$

Hac methodo saepe problema Tangentium inversa credo solvemus.

---

8 *Darüber Nebenbetrachtung:*

$$a \quad \frac{x}{1} + \frac{x^2}{1,2} + \frac{x^{(3)}}{1,2,3}$$

$$\int a \sqcap x + x^2$$

8 Problemata ... inversa erg. L

---

12 Ergo  $b \sqcap 3a$ : Die Rechnung ist unstimmg. Wenn mit  $a, b, c, d$  die Höhen bezeichnet werden, so müssen diese proportional zu den Zahlen 1, 2, 3, 4 gewählt werden, d. h.  $b = 2a, c = 3a, d = 4a$ . Bezeichnet man damit die Differenzen der Höhen, so müsste  $a = b = c = d$  gelten.      **16**  $\int a \sqcap x + x^2$ :

Für  $a = \frac{x}{1} + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6}$  etc. wäre  $\int a dx = \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^4}{24}$  etc.

$$\begin{aligned}
 a & \sqcap b + c + d + e \\
 b & \sqcap c + d + e \\
 c & \sqcap d + e \\
 d & \sqcap e
 \end{aligned}$$

5

$$\begin{aligned}
 d & \sqcap \delta + e \\
 c & \sqcap \kappa + \delta + 2e \\
 b & \sqcap \beta + \kappa + 2\delta + 4e \\
 a & \sqcap \alpha + \beta + 2\kappa + 4\delta + 8e
 \end{aligned}$$

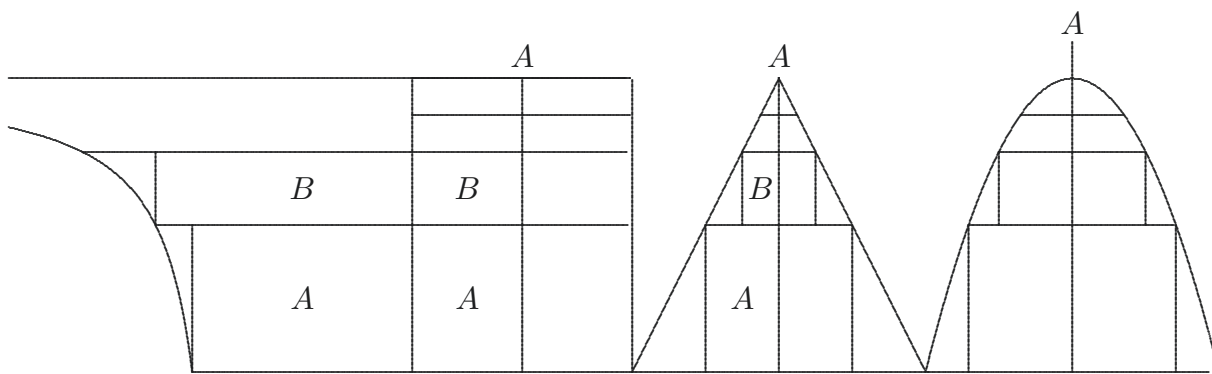
Si non  $\sqcap$  sed  $\sqcap$  ponuntur omittemus  $\delta$ .  $\kappa$ .  $\beta$ .  $\alpha$ . Nam si

10

$$\begin{aligned}
 a & \sqcap b + c + d + e \\
 b & \sqcap c + d + e & c & \sqcap 2e \\
 c & \sqcap d + e & \text{fiet } b & \sqcap 4e \\
 d & \sqcap e & a & \sqcap 8e
 \end{aligned}$$



[In der Hauptrichtung des Texts]

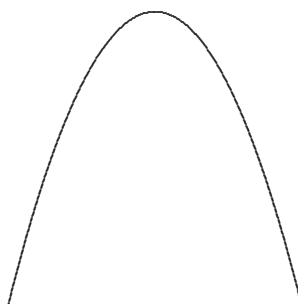


[Fig. 2]

[Leibniz]

5 Quadraturae secto axe in partes Geometrice proportionales.

[Bertet]



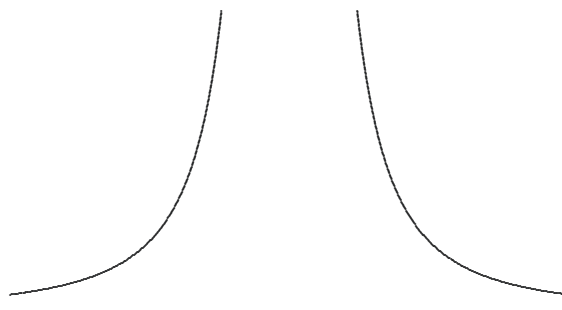
[Fig. 3]

5 secto (1) linea (2) axe  $L$

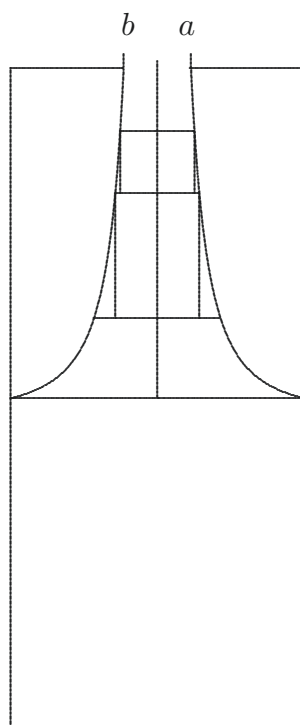
---

3 Fig. 2: In den einbeschriebenen Rechtecken finden sich jeweils etwa mittig bis zu zehn Punkte, wie sie als Spuren beim Hindeuten auf Einzelheiten mit der Feder entstehen.





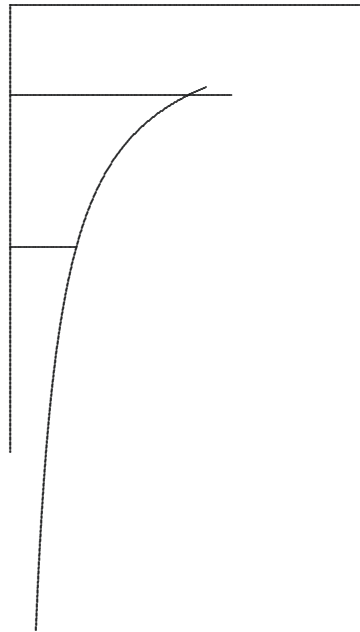
[Fig. 4]



[Fig. 5]

2 Fig. 4: Bei der Kurve handelt es sich wohl um eine Bertetsche Antiparabel, bei der in der Handschrift die beiden Äste von  $\frac{1}{x^2}$  nicht symmetrisch ausgeführt wurden. Zudem fällt der Abstand zwischen beiden Ästen zu klein aus. Leibniz erwähnt die Bezeichnung der Kurve und ihre Eigenschaften kurze Zeit vorher in VII, 5 N. 64. Im selben Stück verweist er auf das bevorstehende Treffen mit Bertet, bei dem die vorliegende Gesprächsaufzeichnung entstand. 4 Fig. 5: Die Beschriftung ist gegenüber der Figur um  $180^\circ$  gedreht. Sie stimmt in ihrer Ausrichtung mit derjenigen der nachfolgenden Figur überein. — Vgl. VII, 5 N. 64 Fig. 1.

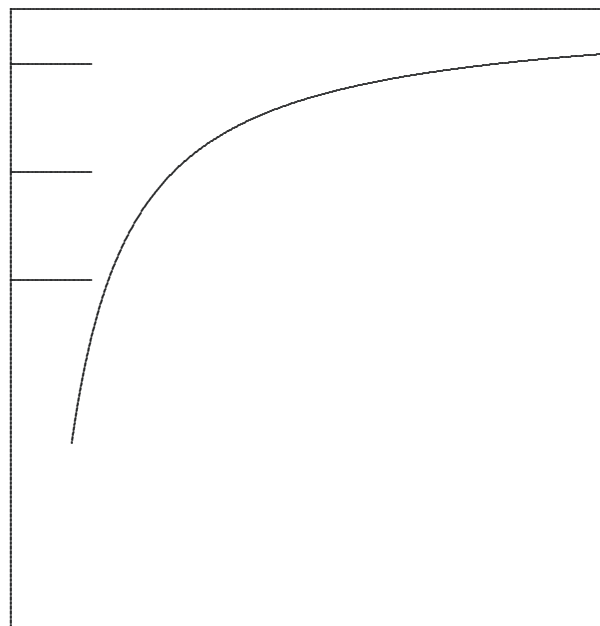
[Um 180° gedreht]



[Fig. 6]

[In der Hauptrichtung des Texts]

5



[Fig. 7]