G O T T F R I E D W I L H E L M
L E I B N I Z

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

FÜNFTER BAND

2008

Inhaltsverzeichnis
Copyright

G O T T F R I E D W I L H E L M

L E I B N I Z

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN
VON DER
LEIBNIZ-FORSCHUNGSSTELLE HANNOVER
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN
BEIM LEIBNIZ-ARCHIV DER
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
HANNOVER

FÜNFTER BAND

1674–1676

INFINITESIMALMATHEMATIK

2008

Inhaltsverzeichnis
Copyright

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS HERBERT BREGER

BEARBEITER DIESES BANDES

SIEGMUND PROBST · UWE MAYER · HEIKE SEFRIN-WEIS

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNISSE

Der fünfte Band von Leibniz' mathematischen Schriften enthält die Aufzeichnungen aus den Jahren 1674 bis 1676 zur Infinitesimalrechnung. In diesem Band werden also die Stücke, in denen Leibniz die Infinitesimalrechnung entwickelt, zum größten Teil erstmals veröffentlicht. Wenn Leibniz — nach einem Prioritätsstreit von zweieinhalb Jahrhunderten — uneingeschränkt die selbständige und unabhängige Formulierung der Infinitesimalrechnung zuerkannt wird, so beruht dieses Urteil letztlich auf den hier gedruckten Dokumenten.

Von Dr. Heike Sefrin-Weis (August 2003 bis September 2004) wurden die Stücke N. 4, 6, 8, 10, 14, 17, 20, 21, 26, 27, 46, 48, 51_2 und 58 bearbeitet. Dr. Uwe Mayer (ab Oktober 2004) bearbeitete die Stücke N. 1, 2, 24, 25, 30, 31, 32, 34, 35, 36, 37, 38, 40, 42, 43, 44, 47, 49, 50, 51_1, 53, 59, 60, 61, 62, 65, 66, 67, 70, 71, 72, 73, 79, 82, 83, 86, 87, 88, 90, 91, 92, 93, 96, 97 und 98. Während der Einarbeitungszeit stand Dr. Siegmund Probst, der seinerseits alle übrigen Stücke bearbeitete, jeweils Dr. Heike Sefrin-Weis und Dr. Uwe Mayer beratend zur Seite. Die Schlussredaktion (einschließlich Datierungen und Verzeichnissen) wurde von Dr. Uwe Mayer und Dr. Siegmund Probst gemeinsam durchgeführt. Für die elektronische Erfassung der Stücke ist Susanne Bawah zu danken.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle.

Dem Ltd. Direktor und den Mitarbeitern der Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek Niedersächsische Landesbibliothek Hannover ist für Unterstützung und gute Zusammenarbeit zu danken. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts verglichen werden.

Seit November 2004 standen Teile des Bandes in unkorrigierter Fassung im Internet. Auf die Konkordanzen und Kumulierungen im Internet (http://www.leibniz-edition.de) sei verwiesen.

Prof. Dr. Manfred Breger hat freundlicherweisen die unter Linux laufenden Programme und Datenbanken betreut. Der Satz ist mit Hilfe des von John Lavagnino (Massachusetts) und Dominik Wujastyk (London) entwickelten TEX-Macropakets EDMAC und eigener Macros erstellt worden. Die Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in TEX weiter bearbeitet. Der Verlag hat wieder eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten.

Hannover, Juni 2008 Herbert Breger

Der vorliegende Band umfasst die Studien, Entwürfe und Aufzeichnungen des Zeitraums von 1674 bis 1676 zur Infinitesimalmathematik, die mit wenigen Ausnahmen bisher unveröffentlicht waren. Die Marginalien in nur teilweise einschlägigen Werken, die von Leibniz herangezogen wurden, sowie die umfangreichen Studien zur arithmetischen Kreisquadratur, das heißt zur Berechnung der Kreisfläche mittels unendlicher konvergenter Reihen von rationalen Zahlen, werden in späteren Bänden dieser Reihe veröffentlicht.

Die Texte des Bandes wurden zu 98 Hauptnummern zusammengefasst, deren Länge zwischen zwei Zeilen (N. 72) und 53 Druckseiten (N. 7) schwankt. Die Bedeutung, die Leibniz diesen Studien beigemessen hat, lässt sich auch daran erkennen, dass er ungewöhnlich viele, nämlich 56, mit einem Datum versehen hat.

Zehn Stücke (N. 38, 40, 44, 46, 48, 51_2, 72, 84, 90, 96) waren bisher ganz oder teilweise im Druck zugänglich: mit 61 Druckseiten knapp ein Zehntel des Bandes.

Das Spektrum der Texte reicht von Marginalien in von Leibniz studierten Schriften (N. 43, 47) über kurze Notizen (N. 72) und wissenschaftshistorische Aufzeichnungen (N. 41) zu längeren theoretischen Untersuchungen und Darstellungen. Manche wurden von Leibniz wohl in direkter Abfolge verfasst (N. 7, 27), andere bilden eher lockere Gruppen (N. 38, 40, 44; 68, 69). Hinzu kommen sechs gemeinsam mit E. W. v. Tschirnhaus angefertigte Gesprächsnotizen (N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1, 80). Berichte über Unterhaltungen mit verschiedenen Wissenschaftlern finden sich in N. 3, 6, 32, 40, 52, 57, 64, 73.

Quellen

Leibniz verwendet in den Jahren 1674–1676 für seine Forschungen zur Infinitesimalmathematik mit wenigen Ausnahmen dieselbe Literatur, die er bereits 1673 zur Verfügung hatte.

Die beiden Marginalexemplare von I. Barrow, *Lectiones geometricae* (N. 43), und J. Gregory, *Exercitationes geometricae* (N. 47), hat Leibniz 1673 erworben, aber überwiegend in den Jahren 1674–1676 studiert, vereinzelt zieht er diese Werke auch für weitere Studien zu Rate (N. 86) oder erwähnt sie kurz (N. 44). Eingehender setzt er sich vor allem mit Schriften auseinander, die 1659–1661 in der zweiten Auflage der lateinischen

Übersetzung von R. Descartes' *Géométrie* von Fr. van Schooten publiziert worden waren: Zwischen Mitte 1674 und Januar 1675 befasst sich Leibniz bei dem Versuch, aus der Normalenmethode von Descartes eine Lösungsmethode für das umgekehrte Tangentenproblem abzuleiten, naturgemäß häufig mit dem Text von Descartes (N. 4, 7, 8, 14, 17, 20, 26, 27) und mit dem Kommentar von Schooten (N. 7, 8, 15, 26), die später nur noch vereinzelt genannt werden (N. 93 bzw. N. 39). Letzterer dürfte in dieser Phase auch die hauptsächliche Quelle für die Tangentenmethode von Fermat gewesen sein (N. 7, 27). Hinzu kommen Ansätze mit der Tangentenmethode von Hudde aus den *Epistolae duae* (z. B. N. 7, 17, 27), gelegentlich werden Debeaune (N. 4) und De Witt (N. 15) erwähnt. Aus diesem Sammelband zieht Leibniz außerdem die Schrift von Heuraet über die Kurvenrektifikation heran (N. 2, 16, 30, 41).

Auch die folgenden Titel hat Leibniz bereits 1673 studiert: Die in den *Philosophical Transactions* publizierte Tangentenmethode von Sluse wird im Zusammenhang mit den oben genannten Untersuchungen zum inversen Tangentenproblem (N. 7, 10, 26, 27) und danach noch öfters erwähnt (N. 46, 48, 62, 68, 88, 93, 96, 97), ebenso die Methode von Hudde (N. 48, 88, 96, 97). Eine größere Rolle hinsichtlich der Infinitesimalmathematik erhält nun der dritte Band der *Lettres* von Descartes, in dem sich Leibniz hauptsächlich über die Diskussionen um Fermats Tangentenmethode sowie über das 2. Debeaunesche Problem informiert (N. 51_2, 68, 90, 91). Das *Mesolabum* von Sluse wird im Zusammenhang mit speziellen Kurven, Tangentenbestimmung und Wendepunkten genannt (N. 54, 62, 68), Gregorys *Vera quadratura* (N. 13, 41, 44, 50) und Huygens' *De circuli magnitudine* (N. 13, 41) im Zusammenhang mit der Kreis- und Kegelschnittquadratur. Aus Huygens' *Horologium oscillatorium* (N. 6, 13, 16, 39, 41, 77) erwähnt Leibniz hauptsächlich die Sätze zu Sphäroiden und Konoiden. Das *Opus geometricum* von Saint-Vincent (N. 37, 40, 41, 44, 50) und die Schriften von Wallis (vor allem *Mechanica*, N. 24, 41, 44, 74; *Tractatus duo*, N. 39, 41, 74; *Arithmetica infinitorum*, N. 41, 44, 46, 54, 56, 64) zitiert Leibniz zu diversen Methoden und Ergebnissen bei Quadraturen. Nur noch selten herangezogen werden die 1673 von Leibniz eingehend studierten Schriften von Fabri (*Synopsis geometrica*, N. 74), Pascal (*Lettres de Dettonville*, N. 74, 82) sowie Mercator (*Logarithmotechnia*, N. 41, 57) und Ricci (*Exercitatio geometrica*, N. 68). Vereinzelt erwähnt werden auch Snell (N. 13, 41) und Viète (N. 13) zum Thema der Kreisapproximation, R. White (N. 41) zum schiefen Kegel. Die zahlreichen Verweise auf die Guldinschen Sätze (N. 41, 62, 75, 76, 77, 82) dürften auf indirekter Rezeption beruhen. Auch im Fall von Torricelli (N. 41) und Cavalieri (N. 41, 44), dessen Werk Leibniz schon früher kennengelernt hatte, spielt eine aktuelle Lektüre vermutlich keine Rolle. Dasselbe gilt wohl in der Regel für die antiken Autoren, von denen Euklid (N. 41), Apollonius (N. 15) und Pappus (N. 26) nur einmal erwähnt werden. Eine Ausnahme bildet Archimedes, auf den mehrfach Bezug genommen wird (N. 6, 41, 57, 62, 74, 82, 83).

Gegenüber dem Jahr 1673 kommen nur wenige einschlägige Titel neu hinzu: Gregorys *Geometriae pars universalis* findet Leibniz bei Barrow (N. 43) und in Gregorys *Exercitationes geometricae* (N. 47) erwähnt, Tschirnhaus bezieht sich auf einen Transmutationssatz von Gregory (N. 49). Leibniz selbst nennt einige Ergebnisse zu Sphäroiden und Konoiden aus dieser Schrift (N. 39, 41, 50), die er wohl spätestens seit Dezember 1674 aus eigener Lektüre kennt (vgl. VII, 1 N. 13 S. 130 f.). Bei den Resultaten mit der Schwerpunktmethode kommen als Quelle Tacquets *Cylindricorum et annularium libri V* hinzu (N. 41, 82, 83). Einer Schrift von Mersenne, *L'Optique*, verdankt Leibniz den Hinweis auf Forschungen Robervals zu gekrümmten Oberflächen (N. 7).

Die Lektüre der *Philosophical Transactions* macht sich hauptsächlich bezüglich der Tangentenmethode von Sluse bemerkbar (s. o.), vereinzelt auch in der Rezeption von Newton (N. 17) und möglicherweise Wren (N. 77).

In der wissenschaftsgeschichtlichen Aufzeichnung *Historia Tetragonisticae Conicae* (N. 41) stellt Leibniz Ende Oktober 1675 eine Liste der ihm bekannten Autoren zusammen, die jeweils als Erste Erfolge bei der Quadratur, Rektifikation etc. der Kegelschnitte bzw. der aus ihnen gebildeten Rotationskörper, Zylinderhufe u. ä. erzielt haben.

Einzelne Bemerkungen in den Studien setzen eine direkte oder indirekte Kenntnis damals noch nicht gedruckter Handschriften von Huygens (N. 7, 68) und Roberval (N. 70) voraus, beruhen auf Briefen (Oldenburg, N. 41) oder mündlichen Mitteilungen von Bertet (N. 64), Rømer (N. 57) und Tschirnhaus (N. 38, 52, 73). Hinzu kommen Erörterungen von Themen, die in Gesprächen mit Boulliau (N. 6), Dechales (N. 32) und Huygens (N. 3) aufgeworfen wurden. Einige Gespräche mit Tschirnhaus sind darüber hinaus durch sechs Handschriften mit gemeinsamen Notizen dokumentiert (N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1, 80; s. u. den Abschnitt Tschirnhaus-Stücke). Nicht zuletzt kann Leibniz sich mittlerweile auf eigene Vorarbeiten stützen, vor allem zum charakteristischen Dreieck (z. B. N. 22, 33, 59, 76; vgl. dazu VII, 4 N. 26 u. 27), zum Transmutationssatz (z. B. N. 21, 25, 31, 34, 35, 40, 44, 73; vgl. dazu VII, 4 N. 39 u. VII, 3 N. 39), zur Behandlung des inversen Tangentenproblems mittels der Differenzenmethode (z. B. N. 8, 15, 16, 26, 50, 53; vgl. VII, 4 N. 40 u. VII, 3 N. 39) sowie zu seinen Ergebnissen bei der Reihensummierung und den Rollkurven (z. B. N. 8, 16, 17, 20, 44; vgl. VII, 3 N. 38 u. 39).

Themenschwerpunkte

Nur einige wenige Briefe oder andere Schriftstücke von Leibniz sind mit Sicherheit auf die erste Hälfte des Jahres 1674 zu datieren. Insbesondere bei den Studien zur Infinitesimalmathematik ist im Vergleich zu 1673 ein deutlicher Rückgang zu verzeichnen. Erst ab Mitte 1674 ist wieder eine intensivere Beschäftigung mit dieser Thematik feststellbar. Die Studien aus der Zeit bis Frühjahr 1675 machen etwa 40 % des vorliegenden Bandes aus. Danach ist in der Infinitesimalmathematik einschließlich der Folgen und Reihen (vgl. VII, 3) eine fast völlige Unterbrechung der Forschungen bis zum Herbst 1675 zu verzeichnen, während es aus diesem Zeitraum zahlreiche algebraische und physikalische Studien gibt. (Eine von Leibniz erwähnte Handschrift vom 19. Juni 1675 zur Rektifikation der Ellipse konnte bisher nicht aufgefunden werden. Die daraus zitierte Formel verwendet er jedoch bereits am 3. Oktober 1674 in N. 6.) Seit den ersten Gesprächen mit Tschirnhaus (s. u. den Abschnitt Tschirnhaus-Stücke) nimmt Leibniz ab Oktober 1675 die Untersuchungen wieder auf. Diese Phase intensiver Beschäftigung mit der Infinitesimalmathematik erfährt ab August 1676 wieder eine Unterbrechung, vermutlich wegen der Arbeiten an der Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur. Erst nach den Anregungen auf der Reise nach England und in die Niederlande sind in den letzten Wochen vor der Ankunft in Hannover im Dezember 1676 wieder neue Studien zu verzeichnen (N. 96, 97, 98).

(1) Differential- und Integralrechnung

Der Zusammenhang zwischen der Differenzen- und Tangentenrechnung, dem inversen Tangentenproblem und Quadraturen ist Leibniz spätestens 1673 mit seinen Untersuchungen zum charakteristischen Dreieck klar geworden. Eine allgemeine inverse Tangentenmethode würde die Quadratur aller Kurven ermöglichen (N. 7_3) und wäre so für ihn der höchste Gipfel der Geometrie (N. 17). Dass Differenzenbildung und Summierung nicht nur bei Zahlenfolgen, sondern auch bei Ordinaten von Kurven als umgekehrte Operationen aufgefasst werden können, thematisiert er immer wieder (z. B. N. 26, 60, 84, 89, 96, 98). So lassen sich die im vorliegenden Band gedruckten Untersuchungen hauptsächlich den drei genannten Bereichen zuordnen, ohne dass immer eine strikte Trennung möglich wäre. Dies kommt bereits in einer Reihe von Titeln der Studien zum Ausdruck: *Theoremata tetragonistica generalia ex tangentibus* (N. 34), *Polygonorum usus ad Tetragonistica et Tang. invers.* (N. 50), *Pro methodo tangentium inversa et aliis tetragonisticis specimina et inventa* (N. 51), *Aequationes tetragonisticae per calculum differentialem* (N. 60), *De summis per calculum inversum ex differentiis, deque methodo tangentium inversa* (N. 89), *Figura quadranda comparatur cum alterius differentiis* (N. 98).

(a) Differential- und Tangentenrechnung

Die bekannten Tangentenmethoden von Descartes (N. 3, 4, 7, 8, 14, 17, 20, 26, 27, 48, 84, 93), Hudde (N. 7, 17, 27, 88, 96, 97) und Sluse (N. 7, 10, 26, 27, 46, 48, 68, 88, 93, 96, 97) werden von Leibniz häufig verwendet und auf ihre Reichweite hin untersucht. Seltener erwähnt er die Methode von Fermat (N. 7, 27, 68), die Methode von Tschirnhaus lernt er durch diesen selbst kennen (N. 49, 67_1). In N. 48 vom 22. November 1675 modifiziert und erweitert Leibniz das Verfahren von Descartes zur Konstruktion der Normale an einen Kurvenpunkt. Am 26. Juni 1676 notiert er in Abgrenzung zur Methode von Descartes: „At vera methodus tangentium generalis est per differentias“ (N. 84). Er motiviert dies dadurch, dass so auch transzendente Kurven behandelt werden können, sofern ihre Differenzen bekannt sind, insbesondere alle, die durch die Quadratur des Kreises oder der Hyperbel gegeben werden. Schon im Sommer 1674 versucht Leibniz, die Tangenten einer transzendenten Kurve zu bestimmen (N. 1). Bei der durch $y = \frac{x^x}{a^{x-1}}$ gegebenen Kurve wählt er allerdings für die Variable im Exponenten nicht x als Bezeichnung, sondern β, um formal die Gleichung einer höheren Parabel zu erhalten, weshalb die von ihm durchgeführte Tangentenrechnung nicht zum richtigen Ergebnis führt. In N. 5 stellt er sich die Frage, ob die Differenzenrechnung bei Wechsel der Bezugsachse zum selben Ergebnis führt. Im Januar 1676 untersucht er die Tangentenrechnung bei Kurven, die als Quadratrix bekannter Kurven auftreten, wie der Logarithmuskurve (N. 59); im Juli 1676 stellt er Überlegungen an, wie die bekannten Tangentenmethoden auf transzendente Kurven angewendet werden könnten (N. 93). Im Frühjahr 1676 verfasst Leibniz zwei umfangreiche Studien zu den Tangenten der Parabeln und Hyperbeln (N. 68, 69). Durch die Lektüre der Diskussion um die Fermatsche Tangentenmethode in Band 3 der *Lettres* von Descartes wird ihm bewusst, dass die Behandlung der Tangenten bzw. Normalen von einem Punkt aus an eine Kurve als Maxima bzw. Minima nur mit Einschränkungen zulässig ist (N. 68).

Kurz nach der Einführung der Symbole dx und $\int$ für die Differential- und Integralrechnung (s. u. den Abschnitt zur Notation und Rechentechnik) leitet Leibniz die Produktregel für die Differentiation am 27. November 1675 ab (N. 51_2), die Quotientenregel berechnet er im April 1676 (N. 70), eine ausführlichere Darstellung folgt im Juli 1676 (N. 89). Im November 1676 formuliert er als Regel für allgemeine Potenzen: „$d\overline{x^e} \sqcap e, x^{e-1}$ et contra $\int \overline{x^e} \sqcap \frac{x^{e+1}}{e+1}$.“ (N. 96). Die Studie *Calculus tangentium differentialis* vom November 1676 (N. 96) enthält nicht nur die Regeln für die Differentiation der durch allgemeine Potenzen gegebenen einfachen Kurven, sondern auch die entsprechenden Formeln für die Integration und zeigt den Zusammenhang mit inversen Tangentenproblemen an mehreren Beispielen auf. Außerdem versucht Leibniz, die Methode bereits auf Gleichungen mit mehreren Unbekannten auszudehnen, um so z. B. die Tangenten an gekrümmte Flächen berechnen zu können. Die beiden letzten Stücke des Bandes stehen in Zusammenhang mit Leibniz' Brief an Oldenburg vom 28. November 1676 (III, 5 N. II): N. 97 ist der Entwurf für einen Abschnitt, in dem Leibniz die Tangentenrechnung für allgemeine Polynome 2. Grades behandelt, in N. 98 vom Dezember 1676 versucht er, die Überlegung auf Polynome 3. Grades zu erweitern und durch Vergleich der resultierenden Formeln mit anderen Kurvengleichungen für die Quadratur auszunützen.

Leibniz' Interesse für Wendepunkte geht vermutlich zurück auf die Untersuchung der von ihm für die Kreisquadratur verwendeten Kurve, deren Krümmungsverhalten er in seiner ersten Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur vom Herbst 1673 untersucht, noch ohne den Wendepunkt genau bestimmen zu wollen und ohne Tangentenbetrachtungen anzustellen (vgl. VII, 4 N. 42_1 S. 731–733). In der Ausarbeitung vom Oktober 1674 (N. 10) versucht er eine Bestimmung des Wendepunkts durch einen Vergleich von Abszisse und Subtangente, die er nach dem Verfahren von Sluse berechnet (vgl. III, 1 N. 39 S. 144 f. u. 147). Leibniz hat sich wohl kurz zuvor mit den in den *Philosophical Transactions* gedruckten Bemerkungen von Sluse zum Auffinden von Wendepunkten befasst, die knappen Hinweise aber nicht richtig verstanden, wie seine Verwechslung von Extremwerten und Wendepunkten zeigt. Auch im Januar 1675 unterlaufen ihm bei der Formulierung von Bedingungen für Extremwerte noch Fehler (N. 24). Tschirnhaus bestimmt im November 1675 das Maximum einer Kurve mit der Methode von Fermat (N. 49), Leibniz im Juni 1676 die maximale Breite der von ihm piqueline oder curva hastaria genannten Kurve, eines Zweiges der Konchoide (N. 88). Der Verweis auf die Tangentenmethode und die Konchoide von Sluse in einer weiteren Gesprächsaufzeichnung vom Januar 1676 steht möglicherweise in Zusammenhang mit dem Problem der Bestimmung von Wendepunkten (N. 62).

(b) Inverse Tangentenmethode

In einem Gespräch mit Leibniz äußert Huygens die Vermutung, Descartes habe eine von ihm geheim gehaltene inverse Tangentenmethode besessen (N. 3). Er stützt sich dabei auf den Umstand, dass Descartes optische Kurven, die später so genannten Cartesischen Ovale, mit bestimmten Brechungseigenschaften behandelt. Descartes gibt die Gleichung dieser Kurven an, was der Lösung einer inversen Tangentenaufgabe (in heutiger Terminologie: der Lösung einer gewöhnlichen Differentialgleichung 1. Ordnung) entspricht. Leibniz, der sich mit der Problematik bereits 1673 auseinandergesetzt hatte (VII, 4 N. 35) und an einer allgemeinen Methode von Descartes zweifelt (N. 3), nimmt die Aussagen von Huygens wohl zum Anlass, sich seit Sommer 1674 wieder verstärkt mit den Tangentenmethoden von Descartes, Hudde und Sluse auseinanderzusetzen. Er versucht bis Januar 1675 erfolglos, das Extremwertverfahren mittels Bestimmung von Doppelwurzeln einer Gleichung für das inverse Tangentenproblem fruchtbar zu machen (N. 4, 7, 8, 9, 14, 17, 20, 21 und 27). Neben weiteren Studien zu einer allgemeinen inversen Tangentenmethode (N. 48, 51_2, 58, 88, 89) behandelt er eine Vielzahl spezieller inverser Tangentenprobleme: Im Dezember 1674 stellt er sich die Aufgabe, die Kurve zu bestimmen, deren Ordinaten umgekehrt proportional zu den Subnormalen sind, und scheitert zunächst mit dem Ansatz einer Hyperbel als Lösungskurve (N. 15). Am 11. November 1675 kann er in wenigen Zeilen die kubische Parabel als Lösung ermitteln, ein anderes Beispiel führt auf die Wurzel aus dem Logarithmus als Lösungskurve (N. 46). Die genannte Eigenschaft der kubischen Parabel erwähnt Leibniz kurz darauf in N. 53 vom 14. Dezember 1675, wo er außerdem die Parabel als Kurve mit Differenzen umgekehrt proportional zu den Ordinaten bezeichnet. Dieses Problem hatte Leibniz im Dezember 1674 gelöst (VII, 3 N. 39). Manche Beispiele für inverse Tangentenprobleme formuliert Leibniz aus bekannten Tangenten- bzw. Normaleneigenschaften bestimmter Kurven, die somit nach Voraussetzung eine Lösung darstellen: Aus der seit Descartes bekannten Eigenschaft der Rollkurven, dass ihre Normalen die Verbindungsstrecken zu den Berührungspunkten der abrollenden Kurve mit der Abszissenachse sind, folgert Leibniz, dass umgekehrt die Kurven mit bekannten Normalen als Rollkurven behandelt werden können (N. 17). (Einen Beweis der Normaleneigenschaft der Rollkurven skizziert er in N. 51_2 vom 27. November 1675.) Leibniz nennt die Zykloide als eine Lösungskurve des Problems, dass die Normalen sich zur Abszisse wie die Ordinaten der Parabel verhalten sollen (N. 17; vgl. auch N. 18 u. N. 26), im Januar 1675 die Parabel als Kurve mit konstanter Subnormale und den Kreis als Kurve mit konstanter Normale (N. 27_4), im Juli 1676 den Kreis als Kurve, deren Normalen sich in einem Punkt treffen (N. 89). Das berühmte Problem, das Debeaune seinem Briefpartner Descartes 1638 stellt, eine Kurve mit konstanter Subtangente zu finden, bereitet Leibniz im Juli 1676 keine größeren Schwierigkeiten, worin er einen wichtigen Beleg für die Leistungsfähigkeit seiner Methoden sieht: „Solutum ergo a me est unius horae spatio problema, quod Geometras primarios frustra exercuit, et ipsi Cartesio difficillimum visum est“ (N. 90, 91).

(c) Quadraturen und Rektifikationen

Leibniz geht beim Versuch, eine allgemeine Quadraturmethode zu entwickeln, meist so vor, dass er durch Transformationen gewonnene Erkenntnisse über die gegenseitige

Abhängigkeit von Quadraturen verschiedener Kurven untereinander oder von Quadraturen und Rektifikationen verschiedener Kurven (z. B. den bekannten Zusammenhang von Parabelrektifikation und Hyperbelquadratur) zu systematisieren versucht. Dazu führt er Begriffe ein wie curva homologa (N. 2), curva homogenea (N. 16, 17, 20, 38), curva sylloga, syndota, sygnota (N. 18, 53), figura sylloga (N. 73) (s. u. den Abschnitt Terminologie). Im Januar 1676 erprobt er den Begriff der figura corresolubilis und nimmt sich vor, ein Symbol dafür einzuführen (N. 6). Am 26. Mai 1676 erwägt er die Möglichkeit, Kurven nach der Gleichung ihrer Subtangenten zu klassifizieren (N. 79). Weitere Ansätze in diese Richtung zeigen seine Pläne, Kataloge zu erstellen, z. B. von algebraischen Kurven, die eine algebraische Quadratrix besitzen (N. 26), von Kurven und ihren Tangenten (N. 52) oder von allen quadrierbaren Kurven (N. 96).

Neben der von ihm bereits 1673 praktizierten Umformung von Brüchen und Wurzelausdrücken in unendliche Reihen versucht Leibniz seit Ende 1674, auch aus der Algebra übernommene Umformungen wie die Division oder Zerlegung von Kurvengleichungen für die Quadratur anzuwenden (N. 28, 29, 54, 85). Dabei befasst er sich auch gelegentlich mit imaginären Wurzeln (N. 28, 29, 52, 54, 85). Im November 1674 schlägt er außerdem vor, das geometrische Verfahren der ein- und umbeschriebenen Vielecke nicht nur zum Beweis bereits anderweitig gefundener, sondern auch für die Entdeckung neuer Quadraturen nutzbar zu machen. Dazu sei es jedoch erforderlich, dass die Flächeninhalte beliebiger Vielecke durch Regeln oder andere abgekürzte Methoden bestimmt werden könnten (N. 12). Von der Untersuchung der Rollkurven und der Evolventen erhofft er sich eine Methode, alle Quadraturen auf Rektifikationen zurückführen zu können (N. 16, 17, 20). Gelegentlich versucht er, mechanische Überlegungen als Hilfsmittel für exakte wie für angenäherte Quadraturen einzusetzen (N. 2, 58).

Ab Januar 1675 wendet sich Leibniz wieder verstärkt den bereits 1673 von ihm praktizierten Verfahren zu, die er teilweise verallgemeinern kann: dem charakteristischen Dreieck (N. 22) und speziell der Segmentbestimmung durch den Transmutationssatz (N. 25, 31) sowie den Betrachtungen statischer Momente (N. 24). Diese Ansätze verfolgt er ab Oktober 1675 weiter (N. 33, 34, 35, 36) und gelangt schließlich in den drei Studien zur *Analysis tetragonistica ex centrobarycis* (N. 38, 40, 44) und in *Methodi tangentium inversae exempla* (N. 46) zu einer gewissen Synthese, die in der Einführung der Symbole dx und $\int$ auch formalen Ausdruck findet. Leibniz geht aus von der bekannten Gleichung für die Momente eines Flächenstücks unter einer Kurve bzgl. der Abszissen- und der Ordinatenachse, die er zunächst in der Schreibweise von Cavalieri angibt: „Omn. yx. ad $x \sqcap \frac{b^2c}{2}$ – Omn. $\frac{x^2}{2}$, ad y" (b u. c sind die Werte der größten Abszisse bzw. Ordinate).

Leibniz bezeichnet die Gleichung als höchsten Gipfel der Schwerpunktmethode. Er hält fest, dass bei gegebenen Momenten einer Figur bzgl. zweier paralleler Achsen auch die Quadratur der Figur gegeben ist. Durch Anwendung des Momentsatzes auf die Ordinatendifferenzen formuliert er den Satz über die partielle Summation (Integration), der ihm schon länger bekannt ist (vgl. VII, 4 N. 10_2 u. 16_4 Teil 3). Beim Versuch, mit diesem und ähnlichen Sätzen weiterzurechnen, erweist sich die traditionelle Notation omn. als unhandlich, so dass Leibniz sie durch $\int$ ersetzt und als Gegenstück zunächst $\frac{x}{d}$, kurz darauf dx als Bezeichnung für die Differenzen einführt (s. u. den Punkt (2) im Abschnitt zur Notation und Rechentechnik). In der zweiten Aufzeichnung stellt er fest, dass genau die Kurven, deren Gleichung als Ergebnis einer Tangentenrechnung bei einer algebraischen Kurve erhalten wird, eine algebraische Quadratrix besitzen. Er ist sich allerdings nicht sicher, ob er über ausreichende Kriterien verfügt, entscheiden zu können, zu welcher Klasse eine beliebige gegebene Kurvengleichung gehört.

Leibniz zählt außerdem eine Reihe von verschiedenen Transformationsmethoden auf, durch die bisher unbekannte Quadraturen auf bekannte zurückgeführt werden können, darunter den Transmutationssatz. In dieser Phase stellt Leibniz auch erste Rechenregeln für den neuen Kalkül auf, z. B. für die lineare Transformation von Abszissen bzw. Ordinaten und die mehrfache Ausführung der Summation (N. 39, 40). Er erkennt, dass bei der Differentiation bzw. der Summation von Produkten und Quotienten nicht die Produkte und Quotienten der Differenzen bzw. Summen der Faktoren das richtige Ergebnis liefern, kann die korrekten Regeln aber noch nicht sofort aufstellen (N. 46). Die Produktregel für die Differentiation berechnet er am 27. November 1675 (N. 51_2). In N. 54_1 vom 21. Dezember 1675 notiert er, dass bei manchen Gleichungen mit Integralen die Grenzen der Summation berücksichtigt werden müssen, und nimmt sich vor, ein Zeichen dafür einzuführen. Außerdem versucht er, die Berechnung der Integrale von Wurzelausdrücken voranzutreiben (N. 60).

Zusammen mit dem neuen Ansatz versucht Leibniz in der Folgezeit, auch die ihm schon vorher geläufigen Verfahren für Transformationen von Integralen weiter fruchtbar zu machen, z. B. den Transmutationssatz (N. 73), das charakteristische Dreieck (N. 59, 61, 76, 77) oder die Schwerpunkt- und Momentbetrachtungen (N. 55, 81, 82, 83, 87). Zu nennen ist in diesem Zusammenhang insbesondere seine Verallgemeinerung der Guldinschen Sätze über Rotationskörper hinaus vom 18. Mai 1676 (N. 76, 77). Am 23. November 1675 greift er die Methode der ein- und umbeschriebenen Polygone wieder auf und empfiehlt die Verwendung bekannter summierbarer unendlicher Reihen, speziell von konvergierenden Doppelreihen nach dem Vorbild Gregorys (N. 50; vgl. auch N. 79 vom 26. Mai 1676).

Auf die Zusammenhänge zwischen Quadraturen und Reihensummierung verweist er des Öfteren (z. B. N. 54_1, 56, 57, 92).

Von Anfang an stehen Leibniz' Untersuchungen in der Infinitesimalmathematik in engem Zusammenhang mit seinen Arbeiten an der arithmetischen Kreisquadratur. So sind seine Entdeckungen des Jahres 1673 (charakteristisches Dreieck, Transmutationssatz) zuerst am Kreis erprobt und werden dann erst verallgemeinert. Generell versucht Leibniz, seine Ergebnisse schrittweise auf immer allgemeinere Klassen von Kurven auszudehnen. Insgesamt hofft Leibniz, alle Quadraturen auf die Kreis- und die Hyperbelquadratur zurückführen zu können (N. 52, 84). Im vorliegenden Band hängen besonders N. 7, 13, 82, 83 mit der Kreisquadratur, N. 2 mit der Quadratur der Kegelschnitte zusammen. Die N. 68, 69 und 74 behandeln zwar die höheren Parabeln und Hyperbeln sowie die Zykloide, stehen aber in direkter Verbindung mit der Abfassung der Abhandlung zur arithmetischen Kreisquadratur. N. 89 und 92 erörtern Wege, zu einem Beweis der Unmöglichkeit einer Lösung des klassischen Problems der Kreisquadratur zu gelangen. Da die Quadratur der Parabeln und Hyperbeln grundsätzlich schon gelöst ist, befasst sich Leibniz bei ihnen hauptsächlich mit der Suche nach vereinheitlichenden Verfahren (N. 56, 79). Die Rektifikation der Hyperbel (N. 5, 39, 52, 56) bzw. Ellipse (N. 39, 56), damit zusammenhängend die Komplanation der Konoide (N. 6) bzw. allgemeiner Rotationskörper (N. 75) und die Rektifikation der höheren Parabeln bzw. Hyperbeln (N. 30, 58) behandelt er in zahlreichen Untersuchungen. Am 10. Oktober 1675 befasst er sich mit der Kubatur eines Kreiskegelstücks, einer Aufgabe, die ihm Dechales stellte (N. 32). Ab Dezember 1675 folgen weitere Studien zu Rektifikationen und Komplanationen (N. 52, 53, 56, 58, 75), sowie zu Rotationskörpern (N. 76, 77, 78). Das Verfahren von Bertet für die Quadratur der höheren Hyperbeln (vgl. III, 1 N. 76) erwähnt Leibniz im Januar 1676 (N. 64). Bei der Quadratur transzendenter Kurven oder den ungelösten Problemen der Rektifikation von Hyperbel und Ellipse versucht er, auch die inzwischen gewonnenen Erkenntnisse zu Evoluten und Evolventen und zu Rollkurven anzuwenden (N. 15, 16, 17, 18, 19, 23, 27_4, 52, 66, 76, 77).

(2) Transzendente Kurven

Leibniz sieht eine der wichtigsten Errungenschaften der zeitgenössischen Mathematik in der Erweiterung des Bereichs der Geometrie über die von Descartes gesteckten Grenzen hinaus. Besonders die Forderung nach der Beschränkung auf diejenigen Kurven, die durch eine algebraische Funktionsgleichung beschrieben werden können (von Descartes als „geometrisch“, von Leibniz im Zeitraum dieses Bandes als „analytisch“ bezeichnet), lehnt Leibniz ab. Er verweist auf die theoretische und praktische Bedeutung vieler Kurven, welche diesem Kriterium nicht genügen, darunter die trigonometrischen und die Logarithmus- bzw. Exponentialkurven (N. 26). Leibniz forscht intensiv an einer exakten Behandlung dieser Kurven, die er seit Herbst 1673 als „transzendent“ bezeichnet (VII, 3 N. 23). So befassen sich bereits die beiden ersten Stücke des Bandes vom Sommer 1674 mit solchen transzendenten Kurven: In N. 1 untersucht er die durch $y = \frac{x^x}{a^{x-1}}$ gegebene Kurve, in N. 2 setzt er sich u. a. mit der Logarithmuskurve auseinander (später auch in N. 57, 59, 88). Gegen Ende des Jahres entwickelt er den Gedanken, die geometrischen Konstruktionen zur Approximation des Kreises dafür zu verwenden, vom Kreis abhängige transzendente Kurven, speziell die Zykloide, durch eine algebraische Kurve zu approximieren (N. 13). Neben den bereits erwähnten Beispielen widmet Leibniz noch weiteren transzendenten Kurven Untersuchungen, die nicht selten durch seine wissenschaftlichen Kontakte veranlasst sind: Im Herbst 1673 hatte Leibniz durch Ozanam von einer Kurve erfahren, die sich Bertet ausgedacht hatte. Leibniz untersuchte diese Kurve, deren Radiusvektor durch die Summe aus dem Radius und dem abgewickelten Bogen eines gegebenen Kreises definiert wird, und bestimmte ihre wichtigsten Eigenschaften (VII, 4 N. 50). Als er Anfang November 1675 einen Brief an Bertet entwirft (III, 1 N. 68), setzt er sich wieder mit der Kurve auseinander (N. 45), die er auch später noch erwähnt (N. 63, 64). Bei der ersten Studie zur Quadratrix vom April 1676 (N. 70) verwendet er die Figur und die Tangentenkonstruktion aus Robervals Manuskript *Observations sur la composition des mouvemens*, bei der zweiten vom Juni 1676 (N. 86) die Figur und zwei Gleichungen aus Barrows *Lectiones geometricae*. In N. 70 verallgemeinert Leibniz die Konstruktionsvorschrift für die Quadratrix, in N. 86 versucht er, durch Einbeziehung der Zykloide und der Kreisevolvente weitere Einsichten über die Quadratrix zu gewinnen. Häufig setzt sich Leibniz mit der Zykloide auseinander, bei der ihm schon 1673 die Quadratur eines Segments geglückt war (VII, 4 N. 17), die er mehrfach als Beispiel heranzieht (N. 11, 31, 42). Ende April bis Anfang Mai 1676 entwirft er eine zusammenfassende Studie zur Quadratur der Zykloide (N. 74) und behandelt kurze Zeit später auch noch weitere Einzelfragen (N. 77, 86, 87).

(3) Andere Themen

Am Rande der Thematik des vorliegenden Bandes liegen Überlegungen zum Unendlichen. In einer Anmerkung zu N. 1 formuliert Leibniz den Satz, dass die Anzahl der Einheiten in allen Zahlen kleiner ist als die Anzahl der Punkte in einer beliebigen Linie, ist sich aber nicht sicher, wie das beigefügte Symbol ℌ für „deliberetur“anzeigt: „In omnibus unitatibus seu Numeris non sunt tot unitates quot in aliqua linea puncta“. Statt des von Wallis eingeführten Symbols ∞ für unendlich schlägt Leibniz den Ausdruck $\frac{a^2}{0}$ vor, wobei 0 für ein unendlich kleines Geradenstück steht: „Infinitum ita exprimit W a l l i s i u s ∞. sed rectius divisione finiti spatii per rectam infinite parvam 0. v. g. $\frac{a^2}{0}$“ (N. 24). Leibniz weist an verschiedenen Stellen auf die Bedeutung von Koordinatentransformationen hin und versucht, sie als Hilfsmittel einzusetzen (N. 15, 20, 26, 37, 39, 51_2, 84, 88, 93, 94, 95, 96). Eine Notiz zur Analysis situs am Ende von N. 76 enthält eine Definition der Relation „zwischen“ für drei Punkte auf einer Geraden. In N. 7_1 und N. 7_2 versucht Leibniz, die Anwendung der Neunerprobe auf Brüche auszuweiten. In einem weiteren Exkurs formuliert er Sätze über Operationen mit Gleichungen in zwei Unbekannten und merkt an, dass es sich hier nicht um Aussagen über Quantitäten, sondern über Qualitäten handle, die ebenfalls streng behandelt werden könnten (N. 7_3). Bei anderer Gelegenheit notiert er Überlegungen zu verschiedenen Arten mathematischer Sätze (N. 55). Beziehungen zwischen der Mathematik und den Naturwissenschaften werden behandelt in Überlegungen zur Mechanik (N. 2, 24, 46, 58, 76), Optik (N. 17), Statik (Beweis des Hebelgesetzes, N. 57, 62) und Hydraulik (N. 64). N. 63 enthält Gedanken zur Zeichentheorie.

Tschirnhaus-Stücke

Tschirnhaus ist Ende September 1675 in Paris eingetroffen und hat sich vermutlich am 1. Oktober Leibniz vorgestellt (s. III, 1 S. LXII). In der Folgezeit kam es bis zu Leibniz’ Abreise aus Paris im Oktober 1676 zu häufigen Zusammentreffen und Gesprächen zu vorwiegend mathematischen Themen, die durch zahlreiche Gesprächsaufzeichnungen dokumentiert sind. Allem Anschein nach war die Begegnung mit Tschirnhaus für Leibniz von nicht geringer Bedeutung. Unter anderem dürfte darin auch der Anstoß für die Wiederaufnahme der Studien zur Infinitesimalmathematik im Oktober 1675 zu sehen sein. Im vorliegenden Band sind diejenigen Gesprächsaufzeichnungen abgedruckt, die sich schwerpunktmäßig mit diesem Bereich beschäftigen. Es handelt sich um die sechs gemeinsamen Aufzeichnungen N. 42, 49, 51_1, 62, 67_1 und 80. Weitere Inhalte aus gemeinsamen Unterredungen erschließen sich zudem aus Erwähnungen in Studien von Leibniz (N. 38, 51_2, 52 und 73).

Im Oktober 1675 führt Leibniz Tschirnhaus seine Quadratur des Zykloidensegments und seine Kreisquadratur mittels der Kreisreihe vor. Er zeigt außerdem die Methode der Reihenentwicklung durch fortgesetzte Division am Beispiel der Hyperbelquadratur (N. 42). Ähnliche Reihenentwicklungen berechnet Tschirnhaus in N. 62 vom Januar 1676.

Die später so genannte Maclaurinsche Trisektrix wird von Tschirnhaus im November 1675 als die Kurve definiert, deren Fläche gleich dem statischen Moment der Ordinate des Halbkreises bzgl. der Ordinatenachse ist. Tschirnhaus stellt die Kurve sowohl durch ihre Gleichung in kartesischen Koordinaten wie durch eine Verhältnisgleichung einfacher geometrischer Größen dar (N. 49). Im selben Gespräch führt Tschirnhaus eine Extremwertberechnung nach der Methode von Fermat durch, er verwendet die Transmutationsmethode von Gregory und zeigt außerdem eine Tangentenrechnung nach seiner eigenen Methode. Eine solche findet sich auch in N. 67_1. In einem anderen Beispiel behandeln Leibniz und Tschirnhaus die inverse Tangentenmethode durch Umkehrung der Normalenmethode von Descartes (N. 51_1). Daneben wird auch in diesen Stücken immer wieder auf die Kreis- und die Hyperbelquadratur Bezug genommen, besonders in N. 80. Außerhalb des eigentlichen Themenspektrums des Bandes fallende Inhalte der Gespräche sind imaginäre Größen (Darstellung in der Ebene, N. 52) und Statik (Hebelgesetz, N. 62).

Terminologie

(1) Quadraturen, Rektifikationen und Differenzen

Neben quadratura verwendet Leibniz auch dimensio oder tetragonismus, eine Gleichung mit einem Integralausdruck nennt er aequatio tetragonistica (N. 40, 54_1, 55, 56, 60). Rektifikation bezeichnet er meist mit dimensio curvae oder extensio, Rektifikation oder Komplanation auch mit expansio, vereinzelt verwendet er curva mensurabilis (N. 30) und curva rectificabilis (N. 38, 87).

Mit quadratrix wird in der Regel die Stammfunktion einer Kurve bezeichnet, manchmal aber auch eine Kurve, deren Quadratur die Quadratur der gegebenen Kurve liefert, z. B. die durch den Transmutationssatz erzeugte Kurve. Ihr Gegenstück ist die figura differentiarum, deren Quadratur die Ausgangskurve ergibt (N. 2).

Leibniz verwendet verschiedene Begriffe, um Kurven zu bezeichnen, deren Quadraturen bzw. Rektifikationen ineinander übergeführt werden können: homogenea (N. 7_4, 8, 17, 22, 33, 34, 40, 50, 86), commensurabilis (N. 34, 35, 39), sylloga, syndota, sygnota (N. 18, 53, 73). Im Januar 1676 erprobt er die Bezeichnung corresolubilis und nimmt sich vor, ein Symbol dafür einzuführen (N. 6). Er bezeichnet speziell eine Kurve $f(x)$ als homolog (oder homogen) zu einer Figur $g(x)$, wenn gilt: $g(x) = \sqrt{f'(x)^2 + 1}$ und damit die Bogenlänge der Kurve gleich der Fläche der Figur ist (N. 2, 16, 17, 20, 38); z. B. ist die Kurve der Parabel einer Hyperbelfläche homolog (N. 2).

Die Differenzen benachbarter Kurvenordinaten bezeichnet Leibniz meist mit differentia, vereinzelt verwendet er differentiola (N. 77, 86). Das Adjektiv differentialis hat Leibniz bereits 1673 einschlägig gebraucht (VII, 4 N. 17), es wird aber im vorliegenden Band in der Grundstufe der Texte nur in N. 96 vom November 1676 benutzt, sonst tritt es in einer späteren Anmerkung (N. 44) bzw. in ergänzten Überschriften auf (N. 60, 93, 96).

(2) unendlich klein
Gegenüber den Schriften des Jahres 1673 ist die Varianz der Bezeichnungen für unendlich klein deutlich zurückgegangen: Der Ausdruck infinitesima wird von Leibniz im vorliegenden Band nur selten verwendet (N. 2, 50, 51_2), dies gilt auch für das vorher häufige minor assignabili (N. 40, 50, 68). In der Regel bezeichnet er eine unendlich kleine Größe mit infinite parva. Eine solche Größe setzt er auch vereinzelt gleich 0 (N. 24) oder sagt, dass Größen, die nur eine unendlich kleine Differenz aufweisen, gleich sind (N. 27_4). Gelegentlich spricht er auch von einer infinita parvitas (N. 16). Den Begriff indivisibilis verwendet Leibniz in diesem Zusammenhang fast nur mehr für die Bezeichnung der Indivisibilienlehre (N. 44, 46, 50, 51_2, 76), nur einmal nennt er eine unendlich kleine Größe minima seu indivisibilis (N. 88).

Zur Notation und Rechentechnik

(1) Vorzeichen:
Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz seit dem Sommer 1673 Doppelvorzeichen (signa ambigua). Ihre Bildung erfolgt überwiegend paarweise. Offenbar bevorzugt Leibniz bis etwa Mitte 1674 die Form ⨦, ⩱; danach bis Ende 1674 ǂ, ‡ (N. 6, aber auch noch in N. 22, 24); später hauptsächlich †, ‡ (N. 27, 33 etc.). 1676 verwendet er auch die gebräuchlichen $\pm$, $\mp$ (z. B. N. 68). Es treten auch zusammengesetzte Zeichen auf, die Unterscheidungen in mehr als zwei Fälle signalisieren (N. 18, 21, 22); vgl. *De la méthode de l'universalité* (gedr. in Couturat, *Opusc. et fragm.*, S. 97–143). Vereinzelt verwendet Leibniz auch griechische Buchstaben als Symbole für Vorzeichen (N. 29). Beispiele:

$$\begin{array}{lll} (1)D, \text{ dat:} & TD \sqcap -TA + AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (2)D \ \ldots & TD \sqcap +TA - AD & EL \sqcap +EC + CL \\ (3)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap -EC + CL \\ (4)D \ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap +EC - CL \end{array}$$

Generaliter ergo TD ita exprimemus:

$$TD \sqcap \ddagger TA \ddagger AD\,,\;\; EL \sqcap \ddagger EC \ddagger CL.\;\; \text{(N. 18)}$$

$$\frac{\dagger\!\!+ x \;\dagger\!\!+\!\ddagger\, b}{a} \sqcap \frac{c}{x}.\ (\ldots)\ \text{Sic clarius: } \frac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \frac{c}{x}.\ \text{(N. 29)}$$

(2) Operationen:

Bei den arithmetischen Grundoperationen, vor allem mit Brüchen, verzichtet Leibniz manchmal auf die sonst von ihm gebrauchten Zeichen $+$; $-$; $\frown$; $\smile$ sowie auf ein Gleichheitszeichen und setzt das Ergebnis lediglich durch einen größeren Zwischenraum von den Operationen ab. Häufiger werden aber die Verbindungen von Zählern und Nennern durch Striche angezeigt, bei Addition, Subtraktion und Division dementsprechend meist durch liegende Kreuze und zusätzliche Zeichen (N. 88). Zeitgemäß sind die Überwärtsdivision (N. 7_1) und das Überwärtswurzelziehen (N. 24) mit ihren charakteristischen Streichungsschemata.

Zu Beginn seines Parisaufenthalts verwendet Leibniz für Gleichheit manchmal ein *f.* oder *f* für facit, das er auch später in stilisierter Form $\not f$ noch bei Nebenrechnungen gebraucht (N. 4, 7_1), meist aber unser heutiges Gleichheitszeichen. Dies gilt für alle datierten mathematischen Handschriften von 1673 bis Anfang 1674, ab Juni 1674 ist der Gebrauch des Gleichheitszeichens $\sqcap$ (stilisierter Waagebalken mit zwei gleichen Gewichten) belegt. Ein wechselnder Gebrauch der beiden Symbole (von offensichtlich späteren Zusätzen abgesehen) ist bei Handschriften Pariser Provenienz selten (z. B. N. 5). Im Laufe des Jahres 1676 kommen zusätzlich aequ. bzw. aeq. (auch ohne Punkt) in Gebrauch (N. 68, 69, 70). Leibniz verwendet die Symbole ⊓ für größer und ⊓ für kleiner.

Potenzen stellt Leibniz meist mit hochgestellten Exponenten dar, daneben benutzt er $\boxed{2}$ u. ä. Beispiele:

$\boxed{\tfrac{1}{2}}x.$ id est $\sqrt{x}$ (N. 88) $\qquad c \overset{(8)}{\sqcap} \dfrac{zba}{\omega d}.$ et $c^{\omega} \overset{(9)}{\sqcap} \dfrac{zba}{\omega d} \frown^{\omega}.$ (N. 68)

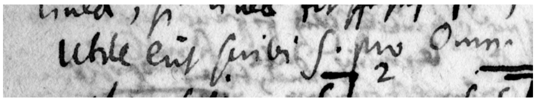
Für die Darstellung von Wurzeln verwendet Leibniz ab dem Frühsommer 1673 das Wurzelsymbol, wobei er in der Regel keinen Wurzelbalken setzt, wenn der Radikand eindeutig bestimmt ist (z. B. N. 1). Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor- wie nachgestellt.

Beispiele für höhere und unbestimmte Wurzeln:

$\sqrt{③ 2ax^2 + x^3}$ (N. 1) $\qquad \surd\, (z-1)\, \dfrac{x^{2z}}{a^2}$ (N. 30)

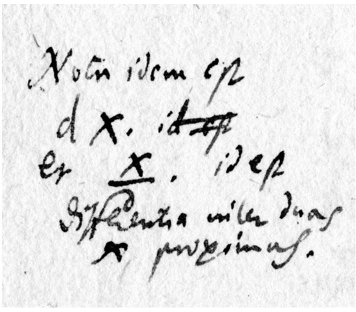
Ab Ende Oktober 1675 führt Leibniz schrittweise die Symbole d und $\int$ für Differentiation und Integration ein. In N. 40 vom 29. Oktober ersetzt er zunächst die von

Cavalieri übernommene Bezeichnung omnes durch die Abkürzung für summa, das später so genannte Integralzeichen $\int$:

* 

LH 35 VIII 18 Bl. 2 v° (Ausschnitt)

Anschließend benutzt er d als Abkürzung für differentia. Um die Verminderung der Dimension bei der Differentiation anzuzeigen, entwirft Leibniz zunächst eine Bruchschreibweise, bei der er das Symbol d in den Nenner stellt. Nach wenigen Tagen gibt er diese wieder auf und ersetzt in N. 46 vom 11. November 1675 den Bruch $\frac{x}{d}$ durch das Symbol dx:

** 

LH 35 V 9 Bl. 1 v° (Ausschnitt)

Leibniz gelangt damit zu einer Bezeichnungsweise, die Differentiation und Integration analog behandelt, und legt so den Grundstein für die moderne Notation. Dennoch verwendet er auch danach noch ältere Bezeichnungen wie diff. (N. 51_2, 70, 79), omn. (z. B. N. 55, 70, 76, 77, 86) und sum. bzw. summ. (N. 70, 79, 86), teilweise auch neben den neuen Symbolen, und sehr häufig weiterhin β und ω für die Differenzen der Abszissen bzw. Ordinaten; vereinzelt kommt in frühen Texten noch die unitas constructionis 1 als Abszissendifferenz vor (N. 5 Teil 3):

$$\sqrt{a^2 + x^2 + 2x + 1} - \sqrt{a^2 + x^2} \sqcap \frac{z}{a}$$

Bei zusammengesetzten Ausdrücken schreibt Leibniz manchmal auch das Operationszeichen unter und nicht vor den Klammerbalken (N. 40, 53).

* LH 35 VIII 18 Bl. 2 v° (Ausschnitt). Überarbeiteter Ausschnitt eines Digitalisats der GWLB.

** LH 35 V 9 Bl. 1 v° (Ausschnitt). Überarbeiteter Ausschnitt eines Digitalisats der GWLB.

(3) Klammern:

Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken (vinculum) sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. $\llcorner$ und $\lrcorner$ wiedergegeben). Manchmal zeigen die Klammern auch die Schritte einer fortlaufenden Rechnung an. Beispiel (N. 39):

$$t^2 \sqcap \omega^2 \boxed{2} \frac{\overline{-2h - lz - n}}{2gz + l\omega + m}.\ \text{Ergo}\ \llcorner\llcorner \frac{\omega^2}{t^2} \sqcap \llcorner\llcorner\llcorner \boxed{2} \frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n} \lrcorner\lrcorner + 1 \lrcorner\lrcorner\lrcorner \surd \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap s.$$

Dies entspricht den folgenden Umformungen:

$$[\mathrm{I}]\ t^2 = \omega^2 \left(\frac{-2h - lz - n}{2gz + l\omega + m}\right)^2, \quad [\mathrm{II}]\ \frac{\omega^2}{t^2} = \left(\frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n}\right)^2,$$

$$[\mathrm{III}]\ \sqrt{\left(\frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n}\right)^2 + 1} = s.$$

(4) Wiederholungszeichen und Indexbezeichnungen:

Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz wiederholt auftretende Bestandteile der Formeln (sowohl Operatoren wie Terme) durch entsprechende Punktierung bzw. durch einfaches Freilassen. Die Punktierung gibt manchmal die Dimension des wiederholten Elements wieder. Beispiel (N. 67_2):

$$\left.\begin{array}{r} - \quad b^2 f\, y^2 - \ 4bctf\ y - 4c^2t^2 f \\ - \ b^2 e\, y^3 - \ \ 4bcte\ .. \ - 4c^2t^2 e\ . \qquad\quad \\ - \ b^2 y^4 - 4bct\ ... - 4c^2t^2 e\ .. \qquad\qquad\qquad \end{array}\right\} \sqcap ☿\, ☽^2.$$

Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz nach dem Vorbild von Descartes gelegentlich vorangestellte Ziffern (N. 58, 86). Üblich ist bei ihm auch sukzessive Klammerung, die ihrerseits wieder durch Ziffern oder sogar Variablen dargestellt werden kann. Beispiel (N. 50):

$$\begin{array}{cc} x & y \\ (x) & (y) \\ ((x)) & ((y)) \end{array}$$

$(x) \sqcap \surd xy$ seu (x) media geometrica inter x et y vel $((x)) \sqcap \sqrt{(x)(y)}$ etc. vel generaliter $\left(\underline{\omega(}x\underline{)\omega}\right) \sqcap \surd\ \left(\underline{\omega - 1(}xy\underline{)\omega - 1}\right)$

(5) Auslassungszeichen:
Nicht auftretende bzw. wegfallende Terme werden wie bei Descartes durch den Asterisk $*$ angezeigt (N. 8, 17).

(6) Koeffizienten:
Binomialkoeffizienten: Leibniz hebt diese Koeffizienten gelegentlich als wesentliche Zahlen (numeri essentiales) durch besondere Kennzeichnung hervor. Beispiel (N. 7_1):

$$1x + \frac{6l}{a}y - 7m \sqcap 0, \text{ et quadrando fiet:}$$
$$x^2 + \boxed{2}\frac{6l}{a}yx - \boxed{2}7mx, + \frac{36l^2}{a^2}y^2 - \boxed{2}42\frac{lm}{a}y + 49m^2 \sqcap 0$$

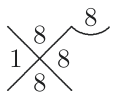
(7) Leibniz rechnet gelegentlich fortlaufend, d. h. er verwendet bei Gleichungsketten Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter, s. o. das Beispiel unter (3).

(8) Leibniz schreibt in Anlehnung an Viète Gleichungen oft homogen. Das Verfahren dient überwiegend zur Rechenkontrolle, ohne dass es immer konsequent durchgeführt wird. Wechsel zwischen homogener und inhomogener Schreibweise kommen manchmal vor, z. B. in N. 96.

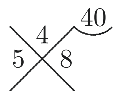
(9) Zur Überprüfung algebraischer Rechnungen setzt Leibniz oft spezielle Zahlenwerte ein, die den betreffenden Größen beigefügt werden (s. o. das Beispiel zu (6)).

N. 7 enthält darüber hinaus einen Exkurs zur Neunerprobe, die Leibniz bei rein numerischen Rechnungen meist mit dem üblichen Neunerprobenkreuz darstellt. Beispiel (N. 7_1):

$$\begin{array}{r} 118 \\ \underline{8} \\ 944 \end{array}$$



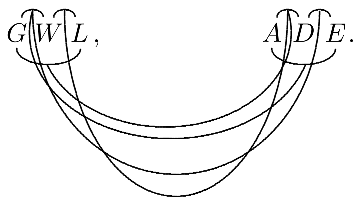
$$\begin{array}{r} 14 \\ \underline{8} \\ 112 \end{array}$$



Im folgenden Beispiel geben die Zahlen in einfachen Klammern den Neunerprobenwert von Zähler bzw. Nenner an (N. 7_3):

$$\frac{\overset{(5)((1))}{-\boxed{2} \frown -128\gimel a^2 \boxed{8}}}{\underset{(4)}{8r38\aleph\boxed{2}8r}}$$

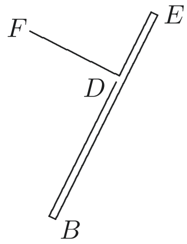
(10) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere Zuordnungsstriche. Beispiele:



Triangula similia (...) habebimus aequationes
$GW, AE \sqcap GL, AD.$
$GW, DE \sqcap WL, AD.$
$GL, DE \sqcap WL, AE.$

(N. 33)

FD soit à DE, comme EB à BD (...)



(N. 63)

(11) Umformungen:
Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz in der Regel mittels mehrfacher Klammerung, Streichungen oder abgerundeter Umrahmungen angezeigt. Davon zu unterscheiden ist die Hervorhebung gültiger Terme, die durch kreisförmige, ovale oder eckige Umrahmungen wiedergegeben wird. Die Reihenfolge der Rechenschritte kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichungen oder durch beigefügte Zähler. Dabei werden im Rechengang neu auftretende Koeffizienten oder Terme gelegentlich mit entsprechend indizierten leeren Rahmen oder mit Sonnensymbolen versehen. Beispiele:

$$2\,5\,e^2d^2 - d^4 + 2\boxed{}\,p^2d^2 - 4\,2\,avd^2 - 2d^3e, -6\,5\,e^2p^2\,\boxed{+d^2p^2} - p^4 +$$
$$4\,2\,avp^2 + 2dep^2, +12\,10\,ave^2\,\boxed{-2avd^2}\,\boxed{+2avp^2} - 4a^2v^2 - 4avde$$
$$\sqcap$$
$$e^4\,\boxed{+e^2p^2}\,\boxed{-2e^2av} - 2e^3d\,\boxed{+3d^2e^2}.$$

(N. 7_3)

$$2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \underset{/\backslash}{y\ l} \ddagger 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \omega l \sqcap \left.\underset{\odot - \frac{a^2}{b^2}}{2a^2}\ \omega^2 \ \ddagger \underset{\odot \ddagger 2\frac{a^2}{b^2}}{2a^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\right\}\ \omega\ \boxed{\left.-2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \ddagger 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\right\}\ \omega a^2}$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\omega^2 \ddagger 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \omega}}$$

(N. 33)

Bei Mehrfachstreichungen werden aus Gründen der Lesbarkeit die betreffenden Größen nur einmal durchgestrichen und die Anzahl der Streichungen durch darüber (darunter) gesetzte Schrägstriche in entsprechender Häufigkeit angezeigt. Beispiel (N. 5):

$$+\underset{\cdots\cdot}{\cancel{\frac{z^4}{a^4}}} - \underset{\cdots\cdot}{\cancel{4z^2}} - \underset{\cdots\cdot}{\cancel{\frac{4z^2x^2}{a^2}}} - \underset{\cdots\cdot}{\cancel{\frac{4z^2\beta x}{a^2}}} + 3\underset{//}{\cancel{4}}\,a^4 + 6\underset{//}{\cancel{8}}\,a^2x^2 + 6\underset{//}{\cancel{8}}\,\beta a^2x + 3\underset{//}{\cancel{4}}\,x^4 + 6\underset{//}{\cancel{8}}\,\beta x^3 + \cancel{4\beta^2x^2} \quad \sqcap$$

$$\underset{//}{\cancel{a^4}} + \underset{//}{\cancel{2a^2x^2}} + \underset{//}{\cancel{2\beta x a^2}} + \underset{//}{\cancel{x^4}} + \underset{//}{\cancel{2\beta x^3}}$$

(12) Besondere Zeichen:

In N. 7_3 führt Leibniz das Zeichen $\sim\!\sim$ für ähnlich ein, in N. 37 verwendet er I^y zur Kennzeichnung einer Folge mit Index y, in N. 56 einfache Punkte und stehende bzw. liegende Doppelpunkte als Platzhalter für unbestimmte Koeffizienten bzw. Exponenten:

$$M(\sqcap \sqrt[\cdot\cdot]{\cdot m^{\cdot} + : m^{\cdot\cdot}} \text{ etc.}) \sqcap m$$

Siegmund Probst Uwe Mayer

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Insbesondere gilt:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird gemäß den Editionen der Klassiker normalisiert. Insbesondere werden i und j sowie u und v entsprechend vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Missverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, dass bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Auch die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der Ausgabe. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluss eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist L) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

1. DE FIGURA AD ALTIOREM SEMPER ATQUE ALTIOREM AEQUATIONEM ASCENDENTE
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 323. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 323 r°. Bl. 323 v° leer. Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben wie VII, 3 N. 32–34.

Si sit Curva, cujus applicatae sint progressionis harmonicae, videri poterat irreducibilis ad aliquam aequationem, et contra est tamen, cum sit Hyperbola. Inquirendum est in figuram, quae ad altiorem semper atque altiorem aequationem ascendat, ut ejus applicata maxima sit Trianguli, sequens Parabolae, rursus sequens parabolae cubicae, et ita porro. Nihil video quod prohibeat eam esse Geometricam, describi tamen, non potest, opinor. Sed puto tamen tangentium ejus loca seu loca functionum esse aequationis capacia. Poterit sic exprimi $\dfrac{x^\beta}{a^{\beta-1}} = y$. Et aequatio erit: $x^\beta = ya^{\beta-1}$. Unde investi-

---

8 *Darüber:* In omnibus unitatibus seu Numeris non sunt tot unitates quot in aliqua linea puncta.

8–10 *Am Rande:* Inquirendum in curvam cujus applicatae sunt progressionis geometricae vel compositae.

11 applicata *(1)* minima *(2)* maxima *L*   13 esse *(1)* Geometrica. *(2)* aeqvationis *L*

---

10 figuram: Die von Leibniz gegebene Beschreibung der Kurve läuft auf die Gleichung $x^x = ya^{x-1}$ hinaus. Der Ansatz der Kurvengleichung als verallgemeinerte Parabelgleichung führt deshalb bei der Bestimmung der Subtangente nicht zum richtigen Ergebnis.

gatio tangentium haec: $\beta p x^{\beta-1} = y a^{\beta-1}$, seu $p = \dfrac{y a^{\beta-1}}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{x^\beta}{\beta x^{\beta-1}} = \dfrac{x}{\beta}$. Et quoniam numeri β. crescunt cum ipsa x. uniformiter, ideo p semper erit eadem, seu infinite parva, et ideo tangens ducenda in idem semper punctum, nempe verticem, et ideo figura erit Triangulum. Si inverso modo sumas applicatas parabolarum ad axem, erit $p = \beta x$, et ideo infinite longa seu figura erit rectangulum.

$2ax^2 + x^3 = y^3$. fiet $4apx + 3px^2 = 3y^3$. Ergo $p = \dfrac{6ax^2 + 3x^3}{4ax + 3x^2} = \dfrac{6ax + 3x^2}{4a + 3x} = \dfrac{2ax + x^2, \frown 2}{4a + 3x}$ vel $\dfrac{2ax^2 + x^3, \frown 2}{4ax + 3x^2}$[,] per p dividatur $y, = \sqrt{\textcircled{3}2ax^2 + x^3}$, fiet $\dfrac{\sqrt{\textcircled{3}2ax^2 + x^3} \frown 4ax + 3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}2ax^{[2]} + x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}2ax^{[2]} + x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}2ax^{[2]}[+x^3]}} = \dfrac{4ax + 3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}} \llcorner\llcorner 2ax^2 + x^3 \lrcorner \frown \lrcorner 2ax^2 + x^3} =$

1 *Am Rande:* $ax^2 = y^3$
$2axp = 3y^3$

5 *Darunter:* An fortasse infinitae varietates varietatum componunt denique figuram quoniam infinitae paraboloeides, tot scil. quot numeri, non nisi lineam componunt.

2 ideo *(1)* tangens *(2)* p *L* 8–5,1 $\dfrac{\sqrt{\textcircled{3}\,2ax^2 + x^3} \frown 4ax^2 + 3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}\,2ax + x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\,2ax + x^3} \frown \sqrt{\textcircled{3}\,2ax}}$ = *(1)* $\dfrac{4ax + 3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}} \llcorner 2ax^2 + x^2 \lrcorner}$ *(2)* $\dfrac{4ax + 3x^2}{\sqrt{\textcircled{3}} \llcorner\llcorner 2ax^2 + x^3 \lrcorner \frown \lrcorner 2ax^2 + x^3}$ = $|\sqrt{\textcircled{3}}$ *erg. Hrsg.* $|$ $\dfrac{64a^3x^3 + 144a^2x^4 + 108ax^5 + 27x^6}{2a^2x^4 + 4ax^5 + x^6}$ *L* 11 infinitae *(1)* aeqvationum *(2)* varietates *L*

7 $\dfrac{2ax + x^2, \frown 2}{4a + 3x}$: Richtig wäre $\dfrac{2ax + x^2, \frown 3}{4a + 3x}$. Leibniz rechnet vom nächsten Rechenschritt an nur noch mit $\dfrac{2ax + x^2}{4a + 3x}$.

$\sqrt{③\,\dfrac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2a^2x^4+4ax^5+x^6}} = \sqrt{③\,\dfrac{64a^3+144a^2x+108ax^2+27x^3}{2a^2x+4ax^2+x^3}}$ quadrabile.

4,8–5,1 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{rrrrrrr} & & 16a^2x^2 & + & 24ax^3 & + & 9x^4 \\ & & & & 4ax & + & 3x^2 \\ \hline & & 48a^2x^4 & + & 72[a]x^5 & + & 27x^6 \\ 64a^3x^3 & + & 96a^2x^4 & + & 36[a]x^5 & & \\ \hline 64a^3x^3 & + & 144a^2x^4 & + & 108ax^5 & + & 27x^6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 96 \\ \underline{48} \\ 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 72 \\ \underline{36} \\ 108 \end{array}$$

$2a^2x^4+4ax^5+x^6$

4 *(1)*
$$\begin{array}{rrrr} & 16a^2x^2 + & 24ax^3 + & 9x^4 \\ & & 4ax\ + & 3x^2 \\ \hline & 48a^2x^4 + & 72x^5 & +27x^6 \\ 64a^3x^3 + & 96a^2x^4 + & 36x^5 & \end{array}$$
$\dfrac{64a^3x^3+144a^2x^4+108ax^5+27x^6}{2ax^2+x^3} = \dfrac{64a^3x+144a^2x^2+108ax^3+27x^4}{2a+x}$ | haec figura est qvadrabilis. *streicht Hrsg.* | *(2)* $16a^2x^2$ *L*

---

9 $2a^2x^4+4ax^5+x^6$: Richtig wäre $4a^2x^4+4ax^5+x^6$. Leibniz übernimmt das fehlerhafte Ergebnis aus der Nebenrechnung in die weitere Rechnung.

2. DE CURVIS HOMOLOGIS. DE QUADRATRICE HYPERBOLAE
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 233–234. 1 Bog. 2°. 3 1/2 S.
Cc 2, Nr. 1101

Datierungsgründe: s. N. 1.

[*Teil 1*]

1			1			
	1			9		
2		1	10		81	
	2			90		729
4		2	100		810	
	4			900		
8		4	1000		8100	
	8			9000		
16		etc.	10000		81000	
	etc.			90000		
32			100000			
64						
128						
256						
512						
1024						
2048						
4096						

[*Teil 2*]

Quotiescunque terminus unus numeratoris est in nominatore tunc divisionis portio fieri, subtrahique potest ab unitate vel parallelogrammo ut $\dfrac{2ay^2}{y^2+a^2} = 2a - \dfrac{2a^3}{y^2+a^2} = a \frown 2 - \dfrac{2a^2}{y^2+a^2}$. Jam $2 - \dfrac{2a^2}{y^2+a^2}$, vel $1 - \dfrac{a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{a^2+y^2-a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{y^2}{y^2+a^2}$ sed et dici poterat $\dfrac{y^2}{y^2} - \dfrac{a^2}{y^2+a^2} = \dfrac{y^4+a^2y^2-a^2y^2}{y^4+a^2y^2}$ quae omnia eodem redeunt.

[*Teil 3*]

Curva sinubus Homologa

Quadrato sinus auferatur a^2: residui Radix quadrata dat differentias figurae cujus Curva sinubus homologa. Fiet: $\sqrt{2ax-x^2-a^2}$ sed quia necesse est esse a quod subtrahitur minus quam x, ideo fiet potius $\sqrt{2ax-x^2-a^2-x^2+2ax}$ sive $\sqrt{4ax-2x^2-a^2}$. Imo sic potius: Quadratum constans quod subtrahendum est, debet esse minus quam x^2, potes ergo sumi cujus voles parvitatis, ut quam longissime progredi possis ad minutissimos etiam sinus. Sed quod omnibus x minus sit, seu quod sit omnibus analogum sumere non potes. Deberet enim esse punctum. Jam ergo assumatur ba, pro quadrato constante subtrahendo, vel posito $b = \dfrac{a}{2}$, fiet $\dfrac{a^2}{2}$. et habebimus $\sqrt{2ax-x^2-\dfrac{a^2}{2}}$. Ergo

vel $\left(\dfrac{a^2}{3}\right)$

etc.

$2ax - x^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{2}$. Sed hoc intractabile. Ergo pro sinubus sumamus: $a^2 - x^2 = y^2$,

3 ut | $\dfrac{\cancel{2}ay^2}{y^2+a^2}$ *ändert Hrsg.* | $= 2a$ *L* 7 *(1)* Figura *(a)* segmentis circuli *(b)* sinubus *(2)* Curva *L*

7 f. Homologa *(1)* $\sqrt{2ax-x^2-a^2} = \text{dif}$ *(2)* Qvadrato sinus *(a)* addatur a^2 fiet: $2ax - x^2$ *(b)* auferatur a^2 | fiet *streicht Hrsg.* |: residui *L* 9 Curva *(1)* Circulo *(2)* sinubus *L* 11 potius: *(1)* pro a^2 substituatur b^2, *(2)* Qvadratum *L*

7 sinubus: Im Folgenden ist der sinus als Ordinate des Halbkreises aufzufassen.

unde subtrahendo aliquod quadr. constans, v. g. $= \frac{a^2}{2}$ fiet $\frac{a^2}{2} - x^2 = y^2$. Ergo Circuli alterius, cujus radius minor est radio dati, figura quadratrix habet Curvam sinubus homologam. Idem de Hyperbola eodem modo demonstratur, cum ejus aequatio possit esse $a^2 + x^2 = y^2$, unde eodem modo fit: $\frac{a^2}{2} + x^2 = y^2$. Atqui alibi ostensum est Curvam Parabolicam esse figurae Hyperbolicae homologam. An ergo Parabola Hyperbolae quadratrix intelligi potest, non opinor, ista ergo conferenda ac concilianda sunt.

Inquiramus nunc in Curvas figuris cognitis, ut Triangulo, Parabolae, homologas.

Trianguli aequatio est $x = y$. Fiet: $\sqrt{x^2 - a^2} = y$ et pro x posito $a + x$, fiet $\cancel{a^2} + x^2 + 2ax - \cancel{a^2} = y^2, = 2ax + x^2$. Ergo Figura Quadratrix Hyperbolae curvam habet Triangulo homologam.

Trilinei P a r a b o l i c i aequatio est $\frac{x^2}{a} = y$. Fiet regula nostra: $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$. sive $x^4 - a^4 = a^2y^2$, et pro x posito $a + x$, fiet $a^2 + 2ax + x^2, \square = a^4 + 4a^3x + 2a^2x^2 + 4a^2x^2 + 4ax^3 + x^4$ sive $\sqrt{\cancel{a^4} + 4a^3x + 6a^2x^2 + 4ax^3 + x^4 - \cancel{a^4}} = ay$. et hujus figurae quadratrix curvam habet Trilineo parabolico homologam. Ipsa figura autem differentiarum videtur esse ex Hyperboloeidum genere. Unde fieret $a + x = \sqrt{\sqrt{a^2y^2 + a^4}}$ sive pro $a + x$ posito x fieret: $x^4 = a^2y^2 + a^4$. vel $\frac{x^4}{a^2} = y^2 + a^2 = y + a, \frown a - y$ vel $\sqrt{x^4 - a^4} = ay$ ut ante.

$$\begin{array}{ccc} y + a, & \frown & a - y \\ \vee & & \\ n & \frown & n - 2y \end{array}$$

2 Curvam *(1)* Circulo *(a)* sy *(b)* homo *(2)* sinubus *L* 4 $\frac{\mathrm{a}^2}{2} - \mathrm{x}^2$ *L ändert Hrsg.* 14 parabolico *(1)* homogeneam *(2)* homologam *L* 15 $\mathrm{a} + \mathrm{x} =$ *(1)* $\sqrt{\sqrt{\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^4}}$ *(2)* | $\sqrt{\mathrm{a}^2\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^4}$ *ändert Hrsg.* | sive *L*

4 ostensum: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520. 16 $y^2 + a^2 = y + a, \frown a - y$: Die Zerlegung von $y^2 + a^2$ ist fehlerhaft. In der Nebenbetrachtung (s. S. 9) setzt Leibniz verschiedene Zahlenbeispiele für die Faktorisierung an und vergleicht die Produkte mit dem jeweils nächstniedrigeren und nächsthöheren Quadrat. Die Nebenbetrachtung bricht ohne Ergebnis ab.

Caeterum eodem modo omnes quoque reliquae paraboloeides tractari possunt, sumenda tamen in exemplum composita $x^3 = y^2 a$, haec tractatur non ut Trilineum, sed ut parabola ipsa, fit enim latus curvae homogeneae: $\frac{x^3}{a^3} = \frac{y^2}{a^2}$. Et quadratum ejus $\frac{x^6}{a^6} = \frac{y^4}{a^4}$,

---

8,16 *Nebenbetrachtung:*

	3	1	2
	5	2	3
	7	3	4
	9	4	
vel	9	8	1
	10	7	3
	11	6	5
	12	5	7
	13	4	9

si $a + y = n$
ergo $a - y = n - 2y$

$n \frown n - 2y$

9	-0	$+0$	
30	-5	$+6$	
			5
55	-6	$+9$	
			4
84	-3	$+16$	
117	-17	$+4$	

Ergo nihil hinc duci potest.

2 composita *(1)* $ax^2 = y^2$, haec tractatur non ut Trilineum sed ut *(a)* Hyper *(b)* parabola ipsa, fit enim $\sqrt{ax^2} = y$. atqve adeo *(2)* $a^2x^4 = y^2a$ *(3)* $x^3 = y^2a$ *L* 20 55 | -6 | $+11$ *L ändert Hrsg.*

detrahatur 1. fiet $\dfrac{\sqrt{x^6-a^6}}{a^3} = \dfrac{y}{a}$. Unde figurae $\dfrac{\sqrt{x^6-a^6}}{a^2} = y$ quadratrix curva huic paraboloeidi homologa. Figura autem ista dabit $x^6 - a^6 = y^2a^4$ cujus quadratura dabit quaesitum.

In simplici parabola $y^2 = ax$. unde $\dfrac{y}{a} = \dfrac{\sqrt{ax}}{a}$, hujus quadr. $\dfrac{ax}{a^2} = \dfrac{x}{a}$. cui auferatur 1. fit $\dfrac{x-a}{a} = \dfrac{ax-a^2}{a^2}$ erit $\sqrt{ax-a^2}$ vel $\sqrt{ax} = y$. Et hujus nimirum ipsius parabolae, quadratrix figura, Curvam habebit parabolae homologam quare Geometrice describi potest.

Operae pretium est quaerere Curvam homologam figurae segmentorum, $\dfrac{x}{\sqrt{2ax-x^2}}$, ejus quadr. $\dfrac{x^2}{2ax-x^2}$, ablata unitate $= \dfrac{2ax-x^2}{2ax-x^2}$, fiet $\dfrac{x^2-2ax+x^2}{2ax-x^2}$, vel $\sqrt{\dfrac{x-2a+x}{2a-x}} = \dfrac{y}{a} = \sqrt{\dfrac{2x-2a}{2a-x}}$. Ergo $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{2x-2a}{2a-x}$. Et $2ay^2 - xy^2 = 2xa^2 - 2a^3$. Et $2ay^2 = 2xa^2 - 2a^3 + xy^2$, vel $2ay^2 - 2a^3 = 2xa^2 - xy^2$, vel $\dfrac{2ay^2-2a^3}{2a^2-y^2} = x$. Hujus ergo figurae quadratrix Curvam habet segmentis Circuli homologam.

Si sumas $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}$, cujus $\square$, $\dfrac{y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$ et ablato 1. $\sqrt{\dfrac{2y^4-a^4-2a^2y^2-y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}}$,

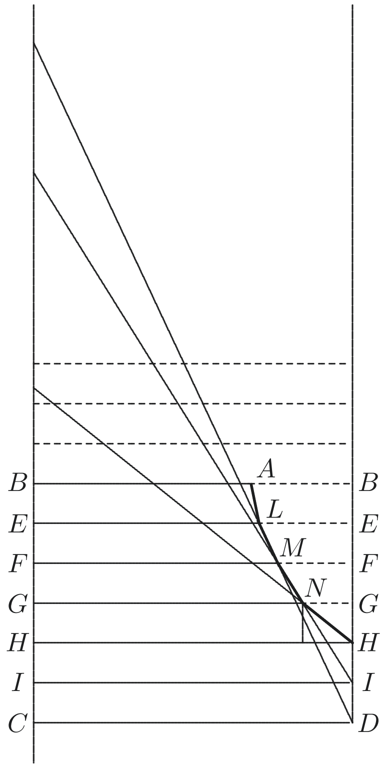
2 paraboloeidi *(1)* homog *(2)* homologa. *L* 4 unde *(1)* $\mathrm{\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{ax}{a^2}}$ *(a)* = *(b)* seu $\mathrm{\dfrac{y}{a^2} = \dfrac{x}{a}}$ *(2)* | $\mathrm{\dfrac{y^2}{a^2}}$ *ändert Hrsg.* | $= \mathrm{\dfrac{\sqrt{ax}}{a}}$ | seu *streicht Hrsg.* |, huius *L* 4 cui *(1)* addatur 1. fit $\mathrm{\dfrac{x+a}{a} = \dfrac{xa+a^2}{a^2}} =$ *(2)* auferatur *L* 13 sumas *(1)* $\mathrm{\dfrac{2y^2}{a^2+y^2}}$, auferasqve *(a)* 1, fiet *(b)* $\mathrm{a^2+y^2}$, fiet $\mathrm{\sqrt{\dfrac{2y^2-a^2-y^2}{a^2+y^2}}}$. Et *(2)* $\mathrm{\dfrac{y^2}{a^2+y^2}}$ *L*

11 $2ay^2-2a^3 = 2xa^2-xy^2$: Richtig wäre $2ay^2+2a^3 = 2xa^2+xy^2$. Dies beeinträchtigt die folgende Gleichung, jedoch nicht die Schlussfolgerung. 13 $\dfrac{y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$: Leibniz benutzt in der weiteren Rechnung das Doppelte dieses Ausdruckes, $\dfrac{2y^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}$.

sive $\sqrt{\dfrac{y^4 - a^4 - 2a^2y^2}{a^4 + 2a^2y^2 + y^4}}$ hujus figurae quadratrix Curvam habet segmentorum residuis homologam.

[*Teil 4*]

De Quadratrice Hyperbolae



[*Fig. 1*]

Punctum A feratur a recta AB, versus rectam CD, iis legibus, ut motus semper sit aequabilis sive uniformis. Et tamen recta BC. divisa in partes aequales infinitas punctis

7 uniformis, *(1)* tempus autem tale, ut recta tamen, *(a)* qv⟨o⟩ *(b)* divisa *(2)* Et L

B. E. F. G. per quas parallelae infinite productae transeant. Punctum A ponatur ex recta B venire in rectam E, tempore aliquo (utcunque infinite parvo) quod appelletur a. ex E vero in F, tempore $a+1$, posito 1 esse infinitesimam temporis partem et ex F in G tempore $a+2$, et G in H, tempore $a+3$ ita semper ut velut BH e. g. est ad BE, ita accessio temporis ex H in I sit ad accessionem temporis ex E in F, atque ita differentiae temporum, erunt ut quadrata altitudinum. Nam tempus quo pervenitur ex B in F, erit a ductum in numerum terminorum seu rectam $B[F,]$ hoc loco $2, = 2a, +$ semiquadrato ejusdem, $\frac{4}{2}$. Rectius cum BE, sit 1, erit accessus a. Ergo ex B in E feretur tempore 1, ex E in F, tempore $1+\frac{1}{a}$[,] ex F in G tempore $1+\frac{2}{a}$. ex G in H, tempore $1+\frac{3}{a}$. ex H in I. tempore $1+\frac{4}{a}$, eadem ex B in G tempore $BG+\frac{BG^2}{2a}$ et ex B in I, tempore $\frac{2a\,BI+BI^2}{2a}$. Sunt ergo tempora $\frac{2ax+x^2}{a}=y$ seu ut applicata figurae cujus talis est aequatio $\frac{2ax+x^2}{a}=y$. Composita ex ordinatis Trianguli et Trilinei parabolici punctis. Unde fit $2ax+x^2=ya$, seu $2ax+x^2+a^2=ya+a^2$. Unde fit $\underbrace{x+a}_{x}=\sqrt{ya+a^2}$ seu

6 altitudinum *(1)* | seu *streicht Hrsg.* | dif *(2)*. Nam *L* 8 accessus *(1)* $\frac{1}{\mathrm{a}}$ *(2)* a *L* 10 eadem *(1)* erit longitudo rectarum, seu spatiorum per *(2)* ex *L* 13 $= \sqrt{\mathrm{ya}+\mathrm{a}^2}$ *(1)* seu $\mathrm{x}=\sqrt{2\mathrm{yb}+\frac{\mathrm{b}^2}{4}}$, posito esse $\mathrm{x}=$ ei qvod ante $\mathrm{x}+\mathrm{a}$, et *(a)* $\frac{\mathrm{b}^2}{4}=$ *(b)* $\mathrm{b}=\frac{\mathrm{a}}{2}$ Erunt ergo tempora ut appli *(2)* seu *L*

5 f. differentiae ... altitudinum: Die wörtliche Formulierung gibt die Abhängigkeit der Fallzeit von der überwundenen Höhe nicht korrekt wieder. In der anschließenden Diskussion kommen einige Ungenauigkeiten hinzu. So lautet der Ausdruck für die Zeit bei Bewegung von B nach F nicht $2a+\frac{4}{2}$, sondern $2a+\frac{2\cdot 1}{2}$ (Z. 7 f.). Nach dem von Leibniz vorgenommenen zweimaligen Wechsel der Bezeichnung für die Zeitzuwächse von 1 über a zu $\frac{1}{a}$ ergibt sich für die Zeit bei Bewegung von B nach G dementsprechend $BG+\frac{BG(BG-1)}{2a}$ (Z. 10). Die Beziehung zwischen Höhe x und Zeit y müsste $\frac{(2a-1)x+x^2}{2a}=y$ (Z. 11) lauten. Die allgemeine Überlegung wird dadurch jedoch nicht beeinträchtigt.

$x = \sqrt{ya}$. posito esse $x =$ ei quod ante $x + a$. et y esse $=$ ei quod ante $y + a$.

Ecce ergo habebimus definitionem Figurae Quadratricis:

Si Punctum A ex BA, versus CD, uniformi semper motu feratur, sed obliquato ita cursu, ut tempora descensuum (vel spatia AL. AM. AN. AH) sunt ut applicatae parabolicae basi parallelae, earundem semper altitudinum; motu suo describet curvam, quae quadraturam Hyperbolae dabit.

Figura segmentorum Hyperbolae est opinor: $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}} = y$. unde $x^2a^2 = 2axy^2 + x^2y^2$ seu $xa^2 = 2ay^2 + xy^2$, sive $xa^2 - xy^2 = 2ay^2$, vel $\dfrac{2ay^2}{a^2 - y^2} = x$. Caeterum datae $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax + x^2}}$ tentemus invenire homogeneam, fiet: $\dfrac{2x}{\sqrt{2ax + x^2}}$ et ejus $\Box$ erit $\dfrac{4x^2}{2ax + x^2}$, cui auferatur 1, fiet $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \dfrac{y}{a}$, seu $\dfrac{3x^2 - 2ax}{2ax - x^2} = \dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{3x - 2a}{2a - x}$.

8 f. datae *(1)* | $\dfrac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$, *streicht Hrsg.* | vel eius duplo $\dfrac{2\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{xa}}{\sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}$ *L*
10 addatur *L ändert Hrsg.*

---

10 $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax - x^2}} = \dfrac{y}{a}$: Richtig wäre $\dfrac{\sqrt{3x^2 - 2ax}}{\sqrt{2ax + x^2}} = \dfrac{y}{a}$. Der Fehler beeinträchtigt die folgende Gleichung.

3. METHODUS TANGENTIUM INVERSA, IGNOTA
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 30 Bl. 1. 1 Ausschnitt von ca 23,8 x max. 13,0 cm. Untere Schnittkante schräg geschwungen. 1 S. auf Bl. 1 r°. Bl. 1v° leer.
Cc 2, Nr. 844

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung ist auf Papier mit einem Wasserzeichen geschrieben, das von August 1673 bis Juni 1674 belegt ist. Das darin wiedergegebene Gespräch mit Huygens dürfte der Anlass für die Untersuchung N. 4 gewesen sein, in der sich Leibniz mit den von Huygens als Indiz für eine inverse Tangentenmethode von Descartes angeführten Cartesischen Ovalen auseinandersetzt.

Methodus tangentium inversa, ignota

Dicebam Cl^mo^ Hugenio, videri mihi quaedam loca methodo Cartesii inveniri non posse, sive quasdam figuras Geometricas non posse aliquando ex ejus regulis duci; eas nimirum, ubi non applicatarum sed tangentium vel perpendicularium, aut linearum ad Tangentes relatarum data est ad abscissas relatio, breviter me non reperire in Cartesio methodum tangentium inversam.

Id verum esse fassus est Hugenius, sibique ipsi ea problemata videri difficillima: nec se nunc quidem quenquam mortalium nosse, qui ea solvendi certam habeat methodum, adeo ut ne illud quidem definiri possit an figura quaesita sit impossibilis. Attamen videri sibi Methodum ejusmodi fuisse notam Cartesio, neque enim aliter illas figurarum quarundam curvarum ad refractiones aptarum proprietates potuisse invenire.

Dixi fortasse invenisse casu. At respondit Hugenius s i b i i d v e r i s i m i l e n o n v i d e r i , quoniam figurarum quarundam ex illis aequationes ad gradus quosdam valde compositos ac prolixas aequationes ascendant.

Quaesivi an non putaret Huddenium aliquid tale habere, cum tantopere de maximis ac minimis laboraverit; negavit.

10 M e t h o d u s ... i g n o t a *in anderer Tinte erg. L*

11 methodo Cartesii: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106 [Marg.]. 15 inversam: vgl. die Studie *Ex datis tangentibus invenire figuram* [Herbst 1673], VII, 4 N. 41. 19 figurarum: DESCARTES, *a. a. O.*, S. 50–65. 25 laboraverit: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507 bis 516.

Cartesium id nemini quod sciat communicasse: se pauca quaedam in parabola aliisque nonnullis habere, sed quae longe absint a suo voto. Videri sibi Cartesium quaedam e sua Tangentium methodo subodoratum.

14,21 f. *Zu* s i b i ... v i d e r i *in anderer Tinte:* Postea aliter sensit, ex quo reperit methodum qua Cartesius ad suas figuras dioptricas in *Geometria* ejus expositas, facile pervenire potuit.

---

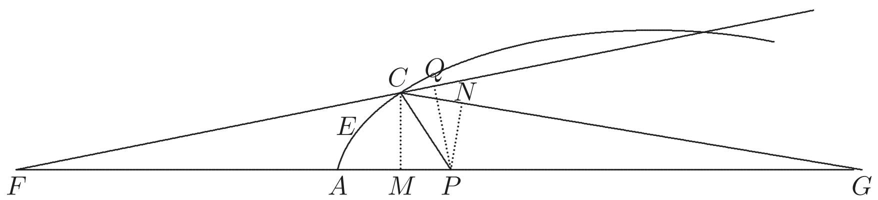
1 pauca: vgl. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 59–90 [Marg.] (*HO* XVIII S. 189 bis 241). 3 Tangentium methodo: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–50 [Marg.]. 4 f. reperit: vgl. den Brief von Huygens an Leibniz vom 22. November 1679 (III, 2 N. 359 S. 887) sowie Chr. Huygens, *Traité de la lumiere*, 1690, S. 110–112 (*HO* XIX S. 529 f.). Möglicherweise bezieht sich Leibniz auch auf Mitteilungen von Huygens bei ihrem Treffen von Ende November 1676 in Den Haag (vgl. den Brief von Leibniz an Oldenburg vom 18./28. November 1676, III, 5 N. II S. 9). Huygens hatte sich seit Oktober 1676 wieder mit den Cartesischen Ovalen beschäftigt (vgl. *HO* XIX S. 424 f.).

4. PROBLEMA CARTESII METHODI TANGENTIUM INVERSAE
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge: Bl. 9 v°, 10 r°, 10 v°, 9 r°. Auf Bl. 9 v° Seitenzählung: pag. 1, auf Bl. 10 r° Seitenzählung: pag. 2.
Cc 2, Nr. 845

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück sind auf Papier mit demselben Wasserzeichen geschrieben. Während Leibniz in N. 4 durchgängig das Gleichheitssymbol = verwendet, wechselt er in N. 5 zwischen = und $\sqcap$. Die beiden Stücke dürften daher auf Sommer 1674 zu datieren sein. N. 4 dürfte im Anschluss an das in N. 3 dokumentierte Gespräch mit Huygens über eine inverse Tangentenmethode bei Descartes entstanden sein. Leibniz befasst sich mit den Cartesischen Ovalen wieder bis Ende Dezember 1674 in N. 14 u. 17.

Cartesius lib. 2. *Geometriae* resolvit problemata quaedam Methodi Tangentium inversae, eorumque dedit demonstrationem, sed inveniendi methodum non explicuit, quaedam etiam aliis quaerenda reliquit, *ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum reperiant, eo pluris rerum illic demonstratarum inventionem aestiment*. Illud cujus solutionem dedit, suppressa tamen inveniendi ratione, huc redit.



[*Fig. 1*]

Invenire Curvam AEC, ejus ad rectam datam FG habitudinis, ut sumtis in ea recta punctis certis G. et F. a diversis curvae partibus, et sumto quolibet in curva puncto C,

18 AEC, *(1)* talis naturae, ut recta qvaedam duci possit *(2)* eius *L* 18 f. ut *(1)* sumto in ea puncto | dato *erg.* | G ab una curvae parte *(2)* sumtis in ea *(a)* certis *(b)* | recta *erg.* | punctis *L* 19 F *(1)* ab una curvae parte *(2)* a *L*

12 problemata quaedam: Zur Behandlung der Ovale und ihrer Eigenschaften vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 42–44, 48 f., 50–65 [Marg.]. 14 f. *ut* ... *aestiment*: vgl. *a. a. O.*, S. 65. Dieselbe Passage wird in N. 17 S. 142 Z. 14–18 ausführlich zitiert. 17 *Fig. 1*: Den algebraischen Gegebenheiten entsprechen weder die Figur bei Descartes noch Leibniz' eigene Skizze. Fig. 1 gibt letztere möglichst genau wieder. Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht abgedruckt. 18 *AEC*: vgl. *a. a. O.*, S. 57–59.

ad quam perpendicularis sit recta PC, rectae datae FG occurrens in P. junctisque et si opus est productis rectis FC. GC. ductae ad eas perpendiculares PQ. et PN. rationem habeant datam $\frac{d}{e}$.

Cartesius ipse observat Triangula PQF et CMF esse similia, ideoque $\frac{CF}{CM} = \frac{FP}{PQ}$. Item Triangula rectangula PNG et CMG esse similia, ideoque $\frac{GP \frown CM}{CG} = PN$.

Nunc ad calculum veniamus: Esto $FM = x$. $GF = a$. $CM = y$. $GM = a - x$. $CF = \sqrt{x^2 + y^2}$. $CG = \sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}$. $GP = p$. Ergo $PN = \frac{py}{\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$.

$FP = a - p$. Ergo $PQ = \frac{FP \frown CM}{CF} = \frac{a - p, \frown (y)}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \frac{dp(y)}{e\sqrt{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}}$. Ergo $\frac{dp}{a - p} = e\sqrt{\frac{y^2 + a^2 - 2ax + x^2}{x^2 + y^2}} = e\sqrt{1 + \frac{a^2 - 2ax}{x^2 + y^2}}$ et invertendo:

---

8 *Am Rande:* $\frac{PQ}{PN} = \frac{d}{e}$. Ergo $PQ = \frac{d}{e}PN$.

1 f. et ... productis *erg. L* 6 veniamus: *(1)* AM = x. FA = a GA = b. CM = y. ideoqve FM = *(2)* imo su *(3)* Esto *L* 9 $\mathrm{e}\sqrt{1 + \frac{\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}}$ *(1)* $\frac{\mathrm{dp}}{\mathrm{a}} - \mathrm{d} = \mathrm{e}\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}}$. *(a)* Ergo p− *(b)* Ergo $\mathrm{p} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}}\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} + \mathrm{a}$ *(aa)* Nihil aliud ergo restat qvam ut inveniatur summa sive qvadratura omnium $\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2 + \mathrm{y}^2}} =$ *(bb)* Iam p = *(cc)* Jam GP(= p) + MP(= m) + FM(x) = GF(a) Ergo m = a− *(dd)* Jam *(aaa)* GA *(bbb)* PM(= m) = GM(a − x) − GP $\left(\frac{\mathrm{ae}}{\mathrm{d}}\sqrt{\frac{\mathrm{y}^2 + \mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ax}}{}}\right)$ *(2)* et *L*

---

4 observat: *a. a. O.*, S. 58.

$\frac{1}{e}\sqrt{\frac{x^2+y^2}{y^2+a^2-2ax+x^2}} = \frac{a-p}{dp}$ seu $\frac{a}{dp}-\frac{1}{d}$. Ideoque $\frac{CF}{e,CG}+\frac{1}{d}=\frac{a}{dp}$, vel $\frac{dCF}{ae,CG}+\frac{1}{a}=\frac{1}{p}$, et invertendo $\frac{ea^2,CG}{adCF+aeCG}=p$.

Habito $p=\frac{ea^2CG}{aeCG+adCF}$, inde fieri potest: $a-\frac{adCF}{eCG,+dCF}=p$. Ideo $MP = GM(a-x)-GP(=p)$ erit $\frac{ad\frown CF}{eCG+dCF}-x$.

Sed placet eundem valorem aliter investigare: ponendo $\frac{dp}{a-p}=\beta e$. seu $\beta=\frac{CG}{CF}$. fiet $\frac{a-p}{\cancel{d}p}=\frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p}-1=\frac{d}{\beta e}$, et $\frac{a}{p}=\left(\frac{d}{\beta e}+1\right)\ \frac{d+\beta e}{\beta e}$.

Ergo $p=\frac{\beta ea}{d+\beta e}$ sive $a-\frac{ad}{d+\beta e}$. Unde $MP=\frac{ad}{d+\beta e}-x$. Qui valor idem cum priore, et potest ita explicari:

$\underset{m}{\underset{\wedge}{MP}} = \frac{ad}{d+e\sqrt{1+\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}}}$. Igitur $\frac{1}{m}=\frac{d+e\sqrt{\ldots}}{ad}$, et $\frac{1}{me}-\left(\frac{d}{ad}\right)\ \frac{1}{ae}=\frac{\cancel{e}\sqrt{\ldots}}{ad}$ ideoque $\frac{da^2\cancel{e}-m\cancel{e}ad}{ame^{\cancel{2}}}=\sqrt{\ldots}$. Igitur $\frac{d^2a^4-2d^2a^3m+m^2a^2d^2}{a^2m^2e^2}=1+\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ vel $\frac{d^2a^4\,\text{etc.}\ldots}{\ldots}-1=\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$, ideoque $\frac{d^2a^4-2d^2a^3m+m^2a^2d^2-m^2a^2e^2}{m^2a^2e^2}=\frac{a^2-2ax}{y^2+x^2}$ et

---

3 *Nebenrechnung:* $\frac{a}{a+b}=\frac{a+b-b}{a+b}\ ⨍\ 1-\frac{b}{a+b}$

9 $\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{d+e}\sqrt{1+\frac{\mathrm{a^2-2ax}}{\mathrm{y^2+x^2}}}}$. *(1)* Jam ex aliunde inventis constat *(2)* tunc *(3)* Igitur *L* 12 $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}}=$ *(1)* | 1+ *streicht Hrsg.* | *(2)* $\frac{\mathrm{a+b-b}}{\mathrm{a+b}}$ *L*

---

9 MP: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $-x$. Im weiteren Verlauf der Rechnung kommen weitere Fehler hinzu, die die Überlegungen bis S. 19 Z. 15 beeinträchtigen. Insbesondere ist die Gleichung S. 19 Z. 10 falsch.

invertendo $\dfrac{y^2+x^2}{a^2-2ax} = \dfrac{d^2a^4\,\text{etc.}\dots}{\dots.}$, ideoque $\dfrac{y^2}{2} = \dfrac{d^2a^4\,\text{etc.}\dots \frown a^2-2ax}{2\dots.} - \dfrac{x^2}{2}$.

Jam quia differentia inter duo proxima $\dfrac{y^2}{2}$ ipsi m aequalis est, per alibi demonstrata, ideo omisso $\dfrac{y^2}{2}$ atque jam ex aequatione eliminato, conferamus duos ejus valores, sumendo nempe (x) majoris $= x+\gamma$. Unde fiet:

$$\frac{d^2a^4\,\text{etc.}\dots \frown a^2-2ax-2a\gamma}{2\dots} - \frac{x^2+\gamma^2+2x\gamma}{2}, -\frac{d^2a^4\,\text{etc.}\dots \frown a^2-2ax}{2\dots} + \frac{x^2}{2} = m$$

ideoque $\dfrac{d^2a^4\,\text{etc.}\dots \frown 2a\gamma}{2\dots} - \dfrac{2x\gamma}{2} = m$, sive $\dfrac{d^2a^5-2d^2a^4m+m^2a^3d^2-m^2a^3e^2}{m^2a^2e^2} - x = m$,

ac proinde $d^2a^{\cancel{5}3} - 2d^2a^{\cancel{4}2}m + m^2a^{\cancel{3}}d^2 - m^2a^{\cancel{3}}e^2 - m^2\cancel{a^2}e^2x - m^3\cancel{a^2}e^2 = 0$. seu

$$\begin{array}{l} -e^2m^3 - e^2m^2x + ad^2m^2 - 2d^2a^2m + d^2a^3 = 0. \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\quad - ae^2 \end{array}$$

$$\text{Unde } x = \underset{\bigtriangledown}{-\,m} + \underset{\square}{\frac{ad^2-ae^2}{e^2}} - \underset{\substack{\text{Hyper-}\\ \text{bola}}}{\frac{2d^2a^2}{e^2m}} + \underset{\substack{\text{Hyperbo-}\\ \text{loeides}}}{\frac{d^2a^3}{m^2}}.$$

Unde cum data summa omnium m detur summa omnium x, et dato valore ipsius y, detur summa omnium $\underline{m}$, sequetur dato valore ipsius y. dari quadraturam Hyperbolae, nisi error calculo insit.

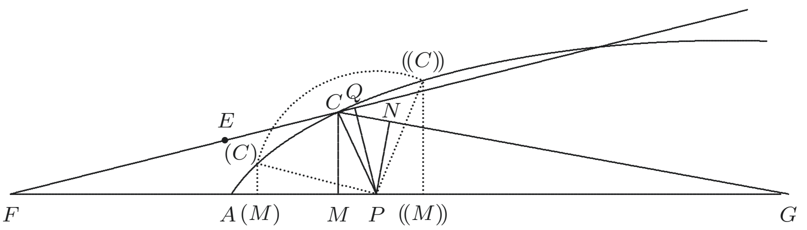
Jam in aequatione ipsius y^2 valorem exprimente, pro $2ax$ et x^2, substituatur ejus valor, habebitur aequatio in qua non nisi y et m, reperientur, ut aequationem in qua non nisi x et m, jam habuimus. Sed et m puto eliminari tandem poterit. Sed haec methodus si succederet non est universalis, non enim semper valor y^2 absolute habetur. Opus est arte tollendi semper unam ex tribus incognitis, pluribusque quando problema est determinatum. Sed hinc videretur sequi posse semper tolli etiam unam quando duae sunt incognitae et problema est determinatum, fingendo scilicet adhuc plures incognitas, et tollendo.

---

23 *Dahinter:* NB.

---

2 alibi demonstrata: vgl. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. 10 Unde: Leibniz übernimmt die folgende inkorrekte Gleichung für FM in N. 14 S. 117 Z. 14 f.



[*Fig. 2*]

Ut Cartesii literas retineamus esto $AG = b$. $AF = FE = c$. $FC = c + z$. $A(M) = y$. Ponatur jam C. in (C), erit $C(M)^2 = c^2 + 2z + z^2 + c^2 + 2cy + y^2$. $FP = c + y + m$. Jam $\frac{FP \frown CM}{CF} = PQ$, et $\frac{GP \frown CM}{CG} = PN$. Jam $PQ = \frac{d}{e}PN$. Ergo $\frac{FP \frown \cancel{CM}}{CF} = \frac{\cancel{d}GP \frown \cancel{CM}}{\frac{e}{d}CG}$. Jam $FP + GP = a$.

Item $CF^2 = FM^2 + CM^2$, et $CG^2 = CM^2 + a^2 - 2aFM + FM^2$. Ergo quia $\frac{FP^2}{CF^2} = \frac{GP^2}{\frac{e^2}{d^2}CG^2}$. Ergo $\frac{FP^2}{FM^2 + CM^2} = \frac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$. Ergo $\frac{a^2 - 2aFP}{FP^2} + \cancel{1} = \frac{a^2 + 2aFM}{FM^2 + CM^2} + \cancel{1}$, et ponendo $a - 2FP = r$, fiet $-FP = \frac{r-a}{2}$, et $FP = \frac{a-r}{2}$, et $FP^2 = \frac{a^2 - 2ar + r^2}{4}$. Eodem modo $a + 2FM = s$. fiet $FM = \frac{s-a}{2}$, et $FM^2 = \frac{s^2 - 2sa + a^2}{4}$ ideoque, invertendo superiorem rationem habebimus: $\frac{a^2 - 2ar + r^2}{\cancel{4}r} =$

2 Cartesii literas: vgl. Descartes, *a. a. O.*, S. 57. Leibniz' Bezeichnungen stimmen nur teilweise mit denen Descartes' überein. 3 $C(M)^2$: Auf der rechten Seite müsste es $-c^2 - 2cy - y^2$ heißen. Die Gleichung wird nicht weiterverwendet. 7 $\frac{a^2 - 2aFP + FP^2}{a^2 + 2aFM + FM^2 + CM^2}$: Im Nenner müsste vor $2aFM$ ein $-$ stehen; der Bruch wäre überdies mit $\frac{d^2}{e^2}$ zu multiplizieren. Zusammen mit einem weiteren Versehen gehen diese Fehler in die Gleichung in r und s in Z. 10 – S. 21 Z. 1 ein und beeinträchtigen die Richtigkeit aller weiteren Überlegungen. Im Verlauf der Argumentation unterlaufen Leibniz außerdem noch weitere Fehler.

$\dfrac{s^2-2sa+a^2+CM^2}{\cancel{4}s}$, unde $\dfrac{a^2}{r}\cancel{-2a}+r=s\cancel{-2a}+\dfrac{a^2}{s}+\dfrac{CM^2}{s}$ sive $\dfrac{a^2}{r}+r-s-\dfrac{a^2}{s}-\dfrac{CM^2}{s}=0$. Unde fiet melius esse non imponere nomina lineis, et calculum per lineas potius quam per literas transigere, donec ad extremum appareat quae commodius elidantur. Jam ponamus $CM=y$. fiet: $a^2s+r^2s-s^2r-a^2r-y^2r=0$. Jam si lineam FP, aut ex ea pendentem r velut cognitam sumamus, et pro arbitrio assumtum punctum C, eadem erit aequatio cujus radices, vel s et y dupliciter assumi possunt. Eadem proveniente aequatione, modo eadem maneat r, et a. Sed in nostro casu eas radices cogitandum est esse aequales, et $(C)M=$ ipsi $((C))((M))$. Ac quaerenda proinde aequatio ejusdem formae, in qua duae sint incognitae, duarum quaelibet significationum aequalium: cum ad simplicem methodum tangentium aequatio duas habens radices aequales non nisi unius sit incognitae. Forma nostra est

$$\begin{array}{lllll} -r\,y^2 & -r\,s^2 & +r^2\,s & & =0. \\ & & +a^2 & -a^2\,r & \end{array}$$

$y-e$, $\square=y^2-2ey+e^2$. vel ducamus in se invicem $y-e \frown s-f$ fiet $ys-yf-es+ef$. Sed deest y^2 et s^2. Ideo quaeratur quantitas arbitraria, quae in hoc productum multiplicata faciat $\ldots\ y^2 \ldots\ s^2 \ldots\ s \ldots$ eaque tot arbitrariarum literarum diversarum, ut si superiori aequationi datae comparetur, determinatio obtineatur. Utile foret Bartholiniana *de constitutione aequationum* ad eas usque producta, quae sunt duarum, et plurium incognitarum, ut cum aliis ejusdem formae, comparentur.

$y-e \frown s-f$ seu $ys-yf-es+ef=\ldots\ y^2.\ ts^2 \ldots\ vs.\ w$. Inveniendus ergo valor ipsarum e, et f.

---

14 *Gestrichene Nebenrechnung am Rande:*
$$\begin{array}{l} s\ -\ x \\ s\ +\ x \\ \hline s^2-x^2 \end{array}$$

5 punctum | r *ändert Hrsg.* |, eadem *L* 9 qva *(1)* tres sint indeterminatae *(2)* duae *L* 14 e^2. *(1)* $s-p,^2.\ s^2-2ps$ *(2)* | $s-q\ \ s^2-2qs+s^2$ *streicht Hrsg.* | $=e^2$, fiet aeqvatio y^2 *(3)* vel *L* 18 constitutione *(1)* et limitibus *(2)* aeqvationum *L* 20 w. *(1)* Ergo $ys-yf-es+ef=\ldots$ *(2)* Ergo $y^2-ys+yf=$ *(3)* Ergo $y^2 \begin{array}{l}-sy+\\+f\end{array}$ *(a)* $\dfrac{s^2-2sf+f^2}{4}$ *(b)* $s^2-2sf+f^2=$ *(4)* Inveniendus *L*

---

17 f. Bartholiniana: Gemeint ist das von R. Bartholin herausgegebene Fl. DEBEAUNE, *De aequationum natura, constitutione et limitibus*, 1659, *DGS* II S. 49–152.

Est autem $e = \dfrac{-ys+yf+y^2+ts^2+vs+w}{-s+f}$ et $f = \dfrac{-ys+es+y^2+ts^2+vs+w}{-y+e}$, et substituendo pro e ejus valorem, habebitur valor ipsius f. sine e et valor quoque utriusque sine f, et e. et, quia ubilibet licet substituere f pro s, et e pro y, facile inde fieri potest valor qui libuerit. Hoc autem modo habebitur aequatio formam habens similem datae, eaque duarum radicum aequalium. Sed artis foret ista breviter atque eleganter consequi posse. Beaune non tradidit modum inveniendi quae de constitutione aequationum prodidit, sed hoc modo videtur id semper fieri, et datae aequationi alia ejusdem formae constitui posse. Caeterum hic facilitas eo major, quod signa pro arbitrio assumi possunt seu brevius $ys-yf=ny^2$. Ergo $s-f=ny$. Et $f=s-ny$. $es=ts^2+vs$. Ergo $e=ts+v$. Ergo $y-ts+v$, ⌢, $s-$⌞$s+ny$⌟. Multiplicando fiet: $sy-ts^2+vs-sy+ts^2-vs+ny^2-tsny+vny$. Error in calculo, resumatur: $ys-yf=ny^2$. Ergo $s-f=ny$. $(=0.)$ $-es=ts^2+vs$. Ergo $e=-ts-v$, tandemque $ef=w$. Ergo $f=\dfrac{w}{e}=s-ny$. Sed $s=\dfrac{e+v}{-t}$. Ergo $\dfrac{w}{e}=\dfrac{e+v}{-t}-ny$.

Unde et ipsius e valor facile habetur. Et per valorem e, valor ipsius f. sola ex incognitis y. tantum concurrente. Valoribus illis substitutis in eorum locum factaque multiplicatione produci debet ny^2. ts^2. vs. w. sed et si in aequatione illa $\dfrac{w}{e}=\dfrac{e+v}{t}-ny$ pro ny poneretur ne uti certe fieri potest; ob aequalitatem, tunc patet e, pariter et f. absolute haberi. Ac proinde radicum y et s. valorem purum. Indeque institui potest aequationis hujus arbitrariae cum data comparatio, quae necessario solvet problema. Imo melius mox:

Cartesius tradidit methodum complendi omnia loca aequationis cum una est incognita. Tradenda methodus complendi cum sunt plures.

8–10 *Zum gestrichenen und wieder gültig gemachten* seu … ny⌟: Maneat.

6 posse. *(1)* Bartholinus non tradidit *(2)* Beaune *L* 6 de *(1)* limitibus *(2)* constitutione *L* 8–10 possunt | seu … Et *(1)* qvia *(2)* f … ny⌟ *gestr. und wieder gültig gemacht* | *(a)* Ergo y *(b)* Multiplicando *L* 13 f. ny *(1)* et $y = \dfrac{e+v}{tn} - \dfrac{w}{en} =$ *(2)* Unde *L*

---

6 Beaune: vgl. die Erl. zu S. 21 Z. 17 f. 21 Cartesius: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 74 f.

$ys - yf - es + ef \frown y + ts - w$, dabit:

$$\boxed{y^2s} - y^2f - \boxed{eys} + \overset{e}{\overset{\vee}{eyf}} + (tys^2) - \overset{e}{\overset{\vee}{tysf}} - (ts^2e) + \underset{s}{\underset{\wedge}{setf}}$$

$$- \underset{e}{\underset{\wedge}{ysw}} \qquad + \underset{e}{\underset{\wedge}{wyf}} + \underset{f}{\underset{\wedge}{wes}} - wef,$$

$$\text{Unde} \quad \begin{array}{llll} y^2s + tys^2 - fy^2 + tes^2 - tfes & + wef \\ \quad - eys - tes^2 \qquad\qquad\quad - \ we & + e^2f \end{array}$$

sive $\begin{array}{l} - fay^2 - tes^2 - \ tfe \ \ s + wefa = 0, \\ \qquad\quad - wea \ \ + e^2fa \end{array}$ comparanda cum $\begin{array}{l} ray^2 - ars^2 + r^2as - a^3r. \\ \qquad\qquad\qquad + \ a^3 \end{array}$

$f = -r$. $t = \dfrac{ar}{y}$. $r^2 - wy = r^2 + a^2$. Ergo $w = \dfrac{a^2}{y}$.

Ecce aequationem identicam ejusdem secum ipso.

Quanquam autem de calculo non responderim, methodum tamen detectam arbitror plenam et accuratam, quam in jam cognitis experiri placet.

---

10 f. *Darunter:* Locus Ellipsis.

8 $\dfrac{\mathrm{ar}}{\mathrm{y}}$ *(1)* et ra − we *(2)* $\mathrm{r}^2 - \mathrm{wy} =$ *(a)* $\mathrm{ra} + \mathrm{a}^2$ | Ergo *streicht Hrsg.* | $\mathrm{w} = \dfrac{\mathrm{r}^2 - \mathrm{ra} - \mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$. | Tandem *streicht Hrsg.* | *(aa)* w *(bb)* $-\mathrm{r}^3\mathrm{a} + \mathrm{r}^2\mathrm{a}^2 + \mathrm{ra}^3 - \mathrm{y}^2\mathrm{ra} = -\mathrm{a}^3\mathrm{r}$ *(aaa)* fiet $\mathrm{r}^2\mathrm{a}$ | $= \mathrm{a}^2\mathrm{r}$. *streicht Hrsg.* | *(bbb)* fiet $-\mathrm{r}^3\cancel{\mathrm{a}} + \mathrm{r}^2\mathrm{a}^{\cancel{2}} + 2\mathrm{ra}^{\cancel{3}2} - \mathrm{y}^2\mathrm{r}\cancel{\mathrm{a}} = 0$ et $\mathrm{s} = -\mathrm{r}$ Unde *(aaaa)* + sr *(bbbb)* $+\mathrm{s}^{\cancel{3}2} + \mathrm{s}^{\cancel{2}}\mathrm{a} - 2\cancel{\mathrm{s}}\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2\cancel{\mathrm{s}}$ | $= 0$ *streicht Hrsg.* | *(b)* r^2 *L* 12 Locus *(1)* Hyperbolae. Attamen non curva quaesita. *(2)* Ellipsis *L*

---

10 arbitror: Das Verfahren, durch Bestimmung von Doppelwurzeln einer Gleichung das inverse Tangentenproblem rein algebraisch zu behandeln, führt nicht zum Ziel. Leibniz verfolgt den verfehlten Ansatz weiter bis Januar 1675 in den Studien N. 7, 8, 9, 14, 17, 20, 21 und 27.

5. DIFFERENTIAE SEU ELEMENTA FIGURARUM
[Sommer 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2b Bl. 136–137. Rest eines Bog. 2°. Von Bl. 137 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 17 x 10 cm, unten von ca 17 x 4 cm. 2 2/3 S. Textfolge Bl. 136 r°, 137 v°, 136 v°. Bl. 137 r° leer.
Cc 2, Nr. 1280 A–C

Datierungsgründe: s. N. 4.

[*Teil 1*]

D i f f e r e n t i a e s e u e l e m e n t a f i g u r a r u m
u b i e t d e l o c i s a d s u p e r f i c i e m

$\frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{x+\beta}$, vel $\frac{a^2x + a^2\beta - a^2x}{x^2 + x\beta}$ vel $\frac{a^2}{x^2}$. differentia applicatarum Hyperbolae.

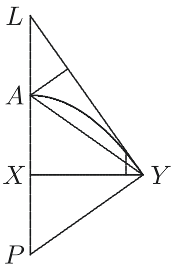
Jam $1 + \frac{a^4}{x^4}$ facit $\frac{x^4 + a^4}{x^4}$. Ideoque latus infinite parvum Polygoni infinitanguli Hyperbolici $\frac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x^2} \sqcap \frac{y}{a}$, quaeritur summa omnium y. Ea enim data, datur et dimensio Curvae Hyperbolicae. Fiet $a\sqrt{x^4 + a^4} \sqcap yx^2$ aequatio Figurae quae curvae Hyperbolicae homogenea est, unde fit $a^2x^4 + a^6 \sqcap y^2x^4$, divisis omnibus per x^4, habebimus $a^2 + \frac{a^6}{x^4} \sqcap y^2$,

---

19 *Nebenbetrachtung zur Stufe (1) der Variante zu Z. 12, nicht gestrichen:* $a^4 \sqcap x^2y^2 - x^2a^2$. Ergo $y^2 \sqcap \frac{a^4 + a^2x^2}{x^2}$.

9 f. D i f f e r e n t i a ... f i g u r a r u m *(1)* adde de loci *(2)* u b i ... s u p e r f i c i e m *erg. L*
12 $\frac{\mathrm{x}^4 + \mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^4}$ |, vel *streicht Hrsg.* *(1)* $\frac{\sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2}}{\mathrm{x}^2}$ *(2)* $\frac{\sqrt{\mathrm{x}^4 + \mathrm{a}^4}}{\mathrm{x}^2}$ *gestr.* | Ideoqve *L* 14 $\sqcap$ yx² *(1)* locus Curvae Hyperbol *(2)* aeqvatio *L*

vel $\sqrt{\sqrt{y^2-a^2}} \sqcap \dfrac{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}{x}$. Ergo $x \sqcap a^2\sqrt{\sqrt{\dfrac{a}{y^2-a^2}}}$. Porro datur summa omnium y^2. Summa autem omnium x^2 facit $a^4\sqrt{\dfrac{a}{y^2-a^2}}$ quae quantum judico nondum datur.



[*Fig. 1*]

$[a \frown\ ]\sqrt{1+\dfrac{a^4}{x^4}} \sqcap y = XY$. Hujus figurae ut quaeratur quadratura, investiganda Tangens nempe $a^2 + \dfrac{a^6}{x^4}\ -a^2- \dfrac{a^6}{x^4\,\text{etc.}}$ fiet $\dfrac{4x^3a^6}{2x^8} \sqcap \dfrac{2a^6}{x^5}$. Reducta $= XP$ inter quam et productam est media proportionalis y, ita ut sit $\dfrac{a^2+\dfrac{a^6}{x^4}, \frown x^5}{2a^6} \sqcap \dfrac{a^2x^5+a^6x}{2a^6} \sqcap LX$.

Si reductarum summa alia methodo investigetur redibit y^2. Quaesivimus differentias ordinatarum Hyperbolae ad Asympt. Quaeramus et ad axem.

Aliter quaeramus $-\sqrt{a^2+x^2} + \sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2} = z$ fiet

---

4 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{ccccc}
 & & x^2 + 2\beta x & + \beta^2 & \\
 & & x^2 + 2\beta x & + \beta^2 & \\
\hline
x^4 & 2\beta x^3 & 1\beta^2 x^2 & 2\beta^3 x + \beta^4 & \\
 & 2 & 4 & 2 & \\
 & & 1 & & \\
\hline
x^4 & 4\beta x^3 & 6\beta^2 x^2 & 4\beta^3 x & \beta^4
\end{array}$$

9 $+\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2+2\beta\mathrm{x}+\beta^2}$ *(1)*, fiet 2βx vel 2x, differentia applicatarum Hyperbolae ad axem. Jam *(a)* $\mathrm{a}^2 + 4\mathrm{a}$ *(b)* addantur qvadrata a^2, et $4\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$ *(aa)* fiet $\sqrt{\mathrm{a}}$ *(bb)* fiet *(2)* = z *L*

---

1 $\dfrac{a^2\sqrt{\sqrt{a}}}{x}$: Richtig wäre $\dfrac{a\sqrt{a}}{x}$; Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter, die Überlegung wird dadurch nicht grundsätzlich beeinträchtigt. 4 $a^2+\dfrac{a^6}{x^4}$: Leibniz berechnet die Subnormale XP als halbe Differenz der y^2. 7 *Fig. 1*: Die Kurve AY entspricht nicht der im Text gegebenen Gleichung. 9 fiet: In der folgenden Gleichung fehlt vor dem Wurzelausdruck der Faktor 2. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die Überlegung bis S. 26 Z. 5.

$2a^2+2x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}-\sqrt{a^2+x^2,\frown a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}},\sqcap z^2$ et

$3\cancel{4}a^4+6\cancel{8}a^2x^2+8a^2\beta x+3\cancel{4}x^4+6\cancel{8}\beta x^3+4\beta^2x^2-2a^2z^2-2x^2z^2-2\beta xz^2\sqcap a^2+x^2\frown a^2+x^2+2\beta x\,[\sqcap]\,\cancel{a^4}\,[+]\,\cancel{2a^2x^2}+\cancel{2\beta a^2x}+\cancel{x^4}+\cancel{2\beta x^3}$

fiet $3a^4+6a^2x^2+3x^4-2a^2z^2-2x^2z^2\sqcap 0$. Unde $\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}}\sqcap z\sqrt{\dfrac{2}{3}}$ seu $\sqrt{a^2+x^2}\sqcap z$ quae est Hyperbola.

Quemadmodum in Locis Linearibus investigandis quaeritur semper y, ita *in locis ad superficiem* investigandis sufficit inveniri y^2. Loca ad superficiem, in quibus duae tantum sunt incognitae sunt cylindrici vel conici locorum linearium. Cum tres sunt incognitae, aliquando fieri potest ut una tolli possit, tunc locus reducetur ad linearem. Investigandum qualis naturae sunt loca ad superficiem simplicissima, et an memorabiles quasdam habeant proprietates.

Loca linearia a superficialibus in eo magnopere differunt, quod area linearium componitur ex lineis, omnes autem lineae aeque latae, hinc longitudinis tantum ineunda computatio, at pro area locorum ad superficiem invenienda, etiam latitudo ordinatarum, id est planorum consideranda est. Quod ut fiat lineae investigandae, quae sunt ipsi so-

---

21–23 *Nebenrechnungen zur Stufe (1) (bbb) der Variante, gestrichen:* $x\sqcap e-a$. $a+x\sqcap e-a+a$. $a-x\sqcap a-,e-a\sqcap 2a-e$.

4 $\sqcap$ 0. *(1)* vel $\dfrac{\cancel{3}a^4+2\cancel{6}a^2x^2+\cancel{3}x^4}{a^2-x^2}$ *(a)* $\sqcap\dfrac{4z^2}{3}\sqcap{}^{a^2+x}$ *(b)* $\sqcap\dfrac{a^4+2a^2x^2+x^4}{a^2-x^2}\sqcap\dfrac{4z^2}{3}$ *(aa)* $\sqcap$ z *(bb)* fiet $z\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqcap\dfrac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2-x^2}}$, sive $z\sqrt{\dfrac{2}{3}\overline{a^2-x^2}}\sqcap a^2+x^2$ haec autem figura est Hyperbola Cubica, Unde et datur eius qvadratura. | Notabile *erg.* | $z^2\dfrac{2}{3}\sqcap$ *(aaa)* $\dfrac{a^2+x^2,\frown a^2+x^2}{a+x,\frown a-x}$ *(aaaa)*, Ergo $z^2\dfrac{2}{3}\sqcap\dfrac{a}{-}$ *(bbbb)* $\sqcap\dfrac{a+x\frown a-x,\frown a+x\frown a-x}{}$ *(bbb)* $\dfrac{a^2+x^2,\frown a^2+x^2}{a^2-x^2}\sqcap\dfrac{a-x,\frown a-x,,\frown a+x\frown a+x}{a^2-x^2}$, $a+x\sqcap e$, fiet $\dfrac{e^2\frown 4a^2-4ae+e^2}{a^2-e^2+2ea-a^2}=\dfrac{e^2\frown 4a^2-4ae+e^2}{e^2+2ea}\sqcap\dfrac{e\frown 4a^2-4ae+e^2}{e+2a}$ ponendo $e+2a\sqcap v$. binomium tolletur ex divisore, faciliorqve fiet reductio. *(aaaa)* $z\sqrt{\dfrac{2}{3}}\sqcap{}^{a^2+x}$ *(bbbb)* $\dfrac{2z}{\sqrt{3}}\sqcap\sqrt{\dfrac{a^4+2a^2x^2+x^4}{a^2-x^2}}$ Huius ergo tam mirabilis figurae datur qvadratura, *(aaaaa)* etsi *(bbbbb)* est enim non nisi Hyperbola Cubica *(2)* Unde *L* 5 f. Hyperbola | Cubica sunt enim eius ordinatae, ut qvadrata ordinatarum Hyperbolae *gestr.* | Qvemadmodum *L* 8 sunt *(1)* Ungulae tantum cylindri vel coni planorum *(2)* cylindrici *L*

lido homogeneae, sed eae lineae non erunt geometricae, si plana illa non sunt singula quadrabilia.

[*Teil 2*]

Differentia inter duas Hyperbolae ordinatas proximas

$$+\sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}}-\sqrt{a^2+x^2}, \sqcap \frac{z}{a}. \text{ Ergo}$$

$$\begin{array}{l}
\dfrac{z^2}{a^2} \sqcap \; 2a^2+2x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2} \qquad - \; \sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\cancel{\beta^2}, \frown\, a^2+x^2} \\
- \;\; .. \;\; + \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\; \sqcap \; + \;\; \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \;\; \text{Et quadrando:} \\
+\cancel{\dfrac{z^4}{a^4}}-\cancel{4z^2}-\cancel{\dfrac{4z^2x^2}{a^2}}-\cancel{\dfrac{4z^2\beta x}{a^2}}+3\,\cancel{4}\,a^4+6\,\cancel{8}\,a^2x^2+6\,\cancel{8}\,\beta a^2x+3\,\cancel{4}\,x^4+6\,\cancel{8}\,\beta x^3+\cancel{4\beta^2x^2} \quad \sqcap \\
\ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \quad \ldots\ldots \qquad /\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/ \\
\cancel{a^4}+\cancel{2a^2x^2}+\cancel{2\beta xa^2}+\cancel{x^4}+\cancel{2\beta x^3} \\
/\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/ \qquad /\!/
\end{array}$$

Unde deletis aliis fiet $3a^4+6a^2x^2+3x^4 \sqcap 0$. Unde fieret $a \sqcap -x$. Quod est absurdum. Sed unde error?

$$\begin{array}{lll}
\text{Si fecissemus} & \sqrt{a^2+x^2+2\beta x+\beta^2} \sqcap & \dfrac{z}{a}+\sqrt{a^2+x^2} \\
\text{habuissemus} & \cancel{a^2}+\cancel{x^2}+2\beta x+\beta^2 \quad \sqcap & \dfrac{z^2}{a^2}+\cancel{a^2}+\cancel{x^2}+\dfrac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}.
\end{array}$$

Unde $2\cancel{\beta}x \sqcap \dfrac{2z}{a}\sqrt{a^2+x^2}$. sive $\dfrac{a^2x^2}{z^2} \sqcap a^2+x^2$, vel $a^2x^2 \sqcap a^2z^2+z^2x^2$ vel $z \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$. Hujus ergo datur quadratura.

Sed non possum satis mirari priore methodo ventum fuisse ad impossibile. Nec video qui possit id fieri si quis legibus calculi insistat.

---

16 f. *Dahinter:* Imo fuit error calculi, non praefixeram binaria rectangulo ex duobus nominibus binomii quadrandi facto.

4 Differentia ... proximas *erg. L*

---

6 $\dfrac{z^2}{a^2} \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Faktor 2 vor dem Wurzelausdruck. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Rechnung bis Z. 10. Leibniz stellt die Unstimmigkeit fest und merkt später zu Z. 16 f. die Ursache an.

Quaestio an idem sit locus differentiarum, ordinatarum ad eandem curvam, ex differentibus licet axibus, v. g. an idem sit locus differentiarum inter ordinatas Hyperbolae ad Asymptoton, et ad axem. Sane idem semper locus est progressioni curvae homogeneus undecunque sumatur. Ergo et idem locus quadratorum ejus, ut locus quadratorum ejus componitur ex loco quadratorum, differentiarum, et rectangulo, perpetuo rectanguli autem additio aut subtractio non mutat locum. Ergo idem est semper locus quadratorum, differentiarum ipsius curvae. Ergo et idem semper locus ipsarum differentiarum, modo scilicet quantitates quae calculum ingrediuntur omnes sint v e r a e. Hinc sequitur $\dfrac{ax}{\sqrt{a^2+x^2}}$ esse ordinatam Hyperbolae Cubicae.

Restat tantum demonstrandum, quod idem semper sit curvae locus. Quod patet, quia locus est curvae, qui ipsi homogeneus qualis figura plana non nisi una. $\sqrt{a^2-2ax+x^2}$, sed $\begin{array}{l} a^2-x^2=y^2 \\ x^2-a^2=y^2 \end{array}$ $a^4-2a^2x^2+x^4 \sqcap y^4$. Unde demonstratur loca quadratorum saltem esse eadem. Ergo si non datur in eorum radicibus amphibolia, etiam loca differentiarum erunt eadem.

[*Teil 3*]

$\sqrt{a^2+x^2+2x+1}-\sqrt{a^2+x^2} \sqcap \dfrac{z}{a}$ fiet

---

8 *Zu* v e r a e : Hoc examinandum.

14 *Dazu, mit Hinweisstrich verbunden:* Imo NB. Curva ipsa explicabit amphiboliam, nam et ipsius quadrata amphibola. Semper ergo locus idem.

2 f. Hyperbolae | et *ändert Hrsg.* | Asymptoton *L* 4 sumatur. *(1)* Curvae autem *(a)* locus fit ex qvadratis locorum differe *(b)* loci *(aa)* qvadrata *(bb)* qvadratis comp *(2)* Qvadrata autem loci qvi *(3)* Ergo *L* 7 f. differentiarum, *(1)* nisi cum qvadrata *(2)* modo *L*

---

7 Ergo: Die Folgerung ist nicht richtig und beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

$$+\left\{\begin{array}{l} a^2+\ \ x^2+2x+1 \\[2em] \underline{a^2+\ \ x^2\qquad\qquad} \end{array}\qquad -\ 2\sqrt{\begin{array}{l} a^2+x^2+2x+1 \\[2em] a^2+x^2 \end{array}}\ \right\}\frown.\ \sqcap\ \frac{z^2}{a^2}$$

$$2a^2+2x^2+2x+1$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\quad -\ \frac{z^2}{a^2}\ \ \sqcap\ \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$+\cancel{4a^4}+\cancel{8a^2x^2}+\cancel{8a^2x}+\cancel{4a^2}-4z^2,+\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{4x^2},-\frac{4x^2z^2}{a^2}+4x^2+4x-\frac{4xz^2}{a^2}+\frac{z^4}{a^2}\ \sqcap$$

$$\cancel{4a^4}+\cancel{8a^2x^2}+\cancel{8a^2x}+\cancel{4a^2},+\cancel{4x^4}+\cancel{8x^3}+\cancel{4x^2},$$

restabit $z^4-4z^2a^2+4x^2a^2-4x^2z^2\sqcap 0$.

---

2 *Unter* 2: NB.

2 2 *erg. L* 6 f. $+\frac{z^4}{a^2}\sqcap$ *(1)* $a^4+a^2x^2+2a^2x+a^2,+x^2a^2+x^4+2x^3+x^2$ Ergo *(a)* $3a^4+6a^2x^2+3a^2+3x^4+6x^3+3x^2+4x\sqcap -z^4+4\left.\begin{array}{l} z^2 \\ 4x \\ 4x^2 \end{array}\right\}$ Impossibile | An ergo *streicht Hrsg.* | $1\cancel{3}a^4+2\cancel{6}a^2x^2+1\cancel{3}x^4\sqcap$

$$\frac{z^4+4x^2z^2}{3}\ \text{et}\ a^2+x^2\sqcap\sqrt{\frac{z^4+4x^2z^2}{3}}\ \text{vel}\ a^4+a^2x^2+x^4+\frac{4x^4}{3}\sqcap\frac{z^4+4x^2z^2+4x^4}{3}$$

$$\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}\ \sqcap\ \frac{z^2+2x^2}{\sqrt{3}}$$

$$\sqrt{-\frac{2x^2}{3}+\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}}\ \sqcap\ z$$

Hoc nihil est, qvoniam z. est linea infinite parva.

Ecce ergo cautionem aliqvam adhibendam in eo calculo qvando aeqvatio *(aa)* ⟨inf⟩ *(bb)* habetur inter lineam infinite parvam, et *(aaa)* duas lineas finitas *(bbb)* duarum linearum finitarum ordinariarum differentiam, ut scilicet lineae illae ordinariae non sint ab eodem aeqvationis latere. An potius fundamentum rei est, ne subtractio cesset qvadratione. Nondum tamen cesso mirari, cur aliter impossibile eveniat.

Dicamus $\sqrt{a^2+x^2+2x+1}-\sqrt{a^2+x^2}\sqcap 0$ ergo $2a^2+2x^2+2x+1\sqcap$ *bricht ab* $\sqrt{a^2+x^2}-\sqrt{a^2+x^2}\sqcap 0$. Ergo $a^2+x^2+a^2+x^2-2a^2-2x^2\sqcap 0$.

Erravi in calculo, et jam video errorem oblitus sum rectangulum sub radicibus duplicare *(b)* $3a^6+6a^4x^2+3a^4+3a^2x^4+6x^3a^2+6x^2a^2+4xa^2$ *(2)* $\cancel{4a^4}$ *L*

---

6 $+\cancel{4a^4}$: Auf der linken Seite dieser und der folgenden Gleichung unterlaufen Leibniz Versehen, welche die weitere Rechnung beeinträchtigen.

$$\begin{array}{rl}
 & z^4 \begin{array}{l} -\,4a^2 \\ -\,4x^2 \end{array} z^2 \ +4\,\overbrace{a^2+x^2}^{\square} \\
 & \sqcap\ -\,4x^2\,a^2\ +\,\ldots\ldots\ldots \\
\text{Ergo } z^2-2a^2-2x^2 & \sqcap \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

6. SCHEDIASMA DE SUPERFICIEBUS CONOEIDUM
3. Oktober 1674 und Januar 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 5 Bl. 1–2. 1 Bog. 4°. 4 S. 2 Teile. Teil 1 vom 3. Oktober 1674 auf Bl. 1–2 r°, Teil 2 vom Januar 1676 auf Bl. 2 v°.
Cc 2, Nr. 773, 1277

[*Teil 1*]

3. Octob. 1674.

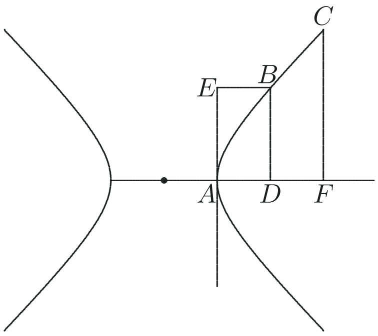
Schediasma de superficiebus Conoeidum et Sphaeroeidum, item de Curva Ellips. et Hyperbolae

Cum hodie apud Cl^mum^ Justellum essem, de Analysi et Arithmetica infinitorum sermo incidit; Doctissimus Geometra, Ismaël Bullialdus, utilitatem characterum analyticorum confessus, caeteroquin negavit, per Algebram dari posse theorematum ab Archimede, de Sphaera et Cylindro, deque Conoeidibus et Sphaeroeidibus demonstrationes; in quo ei assensus sum. Inde cum procederet sermo, dixi pleraque ab Archimede in illis libris demonstrata recidere ad quadraturam parabolae; Archimedem vero solida quidem Conoeidum et Sphaeroeidum, sed non superficies dedisse; earum autem solutionem tum Celeberrimum Hugenium, tum et me habere. Respondit Bullialdus si quis eas det sed demonstratas, rem ex subtilissimis eorum quae inde ab Archimede in eo genere data sunt, dedisse ipsi videri. Ego vero dare in me suscepi.

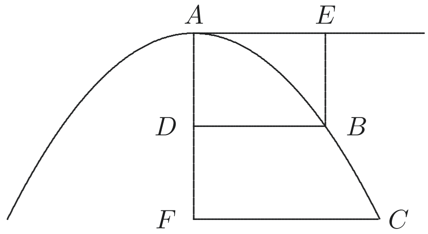
Esto curva conica, ABC, cujus vertex A. Axis AD tangens AE. basis ubicunque sumta CF. abscissa $AD \sqcap x$, ordinata $DB \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$.

9 item ... Hyperbolae *erg. L* 12 per *(1)* Analysin d *(2)* Algebram *L* 13 demonstratorum *L ändert Hrsg.* 16 f. tum *(1)* Hug *(2)* Nobi *(3)* Celeberrimum *L*

10 Justellum: H. Justel. 11 Bullialdus: I. Boulliau. 12 f. ab Archimede: vgl. ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro* und *De conoidibus et sphaeroidibus*. 15 demonstrata: vgl. ARCHIMEDES, *De conoidibus et sphaeroidibus*, § 3, 12, 21–24. 16 solutionem: vgl. Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 [Marg.] (HO XVIII S. 211–221). 17 et me: vgl. VII, 4 N. 28 S. 509 bis 515.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Ordinata proxime major: $\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2}$, differentia earum:

$$\sqrt{2ax + 2a\beta \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}x\beta \mp \frac{a}{q}\beta^2} \quad - \quad \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \quad \sqcap \quad \frac{y\beta}{a}.$$ Unde

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots \quad \sqcap \quad + \quad \dots\dots\dots \quad + \quad \frac{y\beta}{a},$$

et quadrando: $\boxed{2ax} + 2a\beta \mp \frac{a}{q} \frown \begin{matrix}\boxed{x^2}\\ 2x\beta\\ +\beta^2\end{matrix} \sqcap \boxed{2ax}\,\boxed{\mp\frac{a}{q}x^2} + 2\frac{y\beta}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$; rejectisque omnibus in quibus β^2 quadrata, fiet: $\cancel{2}a \mp \frac{\cancel{2}a}{q}x \sqcap \cancel{2}\frac{y}{a}\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, et quadrando: $a^2 \mp \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2 \sqcap \frac{y^2}{a^2} \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2$. Hinc ut obiter dicam, quadratura habetur hujus figurae:

$$\frac{a^2 \mp \frac{a^2}{q}x}{\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}} \sqcap y.$$

---

8 *Spätere Nebenbetrachtung:* $\frac{\frac{a^4}{q^2}x\cancel{^2}}{2a\cancel{x} \mp \frac{a}{q}x\cancel{^2}} \sqcap y^2$ et $x \sqcap \frac{2ay^2}{\frac{a^4}{q^2} \mp \frac{a}{q}y^2}$.

---

1 *Fig. 2*: Eine gestrichene Vorstufe zu Fig. 2 wird nicht wiedergegeben.

Jam, $\dfrac{a^2 \mp \dfrac{2a^2x}{q} + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2 \sqcap \beta^2\dfrac{y^2}{a^2}$, addatur ad β^2, quod ita commode fiet:

$\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2$ $\boxed{\dfrac{\mp\dfrac{2a^2x}{q} + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2}$ $\mp\dfrac{a}{q}\beta^2$, addenda ad β^2, producti radix exprimet Elementa ipsius Curvae Conicae. Fietque: $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \mp \dfrac{a}{q} + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Quod est Elementum Curvae Conicae. Unde pro parabola: $\sqrt{\dfrac{a^{\cancel{2}} + 2\cancel{a}x}{2\cancel{a}x}} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Unde $\dfrac{a}{2x} + 1 \sqcap \dfrac{z^2}{a^2}$, vel: $2x \sqcap \dfrac{a^3}{z^2 - a^2}$. Haec ergo figura pendet a quadratura Hyperbolae, quia et curva parabolae. Ducatur in distantiam ab axe, seu ordinatam parabolicam $\sqrt{2ax}$, fiet $\sqrt{a^2 + 2ax}$, quae progressio est ad Parabolicam, ideoque habetur superficies circa axem. Ut habeatur Superficies circa tangentem, ducatur in x, seu $\sqrt{x^2}$, fiet: $\sqrt{\dfrac{a}{2}x + x^2}$, quae est progressio ad Hyperbolam.

Recta AF, vocata f, erit $DF \sqcap f - x$, in quam si ducatur Elementum Curvae, fiet aequatio: $a^2 + 2ax, \frown f^2 - 2fx + x^2, \sqcap 2axv^2$, quam proinde figuram ex Hyperbola pendere necesse est.

1 $\sqcap$ $\beta^2\dfrac{y^2}{a^2}$, *(1)* auferatur a $\dfrac{\beta^2}{\beta^2}$ *(2)* auferatur a β^2, qvod ita commode fiet: $\dfrac{a^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2$ $\boxed{\dfrac{\mp\dfrac{2a^2x}{q} + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}\beta^2}$ $\mp\dfrac{a}{q}\beta^2$, auferenda a β^2, residui radix *(a)* repr *(b)* exprimet Elementa ipsius Curvae Conicae. *(aa)* un *(bb)* fietqve: *(aaa)* $\dfrac{2a}{x}$ *(bbb)* $\sqrt{\dfrac{2ax\beta^2 \mp \dfrac{a}{q}x^2\beta^2 - a^2\beta^2 \pm \dfrac{2a^2x}{q}\beta^2 - \dfrac{a^2}{q^2}x^2\beta^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}} \sqcap \dfrac{z\beta}{a}$ sive z $\sqcap$ *(3)* addatur *L*   4–6 Unde $\dfrac{a}{2x} + 1$ ... parabolae *erg. L*

Pro Circulo aut Hyperbola Circulari fit: $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax \ddagger x^2} \ddagger 1 + 1} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Et pro Circulo quidem $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax - x^2}} \sqcap \dfrac{z}{a}$, pro Hyperbola $\sqrt{\dfrac{a^2}{2ax + x^2} + 2} \sqcap \dfrac{z}{a}$. Hinc Elementum Curvae Circularis ducendo in ejus distantiam a diametro, seu in $\sqrt{2ax - x^2}$, fit $\sqrt{a^2}$, sive a. Ac proinde habetur superficies circa diametrum. Ducatur in x, distantiam a vertice, fiet: $a\sqrt{\dfrac{x}{2a - x}} \sqcap \omega$ unde $a^2x \sqcap 2a\omega^2 - x\omega^2$ cujus quadratura pendet a Quadratura Circuli, ac proinde: $x \sqcap \dfrac{2a\omega^2}{a^2 + \omega^2}$ est ad figuram Circulo symmetram.

At Elementum Curvae Hyperbolae ducendo in ejus sinum, fit: $\sqrt{a^2 + 4ax + 2x^2}$, cujus progressio est ad aliam Hyperbolam, etiam latera rectum transversumque aequalia habentem; si ducas in x, fiet: $\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a + x} + 2x^2}$. Unde patet nihil fere habere hic quidem Hyperbolam simplicem in quo emineat prae composita.

Si Elementum Hyperbolae vel Ellipsis ducatur in ordinatam, fiet:
$\sqrt{a^2, \ddagger \dfrac{a}{q} \frown 2ax + \dfrac{a^2}{q^2}x^2 + 2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2}$, quae progressio est ad Hyperbolam vel Ellipsin, ita scilicet ut sit semper ad Hyperbolam, quando curva est Hyperbola, sed quando curva est Ellipsis tunc distinguendum est, nam, si $+\dfrac{a^2}{q^2} - \dfrac{a}{q}, x^2$ est quantitas affirmativa, seu quando a, major quam q, latus rectum quam transversum, aequatio est ad Hyperbolam, sin contra ad Ellipsin.

Habetur ergo Centrum gravitatis Curvae Ellipticae ex supposita Circuli et Hyperbolae quadratura, eandem curvam Ellipticam modo ad minorem modo ad majorem axem referendo.

11 f. fiet: | $\sqrt{\mathrm{a}^2, \ddagger \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}} \frown 2\mathrm{ax} \ddagger \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{ax} \ddagger \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}$ *ändert Hrsg.* |, qvae *L* 12 Hyperbolam *(1)* pro Hyperbola, ad Ellipsin pro Ellipsi. *(2)* vel *L* 15 ad *(1)* Ellipsin, sin contra ad *(2)* Hyperbolam, *L* 16 contra *(1)* ad Ellipsin seu *(2)* ad *L*

8 aequalia: Die Aussage ist nicht richtig. 17 Habetur: Die folgende Behauptung zum Schwerpunkt des Bogens der Ellipse gilt ebenso wie die S. 38 Z. 6 – S. 39 Z. 1 bzgl. der Hyperbel nur für die Momente; zur Bestimmung des Schwerpunkts wären noch die Bogenlänge der Ellipse bzw. der Hyperbel erforderlich.

Jam eundem calculum resumemus, ponendo ordinatam ad Conicam esse: $\sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}$ quae est ad Ellipsin vel Hyperbolam, et Circulum, parabola exclusa, fiet:

Proxime major ordinata: $\sqrt{a^2,, \pm \frac{a}{q}, \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2}$, differentia:

$\sqrt{a^2,, \pm \frac{a}{q} \frown z^2 + 2z\beta + \beta^2} \quad - \quad \sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2} \quad \sqcap \quad \frac{y\beta}{a}$. Unde transponendo:

.... $\sqcap$ + ... + ... et quadrando:

$\boxed{a^2},, \pm \frac{a}{q} \frown \boxed{z^2} + 2z\beta + \beta^2 \sqcap \boxed{a^2}\boxed{\pm \frac{a}{q}z^2} + \frac{2y\beta}{a}\sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2} + \frac{y^2\beta^2}{a^2}$ et destructis destruendis, atque ordinando: $\pm \frac{\cancel{2}a}{q}z \sqcap \frac{\cancel{2}y}{a}\sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}$, unde $y \sqcap \dfrac{[\pm]a^2z}{q, \frown \sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}}$. Hujus ergo figurae generaliter habetur quadratura. Ejus quadratum quadrato ab a, addatur, fiet:

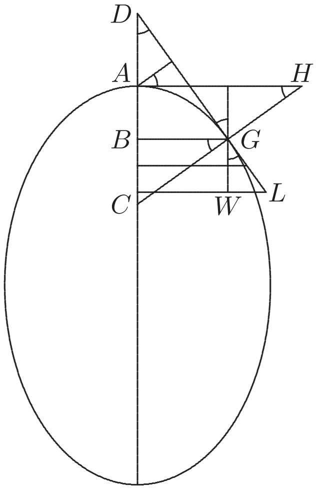
$\dfrac{a^4z^2}{q^2 \frown \llcorner a^2 \pm \frac{a}{q}z^2 \lrcorner} + a^2$, unde radix: $\frac{a}{q}\sqrt{\dfrac{a^2z^2 + a^2q^2 \pm \frac{a^3}{q}z^2}{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}}$ Elementum Curvae Hyperbolicae vel Ellipticae.

Sed jam praevideo quod nihil hinc novi, magni momenti ultra calculum priorem; tantum ob circulum patebit: $\sqrt{\dfrac{\cancel{a}q^2z}{a^{\cancel{2}} \pm \frac{\cancel{a}}{q}z^2}}$ ex Circuli quadratura pendere.

$\frac{GL}{GC} \sqcap \frac{GW}{BG}$, unde $GL \frown BG \sqcap GC \frown GW$, quod demonstrat summam omnium perpendicularium GC aequari momento curvae ex axe AB. At $GL \sqcap \frac{GC \frown GW}{BG}$.

1 f. esse *(1)* $a^2 - x^2 \sqcap y$ *(2)* $b^2 - z^2 \sqcap$ *(3)* $\sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}$ *(a)* $\sqcap y^2$ *(b)* qvae *L* 2 parabola *(1)* et recta exclusis *(2)* exclusa *L* 7 $\frac{\cancel{2}y}{a}\sqrt{a^2 \pm \frac{a}{q}z^2}$, *(1)* vel qvadrando *(2)* Unde *L*

9 radix: Der Zähler des Bruchs unter der Wurzel müsste lauten: $a^2z^2 + a^2q^2 \pm aqz^2$. Der richtige Wert für das Bogenelement des Kreises in Z. 12 wäre $\sqrt{\frac{a^4}{a^2 - z^2}}$.



[*Fig. 3*]

Aestimemus valorem ipsius GC in Hyperbola, fiet: $\sqrt{,,\frac{a}{q}x+a,\square,,+2ax+\frac{a}{q}x^2}$ sive $\sqrt{\frac{a^2}{q^2}x^2+\frac{2a^2}{q}x+a^2+2ax+\frac{a}{q}x^2}$, quae figura est Hyperbola. Porro $\dfrac{\frac{a}{q}x+a}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{\begin{array}{l}\frac{a^2}{q^2}x^2+\frac{2a^2}{q}x+a^2\\ +\frac{a}{q}\qquad +2a\end{array}}}{GH}$. Est autem $\frac{2\cancel{p}q}{\cancel{p}}x+x^2+q^2 \sqcap y^2+q^2$, fiet: $x \sqcap \sqrt{y^2+q^2}-q$, unde $\dfrac{\frac{a}{q}\sqrt{y^2+q^2}-q+a}{\sqrt{y^2+q^2}-q} \sqcap \dfrac{\sqrt{\begin{array}{l}\frac{a}{q}y^2+a^2\\ +1\ \ldots\end{array}}}{GH \sqcap e}$. Ergo e, seu GH, pendet a centro gravitatis Hyperbolae.

3 figura *(1)* pendet ex *(2)* est L

4 y^2+q^2: Es fehlt der Faktor $\frac{q}{a}$ vor y^2. Der fehlerhafte Term wirkt sich zusammen mit einem weiteren Flüchtigkeitsfehler bis zum Ende der Rechnung Z. 5 aus.

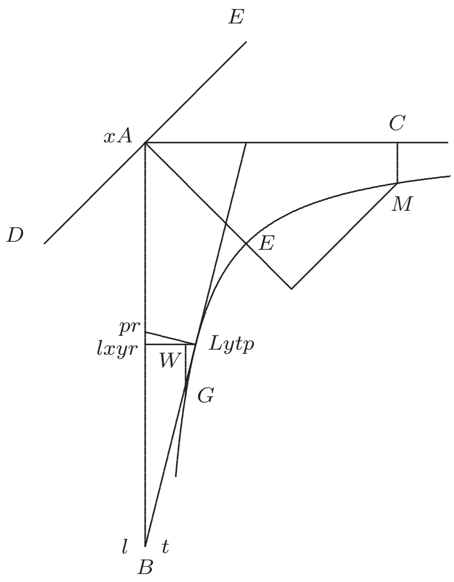
Habemus Centrum Gravitatis Curvae parabolae et Ellipseos, restat Centrum gravitatis curvae Hyperbolae. Hyperbolam utile est aliter nunc quidem considerari, nempe: ordinata ad asymptoton $\frac{a^2}{x}$, proxime major: $\frac{a^2}{x-\beta}$, differentia: $\frac{a^2}{x-\beta} - \frac{a^2}{x}$, sive $\frac{\boxed{a^2x - a^2x} + \beta a^2}{x^2 - \beta x}$, sive $\frac{\beta a^2}{x^2}$, addatur ejus quadratum, ad β^2, fiet: $\frac{\beta^2 a^4 + x^4\beta^2}{x^4}$, cujus radix: $\frac{\beta}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$, Elementum curvae Hyperbolae. Ducatur in x distantiam ab asymptoto, fiet: $\frac{\beta}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ qua curvae Hyperbolicae momentum ex Asymptoto exhibetur. Unde aequatio talis: $y^2x^2 \sqcap a^4 + x^4$. Sive $y^2 - x^2 \sqcap \frac{a^4}{x^2}$ sive $y + x, \frown y - x \sqcap \frac{a^4}{x^2}$, vel $y^2x^2 - a^4 \sqcap x^4$, sive $yx - a^2, \frown yx + a^2 \sqcap x^4$.

In Ellipsi est Reducta, ad axem: $a - \frac{a}{q}x$, ejus quadratum est $a^2 - \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2$, addatur quadrato ordinatae Ellipseos, nempe $2ax - \frac{a}{q}x^2$, fiet: $\sqrt{a^2 - \frac{2a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2 \atop + 2a \;..\; - \frac{a}{q}} \sqcap$ perpendiculari ad Ellipsin.

Quantum ad Hyperbolam circa Asymptotos, fiet $yl \sqcap \boxed{a^2} - yx$. sive $l \sqcap -x$. Jam quia $\frac{t}{l \sqcap x} \sqcap \frac{GL}{GW}$, erit $GW \frown t \sqcap x\,GL$. Ac proinde summa omnium t, aequabitur momento curvae ex asymptoto conjugata, est autem $t^2 \sqcap x^2 + \frac{a^4}{x^2}$ ut ante. Perpendicularis p,

4 ad *(1)* a^2, fiet: $\frac{\beta^2 a^4 + x^4a^2}{x^4}$, cuius radix: $\frac{a}{x^2}\sqrt{\beta^2a^2 + x^4}$ *(2)* β^2 *L* 13 fiet *(1)* 2a *(2)* yx *(3)* yl $\sqcap$ *(a)* $a^2 - yx$. sive l $\sqcap \frac{a^2}{y} - x$ *(b)* $\boxed{a^2} - yx$. *(aa)* | sive l $\sqcap -yx$, *streicht Hrsg.* | *(bb)* sive *L*
15 asymptoto *(1)* opposita *(2)* conjugata *L*

1 Ellipseos: s. o. Erl. zu S. 34 Z. 17. 7 aequatio talis: Leibniz bezeichnet hier den Tangentenabschnitt mit y, in Fig. 4 und dem dazugehörigen Text mit t.



[*Fig. 4*]

qualis sit hinc patet quia $rl \sqcap \frac{a^4}{x^2}$, sive $rx \sqcap \frac{a^4}{x^2}$. Ergo $r \sqcap \frac{a^4}{x^3}$, cujus quadrato $\frac{a^8}{x^6}$ addatur $\frac{a^4}{x^2}$. fiet: $\frac{a^8 + a^4x^4}{x^6}$, sive $\frac{a^2}{x^3}\ \sqrt{a^4 + x^4} \sqcap p$. Hinc patet harum duarum Curvarum $\frac{a^2}{x^3}\ \sqrt{a^4 + x^4}$, et $\frac{a}{x}\ \sqrt{a^4 + x^4}$ summas concurrere ad centrum gravitatis Hyperbolae. Prior aequalis momento curvae ex AB, posterior ex AC. Unde patet inventa alterutra ex his summis, haberi etiam alterius quadraturam, quia una ex his summis inventa habe-

2 qvia *(1)* px $\sqcap$ *(a)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ *(b)* $\frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2}$, sive px *(2)* | pl *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2}$ *L* 4 summas *(1)* esse symmetras. Nam *(2)* concurrere *L* 5 AB, | posterior ex AC. *erg.* | *(1)* Si pro *(a)* y *(b)* x substituatur in priore eius valor $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}}$, fiet: $\frac{\mathrm{a}^2}{\frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{y}^3}}$, sive $\frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{a}^3}\sqrt{\mathrm{a}^4 + \frac{\mathrm{a}^8}{\mathrm{y}^4}}$, ex qvibus haec priori symmetros. Hinc patet *(2)* Unde *L*

4 $\frac{a}{x}\ \sqrt{a^4 + x^4}$: Korrekt wäre $\frac{1}{x}\ \sqrt{a^4 + x^4}$. 6–39,1 habetur: s. o. Erl. zu S. 34 Z. 17.

tur jam centrum gravitatis Curvae Hyperbolae, vel ideo quia ab alterutro latere similis ratiocinatio est, et hyperbola ut ad unam, ita quoque ad alteram est asymptoton.

[*Teil 2*]

Si in aeq: $t^2 \sqcap x^2 + \dfrac{a^4}{x^2}$ haberi posset summa omnium x haberetur momentum curvae ex asymptoto conjugata, $x^4 - t^2x^2 + \dfrac{t^4}{4} \sqcap \dfrac{t^4}{4} - a^4$. Et $x^2 - \dfrac{t^2}{2} \sqcap \sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4}$ seu $x \sqcap \sqrt{\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4} + t^2}$, quae pendet ex $\dfrac{\sqrt{x^4 + a^4}}{x}$. Cujus momentum per x est $\sqrt{x^4 + a^4}$. At hoc momentum est corresolubile summis omnium x^2, quae dantur ex datis $\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4}$. Ergo memorabile quiddam invenimus scilicet $\sqrt{x^4 + a^4}$ et $\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4}$ esse figuras corresolubiles. Quoniam datur $\int \overline{t^2 dx}$, dabitur etiam $\overline{\int dt dt \sqrt{\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}$. Qualem figuram quadrabilem esse nemo sibi facile persuadeat.

4 *Darüber:* Haec adjeci Januar. 1676.

2 asymptoton. | *(1)* $\mathrm{q}^2 + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{x}^2$ *(2)* $2\mathrm{ax}$ *(a)* $+ \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$, pro x substituatur $\mathrm{z} - \dfrac{\mathrm{q}}{\langle - \rangle}$ *(b)* $+ \mathrm{x}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$, pro x substituatur $\mathrm{z} - \mathrm{a}$, fiet: $2\mathrm{az} + \mathrm{z}^2 - 2\mathrm{az} + \mathrm{a}^2$ et fiet: $\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2 \sqcap \mathrm{y}^2$ ponendo $\mathrm{z} \sqcap$ AE. unde $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{z}}$, sive $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{z}} + \mathrm{z}$, et quadratum: $\dfrac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{z}^2} + 2\mathrm{a}^2 + \mathrm{z}^2$, addatur ad $\mathrm{z}^2 + \mathrm{a}^2$ *gestr.* | *L* 4 *(1)* Curva Hyperbolica: *(2)* si *L* 7 est *(1)* syndeton *(2)* corresolubile *L*

5 $x \sqcap$: Im Wurzelausdruck für x fehlt der Faktor $\dfrac{1}{2}$ vor t^2. Der fehlerhafte Term wird auch in Z. 9 sowie S. 41 Z. 7–9 benutzt. 9 $\overline{\int dt dt \sqrt{\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4} + t^2}}$: Korrekt wäre $\int 2t dt \sqrt{\sqrt{\dfrac{t^4}{4} - a^4} + \dfrac{t^2}{2}}$.

Nota Enchiresin singularem, licet particularem: Sit curvae portio MEG. et portio ME aequalis et similis portioni GE, utique centrum ejus gravitatis cadit in axem AE; porro momentum ejus ex AB est $\int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}}$ et momentum ex AC, est $\int \overline{\frac{a^2}{x}\sqrt{a^4+x^4}}$. Distantia centri gravitatis ab AB est $\dfrac{\int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}}}{ACE \sqcap \text{curv.}}$ et dist. centri gravitatis ab AC est $\dfrac{\int \overline{\frac{a^3}{x}\sqrt{a^4+x^4}}}{ACE \sqcap \text{curv.}}$. Sunt autem hae distantiae aequales. Nam quocunque sumto puncto in AE demissa inde perpendicularis in AB, est aequalis demissae alteri in AC, ergo eo casu, quo $EM \sqcap EG$ seu $AC \sqcap x$ erit $\int \overline{\frac{a^3}{x}\sqrt{a^4+x^4}} \sqcap \int \overline{\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4}}$. Similis ratiocinatio servit in omnibus aliis curvis, quando ad duo anguli recti latera similiter referuntur. Idem erit non tantum de curvarum sed et spatiorum momentis; et quando eveniet, ut unum momentum quadretur, semper habebitur et quadratura alterius, non quidem omnium portionum attamen certae, et habemus exemplum quo portiones quaedam certae figurarum quadrari possunt. Et videndum an non eorum ope aliquando perveniri possit, ad aliquam portionem arcus circuli dimetiendam; tametsi ejus ratio ad totam Circumferentiam haberi nequeat.

Simili stratagemate uti licet in figuris recurrentibus, cum in ultimo casu momenta ex vertice v. g. et momenta ex basi coincidunt; quod facit ut figura sinuum tota (etsi non partes) mensurari possit, et alia id genus.

Si Angulus ita sumtus sit, ut non bisecetur ab axe figurae curvilineae, tunc quoniam nihilo minus semper patet centri gravitatis figurae locus haberi poterit ratio momentorum.

8 referuntur. *(1)* Ubi fieri poterit, ut una sit *(2)* Idem *L* 10 semper *erg. L* 10 f. qvidem *(1)* semper attamen in certo casu *(2)* omnium ... attamen | in certa, *ändert Hrsg.* | et *L* 18 Angulus *(1)* rectus *(2)* ita *L*

---

3 momentum ex AC: Der korrekte Ausdruck für das Integral wäre $\int \frac{\sqrt{a^4+x^4}}{x} dx$. Leibniz behält den fehlerhaften Term bis zum Ende der Überlegung Z. 7 bei. 4 $ACE \sqcap$ curv.: Der Kurvenbogen wird in Fig. 4 und im Text Z. 1 mit MEG bezeichnet.

$t \sqcap \frac{1}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ et $\frac{at}{x} \sqcap$ Elemento curvae, $\sqcap \frac{a}{x^2}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap z$. Ergo $z^2 \sqcap \frac{a^2}{x^4}, a^4+x^4$ sive $z^2 \sqcap \frac{a^6}{x^4}+a^2$. Habetur ergo $\int z^2dx$. ergo $\int xzdz$. $x^4z^2 - a^2x^4 \sqcap a^6$. et $x^2 \sqcap \frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ et $x \sqcap \frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$. Ergo $\int zdz\frac{\sqrt{a^3}}{\sqrt{\sqrt{z^2-a^2}}}$ absolute habetur, et talis figura quadrari potest. $\int\frac{a^2dx}{x}\sqrt{a^4+x^4}$ et $\int\frac{a^3}{\sqrt{z^2-a^2}}$ sunt corresolubiles.

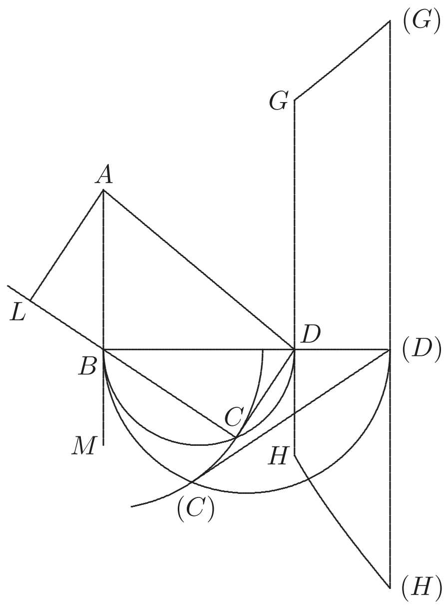
$t^2 \sqcap \frac{1}{x^2}\overline{a^4+x^4} \sqcap \frac{a^4}{x^2}+x^2$, quae habentur. Jam $\int\overline{t^2dx}$ corresol. $\int\overline{txdt}$ (NB. faciendum signum quod exprimat corresolubilitatem +). Ergo quia $\int\overline{t^2dx}$ id est $\int\overline{\frac{a^4}{x^2}+x^2}$ haberi potest, et $t^2x^2 \sqcap a^4+x^4$. et $x^4 - t^2x^2 + \frac{t^4}{4} \sqcap \frac{t^4}{4} - a^4$. et $x^2 \sqcap t^2 - \sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}$ et $x \sqcap \sqrt{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$. ideo habebitur $\int t\sqrt{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$. Porro $\int\overline{x^2dt}$ corresol. $\int\overline{txdx}$. Ergo ex $\int\overline{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$ habetur $\int\overline{txdx} \sqcap \int\sqrt{a^4+x^4}$: Quod est m e m o r a b i l i s s i m u m.

$\frac{a^2}{x^3}\sqrt{a^4+x^4} \sqcap p$. $\int\overline{pxdx} \sqcap \int\frac{a^2}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$ curvae longitudo. At $\int\overline{pxdx}$ corresol. $\int\overline{x^2dp}$. Ergo $x^6p^2 \sqcap a^8+a^4x^4$ et haberi poterit x^2 per duo binomia Cardanica, quorum summa pendebit ex dimensione curvae Hyperbolae.

$p^2 \sqcap \frac{a^8}{x^6}+\frac{a^4}{x^2}$. Jam $\int p^2dx$ corresol. $\int\overline{xpdp}$. At $\int\overline{xpdp}$. dabit rursus figuram satis mirabilem cujus haberi potest quadratura.

1 et | $\frac{a^2t}{x}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ Elemento *L*   5 $\int t^2dx$ *(1)* $\sqcap$ *(2)* corresol. *L*   9 $\int\overline{t^2-\sqrt{\frac{t^4}{4}-a^4}}$ *(1)* seu ex qvad. Hyp. *(2)* habetur *L*

5–9 t^2: Im vorliegenden Abschnitt ändert Leibniz die zunächst gewählte Variable p in t um, verbessert aber unvollständig. Im Text wurde eine Angleichung vorgenommen.   7 $x^2 \sqcap$: s. Erl. zu S. 39 Z. 5.



[*Fig. 5*]

$BD \sqcap x$. $AB \sqcap a$. $AD \sqcap \sqrt{x^2+a^2} \sqcap DG$. Circulus circa BD alius circulus centro B radio $BC \sqcap AB$, ductus secet priores in punctis $C.(C)$. Jungantur $CD \sqcap \sqrt{x^2-a^2}$ et transferantur in DH. $(D)(H)$. Exit tam curva $G(G)$ quam curva $H(H)$ Hyperbolica. Quodsi jam unius planum sit alteri perpendiculare et in se invicem ducantur, fiet $\sqrt{x^4-a^4}$. Notabilis relatio inter haec Triangula: ABD, et BCD duo habent latera communia, unumque angulum, sed non latera homologa adeoque nec eadem nec similia sunt, dubitandum tamen non est aliquid in ipsis latere notabile.

In productam CB in L. ducatur AL perpendicularis seu parallela DC et producatur AB in M. Erit ang. $MBC \sqcap$ angulo LBA. Ergo [ang.] $LAB \sqcap$ ang. DBC. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ALB, BCD similia, et erit ut AL ad AB, ita $AB \sqcap BC$ ad BD et $AL \sqcap \dfrac{a^2}{x}$.

1 *Fig. 5*: Leibniz hat die Figur in mehreren Ansätzen erarbeitet. Verworfene und ersetzte Elemente werden nicht wiedergegeben.

7. SCHEDIASMA DE METHODO TANGENTIUM INVERSA AD CIRCULUM APPLICATA

Oktober 1674

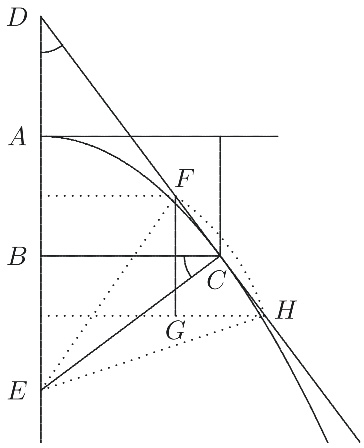
7$_1$. PLAGULA PRIMA

Überlieferung: *L* Überarbeitetes Konzept: LH 35 V 1 Bl. 1–2. 1 Bog. 2°. 4 S. mit zahlreichen Randbemerkungen. Bl. 2 v° durch Streichung ausgegliedert (= Teil 2). Cc 2, Nr. 791 tlw.

Octob. 1674.

S c h e d i a s m a d e M e t h o d o T a n g e n t i u m i n v e r s a , a d C i r c u l u m a p p l i c a t a , u b i m u l t a d e h o c a r g u m e n t o g e n e r a l i o r a. E t p l a g u l a t e r t i a q u a e d a m v a l d e n o t a b i l i a d e f o r m i s a e q u a t i o n u m e x a l i i s p r o d u c t a r u m e t p l a g u l a 4ta d e L o c i s a d s u p e r f i c i e m.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

9–13 S c h e d i a s m a ... p l a g u l a | 5ta *ändert Hrsg.* | d e ... s u p e r f i c i e m *erg. L*

Data aequatione exprimente relationem lineae BE, ad lineam AB invenire relationem lineae BC. ad eandem.

Esto $AB \sqcap x$. $BE \sqcap z$. $BC \sqcap y$. $EC \sqcap p$. Relatio inter z et x expressa aequatione, v. g. (1) $z^2 \sqcap a^2 - x^2$. Erit (2) $p^2 \sqcap a^2 - x^2 + y^2$. In qua aequatione tam x quam y duos habent valores aequales, a autem et p non nisi unum. Conferenda ergo haec aequatio est cum alia, in qua duas constat incognitas duos habere valores aequales; $x + b \frown x + b$, dabit $x^2 + 2bx + b^2 \sqcap 0$. Ducatur in $y^2 + 2cy + c^2 \sqcap 0$, fiet:

$$[(3)]\ x^2y^2 + 2bxy^2 + 2cx^2y + b^2y^2 + 4bcyx + c^2x^2 + 2cb^2y + 2bc^2x + b^2c^2 \sqcap 0.$$

Sed revera video hanc aequationem non pertinere ad rem, ita enim proposita aequatio foret divisibilis in duas, sic ergo malo:

$$(4)\ x + y + b \frown x + y + b \sqcap x^2 + 2xy + 2xb, + y^2 + 2yb, + b^2 \sqcap 0.$$

Aequatio autem 2, nempe $y^2 - x^2 \genfrac{}{}{0pt}{}{+a^2}{-p^2} \sqcap 0$, ut similis reddatur quartae videndum est.

Quam in rem explicare necesse est ipsas y. et x. nimirum, ponamus: $y \sqcap z + c$. et $x \sqcap v + d$. Unde: $y^2 \sqcap z^2 + 2zc + c^2$. $\quad x^2 \sqcap v^2 + 2dv + d^2$.

---

3 *Nebenbetrachtung:* $AB \sqcap x$. $AE \sqcap v$. $BE \sqcap v - x$, $BC \sqcap y$. $-v^2 + 2vx - x^2 + p^2 \sqcap y^2$. Pone $\dfrac{FG}{GH} \sqcap \dfrac{a}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. $FG \sqcap \dfrac{a}{a}$, $GH \sqcap \dfrac{\sqrt{a^2 - x^2}}{a}$. $FH \sqcap \sqrt{\dfrac{a^2}{a^2} + \dfrac{a^2 - x^2}{a^2}}$ sive $FH \sqcap \dfrac{\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$. Jam $\dfrac{FH}{FG} \sqcap \dfrac{DC}{DB} \sqcap \dfrac{EC \sqcap p}{BC \sqcap y}$. Ergo $\dfrac{p}{y} \sqcap \dfrac{\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$. Ergo $p \sqcap \dfrac{y\sqrt{2a^2 - x^2}}{a}$ et $p^2 \sqcap \dfrac{2y^2a^2 - y^2x^2}{a^2}$. Unde aequatio: $-a^2v^2 + 2vxa^2 - x^2a^2 + 2y^2a^2 - y^2x^2 \sqcap y^2a^2$ sive $-a^2v^2 + 2xva^2 - x^2a^2 + y^2a^2 - y^2x^2 \sqcap 0$ et mutatis signis: $\odot\, a^2v^2 - 2xva^2 + x^2a^2 - y^2a^2 + y^2x^2 \sqcap 0$ sive $\mp v \pm x \sqcap \dfrac{y}{a}\sqrt{a^2 - x^2}$ quae tantum determinanda est ad duas radices aequales.

20 $y\sqrt{a^2 - x^2}$ *L ändert Hrsg.*

---

4 f. duos ... aequales: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f. 13 ponamus: Im Folgenden steht z nicht mehr für BE.

Unde: (5) $z^2 - v^2 + 2cz - 2dv + c^2 \sqcap 0$. Et loco aequationis 4 scribatur:

$$\begin{array}{l} -\,d^2 \\ +\,a^2 \\ -\,p^2 \end{array}$$

(6) $v^2 + z^2 + 2vz + 2bv + 2bz + b^2 \sqcap 0$. Multiplicetur utraque aequatio per (7) $v + \frac{l}{a}z + m \sqcap 0$. et fient similes inter se. Nam 6^{ta} per 7^{mam} dabit:

$$\begin{array}{cccccccccc} v^3 & +\frac{l}{a}z^3 & +\frac{l}{a}\,v^2z & +\quad vz^2 & +\,2b\,v^2 & +\frac{2lb}{a}\,z^2 & +\frac{2bl}{a}\,vz & +\;b^2\;\;v & +\frac{b^2l}{a}\;z & +\,mb^2 \sqcap 0 \\ & & +\;2\;\ldots & +\frac{2l}{a}\;\ldots & +\,m\;.. & +\;m\;.. & +\;2b\;.. & +\,2bm\;.. & +\,2bm\;.. & \\ & & & & & & +\;m\;.. & & & \end{array}$$

Sed video me non quidem errorem admisisse, sed tamen imperfectionem reliquisse, et incognitas habere debito pauciores, itaque resumam non tantum, sed et numeros adjiciam, ut facilius calculi error in progressu vitetur:

Itaque sumamus: (1) $1x + \frac{6l}{a}\,y - 7m \sqcap 0$, et quadrando fiet:

$$(2)\quad \begin{array}{l} x^2 + \boxed{2}\,\frac{6l}{a}yx - \boxed{2}\,7mx, + \frac{36l^2}{a^2}y^2 - \boxed{2}\,42\frac{lm}{a}y + 49m^2 \sqcap 0 \\ \hline 1 \quad +12 \qquad -14 \qquad +36 \qquad -84 \qquad +49 \end{array}$$

Ducatur haec aequatio in aliam $x + \frac{4n}{a}\,y - 5q \sqcap 0$. ponendo $n \sqcap 2$. et fiet:

---

15 *Kontrollrechnung:*

$$\begin{array}{rr} 49 & 84 \\ 1 & \underline{14} \\ 12 & 98 \\ \underline{36} & \\ 98 & \end{array}$$

1 $\sqcap$ 0. *(1)* Multiplicetur utraqve aeqvatio per v: (6) $x^2 + 2xy + 2bx, + y^2$ *(2)* Et *L* 10 f. reliqvisse, *(1)* unamqve *(2)* et *(a)* incognitam habere debito minorem *(b)* incognitas *L*

---

5 (6): In der Gleichung fehlen die Terme $+c^2 + d^2 + 2bc + 2bd + 2cd + 2cv + 2cz + 2dv + 2dz$. Leibniz rechnet konsequent weiter bis Z. 9, wo er den Faktor 2 vor dem Term vergisst, und setzt dann neu an. 11 numeros: Leibniz verwendet im Folgenden zunächst stillschweigend 2 als Kontrollzahl für y.

$$
\begin{array}{llllll}
(3) & & +x^3+\boxed{2}\,\dfrac{6l}{a}\,x^2y & -\boxed{2}\,7m\,x^2 & +\dfrac{36l^2}{a^2}\,xy^2 & \\
 & +\dfrac{144l^2n}{a^3}y^3 & +\dfrac{4n}{a}\ \ldots & & +\boxed{2}\,\dfrac{24ln}{a^2}\ \ldots & \\
-245m^2q & & & -\ 5q\ .. & & \\
\hline
-245 & +\ 144 & +\ 1\ +\ 16 & -\ 19 & +\ 84 & \\
-\boxed{2}\,\dfrac{42lm}{a}\,xy + & 49m^2\,x & & & & \\
-\boxed{2}\,\dfrac{28mn}{a}\ .. & & -\boxed{2}\,\dfrac{168lmn}{a^2}\,y^2 + & \dfrac{196m^2n}{a}\ y & & \\
-\boxed{2}\,\dfrac{30lq}{a}\ .. & +\boxed{2}\,35qm\ .. & -\dfrac{180l^2q}{a^2}\ .. & +\boxed{2}\,\dfrac{210lmq}{a}\ .. & & \\
\hline
-\ 200 & +\ 119 & -\ 456[!] & +\ 616 & & \sqcap\ 0
\end{array}
$$

1–8 *Neben- und Kontrollrechnungen:*

49	16	48	84	49	24	36	168	49	42	196
5	9	36	56	70	7	5	2	4	5	420
245	144	84	60	119	168	180	336	196	210	616
			200				180			
							416 [!]			

245	144	1	14	144	56	70	245
19	1	12	84	4	336	420	5
200	16	36	98	48	392	490	60
416	84	49		196			180
880	119	98		392			490
	616						
	880 [!]						

1 (3): In den Neben- und Kontrollrechnungen unterlaufen Leibniz kleinere Flüchtigkeitsfehler, die sich teilweise kompensieren und die weitere Überlegung nicht beeinträchtigen.

Esto jam aequatio data: (4) $\begin{array}{l} v^2 - \omega^2 + a^2 \sqcap 0 \\ \qquad\quad - p^2 \end{array}$ (loco superioris: $y^2 - x^2 + a^2 - p^2 \sqcap 0$).

Esto (5) $v \sqcap x + c$, et (6) $\omega \sqcap y + d$, fiet: $\begin{array}{l} x^2 + 2cx + c^2 - y^2 - 2dy \sqcap 0. \\ \qquad\qquad\quad - d^2 \\ \qquad\qquad\quad + a^2 \\ \qquad\qquad\quad - p^2 \end{array}$

$$\begin{array}{llll}
(6) & 1x^2 + \boxed{2}\, 9cx & \left\{\begin{array}{l} +\ \ 81\, c^2 - 4y^2 - \boxed{2}\, 8dy\ [\sqcap 0]. \\ -\ \ 16\, d^2 \\ +\ \ 36\, a^2 \\ -100\, p^2 \end{array}\right. & \\
 & \qquad\quad \odot\, a & & \\
\hline
 & \boxed{1 \quad +18 \quad 81} & -\ \ 16 \quad -4 \quad -16 & \\
 & \qquad\qquad 36 & \boxed{-100} &
\end{array}$$

---

6 *Nebenbetrachtung, durch Umrahmung ausgegliedert:* Quod facile in numeris exequemur, nam fingendo $a \sqcap p - e$, fiet $v^2 - \omega^2 \boxed{+p^2} - 2pe + e^2 \boxed{-p^2} \sqcap 0$ et $p \sqcap \dfrac{v^2 - \omega^2 + e^2}{2e}$. Cumque sit $y \sqcap 2$. ponendo $d \sqcap 4$, fiet $\omega \sqcap 6$. Eodem modo quia $x \sqcap 1$. ponendo $c \sqcap 9$, fiet $v \sqcap 10$. $p \sqcap \dfrac{64 + e^2}{2e}$ pone $e \sqcap 4$, fiet: $p \sqcap \dfrac{64 + 16}{2 \frown 4} \sqcap 10$, $a \sqcap p - e \sqcap 10 - 4 \sqcap 6$.

1 *(1)* Hactenus incognitas habemus *(a)* tres, *(b)* qvatuor, l. m. n. p. *(2)* Esto *L* 14 c $\sqcap$ *(1)* 6 fiet v $\sqcap$ 7 *(a)* | et p $\sqcap \dfrac{\boxed{49 - 36}\, 13 + 1}{2} \sqcap 7$ *streicht Hrsg.* | *(b)* 2p $\sqcap \dfrac{13 + e^2}{e}$ sive e $+ \dfrac{13}{e}$, sive 2pe $-$ e$^2 \sqcap$ 13. ponendo e $\sqcap$ 26, fiet: *(aa)* 2p $\sqcap$ *(bb)* $4 \frown \cancel{26}$p $- 26 \frown \cancel{26} \sqcap \cancel{13}\dfrac{\cancel{26}}{2}$ *(2)* 8 *(3)* 9 *L*

---

2 (6): Leibniz wiederholt die Zählung in Z. 6 und bezieht sich in der Folge stets auf die zweite der mit (6) bezeichneten Gleichungen. 7 $\odot\, a$: Der Homogenitätsfaktor a mit der Kontrollzahl 1 ist zu unterscheiden von dem a mit der Kontrollzahl 6.

Quam aequationem 6 multiplicemus per aliam (7) $x + \dfrac{16r}{a} y - 15s \sqcap 0$ fiet:

$$
\begin{array}{llllll}
(8) & 1x^3 + \boxed{2}\ 9c\,x^2 + & \odot\, a\,x\, -4y^2x - \boxed{2} & 8d\,yx & & \\
 & -\quad 15s\,x^2 - \boxed{2}\,135sc\,.. & + \boxed{2}\,\dfrac{14cr}{a}\ \ .. & & & \\
 & +\ \dfrac{16\odot\cancel{a}r}{\cancel{a}}\,y - \dfrac{64r}{a}y^3 - \boxed{2}\,\dfrac{128dr}{a}\,y^2 + \dfrac{16r}{a}\,x^2y & & & & [\sqcap 0] \\
 & +\boxed{2}\,120ds\,y & + & 60s\,y^2 & -15\odot\, as &
\end{array}
$$

Si metuemus ne forte non satis sit incognitarum, in effectu, (etsi numerus sufficere videatur) quia in aeq. 6. neque x^2, neque y^2, habeant arbitrariam, ideo altera ab ipsis, v. g. y^2, potest intelligi multiplicata per arbitrariam, ut $\dfrac{b}{a}$, nam $a^2 - \dfrac{b}{a}y^2$, est ad Ellipsin. Data autem Quadratrice Ellipseos, dabitur et Circuli. Idem est de Hyperbola, si b sit quantitas negativa, adeoque utile fuisset adhibere b, sed et facile suppleri potest.

Habemus ergo aequationes duas conferendas inter se, in quibus certum est errorem calculi esse nullum:

47,10 *Kontrollrechnungen:*

$$
\begin{array}{r}
16 \\ 100 \\ 4 \\ \underline{\ 32} \\ 142
\end{array}
\ [!]
\qquad\qquad
\begin{array}{r}
1 \\ 18 \\ \underline{\ 81} \\ 100 \\ \underline{\ 36} \\ 136
\end{array}
$$

2–5 *Kontrollrechnungen:*

$$
\begin{array}{rrrr}
32 & 256 & 15 & 60 \\
\underline{288} & \underline{\ 64} & 270 & \underline{240} \\
320 & 320 & \underline{\ 15} & 300 \\
 & & 300 &
\end{array}
$$

Collatitiae

$$\begin{array}{lllll} & 1 & 2 & 3 & 4\\ x^3 + & \frac{144l^2n}{a^3}\,y^3 + & \boxed{2}\,\frac{6l}{a}\,x^2y + & \frac{36l^2}{a^2}\,xy^2 - & \boxed{2}\,7m\,x^2 \\ & & +\ \frac{4n}{a}\ \ldots & +\boxed{2}\,\frac{24ln}{a^2}\ \ldots & -\ 5q\ .. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} 5 & 6 & 7 & 8 & 9\\ -\boxed{2}\,\frac{168lmn}{a^2}\,y^2 - & \boxed{2}\,\frac{42lm}{a}\,xy + & 49m^2\,x + & \frac{196m^2n}{a}\,y - & 245\,m^2q\ \ \sqcap 0. \\ -\ 180\frac{l^2q}{a^2}\ .. & -\boxed{2}\,\frac{28mn}{a}\ .. & +\boxed{2}\,35qm\ .. & +\boxed{2}\,\frac{210lmq}{a}\ .. & \\ & -\ \boxed{2}\,\frac{30lq}{a}\ .. & & & \end{array}$$

Et

$$\begin{array}{lllll} & [1 & 2 & 3 & 4] \\ x^3 - & \frac{64r}{a}\,y^3 + & \frac{16r}{a}\,x^2y - & 4\,xy^2 + & \boxed{2}\,9c\,x^2 \\ & & & & -\ 15s\ .. \end{array}$$

$$\begin{array}{lllll} [5 & 6 & 7 & 8 & 9] \\ +\ 60s\,y^2 - & \boxed{2}\,8d\,xy + & \odot a\ x + & 16\odot r\ y - & 15\odot as\ \ \sqcap 0. \\ -\boxed{2}\,\frac{128dr}{a}\ .. & +\boxed{2}\,\frac{144cr}{a}\ .. & -\boxed{2}\,135sc\ .. & +\boxed{2}\,120ds\ .. & \end{array}$$

Habebimus jam aequationes collatitias novem, literas autem incognitas, $c, d, l, m, n, q, r, s, \odot$. etiam novem. Inveniri ergo poterunt omnes, ac proinde ipsa denique $\odot$, in qua latet p, cujus causa caeterae quaeruntur. Sed ut calculus sine erroris metu expediri possit, iidemque, quibus hactenus usi sumus, numeri serviant, adjiciendae sunt literae quaedam arbitrariae, quae in medio calculo probationi inserviant, sub finem autem vel nihilo vel unitati, vel alteri cuidam quantitati, quo perinde sit, ac si initio adscriptae non fuissent, aequales ponantur.

Interim in antecessum dici potest, valorem ipsarum $\underline{l}$. $\underline{\underline{n}}$. $\underline{r}$, haberi ex collatitiis $\underline{1}$. $\underline{2}$. $\underline{3}$. nullis aliis in earum valorem ingredientibus, $\underline{\underline{s}}$ habetur ex aeq. $\underline{9}$. per $\odot$. $m.q$, $\underline{\underline{d}}$. ex aeq. $\underline{6}$ per $m.q.c$, $\underline{\underline{q}}$ ex aeq. $\underline{4}$. per $m.c.\odot$.

Restant aequationes tres, $\underline{5}$. $\underline{7}$. $\underline{8}$, ex quibus inveniendae, $c.m.\odot$, ex quibus $\underline{\underline{m}}$ optime invenietur per $\underline{5}$. ope $c.\odot$. et hactenus omnes aequationes lineares, seu simplices fuere. Quod inde scio, quod pro cujuslibet literae valore hactenus eam elegi aequationem, in qua ipsa simplex esset et non nisi in denominatore; et per nullam incognitam restantem multiplicaretur actu vel potentia; id est neque per ipsam immediate neque per aliam quae in ipsam resolvitur. Restant aequationes $\underline{7}$ et $\underline{8}$. pro c et $\odot$. Et per aequationem $\underline{7}$ habebitur valor ipsius $\underline{c}$, quadraticus. Satis enim scio altius ascendere non posse. Denique ultimo valor ipsius $\odot$ ad quadrato-quadraticum ascendet.

Video in eo a me erratum quod sumsi s haberi ex aequatione 9 per $\odot.m.q.$ quod verum est, sed ita intrabit $\odot$ in denominatorem, quod tamen quamdiutissime licet vitandum.

---

1 *Am Rande:*

c	9	א	38	γ	22
d	4	ב	66	β	10
$\odot$	1	ח	126	δ	80
l	3	ϖ	10	λ	118
m	7	ל	1184	ξ	388
n	2	ק	5	ψ	170
p	10	Ω	7	φ	230
q	5			θ	1786
r	8			ף	13984
s	15				

10 ipsa *(1)* semel esset aut pure *(2)* simplex *L*

Repetam ergo[:] Valor literarum $\underline{\underline{l}}$. $\underline{\underline{n}}$, $\underline{\underline{r}}$. habetur ex collatitiis $\underline{1}$. $\underline{2}$. $\underline{3}$. absolute. $\underline{\underline{s}}$ habetur ex aeq. $\underline{4}$. per $c.\,q.\,m.$ $\underline{\underline{d}}$ ex aeq. $\underline{5}$. per $c.\,q.\,m.$ $\underline{\underline{q}}$ ex aeq. $\underline{6}$. per $c.\,m.$ $\underline{\underline{\odot}}$ vel si malis p^2 habetur ex aeq. $\underline{7}$. per $c.\,m.$ Restant duae aequationes $\underline{8}$ et $\underline{9}$, ad habendas $\underline{\underline{m}}$, et $\underline{\underline{c}}$.

Aequatio c o l l a t i t i a p r i m a:

$18l^2n \sqcap 8ra^2 + 10\beta a^2$. Ergo $8r \sqcap \dfrac{18l^2n - 10\beta a^2}{a^2}$.

C o l l a t i t i a 2 $^{\text{d a}}$:

$\boxed{2}\,3l + 2n \sqcap 8r\,\dfrac{18l^2n - 10\beta a^2}{a^2}$, sive $2n \sqcap \dfrac{\boxed{2}\,3la^2 + 10\beta a^2}{9l^2 - a^2}$.

C o l l a t i t i a t e r t i a:

$9l^2 + \boxed{2}\,6ln \sqcap -a^2 + 22\gamma a$, sive explicando n, $9l^2, +\boxed{2}\,3l \frown \dfrac{\boxed{2}\,3la^2 + 10\beta a^2}{9l^2 - a^2} \sqcap -a^2 + 22\gamma a$. sive ablatis fractionibus et comprehensionibus:

$81\ l^4\, -9l^2a^2 + \boxed{4}\,9l^2a^2 + \boxed{2}\,30l\beta a^2 \sqcap -9l^2a^2 + 198l^2\gamma a + a^4 - 22\gamma a^3$.

$81.\,36.\,60.\,\not 9.\,22 \sqcap \not 9.\,198 + 1$ et omissis β et γ, numerisque sumtitiis fiet:

36
60
$\not 9$
$\underline{22}$
199

$l^4 + 4l^2a^2 \sqcap a^4$, sive, $l^4 + 4l^2a^2 + 4a^4 \sqcap 5a^4$, seu $l^2 \sqcap a^2\sqrt{5} - 2a^2$, sive $l \sqcap a\sqrt{\sqrt{5} - 2}$ et $n \sqcap 2\sqrt{\sqrt{5} - 2}a, \smile 9\sqrt{5} - 9$. $r \sqcap \dfrac{l^2n}{a^2}$. Itaque, $r.\,n.\,l$, pro pure planeque inventis haberi possunt.

C o l l a t i t i a 4 $^{\text{t a}}$:

$-\boxed{2}\,7m - 5q \sqcap +\boxed{2}\,9c - 15s - 22\gamma\not d$, et $15s \sqcap \boxed{2}\,9c - 22\gamma\not d + \boxed{2}\,7m + 5q$.

3 f. et $\underline{\underline{\text{c}}}$. *(1)* Ex m et c inventis facile habetur p, propter qvam caeterae omnes qvaerebantur *(2)* Aeqvatio *L* 12 et γ, *(1)* fiet: *(a)* $81l^4 + \boxed{4}\,9l^2a^2$ *(b)* $81l^4 + \boxed{4}\,9$ *(2)* numerisqve | sumtitiis *erg.* | fiet: *L*

4 Aequatio: Beim ersten Koeffizientenvergleich vergisst Leibniz das Minuszeichen vor $8ra^2$ und erhält in Z. 18 f. falsche Werte für l, n, r.

C o l l a t i t i a q u i n t a :

$$-\boxed{2}\,42\frac{lmn}{a^2} - 45\frac{l^2}{a^2}q \sqcap 15s \llcorner \boxed{2}\,9c - 22\gamma\cancel{d} + \boxed{2}\,7m + 5q\lrcorner - \boxed{2}\,\frac{32dr}{a} - 80\delta a \text{ et fiet:}$$

$$4d \sqcap \frac{+\boxed{2}\,\dfrac{42lmn}{a^{\cancel{2}}} + \dfrac{45l^2}{a^{\cancel{2}}}q + \boxed{2}\,9ca^{\cancel{2}} - 22\gamma a^{\cancel{2}} + \boxed{2}\,7ma + 5qa - 80\delta a^{\cancel{2}}}{\boxed{2}\,8r}.$$

C o l l a t i t i a 6^t^a :

$+\cancel{\boxed{2}}\,118\lambda a - \cancel{\boxed{2}}\,21lm - \cancel{\boxed{2}}\,14mn - \cancel{\boxed{2}}\,15lq \sqcap -\cancel{\boxed{2}}\,4da + \cancel{\boxed{2}}\,72cr$. Pro $4d$ substituatur ejus valor inventus, ita tamen ut ipsi termini quibus inest q, in unum colligantur locum, fiet:

$$\frac{+45l^2q + 5qa^2}{\boxed{2}\,8r} - 15lq \sqcap -4da\,\frac{-\boxed{2}\,42lmn - \boxed{2}\,9ca^2 + 22\gamma a^2 - \boxed{2}\,7ma^2 + 80\delta a^2}{\boxed{2}\,8r}$$

$$+72cr - 118\lambda a + 21lm + 14mn$$

omnibusque per $\boxed{2}\,8r$ multiplicatis, et per $9l^2 + a^2 - \boxed{2}\,24lr$ divisis, fiet:

1–5 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 1–3:

84	84	18	84	84
45	45	14	45	45
129	129	5	− 129	18
64	18	37	− 15	14
63 [!]	14	22	− 144 − 64 − 80	5
15	5	15		+ 166
48	166			80
	− 22			22
	− 48			− 102
	126 [!]			64

zu Z. 5:

21	$\dot{7}2$
14	− 4
15	68
50	+50
	118

$$5q \sqcap \frac{-\cancel{\boxed{2}}\,\cancel{42}lmn - \boxed{2}\,\cancel{9}ca^2 + 22\gamma a^2 - \boxed{2}\,7ma^2 + \cancel{8}0\delta a^2 + \boxed{2}\,576cr^2 - \boxed{2}\,944\lambda ar + \boxed{2}\,\cancel{168}lmr + \boxed{2}\,112mnr}{-\boxed{2}\,24rl + 9l^2 + a^2}$$

C o l l a t i t i a 7 $^{\text{ma}}$:

$49m^2 + \boxed{2}\,35qm \sqcap \odot a - \boxed{2}\,135sc + 388\xi a$. Et fiet:

$$\odot a \sqcap 49m^2 + \boxed{2}\,7m \frac{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} + \boxed{2}\,135sc - 388\xi a.$$

Et pro $15s$ substituendo eius valorem, ex collat. 4. fiet:

$$\odot\ a \sqcap 49m^2 + \boxed{2}\,35mq + \boxed{4}\,81c^2 - \boxed{2}\,198\gamma c + \boxed{4}\,63mc + \boxed{2}\,45qc - 388\xi a.$$

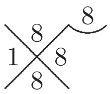
---

1 f. (Nota: numeri lineolis transfixi non ideo minus valent.)

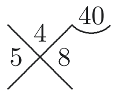
2–7 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 2:

$$\begin{array}{r} 72 \\ \underline{\ \ 8} \\ 576 \end{array} \quad \begin{array}{r} 118 \\ \underline{\ \ 8} \\ 944 \end{array}$$



$$\begin{array}{r} 21 \\ \underline{\ \ 8} \\ 168 \end{array} \quad \begin{array}{r} 14 \\ \underline{\ \ 8} \\ 112 \end{array}$$



zu Z. 4:

$$\begin{array}{r} 49 \\ \underline{70} \\ 119 \end{array} \sqcap 1 - 270 + \xi a. \text{ Ergo } \begin{array}{r} 118 \\ \underline{270} \\ 388 \end{array} \sqcap \xi a$$

zu Z. 7:

$$\begin{array}{r} 22 \\ \underline{\ \ 9} \\ 198 \\ \underline{\ \ 2} \end{array}$$

[*bricht ab*]

---

5 $+\boxed{2}\,7m$: Das folgende Wiederholungszeichen steht für den Wert von $5q$ in Z. 1 f.

C o l l a t i t i a   o c t a v a :
$88m^2n + \boxed{2}\,105lmq \sqcap 8\odot ra + \boxed{2}\,60dsa + 170\psi a^2$.

C o l l a t i t i a   n o n a :
$245m^2q \sqcap 15\odot as + 230a^2\varphi$.

Quas vero duas aequationes, et incognitas in illis m, et c ut commodius evolvamus, pro $\odot a$ in nona, substituamus ejus valorem ex octava, fiet:

$$(☿)\ 245m^2q \sqcap \frac{98m^2n + \boxed{2}\,105lmq - \boxed{2}\,60dsa - 170\psi a^2}{8r} \frown 15s, +230a^2\varphi$$

Jam ut valores ipsarum $q.\,d.\,s.$ facilius huic aequationi inseramus; ideo in valore ipsius q collatitiae 6^{tae} pro

(9) $9l^2 + a^2 - \boxed{2}\,24rl$, ponemus $-38\aleph a$ et pro

(10) $-\boxed{2}\,6ln - \boxed{2}\,a^2 + \boxed{2}\,24lr + \boxed{2}\,16nr, \frown 7m$, ponemus $462\beth am$ et pro

(11) $22\gamma a^3 + 80\delta a^3 - \boxed{2}\,944\lambda a^3$ ponemus $-1786\theta a^3$ et denique pro

---

2–12 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 2:

88	8	88
+<u>210</u>	<u>120</u>	<u>210</u>
298	– 128 $\sqcap$ 170	298
		−120
		−<u>170</u>
		008

zu Z. 4:

245
<u>15</u>
230

zu Z. 10:

48
<u>10</u>
38

zu Z. 11:

−12	+48
−<u>2</u>	+<u>32</u>
−14	80
	−<u>14</u>
	$\beth \sqcap 66$
	<u>7</u>
	462

zu Z. 12:

80	944
<u>22</u>	<u>2</u>
102	1888
	<u>102</u>
	1786

---

2 $88m^2n$: Richtig wäre $98m^2n$ und somit $+180\psi a^2$ am Ende der Gleichung. In der folgenden Gleichung ☿ verwendet Leibniz den richtigen Wert $98m^2n$, bleibt aber bei dem falschen $170\psi a^2$.

12 $-\boxed{2}\,944\lambda a^3$: Richtig wäre $-\boxed{2}\,944\lambda a^2r$; das Versehen hat keine Auswirkungen.

(12) $-\boxed{2}\,a^3+\boxed{2}\,64r^2a, \frown 9c \sqcap 1134\text{ח}a^2c$ et fiet

(13) $5q \;\sqcap\; \dfrac{462\cancel{d}\text{ב}m+1134\cancel{d}\text{ח}c-1786a^{\cancel{2}}\theta}{-38\text{א}\cancel{d}}$. Eodem modo, ut ipsam d. quanta licet brevitate exprimamus, ideo pro

(14) $9\dfrac{l^2}{a}+a, \frown 5q$. ponamus $50\text{ꝏ}q$. Jam in ejusdem d valore, pro $\boxed{2}\,\dfrac{6ln}{a}+\boxed{2}\,a$,
$\dfrac{-\boxed{2}\,60\text{ꝏ}ln-\boxed{2}\,10\text{ꝏ}a^2+\boxed{2}\,240\text{ꝏ}lr+\boxed{2}\,160\text{ꝏ}nr}{-38\text{א}a}, \frown 7m$, vel potius paucis:

(15) $\boxed{2}\,\dfrac{6ln}{a}+\boxed{2}\,a+\dfrac{660\text{ꝏ}\text{ב}}{-38\text{א}}, \frown 7m \;\sqcap\; \dfrac{128\text{ג}}{-38\text{א}} \frown 7m$

(16) pro $\boxed{2}\,a^2, +\dfrac{1260\text{ח}\text{ꝏ}a}{-38\text{א}},, \frown 9c \sqcap \dfrac{1184\text{ל}}{-38\text{א}} \frown 9c$

(17) pro $-22\gamma a-80\delta a+\dfrac{17860a\theta\text{ꝏ}}{+38\text{א}}$ poni potest: $\dfrac{13984}{38\text{א}}\text{פ}a$. Et fiet

(18) $4d \sqcap \dfrac{-128a\text{ג} \frown 7m, -1184\text{ל}a \frown 9c, +13984\text{פ}a^2}{38\text{א} \frown \boxed{2}\,8r}$. Jam in aequatione (☿) habemus praeter alia, etiam

(19) $+\boxed{2}\,105lmq \frown 15s, -\boxed{2}\,900ds^2a$. Et ante omnia per collatitiam quartam

---

1–8 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 1:

128	126
$\underline{\;\;2}$	$\underline{\;\;9}$
126	ח ⊓ 1134

zu Z. 2:

462	$-1\dot{7}86$	$\cancel{4}$
$\underline{1134}$	$\underline{1596}$	$\underline{-\cancel{1}\cancel{9}\cancel{0}}\;⨍+5$
1596	$-\;190$	$-\;\cancel{3}\cancel{8}$

zu Z. 4–6:

480	38	660
$\underline{320}$	$-\underline{\;14}$	$-\underline{532}$
$\underline{800}$	152	128 ג
120	$\underline{38\;}$	
$\underline{\;20}$	-532	
660		
$-\underline{532}$		
128		

zu Z. 7:

$1\dot{2}\dot{6}0$	$\cancel{2}4$
$\underline{\;\;76}$	$\cancel{1}\cancel{1}\cancel{8}4\;⨍31$
1184	$\cancel{3}\cancel{8}8$
	3

zu Z. 8:

38	$\underline{178\dot{6}\dot{0}}$
$\underline{102}$	$\underline{\;\cancel{3}\cancel{8}\cancel{7}\cancel{6}}$
76	$\cancel{1}\cancel{3}\cancel{9}\cancel{8}\cancel{4}$
$\underline{380\;}$	
3876	

$$(20)\ 225s^2 \sqcap \boxed{4}\,81c^2 - \boxed{4}\,22\gamma 9c + \boxed{8}\,63mc + \boxed{4}\,45qc\ .$$
$$+ 22 \frown 22\gamma^2 - \boxed{4}\,22\gamma 7m - \boxed{2}\,22\gamma 5q$$
$$+ \boxed{4}\,49m^2 + c\,\boxed{4}\,35mq$$
$$+ 25q^2$$

Ideo valor ipsius d. in artic. 18. duci debet in valorem ipsius s^2, in artic. 20, unde fit, ut ipsius d. valor ducendus sit, non tantum in valorem ipsius q, sed etiam in valorem ipsius q (artic. 13) quadratum. Ac proinde necesse est quadrari etiam $5q$. scilicet

$$(21)\ 25q^2 \sqcap \left.\begin{array}{l} 462 \frown 462\beth^2m^2 + \boxed{2}\,462\beth m1134\text{ת}c - \boxed{2}\,462\beth m1786a\theta \\ + 1134 \frown 1134\text{ת}^2c^2 - \boxed{2}\,1134\text{ת}c1786a\theta \\ + 1786 \frown 1786a^2\theta^2 \end{array}\right\},\ \smile 38 \frown 38\aleph^2.$$

Multiplicandus valor $225s^2$, ex artic. 20 per $4d$ ex artic. 18. Ergo multiplicandus valor ipsius $4d$, ex artic. 18. per valorem ipsius $25q^2$ ex artic. 21; item multiplicandus valor dictus ipsius $4d$, per valorem ipsius $5q$ ex artic. 13. Porro cum in artic. 19. etiam contineatur $15s5q$, ideoque multiplicando s per q. fit ut rursus multiplicari debeat q, per q. id est ut opus sit valore ipsius q quadrato. Factis illis multiplicationibus omnibus, per valores dictos, nullae amplius, quae nos incommodent, incognitae supererunt in aequatione ☿, exceptis duobus, m, et c. Quoniam autem operatio futura esset valde prolixa, opus est rursus brachylogia, literisque novis, quae cognitas, vel quasi cognitas, terminorum, quos dabunt incognitae $m.\,c$, exprimant. In quo danda opera est, ut literae fictitiae sem-

---

55,9–11 *Neben- und Kontrollrechnungen zum Koeffizientenvergleich:*

zu Z. 9:

$$\begin{array}{r} 128 \\ \underline{7} \\ 896 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 1184 \\ \underline{9} \\ 10656 \end{array} \qquad \begin{array}{r} +13984 \\ \boxed{\begin{array}{r} -10656 \\ -\ \ 896 \end{array}} \\ \underline{-11552} \\ 2432 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 38 \\ \underline{16} \\ 228 \\ \underline{38} \\ 608 \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{2432}\ \cancel{|}4 \\ \cancel{608} \end{array}$$

zu Z. 11:

$$\begin{array}{r} 15 \\ \underline{15} \\ 75 \\ \underline{15} \\ 225 \\ \underline{4} \\ 900 \end{array}$$

5 in | artic. *erg.* | 20 *(1)*. qvod rursus faciendum est brachylogice, *(2)*, unde *L* 9+11 $\frown 38\aleph^2$ | Multiplicandus … Ergo *erg.* | *(1)* multiplicando jam valorem *(2)* multiplicandus *L* 17 et c. *(1)* qvarum terminos, ut rursus brachylogice comprehendamus *(2)* Qvoniam *L*

per separentur a veris, quo sub calculi finem statim rejici possint. Termini autem hi erunt: m^3 (tum ob ductum, q in m^2, et s in m^2, et s in mq, tum ob ductum s^2 in d in quo continetur d in q^2). c^3 (ob $s^2d.\,dq^2$). m^2c (ob $m^2q.\,sm^2.\,smq$, et $s^2d.\,dq^2$). c^2m (ob smq et $s^2c.\,dq^2$). m^2 (ob $\underset{*}{m^2q}$, $\underset{*}{m^2ns}$, $\underset{*}{mqs}$, ds^2, dq^2, ds^2c, qs). c^2 (ob $dq^2.\,qs$). mc (ob $\underset{*}{mqs}.\,s^2d.\,dq^2$). m (ob $\underset{*}{mqs}.\,\underset{*}{s^2d}.\,\underset{*}{dq^2}.\,\underset{*}{sd}.\,\underset{*}{s\psi}$) c (ob $\underset{*}{s^2d}.\,\underset{*}{dq^2}.\,\underset{*}{qs}.\,\underset{*}{s\psi}$). et denique Terminus purus (ob $\underset{*}{s^2d}.\,\underset{*}{dq^2}.\,\underset{*}{qs}.\,\underset{*}{s\psi}$). Notandum autem omnes terminorum origines asteriscis notatas, non nisi quantitatibus fictitiis constare, et sub finem calculi rejici posse: in caeteras quoque plerasque omnes, ingredi fictitias, quas explicando aut comprehendendo distinguemus.

$$\text{Cognita ipsius } \underline{\underline{m^3}},\text{ est } \left.\begin{array}{l} \overset{((1)3)}{\dfrac{+66\text{ב}}{38\text{א}}} + \overset{((7)1)}{\dfrac{\boxed{2}\,2n}{8r}} - \overset{((8)6)}{\dfrac{2n66\text{ב}}{38\text{א}8r}} - \overset{((8)0)}{\dfrac{\boxed{4}\,3l66\text{ב}}{38\text{א}8r}} + \overset{((4)0)}{\dfrac{\boxed{2}\,3l66\text{ב}66\text{ב}}{38\text{א}8r38\text{א}}} \\[2ex] \dfrac{-\overset{(1(0))}{\dfrac{128\text{ג}66\text{ב}66\text{ב}}{38 \frown 38\text{א}^2}} - \overset{((4)4)}{\boxed{4}\,128\text{ג}} - \overset{((4)6)}{\boxed{4}\,128\text{ג}66\text{ב}}}{\boxed{2}\,38\text{א} \frown 8r} \end{array}\right\} \sqcap \frac{2\text{ק}a^2}{\boxed{2}\,\text{א}^3 8r}.$$

---

6 *Nach* purus, *gestrichen:* error

10–14 *Nebenrechnung zur Neunerprobe:*

$$\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ 6 \\ 4 \\ \underline{6} \\ 20 \sqcap 2 \end{array}$$

12 $\sqcap$ *(1)* $\dfrac{5\text{ק}a^2}{\boxed{2}\,\text{א}^3 8r}$ *(2)* $\dfrac{2\text{ק}a^2}{\boxed{2}\,\text{א}^3 8r}$. *L* 16 *(1)* $\begin{array}{r} 3 \\ 1 \\ 6 \\ \underline{4} \\ 14 \sqcap 5 \end{array}$ *(2)* 3 *L*

10–14 Leibniz unterlaufen Fehler bei der Berechnung der Terme und bei der Neunerprobe, die das Ergebnis beeinträchtigen. Den zunächst ermittelten Wert $\text{ק} = 5$ ersetzt er durch $\text{ק} = 2$, ändert im Text aber nur unvollständig. In N. 7₂ setzt er neu an.

Obiter autem explicandum est compendium, quo utor in hoc calculi per numeros examine. Nimirum, pro Numeris ipsis eorumve collectorum summa, pone eorum Residuum novenarium; quandoquidem in calculis prolixioribus, qualis iste est, abjectione novenarii utendum est, et loco numerorum addendorum, subtrahendorum, multiplicandorum eorum residuus in characteribus, post abjectionem novenarii adhibetur, quem appellabo numeri cujuslibet Enneadicum. Ita ut omnia ad communem denominatorem $\boxed{2}$38א38א38א8r revocarentur, necesse est v. g. 66ב, cujus Enneadicus est 3 multiplicari per $\boxed{2}$38א38א8r, cujus Enneadicus est 1. Ergo loco 66ב ⌒ [$\boxed{2}$]38א ⌒ 38א8r ponemus 3. Eodem modo $-2n$66ב cujus Enneadicus 3, (: quanquam enim Enneadicus a 2 ⌒ 66 sit 6, nam Enneadicus a 66 est 3. tamen Enneadicus a -2 ⌒ 66 est 3. Sumenda enim differentia ipsius Enneadici numeri affirmativi a 9:) multiplicetur per $\boxed{2}$38א38א cujus Enneadicus 8, fiet Enneadicus producti 6. Omnium horum Enneadicorum summa habet Enneadicum 5, ideoque compendii causa pro cognita ipsius m^3, pono 5קa^2. Caeteroquin notandum Enneadicos numerorum essentialium, ab Enneadicis factitiorum separandos, cum unum quendam terminum cont[i]ngere volumus v. g. pro $-\boxed{4}$128ג ⌒ 38א38א non debet scribi +4 Enneadicus, sed $\boxed{-4}$8. Nam et signa inter essentiales numeros haberi possunt nam $-$ idem est quod $\boxed{-1}$. Cujus observationis ratio haec est, ut semper examinis ratio constet.

Sed aliud est cum brachylogia utimur, quae non tantum in numeros fictitios, sed verum calculum extendatur ut hoc loco, tunc enim istorum nulla habetur distinctio; vel ideo quia postea sub finem calculi ad illa ipsa quibus compendiosior expressio substituta est, rediri debet. Quod in Brachylogia Enneadica numerorum sumtitiorum non fit. His observatis semper calculus examini suberit; per singulas partes non minus ac si nulla adhibita fuisset brachylogia Enneadica, ut e. g. pro 1134תc. id est 126ת9c, [poni] poterit: 9ת9c vel 81תc pro 126 ponendo ejus Enneadicum 9. quoniam hic 9 poni malim quam 0. Sed et 81תc malim poni quam 9תc ut scilicet Enneadici duo in se ducantur quemadmodum et duae literae, faciliusque sit examen.

9–11 Nota in abjectione novenarii ubi mixtum est, semper -1 significat $+8$. et ita de caeteris, nam intelligi debet: $9-1$, sed nunquam a⟨n⟩te multiplicationem vel divisionem.

3 f. abjectione *(1)* characterum *(2)* novenarii *L*   23 pro *(1)* 17866aθϭ poni poterit *(2)* 1134תc. *(a)* poni poterit *(b)* id *L*   28 f. sed ... divisionem *erg.* *L*

Cognita ipsius $\underline{c}^3$, est $\boxed{4}\overset{((1)7)}{\dfrac{-1184\text{ל}a}{38\text{א}}} + \boxed{4}\overset{((2)0)}{\dfrac{1184\text{ל}a126\text{ת}}{38\text{א}38\text{א}\boxed{2}8r}}\ \overset{(0)}{\dfrac{-1184\text{ל}a126\text{ת}126\text{ת}}{38\text{א}38\text{א}38\text{א}\boxed{2}8r}} \sqcap \dfrac{7\Omega}{\boxed{2}8r}$.

Cognita ipsius $\underline{m^2c}$ est $\dfrac{126\text{ת}}{38\text{א}}$ [*bricht ab*]

Ne hic ob angustiam chartae arctati, labamur, plagula separata calculus iste continuatur. Ubi et resumta est investigatio cognitae ipsius m^3.

[*Teil 2, gestrichen*]

$x + y - b \frown x + y - b \sqcap x^2 + 2xy + y^2 - 2by + b^2 \sqcap 0.$

$x^2 + 2xy + y^2 - 2bx - 2by + b^2 \frown$ y^3 vel ponendo pro b ejus valorem $x + y$, fiet,

lx^3

my^2x

nyx^2

py^2

qyx

rx^2

sy

tx

a

$x^2 \boxed{+2xy}\ \boxed{+y^2}\ \boxed{-2yx}\ \boxed{-2y^2} + x^2 + 2xy \boxed{+y^2}$. Rectius sic, ponendo pro $y - b$ ejus valorem $-x$, fiet: $1x^2 - 2x^2 + 1x^2 \sqcap 0$, eodem modo ponendo pro $x - b$ ejus valorem $-y$,

---

7–66,7 NB. Deleta est haec pagina, non quod sit inutilis, sed ne inter praecedentem et novam plagulam, qua praecedens continuatur, aliquid interjectum esset.

8 -2bx *erg. L*

---

2 $\underline{c}^3$: Leibniz berechnet den Koeffizienten von c^3 falsch; richtig durchgeführt ist die Rechnung auf S. 68 Z. 2. 4 plagula separata: N. 7₂. 7 $x + y - b$: Im Ergebnis der folgenden Multiplikation fehlt der Term $-2bx$. Leibniz hat ihn in der nächsten Zeile nachträglich ergänzt, ohne die Umformung in Z. 18 zu berichtigen. 8 Vgl. zum Folgenden J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, S. 507 f.

fiet: $1y^2 - 2y^2 + 1y^2 \sqcap 0$. Jam terminos y multiplicemus per unam, et x per alteram et compositos per utramque:

$$\begin{array}{r} y^3 \\ lx^3 \\ my^2x \\ nyx^2 \\ py^2 \\ qyx \\ rx^2 \\ sy \\ tx \\ a \end{array} \frown\ y^2 - 2y^2 + y^2 \text{ vel per } x^2 - 2x^2 + x^2.$$

$$y^2 - 2y \frown \underbrace{b - x}_{y} + \underbrace{b^2 - 2bx + x^2}_{y^2}$$

$\underbrace{x + y - b}_{-x} \sqcap 0$. Ergo

$x^2 - 2x^2 + x^2 \sqcap 0$.

$\sqcap\ x^2 + 2x \frown \underbrace{y - b}_{-x} + \underbrace{b^2 - 2by + y^2}_{x^2} \sqcap 0$.

$+\,y \underbrace{+\,x - b}_{-y} \sqcap 0$.

$y^2 - 2y^2 + y^2 \sqcap 0$.

$$y^2 + 2y \frown \underbrace{x - b}_{-y} + \underbrace{x^2 - 2bx + b^2}_{y^2} \frown \begin{array}{l} y^3 \\ lx^3 \\ my^2x \\ nyx^2 \\ py^2 \\ qyx \\ rx^2 \\ sy \\ tx \\ a \end{array}$$

	y^5	$+2\,y^4 \frown x$ $-b$	$+\,x^2y^3$ $-2b\,x$ .. $+\,b^2$ ..		⊙		
$mx\,y^2$ $+\,p$		$+mx\,y^4$ $+\,p$	$+2mx\,y^3 \frown x$ $+\,2p\quad -b$	$+\,mx\,y^2 \frown x^2$ $+\,p\quad -2b\,x$ $+b^2$			
$n\,x^2y$ $q\,x$ s			$+\,n\,x^2y^3$ $+\,q\,x$ $+\,s$	$2n\,x^2y^2 \frown x$ $2q\,x\quad -b$ $2\,s$	$nx^2y^2 \frown x^2$ $q\,x\quad -2b\,x$ $s\quad +b^2$		$\sqcap 0$
$l\,x^3$ $r\,x^2$ $t\,x$ a				$l\,x^3y^2$ $r\,x^2$ $t\,x$ a	$2l\,x^3y \frown x$ $2r\,x^2\quad -b$ $2t\,x$ $2\,a$	$l\,x^3 \frown x^2$ $r\,x^2\quad -2b\,x$ $t\,x\quad +b^2$ a	
	5	4	3	2	1	0	

Jam alteram x sumendo pro incognita, et multiplicando per $x^2 + 2x \frown \underbrace{y - b} + \underbrace{y^2 - 2by + b^2}$ fiet alia aequatio

$l\,x^3$	lx^5	$+2\,l\,x^4 \frown y$ $-b$	$+\,l\,x^3 \frown y^2$ $-2by$ b^2		☽		
$n\,y\,x^2$ r ..		$n\,y\,x^4$ r	$2n\,y\,x^3 \frown y$ $2\,r\quad -b$	$n\,y\,x^2 \frown y^2$ $r\quad -2by$ $+b^2$			
$m\,y^2x$ $q\,y$ .. t ..			$m\,y^2x^3$ $q\,y$ t	$2m\,y^2x^2 \frown y$ $2q\,y\quad -b$ $2\,t$	$m\,y^2x \frown y^2$ $q\,y\quad -2by$ $t\quad b^2$		$\sqcap 0$
y^3 $p\,y^2$ $s\,y$ a				y^3x^2 $p\,y^2$ $s\,y$ a	$2\,y^3x \frown y$ $2p\,y^2\quad -b$ $2s\,y$ $2\,a$	$y^3 \frown y^2$ $p\,y^2\quad -2by$ $s\,y\quad +b^2$ a	
	5	4	3	2	1	0	

Cum ergo priore aequatione ⊙, y determinetur ad duas radices aequales, et posteriore ☽, determinetur x ad duas radices aequales; hinc jungendo has duas aequationes inter se, fiet una ex ipsis composita, in qua utraque incognitarum duos habet valores aequales. Si unam ex altera auferas plurimi termini destruentur, nec poterit applicari producta ad datam quamlibet, sed si addas alteram ad alteram, hinc statim habetur fundamentum Regulae ab Huddenio Slusioque inventae, a Slusio primum publicatae. Nam ubi junxeris in unam aequationem, potes eam in duo latera divellere, latus unius et latus alterius incognitae et inde fiet regula Slusiana.

Nimirum data quaelibet aequatio duarum incognitarum, ut determinetur ad duas radices aequales ab uno latere aequationis relinque terminos unius incognitae, in alterum latus transfer terminos alterius incognitae, terminos autem ex utraque incognita, simul

---

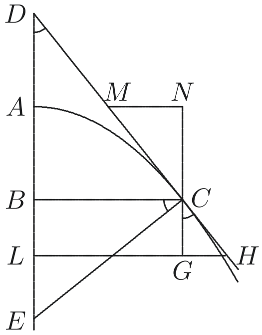
9 *Nebenbetrachtung:* $xy + y^2 \sqcap x^2$ Aequatio data. Unde $xy + y^2 \sqcap x^2 - xy$. Unde: $xl + 2yl \sqcap 2x^2 - xy$. Unde $l \sqcap \dfrac{2x^2 - xy}{x + 2y}$. Item $xy + y^2 \sqcap x^2 - yx$. Unde $xy + 2y^2 \sqcap 2xm - ym$. Unde $m \sqcap \dfrac{xy + 2y^2}{2x - y}$. Unde $lm \sqcap \dfrac{2x^3y \boxed{-x^2y^2} + 3\ 4\ y^2x^2 - 2y^3x}{2x^2 + 3\ 4\ yx \boxed{-yx} - 2y^2}$. Ergo $lm \sqcap yx$. quod

6–8 Nam ... Slusiana *erg. L* 12 *(1)* $\mathrm{xy} \sqcap \mathrm{a}^2$. $\mathrm{ly} \sqcap \mathrm{a}^2$, $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}} \sqcap \mathrm{x}$. *(a)* $\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2$, pone $\mathrm{xy} + 2\mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{a}^2 + 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{xy}$, sive $\mathrm{lx} + 2\mathrm{ly} \sqcap \cancel{\mathrm{a}^2} + 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{xy}$. $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\cancel{\mathrm{a}^2} + 2\mathrm{x}^2 + \mathrm{xy}}{\mathrm{x} + 2\mathrm{y}}$. $\mathrm{xy} + 2\mathrm{y}^2 \sqcap \cancel{\mathrm{a}^2} + 2\mathrm{xm} + \mathrm{my}$, et $\mathrm{m} \sqcap \dfrac{\mathrm{xy} + 2\mathrm{y}^2}{2\mathrm{x} + \mathrm{y}}$. $\mathrm{lm} \sqcap \dfrac{4\mathrm{x}^3 + 2\mathrm{x}^2\mathrm{y} + 2\mathrm{xy}^3 + 4\mathrm{y}^3 \atop +1 \ldots \quad +1}{3\mathrm{x}^2 + 4\mathrm{yx}}$ *(b)* $\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2$. $\mathrm{ml} \sqcap \mathrm{yx}$. $\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{x}^2$, Ergo $\mathrm{xl} + 2\mathrm{ly} \sqcap 2\mathrm{x}^2$ sive $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{2\mathrm{x}^2}{\mathrm{x} + 2\mathrm{y}}$. *(aa)* $\mathrm{x}^2 -$ *(bb)* $2\mathrm{y}^2 \sqcap 2\mathrm{xm} - \mathrm{my}$ erit $\mathrm{m} \sqcap \dfrac{2\mathrm{y}^2}{2\mathrm{x} - \mathrm{y}}$. Ergo $\mathrm{ml} \sqcap 4\mathrm{x}^3 - 4\mathrm{x}^2\mathrm{y} + 4\mathrm{y}^2\mathrm{x} + 4\mathrm{y}^3$ *(2)* An sic: *(3)* $\mathrm{xy} + \mathrm{y}^2$ *L*

---

6 Huddenio Slusioque: Leibniz stützt sich bei seiner Aussage, dass J. Hudde ebenfalls die von R.-Fr. de Sluse im Tangentenbrief, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147, publizierte Tangentenmethode entdeckt hatte, möglicherweise auf mündliche Mitteilungen von Huygens; vgl. die Erl. zu VII, 4 N. 41 S. 712 sowie den Brief von Huygens an H. Oldenburg vom 27. September 1672 (*HO* VII S. 228 f.). 9–63,2 Nimirum ... aequalem: Die hier formulierte Regel, die weitgehend der Sluseschen Regel zur Bestimmung der Subtangente entspricht, wird von Leibniz im Folgenden erfolglos auf die Lösung des inversen Tangentenproblems angewandt. Dies beeinträchtigt die weiteren Überlegungen.

et relinque, et transfer, cuilibet termino praefige numerum exponentis incognitae a cujus latere reperitur; terminum autem in quo neutra est incognitarum pone nihilo aequalem.



[*Fig. 2*]

---

calculi proba est.

Jam eodem modo tractemus aequationem $\odot$ unde fiet omissa quantitate quae pro cognita supponitur: $\rightmoon\ \cancel{2}x^2a^2 - \cancel{2}xva^2 + \cancel{2}y^2x^2 \sqcap \cancel{2}y^2a^2 - \cancel{2}y^2x^2$ quae jam determinata est ad duas utriusque incognitae radices aequales. Cujus aequationis ope habetur valor ipsius v, qui inseratur in priore, erit scilicet $v \sqcap \dfrac{\cancel{2}x^2a^2 + 2\cancel{4}y^2x^2 - \cancel{2}y^2a^2}{\cancel{2}xa^2}$ et $v^2 \sqcap \dfrac{x^4a^4 + 4x^4a^2y^2 - 2x^2y^2a^4, +4y^4x^4 - 4y^4a^2x^2 + y^4a^4}{x^2a^4}$. Eumque valorem inserendo in aeq. $\odot$ fiet $\boxed{x^4a^4}\ \boxed{4x^4a^2y^2}\ \boxed{-2x^2y^2a^4} + 4y^4x^4 - 4y^4a^2x^2 + y^4a^4\ \boxed{-2x^4a^4}\ \boxed{-4y^2x^4a^2}\ \boxed{+2y^2x^2a^4} + 2x^4a^4 - 2y^2x^2a^4 + 2y^2x^4a^2 \sqcap 0$ sive $+4y^4x^4 - 4a^2x^2y^4 + 2a^2y^2x^4 + a^4y^4 + a^4x^4 - 2a^4y^2x^2 \sqcap 0$.

Examinanda sunt ista, continerent enim compendium elegans, si eorum ope perveniri posset ad methodum Tangentium inversam. Sumamus exemplum Cartesii, et neutram incognitarum explicemus.

---

3 *Fig. 2*: Die von Leibniz skizzierte Kurve entspricht nicht der Parabelgleichung in S. 64 Z. 1, sondern $AB = x = \dfrac{y^2}{2a}$. 5 aequationem $\odot$: Gemeint ist die Gleichung $\odot$ S. 44 Z. 19, zu der ein Hinweisstrich führt. 14 exemplum Cartesii: Die Ankündigung bezieht sich vermutlich auf N. 8.

Exemplo opus. Curva AC. esto parabola: $BC \sqcap x \sqcap \dfrac{y^2}{2a}$. Fiet proxima applicata: $\dfrac{y^2+2\beta y+\beta^2}{2a} \sqcap LH$. et $GH \sqcap \dfrac{\cancel{2}\beta y}{\cancel{2}a}$. Ergo si ignoremus curvam esse parabolam, sciamus autem rationem GH ad CG seu ad β. Videamus an hac methodo invenire possimus. Nimirum ponendo ut supra [$AB \sqcap x$. $AE \sqcap v$. $BE \sqcap v-x$. $BC \sqcap y$]: erit semper aequatio generalis: $-v^2+2vx-x^2+p^2 \sqcap y^2$, et $\dfrac{p \sqcap EC}{y \sqcap BC} \sqcap \dfrac{CH}{CG \sqcap \beta}$. Jam $CH \sqcap \sqrt{\dfrac{a^2\beta^2+\beta^2y^2}{a^2}}$, sive $\dfrac{\beta}{a}\sqrt{a^2+y^2}$ eritque $\dfrac{p}{y} \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{a^2+y^2}}{\beta a}$, et $p \sqcap \dfrac{y\sqrt{a^2+y^2}}{a}$, et $p^2 \sqcap \dfrac{y^2a^2+y^4}{a^2}$, unde $-a^2v^2+2vxa^2-a^2x^2\boxed{+y^2a^2}+y^4 \sqcap \boxed{y^2a^2}$, sive $y^4 \sqcap a^2v^2-2vxa^2+a^2x^2$, sive denique $\underset{2}{y^2} \sqcap \underset{0}{\mp av} \underset{1}{\pm ax}$, quae ad duos determinata valores regula nostra, dabit: $2y^2 \sqcap ax$ et pro y^2, substituendo ejus valorem inventum, in aeq. $y^2 \sqcap -av+ax$, fiet $2ax \sqcap -av+ax$, sive $v \sqcap -x$. Quod est absurdum. An ita? Ut aequationem inventam determinemus ad duos valores aequales, fiet $l \sqcap \dfrac{2y^2}{a}$. Atqui $\dfrac{l}{y} \sqcap \dfrac{\beta}{\beta\dfrac{y}{a}}$, sive $\dfrac{a}{y}$. Quod falsum[,] foret enim $l \sqcap a$. Error ergo in calculo. Nimirum $2ly \sqcap ax$. Ergo $l \sqcap \dfrac{ax}{2y}$. Jam $\dfrac{l}{x} \sqcap \dfrac{a}{y}$. Hinc ergo comparando per quendam speciem Regulae falsi sequitur x latere in v, ⟨uti⟩ et verum, ac proinde fieri $\cancel{2}ax \sqcap \cancel{2}y^2$. Quod et verum est. Sed nescio an haec divinatio semper sit successura in altioribus.

---

1 *Über* parabola: $y^2 \sqcap 2ax$. Ergo $\dfrac{\cancel{2}ax-\cancel{2}ax+a\beta}{2}$ [*bricht ab*]

11 l ⊓ | $\dfrac{2x^2}{a}$ *ändert Hrsg.* | Atqvi *L* 13 per ... falsi *erg. L*

---

4 supra: Leibniz verweist mit einem Strich auf die Angaben zu Beginn seiner Anmerkung zu S. 44 Z. 3. 5 Jam CH: Leibniz übersieht, dass er nach dem Wechsel von $BC = x$ zu $BC = y$ zu $CH = \sqrt{\beta^2+\dfrac{a^2\beta^2}{y^2}}$ übergehen müsste. Er rechnet konsequent weiter, bis er die Unstimmigkeit feststellt.

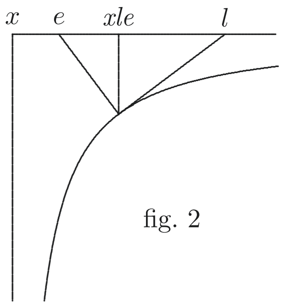


fig. 2

[*Fig. 3*]

Curva AC esto hyperbola, $AB \sqcap x$. et $BC \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap y$. Differentia $-\dfrac{a^2}{x} + \dfrac{a^2}{x-\beta}$, unde $\dfrac{-xa^2+\beta a^2+xa^2}{x^2-x\beta} \sqcap \dfrac{\beta a^2}{x^2} \sqcap GH$. et $CH \sqcap \dfrac{\beta}{x^2}\sqrt{a^4+x^4}$. Unde ut obiter patet superficiem curvam ex revolutione Hyperbolae circa Tangentem verticis Hyperbolae cujusdam quantitate mensurari. Ergo $p \sqcap \dfrac{y\sqrt{a^4+x^4}}{x^2}$ et $p^2 \sqcap \dfrac{y^2a^4+y^2x^4}{x^4}$, unde $-e^2x^4+y^2a^4\boxed{+y^2x^4} \sqcap \boxed{y^2x^4}$. $y^2a^4 \sqcap e^2x^4$, sive $ya^2 \sqcap ex^2$. Unde $l \sqcap \dfrac{ya^2}{2xe}$. $\dfrac{l}{y} \sqcap \dfrac{\beta}{\frac{\beta a^2}{x^2}}$, sive $\dfrac{x^2}{a^2}$, sive $l \sqcap \dfrac{x^2y}{a^2}$. Ergo $\dfrac{a}{e} \sqcap \dfrac{y^2}{a^2}$, sive $e \sqcap \dfrac{a^3}{y^2}$ sive $ya \sqcap \dfrac{a^3x}{y^2}$. Sed haec consequentia falsa, nec inde sic habetur valor ipsius e. Quaeratur $m \sqcap \dfrac{ex^2}{a^2}$, at $\dfrac{m}{x} \sqcap \dfrac{\cancel{\beta}a^2}{x^2}$, sive $m \sqcap \dfrac{\cancel{\beta}a^2}{x}$.

---

2 *Am Rande:* $yx \sqcap a^2$. $yx \sqcap yl$. $l \sqcap x$. $\dfrac{a^4}{x^3} \sqcap e$.

6 *Am Rande:* $2ya^2 \sqcap ex^2$.

8–66,1 *Am Rande:* $BE \sqcap e$. $MN \sqcap m$.

4 f. verticis *(1)* | patet *streicht Hrsg.* | aeqvari *(2)* Hyperbolae *L*

---

1 *Fig. 3*: Eine gestrichene fragmentarische Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben. 6 Unde $l \sqcap$: Die Anwendung der Tangentenrechnung ist nicht zulässig.

e ergo sic explicanda, ut simul fiat $l \sqcap \dfrac{x^2y}{a^2}$ et $m \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. Quod fiet ponendo $e \sqcap \dfrac{a^4}{x^3}$, vid. fig. 2. Ita enim ex $ya^2 \sqcap ex^2$, fiet: $ya^2 \sqcap \dfrac{a^4x^2}{x^3}$, sive $yx \sqcap a^2$, quod est verum.

Expendenda haec accuratius[,] nam si succederent, compendium calculi elegans darent. Et quaerendus est modus divinandi semper valorem ipsius e. ex datis.

Non opus erat $ya^2 \sqcap ex^2$, quaerere, nam statim patet, quia $\dfrac{CG}{GH} \sqcap \dfrac{CB}{BE}$. Eodem modo in caeteris, statim ergo aequatio habetur trium incognitarum, $y.\,e.\,x$.

⊙ Vide partem tertiam sign. ⊙.

7_2. PARS SECUNDA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 3. 1/2 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 3 r°. Bl. 3 v° leer. — Bl. 3 bildete ursprünglich die obere Hälfte eines vollen Bl. 2°. Leibniz hat auf die abgetrennte untere Hälfte später, in hannoverscher Zeit, eine Aufzeichnung über Differentialgleichungen geschrieben (LH 35 VIII 30 Bl. 161; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Schediasmatis de Methodo Tangentium inversa ad Circulum applicata
pars 2da.

Habitis valoribus ipsius $15s$. in collatitia 4. ejusque quad. $225s^2$ artic. 20. ipsius $5q$. artic. 13. ejus quadrato $25q^2$, artic. 21. et ipsa d, artic. 18. explicemus aequationem ☿. Quae ut repetatur nunc sit

$$(22)\ -245m^2q+230a^2\varphi+\frac{98m^2n+\boxed{2}\,105lmq-\boxed{2}\,60dsa-170\psi a^2}{8r}15s \sqcap 0.$$

2 $\mathrm{yx} \sqcap \mathrm{a}^2$, *(1)* unde *(a)* 2x *(b)* $\mathrm{yx}^2 \sqcap 2\mathrm{xyl}$, et $\mathrm{l} \sqcap \dfrac{\mathrm{x}}{2}$. deberet esse x. sed ita res non satis explicata, an ita: m *(aa)* $\sqcap$ y *(bb)* seu $\mathrm{x}^3\mathrm{y}$ *(2)* qvod *L*   6 habetur *(1)* unius *(2)* trium *L*   7 partem 2dam *L ändert Hrsg.*

7 Vide: s. u. N. 7_3.   16 collatitia 4.: N. 7_1 S. 51 Z. 22.   19 $-170\psi a^2$: Leibniz übernimmt den falschen Wert 170 für ψ aus N. 7_1 S. 54 Z. 2.

Erit cognita ipsius

$$m^3\colon \quad \underset{\substack{(2)\\ m^2q}}{\overset{(3)((3))}{\dfrac{+66\text{ב}}{38\text{א}}}} \qquad \underbrace{\underset{mq^2}{\overset{(0)}{\dfrac{+\boxed{2}\,3l66\text{ב}66\text{ב}}{8r,\frown -38\text{א}\frown -38\text{א}}}} \qquad \underset{mqm}{\overset{(0)}{\dfrac{+\boxed{2}\,3l66\text{ב}\boxed{2}}{8r\frown -38\text{א}}}}}_{mqs}$$

$$\underbrace{\underset{\substack{(4)\\ dm^2}}{\overset{(7)((5))}{\dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}\boxed{4}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r}}} \qquad \underset{\substack{(8)\\ dmq}}{\overset{((6))}{\dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}\boxed{4}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}}} \qquad \underset{dq^2}{\overset{(0)}{\dfrac{-\boxed{2}\frown -128a^2\text{ג}66\text{ב}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}}}}_{ds^2}$$

3 *Zum ersten Term:* NB. *Darunter:*

$$\text{NB.}\quad \underbrace{\underset{\substack{(8)\\ m^3}}{\overset{(4)((4))}{\dfrac{2n\boxed{2}}{8r}}} \quad \text{NB.} \quad \underset{\substack{(7)\\ m^2q}}{\overset{(3)((6))}{\dfrac{+2n66\text{ב}}{8r\frown -38\text{א}}}}}_{m^2}.$$

Hi duo Termini signo NB. notati in locum priorem etiam signo NB. notatum transferendi sunt. Ergo fiet: $\dfrac{24}{8}\ \dfrac{\text{ק}}{a}$ sive $\dfrac{6\text{ק}}{8}m^3$.

Nebenrechnungen: $\dfrac{24}{8} \sqcap 3$. $\dfrac{6}{8} \sqcap 3$.

2–68,19 Bei der Neunerprobe unterlaufen Leibniz Rechenfehler. Das von ihm verwendete Verfahren zur Kürzung von Neunerprobenwerten aus Zählern und Nennern von Brüchen ist nicht zulässig, wie er selbst erkennt.

$$c^3\quad \underset{(4)}{\overset{(5)}{\frac{-\boxed{2}\frown -1184\text{ל}a^2\boxed{4}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r}}}\quad \overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\frown -1184\text{ל}a^2\boxed{4}126\text{ת}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}}\quad \overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\frown -1184\text{ל}a^2\,126\text{ת}126\text{ת}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}}$$

$$\underbrace{dc^2\qquad\qquad dqc\qquad\qquad dq^2}_{ds^2}$$

fiet $\frac{5}{4}\,\frac{\Omega}{a}$.

Quod ut obiter dicam notabile est, semper ex Enneadicis tolli posse fractiones quia v. g. pro 5. poni potest 32. qui est divisibilis per 4. Ita si sit $\frac{6}{8}$, potest substitui 3. Imo error, non licet. $2\frown 6 \sqcap 5\frown 6$ in Enneadicis non vero $2 \sqcap 5$. Itaque non licet utraque tollere 6. $2\frown 3 \sqcap 4\frown 6$. non vero $2 \sqcap 4\frown 2$. Ideo etsi $\frac{2}{4} \sqcap \frac{6}{3}$. non tamen $\frac{2}{4} \sqcap 2$. Unde patet divisiones non permissas in Enneadicis, nec comprehensiones, nec fractiones.

$$m^2c\quad \overset{(0)}{\frac{-126\text{ת}}{-38\text{א}}}\quad -\boxed{2}\,\overset{(0)}{\frac{\boxed{2}3l\boxed{2}66\text{ב}126\text{ת}}{8r38\text{א}38\text{א}}}\quad \overset{(0)}{\frac{\boxed{2}3l66\text{ב}\boxed{2}}{8r\frown -38\text{א}}}\quad \overset{(0)}{\frac{\boxed{2}3l126\text{ת}\boxed{2}}{8r\frown -38\text{א}}}$$

$$\underset{(4)}{\overset{(5)((1))}{\frac{-\boxed{2}\frown -128\text{ג}a^2\boxed{8}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r}}}\quad \underset{(8)}{\overset{(6)((6))}{\frac{-\boxed{2}\frown -128\text{ג}a^2\boxed{4}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}}}\quad \overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\frown -128\text{ג}a^2\,\boxed{4}126\text{ת}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}}$$

$$\overset{(0)}{\frac{-\boxed{2}\frown -128\text{ג}a^2\boxed{2}66\text{ב}126\text{ת}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r38\text{א}38\text{א}}}\quad \underset{(4)}{\overset{(4)((8))}{\frac{-\boxed{2}\frown -1184\text{ל}a^2\boxed{4}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r}}}\quad \underset{(8)}{\overset{(6)((6))}{\frac{-\boxed{2}\frown -1184\text{ל}a^2\boxed{4}66\text{ב}}{8r38\text{א}\boxed{2}8r\frown -38\text{א}}}}$$

6 $\frac{5}{4}\,\frac{\Omega}{\mathrm{a}}$ | vel $\frac{32}{4}\,\frac{\Omega}{\mathrm{a}}$ vel 8 $\frac{\Omega}{\mathrm{a}}$ *gestr.* |. *L* 8–11 Imo ... $2 \sqcap 4\frown$ | 3. *ändert Hrsg.* | Ideo ... fractiones *erg. L*

13 m^2c: Bei der Berechnung der Koeffizienten von m^2c unterlaufen Leibniz einige Flüchtigkeitsfehler.

$$\begin{array}{ccc} & (0) & \\ & \dfrac{-\boxed{2} \frown -1184\text{ל}a^2 66\beth 66\beth}{8r38\aleph\boxed{2}8r \frown -38\aleph 38\aleph} & \dfrac{3B}{8} \end{array}$$

c^2m [*bricht ab*]

7_3. PLAGULA TERTIA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 4–5. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Methodi Tangentium inversae ad circulum applicatae plagula III[tia]

Aequatio $x + \dfrac{l}{a}y - m \sqcap 0$. quadrata, dat:

$$☿ \quad x^2 + \frac{2l}{a}\,xy - 2m\,x + \frac{l^2}{a^2}\,y^2 - \frac{2lm}{a}\,y + m^2 \sqcap 0$$

in qua utraque incognita duas habet radices aequales. Multiplicetur per quamlibet aliam formulam plenam quantum ad comparationem cum sequenti aequatione faciendam satis est, elevatam, hoc loco, $x + \dfrac{n}{a}y - q \sqcap 0$ fiet:

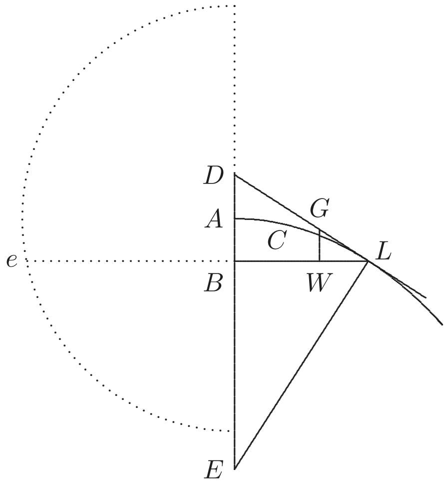
$$\begin{array}{llllllll}
\odot & & & & & - q\,x^2 & & \\
& \dfrac{2ln}{a^2}\,xy^2 + \dfrac{n}{a}\,yx^2 + \dfrac{l^2n}{a^3}\,y^3 & & & & & & \\
+\,x^3 + \dfrac{l^2}{a^2}\ \ .. & + \dfrac{2l}{a}\ \ .. & & & & -2m\ \ .. & & \\
& & - \dfrac{2lq}{a}\,xy + 2mq\,x & - \dfrac{l^2q}{a^2}\,y^2 & + \dfrac{2lmq}{a}\,y - qm^2 & [\sqcap 0] & & \\
& & - \dfrac{2mn}{a}\ \ .. & - \dfrac{2lmn}{a^2}\ \ .. & + \dfrac{m^2n}{a}\ \ .. & & & \\
& & - \dfrac{2lm}{a}\ \ ..\ + m^2\ \ .. & & & & &
\end{array}$$

7 Methodi ... inversae | ad ... applicatae *erg.* | *(1)* schediasmatis *(2)* plagu *(3)* plagula III[tia] *erg. L*
10–12 in ... seqventi | aeqvatio *ändert Hrsg.* | faciendam ... loco *erg. L*

Esto jam aequatio $v^2 + \frac{b}{a}\omega^2 + \begin{smallmatrix} a^2 \\ -p^2 \end{smallmatrix} \sqcap 0$. et pro v, ponendo $x+c$, pro ω ponendo $y+d$. fiet:

---

1 *Zu* aequatio ... $\sqcap$ 0, *mit Hinweisstrich verbunden*:



Cujus ut originem intelligas, inspice figuram, in qua AB sit v, BL sit ω. ACL, curva ad quam sunt ordinatae BL, jam EL appellemus, p quae ad curvam perpendicularis est, et ponamus ipsius BE valorem sive relationem ad ipsam AB abscissam quadam aequatione expressam haberi, ponamus exempli causa BE esse ut sinus. Descriptoque circulo ex centro A, sinus Be, semper aequari ipsis BE perpendicularium curvae ACL, intervallis in axe, ab ordinatis BL, ajo si his datis, AB, et BE, ipsa BL reperiri potest, haberi circuli quadraturam; adeoque ex Methodo Tangentium inversa sequi figurarum omnium Quadraturas, atque ita scientiam de summis et quadraturis, quod ante a nemine ne speratum est quidem analyticam reddi posse. Pro valore sinus $\sqrt{a^2-v^2}$ substituamus valorem Ellipticae et Hyperbolicae applicatae generalem $\sqrt{a^2+\frac{b}{a}v^2}$ fiet aequatio $v^2+\frac{b}{a}\omega^2+a^2-p^2 \sqcap 0$. Quae si ad duas determinabitur radices aequales, eliminabitur incognita p, et sola restabit, adeoque ex data v, inventa erit ω, unde sequitur quadratura Circuli, quia semiquadratum ipsius BL, aequabitur portioni circuli $ABeA$.

15 ipsa BL *(1)* aeqvatione qvada *(2)* reperiri *L* 20 generalem *(1)* $\sqrt{\mathrm{a}^2 \mp \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{v}^2}$ *(2)* $\sqrt{\mathrm{a}^2 + \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{v}^2}$ *L*

---

20 $\sqrt{a^2+\frac{b}{a}v^2}$: Leibniz ersetzt das ursprüngliche Doppelvorzeichen durch Plus und lässt stattdessen für b auch negative Werte zu; in der folgenden Gleichung sind v und ω vertauscht. 21 determinabitur: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

$$♀ \quad x^2 + 2c\,x \quad a\odot \left\{ \begin{array}{l} + c^2 \quad + \dfrac{b}{a}y^2 + \dfrac{2bd}{a}y \sqcap 0. \\ + \dfrac{b}{a}d^2 \\ + a^2 \\ - p^2 \end{array} \right.$$

Multiplicetur haec aequatio per $x + \frac{r}{a}y - s$. fiet:

$$\begin{array}{l} x \; + \; \dfrac{r}{a} \; y \; - \; s \\ \hline ☽ \; x^3 + 2c\,x^2 + a\odot\, x + \dfrac{b}{a}y^2x + \dfrac{2bd}{a}\,yx \; + \; r\odot \;\; y + \dfrac{rb}{a^2}y^3 + \dfrac{2bdr}{a^2}\,y^2 + \dfrac{r}{a}yx^2 \\ \quad - \; s \;\; .. \; - 2cs \; .. \qquad + \dfrac{2cr}{a} \; .. \; - \dfrac{2bds}{a} \; .. \qquad - \; \dfrac{bs}{a} \; .. \qquad -sa\odot \end{array}$$

Jam conferendo cum simili $\odot$ quae duas habet radices aequales

(1) ex y^3, $\quad r \sqcap \dfrac{+l^2n}{ab}$.

(2) ex x^2y, $\quad \dfrac{n}{\cancel{a}} + \dfrac{2l}{\cancel{a}} \sqcap \boxed{\dfrac{r}{a}}\,\dfrac{l^2n}{a^{\cancel{2}}b}$. sive $abn - l^2n \sqcap -2lab$, sive $n \sqcap \dfrac{+2lab}{+l^2 - ab}$.

(3) ex xy^2, $\dfrac{2ln}{a^2} + \dfrac{l^2}{a^2} \sqcap \dfrac{b}{a}$, sive $\dfrac{2l2lab}{l^2a^{\cancel{2}} - a^{\cancel{3}2}b} + \dfrac{l^2}{a^{\cancel{2}}} \sqcap \dfrac{b}{\cancel{a}}$, sive $2\,4\,l^2ab + l^4 \boxed{-l^2ab} \sqcap$ $\boxed{l^2ab} - a^2b^2$ sive $l^4 + 2l^2ab + a^2b^2 \sqcap 0$, sive $l^2 + ab \sqcap 0$. sive $l \sqcap \sqrt{-ab}$.

Unde $n \sqcap \dfrac{2ab\sqrt{-ab}}{-ab - ab} \sqcap -\sqrt{-ab}$, et $r \sqcap -n \sqcap +\sqrt{-ab}$.

---

13 *Zu* $l \sqcap \sqrt{-ab}$ *am Rande:* Unde jam sequitur in Circulo et Ellipsi amplius progredi non licere, ubi b est quantitas affirmativa, est enim radix quadrata ex negativo impossibilis. Continuemus tamen Hyperbolae causa.

16 qvantitas *(1)* negativa *(2)* affirmativa *L*

---

15 in Circulo et Ellipsi: Leibniz hätte, nachdem er richtig negativa durch affirmativa ersetzt hat, auch Kreis bzw. Ellipse durch Hyperbel ersetzen müssen und umgekehrt.

(4) ex x^2, $\quad -q-2m \sqcap 2c-s$. Ergo $s \sqcap 2c+q+2m$.

(5) ex y^2, $\quad -l^2q-2lmn \sqcap 2bd\,r\,l\boxed{-bsa}\underbrace{-2bca-baq-2bam}$, sive

$$d \sqcap \frac{2bca+baq+2bam-l^2q\boxed{-2lmn}+2l^2m}{2bl}.$$

(6) ex xy, $\quad \boxed{-\cancel{2}lq}\boxed{+2lm\boxed{-2mn}}\boxed{-2lm} \sqcap +\underbrace{\cancel{2}bd}+\cancel{2}c\,r\,l$ et

$$\frac{2\cancel{4}bca+\cancel{2}baq+2\cancel{4}bam\boxed{-\cancel{2}l^2q}+2\cancel{4}l^2m}{l}$$

$$q \sqcap \frac{\boxed{+abc\boxed{-cl^2}}-2\,bca\boxed{-2bam+2abm\boxed{-2l^2m}}}{ba} \sqcap -c. \text{ Ideoque}$$

$$d \sqcap \frac{\cancel{2}\cancel{b}ca\boxed{-bac}\boxed{+2bam}\boxed{+bac}\boxed{-2bam}}{\cancel{2}\cancel{b}l} \sqcap \frac{ca}{l}.\ s \sqcap \boxed{2c\boxed{+q}-c}c+2m.$$

(7) ex x, $\quad \boxed{-2mc\boxed{+2mq}}+m^2 \sqcap a\odot-2c^2-2\,4\,cm$. Ergo $\odot \sqcap \dfrac{m^2+2cm+2c^2}{a}$.

(8) ex y, $\quad 2lm\underset{-c}{q}+m^2\underset{-l}{n} \sqcap \underset{l}{r}\,\underbrace{\odot a}_{m^2+2cm+c^2}-2b\underset{\frac{ca}{l}}{d}\underset{c+2m}{s}$. Unde fiet:

$$-2lmc-m^2l \sqcap m^2l+2cml+c^2l-\frac{2bc^2a}{l}-\frac{4bcam}{l} \text{ sive } +2m^2\,l^2 \frown -ab$$

$$\boxed{+4cm\,l^2 \frown -ab}\boxed{+c^2\,l^2 \frown -ab}-3\,2\,bc^2a+8\,4\,bcam \sqcap 0.$$

71,14 *Nebenrechnungen:* $r \sqcap l \sqcap \sqrt{-ab}$
$n \sqcap -\sqrt{-ab}$
$n \sqcap -l$

---

5 (6) ex xy: Richtig gerechnet ergibt der Koeffizientenvergleich eine identische Gleichung. Leibniz unterlaufen Versehen bei den Umformungen, die zu einem falschen Wert für q führen und die weiteren, ebenfalls nicht fehlerfreien Vergleichsrechnungen beeinträchtigen. Leibniz erkennt S. 73 Z. 12 die Unstimmigkeit, nicht jedoch die Ursache.

(9) ex Termino puro: $qm^2 \sqcap sa\odot$, sive $\boxed{-cm^2} \sqcap m^2 + 2cm + 2c^2, \frown \boxed{s}c + 2m \sqcap$ $6cm^2 + 6\boxed{\begin{matrix}2\\4\end{matrix}}\begin{matrix}c^2m\\ \dots\end{matrix} + 2c^3 + 2m^3 \sqcap 0$. Paulo ante praecedens divisa per ab:

$\boxed{\begin{matrix}4\dots\\+1\dots\end{matrix}}$

$+2m^2 + 3c^2 + 8cm \sqcap 0$ sive $\frac{4}{3}m^2c + 2c^3 + \frac{16c^2m}{3} \sqcap 0$ sive $2c^3 \sqcap \frac{-4m^2c - 16mc^2}{3}$, ergo $6cm^2 + 6c^2m\frac{-4m^2c - 16mc^2}{3} + 2m^3$ sive $14\boxed{18}cm^{\cancel{2}} + 2\boxed{18}c^2\cancel{m}\boxed{-4m^2c}\boxed{-16mc^2} + 6m^{\cancel{3}2}$. Jam $2c^2 \sqcap \frac{-4m^2 - 16cm}{3}$ fiet: $14c\cancel{m}\frac{-4m^{\cancel{2}} - 16c\cancel{m}}{3} + 6m^{\cancel{2}} \sqcap 0$. sive $\begin{array}{l}42c - 4m \sqcap 0.\\ \underline{-16c + 6m}\\ 26c + 2m \sqcap 0.\end{array}$ $13c \sqcap m$. Quem valorem inventum superius inserendo fiet: $338\boxed{2,13 \frown 13}\cancel{c^2} + 3\cancel{c^2} + 104\cancel{c^2} \sqcap 0$. quod est absurdum.

Itaque cum ad aequationem impossibilem pervenerimus sequitur problema sic quidem solvi non posse.

Duo examinanda restant, unum an alia multiplicandi forma reddi possit possibile; alterum an ex ipsis impossibilitatibus sive contradictionibus aliquid duci possit ad appropinquationem.

(1) Nota si plena aequatio (duarum incognitarum) ducatur in plenam, producta fiet plena.

(2) Omnis aequatio non plena eatenus plena reddi potest, ut non nisi aliqui termini desint, qui ex duarum incognitarum ductu in se invicem oriantur quod fit explicando incognitas. Et has aequationes vocabo semiplenas. Omnis ergo aequatio duarum incogni-

---

18–74,22 *Zu* (1) … (9): NB. Hae propositiones non sunt de quantitate, sed de qualitate; ut appareat de his quoque fieri posse demonstrationes, et haberi Analyseos genus.

20 *Zu* (2): $x^2 + x + y + m + xy$

20 (2) *(1)* Si non plena ducitur in plenam, vid *(2)* Omnis *L*

tarum non plena explicando reddi potest semiplena, si utraque incognitarum aeque alte ascendit.

(3) Omnis semiplena ducta in plenam satis elevatam (uno gradu inferiorem) fit plena.

(4) Hemicephala, (in qua potestas summa unius incognitae inferior summa alterius incognitae potestate est) nulla multiplicatione plena reddi potest.

(5) Ex Theoremate primo et tertio junctis sequitur omnem semiplenam ductam in aequalem aut superiorem plenam fieri plenam. Nam omnis plena ipsi aequalis aut altior similis est plenae ex ductu plenae in gradu uno data semiplena inferiorem factae. Jam semiplena in plenam uno gradu inferiorem ducta, fit plena, ergo et in eam quae ex ipsa ducta in plenam. Ergo et in ei similem.

(6) Hemicephala non aliter ad duas radices aequales determinari potest, quam supponendo aliquos formulae duarum Radicum aequalium generalis aut ex ea multiplicando factae terminos nihilo aequales.

(7) Non plena per non plenam non potest credo fieri plena.

(8) Hians est in qua est aliqua superior, nec tamen inferior; ut, si sit x^2, nec tamen x, vel x^2y, nec tamen xy, etc. Unde dico, omnem Hiantem posse reddi continuam, explicando.

(9) Illud explicandum est; quaerendumque exactius, si collatio aequationis propositae per plenam quantum satis est multiplicatae; cum aequatione simili duas cujuslibet incognitae habente radices aequales deprehensa est impossibilis; an inde sequatur; etiam ejusdem per plenam altiorem multiplicatae collationem cum aliqua simili duas radices aequales habente fore impossibilem.

Exempli causa in hac nostra: $x^2 + 2cx + a\odot + \frac{b}{a}y^2 + \frac{2bd}{a}y \sqcap 0$. per $x + \frac{r}{a}y - s$ multiplicata, deprehensum est impossibile esse ut quae inde facta est duas habeat radices aequales cujuslibet ex incognitis. Quaestio est an hinc sequatur impossibile esse, omnino ipsam propositam non habere duas radices aequales. Ita certe sequeretur necessario, si quidem ex illo, quod aequatio aliqua sine impossibilitate cum alia duas radices aequales habente conferri non potest, sequeretur impossibile esse ipsam habere duas radices ae-

2 f. ascendit. *(1)* a 2a 3a 4a b 2b 3b 4b *(2)* (3) Omnis *L* 25 esse, *(1)* | ut *streicht Hrsg.* | *(2)* omnino *L*

16 continuam: wohl synonym mit plenam verwendet. 24 deprehensum: vgl. die Erl. zu S. 72 Z. 5.

quales. Sed hoc an sequatur examinandum est. Sane manifestum est aequationem etiam unius tantum incognitae determinari posse ad duas radices aequales et tamen conferri cum simili duas radices aequales habente non posse; et ideo ut res exitum reperiat, necesse esse ut prius alteri cuidam duas aequales habenti radices reddatur similis; ut per omnia institui queat collatio. Sed ubi jam similis reddita est, quaeritur an jam inde demonstrari possit quod nulli duas radices aequales habenti comparari possit, quia certae cuidam duas habenti radices aequales, utcunque simili comparari non potest. Et hoc est illud in quo haereo, quodque nondum permittit ut pronuntiem impossibilitatem hujus problematis demonstratam.

Examinandum est e. g. an aequatio ♀ per $x.\,y.\,a.$ multiplicata, quae aequationi cuidam ☿ per $x.\,y.\,a.$ multiplicatae comparari non potest, an tamen inquam, eadem ♀, per x^2, y^2, xy, x, y, a multiplicata, alteri ☿ per x^2, y^2, xy, x, y, a multiplicatae comparari possit. Sane certum est omnem aequationem plenam indefinitam alteri cuilibet plenae indefinitae comparari posse; cum alioqui omnia utrobique sint eadem.

Videndum est item, an duarum quarumlibet plenarum generalium ductus in se invicem, cuilibet plenae generali productae simili comparari possit; ita certe non dubito; nam et superfluum aliquid indeterminati futurum arbitror.

Hinc videndum, an sequatur si

$$\text{♀} \frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{/} \quad \text{non est} \quad \sim\!\sim \text{☿} \frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{//} \text{ an possit esse,}$$

$$\text{♀} \frown \underbrace{x^2, y^2, xy, x, y, a.}_{/} \quad \sim\!\sim \text{☿} \frown \underbrace{x^2, y^2, xy, x, y, a.}_{//}$$

Sane si ♀ $\frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{/}$ non est $\sim\!\sim$ ☿ $\frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{//}$, nec ♀ $\frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{/} \frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{///}$ erit $\sim\!\sim$ ☿ $\frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{//} \frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{///}$. Sed hinc non sequitur

$$\text{♀} \frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{/} \frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{///} \quad \text{non esse} \quad \sim\!\sim \text{☿} \frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{//} \frown \underbrace{x.\,y.\,a.}_{////}$$

$$\text{sive } \text{♀} \frown \underbrace{x^2.\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{/} \qquad \text{☿} \frown \underbrace{x^2.\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{//}$$

---

19 *Zu* $\sim\!\sim$: simile

3 posse; *(1)* v. g | etiam in *streicht Hrsg.* | aeqvationibus uni *(2)* e. g. aeqvatio: $a^2 - x^2$ ⊓ *(3)* et *L*

Nam sciendum est, $\underbrace{x.\,y.\,a}_{/} \frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{///}$ cum $\underbrace{x.\,y.\,a}_{//} \frown \underbrace{x.\,y.\,a}_{////}$ conferre idem esse quod $\underbrace{x.^2\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{/}$ conferre cum $\underbrace{x.^2\,xy.\,y^2.\,x.\,y.\,a}_{//}$. Restat ergo scrupulus.

Interea cum notem, in aequationibus unius incognitae nunquam haec evenire, sed semper procedere collationem, cum alicujus figurae tangentes quaeruntur, ideoque credibile est, quando id non procedit, signum esse impossibilitatis, frustraque multiplicationes suscipi: Quo considerato, in eam pene sententiam venio, rectius etiam in Methodum tangentium inversam inquiri per duplicem collationem secundum methodum directam; ubi illud quoque commodum manifestum est, quod in altioribus aequationibus multiplicatur nimis numerus terminorum methodo qua usus sum aequationes duarum aequationum similes conferendi; nec satis suppetit fortasse semper incognitarum; (videndum tamen hoc:) Cum contra posteriore quam nunc experiar, id non eveniat.

Praeterea considerandum est, an non fortasse falsa sit hypothesis, quod omnis aequatio duas habens radices aequales, aut ejus multipla, cum ista $x + \frac{l}{a}y\,[+]\,m$. aut ejus multipla conferri possit. Potest enim fieri, ut utraque incognita duos habeat valores, et tamen in eo valore nulla sit y simplex, pone enim aequationis radicem esse $x + \frac{s}{a}y^2$, et hanc in se ductam conferri posse datae. Respondebis tunc fore $m \sqcap \frac{s}{a}y^2 - \frac{l}{a}y$; sed ut hoc quoque praescindam, non videtur necesse tandem ut aequatio duarum incognitarum duas habens radices aequales per quadratum hujus $x+\frac{l}{a}y+m$ dividi possit; nam forte ne reperiri quidem potest unica ejusmodi aequatio utramque incognitam includens; sufficit enim simpliciter ostendi posse, quod aequatio proposita secundum x, ordinata conferri possit cum hac: $x^2 + 2ex + e^2$, vel ejus multipla, et secundum y ordinata cum hac[:] $y^2 + 2ny + n^2$. et si ad unicam quandam pro utraque incognita aequationem res reduci

---

12 *Zu* falsa sit hypothesis: recte

7 directae *L ändert Hrsg.* 14 habet *L ändert Hrsg.* 15 enim *(1)* inventam esse m, et *(a)* valere $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2$, $-\frac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}$ *(b)* valere $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2$, sane res *(2)* | et *streicht Hrsg.* | aeqvationem *(3)* aeqvationis *L*

nequeat. Forte enim id ne fieri quidem semper potest, quemadmodum forte non omnis aequatio affecta reduci potest ad puram etc.

Accedit quod video problemata quaedam fore methodi tangentium inversae geometrice solubilia. Ut si Be ponatur esse applicata paraboloeidis aut Hyperboloeidis aut alterius figurae quadrabilis; quae tamen vereor ne collationem ejusmodi respuant. Et operae pretium est tentare, an has solutiones nostra methodo tangentium inversa, et proinde quadraturas analytice ita invenire possimus; signum enim erit certum, in rectam nos Methodum incidisse.

Ponendo ergo Be esse parabolae applicatam, $\sqcap \sqrt{2av}$. Erit $BE^2 \sqcap 2av$, fietque $\omega^2 + 2av \sqcap p^2$. Quam quia Acephala est impossibile erit similem reddere unquam aequationi duarum radicum aequalium duarum incognitarum; et ita dubito collationem procedere, videamus quid fiat si duplici collatione utamur, nimirum tam ω, quam v duos habet valores aequales, sed antequam ordinemus, explicemus ω, nam non sine ratione Cartesium video, pro BE, sumere AE, ut scilicet hoc modo explicetur eo ipso una incognitarum; etsi rationem dissimulaverit; ut erat astutus. Ponendo ergo $\omega \sqcap y + d$, et $v \sqcap x + c$. explicatio erit:

$$\begin{array}{lll} y^2 + 2dy + & d^2 & +2ax \sqcap 0. \\ & + 2ac & \\ & - \ \ p^2 & \end{array}$$

Quamquam ipsius v explicationem non putem necessariam, attamen ita arbitror, nocere non posse; prodesse fortasse posse explicationes.

Jam ordinando aequationem secundum y, fiet:

$$\begin{array}{ll} y^2 + 2dy + & d^2 \sqcap 0. \\ & + 2ac \\ & - \ \ p^2 \\ & + 2ax \end{array}$$

Conferenda cum hac: $y^2 + 2ey + e^2$. erit $2d \sqcap 2e$, ergo $e \sqcap d \sqcap [-]y$ ex prima collatione, ex altera vero $\boxed{d^2}\,\boxed{e^2} + 2ac - p^2 + 2ax \sqcap \boxed{e^2}$ adeoque $c \sqcap \dfrac{p^2 - 2ax}{2a}$.

Ordinemus jam aequationem secundum x, sed antequam hoc faciamus, utamur inventis in collatione priore, itaque $y^2 + 2dy + d^2$ velut $\sqcap 0$. poterimusne removere. Restabit

12 duplici *(1)* methodo tractetur *(2)* collatione *L* 15 erat *(1)* subtilis *(2)* astutus *L*

13 Cartesium: s. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40.

enim: $\underbrace{x+c}_{v} - \dfrac{p^2}{2a}, \sqcap 0.$ quae conferenda est cum alia quae duas habeat radices aequales: $x^2 + 2nx + n^2 \sqcap 0.$ quod ut fieri possit prior $x + c - \dfrac{p^2}{2a}$, vel $v - \dfrac{p^2}{2a} \sqcap 0$ (video enim explicatione ipsius v non fuisse opus hoc loco) multiplicabitur per hanc formulam: $v+m$, fiet: $\begin{array}{l} v^2 - \dfrac{p^2}{2a} v - \dfrac{p^2 m}{2a} \sqcap 0 \\ \quad +m\,.. \end{array}$ conferenda cum $v^2 + 2nv + n^2$. et habebimus aequationes duas, unam: $-p^2 + 2am \sqcap 4an$, alteram: $2an^2 \sqcap -p^2m$. Ex posteriore $m \sqcap \dfrac{2an^2}{-p^2}$, qui valor inseratur priori, fiet: $-p^2 + \dfrac{4a^2n^2}{-p^2} \sqcap 4an$, sive $p^4 + 4anp^2 + 4a^2n^2 \sqcap 0.$ sive $\ddagger p^2 \ddagger 2an \sqcap 0.$ sive $p^2 \sqcap -2an$. Jam $n \sqcap -v$. ergo $p^2 \sqcap 2av$. In quo fateor tamen errorem necessario subesse. Causa erroris manifesta est, sed non remedium; certe enim, dum pono $y^2 + 2dy + d^2 \sqcap 0.$ eo ipso pono $\omega^2 \sqcap 0.$ quod est absurdum: Video ergo explicationem hic nocuisse.

An ergo non explicando sed multiplicando procedendum est, id ex his videtur sequi a posteriori; etsi non satis omnium horum a priori demonstrationes videam; nisi haec forte est, quod frustraneum videatur explicare quae in unum rursus conjungi possint.

An ergo resumemus aequationem, $\omega^2 + 2av - p^2 \sqcap 0.$ et ordinando secundum ω^2, fiet: $\begin{array}{l} \omega^2 + 2av \sqcap 0. \\ \quad - p^2 \end{array}$ Eam multiplicemus per $\omega + h$. fiet:

$$\begin{array}{llll} \omega^3 & + 2av\ \omega & + 2hav, \\ & - \ p^2\ .. & \quad hp^2 \end{array}$$

sumamus aequationem duarum radicum aequalium: $\omega^2 + 2e\omega + e^2$ et multiplicemus per $\omega + g$, fiet:

$$\begin{array}{llll} \omega^3 & + 2e\ \omega^2 & + \ e^2\ \omega \\ & + \ g\ .. & + 2eg\ .. & + e^2 g. \end{array}$$

4 $+n^2$. *(1)* eritque v $\sqcap$ p$\sqrt{\dfrac{-m}{2a}}$ *(2)* et *L* 8 subesse. *(1)* Sed jam video ubi erraverim, nimirum nunc x, nunc *(2)* Causa *L* 10 f. nocuisse. *(1)* An ergo rectius ponam Cartesiano more, *(a)* AE *(aa)* $\sqcap$ v, *(bb)* $\sqcap$ *(b)* AE $\sqcap$ v, *(aa)* erit *(bb)* erit *(2)* An *L*

15 per $\omega + h$.: Im folgenden Ausdruck fehlt der Term $+h\omega^2$. Leibniz bemerkt die Unstimmigkeit und setzt neu an, erkennt aber nicht die Ursache.

Sed ne hoc quidem procedere patet; itaque necessaria est explicatio ne aequatio sit hiat[i]ca, et postea multiplicatio, fiet scilicet:

$$\begin{array}{llll} y^2 + 2dy + & d^2 & \sqcap 0. \\ & - \; p^2 & \\ & + \; 2av & \end{array}$$

Multiplicetur per $y+h$, fiet:

$$\begin{array}{lllll} y^3 + 2d\; y^2 + & d^2\; y + & hd^2 & \sqcap 0. \\ \;\; + \;\; h \; .. & - \; p^2 \; .. - & hp^2 & \\ & + \; 2av \; .. + & 2hav & \\ & + \; 2dh \; .. & & \end{array}$$

Conferenda cum:

$$\begin{array}{llll} y^3 + 2e\; y^2 + & e^2\; y + e^2g & \sqcap 0. \\ \;\; + \;\; g \; .. & + \; 2eg \; .. & \end{array}$$

ubi aequationes tres, incognitae $g.\,h.\,d.\,p.$ Sed jam video rursus nulla opus explicatione et poni posse $d \sqcap 0.$ cum alioquin futura sit supernumeraria inutilis, quae non nisi ad constructionum compendia servire potest. Conferendo ergo per duos terminos secundos fiet $h \sqcap 2e+g$. et ex tertiis: $-p^2+2av \sqcap e^2+2eg$. ⟨adeoque⟩ $g \sqcap \dfrac{-e^2-p^2+2av}{2e}$, et $h \sqcap \dfrac{4e^2-e^2-p^2+2av}{2e}$. Unde ex terminis ultimis:

$$-2\,3\,e^2p^2 + p^4 - 2avp^2 + 4\,6\,ave^2 - 2avp^2 + 4a^2v^2 \sqcap -e^4 \boxed{-e^2p^2}\;\boxed{+2ave^2}$$

et ordinando: $p^4 - 4avp^2 - 2e^2p^2, +4a^2v^2 + 4ave^2 + e^4 \sqcap 0$. et extracta radice, $\mp p^2 \pm 2av \pm e^2 \sqcap 0$ sive $2av+e^2-p^2 \sqcap 0$ sive quia $e \sqcap -\omega$, fiet: $\omega^2+2av-p^2 \sqcap 0$. ut ante, quod docet aequationem istam jam satis sua natura esse ad duas radices determinatam, ordinando secundum ω. ac proinde superesse tantum, ut eam ordinemus secundum v. Idque jam ipse verum esse agnosco, est enim aequatio pura, omnis autem aequatio quadratica pura duas habet radices aequales.

Imo falsum, una enim alteri opposita est, nempe fiet: $\omega \sqcap \sqrt{p^2-2av}$, vel $\omega \sqcap -\sqrt{p^2-2av}$. Unde aequatio $\omega - \sqrt{p^2-2av} \sqcap 0$. vel $\omega + \sqrt{p^2-2av} \sqcap 0$. quae ductae in se invicem dabunt: $\omega^2 \boxed{-\omega\sqrt{p^2-2av}+\omega\sqrt{p^2-2av}} -p^2+2av \sqcap 0$. Itaque vereor rursus ne

19 f. $\boxed{+2ave^2}$ *(1)* et $p^4-4avp^2+4a^2v^2 \sqcap -e^4+4e^2p^2-8ave^2$, sive $\mp p^2 \pm 2av \sqcap e\sqrt{e^2+2p^2-8av}$ *(2)* et *L* 23 secundum | y. *ändert Hrsg.* | Idqve *L* 25 f. aeqvales *(1)*, *(a)* fit enim *(b)* sed ita tamen *(aa)* $\omega \sqcap$ *(bb)* ut altera alterius negatio sit *(2)* Imo *L*

quis error calculi subsit. Sed eum jam invenio, nimirum aequationem sumsi $\omega^2+2e\omega+e^2$, cum deberem sumere $\omega^2-2e\omega+e^2$. Nam sumendo priorem, quaeritur id quod in omni aequatione pura jam habetur, ut scilicet duae fiant radices oppositae sibi, seu mole non forma aequales. Itaque si quaeramus aequationem aliquam quadraticam reddere puram[,] hac id methodo praestare possumus. Omnis cubica autem quae pura reddi debet tres habet radices aequales: sed haec non sunt hujus loci. Caeterum resumemus nunc calculum nostrum detecto erroris fonte.

$$\begin{array}{lllll} \omega^2-2e\omega+e^2 \sqcap 0 \frown \omega+g, \sqcap & \omega^3 - 2e\,\omega^2 + & e^2\,\omega + & e^2 g & \sqcap 0. \\ & \quad + \;\; g \,.. & -2eg\,.. & & \\ \hline \text{conferendam cum, ...} & \omega^3 + \;\; h\,\omega^2 - & p^2\,\omega - & hp^2 & \\ & & +2av\,.. & +2hav & \end{array}$$

Ergo ex terminis 2^{dis} $h \sqcap g-2e$. ex tertiis et $g \sqcap \dfrac{e^2+p^2-2av}{2e}$. adeoque

$$h \sqcap \frac{e^2+p^2-2av-4e^2}{2e} \sqcap \frac{p^2-2av-3e^2}{2e}.$$

Ergo ex terminis ultimis:

$$-p^4+2avp^2 \;+2\,3\,e^2p^2, +2p^2av-4a^2v^2 \;-4\,6\,ave^2 \sqcap e^4 \boxed{+p^2e^2}\;\boxed{-2ave^2}.$$

Unde $e^4+4ave^2-2p^2e^2, +4a^2v^2-4avp^2+p^4 \sqcap 0$. Unde extrahi radix potest, quae erit, $e^2.\,2av.\,p^2$. Sed ut ejus signa determinemus, considerandum est e^2, et $2av$, idem habere signum, at p^2 oppositum ipsis, fiet ergo: $e^2+2av-p^2 \sqcap 0$ vel $p^2 \sqcap e^2+2av$ sive $p^2 \sqcap \omega^2+2av$. Sed ita redit rursus prior valor, quod me turbat. Quod si ergo nullus ut arbitror in calculo repetito error est, id sic intelligi debet pro p^2, hunc valorem substituendum, et loco aequationis initio propositae, $\omega^2+2av-p^2$, fiet: $\omega^2+2av-\omega^2-2av \sqcap 0$. quae utique duas habet radices aequales, 0. Jam ergo resumta aequatione ω^2 ipsam ad v

1 subsit. *(1)* Imo video nullum esse errorem qvidem, sed naturam calculi *(2)* Sed *L* 5 possumus *(1)* sumta ergo aeqvatione, ut hoc obiter faciam: $\mathrm{y}^3 * \mathrm{py}$ *(2)* Sumamus cubicam: in qva $\mathrm{y}^3 \sqcap \mathrm{a}^2\mathrm{b}$, eius *(a)* radices: *(b)* radix $\mathrm{y} \sqcap \sqrt{③}\ \mathrm{a}^2\mathrm{b}$. $\mathrm{y}^3-\mathrm{a}^2\mathrm{b} \sqcap 0$. fieri potest ex ductis in se: $\mathrm{y}-\sqrt{③}$ *(3)* y^3 *(4)* Omnis *L*

15 $+2\,3\,\mathrm{e}^2\mathrm{p}^2$, $| +2\mathrm{p}^2\mathrm{a}^2$ *ändert Hrsg.* $| -4\mathrm{a}^2\mathrm{v}^2$ *L* 16 $+4\mathrm{a}^2\mathrm{v}^2$, $| -2\mathrm{avp}^2$ *ändert Hrsg.* $| +\mathrm{p}^4$ *L*

22 aeqvales, 0. *(1)* Jam ergo resumta aeqvatione $\omega^2+2\mathrm{av}-\mathrm{p}^2$, ipsam ad v qvoqve ordinemus sed anteqvam pergamus, exemplo Schotenii uti placet; nimirum, placet uti explicatio *(2)* Jam *L*

5 Omnis cubica: Die folgende Behauptung ist nicht richtig. 28 exemplo Schotenii: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 246 f.

quoque ordinemus, fiet scilicet

$$v \left\{ \begin{array}{l} -p^2 \quad \sqcap 0. \\ \underline{+\omega^2} \\ 2a \end{array} \right.$$

quam multiplicabimus per $v + f$, fiet:

$$v^2 \left\{ \begin{array}{ll} -p^2 & v \\ \underline{+\omega^2} & .. \\ 2a & \\ +f & .. \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{ll} -p^2 & f \sqcap 0. \\ \underline{+\omega^2} & .. \\ 2a & \end{array} \right.$$

Conferenda cum $v^2 - 2ev + e^2 \sqcap 0$, fiet: $f \sqcap \dfrac{+p^2 - \omega^2 + 4ae}{2a}$ et ex ultimis $-p^4 + p^2\omega^2 - 4aep^2, +\omega^2 p^2 - \omega^4 + 4ae\omega^2 - 4a^2e^2 \sqcap 0$. sive $p^4 - 2p^2\omega^2 + 4p^2ae, +\omega^4 - 4\omega^2 ae + 4a^2e^2 \sqcap 0$. Unde rursus extrahi radix potest, nescio quo fato, fit enim: $p^2 - \omega^2 + 2ae \sqcap 0$. Est autem $e \sqcap v$. Redit ergo iterum aequatio prior, neque habetur exitus, quae cum mihi mira videantur, nec satis capiam, videndum superest, an liceat aliquid proficere adhibendo explicationem per $\underline{d}$. ipsamque d investigando, conferemus ergo prima, ut coeperamus

$$\begin{array}{rrrr} y^3 + 2d\,y^2 + & d^2\;y + & hd^2\;, \\ + \;\; h\,.. & -\;\; p^2\;..- & hp^2 \\ & +\,2av\;..+ & 2hav \\ & +\,2dh\;.. & \end{array}$$

$$\begin{array}{rrr} \text{cum}\;\; y^3 + 2e\,y^2 + & e^2\;y + & e^2 g \sqcap 0 \\ + \;\; g\,.. & -\,2eg\,.. & \end{array}$$

fiet ex terminis 2^{dis}, $h \sqcap 2e + g - 2d$. Ideoque $2dh \sqcap 2de + 2dg - 4d^2$. Ideoque ex terminis tertiis: $\boxed{d^2} - p^2 + 2av + 2de + 2dg - 3\boxed{4}d^2 \sqcap e^2 - 2eg$ eritque $g \sqcap \dfrac{e^2 + p^2 - 2av - 2de + 3d^2}{2d + 2e}$.

Ideoque

---

20 *Zu* $+2ey^2$: Error. Debet esse $-$.

---

10 fiet: Im Zähler des folgenden Bruches müsste $-4ae$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter, bemerkt aber nicht die Diskrepanz zwischen seinen Ergebnissen in S. 80 Z. 18 f. und Z. 12. 20 $+2ey^2$: Leibniz stellt den Vorzeichenfehler nachträglich fest und merkt ihn an. Er verbessert die durch weitere Versehen beeinträchtigte Rechnung nicht, sondern setzt S. 82 Z. 19 neu an und führt die Rechnung richtig durch.

$$h \sqcap \frac{\boxed{4de} + 4e^2 - 4d^2 \boxed{-4de}, + e^2 + p^2 - 2av - 2de + 3d^2}{2d+2e} \sqcap \frac{5e^2 - d^2 + p^2 - 2av - 2de}{2d+2e}.$$

Denique ex terminis ultimis nascetur haec aequatio:

$$2\,5\,e^2d^2 - d^4 + 2\;\;p^2d^2 - 4\,2\,avd^2 - 2d^3e, -6\,5\,e^2p^2 \boxed{+d^2p^2} - p^4 + 4\,2\,avp^2 + 2dep^2, +12\,10\,ave^2 \boxed{-2avd^2}\;\boxed{+2avp^2} - 4a^2v^2 - 4avde$$

$$\sqcap$$

$$e^4 \boxed{+e^2p^2}\;\boxed{-2e^2av} - 2e^3d \boxed{+3d^2e^2}.$$

In qua aequatione cum valor ipsius p haberi poterit, nimirum

$$\begin{array}{llll} p^4 - 2d^2\;p^2 + & 4d^4 & \sqcap & \left\{\begin{array}{lll} 4d^4 & -\;d^4 & \\ -24d^2e^2 & +2e^2d^2 & +4d^2e^2 \\ +8d^2av & -4avd^2 & \\ \underline{+8d^3e} & -2d^3e & \\ +36e^4 & -\;e^4 & \\ -24e^2av & +12e^2av & \\ \underline{-24e^3d} & +2e^3d & \\ +4a^2v^2 & -4a^2v^2 & \\ \underline{+8avde} & -4avde & \\ \boxed{+4d^2e^2} & & \end{array}\right\} \sqcap \begin{array}{l} +3d^4 \\ -18d^2e^2 \\ +4d^2av \\ \underline{+6d^3e} \\ +35e^4 \\ -12e^2av \\ -22e^3d \\ * \\ +4avde \\ \; \end{array} \\ \quad +6e^2\;.. & -24d^2e^2 & & \\ \quad -2av\;.. & +8d^2av & & \\ \quad -2de\;.. & \underline{+8d^3e} & & \\ & +36e^4 & & \\ & -24e^2av & & \\ & \underline{-24e^3d} & & \\ & +4a^2v^2 & & \\ & \underline{+8avde} & & \\ & \underline{+4d^2e^2} & & \end{array}$$

Sed suspecta est mihi nimia ista calculi prolixitas, quemadmodum supra nimia brevitas. Repetamus: $\omega^2 + 2av - p^2$. Pone $\omega \sqcap y + d$. fiet $\omega^2 \sqcap y^2 + 2dy + d^2$; unde

$$\begin{array}{l} y^2 + 2dy + d^2 \\ \qquad\quad +2av \\ \qquad\quad -p^2 \end{array} \text{ multiplicata per } y+h, \text{ dabit: } \left.\begin{array}{llll} y^3 + 2d\;y^2 & +\;d^2\;.. & +\;hd^2 \\ \quad\;\; +\;h\;.. & +2av\;.. & -\;hp^2 \\ & -\;p^2\;.. & +2hav \\ & +2dh\;.. & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

$$y^2 - 2ey + e^2 \text{ in } y+g, \text{ dat } \quad \begin{array}{llll} y^3 - 2e\;y^2 & +\;e^2\;y & & \\ \quad\;\; +\;g\;.. & -2eg\;.. & +\;e^2g & \end{array} \sqcap 0.$$

Conferendo fiet: $h \sqcap g - 2e - 2d$ ex Terminis secundis; et

$$-2eg + e^2 \sqcap +d^2 + 2av - p^2 \boxed{\begin{array}{c} +2dh \\ g - 2e - d \end{array}} + 2dg - 4de - 4d^2$$

eritque $g \sqcap \dfrac{-d^2-2av+p^2+4de+4d^2+e^2}{2e+2d}$ et

$$h \sqcap \frac{-d^2-2av+p^2+4de\boxed{+4d^2}\ \boxed{+e^3}-3\,4\,e^2-8\,4\,de\boxed{-4de}\ \boxed{-4d^2}}{2e+2d} \sqcap$$

$$\frac{-d^2-2av+p^2-4de-3e^2}{2e+2d}$$ a⟨deo⟩que

$$-d^4-4\,2\,avd^2\boxed{+d^2p^2}-4d^3e-2\,3\,e^2d^2,+2\,d^2p^2+4\,2\,avp^2-p^4+$$
$$4dep^2+2\,3\,e^2p^2,\boxed{-2avd^2}-4a^2v^2\boxed{+2avp^2}-8avde-4\,6\,ave^2 \qquad \sqcap$$
$$\boxed{-d^2e^2}\ \boxed{-2ave^2}\ \boxed{+p^2e^2}+4de^3+4d^2e^2+e^4.$$

Ordinemus aequationem videntur enim disponi omnia ad radicis extractionem fiet:

$$\begin{array}{l} d^4+4d^2av+4d^2ed+2d^2e^2-2d^2p^2,+4a^2v^2+8aved+4ave^2 \quad \sqcap\ 0 \\ -4avp^2,+4e^2d^2+4ede^2-4edp^2,+e^4-2e^2p^2,+p^4 \end{array}$$

Unde potest extrahi radix et fiet: $d^2+2av+2ed+e^2-p^2 \sqcap 0$. quorum ut signa vestigentur cogitandum, $d^2, 2av, 2ed, e^2$, idem habere signum, solum p^2 ab ipsis diversum, ut ex primo extrahendae formulae commode dignosci potest. Habemus ergo aequationem eandem cum priore $d^2+2dy+y^2+2av-p^2, \sqcap 0$. seu $\omega^2+2av-p^2 \sqcap 0$. Nihil ergo promovimus. Calculus tamen rectus est.

7_4. PLAGULA QUARTA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 1 Bl. 6–7. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringe Textverluste durch Papierschäden.
Cc 2, Nr. 791 tlw.

Schediasmatis de Methodo T a n g e n t i u m i n v e r s a ad circulum applicata plagula IV$^{\text{ta}}$

Plagula praecedente III$^{\text{tia}}$ tentavi an aequationem tres habentem incognitas ad duas duarum ex ipsis radices aequales determinare liceret, aequationem propositam ordinando

21 aeqvationem *(1)* duas habentem incognitas, et unam *(a)* arb *(b)* praeterea *(2)* tres habentem indeterminatas *(3)* tres *L*

duobus modis, et singulis conferendo cum aequatione simili unius incognitae duas habente radices aequales, et deprehendi in eo quo usus sum exemplo, ex quo pendebat quadratura parabolae, seu in quo quaerebatur curva, cujus reductae essent ordinatae parabolae ad axem, aequationem seu collationem succedere, sed sub finem aequationem identicam dare, nec referre explices an non explices incognitas. Atque inde apparere non satis esse datorum. Sed duo hic quaerenda supersunt, alterum an hoc in omni exemplo futurum sit; alterum an alterius formae tangentium inversa methodus ei difficultati forte subjecta non sit. Adjicio tertiam quaestionem an quando non succedit collatio, uti tamen liceat Methodi[s] Huddeniana, imo et Fermatiana bis sed quantum ad Fermatianam non puto. Sed quod ad Huddenianam attinet nondum definio sane methodum ejusmodi de maximis infinitis ut vocat. Videtur habere Huddenius quam nondum publicavit.

Sed ut methodo Huddenii liceat necessarium arbitror explicare quantitatem incognitam; quia si aequatio sit pura, alioquin evanesceret cognita: Nisi velis eo casu multiplicare aequationem per progressionem Arithmeticam differentem a numero terminorum, v. g. si aequatio sit $\omega^2 \begin{array}{l} +2av \\ -\;p^2 \end{array} \sqcap 0$. evanesceret cognita multiplicando per numerum dimensionum; et fieret $\omega \sqcap 0$. Quod est absurdum. Sed si ita multiplices per progressionem arithmeticam, fiet v. g.: $\omega^2 \begin{array}{l} +\,4av \\ -\,2p^2 \end{array} \sqcap 0$. cujus aequationis ope conjunctae cum superiore tolli poterit incognita p. Sed quia forte postulat. Dicit quidem Huddenius *Epist.* 2^{da} pag. 508. Schotenii nihil referre termini aliqui desint an non; sed hoc non ausim ei concedere, alioqui non posset fieri $\omega \sqcap 0$. casu supradicto. Nisi regerat de eo se casu loqui, quo non nisi una in aequatione incognita est; sed tamen video eum in demonstratione generali

3 essent *(1)* | ad *erg.* | parabolae verticales *(2)* verticales ad parabolam *(3)* ordinatae *L* 13 qvia *(1)* | alioqvin *streicht Hrsg.* | si aeqvatio *(2)* si *L* 18 f. pag. 505. *L ändert Hrsg.*

9 Methodi[s]: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516; Fermats Tangentenmethode war Leibniz zugänglich durch die Darstellungen in P. Herigone, *Cursus mathematicus*, Bd 6, 1644, S. 59–69 und in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255, sowie durch die Diskussion in R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 154–158, 122–134, 169–178). 11 vocat: vgl. J. Hudde, *a. a. O.*, S. 513; nondum publicavit: Leibniz vermutet eine solche Methode wohl in der unveröffentlichten Abhandlung, auf die Hudde *a. a. O.*, S. 515 f. hinweist. 13 pura: vgl. S. 79 Z. 23 – S. 80 Z. 6; Leibniz übersieht, dass reine Gleichungen keine von Null verschiedenen Doppelwurzeln besitzen. Dies beeinträchtigt die folgende Überlegung. Leibniz erkennt seinen Irrtum S. 86 Z. 4–9. 18 Dicit: *a. a. O.*, S. 508.

non adjicere determinationem de una tantum incognita, sed in casibus particularibus pag. 510.

Unum considerandum est hoc loco methodo Huddeniana quia bis ordinanda aequatio ad unamquamque scilicet incognitam, habitum iri tres aequationes inter se jungendas, cum tamen non nisi una sit eliminanda p, huic malo praeveniendum est, quod dupliciter, credo fieri posse, si vel explicando vel multiplicando numerum arbitrariarum augeamus; sed cum explicationi diffidam, utar primum Multiplicatione, itaque $\omega^2 \begin{array}{l}+4av,\\ -\ p^2\end{array}$ multiplicetur per $\omega + h$ fiet:

$$\begin{array}{cccc} \omega^3 + h\omega^2 & + 4av\ \omega & + 4hav \sqcap 0. \\ & -\ p^2\ .. & -\ hp^2 \\ 3 \quad\ 2 & 1 & 0 \end{array} \qquad \text{fiet:} \quad \omega^2 + \frac{2h}{3}\,\omega \quad \left\{ \begin{array}{l} +\,4av\,. \\ \underline{-\ p^2} \\ \quad 3 \end{array} \right.$$

Sed duas hic reperio difficultates, quarum una est, quod multiplicando per $\omega+h$, et postea determinando ad duas radices aequales; non potest hinc concludi ipsam $\omega^2 \begin{array}{l}+4av \sqcap 0,\\ -\ p^2\end{array}$ determinatam ad duas radices aequales; sed potest fieri ut illa ipsa multiplicans multiplicando faciat ut producta recipiat duas radices aequales, quia h est aequalis uni ex prioribus radicibus: Itaque jam video in tota operatione hactenus a me erratum esse; cum scilicet ipsas aequationes datas per formulas arbitrarias multiplicavi; cum Cartesius recte in sua methodo Tangentium directa non ipsam datam, sed formulam generalem multiplicet: Et hinc jam video cur Schoten ingeniose ut solet, volens aequationem $x^3 * -px$ $+qa$ determinare ad duas radices aequales, hanc $x^2 - 2ex + e^2$ multiplicat per $x + 2e$, fit enim $x^3 * 3e^2x + 2e^3$ similis priori.

In eo ergo hactenus a me valde erratum est. Sed huic rei quaeri forte remedium potest, pro h, ponendo $e+f$. Ita enim manifestum est posita differentia inter valorem e, duplicem aequalem, radices aequales non esse factas multiplicando. Sed hoc remedium tantum locum videtur habere cum per simplicem formulam, in qua incognita ad nullam ascendit

20 +qa *(1)* aeqvari *(2)* conferre *(3)* determinare *L*

7 $+4av$: Leibniz verwendet eine neue Gleichung. 17 Cartesius: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 46. 19 Schoten: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 264. 21 $3e^2x$: Richtig wäre $-3e^2x$. Leibniz verwendet die fehlerhafte Formel wieder S. 86 Z. 19, bevor er die durch einen weiteren Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigte Rechnung abbricht.

potestatem, multiplicamus. Itaque distinguo aut aequatio data non est superior ea quae duas habet radices aequales aut est; si non est, aut est aequalis aut inferior. Si est aequalis, multiplicetur per $\frac{s}{a}y+h+e \sqcap 0$. et ut fiat superior comparabilis multiplae duas habentis radices aequales si est inferior; multiplicetur. Sed jam denique video; aequationem in qua incognita ad nullam ascendit potestatem, item in qua incognita est pura, (: nec refert explicando fiat affecta, est enim id in speciem tantum :) non posse conferri cum aequatione quae duas habet radices aequales, sive multiplicetur sive non multiplicetur, nam impossibile est hanc aequationem $x+b \sqcap 0$. vel $x^2+ba \sqcap 0$. habere duas radices aequales, nisi id quod deest sit in b, sed hoc nihil ad collationem.

Si sit aequatio $x^3+cx^2+dax+fa^2 \sqcap 0$. determinanda ad duas radices aequales; conferetur cum $x^2-2ex+e^2$, ducta in $x+g$. fiet:

$$\begin{array}{llll} x^3 & -2\,e\,x^2 & +\ \ e^2\,x & +g\,e^2 \\ & +\ \ g\,.. & -2\,eg\,.. & \end{array}$$

Unde conferendo positis duabus incognitis, d et f, et tertia g, fiet: $g \sqcap c+2e$. et $d \sqcap \dfrac{e^2-2ec-4e^2}{a}$. et $f \sqcap \dfrac{ce^2+2e^3}{a^2}$.

Finge jam loco aequationis propositae aliam dari duarum incognitarum determinandam ad duas radices aequales, ponendoque a esse incognitam alteram, alias y. et praeterea $cx^2+fa^2-la^2$ exprimi per pa^2 incognitam[,] l autem esse notam, f et per consequens p quaeri: fiet aequatio: $x^3 * dax + \begin{array}{l} la^2 \\ -pa^2 \end{array}$. conferenda cum $x^3 * 3e^2x+2e^3$ fiet $d \sqcap \dfrac{3e^2}{a}$, et $p \sqcap {}^{-2e^3}$ [*bricht ab*]

Coepi ex his dubitare an duabus collationibus separatis possit determinari aequatio duarum incognitarum ad duas cujuslibet radices aequales. Sed resumo animum cum video aliter eam explicari non posse; nam de altera quae adest incognita, non dici potest eam continere alteram; itaque incognitarum unius vel plurium portiones tantum in

---

3 *Zu* $\frac{s}{a}y+h+e \sqcap 0$: NB. non y, sed $\frac{s}{a}y$.

3 per *(1)* in *(2)* | $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{a}}$ *erg.* | y *L* 3 fiat *(1)* aeqvalis *(2)* comparabilis *(3)* superior *L*
16 f. determinandam | ad duas *streicht Hrsg.* | ad *L*

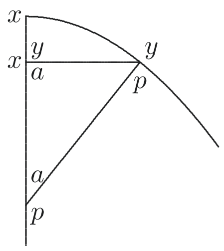
una indeterminata quam quaerimus latent quod nihil nocet, cum nec noceat in unius incognitae aequationes incognitam ingredi valorem quaesitae.

Sed tamen ut ejus rei fiam certus, sumam aequationem duarum incognitarum duas habentem radices aequales methodo mea prima factam; vel factam conferendo cum tali una collatione, et postea videbo an idem ex ea elici possit collationibus duabus. Quod si fieri potest malim uti duplici collatione, cum ea videatur esse universalior. Potest enim radix aliqua duarum incognitarum duas habens radices aequales dividi posse non per hujus tantum $x + \frac{l}{a}y + m$ quadratum; sed etiam per quadratum aliud v. g. hujus: $x + \frac{n}{a^2}y^2 + r$. et hujus $y + \frac{q}{a^3}x^3 + s$ qui et tam satisfit proposito si per has duas quadratas $x + \frac{n}{a^2}y^2 + r$, et $y + \frac{q}{a^3}x^3 + s$ separatim dividi eadem aequatio possit, quam si per $x + \frac{l}{a}y + m$ quadratam. Utroque enim modo utraque incognita duas habet radices aequales.

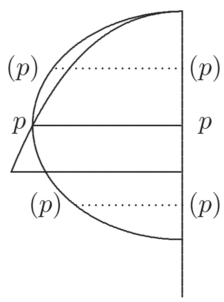
A l t e r a d i f f i c u l t a s est in his separatis collationibus, quod vel non satis incognitarum est, vel plus satis. Nam cum non nisi una detur quaerenda, v. g. p. hinc si una collatione determinabis, nihil habebis, quod agas altera collatione; sin novis adhibitis arbitrariis vel multiplicando vel explicando; eam serves; nulla ratio est cur similes novas arbitrarias non adhibeas, etiam in posteriore collatione; explicando alteram incognitam vel aequationem multiplicando; Respondeas quidem, non adhiberi quia non est opus. Sed regero: Quid si adhiberentur unde id liceatur: Sequereturne impossibile; non utique: Itaque potest haec aequatio ad duas determinari duarum incognitarum radices aequales; ne ulla quidem Terminorum ejus explicatione. Responderi itaque hoc loco potest; si explicando augeas. Sed hae aliaeque id genus difficultates evanescent credo quando ventum erit in rem praesentem: Nam sumendum est ut dixi exemplum, ubi res succedit simplici collatione, et videndum an etiam duplici. Explicationibus non puto fidendum.

Caeterum ne obliviscar admoneo, si aliter exitus non appareat, videndum esse an aliquid detegere liceat jungendo duas diversas aequationes repertas, ad duas tangentes aequales determinandas inter se, cum ubique eadem futura sit tam x, quam y. aut cognitam habitura relationem ex duarum scilicet quadraturarum principio, ex eodem pendentium. Sed malum in eo est, quod p utrobique reperitur diversa. Itaque si auges numerum aequationum augebis etiam numerum quaerendarum.

1 una *(1)* cognita *(2)* indet *(3)* indeterminata *L* 2 incognitam | puto *gestr.* | ingredi *L* 15 cur *(1)* easdem *(2)* similes *L* 25 duas *(1)* methodos *(2)* diversas *L* 28 qvod *(1)* aliqva reperitur incognita *(2)* p utrobiqve *L*



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Quaeramus ergo an possibile sit comminisci casum, quo duae diversae p eandem semper servent rationem inter se invicem; ita enim res redibit ad unicam, poteritque tunc eliminari ipsa p omnino, jungendo has duas aequationes inter se; deinde manifestum est illud quoque, diversas illas p, diversarum figurarum, aliquando coincidentibus x, diversis licet aa datis, quia sygnotis; ipsis autem yy quaesitis rationis vel relationis cognitae invicem existentibus; aliquando coincidere debere, nam si eas applicando ad abscissas figuram inde facias, eae diversae figurae se invicem secabunt. Et tunc coincident illae p. Quod si ergo calculo aliunde inveniri potest, quando ipsae p debeant coincidere; et quod si inveniri poterit geometrice ejus arcus ratio ad circumferentiam; e. g. in circulo, inde sequitur tetragonismus.

Quaeritur ergo si sint

$$\overset{☽}{\frac{mx^2+nx+q+r\sqrt{tx+v}}{fx+g}}\ \square,+\ \overset{☿}{y^2} \qquad \sqcap\ p^2$$

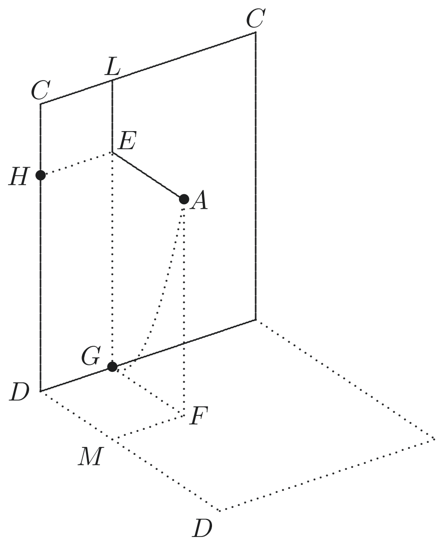
$$\text{et}\quad \overset{\odot}{\frac{bx^2+cx+d\,\ldots\ldots}{\upsilon x+g}}\ \square,+\overset{♀}{\psi y^2+\chi y+\Omega} \qquad \sqcap\ (p^2).$$

possitne casus reperiri, quo summa prior aequalis est posteriori; aut rationem ad eam habet datam; sane si fieri possit ut sit ut ☽ ad ☉; ita ☿ ad ♀; etiam summae p^2, et (p^2) rationem habebunt datam; idem est, si casus saltem aliquis eveniri possit specialis, ut

5 qvoqve, *(1)* | ipsam *streicht Hrsg.* | p *(2)* diversas *L* 11 seqvitur *(1)* qvadratu *(2)* tetragonismus *L* 12 f. sint *(1)* $\sqrt{a^2+x^2+y^2}$, et $\sqrt{e^2+\frac{b}{a}y^2}$, an ignoratis licet *(2)* ☽ *L* 16 $+\Omega$ | , $\square$ *streicht Hrsg.* | $\sqcap$ (p^2) *L*

positis ☽ et ⊙ aequalibus vel datae rationis, sint etiam ☿ et ♀ aequales vel datae rationis, eo casu etiam p erunt aequales vel datae rationis. Praeterea fieri potest semper ut ☿ et ♀ sint aequales. Quare quo casu ☽ et ⊙ aequales, quod alicubi fiet infallibiliter si earum curvae se secant, ibi etiam ipsae p. coincident. Cum ergo inveniri possit ipsa x, in qua ☽ et ⊙ coincidant, erit x determinata. Cumque duae restent aequationes: ☽ + ☿ $\sqcap$ p^2; et ☽ ($\sqcap$ ⊙) + ♀ $\sqcap$ (p^2) nondum video tamen quid inde duci possit. Sed si ponas etiam ☿ et ♀ aequales, malum est quod pro duabus aequationibus non habes nisi unam:

Quicquid sit, certe, si sint duae superficies, ad quas sint duae aequationes datae, in quibus y sint utrobique eaedem, uti hic fit, et sumta postea x aequali, quae intersectio harum duarum superficierum dabit eritque p, in harum duarum superficierum intersectione communi. Adhibenda ergo est tertia superficies, ubi cum sit tertia p, erit omnium p concursus in intersectione trium superficierum.

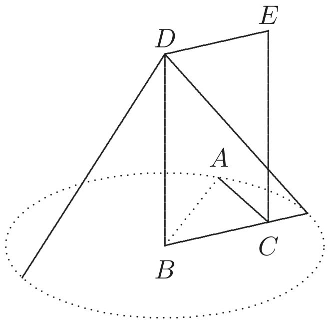


[*Fig. 3*]

Ponatur superficiei curvae punctum esse in sublimi puncta autem omnia superficiei curvae ad planum pariter C. et D. referri, perpendiculari AE ad planum C, et perpendiculari AF ad planum D. Quod si separata aequatione explicari potest relatio AE ad CH vel ad LE; et alia relatio ipsius AF, ad DG vel MF fient quidem quatuor incognitae, sed tantum duae aequationes. Sed nec nisi Curva hoc modo describetur, sed solida. Sed inqui-

7 pro *(1)* una aeqvatione habes duas; *(2)* duabus L

rendum est in illa loca, in quibus unica est aequatio, et qua ratione harum superficierum descriptionem concipere liceat. Varietates omnium optime credo sic describi possunt[:] Fingatur in plano moveri aliud planum ei instar tabulae incumbens puncto quodam certam lineam describente cui omnia alia puncta parallela semper moveantur, posito scilicet illo plano caetera immobili. Huic tabulae insistat aliud planum, angulo quolibet, cujus extrema desinant in figuram quamlibet, quod planum vario rursus angulo motuque procedat.



[*Fig. 4*]

In superficie conica relatio puncti alicujus ad axem haec:

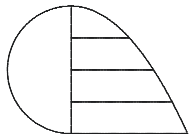
Esto $BD \sqcap x$, erit $BA \sqcap \frac{d}{a}x \sqcap z$. Et AC vocando ω, BC autem vocando y, fiet $y^2 + \omega^2 \sqcap z^2$, quarum duarum aequationum ope eliminando z, fiet: $y^2 + \omega^2 \sqcap \frac{d^2}{a^2}x^2$, quae est aequatio ad superficiem Conicam. In cylindrica cum sit $z \sqcap a$, fiet aequatio: $y^2 + \omega^2 \sqcap a^2$ aequatio ad superficiem Cylindricam; Eadem methodo omnium Conoeidum aequatio habetur, ut sphaerae; cum sit $\sqrt{2ax - x^2} \sqcap z$ fiet: $y^2 + \omega^2 \sqcap 2ax - x^2$. In omnium ergo Conoeidum superficiebus $y^2 + \omega^2$ sunt constantes; et aequantur quadrato applicatae figurae circumactae, ubi tamen notandum si id quadratum non sit rationale, fieri posse, ut aequatio mutet formam, ut si sit $z \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + a$. Illud quoque notandum

17 *Am Rande:* Erravi.

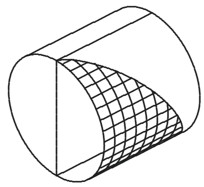
1 qvibus *(1)* duae sunt aeqvationes *(2)* unica *L* 9 superficie *(1)* conoeidis *(2)* conica *L* 15 ergo *(1)* Sphaeroeidum *(2)* Conoeidum *L*

17 mutet formam: Die modifizierte Gleichung beschreibt nicht ein Konoid, sondern einen Torus. Leibniz vermerkt den Irrtum am Rand.

est fieri posse, ut in aequatione z ad x referente, ipsius z valor nequeat haberi pure; eoque casu, non poterit una aequatione explicari natura superficiei conoeidis illius. Haec faciunt ut credam omnes aequationes per naturam rerum reddi posse puras, nec referre an impossibiles quaedam in speciem enuntiationes intercurrant.



[*Fig. 5*]



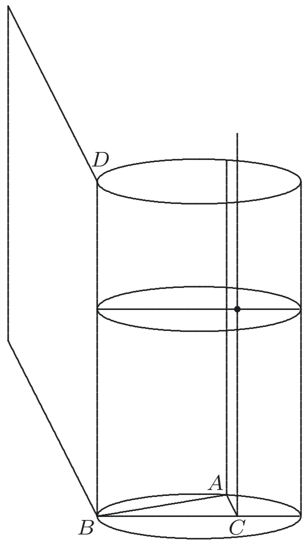
[*Fig. 6*]

Ductus figurarum in figuras nihil aliud sunt quam portiones abscissae a figura ex cylindro alterius figurae: Igitur superficies ductus figurae in figuram est portio superficiei cylindricae. Unde patet aliud fieri solidum, prout modo unum modo alterum ⟨—⟩etur. Etsi ⟨a⟩reae portionis absectae a figura priore ex cylindro po⟨steri⟩oris aequentur, portioni absectae a figura posteriore ex cylindro prioris.

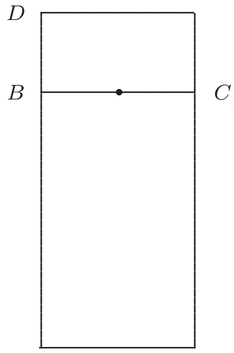
Ut generaliter naturam Superficiei Cylindroeidicae investigemus ponatur $BD \sqcap x$. $BC \sqcap y$. $AC \sqcap z \sqcap$ v. g. $\sqrt{2ax - x^2}$, et fiet $z^2 \sqcap 2ax - x^2$. Porro relatio ipsius BC est ad DB, ea quae videtur in rectangulo apposito, quae nulla aequatione exprimi potest, nisi hac forte: $\dfrac{xa}{x} \sqcap y$. Hinc patet superficies cylindricas non cadere sub aequationem[,] non magis quam rectangulum[,] fiet enim $y \sqcap a$. in rectangulo. Sed cum tamen supra superficiei cylindricae cujus basis circulus assignata sit aequatio, quidni possit cum basis est alia figura. Sed facile est tamen videre differentiae rationem; certumque est istam conditionem in nullam aequationem intrare posse. Investiganda est omnis generis natura superficierum curvilinearum, quales aliquae de quibus memini ratiocinari Robervallium, ut ex eo refert P. Mersennus in opticis posthumis. Eademque opera modus apparebit eas describendi,

2 conoeidis *(1)* hoc modo, sed altera ex incognitis ω, vel y, (qvod et semper fieri potuisset) erit eliminanda: ut *(2)* illius *L* 10 absectae *(1)* ex figura altera *(2)* a figura posteriore | a *ändert Hrsg.* | cylindro *L*

5 *Fig. 6*: Die Figur ist flüchtig skizziert und in der oberen Hälfte durch Papierverlust beschädigt.
8 patet: Die Behauptung ist nicht richtig. 12 $\sqrt{2ax - x^2}$: Es müsste $\sqrt{2ay - y^2}$ heißen.
19 Robervallium: M. Mersenne, *L'optique et la catoptrique*, 1651, S. 117, erwähnt geometrische Studien von G. P. de Roberval („Nostre Geometre") zu Oberflächen von Brennspiegeln.



[*Fig. 7*]



[*Fig. 8*]

ut propositam aequationem resolvendo in duas; fieri potest; v. g. pro $y^2 + \omega^2 \sqcap \dfrac{d^2}{a^2}x^2$, ponendo $y^2 + \omega^2 \sqcap z^2$, et $z \sqcap \dfrac{d}{a}x$. Ecce artificium describendi; et videndum an non idem fieri possit in lineis curvis simpliciter, v. g. $2ax + x^2 \sqcap y^2$, ponendo: $2a\cancel{x} + x^{\cancel{2}} \sqcap \cancel{x}z$. Sed rectu⟨s⟩ in his usus analogiarum? Sed haec pertinent ad Characteristicam Geometricam quam molior.

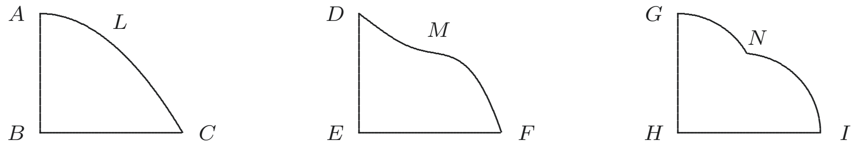
Nunc ad rem nostram ut redeam; si intersectione trium superficierum determinari possunt omnes quadraturae; sequetur puncta quaesita, ipsas scilicet y et p determinari per intersectiones duarum linearum curvarum in solido, quia duarum superficierum intersectio communis est line[a] ejusmodi, et trium superficierum intersectio communis est duarum intersectionum, id est duarum ejusmodi curvarum intersectio communis. Curvae autem istae ex earum sunt genere quas considerat Cartesius sub libri 2$^{\text{di}}$ *Geometriae* finem, ut etiam Geometricas sive Analyticas et recte.

---

6 molior: vgl. z. B. *Characteristica geometrica*, VII, 1 N. 9. 12 considerat: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 65 f.

Habemus ergo tria media analytica Quadraturarum, 1^mo^ per differentias, 2^do^ per collationes diversarum quadraturarum, 3^tio^ per methodum Tangentium inversam. Collatio autem diversarum quadraturarum dat hos quod dixi ad superficiem locos. Notandum est, si sit aliquando ☽ ad ☉ ut ⟨☿ ad⟩ ♀ eodem modo fore p^2. ad (p^2). Sed nullum hinc video usum.

Verissimus horum novissime dictorum, de superficierum intersectione usus hic est: Sunto tres figurae



[*Fig. 9*] [*Fig. 10*] [*Fig. 11*]

in quibus AB, DE, GH aequalibus etiam BC, et EF, et HI, sint aequales; et praeterea areae figurarum seu portionum, $ABCLA, DEFMD, GHING$ aequales; ajo intersectione trium superficierum curvilinearum definiri rectam, cujus semiquadratum sit areae propositae aequale. Nam ☿ erit $\sqcap$ ♀ $\sqcap$ y^2 ex hypothesi, quia areae figurarum aequales ergo et $\frac{y^2}{2}$ areae in omnibus aequale, ergo et y^2 utrobique locum habebit[,] erunt enim tres aequationes:

$$\begin{array}{cccccc} ☽ & + & y^2 & \sqcap & p^2 \\ ☉ & + & y^2 & \sqcap & p^2 \\ ♂ & + & y^2 & \sqcap & p^2 \end{array}$$

Porro ☽, ☉, ♂ explicatae dant varias affectiones ipsius x, v. g.

$$\begin{array}{ccl} ☽ & \sqcap & nx + f, \square \\ ☉ & \sqcap & tx^2 + gx + h, \square \\ ♂ & \sqcap & rx^3 * + qx + \sqrt{a^2 - x^2}, \square, \end{array}$$

pone jam naturam harum formularum, ☽, ☉, ♂, ferre, ut certa quadam ex ipsis x infinitis electa fiant, ☽, ☉, ♂ aequales. Jam y sunt aequales ex hypothesi erunt ergo et p aequales;

13 $\frac{y^2}{2}$ *(1)* | aeqvale *streicht Hrsg.* | *(2)* areae *L*

Jam hae tres aequationes sunt ad superficiem; ☽$+y^2 \sqcap p^2$. seu $n^2x^2+2nfx+f^2+y^2-p^2 \sqcap 0$. est aequatio ad superficiem cum sit trium indeterminatarum; idemque est de caeteris; descriptis ergo his tribus superficiebus relatione ad easdem directrices facta; seu super iisdem planis eodem modo positis, id est initio communi, et in easdem partes; uno vel uniformi motu; intersectio earum communis dabit punctum, unde in planis dirigentibus demissa perpendicularis, erit y quaesita.

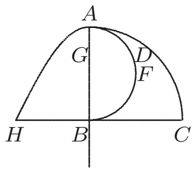
Tantum admonendum est, an spes sit istas superficies describi posse, nec despero, cum sint analyticae, et habeant multam similitudinem cum conoeidicis. Nam si aequatio esset: $n^2x^2+2nfx+f^2-y^2-p^2 \sqcap 0$ foret aequatio ad superficiem conoeidicam, sed quia y^2 affirmatur et p^2 negatur, ideo mutanda erit nonnihil describendi ratio. Differentia ⟨san⟩e qualis inter Hyperbolam et circulum. Ut si ba⟨sis⟩ recta BA in figura quam s⟨upra⟩ de superficiebus conoeidibus descripsi, (⟨ead⟩em ⟨enim⟩ Ordinata generatricis) non circuli radius, sed semilatus rectum sive rad⟨ius⟩ hyperbolae circularis esse intelligatur. Hinc illas superficies appellare placet Anticonoeides.

Cogitandum est an casum excogitare liceat duarum aequationum, ad duas incognitas, problemate proinde existente definito, ita ut duarum locorum intersectione solvi possit, ita tamen ut duabus aequationibus inter se junctis non liceat eliminare alterutram incognitarum; quod si hoc impossibile est, videndum est an non etiam semper duae eliminari possint incognitae tribus datis aequationibus ad tres incognitas; sane si id non licet recta ope harum duarum aequationum, licebit forte componendo duas inter se, novamque inde faciendo, ita ut tandem destrui possint duae incognitae. Sed non puto id successurum. Idem est etsi quatuor imo mille hujusmodi aequationes dentur. Quare ad tollendas hac methodo omnes incognitas praeter unam forte utile erit inveniri alias tres aequationes, in quibus y non quidem eadem, attamen datae rationis. x autem semper intelligi potest eadem, etsi ⊙ et ☽ illarum trium aequales inter se. Cum ⊙ et ☽ priorum trium non coincidant, ita primum poterunt eliminari y. et x. variis aequationum compositionibus; ac postremum quia duae restabunt p inter se diversae, alterutra earum tolli poterit, ita ut non nisi unica restet, per certas literas, ut a, b. explicata. De qua methodo in circulo non despero, sumendo duas figuras quadranti inscriptas vel circumscriptas, et alias semicirculo; illas quadranti has semicirculo aequales.

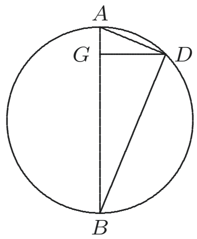
Notandum est, ejusmodi aequationes tres trium incognitarum, ex quibus tamen non possint incognitae quaedam tolli, intersectione Conoeidicarum superficierum posse solvi.

---

11 figura: s. o. Fig. 4.



[*Fig. 12*]



[*Fig. 13*]

$\frac{BD}{GD} \sqcap \frac{AB}{AD}$. Ergo
$BD \frown AD \sqcap GD \frown AB$.

Nota unam jam figuram habemus quadranti ABC aequalem ejusdem cum eo altitudinis et basis, homogeneam scilicet chordarum AD, DB, et aliarum ductui in se invicem. Nam ductus ille aequatur [semi]circuli AFB cylindro sub AB. Quare ductus ille per AB dabit figuram $HBAH$, basi altitudine, area, semicirculo AFB aequalem, ac proinde quadrantis $ABCA$ dimidium. Dimidium, non ergo aequalem. Ergo me falsum video, credo substituta quadam Ellipsi rem forte expediri posse, sed dubito.

6 per *(1)* AD divisus *(2)* AB *L*   7 area, *(1)* | qvadranti, *streicht Hrsg.* | *(2)* semicirculo *L*

3 *Fig. 12*: Das Innere des Halbkreises $ABFA$ ist durch Tintenfraß verloren. Die noch erhaltenen Punktbezeichnungen G und D lassen vermuten, dass darin die in Fig. 13 in größerem Maßstab ausgeführte Konstruktion enthalten war.

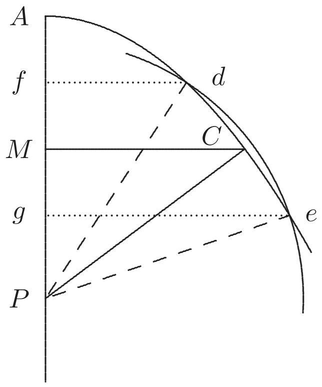
8. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PER AEQU. DUARUM RADICUM AEQUALIUM
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 162–163. 1 Bog. 2°. 4 S. Cc 2, Nr. 839

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist sowohl für Oktober 1674 wie für den Zeitraum Oktober – November 1675 belegt. Der erste Satz des vorliegenden Stückes bezieht sich wahrscheinlich auf N. 7, dat. Oktober 1674 (vgl. die Erl. zu N. 7_1 S. 63 Z. 14), sowie auf die Studie *De serierum summis et de quadraturis*, dat. Oktober 1674 (VII, 3 N. 38). In letzterer wird die Bemerkung von S. 104 Z. 1–4 aufgegriffen und modifiziert (VII, 3 N. 38_6 S. 427 Z. 7–11), daher dürfte N. 8 ebenfalls im Oktober 1674 entstanden sein.

De Methodo tangentium inversa per aequ. duarum radicum aequalium

Multa proxime disserui de Analytica ratione inveniendi summas serierum, sive de methodo tangentium inversa. Breviter ad intellectum necessaria repetam:



[*Fig. 1*]

12 f. De ... aeqvalium *erg. L*

16 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Vorlage die Punktbezeichnung C zweimal angeschrieben. Die Schnittpunkte des Kreisbogens mit der Kurve hat er zunächst beide mit d bezeichnet, die Bezeichnung des unteren Punktes dann in e geändert. Vgl. die Figur in R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44.

Esto linea AC, cujus omnia puncta referantur certo quodam modo ad rectam AP, sumto in ea puncto quolibet C, sit perpendicularis CP, ordinata MC. abscissa AM. Appellemus cum Cartesio $AM \sqcap y$. $MC \sqcap x$. $PC \sqcap s$. $PA \sqcap v$. erit $PM \sqcap v - y$. et $s^2 - v^2 + 2vy - y^2 - x^2 \sqcap 0$. Ecce quatuor indeterminatas; quod si jam data lineae AC, natura ac descriptione, sive data ordinatarum MC progressione[,] quaeratur modus ducendi ipsas PC. ad punctum datum C, seu si quaeratur punctum P. tunc utique dabitur aequatio alia duas tantum continens incognitas x. y quarum alterutra ex aequatione quatuor indeterminatarum eliminari poterit. Et residua x (aut y) erit duplicis valoris, ac per Methodum Tangentium conferendo cum simili duas habente radices aequales reperietur.

Si vero ex dato puncto P, quaeratur punctum C, seu si data sit progressio ipsarum MP, non vero ipsarum MC, item si data sit relatio ipsarum PM ad MC, (id est ut aliqui ostendi, si datae cujusdam progressionis quaeratur progressio summatrix) quae est species methodi Tangentium inversae, tunc manifestum est, duas restare indeterminatas, quarum utraque sit duplicis valoris, nempe x. et y.

Caeterum, quod dixi quatuor esse incognitas, sciendum est, tamen, reapse non nisi tres esse: quia si ex una harum, x. y. s, vel x. y. v, sumta, duae reliquae inveniri possint, tunc etiam, quarta poterit inveniri. Notandum tamen quod non viceversa ex inventis x. s. v, sumta earum una, quarta y queat inveniri. Quare considerandum est, si data sit aequatio, in qua incognitae s, et v, vel y. s. v, vel y. v, vel y. s, vel x. y. s, aliisve combinationibus contineantur, an alteram indeterminatarum primariarum, y. et x. elidere liceat. Sane si PC non perpendicularis esset, sed curvam, descriptus circulus ex centro P, secaret in duobus punctis d. e. tunc si esset aequatio continens rectas x. y. s. v, in qua ex data s, aliisque aequationibus reliquae quaererentur, utique reliquae omnes prae-

2 sit *(1)* tangens C *(2)* perpendicularis *L* 5 descriptione, *(1)* sive data aeqvatione, qv *(2)* sive *L* 8–10 Et ... reperietur *erg. L* 16 Caeterum, *(1)* qvod reliqvas duas attinet incognitas, s, et v, tunc sciendum est, ex datis *(2)* qvod *L* 17 esse: *(1)* semper *(2)* reapse *(3)* qvia *(a)* inventa s *(b)* inventis x. *(c)* si *L* 23 punctis d. *(1)* d. *(2)* e. tunc si *(a)* ope rectae Pd $\sqcap$ *(aa)* PE. *(bb)* Pe. una *(b)* esset *L*

3 cum Cartesio: *a. a. O.*, S. 40 f. Leibniz gibt in der Folge eine Zusammenfassung der cartesischen Normalenbestimmung; vgl. *a. a. O.*, S. 40–49. 13 aliqui: s. *Methodus tangentium inversa seu De functionibus* (VII, 4 N. 40_4 S. 710 Z. 13–18). 22 *PC* non perpendicularis: vgl. DESCARTES, *a. a. O.*, S. 43–45.

ter s. duos haberent valores, eosque inaequales; sed si circulus centro P, radio PC, vel PE descriptus tangeret in C. tunc duo valores indeterminatarum, x. y. v. futuri essent aequales: quod si jam detur aequatio duas tantum continens indeterminatas x. et y. ut in methodo tangentium ordinaria, tunc altera earum, v. g. x. eliminetur; restabit aequatio tres continens incognitas, y. v. s, ex quibus duae y. et v, habent duos valores aequales; tertia non nisi unum. Sufficit tamen solam y, poni ut radicem aequationis incognitam, duorum valorum aequalium, et quaeri valorem ipsarum v, et s ope aequationum collatitiarum, tunc enim si ex sumta y. inveniatur s. vel v, distinguendum est: nam si ex sola y, invenitur, s, et supra, ex y. et s, habebatur x, tunc ex sola y, habetur x. Idem est si ex sola y habeatur v, et ex y. et v, ⟨ut⟩ supra habeatur x. Sed si aequationum collatitiarum una non det, s vel v ex sola y, sed s ex y et v, vel v ex s et y. vel si ea detur pure, quae tamen cum y ad x non concurrit, tunc exitus tamen semper apparebit ob duas aequationes collatitias, semper in promtu positas.

Etsi notabile sit, si quid maxime in hac materia duas aequationes collatitias sibi consentire et plerumque unam earum sufficere; casus tamen evenire posset, quo foret forsan opus utraque, si scilicet ut dixi neutra per unam pure haberi possit. Sufficit ergo unam y pro incognita sumi duos habente valores aequales, et hoc ipso alteram earum, nempe vel s. vel v. elidi, unde reliqua pure habebitur, quod sufficit ad x quoque pure habendam: resumamus ergo.

Aequatio est generalis quatuor indeterminatarum: $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$. Ponatur $\dfrac{v-y}{x} \sqcap \dfrac{\dfrac{a^2\beta}{y^2}}{\beta}, [\sqcap] \dfrac{a^2}{y^2}$, posita scilicet β. infinite parva, fiet $x \sqcap \dfrac{y^2v - y^3}{a^2}$. et $x^2 \sqcap \dfrac{y^4v^2 - 2y^5v + y^6}{a^4}$ fietque: $s^2a^4 - v^2a^4 + 2vya^4 - 2y^2a^4 - y^4v^2 + 2y^5v - y^6 \sqcap 0$. vel

1 PC, | vel PE, *streicht Hrsg.* | vel *L* 3 inaeqvales *L ändert Hrsg.* 7 aeqvalium, *(1)* qvia ipsa y, inventa, etiam v, invenitur. *(2)* et *L* 8 enim *(1)* inventa v datur et s *(2)* si ex *(a)* data y, *(b)* sumta *(aa)* x, v *(bb)* y. . . . vel v, *(aaa)* non ideo habebitur *(aaaa)* y *(bbbb)* x ex sola y. qvia *(bbb)* distinguendum *L* 20 $-$ 2y^2 *(1)* $-$ c^2 *(2)* $-$ x^2 *L*

1 f. PC, vel PE: Gemeint sind Pd bzw. Pe. Leibniz verwendet irrtümlich die Bezeichnungen der Figur von Descartes, *a. a. O.*, S. 44. 20 $-\ 2y^2$: Leibniz hat die allgemeine Gleichung zunächst mit dem Wert $x^2 = y^2 - c^2$ angesetzt und dann vergessen, den Faktor 2 vor y^2 zu streichen. Die fehlerhafte Gleichung wird bis zum Ende des Stücks verwendet.

$$y^6 \ - \ 2vy^5 \ + \ v^2y^4 \ * \ + \ 2a^4y^2 \ - \ 2va^4y \ + \ \begin{array}{l} v^2a^4 \\ - s^2a^4 \end{array} \ \sqcap 0.$$

Multiplicetur per numeros progressionis Arithm.

$$6 \qquad 5 \qquad 4 \quad 3 \qquad 2 \qquad 1 \qquad 0$$

fiet $3y^5 - 5vy^4 + 2v^2y^3 * +2a^4y - va^4 \sqcap 0$. $3y^2 - 5vy + 2v^2,, \frown y^3, +\llcorner 2y - v\lrcorner \frown a^4 \sqcap 0$. sive $y^2 - 4vy + 2v^2, \frown y^3,, + 2y - v, \frown a^4, +2y - v, \frown y^4, \sqcap 0$.

---

6 *Nebenbetrachtung:* $\dfrac{2y - v, \frown -2v + y^2}{2y - v}$ fiet: $-2v + \dfrac{y^2}{2y - v}$. Unde divisione facta fiet: $-2v + \dfrac{y^2}{2y - v}, \frown \ y^3,, + a^4 + y^4$ vel $\dfrac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v} + a^4 + y^4, \sqcap 0$ vel restitu-

1–101,8 $\sqcap$ 0. | multiplicetur ... Arithm. *erg.* | 6 ... 0 | fiet ... inqvisitione. *erg.* | restabit *L*

7 *(1)* $2\mathrm{y} - \mathrm{v}, \frown -2\mathrm{v}-$ *(2)* $\begin{array}{l} \qquad -\frac{\mathrm{vy}}{2} \\ \cancel{\mathrm{y}^2} - \ 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2 \ ⨍ \ \frac{\mathrm{y}}{2} \\ \cancel{2\mathrm{y}} - \cancel{\mathrm{v}} \end{array}$ $\dfrac{10\mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2}{2}$ vel $\begin{array}{l}\langle - \rangle \ \mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2 \ ⨍ \ \langle 2\mathrm{v} \rangle \\ 2\mathrm{y} - \mathrm{v}\end{array}$ *(3)* $\begin{array}{l} + \frac{\mathrm{vy}}{2} \\ \cancel{\mathrm{y}^2} - \ 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2 \ ⨍ \ \frac{\mathrm{y}}{2} \\ \cancel{2\mathrm{y}} - \cancel{\mathrm{v}} \end{array}$ $\dfrac{-8\mathrm{vy} + \mathrm{vy}}{2}$ seu $\begin{array}{c}\frac{-7\mathrm{vy} + 4\mathrm{v}^2}{2} \\ 2\mathrm{y} - \mathrm{v}\end{array}$ $⨍ -\dfrac{7}{4}\mathrm{v}$ Ce qvi fait: *(a)* y *(b)* $\dfrac{\mathrm{y}^2}{2}$ *(4)* $2\mathrm{y} - \mathrm{v}) \ \dfrac{\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{vy} + 2\mathrm{v}^2}{\frac{\mathrm{y}}{2}}$ *(5)* $\begin{array}{l} 4\mathrm{y} \\ (2\mathrm{y} + \mathrm{v} \end{array}$ *(6)* $\dfrac{2\mathrm{y} - \mathrm{v}, \frown -2\mathrm{v} + \mathrm{y}^2}{2\mathrm{y} - \mathrm{v}}$ *L*

---

8 $\dfrac{-2vy + 2v^2 + y^2}{2y - v}$: Konsequent wäre $\dfrac{-4vy + 2v^2 + y^2 \frown y^3}{2y - v}$. Leibniz setzt zwar mit dem Ausdruck von Z. 6 fort, ihm unterlaufen jedoch weitere Flüchtigkeitsfehler. Die abgebrochene Nebenbetrachtung geht nicht in die weitere Überlegung ein.

Seu $s^2 - \llcorner\llcorner v - y\lrcorner\square\lrcorner - y^2 - \llcorner\llcorner\llcorner v - y\lrcorner\square\lrcorner \frown \frac{y^4}{a^4}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap 0$ unde post multiplicationem Arithmeticam, fit: $2va^4 - 2ya^4, -\llcorner\llcorner\llcorner\llcorner v - y\lrcorner\square\lrcorner\lrcorner \frown y^3\lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap 0$ et divisis omnibus per $v - y$, fiet $2a^4 - vy^3 + y^4 \sqcap 0$. Ergo $v \sqcap \frac{2a^4 + y^4}{y^3}$. Jam supra $v \sqcap \frac{xa^2 + y^3}{y^2}$. Ergo $xy \sqcap 2a^2$. Quod praeclare perfecteque successit; constat enim et dudum a me via synthetica deprehensum est, differentias applicatarum hyperbolae esse homogeneas applicatis hyperbolae secundi gradus. Video ergo hac methodo exitum egregie reperiri.

Miror tamen id processisse, cum sit neglectum a me aliquid nempe multiplicatio reliquorum terminorum per 1. 2. 3. 4. 5. 6. An forte quod aequatio jam continet duas

---

tis omnibus:

$$v^2 \; \frac{-\;5y^4v \atop \underline{-\;\;a^4\ldots}}{y^3} + \frac{25y^8 + 10a^4y^4 + a^8}{4y^6} \sqcap \frac{-y^5 - 2a^4y - 2y^5}{y^3}, + \frac{25y^8 \text{ etc.}}{\ldots.}$$

fietque $v \boxed{\frac{-5y^4 - a^4}{2y^3}} \sqcap \frac{\sqrt{+22y^8 + 8a^4y^4 + a^8} + 5y^4 + a^4}{2y^3}$. Jam supra $v \sqcap \frac{xa^2 + y^3}{y^2}$.

Ergo $2xy \sqcap \sqrt{\ldots} + \underbrace{5y^4 - y^4}_{4y^4} + a^4$

$$\frac{16y^8 + 8a^4y^4 + a^8 + 6y^8}{4y^4 + a^4}$$ [*bricht ab*]

6 *Am Rande:* (Error fuit.)

8 aeqvatio *(1)* | qvae *streicht Hrsg.* | in *(2)* jam *L*

---

1 f. Seu ... 0: Leibniz setzt bei der folgenden Gleichung, die durch Hinweisstrich mit S. 99 Z. 1 f. verbunden ist, noch einmal mit einer Multiplikation gemäß dem Huddeschen Verfahren an, führt diese jedoch nicht korrekt aus, was er später selbst erkennt. 2 fit: Die Rechnung ist nicht richtig durchgeführt, wie Leibniz anschließend selbst bemerkt. 4 deprehensum: vgl. VII, 4 N. 44 S. 756 f.

radices aequales, ut est residua illa, (etiam ablato $v^2a^4 - s^2a^4$,) ut opinor, quia v, pariter et y, sunt duplicis valoris; sed res excutienda accuratius.

$\frac{2a^2}{y} - \frac{2a^2}{y+\beta} \sqcap \frac{2\beta a^2}{y^2+\beta y}$. Forte priore illa via absolute habetur summa, ut numeris quoque applicari possit, fiat enim data series summanda $\frac{\beta a^2}{y^2}$, non $\frac{2\beta a^2}{y^2+\beta y}$. etsi in Geometria $\frac{\beta a^2}{y^2}$, et $\frac{\beta a^2}{y^2+\beta y}$. aequivaleant. Illud interim miror seriem summandam fuisse: $\frac{\beta a^2}{y^2}$, et tamen neglectis multiplicationibus per arithmeticam progressionem reperiri quod fuisse deberet $\frac{2\beta a^2}{y^2}$ quae omnia opus habent exacta inquisitione.

Restabit aequatio in qua duae tantum supererunt incognitae v, et y, habebiturque valor ipsius v. absolutus, per y. Quo valore v, in aequatione $x \sqcap \frac{y^2v - y^3}{a^2}$ substituto habetur x ope solius y, id est descriptio curvae quaesita.

Eadem methodo sit aequatio: $\frac{2a^3}{a^2+y^2}$, $\boxed{\text{vel } \frac{2y^2a}{a^2+y^2}}$ cujus series si summari posset daretur Tetragonismus, ut alibi inveni: erit $\frac{v-y}{x} \sqcap \frac{2a^2}{a^2+y^2}$, unde

$$x \sqcap \frac{va^2 - ya^2 + vy^2 - y^3}{2a^2}.$$

Unde eodem modo, caetera investigari necessario possunt, semper enim s^2, statim tolli potest.

Videamus jam aliam calculi speciem, si scilicet ipsa $v - y$. simpliciter habeatur, ut si ponamus $v - y$ seu $PM \sqcap \frac{2a^3}{a^2+y^2}$ tunc pro $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$ substitui

5 miror *(1)* summam datam fuisse *(2)* seriem *L* 15 f. potest. *(1)* Facilior est calculus, opinor, *(2)* Videamus *L*

---

12 inveni: vgl. VII, 4 N. 42, insbesondere S. 733 Z. 20 f. und die zugehörige Erläuterung. 17 $-2y^2$: s. o. Erl. zu S. 98 Z. 20.

potest: $s^2 - \dfrac{4a^6}{a^4+2a^2y^2+y^4} - y^2 - x^2$, nimirum pro $-v^2+2vy-y^2$, seu quadrato, $v-y$ substituendo ejus valorem, sed hoc modo aequatio difficilis resolutu est, idque vel inde judicari potest, quod multiplicando certo modo per arithmeticam progressionem sequitur absurdum et falsum, quod probe notandum et accurate excutiendum. Interea hinc observo, ad caetera investiganda ex datis MP, satius esse mutare quaestionis genus et aliam quaerere figuram, in qua data sint $\dfrac{MP}{MC}$, unde enim sequetur quaesita; ut alibi deprehendi.

Eadem ergo methodo summam ipsarum $\dfrac{2a^3}{a^2+y^2}$ investigare utile est; ponatur ergo $\dfrac{v-y}{x} \sqcap \dfrac{2a^2}{a^2+y^2}$, fiet $x \sqcap \dfrac{v-y, \frown \llcorner a^2+y^2 \lrcorner}{2a^2}$ et $x^2 \sqcap \dfrac{v-y,\square,, \frown a^2+y^2,\square}{4a^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $s^2 - \llcorner\square\, v-y\lrcorner - y^2, -\llcorner\square\, v-y, \frown \dfrac{a^2-y^2,\square}{4a^4}$. Unde abjectis cognitis etc.

Sed ut omnia fiant certiora utar exemplis facillimis ut parabolae. Quaeritur summa omnium $\dfrac{y^2}{a}$, ponatur ergo $\dfrac{v-y}{x} \sqcap \dfrac{y^2}{a^2}$. Ergo $x \sqcap \dfrac{a^2v-a^2y}{y^2}$ et $x^2 \sqcap v-y,\square, \frown \dfrac{a^4}{y^4}$. Eoque valore in aequatione generali substituto, fiet: $-s^2 - \llcorner v-y\lrcorner\square - y^2,,,+\llcorner v-y\lrcorner\square,, \frown \dfrac{-a^4}{y^4} \sqcap 0$. sive, $-s^2y^4 - y^4v^2 + 2vy^5 - y^6 - y^6,, - v^2a^4 + 2vya^5 - y^2a^4 \sqcap 0$. et ordinando:

$$\begin{array}{cccccccccccc}
y^6 & - & vy^5 & + & \dfrac{s^2}{2} & y^4 & + & \dfrac{a^4}{2}y^2 & - & va^5y & - & \dfrac{a^4v^2}{2} \sqcap 0 \\
 & & & + & \dfrac{v^2}{2} & & & & & & & \\
+2 & & +1 & & 0 & & & -1 & & -2 & & -3.
\end{array}$$

Unde Calculus satis prolixus, sed quid si ipsa v, sumta pro incognita ita fecissemus:

14 fiet: *(1)* $\mathrm{s}^2 - \mathrm{v}^2 + 2\mathrm{vy}$ *(2)* $-\mathrm{s}^2$ *(a)* + *(b)* $-\llcorner \mathrm{v}-\mathrm{y}\lrcorner\square$ *L*

7 deprehendi: vgl. VII, 4 N. 40_4 S. 710 Z. 13–18. 14 $-s^2$: Leibniz hat den ursprünglich begonnenen Vorzeichenwechsel nicht vollständig rückgängig gemacht und vergessen, das Minuszeichen vor s^2 zu streichen. Im Folgenden müssten $+s^2y^4$ statt $-s^2y^4$ und $+2vya^4$ statt $+2vya^5$ stehen. Die Fehler, zu denen weitere Versehen hinzukommen, beeinflussen die Rechnung bis S. 103 Z. 9.

$$\begin{array}{ccl} v^2 & \left\{\begin{array}{l} +2y^5 \\ +2ya^5 \end{array}\right. & v \ + \ \text{etc.} \ \ldots \\ & \overline{-y^4-a^4} & \\ 2 & 1 & \quad 0 \end{array}$$

fieret aequatio brevissima: $2v^2 \begin{array}{c} \left\{\begin{array}{l} +2y^5 \\ \\ +2ya^5 \end{array}\right. \\ \overline{-y^4-a^4} \end{array} \ v \sqcap \ 0$ sive $v \sqcap \dfrac{+y^5+a^5}{+y^4+a^4}$, eoque valore ipsius v, in aequatione superiore substituto, fiet: $x \sqcap \dfrac{\cancel{a^2y^5}+a^7-\cancel{a^2y^5}-a^6y}{y^6+a^4y^2}$. Quaeramus jam differentias ipsarum x, fiet: $\sqcap \dfrac{a^7-a^6y+a^6e}{y^6+6ey^5+a^4y^2+2a^4ey} - \dfrac{a^7-a^6y}{y^6+a^4y^2}$, fiet: $\dfrac{a^6ey^6+a^6ea^4y^2-6a^7ey^5-2a^{11}ey+6ey^6a^6+2a^{10}ey^2}{y^{12}+2y^8a^4+a^8y^4}$ quod non video quomodo priori aequationi consentiat, ut proinde necesse sit, subesse quendam in calculo paralogismum.

Experiendum an in methodo communi tangentium liceat non y tantum sed et v, supponere pro incognita duarum radicum; Ex. grat. (Schoten.) pag. 246 aequatio parabolae determinanda ad duas radices est: $y^2+ry-2vy+v^2-s^2 \sqcap 0$. Ordinavit ille secundum indeterminatam y, ordinemus nos secundum indeterminatam v, fiet: $v^2-2vy \begin{array}{l} -\ s^2 \\ +\ y^2 \\ +\ ry \end{array}$ et comparando cum $v^2-2ev+e^2$, fiet $v \sqcap +y$. Quod constat esse falsum, idem eveniret multiplicata aequatione per 2. 1. 0. fiet enim $2v^2-2vy \sqcap 0$, sive $y \sqcap v$. Opus est proinde ut rationem cur ista non procedant investigemus. Imo jam invenio videoque ipsam v non esse duplicis valoris, considerata figura Cartesii pag. 44, est enim unica $AP \sqcap v$, at tam AQ quam $AM \sqcap y$.

Et hinc jam etiam videre mihi videor, cur aequatione inventa duarum incognitarum quarum quaelibet duas habet radices aequales, ista forte methodus non procedat, ut de-

19 cur *(1)* |non *streicht Hrsg.*| procedat *(2)* aeqvatione *L*

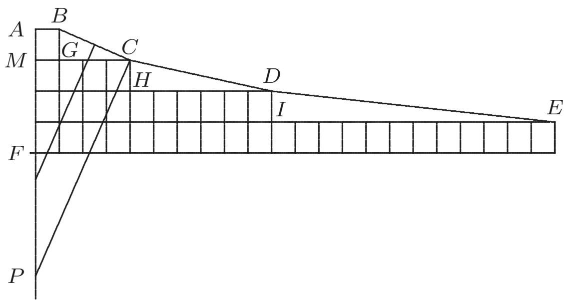
11 Schoten.: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 246. 17 Cartesii: s. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44.

terminetur velut si unam tantum haberet lineam unius significationis; videtur methodus determinandi aequationem trium incognitarum ad duas, ex eo quod in ea duae sunt incognitae duas habentes radices aequales eadem esse cum methodo ducendi planum tangens superficiem curvam datam.

Et sed videtur altera incognitarum duos valores habentium eliminari posse, ope

---

5 *Nebenbetrachtung am oberen Rand der Rückseite:* Vide finem pag. sequentis, ubi vera denique et infallibilis methodus proposita est quae in eo praeterea excellit, quod transferri potest ad numeros.



Nam si quaeritur summa omnium $\frac{a^2}{y^2}\left(\frac{1}{y^2}\right)$ exempli causa, in numeris tunc quaeritur series polygoni cujusdam seu figurae multilaterae $ABCDEF$, certam regulam habentis, ita differentiae ordinatarum GC, HD, IE, sint progressionis $\frac{1}{y^2}$. Nam considerandum seriem ordinatarum, adjectitiis istis augendam ut polygonum compleatur ac tum demum perpendicularem posse duci, PC. Ideoque ab inventa figura seu serie polygoni, seriem horum triangulorum addititiorum postea subtrahendam, et ita habebitur perfecta numerorum et figurarum conciliatio.

7 deniqve *(1)* ratio *(2)* et *L* 9 $\left(\frac{1}{\mathrm{y}^2}\right)$ *erg. L* 11 differentiae *(1)* laterum, GC *(2)* ordinatarum *L*

1–4 videtur ... datam: vgl. VII, 3 N. 38_6 S. 427 Z. 7–11.

aequationis $\frac{y-v}{x} \sqcap \frac{...(x)}{...\ x}$. Sed difficultatem ex eo video, quod scilicet valor earum incognitarum quae duos habent valores aequales, cum valore earum quae tales non sunt, misceri non debeat. Quod si dicas saltem v eliminari posse, tunc rursus dubito, est enim v unius valoris, at x et y duorum: calculus esset instituendus, perinde ac si problemata ejusmodi solvere vellemus, ponendo non radices esse aequales, sed habere differentiam quandam datam, quae postea cogitabitur aequalis $\sqcap 0$. Hac methodo res tota in plena luce collocari potest. Atque ita methodum tangentium inversam non minus ac directam hac ratione persequi licebit. Pone enim aequationem unam esse, primo $s^2 - v^2 + 2vy - 2y^2 - x^2$, alteram: exempli causa, $v \sqcap \frac{a^2x + y^3}{y^2}$, et v, atque s, esse unius valoris, sed y, et x, esse duorum valorum, eosque valores habere differentiam datam ita ut differentia data inter duos valores ipsius y sit b, et inter duos valores ipsius x sit c. Sed ut v, quae unius est valoris, ope duarum incognitarum duorum valorum determinetur, id videtur impossibile, et est vero, nisi res ita constituta sit, ut quomodocunque duae illarum quantitatum quatuor, duae x, seu x, et ξ, et duae y, seu y et $\cup$, inter se combinentur ex praescripto aequationis, nempe x, et y, vel x et $\cup$, vel ξ et $\cup$. vel y et ξ[,] ut nihilominus semper idem prodeat nempe v.

Sed de isto quidem non est necesse opinor, ut soliciti simus, nam cum impossibile sit errorem oriri, si pro aliqua quantitate substituatur ejus valor, eliminata v^2, habebimus aequationem hanc, e. g. $s^2 - \frac{a^4x^2 + 2a^2xy^3 + y^6}{y^4} + \frac{2a^2x + [2]y^3}{y} - 2y^2 - x^2 \sqcap 0$ in qua duae sunt incognitae duas habentes radices; et tertia non nisi unam. Et huc scilicet veniendum est ad modum efficiendi, ut x et y, et x et $\cup$, et ξ et $\cup$, et y et ξ, ex praescripto aequationis propositae ultimae combinatae, semper producant idem, et quis tunc debeat esse valor ipsius s. In methodo tangentium communi seu directa quaeritur tantum ratio efficiendi, ut una incognita duorum valorum ut y. vel $\cup$. in aequatione posita semper proveniat idem. Problema autem in methodo quoque inversa non poterit opinor solvi melius quam per aequationum similium comparationem; nam ecce

7 potest. *(1)* porro ut tam *(a)* v, q *(b)* y, qvam x duos habeant valores aeqvales *(2)* Atqve *L* 13 vero, *(1)* nisi vel differentiae *(2)* nisi *L* 13 illae qvantitates *L ändert Hrsg.* 23 et ... ipsius s *erg. L*

25 inversa: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f.

aequationem in qua x habet duos valores aequales, ergo similis est ei, quae est multipla hujus $x^2 - 2ex + e^2, \sqcap 0$. Eodem modo y in ea habet duos valores aequales, ergo similis est multiplae, hujus quoque $y^2 - 2\cup y + \cup^2, \sqcap 0$, ergo similis est multiplae factae ex utraque: $x^2y^2 - 2exy^2 + e^2y^2, -2x^2\cup y + 4ex\cup y - 2e^2\cup y, +x^2\cup^2 - 2ex\cup^2 + e^2\cup^2$ et ordinando: $x^2y^2 - 2exy^2 - 2\cup x^2y + \cup^2x^2 + e^2y^2 + 4ex[\cup]y - 2\cup^2ex - 2e^2\cup y + e^2\cup^2 \sqcap 0$. Erunt ergo aequationes collatitiae 8, at incognitarum tantum una est in data aequatione, ergo data aequatio per aliam 7 indeterminatarum multiplicanda est, quae talis sit, ut ea multiplicatione factitiae similis fiat, quo facto conferendo tandem, omnesque incognitas elidendo, ultimae s tandem valor invenietur. Possent quoque ambae partiales aequationes factitiae duarum radicum aequalium, per alias aequationes multiplicari, ita moderatis, ut ductis in se invicem productis fiat data, sed nullum inde compendium, satius est ergo productum multiplicari per aliam quandam, quae omnia aut pleraque loca repleat, adhibitis incognitis, unde ponendo illas incognitas evanescere, seu $\sqcap 0$. Ubi termini scilicet nulli sunt tandem sponte sua aequatio similis fieret. Haec aequatio factitia dici potest habere omnia loca repleta, si scilicet neutra incognitarum dicatur ascendere debere ultra quadratum, revera tamen locus est quadrato-quadraticus, ob ductum in se incognitarum, et eo sensu loca vacant.

Etsi necesse sit tot esse aequationes collatitias quot incognitas, non tamen necesse, ut quilibet terminus novam peculiariam habeat incognitam.

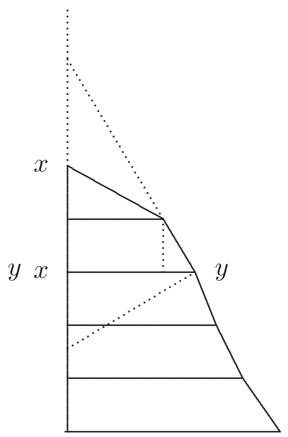
Facillima res est, si factitia inventa per aliam repletam, si placet multiplicetur, in qua satis incognitarum, et inde collatitiae instituantur etiam cum terminis absentibus, ita enim etiam quaedam ex incognitis assumtis tolluntur. Si nimius indeterminatarum numerus, possunt superfluae mutari in cognitas.

1 est *(1)* ei *(a)* qvae fit *(b)* indeterminatae *(2)* ei *L*

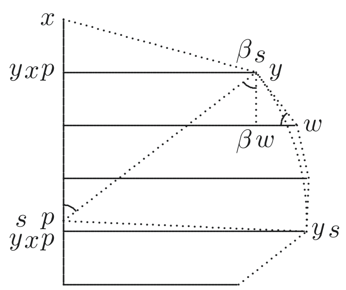
9. ANNOTATIO AD METHODUM TANGENTIUM INVERSAM
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 62. 1/2 Bl. 4°. Ca 1/2 S. auf Bl. 62 v° unten. Auf Bl. 62 r° VII, 3 N. 38_{16} tlw. sowie eine Aufzeichnung zur Pendelbewegung (Cc 2, Nr. 543 tlw.; Druck für Reihe VIII vorgesehen).
Cc 2, Nr. 543 tlw.

Datierungsgründe: Die Schrift der zu VII, 3 N. 38_{16}, dat. Oktober 1674, gehörigen Gleichungen auf Bl. 62 r° oben schlägt stark auf die Rückseite durch. Auf dieser ist Fig. 1 von N. 9 auf eine davon kaum beeinträchtigte Stelle der oberen Hälfte des Blattes geschrieben, Fig. 2 und der Text des Stückes auf die freie untere Hälfte, also wohl erst nach diesen Gleichungen. Die Aufzeichnung zur Pendelbewegung auf Bl. 62 r° ist weitgehend in den restlichen Freiraum geschrieben und dürfte zuletzt entstanden sein. Leibniz befasst sich in VII, 3 N. 38_{16} u. a. mit der Summierung der Reihe $\dfrac{1}{z^2+\frac{1}{2}\beta z}$, so dass N. 9 vermutlich auf denselben Zeitraum zu datieren ist.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

$p^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam $\dfrac{w}{\beta} \sqcap \dfrac{p}{y}$, et posito w dari, seu esse v. g. $\sqcap \dfrac{a^3}{x^2+\frac{1}{2}\beta x}$ fiet $p \sqcap \dfrac{a^3 y}{x^2\beta + \frac{1}{2}\beta^2 x}$, et $p^2 \sqcap \dfrac{a^6 y^2}{x^4\beta^2 + x^3\beta^3 + \dfrac{\beta^4 x^2}{4}}$ et fiet:

$4a^6y^2+4x^4\beta^2y^2+4x^3\beta^3y^2+\beta^4x^2y^2 \sqcap 4x^4\beta^2s^2+4x^3\beta^3s^2+\beta^4x^2s^2$ quae determinanda est ad duas radices aequales.

1 determinanda: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

10. METHODO TANGENTIUM FLEXUS CURVARUM CONTRARII FACILE DEPREHENDUNTUR

[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 122–123. 1 Bog. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 123 ist abgetrennt. 1 1/2 S. auf Bl. 122. Auf Bl. 123 Cc 2, Nr. 842 u. 843 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 841

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Anfang September bis November 1674 belegt. In seiner ersten Abhandlung zur Kreisquadratur vom Herbst 1673 hat Leibniz eine Abschätzung zum Wendepunkt einer Kurve durchgeführt, ohne Tangentenbetrachtungen anzustellen (vgl. VII, 4 N. 42_1 S. 731–733), in der Ausarbeitung vom Oktober 1674 versucht er dies durch einen Vergleich von Abszisse und Subtangente, die er nach dem Verfahren von Sluse berechnet (vgl. III, 1 N. 39 S. 144 f. u. 147). Das vorliegende Stück dürfte vorher entstanden sein.

Methodo Tangentium flexus curvarum contrarii facile deprehenduntur

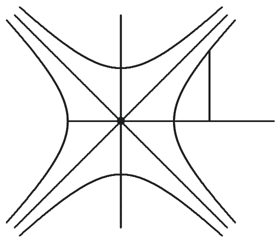
Nimirum, investigetur tangens methodo a Slusio publicata, si tangens semper est affirmativa, vel semper negativa, quod facile ex calculo judicari potest, nullos habet curva flexus contrarios; sin mutari potest ex affirmativa in negativam, semel aut saepius[,] hoc quoque ex calculo facile dijudicari, et punctum flexus contrarii reperiri potest. Eadem arte et vertex curvae, in ordine scilicet ad rectam pro Directrice sumtam, semper reperiri potest. Vertex enim determinatur applicata maxima et minima.

16 methodo *(1)* Slusiana, *(2)* a Slusio *L* 21–110,1 minima *(1)*. (Minima infinite parva *(2)*. Si Directrix *(a)* secat vel tang *(b)* occurrit *L*

14 f. Methodo ... deprehenduntur: vgl. Sluses Bemerkungen zu Wendepunkten im Tangentenbrief, *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5146–5147: „aliquid etiam attigi Miscelaneorum cap; ubi &, qua ratione flexus contrarii curvarum ex Tangentibus inveniantur, ostendi“ und im Nachtrag, *Philosophical Transactions* VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059: „De ... Methodo nihil aliud dicere possum, nisi mihi videri meam esse . . . , cujus ope flexus Curvarum contrarios ac Problematum limites ostendi.“ 16 publicata: vgl. die Erl. zu S. 62 Z. 6.
16–19 si tangens . . . potest: Das folgende Kriterium liefert Extremwerte, nicht Wendepunkte. In der Folge setzt Leibniz fälschlich Extremwerte und Wendepunkte gleich (s. u. S. 111 Z. 3).

Si Directrix occurrit curvae, punctum concursus dat verticem. Curva si recurvata est, habet vertices uno plures. Vertex est punctum recurvationis. Possunt recurvationes esse dissimilares, ut in illis quae sunt instar literae S. Porro sciendum est verticem haberi ope Tangentis directrici parallelae aut perpendicularis.

Sunt falsi quidam vertices, qui fiunt ex curvarum dissimilarium compositione in unam inventa aequatione ipsis communi, ita facile est diversas Conicas in unum jungere imo haec conjunctio etiam fieri potest sine nova recurvatione, vel vertice, quas in curvis altioribus discernere difficile est. Videndum est ergo an pars quaedam curvae propositae separatam habere possit ab altera aequationem, et progressionem; proposita quadam curva, et aequatione ejus progressum exprimente, quaerenda sunt ejus aequationis ope puncta tam flexuum contrariorum, quam recurvationum; referendaque sunt puncta curvae ad Tangentes per ea puncta transeuntes et ad rectas quae ad eas tangentes sunt perpendiculares, ut quaeratur si fieri potest aequatio proposita simplicior, certe ab ea diversa. Ubi considerandum etiam est an Curva sit Recurrens in se. Si non est recurrens in se, videndum est, an habeat sectiones oppositas, imo an et conjugatas.



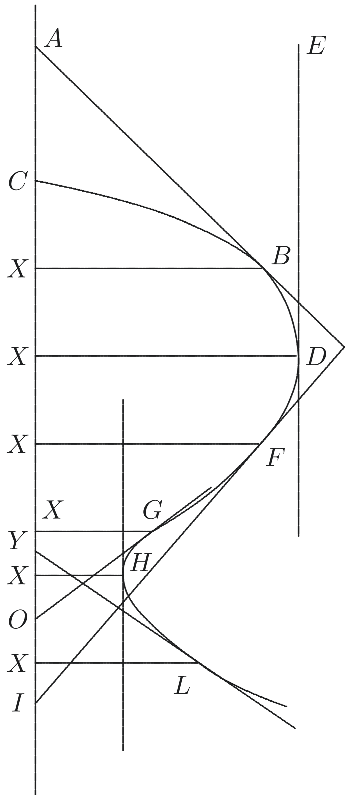
[*Fig. 1*]

Ad hoc autem necesse est ut videamus an curva habeat asymptoton, id est an punctum aliquod reperiri possit, unde nequeat duci tangens ad curvam, nisi infinita. Unde illud quoque statim investigari potest, sitne ab utroque latere asymptotos. Superest ut investigetur.

Reperta aequatione ad Curvam simplicissima, eadem opera facile habetur et compositissima. Aequationes illae resolvendae sunt in analogias; et ordinatae in partes, ut inde inveniantur, an sint rectae quaedam certae, puncta quaedam certa, ad quae specialiorem quandam habeant curvae relationem, etiam aliter quam per ordinatas, ut an sint foci, et poli: breviter investigandi sunt modi describendi simpliciores omnes.

Examinandum denique est, quam relationem curva habeat extra suum planum; an solidum aliquod regulare haberi queat, imo an et plura, quorum sectione habeatur. Uti

Ellipsis tam ex cylindro quam ex cono secari potest. Examinandum ante omnia fiat, an recta constans curvam ingrediatur, una pluresve; et quomodo reddi possit simplicissima.



[*Fig. 2*]

Erravi paulo ante inter flexus contrarios et recurvationes nullum est discrimen. Cum tangens, ex punctis contactus B. D. F. G. H. L. axi CX productae si opus est, occurrit ultra C, id est ultra punctum quo curva continuata axi aut ejus parallelae (ante alium flexum) occurrit, tunc curva axi obvertit concavitatem; idem est de FI, quia ultra punctum H, quo curva ante mutatum flexum maxime accedit ad axem, cadit I. Si tangens semper tendit versus applicatas minores, ideoque in eas partes curva decrescit. Si tangens est parallela axi; a statu incrementi transitur in statum decrementi; vel quod idem est contra.

In curvis Conicis tot sunt tantum varietates quot differentiae oriri possunt a quadratis incognitarum absentibus, vel affirmatis aut negatis, varietate quae est ab rectangulo incognitarum ad eas reducta. Sed hoc non erit in altioribus.

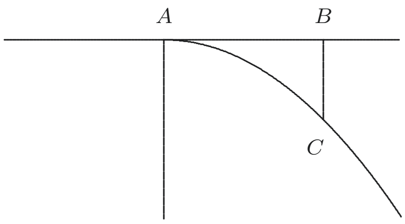
3 *(1)* Nota cum l, seu producta, est major qvam x, abscissa, figuram esse convexam, Si minor, qvod fit etiam, si in contrarium reducta, concavam; Si mi *(2)* Erravi *L* 8 occurrit *gestr. L*, *erg. Hrsg.* 9 concavitatem; *(1)* si infra, concavitatem *(2)* idem *L* 11 f. tangens *(1)* in cresc *(2)* tendit *(a)* partes a *(b)* versus applicatas minores; curva *(3)* semper *L* 13 f. parallela | curvae *ändert Hrsg.* |; a *L*

3 Erravi: s. o. Erl. zu S. 109 Z. 16–19.

11. DE VARIIS CURVIS NOTAE
[September – November 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°, gefaltet zu einem Bog. 4°, von dem das rechte, untere Viertel abgeschnitten ist. 5 Z. auf der rechten Hälfte von Bl. 2 r°. Auf dem Rest von Bl. 2 VII, 1 N. 64.
Cc 2, Nr. 726

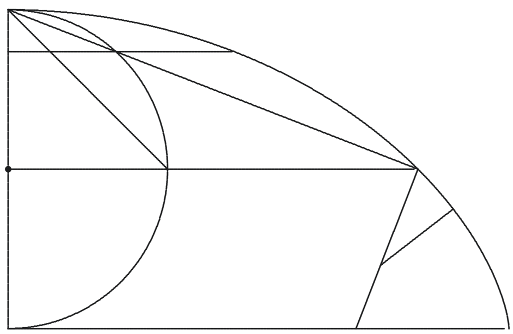
Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist von September bis November 1674 belegt. Die vorliegenden Notizen dürften kurz nach VII, 1 N. 64 auf das Blatt geschrieben worden sein.



[*Fig. 1*]

$y \sqcap AB \sqcap 10.$ $x \sqcap BC.$ $ax \sqcap y^2.$ $x \sqcap \dfrac{y^2}{a} \sqcap \dfrac{100}{}$ [*bricht ab*]

$\dfrac{a^2x}{a^2+x^2} \sqcap y.$



[*Fig. 2*]

12. DE INSCRIPTORUM ET CIRCUMSCRIPTORUM USUS
November 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 79. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 79 r° u. 5 Z. auf Bl. 79 v°. Bl. 79 hing ursprünglich mit N. 13, VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 zusammen.
Cc 2, Nr. 801

1674. Novemb.

De inscriptorum et circumscriptorum usus non solum ad demonstrandum sed et ad inveniendum

Methodo Apagogica per v. g. inscripta et circumscripta, hactenus eo tantum consilio usi sunt Geometrae, ut aliter inventa, sic tantum demonstrarent. Ego cogitare coepi an non principium etiam inventionis esse possit, haec methodus tam generalis, ut alias omnes comprehendat, quoniam omnia aliter inventa per hanc possunt demonstrari. Nimirum breviter methodus[:] Duo sunt aequalia; id ita demonstrabitur, pone esse inaequalia, differentia ergo ipsorum erit quaelibet, ut b. Sume inscripta et circumscripta quorum differentia minor quam b. Investiga jam et differentiam tam inscripti a data quantitate, quae aequalis demonstranda est, quam circumscripti; invenies per calculum, qui quippe in meris rectilineis facile iniri potest; differentiam inscripti ab ipso esse minorem quam b, sed et differentiam circumscripti ab ipso esse etiam minorem quam b. Sed alterutrius eorum differentia ab ipso deberet esse minor quam b. Quoniam enim differentia ejus a curvilineo ipso sit b, ideo si ponetur majus curvilineo, inscriptum ab eo differet plus quam b. Si sit minus[,] circumscriptum.

Analytice sit c curvilineum[;] b. quantitas assumta; quantitas quae ipsi c ponitur aequalis, esto a. Polygonum inscriptum m, circumscriptum n.

Jam aquationes: (1) $\text{ǂ}c\text{‡}a \sqcap b$. (2) $m+b-q \sqcap c$, (3) $n-b+r \sqcap c$ (4) $a-m \sqcap b-d \sqcap f$ et (5) $n-a \sqcap b-e \sqcap g$. (6) per 1. erit $c \sqcap \text{ǂ}b+a$, ergo ex 2. et 3. fiet: (7) $m+b-q \sqcap \text{ǂ}b+a$ et (8) $n-b+r \sqcap \text{ǂ}b+a$, jam pro m in aeq. 7. substitue ejus valorem ex aeq. 4, qui est (9) $m \sqcap a+d-b$, et ex aeq. 7. fiet (10) $\boxed{a} + d\boxed{-b+b} - q \sqcap \text{ǂ}b \boxed{+a}$. Et quia per 5, fiet (11) $n \sqcap b+a-e$ fiet ex 8, (12) $\boxed{b} \boxed{+a} - e\boxed{-b} + r \sqcap \text{ǂ}b\boxed{+a}$ adeoque habemus aequationes duas, 10, et 12, nempe $d-q \sqcap \text{ǂ}b$, et $r-e \sqcap \text{ǂ}b$ sive ex 10 fiet: (13) $q \sqcap d\,\text{‡}\,b$,

6 1674. Novemb. *erg. L* 7 f. De ... inveniendum *erg. L* 9 v. g. *erg. L* 19 esse *(1)* major qvam b *(2)* maj *(3)* minor *L* 29 et |11 *ändert Hrsg.*|, nempe *L*

et ex 12, fiet (14) $r \sqcap \dagger b - e$ quarum alterutra absurda est, quia si $\ddagger$ significat $+$, fiet $\dagger \sqcap -$. et erit $r \sqcap -b-e$. quod est absurdum; si $\ddagger$ significat $-$ fiet $d-b \sqcap q$. Quod rursus absurdum, nam quia b major quam d ex hypothesi, erit q aequalis quantitati negativae, contra Hypothesin, nam quia $b - d \sqcap f$ per 7. erit $d - b \sqcap -f$. Ergo $q \sqcap -f$. quod est absurdum. Hinc jam analytice licebit investigare casus, ex natura calculi in quibus posita differentia b. Calculi ejusmodi oriri debeant; atque ita inveniri quaedam poterunt quae forte per alias methodos demonstrare non liceat.

Si tam c quam a, curvilineae, ipsius c quoque exhibenda inscripta. Sed ad polygonorum, vel aliter appropinquantium summam universaliter ineundam, seu ad supponendum calculum quo assumantur, minor eorum differentia calculo indefinito, patet opus esse, ut area cujuslibet polygoni per regulam quandam seu compendium iniri possit, seu brevius et generalis, ut habeatur methodus appropinquandi generalis per calculum analyticum.

4 Hypothesin, *(1)* qvemadmodum et r. *(2)* nam *(a)* ponendo *(b)* qvia *L*

1 (14): Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $+e$ stehen. Der Fehler beeinträchtigt die anschließende Folgerung, aber nicht die weitere Überlegung.

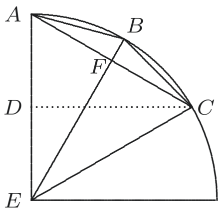
13. CURVA ANALYTICA SENSIBILITER NON DIFFERENS A QUADRATRICE QUADAM
[Anfang (?) Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 2 c Bl. 151. 1 Ausschnitt von max. 17 x 9,6 cm. Ca 1 1/2 S. Bl. 151 hing ursprünglich mit N. 12, VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 zusammen.
Cc 2, Nr. 1074

Datierungsgründe: Das ursprünglich zuerst auf denselben Träger geschriebene N. 12 ist auf November 1674 datiert. N. 13 ist nach den von den Herausgebern auf Dezember 1674 datierten VII, 1 N. 142 u. VII, 2 N. 4 geschrieben worden.

C u r v a a n a l y t i c a s e n s i b i l i t e r n o n d i f f e r e n s a q u a d r a t r i c e q u a d a m

Methodo qua aut Snellius, aut Vieta, aut Hugenius, aut Gregorius arcui cuilibet rectam prope aequalem Geometrica constructione non ineleganter exhibent describi potest figura fere.



[*Fig. 1*]

Hugenius in libro de magnitudine Circuli hanc habet, quam et repetit de pendulo pag. 12 $\dfrac{AB+BC-AC}{3}+AC \sqcap ABC$ ita ut in sextante quadrantis aut minore arcu ne quidem $\dfrac{1}{6000^{\text{ma}}}$ parte suae longitudinis recta dicta deficiat ab arcu. Sive $\dfrac{AB+BC-AC+3AC}{3}$, sive $\dfrac{AB+BC+2AC}{3}$.

10 f. C u r v a ... q v a d a m *erg. L* 16 qvam ... 12 *erg. L*

12 Methodo: W. Snell, *Cyclometricus*, 1621, prop. XXXIII – XXXIV, S. 58–63; Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, cap. XVIII (*VO* S. 398–400); Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, problema III, prop. XII, S. 19–21 (*HO* XII S. 147–149); J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 11–19; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. 1, S. 1–3; ders., *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 6–8 [Marg.]. 16 repetit: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 12 [Marg.] (*HO* XVIII S. 107); Huygens verwendet jeweils den Näherungswert $AB+BC+\dfrac{AB+BC-AC}{3}$. Leibniz rechnet mit dem falschen Wert weiter, wobei ihm Flüchtigkeitsfehler unterlaufen, die sich aber nicht auf die allgemeine Überlegung auswirken.

Posita $AD \sqcap x$ erit $AC \sqcap \sqrt{2ax}$. $AF \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{2}$. $EF \sqcap \sqrt{-\dfrac{2ax}{4}+a^2}$, sive $EF \sqcap \dfrac{\sqrt{+a^2-2ax}}{2}$ et $BF \sqcap \dfrac{2a-\sqrt{a^2-2ax}}{2}$. Cujus quadratum: $\dfrac{4a^2-4\sqrt{a^2-2ax}+a^2-2ax}{4}$ $\sqcap BF^2$, cui addatur $AF^2 \sqcap \dfrac{2ax}{4}$ fiet: $\dfrac{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}\boxed{-2ax+2ax}}{4} \sqcap AB^2$ et $AB \sqcap \dfrac{\sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}}}{2}$. Ergo $AB+BC \sqcap \sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}}$ et Circulus erit paulo minor quam $\dfrac{2\sqrt{2ax}+\sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}}}{3}$. Curva igitur Geometrica Cycloeidi prope eadem erit: $\dfrac{3\sqrt{2ax-x^2}+2\sqrt{2ax}+1\sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}}}{3}$. Cujus ordinatae componentur ex sinubus, ex ordinatis parabolae, et ex ordinatis $\sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}}$. Quarum curvam ita vestigabimus: $\sqrt{5a^2-4\sqrt{a^2-2ax}} \sqcap y$. Ergo $5a^2-4\sqrt{a^2-2ax} \sqcap y^2$. Ergo $4\sqrt{a^2-2ax} \sqcap -y^2 + 5a^2$. Ergo $\boxed{16a^4} - 32a^3x \sqcap y^4 - 10a^2y^2 + \underset{9a^4}{\boxed{25a^4}}$ et erit $x \sqcap \dfrac{-y^4+10a^2y^2-9a^4}{32a^3}$.

Unde patet figuram esse ex paraboloeidum compositarum rationalium genere. Ac proinde ex Circulo, parabola communi, quadratoquadratica et parallelogrammo inter se compositis fieri curvam analyticam a Cycloeide sensibiliter non differentem. Quod satis memorabile arbitror.

5 Geometrica *erg. L* 9 $+5a^2$. *(1)* Est error in calculo sane *(2)* | Ergo *streicht Hrsg.* | $a^2-2ax \sqcap$ *(3)* Ergo *L* 11 parabola *(1)* Cubica *(2)* communi *L* 12 curvam *(1)* Geometricam *(2)* analyticam *L*

4 minor: Der Kreisbogen ist größer als der Näherungswert.

14. AD SCHEDAM INQUISITIONIS IN METHODUM TANGENTIUM INVERSAM OVALIS EXEMPLO

[Spätsommer – 24. Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 7. 1 Bl. 4°. Ränder beschnitten. Bl. 7 v° leer. 1 S. Cc 2, Nr. 833

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist auf Papier geschrieben, dessen Wasserzeichen für August/September und Ende 1674 belegt ist. Leibniz knüpft inhaltlich an N. 4 vom Sommer 1674 an. Die Untersuchung N. 17, dat. Dezember 1674, in der er ebenfalls die inverse Tangentenmethode am Beispiel der Cartesischen Ovale untersucht, erwähnt er nicht. N. 14 dürfte also vor N. 17 entstanden sein; letztere ist wiederum vor der auf den 24. Dezember 1674 dat. N. 18 anzusetzen.

In Scheda ubi in Methodum Tangentium inversam Ovalis exemplo inquisivi (cujus fig. priorem inspice pag. 1) inveni posita MP. Reducta, $\sqcap\ m$, et $FM \sqcap x$. aequationem naturam reductae explicantem haberi:

$$x \sqcap -\ m + \frac{ad^2 - ae^2}{e^2} - \frac{2d^2a^2}{e^2m} + \frac{d^2a^3}{m^2}$$

$\bigtriangledown$ $\square$ Hyp. Hyperboloeid.

Unde sequitur figuram reductarum ejus ovalis esse hyperbolae σύγγνωτον, si nullus in calculo error. Is vero quam verus sit, ita experiemur. Cartesius lib. 2. *Geom.* lit. M. edit. Schot. p. 43. (cujus figuram ea pag. vide.) calculo invenit MA (: quam ille vocat y, quaeque aequivalet meae $FM - FA$, seu $x - c$, ponendo cum Cartesio $FA \sqcap c$:) esse

$$\sqcap \frac{d^2z^2 + 2cd^2z - eez^2 + [2]bdez}{2bdd + 2cd^2}$$ posito ejus $GA \sqcap b$. $AF \sqcap c$. Ergo

$x - c \sqcap$ ...., vel

$x \sqcap$ .... $+\ c$. Hinc aequatio talis fiet:

---

11 inquisivi: s. N. 4, insbesondere Fig. 1 S. 16. 13 haberi: Die folgende fehlerhafte Gleichung leitet Leibniz in *a. a. O.* S. 19 Z. 10–12 ab. Sie beeinträchtigt die weiteren Überlegungen. 17 Cartesius: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43; zur Figur vgl. Leibniz' Nachzeichnung in N. 4 S. 16.

$$z^2 + \frac{2cd^2+[2]bde}{d^2-e^2}z \qquad + \frac{2bd^2c+2c^2d^2-2bd^2x-2cd^2x}{d^2-e^2} \sqcap \; 0$$

seu $\quad z^2 + \underset{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}{nz} + \dfrac{n^2}{4} \sqcap - \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \dfrac{n^2}{4}$

fietque $\qquad \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots} \sqcap z + \dfrac{n}{2}.$

Ponendoque brevitatis causa: $+2bd^2c+2c^2d^2+\dfrac{n^2r^2}{4} \sqcap q^4$, et $d^2-e^2 \sqcap r^2$, et $2bd^2+2[c]d^2 \sqcap t^3$ habebimus: $-\dfrac{n}{2}-\sqrt{\dfrac{q^4-t^3x}{r^2}} \sqcap z$. At Cartesius invenit pag. 48. *Geom.* lineam $AP \sqcap FP-F\underset{\hat{c}}{}A. \sqcap x+m-c$ esse $\sqcap \dfrac{w^4+h^3z}{l^3+r^2z}$. ponendo scilicet $w^4 \sqcap bcd^2-bcde$, et $h^3 \sqcap bd^2+ce^2$, et $l^3 \sqcap cd^2+bde$. Ordinetur aequatio, fiet $l^3x+l^3m-l^3c+r^2xz+r^2mz-r^2cz \sqcap w^4+h^3z$ sive $-\sqrt{\dfrac{q^4-t^3x}{r^2}} \sqcap \dfrac{l^3x+l^3m-l^3c-w^4+nh^3-nr^2x-nr^2m+nr^2c}{+h^3-r^2x-r^2m+r^2c}$ quae contracta quantum fieri potest faciet $-\sqrt{\dfrac{q^4-t^3x}{r^2}} \sqcap \dfrac{f^3x+i^3m+g^4}{-r^2x-r^2m+\beta^3}$ quadratisque omnibus: $\dfrac{q^4-t^3x}{r^2} \sqcap \dfrac{f^6x^2+2f^3i^3xm+2f^3g^4x+i^6m^2+2i^3g^4m+g^8}{+r^4x^2+2r^4xm-2r^2\beta^3x+r^4m^2-2r^2\beta^3m+\beta^6}$. Quae facilitatis causa sic exprimi poterunt:

$$t^3r^4xm^2-t^3r^4x^3-2t^3r^4x^2m+\gamma^8x^2+\delta^8m^2+\theta^8xm+\lambda^9x+\mu^9m+\xi^{10} \sqcap 0.$$

5 pag. 48. Geom. *erg. L* 7 bde *(1)* substituendo ergo valorem z in ejus locum, fiet: *(2)* Reducatur *(3)* Ordinetur *L* 7 fiet *(1)* substituendo ergo $\mathrm{x+m-c \sqcap w^4+}$ *(2)* $\mathrm{l^3x}$ *L* 9 $\sqcap$ *(1)*, $\mathrm{t^3}$, $\frown \mathrm{x+m}, -\mathrm{g^4}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{l^3x}}{\mathrm{m}}-$ *(3)* $\dfrac{\mathrm{f^3x+i^3m+g^4}}{\mathrm{-r^2x-r^2m}+\beta^3}$ *L*

3 $\sqrt{\ldots\ldots}$: Im Folgenden schreibt Leibniz das Minuszeichen vor $\dfrac{2bd^2c+2c^2d^2-2bd^2x-2cd^2x}{d^2-e^2}$ vor die Wurzel und behält alle Vorzeichen unter der Wurzel bei. Der daraus resultierende fehlerhafte Term $\sqrt{\dfrac{q^4-t^3x}{r^2}}$ beeinträchtigt die weitere Rechnung. 8 sive: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung vergisst Leibniz den Faktor $\dfrac{1}{2}$ vor $(nh^3 \ldots +nr^2c)$.

$$\text{vel} \quad - \frac{t^3r^2x^3+\gamma^8x^2+\lambda^9x+\xi^{10}}{+t^3r^4x-\delta^8} \sqcap m^2 \; \frac{\begin{array}{l} +\,2t^3r^4x^2 \\ -\,\theta^8x \\ -\,\mu^9 \end{array}}{+\,t^3r^4x-\delta^8} \; m.$$

Ejus loco ponatur brevitatis causa: $-\frac{\varphi}{2}+\sqrt{\frac{\pi^{10}}{\varrho^8}+\frac{\varphi^2}{4}} \sqcap m$. Unde patet valorem ipsius m componi ex $\frac{\varphi}{2}$, et radice adjecta. Ipsam $\frac{\varphi}{2}$ autem componi ex applicata $\bigtriangledown^{\mathrm{li}}$, applicata Rectanguli, applicataque Hyperbolae, si modo m non alicui $\bigcirc$ aequivalet, quod jure vereor. Abjecta jam $-\frac{\varphi}{2}$, positoque $l^2 \sqcap \frac{\pi^{10}}{\varrho^8}+\frac{\varphi^2}{4}$, investigandum an valor ipsius l haberi possit. Pro $\frac{\varphi^2}{4}$, habemus $\frac{\psi^{18}}{4\varrho^{16}}$, fietque $\varrho^{16}l^2-\pi^{10}\varrho^8 \sqcap \frac{\psi^{18}}{4}$. Explicatio ejus rursus dabit radicis extractionem quae locum in alios resolvet, donec reddatur simplicissimus.

6 modo *(1)* $\langle$m$^2\rangle$ non alicui $\bigcirc$. *(2)* | μ *ändert Hrsg.* | non *L*

15. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA EXEMPLUM
[1. – 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 823

Datierungsgründe: Am Ende des vorliegenden Stückes wird eine in N. 17 Teil 2 durchgeführte Untersuchung angekündigt; s. die Erl. zu S. 130 Z. 5.

Xb. 1674.

De Methodo Tangentium inversa exemplum.

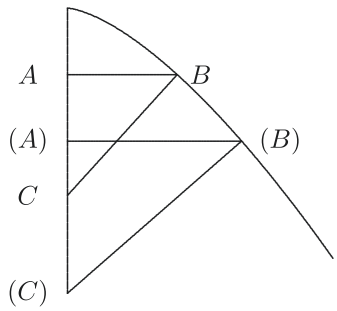


fig. 1.

Sit fig. 1. curva $B(B)$ ejus naturae, ut si ad quandam directricem referatur $A(A)C(C)$ ordinatis AB, $(A)(B)$ et perpendiculares $BC, (B)(C)$ ad curvam ducantur ipsi curvae occurrentes in B[,] (B) et directrici in $C, (C)$ ipsae AB, $(A)(B)$ sint ipsis AC[,] $(A)(C)$ reciproce proportionales. Quaeritur modus hanc curvam describendi.

---

8 *Darunter:* Confer quae dixi Xb. 1674. *Schediasmate de calculo Elastico*, et schediasmate *De progressionibus et Geometria arcana et methodo Tangentium inversa*.

12 f. ipsae ... proportionales *erg. L*

---

14 f. *Schediasmate de calculo Elastico*: Cc 2, Nr. 822, dat. Dezember 1674; *De progressionibus*: VII, 3 N. 39, dat. Dezember 1674.

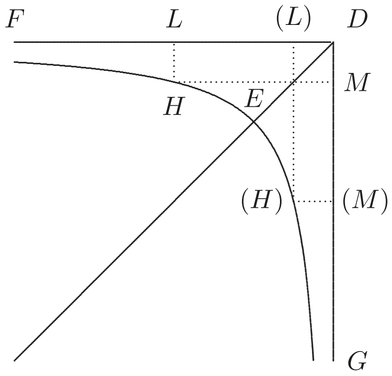


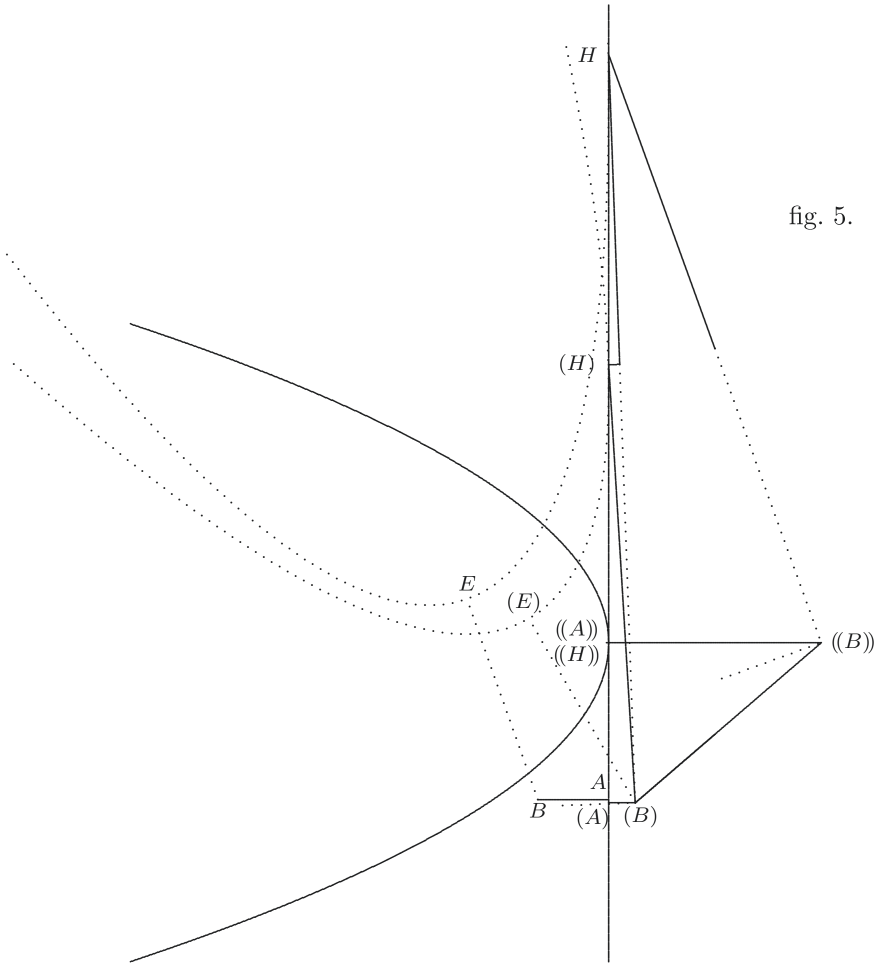
fig. 2.

Intelligatur alia haberi figura; cujus ordinatae sint velut AB, abscissae velut AC, vel contra: eam figuram manifestum est esse Hyperbolam. Sit enim in fig. 2. Hyperbola $H(H)$ rectum transversumque latus habens aequalia cujus centrum D. vertex E. asymptoti DF, DG angulum facientes rectum. Puncta $H, (H)$ unde ordinatae in duas asymptotos, HL vel $(H)(L)$ in DF, et HM vel $(H)(M)$ in DG. ita ut HL (: vel $(H)(L)$:) aequetur ipsi MD (: $(M)D$:) et HM (: vel $(H)(M)$:) aequetur ipsi LD (: $(L)D$:) ordinatae scilicet ad unam asymptoton abscissis: constat ex natura Hyperbolae, ipsas HM, $(H)(M)$ (: sive $LD, (L)D$:) esse in ipsarum $DM, D(M)$ (: vel $HL, (H)(L)$:) ratione reciproca. Itaque si ipsae HM aequentur ipsis AB, ipsas DM aequales fore ipsis AC. vel contra.

Sed haec quanquam vera sint, nondum video tamen quid ad figurae propositae descriptionem faciat Hyperbola. Ne tamen nihil dicamus, comminiscamur figuram quandam, etsi nec ipsam satis exploratam, cujus ope describi possit proposita. Forte enim ejus natura erit tractabilior.

Pone in fig. 5. curvam HE super plano $H(H)((H))$ volvi perpetuo contactu, et curvam puncto B constante descriptam esse talem, ut perpendiculares $(B)(A)$, et BA sint ipsis interceptis $(H)(A)$ vel HA reciproce proportionales. Tunc puncta B. erunt in curva quaesita cujus proinde habebitur descriptio. Sed quaeritur jam curva HE talis naturae ut sumto puncto certo in ipsa E, vel ab ipsa distante B. ab eo semper puncto ductae perpendiculares ad tangentes sint interceptis in tangentibus inter punctum occurrentis perpendicularis, et contactus curvae, reciproce proportionales. Sed hoc hyperbola non praestat, ut jam patebit.

3 f. H(H) ... aeqvalia *erg. L* 5 angulum ... rectum *erg. L* 7 (H)(M) :) *(1)* | ipsi *streicht Hrsg.* | *(2)* aeqvetur *L* 11–123,1 Sed ... fig. 3 *erg. L*

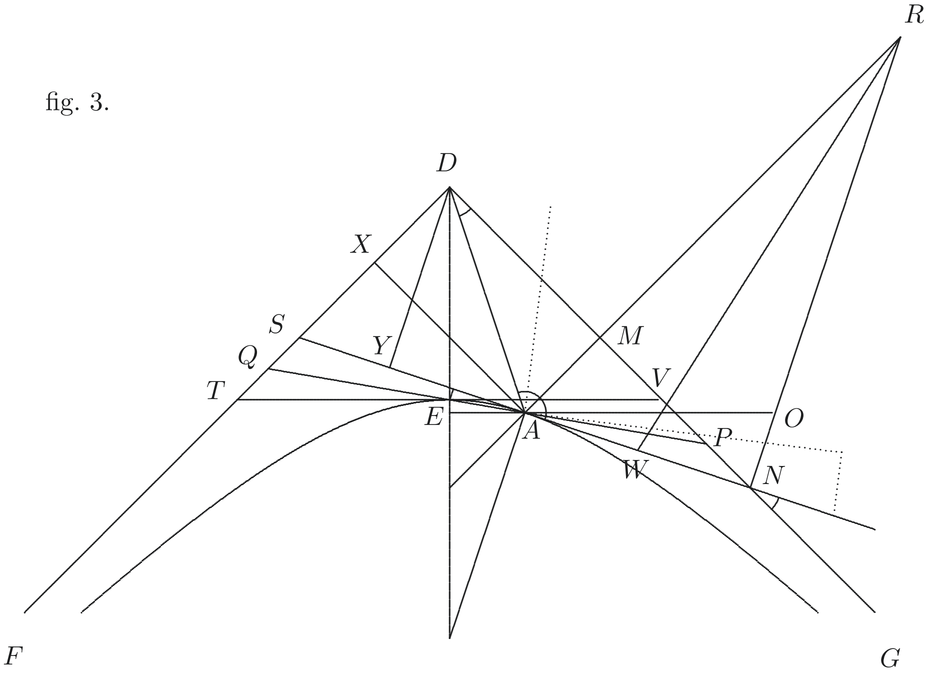


[*Fig. 3, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 3*: In der Vorlage ist der Punkt A nicht bezeichnet, der Punkt $((A))$ dagegen mit A. Die Figur weist eine Reihe von Linien in Blindtechnik auf, von denen einige offenbar verworfene Konstruktionsversuche darstellen. Diese werden nicht wiedergegeben, ebenso eine unkenntlich gemachte und teilweise vom Text (S. 121 Z. 15–22) überschriebene Vorstufe der Figur.

Nam fig. 3.[:]

fig. 3.



[*Fig. 4*]

Esto Hyperbola EAG[,] vertex E, centrum D. asymptotus DG. ad quam ordinata AM ex puncto Hyperbolae A. Tangens NA. occurrens asymptoto DG in N. Erit $MN \sqcap MD$. ex natura Hyperbolae. Ergo et $AN \sqcap AD$. et Triangulum DAN isosceles. Et Anguli $ADM \sqcap DNA$ item $DAM \sqcap NAM$. Jungatur EA. quae producta occurrat duabus asymptotis DF in Q. et DG in P. Erit per 8. sec. Apoll. $QE \sqcap AP$. Ex Tangente AN erigatur perpendicularis NR quae ipsi AM ordinatae productae occurrat in R. Erit

3 vertex E, *(1)* terminus *(2)* centrum *L* 4 Hyperbolae *(1)* A⟨—⟩. *(2)* |AH *ändert Hrsg.*|. Tangens *(a)* NAH *(b)* NA. occurrens *L*

2 *Fig. 4*: Der Punkt *A* ist in der Vorlage mit *AH* bezeichnet, im zugehörigen Text verwendet Leibniz bis auf eine Ausnahme jedoch *A*. 7 Apoll.: APOLLONIUS, *Conica*, II, 8; vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 219.

angulus ARN anguli ADG duplus. Quoniam anguli RAN et RNA aequales inter se simul aequantur angulo DAN. ergo angulus ARN duobus reliquis ADN et AND inter se aequalibus. Sed haec obiter. Quemadmodum et si tangens AN. alteri asymptoto DF occurrat in S, fore $AN \sqcap AS$. Ergo $AS \sqcap AD$. Triangulum ergo ADS isosceles. Jam angulus $DAS \sqcap$ angulo ARN. Nam ang. DAS est angulo DAN qui ei deinceps est, complemento ad duos rectos. At eidem angulo DAN in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DAN etiam duo anguli ADN et DNA simul sumti, id est angulus ARN. complemento ad duos rectos. Ergo ang. $ARN \sqcap$ angulo DAS. Ergo anguli ASD et $ADS \sqcap$ angulo DAN et ang. ASD vel $ADS \sqcap$ angulo DAM vel NAM, aut angulo RAN aut RNA. Triangula ergo ADS et RAN similia. Eritque ut DS ad DA vel AN, ita AN ad AR. Adeoque DA media proportionalis inter DS et AR.

Sit TEV tangens verticis E Asymptotis utrinque occurrens[,] erit (per theorem. 8. lib. 1. Wittii) TS ad SD ut NV ad VD.

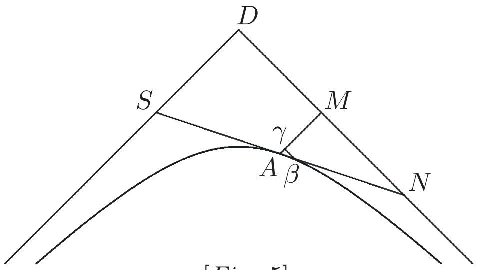
In recta AN, sumto puncto medio W. jungatur RW. Ob angulum WRA aequalem angulo ADM erit $\dfrac{DM}{AM} \sqcap \dfrac{RW}{WA}$. Ideoque $RW \sqcap \dfrac{1}{AW}$, seu sumtis diversis in curva punctis A. erunt RW in reciproca ratione ipsarum AW. vel contra. Eodem modo erit AX ad SX vel ad XD, sumto puncto X medio in recta SD et juncta AX, quae perpendicularis ad SD. et parallela asymptoto AX. Unde manifestum dudum XD et AX etiam esse alias alio sumto puncto A, reciproce proportionales. Sed quod unum volebam non evenit ut scilicet ducta ex D. perpendiculari in tangentem SA, nempe DY[,] sint ipsae DY ipsis AY reciproce proportionales. Et calculari facile potest valor ipsius DY respectu ipsius AY. nam $DY \smile YN \sqcap SD \smile DN \sqcap AM \smile MN \sqcap AM \smile MD$. Ergo $DY \sqcap YN \frown AM \smile MD$ seu $\dfrac{DY}{YN} \sqcap \dfrac{AM}{\dfrac{1}{AM}}$. Jam $YN \sqcap AY - AN \sqcap AY - AD \sqcap AY - \sqrt{AM^2 + \dfrac{1}{AM^2}} \sqcap AY -$

10 similes *L ändert Hrsg.* 13 ut *(1)* SA ad AN *(2)* NV *L*

---

1 duplus: Die Behauptung ist nicht richtig, die Winkel ARN und ADG sind gleich. Leibniz verwechselt in der folgenden Begründung den als rechten Winkel vorausgesetzten $\sphericalangle RNA$ mit dem kleineren $\sphericalangle RNM = \sphericalangle RAN = \sphericalangle RAD$. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Überlegung bis Z. 16. 13 Wittii: J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, *DGS* II S. 195 f. 23 $YN \sqcap AY - AN$: Richtig wäre $AY + AN$; der falsche Wert für YN und weitere Flüchtigkeitsfehler beeinträchtigen die Rechnung bis S. 125 Z. 3.

$\frac{\sqrt{AM^4+1}}{AM}$. Ergo $\frac{DY}{\frac{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}}{AM}} \sqcap \frac{AM}{\frac{1}{AM}}$, Ergo $\frac{DY}{AY \frown AM - \sqrt{AM^4+1}} \sqcap \frac{AM}{1}$. Ergo $\frac{AY \frown AM}{DY} \sqcap \frac{AM}{1} + \frac{\sqrt{AM^4+1}}{DY} [\sqcap] \frac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{DY}$. Ergo $\frac{AY}{\cancel{DY}} \sqcap \frac{AM \frown DY + \sqrt{AM^4+1}}{\cancel{DY}}$. sed satius rem reducere ad calculum analyticum: $DM \sqcap x$. $AM \sqcap \frac{a^2}{x} \sqcap DX$. Ergo $DS \sqcap \frac{2a^2}{x}$. $SN \sqcap \sqrt{\llcorner \frac{4a^4}{x^2} + 4x^2 \lrcorner} \sqcap \frac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}$. Hinc nullo negotio ut obiter dicam haberi potest absolute superficies curvae Hyperbolicae circa quamlibet Asymptoton volutae.



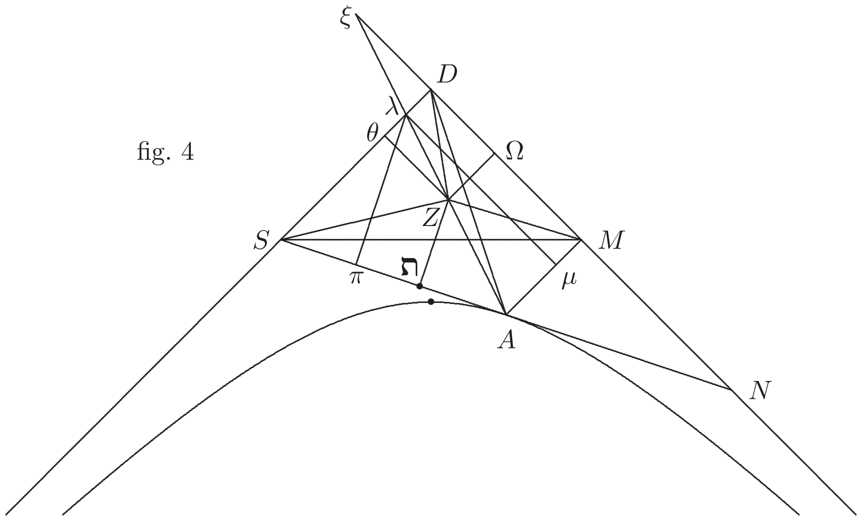
[Fig. 5]

Esto enim punctum quodlibet A. Triangulum characteristicum $\beta\gamma A$, erit $\frac{SN}{DN} [\sqcap] \frac{A\beta}{\beta\gamma}$. Ergo $SN \frown \beta\gamma \sqcap DN \frown A\beta$. sive Omn. $\frac{\cancel{2}\sqrt{a^4+x^4}}{x} \sqcap$ Omn. $A\beta \frown \cancel{2}x$. Jam Omn. $A\beta \frown x$. constituunt momentum Hyperbolicae curvae. Idem est pro altera asymptoto. Jam $AD \sqcap \sqrt{AM^2+DM^2} \sqcap \frac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Porro $\frac{SN}{DN} \sqcap \frac{DS}{DY}$ sive $DY \sqcap \frac{DN \frown DS}{SN} \sqcap \frac{2x \frown \frac{2a^2}{x}}{\frac{2\sqrt{a^4+x^4}}{x}} \sqcap \frac{2a^2x}{\sqrt{a^4+x^4}}$. $AD^2 - YD^2 \sqcap \frac{-4a^4x^2}{a^4+x^4} + \frac{x^4+a^4}{x^2}$ unde fiet $AY \sqcap$

2 f. $\sqcap \frac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\cancel{\mathrm{DY}}}$. | Ergo $\frac{\mathrm{AY}}{\mathrm{DY}} \sqcap \frac{\mathrm{AM} \frown \mathrm{DY} + \sqrt{\mathrm{AM}^4+1}}{\mathrm{DY}}$. *gestr.* | sed *L* 4 AM $\sqcap \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ *(1)*. AD $\sqcap \frac{\sqrt{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4}}{\mathrm{x}}$. $\mathrm{AD}^2 + \mathrm{AX}^2 \sqcap \mathrm{MD}^2$) $\sqcap \frac{\mathrm{x}^4+\mathrm{a}^4-\mathrm{x}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2} \sqcap \mathrm{DX}^2$ *(2)* $\sqcap$ DX *L* 12 $\frac{2\mathrm{ax}}{\sqrt{\mathrm{a}^4+\mathrm{x}^4}}$ *L ändert Hrsg.*

$\sqrt{\dfrac{-4a^4x^4 + \llcorner x^4 + a^4 \lrcorner \square}{x^2 \frown a^4 + x4}}$. DY erit ad AY ut $2a^2x^2$ ad $\sqrt{\llcorner\llcorner x^4 + a^4 \lrcorner \square \lrcorner - 4a^4x^4}$. Non sunt ergo in ratione reciproca.

Sed ne ope foci, aut etiam verticis Hyperbolae datae, aut alterius cujusdam, similis quaerere longo calculo necesse sit, videamus generaliter, an possibile sit punctum quoddam fixum invenire quod satisfaciat, ita ut inde demissae ad tangentes Hyperbolae perpendiculares, sint interceptis inter puncta communia tangentium et harum demissarum, et inter puncta curvae in quibus fit contactus reciproce proportionales.



[*Fig. 6*]

Esto punctum illud Z, fixum cujus distantia ab asymptoto, nempe $Z\Omega$ sit b. et ipsa $D\Omega$ sit c. et $DM[\sqcap]x$, et $AM \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. et $DS \sqcap \dfrac{2a^2}{x}$. $\Omega M \sqcap x \mp c$. $Z\daleth \sqcap z$. $A\daleth \sqcap \dfrac{e^2}{z}$. $AD \sqcap AN \sqcap AS \sqcap x + \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x}$.

1 $2ax^3$ *L ändert Hrsg.* 6 sint *(1)* int *(2)* abscissis *(3)* interceptis inter *(a)* punctum occursus *(b)* puncta *L*

11 $AD \ldots x + \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$: Richtig wäre $AD = \sqrt{x^2 + \left(\dfrac{a^2}{x}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{x^4+a^4}}{x}$. Den richtigen Wert hatte Leibniz S. 125 Z. 11 berechnet, den falschen Wert verwendet er wieder S. 128 Z. 2 für SA.

Quaeritur determinatio puncti ת seu magnitudo rectae $Z\text{ת}$. Sumitur DZ puncti Z distantia a puncto D[,] $\sqcap \sqrt{b^2+c^2}$ item ejus distantia a puncto M, seu $ZM \sqcap \sqrt{x^2 \mp 2xc + c^2 + b^2}$. $Z\theta \sqcap D\Omega \sqcap c$. Ergo $S\theta \sqcap \dfrac{2a^2 - bx}{x}$ $(DS - D\theta \sqcap 2MA - Z\Omega)$. $SZ \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2c^2 + 4a^4 - 4a^2bx + b^2x^2}}{x}$. $\dfrac{AM}{Z\Omega}$ seu $\dfrac{a^2}{x} \smile b \sqcap \xi M \smile \xi\Omega$ seu $\xi\Omega + \boxed{\Omega M} x \mp c \smile \xi\Omega$ fiet $a^2 \frown \xi\Omega - bx \frown \xi\Omega \sqcap bx^2 \mp bcx$, sive $\xi\Omega \sqcap \dfrac{bx^2 \mp bcx}{a^2 - bx}$ et erit $\xi D \sqcap \dfrac{x \mp c}{a^2 - bx}, \frown bx, \pm c$ et $\xi M \sqcap \xi\Omega + \Omega M \sqcap \dfrac{x \mp c}{a^2 - bx} \frown bx + x \sqcap \dfrac{\boxed{bx^2} \mp cbx + a^2x \boxed{-bx^2}}{a^2 - bx}$ et $A\xi \sqcap \sqrt{\xi M^2 + AM^2} \sqcap \sqrt{\dfrac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \dfrac{a^4}{x^2}}$, qui valor erit ad $A\lambda$, ut ξM ad x sive ut $\mp cb + a^2$ ad $a^2 - bx$. Ergo $A\lambda$ erit $\sqcap \sqrt{\dfrac{\mp cbx + a^2x}{a^2 - bx}\square + \dfrac{a^4}{x^2}} \frown \dfrac{a^2 - bx}{\mp cb + a^2}$ ubi vero nonnihil compendii haberi potest[,] nam fiet reducendo:

$$\frac{\sqrt{\mp cbx + a^2x, \square,, \frown x^2,,, + a^8 - 2a^6bx + a^4b^2x^2}}{\boxed{a^2 - bx,} \frown x, \frown \mp cb + a^2} \boxed{\frown a^2 - bx} \sqcap A\lambda.$$

Jam perpendicularis in tangentem sit $\lambda\pi$. Erit $\dfrac{\lambda\pi}{\pi A} \sqcap \dfrac{Z\text{ת}}{\text{ת}A} \sqcap \dfrac{z}{\dfrac{e^2}{z}} \sqcap \dfrac{z^2}{e^2}$. Ergo $\lambda\pi \sqcap \dfrac{z^2 \frown \pi A}{e^2}$. Jam $\lambda\pi^2 + \pi A^2$ sive $\dfrac{z^4 \frown \pi A^2 + e^4\pi A^2}{e^4} \sqcap A\lambda^2$. Ita habebitur valor ipsius πA per

---

1 *Am Rande:* Si generalis regula danda puncto positione dato omnia per calculum inveniendi adhiberi potest talis calculus quo Schotenius ex una data directrice caeteras invenit.

14 potest | qvalis *ändert Hrsg.* | calculus *L*

---

6 $\xi M \sqcap \xi\Omega + \Omega M$: In der folgenden Rechnung setzt Leibniz x statt $x \pm c$ für ΩM ein. Das Versehen beeinträchtigt die Berechnung von $A\lambda$ in Z. 10. 14 calculus: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178. Leibniz hat in seinem Handexemplar auf S. 177 Marginalien zum Text notiert und in der Figur einen Kurvenbogen ergänzt; vgl. dazu auch die Aufzeichnung *Mutatio aequationis curvae pro mutata directrice* (Cc 2, Nr. 1450).

z. Porro $D\lambda \sqcap \dfrac{Z\Omega \frown \xi D}{\xi\Omega} \sqcap \not b, \frown \dfrac{bx^2 \mp 2bcx \pm a^2c}{\not b x^2 \mp \not b cx}$. Ergo $\lambda S \sqcap \dfrac{2a^2}{x} - D\lambda$ at $\sqrt{\lambda S^2 - \lambda\pi^2} \sqcap S\pi$. Jam $S\pi + \pi A \sqcap SA \sqcap \dfrac{\sqrt{x^2+a^2}}{x}$. Hinc habebitur aequatio nova exhibens valorem ipsius πA per solas $a.\,b.\,c.\,e.\,x.\,z.$ Conferatur cum priore itidem per solas istas; et fiet aequatio quae dabit valorem ipsius z quaesitum conferendo hos duos ipsius πA valores.

Dato igitur puncto A repertum est punctum Z per calculum, ita ut ad tangentem $A\daleth$ inde ducta perpendicularis $Z\daleth$ sit valoris cogniti per $A\daleth$ divisi. Sed hoc non sufficit, necesse est enim determinatas. $b.\,c.\,d.$ ita explicari, si licet, ut facta explicatione omnes indeterminatae destruantur. Sed non possunt destrui ex valore ipsius z. Sed nondum satis res perspecta. Credo enim nunc, satis solutum problema. Quoniam enim ipsa quoque z. est indeterminata, non video quid obstet quo minus manentibus iisdem $b.\,c.\,e.\,a$, variari possint x.

Imo jam video quaesitas rectas esse $b.\,c.$ et valorem earum per duas indeterminatas z et x. hic haberi: Sed quaeritur determinatus seu semper idem. Igitur sumta b verbi gratia velut quaesita, caeterae, $c.\,a.\,e.$ ita pro arbitrio explicandae sunt; ut facta explicatione destruantur literae indeterminatae; sed non video quomodo hoc fieri possit, ob z. non elisam. Sed video erratum a me in inquirendi modo: Nimirum non est supponendum in Calculo $A\daleth \sqcap \dfrac{e^2}{Z\daleth}$ sed ex sumtis $D\Omega, Z\Omega, DM$, investigandae $Z\daleth$, $\daleth A$ cum sint determinatae, inventisque earum valoribus, facienda est aequatio cum hac $A\daleth \sqcap \dfrac{e^2}{Z\daleth}$, vel quod idem est ponatur valor unius aequalis quantitati e^2 constanti, per valorem alterum divisae, unde orietur aequatio, cujus ope quaeri poterit vel b vel c. Ordinetur secundum alterutrum, et quaeratur valor v. g. ipsius b. eoque sic invento tres reliquae arbitrariae, $c.\,e.\,a.$ ita explicentur, ut evanescat indeterminata. Quod variis modis possibilibus tentando, si possibile sit inveniemus.

Quod si idem alterius quoque curvae ope praestari possit; earum duarum curvarum dimensiones ad se invicem reducentur; cum productae figurae per unam aut per alteram futurae sint invicem proportionales. Unde intelligi potest fore curvas in quibus hoc sit

6 divisi *(1)* sed ut eadem maneat aeqvatio, eaedem literae, π *(2)* sed *L* 11 f. possint x. *(1)* Atqve jam videndum erit qvia b. a. e. c. in arbitrio an ita possint explicari *(2)* Imo *L* 12 video *(1)* puncta qvaesita esse non *(2)* qvaesitas *L* 18 $\frac{e^2}{Z\daleth}$ *(1)* qva aeqvatione reducta *(2)* vel *L* 21 duae *L ändert Hrsg.*

impossibile futurum sequitur etiam novam ita atque admirandam sane haberi methodum curvas diversas reducendi ad se invicem.

Illud quoque considerandum: Problemata talia de punctis fixis nova esse nec quod sciam hactenus proposita. Si quis porro curvam quaerat in qua sine ullo calculo ex aliquo puncto fixo jam in ipsa curva dato, ut vertice, centro, polo, centro gravitatis, vertice aliove puncto alterius cujusdam curvae similis, aut etiam cognatae veluti centro circuli generatoris, etc. hoc eveniat; is eo ipso simpliciorem quandam descriptionem propositae curvae repererit.

Caeterum si punctum describens non sit fixum, sed mutabile potest tamen ope ejus describi curva nostra, modo jam non ut hactenus recta a puncto contactus curvae describentis ad punctum respondens curvae descriptae; pro perpendiculari curvae descriptae habeatur; sed recta perpendicularis ad rectam duos puncti describentis situs, seu duo curvae puncta proxima jungentem, quae Tangenti curvae describentis regulae ita occurrat; ut rectae inter punctum occursus perpendicularis ad curvam descriptam (quod jam aliud a puncto contactus curvae describentis et plani in quo volvitur) et punctum ordinatae ex curva descripta ad planum vel potius ad rectam seu regulam in qua fit volutio interceptae sint ordinatis ipsis reciproce proportionales. Hinc rursus patet mobilitatem punctis B, (vide fig. 5) tam variis modis posse fingi, ut plurimarum curvarum ope eadem descriptio habeatur; et quod hinc sequitur eae curvae reducantur ad se invicem. Videndum itaque in primis in hoc exemplo: an ne idem praestari possit ope curvarum: Circularis, (descripta quadam quasi cycloeide) parabolicae, (descripta quasi Trochoeide parabolica) Ellipticae, Hyperbolicae; ita enim sequeretur omnes illas curvas ad se invicem reduci, et omnium curvarum conicarum dimensionem, et per consequens et Hyperbolae quadraturam ex quadratura Circuli pendere: mira profecto inquisitionis ratione.

Hinc apparet quantam dent lucem novae ejusmodi et intentatae inquisitiones.

Superest inquirendum an alia quoque problemata intractabilia seu methodi Tangentium inversae reduci possint ad curvarum in rectum extensiones; hoc enim posito non analytice quidem at geometrice tamen habentur soluta. Sed de hoc scheda peculiari.

2 f. invicem. *(1)* Sed et anteqvam hinc abeamus notandum est *(2)* Illud *L* 4 hactenus | in usum aut *gestr.* | proposita *L* 13 describentis *(1)* plano *(2)* regulae *L* 14 inter *(1)* punctum contactus | curvae describentis *erg.* | et occursus | perpendicularis *erg.* | interceptae sint ordinate *(2)* punctum *L* 16 f. volutio *(1)* | sit *streicht Hrsg.* | ipsi ordinat *(2)* interceptae *L*

18 fig. 5: s. o. Fig. 3. 28 scheda peculiari: N. 16.

Caeterum si quando ejusmodi methodus inversa Tangentium qualis hic exemplum dedi succedat analytice, ut in eo exemplo, ubi quaesivi crementa ordinatis reciproce proportionalia, (quod evenit in parabola) tunc etiam reduci potest problema ad alterius curvae volutionem; imo plurium diversarum; quarum omnium proinde habebitur dimensio. Videndum an qualibet figura data alia haberi possit cujus volutione describatur, uti data qualibet analytica alia haberi potest cujus evolutione describatur: Cum volutio et evolutio ita differant ut in volutione censentur planum immotum, et curva moveri, at in evolutione contra curva immota et planum moveri; sumto utrobique puncto fixo (vel etiam certa ratione mobili) describente.

3 ad *(1)* aliud simile *(2)* alterius *L*

2 exemplo: s. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, dat. Dezember 1674, VII, 3 N. 39 S. 560–562. 5 Videndum: vgl. N. 17 Teil 2.

16. PROBLEMATA METHODI TANGENTIUM INVERSAE

[1. – 24.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 1/3 S. Geringe Textverluste durch Randschäden.
Cc 2, Nr. 824

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück schließt unmittelbar an N. 15 an.

Xb. 1674.

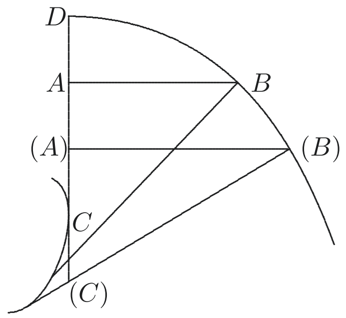
Problemata Methodi Tangentium inversae ad Geometricas constructiones reducta per applicationes curvarum.
Adde eodem mense Schediasma:
De Methodo Tangentium inversa exemplum
cujus schediasmatis istud velut continuatio est:

Schediasmate illo ostendi quomodo omnia problemata methodi tangentium inversae, reducantur ad constructiones Geometricas (: per applicationes curvarum ad planum :) in quibus functio aliqua datur ex data ordinata; nulla abscissae mentione. Superest ut indagemus casus in quibus functio aliqua datur ex data abscissa nulla ordinatae mentione. Quod fit quotiescunque quaeritur aliqua quadratura. Haec problemata semper aut saltem plerumque reduci possunt ad duas radices aequales; sed difficilius ad constructiones Geometricas at priora facilius ad constructiones Geometricas, at non nisi per ipsas ad Calculum duarum radicum aequalium.

Quaeritur curva $B(B)$ ita ut sumta directrice $DA(A)$ ductisque ordinatis seu perpendicularibus ad directricem $AB, (A)(B)$ et perpendicularibus ad curvam, $BC, (B)(C)$ ipsae AC sint ipsis $DA, D(A)$ (: sumto quodam puncto D constante sive fixo in recta

8 f. problemata ... curvarum *erg. L*

11 *De ... exemplum*: N. 15.



[*Fig. 1*]

directrice :) reciproce proportionales. Dubium nullum est pendere hoc problema ex quadratura Hyperbolae, vel ex volutione aut evolutione curvae parabolicae. Quorum prius ⟨statim⟩ ostendit analysis inventorum meorum, posterius patet ex inventis Heuratii sed per synthesin. Quod si ergo generaliter ex data relatione ipsarum AC ad ipsas AD inveniri potest curva construens; poterunt omnes quadraturae reduci ad extensiones curvarum quo post ipsas quadraturas analyticas nihil magis optem in Geometria; ita enim omnes quadraturae Geometrice habebuntur. Loco autem volutionum videntur hic adhibendae evolutiones.

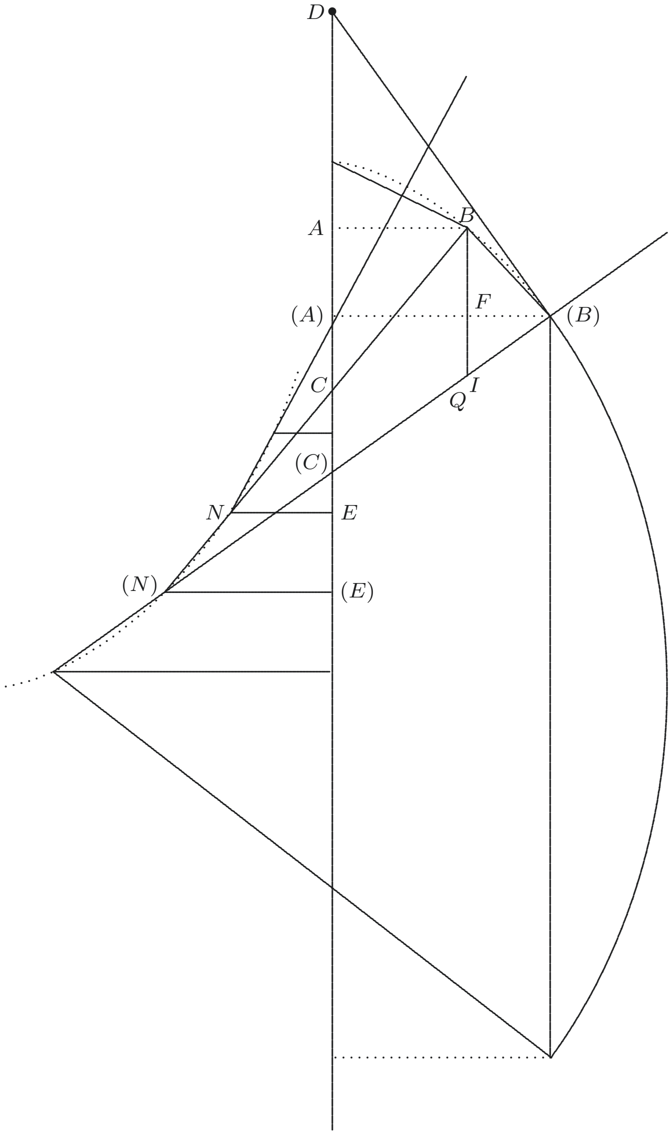
---

2 *Nebenbetrachtung:* $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a}{\frac{1}{a}}$. Ergo $\frac{a}{b} \sqcap \frac{a^2}{1}$. $\frac{e}{f} \sqcap \frac{a^2}{1}$. Ergo ⟨ita⟩ $e \sqcap \frac{a^2 f}{1}$. Ergo $e \sqcap \frac{a^2}{\frac{1}{f}}$.

6 ad *(1)* constructiones curv *(2)* extensiones *L*

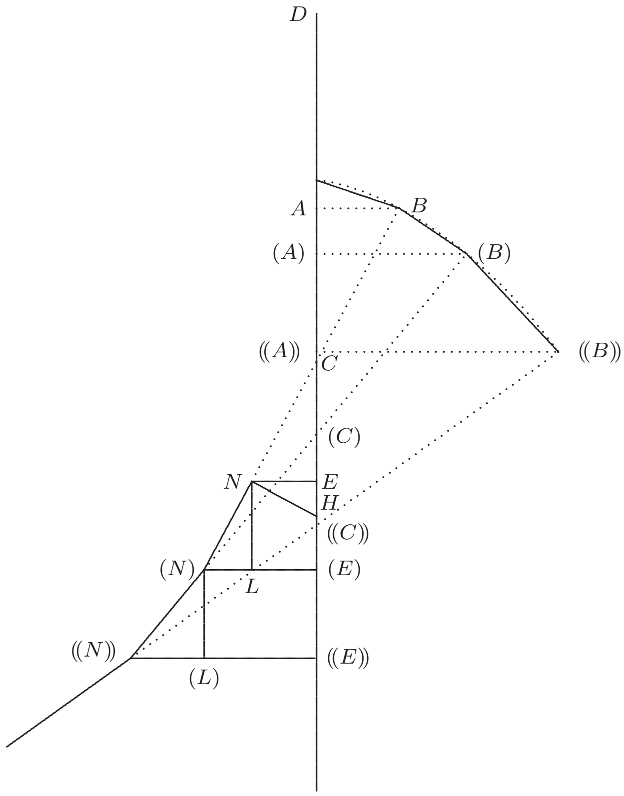
---

4 inventorum meorum: Leibniz untersucht die Rollkurve der Parabel in VII, 3 N. 38_{11-14}; vgl. im vorliegenden Band N. 19 sowie Cc 2, Nr. 827. — ex inventis Heuratii: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 520.

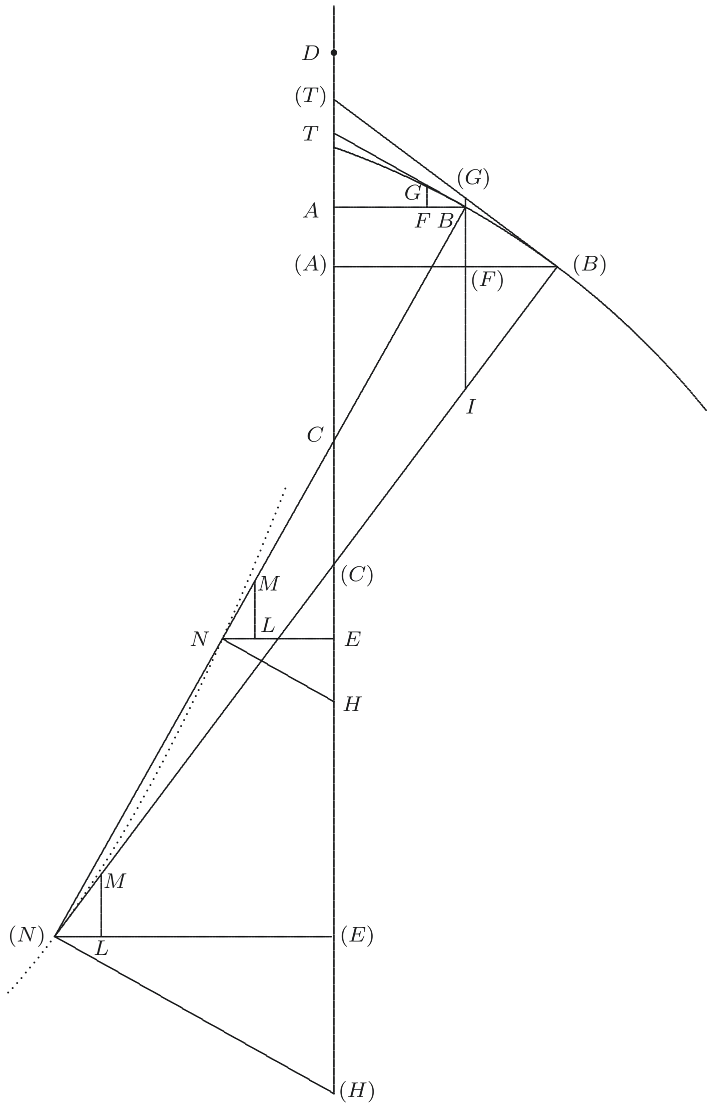


[*Fig. 2a, tlw. Blindzeichnung*]

1 *Fig. 2a*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.



[*Fig. 2b, tlw. Blindzeichnung*]



[*Fig. 2c*]

1 *Fig. 2c*: Leibniz orientiert sich an der Figur in Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 83; er verwendet wie Huygens in der Figur und im zugehörigen Text als Bezeichnung für die Punkte der Evolute zunächst $D, (D)$ und ändert dann zu $N, (N)$.

Esto curva cujus puncta $N(N)$ et alia cujus puncta $B(B)$, directrix utrique communis DAE. Ordinatae prioris NE, posterioris BA, perpendiculares prioris NH posterioris BC. Tangentes prioris NC posterioris BT. et $N.C.B.$ puncta sunt in una recta ex hypothesi, ideoque BT et NH parallelae. Porro investigemus ante omnia relationem quae est inter $E(E)$ et $A(A)$.

Omnes primas nempe has: $\begin{matrix} NB. & NC. & NE. & N(N). & E(E) \\ b & c & e & n & \lambda \end{matrix}$ ponamus cognitas, (hic negliguntur signa includentia ob infinitas parvitates): $EC \sqcap \sqrt{c^2 - e^2}$. Jam $N(N)$ ad $E(E) \sqcap \lambda$ ut c ad $\sqrt{c^2 - e^2}$. Ergo $N(N) \sqcap n \sqcap \dfrac{\lambda c}{\sqrt{c^2 - e^2}}$ et $AB \sqcap e \frown \dfrac{CB}{NC} \sqcap [e \frown]$ $\dfrac{b-c}{b}$. Rectas DA ponamus datas $\sqcap$ x. et rectam $A(A)$ vel $(A)((A))$ semper eandem

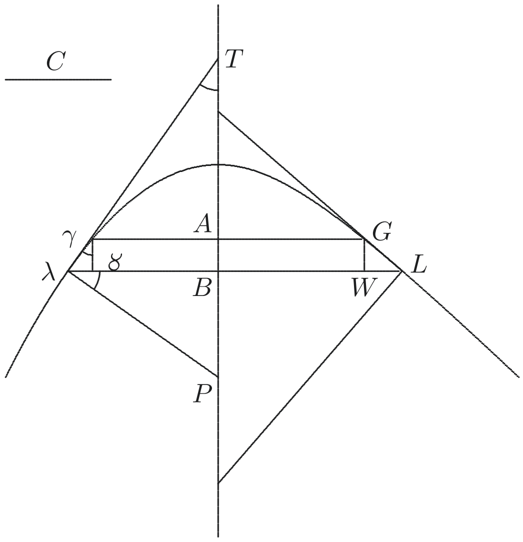
1 puncta *(1)* D(D) *(2)* N(N) *L* 5 f. et A(A). *(1)* | Sane *erg.* | Esto NB $\sqcap$ b. N(N) $\sqcap$ n. fiet: *(a)* NB vel N(B) $\sqcap$ b + $\dfrac{\mathrm{yn}}{\mathrm{b}}$ sive b + ✤n *(aa)* $\dfrac{\mathrm{e}}{\mathrm{n}} \sqcap \dfrac{\mathrm{C(E)}}{}$ *(bb)* $\dfrac{\mathrm{E(E)}}{\mathrm{N(N)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{C(E)}}{\mathrm{CN}}$ qvae CN velut data appelletur c, et fiet C(E) $\sqcap \dfrac{\mathrm{E(E)} \frown \mathrm{c}}{\mathrm{N(N)}}$ datur porro et CB $\sqcap$ ǂb ‡ c. Datur et NE $\sqcap$ ν unde scilicet calculum incipimus. datur ergo et AB. Nam est $\dfrac{\mathrm{AB}}{\mathrm{NE} \sqcap \nu} \sqcap \dfrac{\mathrm{CB} \sqcap ǂ\mathrm{b} ‡ \mathrm{c}}{\mathrm{c} \sqcap \mathrm{NC}}$. Ergo AB $\sqcap$ ǂb‡c,$\frown$ *(aaa)* $\dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{c}}$ *(bbb)* $\dfrac{\mathrm{N(N)}}{\mathrm{C}}$ sit B(B) $\sqcap$ β. *(aaaa)* | NL $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | λ *(bbbb)* | E(E) $\sqcap$ λ. *streicht Hrsg.* | Rectius ita | Porro cum Triangula NL(N) et CEN sunt similia erit $\dfrac{\mathrm{N(N)}}{\mathrm{N(L)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{NC} \sqcap ¢}{\dfrac{\mathrm{E(E)} \frown ¢}{\mathrm{N(N)}}}$ *erg. u. gestr.* | *(2)* omnes *L* 6 f. cognitas, *(1)* | erit CE ad EN *streicht Hrsg.* | (hic negliguntur signa includentia ob infinitas parvitates) ut NL $\sqcap$ E(E) $\sqcap$ λ ad (N)L, seu λ ad $\sqrt{\mathrm{n}^2 - \lambda^2}$ sive EC $\sqcap \dfrac{\lambda \mathrm{n}}{\sqrt{\mathrm{n}^2 - \lambda^2}}$ Jam alias EC $\sqcap \sqrt{\mathrm{c}^2 - \mathrm{e}^2}$ *(2)* (hic ... parvitates) | : *erg. Hrsg.* | EC $\sqcap \sqrt{\mathrm{c}^2 - \mathrm{e}^2}$ *L* 8 NL $\sqcap$ λ *L ändert Hrsg.* 9 $\dfrac{\mathrm{b-c}}{\mathrm{b}}$ *(1)* demonstravit jam Hugenius: *(a)* rectam A(A) esse *(b)* cum recta A(A) sit ad rectam C(C) in composita ratione ex rationibus *(2)* Rectas *L*

18 demonstravit jam Hugenius: Chr. Huygens, *a. a. O.*, S. 82; vgl. die zugehörigen Randbemerkungen von Leibniz in VII, 4 N. 2 S. 35 f.

esse β. et rectam AC vel $A(C)$ semper dari $\sqcap$ y, dabitur et semper $C(C)$ vel $(C)((C))$ appellanda ω. Datur recta DA vel $D(A)$. Datur $A(A)$ $\sqcap$ $(A)((A))$ etc. Datur et recta AC, vel $(A)(C)$. Datur ergo et $D(C)$ vel $D\langle—\rangle$. Quaeritur valor ipsius NE vel $(N)(E)$. quam ponamus datam, ponamus et datam longitudinem cujuslibet NB, et progressionem ipsarum $N(N)$ atque ex sumtis omnibus NB, NE, DA, eorumque differentiis $N(N), NL, A(A)$ quaeratur AC. Esto $NE \sqcap y$. $DE \sqcap x$. $EC \sqcap l$. $NC \sqcap \sqrt{y^2+l^2}$. $E(E) \sqcap NL \sqcap \lambda$. Ergo $N(N) \sqcap \dfrac{NC \frown \lambda}{l}$. Breviter res huc redit, ex data relatione AC ad DA, quaeritur relatio ipsarum AB ad DA, quae inveniretur inventa relatione ipsarum NE ad DE. et ponendo N. esse puncta curvae cujus evolutione describatur curva punctorum B. Itaque omissis tantisper ipsis AB quaeramus NE ex DA et AC. Quod ut fiat facilius inverso modo sumta NE et ejus producta EC inde quaeramus AC. Ejus inventae valorem conferendo cum valore ejus jam noto eliminabitur prod⟨ucta⟩ l. et habebitur NE. ex DA. Sed hoc procederet ita si ad inveniendam AB ex NE, non opus esset valore NB seu curvae N in rectum extensione. Qua cum opus sit habebitur aequatio trium incognitarum DA. NB. NE. Non ergo sic haberi exitus potest.

Sit curva GL cujus ordinatae AG. BL. Triangulum characteristicum GWL. Sit alia curva $\gamma\lambda$, cujus o⟨rdi⟩natae $A\gamma, B\lambda$. $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ characteristicum $\gamma\eth\lambda$. Pone esse rectam constantem $[C]$ et rectangulum $C \frown \gamma\lambda \sqcap BL \frown AB$ erunt Elementa Curvae homogenea Elementis figurae $GABLG$ et rectangulum sub curva et recta C. aequale spatio figurae

1 f. appellanda ω. *(1)* | porro *streicht Hrsg.* | $\dfrac{\mathrm{C(C)}}{\mathrm{A(A) \sqcap B(F)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{C(C)}} \sqcap \dfrac{\mathrm{BI}}{\mathrm{BF \sqcap A(A)}} \frown \dfrac{\mathrm{BF \sqcap A(A)}}{\mathrm{C(C)}}$ *(a)* Sunt autem *(b)* Est autem $\mathrm{(A)(C) \frown A(A)} \sqcap \dfrac{\mathrm{(A)(B)^2 - AB^2}}{2}$ et $\mathrm{FB} \sqcap \mathrm{(A)(B) - AB}$ *(aa)* erit $\mathrm{FB^2} \sqcap \mathrm{(A)(B)^2 - 2(A)(B) \frown AB}$ *(bb)* Ergo $\dfrac{\mathrm{(A)(C) \frown A(A)}}{\mathrm{FB}} \sqcap \dfrac{\mathrm{(A)(B) + AB}}{2} \sqcap \dfrac{\mathrm{2AB + FB}}{2}$. Ergo $\mathrm{AC} \frown \mathrm{A(A)} \sqcap$ | 2 *gestr.* | $\mathrm{AB \frown FB}$ seu $\dfrac{\mathrm{AC}}{\mathrm{AB}} \sqcap \dfrac{\mathrm{FB}}{\mathrm{A(A)}}$ sed hoc dudum scimus. Jam ut tandem ad calculum sive ratiocinationem veniamus *(aaa)* CI *(bbb)* $\mathrm{2(A)(C) \frown A(A)} \sqcap \mathrm{(A)(B)^2 - AB^2}$. Jam $\mathrm{FB^2}$ *(aaaa)* $\sqcap \mathrm{(A)(B)^2} - 2$ *(bbbb)* $\sqcap$ *(aaaaa)* $\mathrm{AB^2 + AB}$ *(bbbbb)* $\boxed{\mathrm{AB^2}} + \mathrm{2AB \frown FB} \boxed{\mathrm{+FB^2}} \boxed{\mathrm{-AB^2}}$ *(2)* Datur L 7 $\sqcap \dfrac{\mathrm{NC} \frown \lambda}{\mathrm{l}}$. *(1)* porro NB *(a)* datur *(b)* supponitur dari appelletur ξ *(2)* Breviter L 10 NA L *ändert Hrsg.*



[*Fig. 3*]

respondenti. Haec ex Heuratii invento. Quaeritur ergo data figura invenire curvam ei homogeneam seu methodus inveniendi [curvam] cujus Elementa sunt in data progressione.

$\dfrac{\lambda\gamma}{\beta} \sqcap \dfrac{\lambda P}{\lambda B}$. Ergo $\lambda B \sqcap \dfrac{\beta \frown \lambda P}{\lambda\gamma}$. sive $\dfrac{\lambda B}{\lambda P} \sqcap \dfrac{\text{♉}\gamma}{\lambda\gamma}$.

Problema ergo huc redit, data ratione perpendicularis ad ordinatam, invenire curvam. Problema illi simile, quod resolvi posse ostendi data ratione ordinatae λB ad reductam BP invenire curvam, imo alterum ad alterum potest reduci. Nam $\lambda P \sqcap \lambda B \frown \dfrac{\lambda\gamma}{\beta}$. Ergo $BP \sqcap \sqrt{\lambda B^2 \frown \dfrac{\lambda\gamma^2}{\beta^2} - \lambda B^2} \sqcap \dfrac{\lambda B}{\beta} \frown \sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}$, itaque erit $\dfrac{BP}{\lambda B} \sqcap \dfrac{\sqrt{\lambda\gamma^2 - \beta^2}}{\beta}$. datur ergo ratio $\dfrac{BP}{\lambda B}$. Problema ergo huc redit dato Triangulo characteristico invenire

4 $\dfrac{\lambda \mathrm{B}}{\lambda \mathrm{P}} \sqcap \dfrac{\lambda \mathrm{P}}{\lambda\gamma}$ *L ändert Hrsg.*

2 ex Heuratii invento: H. v. HEURAET, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 518.

curvam. Imo jam video errorem cum $\lambda\gamma$ non detur nisi relatione ad quasdam abscissas hinc non potest dici dari rationem. Caeterum hinc apparet rem esse aeque difficilem data figura $GABLG$ invenire quadraturam, seu data $\lambda\text{♉}$ invenire λB; et data figura invenire curvam homogeneam seu data $\lambda\gamma$ invenire λB.

Ut per trochoeides solvi possint problemata methodi tangentium inversae, necesse est sine ulla abscissa ex sola ordinata caeteras Trianguli characteristici haberi nempe λB.

Quaerenda est methodus quaedam data figura quaerendi curvam homogeneam licet non analyticam, nam de Analytica res succedere generaliter non potest.

8 non *(1)* Geometricam, nam de Geometrica *(2)* analyticam *L*

17. METHODI TANGENTIUM INVERSAE EXEMPLUM SEU INQUISITIO IN METHODUM QUA CARTESIUS INVENIT PROPRIETATES SUARUM OVALIUM LIB. 2. GEOM.

[1. – 24.] Dezember 1674

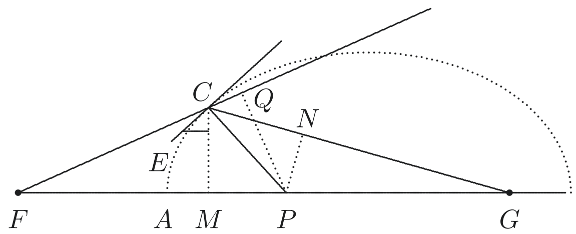
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 1–4. 2 Bog. 2°. 7 S. Bl. 4 v° leer. 2 Teile (Teil 1 auf Bl. 1–2, Teil 2 auf Bl. 3–4). Zusammenhang der Teile durch Kustode gesichert.
Cc 2, Nr. 832

Datierungsgründe: Auf das vorliegende Stück wird in der Studie N. 18 vom 24. Dezember 1674 zurück verwiesen.

[*Teil 1*]

Xb. 1674.

Methodi Tangentium inversae exemplum seu inquisitio in Methodum qua Cartesius invenit proprietates suarum ovalium lib. 2. *Geom.*



[*Fig. 1*]

---

12 *Darunter:* Adde alia huc pertinentia de descriptione trochoidis curvae.

12–14 *(1)* Methodus Tangentium inversa *(2)* Methodi ... *Geom. erg. L*

---

13 Methodum: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 50–65, sowie im vorliegenden Band N. 3, 4 u. 14. 15 *Fig. 1*: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43. 16 huc pertinentia: vgl. N. 18 u. N. 19 sowie VII, 3 N. 39 S. 557 f. u. S. 572–574.

Esto Curva AEC, directrix $FAMPG$. ordinata CM. perpendicularis CP. recta ex puncto determinato F ducta ad punctum curvae quodlibet FC. et ab alio puncto determinato ducta CG. Ex P. ducatur perpendicularis ad FC, nempe PQ. et alia ad GC. nempe PN. Ponatur jam evenire, ut PQ sit ad PN, in data ratione $\underline{d}$ ad $\underline{e}$. Ac proinde, ut a Cartesio in dioptricis ostensum est, si AEC sit superficies ex vitro, omnes radios ex puncto F ad quodlibet curvae punctum C. tendentes, refractum iri ad G. posito d ad e esse rationem quae refractiones metitur. Quaeritur jam quaenam sit curva hujus naturae.

Cum Cartesio AM vocemus y. et FC vocemus $c+z$. Esto $AF \sqcap f$. Ergo $FM \sqcap f+y$, $GA \sqcap b$. Triangula rectangula PFQ et CMF similia sunt unde $\dfrac{CF}{CM} \sqcap \dfrac{FP}{PQ}$ unde $PQ \sqcap \dfrac{FP \frown CM}{CF}$. Item $\bigtriangledown^{\text{la}}$ rectangula PNG et CMG. Unde $PN \sqcap \dfrac{GP \frown CM}{CG}$. $CM \sqcap \sqrt{\begin{array}{l} z^2+2cz+c^2-y^2-2fy. \\ \qquad\quad -f^2 \end{array}}$

$$\frac{PQ}{PN} \sqcap \frac{d}{e} \sqcap \frac{FP \frown \cancel{CM}}{CF} \smile \frac{GP \frown \cancel{CM}}{CG} \sqcap \frac{FP \frown CG}{CF \frown GP} \sqcap \frac{d}{e}.$$

Jam $FP \sqcap f+v$. $MG \sqcap b-y$. $CG^2 \sqcap \begin{array}{l} z^2+2cz+c^2 \\ \qquad\qquad -f^2 \end{array} \boxed{-y^2} -2fy+b^2-2by\boxed{+y^2}$.

$GP \sqcap b-v$. Ergo $e, \frown f+v, \frown \sqrt{\begin{array}{l} z^2+2cz-2fy+c^2 \\ \qquad\quad -2b\,.. \; -f^2 \\ \qquad\qquad\qquad -b^2 \end{array}} \sqcap c+z, \frown d, \frown b-v$ sive

$$\begin{array}{l} z^2 + 2cz - 2fy + c^2 \\ \qquad\quad -2b\,.. \; -f^2 \\ \qquad\qquad\quad -b^2 \end{array} \sqcap \frac{c+z, d, b-v}{e, f+v}, \square. \quad \odot$$

10 $\sqcap \dfrac{\mathrm{GP} \frown \mathrm{CM}}{\mathrm{CG}}$. *(1)* FM $\sqcap$ f *(2)* CM $\sqcap$ *(a)* $\boxed{c^2} - 2cz + z^2 \boxed{-c^2} - 2cy - y^2$ *(b)* c^2 *(c)* $2z^2 - 2$ *(3)* CM *L*

5 in dioptricis: Descartes behandelt die Ovale in der *Dioptrique* nicht, sondern erwähnt sie nur kurz (s. R. Descartes, *La Dioptrique*, 1637, S. 110, bzw. *Dioptrice*, 1644, S. 166; *DO* VI S. 125 bzw. 629 f.). Leibniz bezieht sich vermutlich auf Descartes' Hinweis zum Brechungsgesetz in der *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 58. 8–12 Cum Cartesio ... $\sqcap \frac{d}{e}$: vgl. *a. a. O.*, S. 57–59. Leibniz bezeichnet allerdings die Größe AF sowohl mit c wie mit f. 16 $-b^2$: Es müsste $+b^2$ heißen. Der Fehler geht in die Gleichung $\odot$ und über sie in die Überlegungen bis S. 142 Z. 13 ein. Leibniz stellt keinen Fehler fest, da er die Betrachtung ins Qualitative wendet.

Jam $CM^2 + MP^2 \sqcap CP^2$, sive $z^2 + 2cz\boxed{-y^2} - 2fy + \begin{matrix} c^2 \\ -\,f^2 \end{matrix} + v^2 - 2vy\boxed{+y^2} \sqcap s^2$ ponendo $CP \sqcap s$. Porro his duabus aequationibus junctis elidi poterit y nempe ex priore

$$y \sqcap \frac{\begin{array}{l} -\dfrac{c+z, d, b-v,}{e, f+v,}\square,, +c^2+z^2+2cz \\ \qquad\qquad\qquad\quad -\,f^2 \\ \qquad\qquad\qquad\quad -\,b^2 \end{array}}{+2f+2b}.$$

Quo valore in posteriorem inserto aequationem, sola incognitarum Capitalium restabit z. Ordinetur ergo aequatio secundum z, ubi duae erunt incognitae incidentes v. et s. quae invenientur conferendo aequationem productam (post elisam y) cum aequatione duarum radicum aequalium $z^2 - 2ez + e^2$. Atque ita invenietur v, quod sufficit. Inventus valor ipsius v. inseratur in aequatione ⊙. et habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z et y, nempe capitales, et habebitur aequatio naturam explicans figurae quaesitae, unde et modus eam describendi non difficulter habetur. Ex his apparet inquisitionem istam methodi tangentium inversae esse ex facillimis, reducitur enim ad aequationem unius incognitae capitalis ad duas radices aequales determinandae, duabus existentibus incognitis incidentibus. Eadem methodo non dubitem, quae a Cartesio omissa sunt.

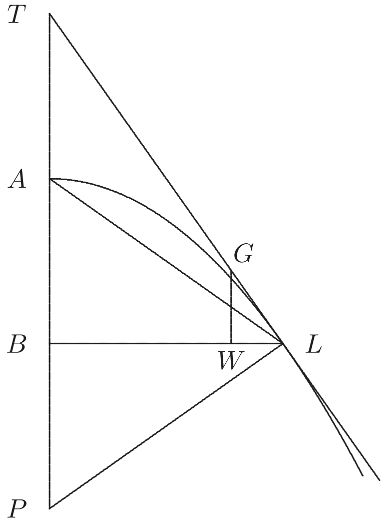
Scilicet cum una ex vitri superficiebus data est, modo illa sit aut plana, aut a circulo aut sectionibus Conicis effecta, quomodo altera superficies confici debeat, ut omnes radios ab uno puncto venientes rursus ad aliud punctum colligat. De quo ille[:] *malo alios id quaerere, ut si aliquid adhuc negotii inter investigandum repererint, eo pluris inventionem rerum hic demonstratarum aestiment.*

Ego ita arbitror, id quaerendum potius, ut superficiem in qua non tantum id in uno puncto dato contingat, sed ut caetera quoque puncta parum inde dissita quam proxime ejusdem sint naturae, id est in alio puncto sensibili omnes radios colligant. Et quaerenda est ejusmodi circularium compositio, quae id proxime praestet. Quoniam autem refractiones sunt inaequales, ut a Neutonio demonstratum est, hinc omni cura in id incumbendum, ut specula ad rem pertinentia elaborentur, eaque quod sufficere arbitror circularia. In-

11 capitalis *(1)* ad methodum tangentium inversam reducendae *(2)* ad *L* 17 repererint *(1)* tanto magis *(2)* eo *L*

8 habebitur: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10. 13 a Cartesio omissa: vgl. *a. a. O.*, S. 57, 59 u. 65. 14–18 Scilicet ... *aestiment*: vgl. *a. a. O.*, S. 65. 23 a Neutonio: vgl. I. Newton, *New theory about light and colours*, in: *Philosophical Transactions* VI, Nr. 80 vom 19./29. Februar 1671/1672, S. 3075–3087, insbesondere S. 3079 und S. 3081.

quirendum etiam an inaequalitas refractionis ad regulam revocari possit, et figura aliqua ei accommodari. Sed in haec alias inquiremus, nunc ad Methodum Tangentium inversam redeo; quam nemo hactenus tradidit; cum sit tamen apex Geometriae.



[*Fig. 2*]

Exempli causa quaeritur figura, in qua c r e m e n t a sint in ratione ordinatarum reciproca seu $WL \sqcap \dfrac{\beta a}{y}$. $BL \sqcap y$. $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BP}{BL \sqcap y}$ sive $\dfrac{\frac{\beta a}{y}}{\beta} \sqcap \dfrac{BP}{y}$. unde $BP \sqcap a$. Quaerenda ergo est figura in qua BP sit semper constans; hoc per quadraturas nullo negotio fit, quia Methodus tangentium inversa reducitur ad quadraturas. Nam semiquadrata ipsarum BL sunt summae omnium BP. Sed ut sine quadraturis idem tentemus

5 qva *(1)* diffe *(2)* c r e m e n t a *L* 6 seu *(1)* WL $\sqcap \dfrac{\beta a^2}{y^2}$. ponendo BL $\sqcap$ y. *(a)* W *(b)* $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BP}{BL \sqcap y}$, erit: $\dfrac{\frac{\beta a^2}{y^2}}{\beta} \sqcap \dfrac{BP}{y}$ sive $\dfrac{a^2}{y} \sqcap$ BP *(2)* WL *L*

2 alias: Eine solche Untersuchung wurde bisher nicht gefunden. 5 f. figura ... reciproca: vgl. VII, 3 N. 39 S. 560–562.

fiet jam $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Item: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Pro y^2 in posteriore substituatur ejus valor ex priore, nempe $s^2 - a^2$, et fiet, $v^2 - 2vx + x^2 \boxed{+s^2} - a^2 \sqcap \boxed{s^2}$. In qua cum s. destruatur, et hoc unum restet, esse scilicet $v - x$ aequale ipsi a. patet nihil hinc duci posse.

Ponatur ergo $WL \sqcap \gamma$. constans, erit $BP \sqcap \dfrac{WLy}{\beta} \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}y$. Adeoque $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$. Jam etiam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$. Unde $y^2 \sqcap s^2 - v^2 + 2vx - x^2$ et supra $y^2 \sqcap \dfrac{s^2}{\dfrac{\gamma^2}{\beta^2} + 1} \sqcap \dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2}$ et aequatio fiet nova inter hos duos valores, nempe: $x^2 - 2vx + \begin{array}{l} v^2 \\ - s^2 \\ + \dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \end{array} \sqcap 0$. Sed haec quoque aequatio nondum ad duas aequales radices determinari, sive cum hac: $x^2 - 2ex + e^2$ comparari potest. Fieret enim $x^2 - 2vx + v^2 \sqcap 0$. Unde $-s^2 + \dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap 0$. Ergo $\gamma^2 + \beta^2 \sqcap \beta^2$. Quod est absurdum. Non ergo ita licet venire ad determinationem. Ergo pro x pone $z + d$. Fiet: $\begin{array}{lll} z^2 & +2dz & +d^2 \\ & -2v.. & -2vd \\ & & +v^2 \\ & & -s^2 \\ & & +\dfrac{s^2\beta^2}{\gamma^2 + \beta^2} \end{array}$. Sed inde sequetur idem.

Quid ergo si ab initio AL vocemus ω. et pro y^2 substituamus $\omega^2 - x^2$ unde ex aequatione $\dfrac{\gamma^2}{\beta^2}y^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $\gamma^2\omega^2 - \gamma^2x^2 + \beta^2\omega^2 - \beta^2x^2 \sqcap \beta^2s^2$, et ex altera $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 \sqcap s^2$ fiet: $v^2 - 2vx \boxed{+x^2} + \omega^2 \boxed{-x^2} \sqcap s^2$. Adeoque fiet:

$$x \sqcap \frac{-s^2 + \omega^2 + v^2}{2v} \text{ et } x^2 \sqcap \frac{s^4 - 2s^2\omega^2 - 2s^2v^2, +\omega^4 + 2\omega^2v^2 + v^4}{4v^2}.\ \text{Unde}$$

$$\begin{array}{llllllllll} & & & -2\beta^2.. .. & & & & & & \\ 2\,4\,\gamma^2v^2\omega^2 & -\gamma^2 s^4 & +2\gamma^2 s^2\omega^2 & +2\gamma^2s^2v^2 & -\gamma^2\omega^4 & \boxed{-2\gamma^2v^2\omega^2} & -\gamma^2v^4 & +2\,4\,\beta^2v^2\omega^2 & \sqcap & \boxed{2\,4\,\beta^2v^2s^2}. \\ & -\beta^2.. & +..\beta^2.. & \boxed{+..\beta^2} & -\beta^2 & \boxed{-2\beta^2v^2\omega^2} & -\beta^2 & & & \end{array}$$

1 $v^2 \ldots \sqcap s^2$: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40 f.

Unde ordinando:

$$\omega^4 \quad * \quad \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} +2\gamma^2v^2 \\ +2\gamma^2s^2 \\ +2\beta^2s^2 \\ \underline{+2\beta^2v^2} \end{array}\right. \\ -\gamma^2 \\ -\beta^2 \\ \\ \\ \\ \end{array} \omega^2 \quad \begin{array}{l} \left\{\begin{array}{l} -\gamma^2s^4 \\ -\beta^2s^4 \\ -2\beta^2s^2v^2 \\ +2\gamma^2s^2v^2 \\ -\gamma^2v^4 \\ \underline{-\beta^2v^4} \end{array}\right. \\ -\gamma^2 \\ -\beta^2 \end{array} \qquad \sqcap 0.$$

$$\text{sive} \quad \omega^4 \quad * \quad \begin{array}{l} -2v^2 \\ -2s^2 \\ \\ \end{array} \ \omega^2 \quad \begin{array}{l} +s^4 \\ +v^4 \\ +\dfrac{2\beta^2-2\gamma^2}{\gamma^2+\beta^2}s^2v^2 \end{array} \qquad \sqcap 0.$$

Unde $\cancel{4}\omega^2 \sqcap \cancel{4}v^2 + \cancel{4}s^2$ multiplicando per numeros progressionis Arithmeticae methodo Huddeniana. Deberet esse $\omega^2 + s^2 \sqcap v^2$.

Sumta jam aequatio $\begin{array}{l} \omega^2 + \quad 2e\omega + e^2 \\ \omega^2 + \quad l\ ..+am \end{array}$, multiplicetur per $\omega^2 + l\omega + am$[:]

$$\left.\begin{array}{rl} & +\,am\omega^2 + 2ame\omega + ame^2 \\ +\,\omega^4 + & l\omega^3 + 2le.. + \quad le^2. \\ & +\,2e... + \quad e^2.. \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quam aequationem ut cum proposita conferamus, fiet: $l \sqcap -2e$. quia $l + 2e \sqcap 0$. Item $le^2 + 2ame \sqcap 0$. sive $-le \sqcap +2am$ sive $+\cancel{2}e^2 \sqcap \cancel{2}am$, sive $m \sqcap \dfrac{+e^2}{a}$. Unde $ame^2 \sqcap +e^4$. et $am + 2le + e^2$ erit $e^2\ -4e^2 + e^2 \sqcap -2e^2$. Unde aequatio posterior correcta dabit:

13 f. Unde ... multiplicando *(1)* per 1. 2. *(2)* per ... Huddeniana *(a)* debet *(b)* deberet esse $\omega^2 +$ *(aa)* $v^2 \sqcap s^2$ *(bb)* $s^2 \sqcap v^2$ *erg. L*   22 erit *(1)* $+e^2$ *(2)* $\boxed{-e^2} + 2le \boxed{+e^2}$. et $2le \sqcap -4e^2$. unde aeqvatio posterior correcta erit: *(3)* $e^2 \ldots \sqcap -2e^2$ *(a)* $\omega^4 * -4e^2 * -e^4$. *(b)* Unde *L*

13 f. methodo Huddeniana: vgl. J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. 507–516.

$\omega^4 \; * \; -2e^2\omega^2 \; * \; +e^4$. Quam conferendo priori, fiet: ex Terminis tertiis $v^2 \sqcap e^2 - s^2$. Unde $v^4 \sqcap e^4 - 2e^2s^2 + s^4$. Unde ex ultimis: $s^4 \boxed{+e^4} - 2e^2s^2 + s^4 + \dfrac{2\beta^2 - 2\gamma^2, \frown e^2s^2 - s^4}{\gamma^2 + \beta^2} \sqcap \boxed{e^4}$.

Divisisque omnibus per s^2, multiplicatisque per $\gamma^2 + \beta^2$, et, pro e ponendo ω, fiet:

$$\begin{array}{ll} +\,2\gamma^2 s^2 & -\,2\gamma^2\omega^2, \\ \boxed{\begin{array}{l} +\,2\beta^2.. \\ -\,2\beta^2.. \end{array}} & \boxed{\begin{array}{l} -\,2\beta^2 \\ +\,2\beta^2 \end{array}} \\ +\,2\gamma^2.. & -\,2\gamma^2 \end{array}$$

fiet $4\gamma^2 s^2 \sqcap 4\gamma^2\omega^2$, sive $s \sqcap \omega$. Quod significat AL. TL. PL. esse aequales, et ideo ipsam AL non curvam esse sed rectam. Imo error aliquis admissus dum adhibeo $\omega^2 + 2e\omega + e^2$, loco $\omega^2 - 2e\omega + e^2$.

$$\begin{array}{rrrrr} & & \omega^2 - & 2e\omega + & e^2 \\ & & \omega^2 + & l\omega + & am \\ \hline & & +\,am\omega^2 & -\,ame\omega & +\,ame^2 \\ +\,\omega^4 + & l\omega^3 & -\;\; 2le.. + & le^2\,. & \\ & -\,2e... & +\;\; e^2.. & & \end{array}$$

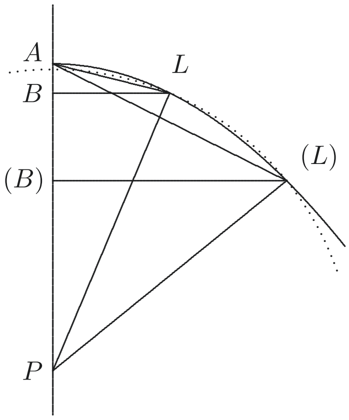
conferenda cum:
$$\begin{array}{lllll} \omega^4 & * & -\,2v^2\omega^2 & * & +\,s^4 \\ & & -\;\; 2s^2 & & +\,v^4 \\ & & & & +\,\dfrac{2\beta^2 - 2\gamma^2}{\beta^2 + \gamma^2} s^2 v^2\,. \end{array}$$

Unde $l \sqcap 2e$. $\quad ame \sqcap le^2$, sive $am \sqcap le$. sive $am \sqcap 2e^2$. Unde $ame^2 \sqcap 2e^4$. $am - 2le + e^2 \sqcap 2e^2 - 4e^2 + e^2 \sqcap -e^2$. Unde $e^2 \sqcap 2v^2 + 2s^2$, et $v^2 \sqcap \dfrac{e^2 - 2s^2}{2}$.

20–147,3 $\sqcap \dfrac{e^2 - 2s^2}{2}$ *(1)* BP $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$BL. *(a)* $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$ *(b)* (B)P $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$(B)(L) *(2)* | G e n e r a l i a *erg.* | BP $\sqcap$ AP – AB | (B)P $\sqcap$ AP – A(B) *gestr.* | AB $\sqcap \sqrt{\mathrm{AL}^2 - \mathrm{BL}^2}$. | A(B) $\sqcap \sqrt{\mathrm{A(L)}^2 - \mathrm{(B)(L)}^2}$ *gestr.* | *(aa)* itaqve *(bb)* itaqve BP $\sqcap$ AP $- \sqrt{\mathrm{AL}^2 - \mathrm{BL}^2}$ | (B)P $\sqcap$ AP $- \sqrt{\mathrm{A(L)}^2 - \mathrm{(B)(L)}^2}$ *gestr.* | Jam *L*

8 aequales: Die Behauptung stimmt nicht für TL, die Folgerung ist daher nicht richtig. Leibniz vermutet einen Vorzeichenfehler und setzt zu einer neuen Berechnung an. 13 $-ame\omega$: Richtig wäre $-2ame\omega$. Der fehlerhafte Term wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung in Z. 20 aus.

Generalia



[*Fig. 3*]

$BP \sqcap AP - AB$. $AB \sqcap \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Itaque $BP \sqcap AP - \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Jam $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$. Pro PB substituatur ejus valor, fiet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 - BL^2 \sqcap BP^2$. Ergo $BP^2 + BL^2 \sqcap PL^2$, faciet: $AP^2 - 2AP\sqrt{AL^2 - BL^2} + AL^2 \boxed{-BL^2 + BL^2} \sqcap PL^2$ sive $AP^2 + AL^2 - PL^2 \sqcap 2AP \frown \sqrt{AL^2 - BL^2}$. Unde

$$AP^4 \boxed{+2AP^2, AL^2} - 2AP^2, PL^2,, + AL^4 - 2AL^2, PL^2 + PL^4 \sqcap$$
$$2\,\boxed{4}\, AP^2, AL^2 - 4AP^2, BL^2,$$

sive $v^4 - 2v^2s^2 + \omega^4 - 2\omega^2s^2 + s^4 - 2v^2\omega^2 + 4v^2y^2$ [$\sqcap 0$]. Et haec quidem aequatio omnibus curvis est communis. Nam $BP \sqcap v - AB$. $AB \sqcap \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Ergo $BP \sqcap v - \sqrt{\omega^2 - y^2}$. Jam $BP^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo pro BP sumendo ejus valorem, erit $v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 \boxed{-y^2, +y^2} \sqcap s^2$. Adeoque $\omega^2 + v^2 - s^2 \sqcap 2v\sqrt{\omega^2 - y^2}$. sive

$$\begin{array}{llllll}
\omega^4 & \overset{-}{\boxed{+}}\, 2v^2\omega^2 & + v^4 & \sqcap & \boxed{4v^2\omega^2} & - 4v^2y^2 \\
 & - \;2s^2.. & - 2v^2s^2 & & & \\
 & & + s^4 & & &
\end{array}$$

ut ante, ut de calculo possimus esse huc usque securi.

4 PL^2. *(1)* et P(B)^2 + (B)(L)^2 $\sqcap$ PL^2 Unde AL^2 − BL^2 + BL^2 *(2)* Iam *(3)* pro *L*   9 f. aeqvatio | omnis *ändert Hrsg.* | curvis *L*

Nunc praeter hanc aequationem alia quaerenda est, ex natura problematis dati, ut scilicet alterutra incognitarum capitalium, ω, vel y. elidatur. Ponamus ergo BP esse quantitatem constantem, fiet: $a^2 + y^2 \sqcap s^2$. Ergo $y^2 \sqcap s^2 - a^2$, unde fiet aequatio

$$\begin{array}{llll} \omega^4 & -2v^2\omega^2 & +v^4 & \sqcap 0. \\ & -2s^2\,.. & -2v^2s^2 & \\ & & \underline{+s^4} & \\ & & -4s^2v^2 & \\ & & +4a^2v^2 & \end{array}$$

Unde methodo Huddenii fiet: $\cancel{4}\omega^2 \sqcap \cancel{4}s^2 + \cancel{4}v^2$. Figura autem, ut aliunde constat est parabola et in parabola $v^2 \sqcap a^2 + 2ax + x^2$ et $s^2 \sqcap 2ax + a^2$. Ergo $s^2 + v^2 \sqcap 2a^2 + 4ax + x^2$ sed $\omega^2 \sqcap 2ax + x^2$. Fiet ergo aequatio absurda inter $2a^2 + 2\,4\,ax\boxed{+x^2}$, et $\boxed{2ax + x^2}$ seu $2a^2 + 2ax \sqcap 0$. Absurdum.

Causa absurditatis in arduo est, et latet in abditissimis artis Analyticae recessibus. A posteriori sane video ideo quidem has solutiones non sufficere, quia patet, explicationem ipsius y non ingredi in totam aequationem, unde si Huddenii more multiplicetur, manifestum est nihil referre, qualis sit terminus ultimus; is enim semper destruetur, ideoque nihil quoque referet qualis sit y. Quodsi loco aequationis $a^2 + y^2 \sqcap s^2$, hanc adhibeas, $a^2 \sqcap v^2 - 2v\sqrt{\omega^2 - y^2} + \omega^2 - y^2$. Sive $2\,4\,v^2\omega^2 - 2\,4\,v^2y^2 \sqcap \omega^2 + v^2 - a^2 - y^2, \square.$ $\sqcap$

$$\begin{array}{lllll} \omega^4 & \boxed{+2v^2}\,\omega^2 & +v^4 & \boxed{-2v^2y^2} & +y^4 - 2y^2\omega^2 \;\sqcap 0\,. \\ & -2a^2 & -2a^2v^2 & -2a^2\,.. & \\ & & +a^4 & & \\ & -2v^2\,.. & & +2v^2\,.. & \end{array}$$

Possumus ergo etiam ω destruere, relicto y si velimus.

An forte in locum literae capitalis seu duos habentis valores aequales non licet substituere literas ejusdem valoris, et tamen determinare ad duas radices aequales. Sane

4+9 v^4 | $\sqcap$ 0 *erg. Hrsg.* |. *(1)* Sed hanc aeqvationem secundum ω ordinatam, conferendam cum *(2)* Unde *L*   17 adhibeas, *(1)* $\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2$ *(2)* $\mathrm{a}^2 \sqcap \mathrm{v}^2 - 2\mathrm{vx} + \mathrm{x}^2$, aut etiam si duas has aeqvationes jungas inter se, fiet: $2\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{s}^2 + \mathrm{v}^2 - 2\mathrm{vx} + \mathrm{x}^2$ *(3)* a^2 *L*

7 f. $-4s^2v^2 + 4a^2v^2$: Richtig wäre $+4s^2v^2 - 4a^2v^2$.   17 qualis sit y: Die folgende Gleichungskette enthält aber den gemischten Term $-2y^2\omega^2$.   18 Sive: Leibniz rechnet im Folgenden fortlaufend. Den letzten Schritt der Umformung der Gleichungskette hat er nicht markiert. Der letzte Term in Z. 20 müsste $+2a^2y^2$ lauten.

Cartesius ait duabus datis aequationibus una $x^2 + v^2 - 2vy + y^2 - s^2$, et altera naturam curvae exprimente, valorem $v - \sqrt{s^2 - x^2}$ pro y. substitui posse, sed hujus rei ratio est, quia idem est ac si valor alius ipsius y. ex altera aequatione sumtus substitueretur. Cartesio hoc vel artificiose, vel quod ita unam semper regulam dare posset pro valore x. vel y. dissimulante. Necesse est ergo unam minimum aequationem dari in qua vel nullae sunt literae duplicis valoris, vel non nisi literae duplicis valoris, (una cum cognitis seu datis) sed haec conjicio.

NB. potest fieri ut circulo curvam secante aequatio inde orta duas habeat radices aequales, et tamen circulus curvam non tangat, ut si circulus centro cum centro Ellipseos vel Hyperbolae communi describatur.

Nota aequationes in quibus una tantum incognitarum capitalium adhiberi nequeunt, eo ipso enim incognita capitalis fit dependens ab incidente v. g. in aequatione $a^2+y^2 \sqcap s^2$. et cessat habere duos valores.

[*Teil 2*]

Xb. 1674.

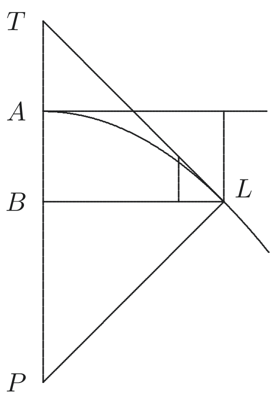
Pars II. inquisitionis in Methodum Cartesii qua invenit proprietates ovalium

Imo haec ratio nihili est, quia idem evenit in qualibet aequatione in methodo tangentium communi reducta ad unam incognitam capitalem. Praeclaro admodum consilio Cartesius adhibuit literam v.

Nam cum opus habeat litera BP, manifestum est ipsam esse duplicem, nam in figura superiore habetur BP, et $(B)P$. Quod si ergo ei dedisset nomen, v. g. p. tunc habuisset tres literas duplicis valoris, p. x. y. At litera v, seu AP, est semper eadem, ergo $BP \sqcap v - x$. Patet non nisi duas esse literas duorum valorum. Nam v. et s. non nisi unum habent valorem, quando datur aequatio: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. quae est generalis. Et adhuc alia, $v - x \sqcap a$. Fit: $x \sqcap v - a$. et $-2vx \sqcap -2v^2 + 2av$. et $x^2 \sqcap v^2 - 2av + a^2$.

10 f. describatur. *(1)* Sed tunc etiam ipsae x et *(2)* Nota *L* 16 pars II. *(1)* sche *(2)* inqvisitionis ... ovalium *erg. L*

1 ait: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 41. 8 f. radices aequales: Leibniz verwechselt vermutlich Doppelwurzeln mit Schnittpunkten, die symmetrisch zu den Achsen liegen. 20 f. in figura superiore: s. Fig. 3.



[*Fig. 4*]

Unde $\boxed{v^2 - 2v^2 + 2av + v^2 - 2av} + a^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Quam patet amplius determinari non posse, tunc enim non nisi una incognita restaret.

Quod si elidere velis y. fiet $a + x - v. \sqcap 0$. Et haec si BP sit recta constans cum scilicet AL est parabola.

Quodsi ponamus $BP \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}y$. tunc AL est linea recta; et fiet: $\dfrac{\gamma}{\beta}y \sqcap v - x$. Ergo $x \sqcap \dfrac{v\beta - \gamma y}{\beta}$. Unde $-2vx \sqcap \dfrac{-2v^2\beta + 2v\gamma y}{\beta}$, et $x^2 \sqcap \dfrac{v^2\beta^2 - 2v\beta\gamma y + \gamma^2 y^2}{\beta^2}$. Unde

$$\boxed{\beta^2 v^2}\ \boxed{-2\beta^2 v^2}\ \boxed{+2\gamma\beta v y}\ \boxed{+\beta^2 v^2}\ \boxed{-2\beta\gamma v y} + \gamma^2 y^2 + \beta^2 y^2 - s^2\beta^2 \sqcap 0.$$

Quae rursus non nisi duarum incognitarum[,] non ergo determinabilis.

Hinc ergo satis video hoc quidem casu elidendo x rediri in eadem, quae provenissent non adhibendo $v - x$.

Si sit $\sqrt{2ax} \sqcap v - x$. fiet: $2ax \sqcap v^2 - 2vx + x^2$. et fiet: $2ax + y^2 - s^2 \sqcap 0$. Adeoque $x \sqcap \dfrac{s^2 - y^2}{2a}$, et $x^2 \sqcap \dfrac{s^4 - 2s^2y^2 + y^4}{4a^2}$. Et hunc valorem in aequationem generalem $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ inserendo, quia $-2vx \sqcap \dfrac{-\cancel{2}vs^2 + \cancel{2}vy^2}{\cancel{2}a}$, fiet:

2 f. Qvam ... restaret *erg.* *L* 4 $\sqcap$ 0. *(1)* si eli *(2)* Si ponas BP $\sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}$y $\sqcap$ v − x. *(3)* Et *L*

9 qvae ... determinabilis *erg.* *L* 12 et *(1)* x $\sqcap$ *(2)* qvae aeqvatio jungatur *(a)* priori ge *(b)* generali: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2$. *(3)* fiet *L*

$$4a^2v^2 - 4as^2v + 4avy^2 + s^4 - 2s^2y^2 + y^4 + 4a^2y^2 - 4a^2s^2. \sqcap 0.$$

et ordinando: ☉ $\begin{array}{lll} y^4 & +4avy^2 & +4a^2v^2 \quad \sqcap 0. \\ & -2s^2.. & -4as^2v \\ & +4a^2.. & +s^4 \\ & & -4a^2s^2 \\ \hline 4 & 2 & 0 \\ \hline \end{array}$

multiplicando per 4. 2. 0. methodo Huddeniana, sequetur

$$\begin{array}{lll} 4y^2 & +8av & \sqcap 0. \\ & -4s^2 & \\ & +8a^2 & \end{array}$$

sive dividendo per 4, fiet: ☽ $\begin{array}{lll} y^2 & +2av & \sqcap 0. \\ & -s^2 & \\ & +2a^2 & \end{array}$

ubi in locum ipsius v substituendo $\sqrt{2ax} + x$. fiet: $y^2 + \sqrt{2}ax + x - s^2 + 2a^2 \sqcap 0$.
Multiplicetur aequatio ☉ adhuc aliter per -2 $\boxed{*-1}$ 0 $\boxed{*+1}$ 2. et fiet:

$$\begin{array}{ll} 2y^4 & -8a^2v^2 \quad \sqcap 0 \text{ et fiet} \\ & +8as^2v \\ & -2s^4 \\ & +8a^2s^2 \end{array} \qquad ☿ \qquad \begin{array}{ll} y^4 & -4a^2v^2 \quad \sqcap 0, \\ & +4as^2v \\ & -s^4 \\ & +4a^2s^2 \end{array}$$

ubi pro $+4as^2v$, ponatur $4as^2\sqrt{2ax} + 4as^2x$ et quia $v^2 \sqcap 2ax + 2x\sqrt{2ax} + x^2$, erit $4a^2v^2 \sqcap 8a^3x + 8a^2x\sqrt{2ax} + 4a^2x^2$, porro ex aeq. ☽, multiplicando per s^2, fiet: $s^4 \sqcap s^2y^2 + 2avs^2 + 2a^2s^2$. Inseratur is valor in aeq. ☿ fiet:

$$\begin{array}{lll} y^4 & -s^2y^2 & -2avs^2 \quad \sqcap 0 \text{ sive } \\ & & \underline{-2a^2s^2} \\ & & -4a^2v^2 \\ & & +4avs^2 \\ & & +4a^2s^2 \end{array} \quad \begin{array}{lll} y^4 & -s^2y^2 & +2avs^2 \quad \sqcap 0 \\ & & +2a^2s^2 \\ & & -4a^2v^2 \end{array} \qquad ♃$$

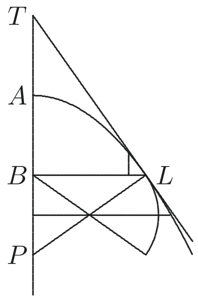
et pro s^2 substituendo $y^2 + 2av + 2a^2$ ex aeq. ☽ fiet ex aeq. ♃ sequens:

20 $+4a^2x^2$, *(1)* | et substitutione facta, erit *streicht Hrsg.* | aeqvatio: $y^4 \sqcap$ *(2)* porro *L*

13 $\sqrt{2ax} + x$: Leibniz vergisst bei der Substitution den Faktor $2a$ vor dem Term. Der Fehler hat keine Auswirkungen auf die weiteren Rechnungen und Überlegungen.

$$\begin{array}{llll} y^4 & -4a^2v^2, & -y^2 & \frown y^2 \quad \sqcap 0 \\ & & +2av & \quad 2av \\ & & +2a^2 & \quad 2a^2\end{array} \quad \text{sive} \quad \boxed{\begin{array}{ll} +y^4 & +2avy^2 \\ -y^4 & +2a^2.. \\ & -2av.. \\ & -2a^2..\end{array}} \begin{array}{l} +4a^2v^2 \quad \sqcap 0. \\ +4a^3v \\ +4a^3v \\ +4a^4\end{array}$$

Quae aequatio est absurda, sequitur enim v, vel x unde v pendet cognitae seu determinatae quantitati aequari, quod est absurdum.



[*Fig. 5*]

Forte ergo error in calculo, quare elaborandus denuo: Figura in qua BP sint $\sqrt{2ax}$ applicatae parabolae, haberi potest Analytice. Nam summa omnium $\sqrt{2ax}$ est $\frac{2}{3}$ maximi $\sqrt{2ax}$ multiplicati per maximum x, seu $\frac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$. Cui aequale pone $\frac{y^2}{2}$ fiet $32ax^3 \sqcap 9y^4$, figura, cujus ordinatarum y, semiquadrata $\frac{2\sqrt{2ax^3}}{3}$, sunt aequalia summis omnium BP. Nam figura $\frac{32}{9}ax^3, \sqcap y^4$, dabit: $\frac{32}{3}ax^2t \sqcap 4y^4$, unde $t \sqcap \frac{12y^4}{32ax^2} \sqcap \frac{12 \frown \frac{\cancel{32}}{9}\cancel{a}x^{\cancel{3}}}{\cancel{32}\cancel{a}x^{\cancel{2}}} \sqcap \frac{4}{3}x$ ponendo $t \sqcap BT$. Jam $\frac{y^2}{t} \sqcap BP$. Ergo $\frac{4\sqrt{2ax^3}}{3 \frown \frac{4x}{3}} \sqcap \sqrt{2ax}. \sqcap BP$. Ergo $PL^2 \sqcap s^2. \sqcap 2ax + \frac{4x\sqrt{2ax}}{3}$ et $v \sqcap AP \sqcap x + \sqrt{2ax}$. Unde statim dijudicari potest an vera sit aequatio ☽ paginae praecedentis: $y^2 + 2av - s^2 + 2a^2 \sqcap 0$. Inde enim fiet:

$$\underbrace{\frac{4x}{3}\sqrt{2ax},}_{+y^2} + \underbrace{2ax + 2a\sqrt{2ax},}_{+\,2av} \underbrace{-2ax - \frac{4x\sqrt{2ax}}{3}}_{-\,s^2} + 2a^2 \sqcap 0.$$

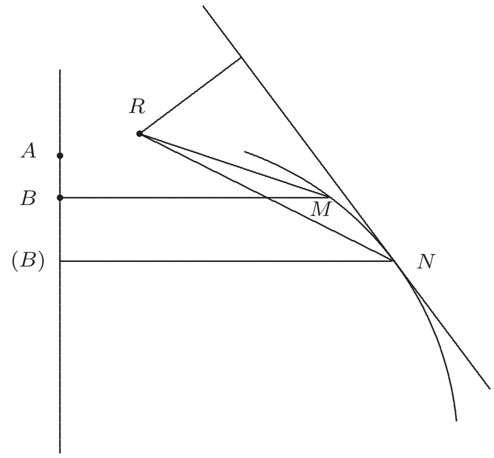
Quae aequatio est absurda. Fiet enim $2a\sqrt{2ax} \sqcap -2a^2$. Itaque error qui si non est in calculo, erit in ratiocinatione, determinatione scilicet ad duas radices aequales.

20–153,1 *Zwischen den beiden Absätzen:* E r r o r.

---

1 sive: In der folgenden Gleichung fehlt der Term $-4a^2v^2$.

Problema: Curvam invenire in qua ipsa PL. relationem habeat cognitam ad AB. Omnes enim ejusmodi curvae sunt Trochoeides. Exempli causa quaeratur curva in qua ipsae PL sint applicatae parabolae seu $\sqrt{2ax}$.



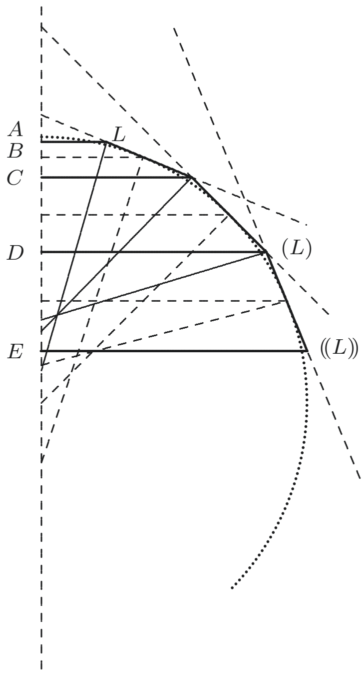
[*Fig. 6*]

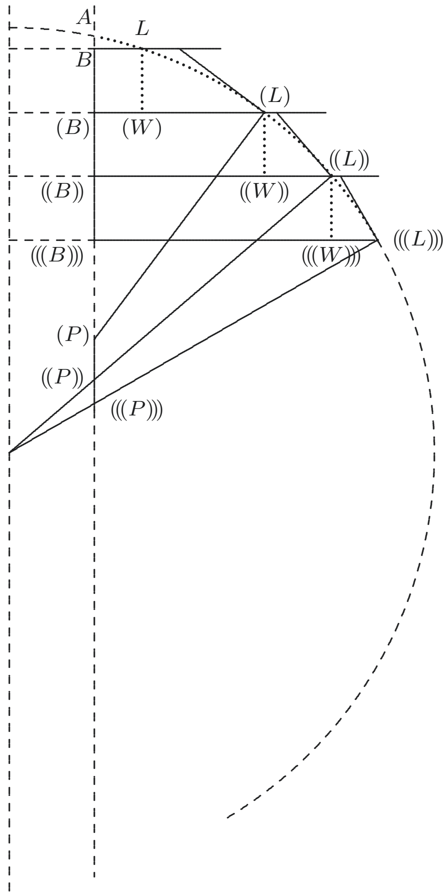
Invenienda est alia curva ad quam ex puncto quodam dato seu fixo R ductae rectae RM sint semper applicatae parabolae. Seu sint $\sqrt{2ax}$ ponendo AB vel $A(B)$ esse x. Quod si punctum A et punctum R coincidant[,] curva MN est circumferentia circuli, unde sequitur Cycloeidem satisfacere proposito quod et verum est. Unde illud quoque manifestum plane, esse curvas a se invicem diversas proposito satisfacientes. Hinc sequitur semper inveniri posse curvam, cujus momentum ex dato quodam axe sit datae figurae cognitae homogeneum, quoniam omnes PL constituunt curvae momentum ex AB.

Ope hujus methodi jam in spem erigor rem producendi longius, efficiendique ut quadraturae reduci possint ad curvarum cognitarum dimensiones.

1 problema: *erg. L* 1 f. AB. | semper est in potestate. *streicht Hrsg.* | Omnes *L*

1 Problema: Die ursprüngliche Behauptung (s. Variante zu Z. 1 f.) ist nicht richtig, wie Leibniz im weiteren Verlauf der Untersuchung (s. u. S. 155 Z. 13 – S. 156 Z. 3) erkennt. Er bezeichnet die Aufgabenstellung nachträglich als problema.





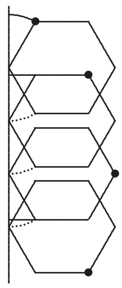
[*Fig. 7a, tlw. Blindzeichnung, gestrichen*] [*Fig. 7b, tlw. Blindzeichnung*]

Nimirum data AP. invenire curvam AL. idem est cum problemate quadraturarum, quod est data BP invenire curvam. Nam data $AP \sqcap v$. datur $BP \sqcap v - x$. Semper enim

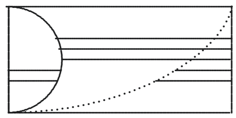
2 f. qvadraturarum, | qvae *ändert Hrsg.* | est data *(1)* BL *(2)* BP *L*

1 *Fig. 7a, Fig. 7b*: Elemente in Blindzeichnung werden gestrichelt wiedergegeben. Eine weitere gestrichene Vorstufe zu Fig. 7b wird nicht wiedergegeben. Den im Text erwähnten Punkt P und die Normale PL hat Leibniz nicht eingezeichnet.

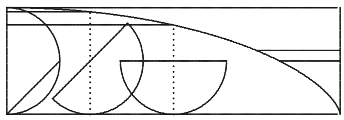
supponitur dari x. Jam si ponamus curvam quaesitam AL. instar trochoeidis describi ab aliqua curva super AP incedente, erunt puncta P, quibus tangit planum AP. et rectae $P(P)$ vel $(P)((P))$ et $((P))(((P)))$ intervalla ipsarum PL. in axe, seu differentiae ipsarum AP. seu latera polygoni infinitanguli id est curvae, provolutae. Ergo AP, erunt horum $(P)((P))$ summae, seu applicatae ipsae Retortarum Trochoeidalium.



[*Fig. 8*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

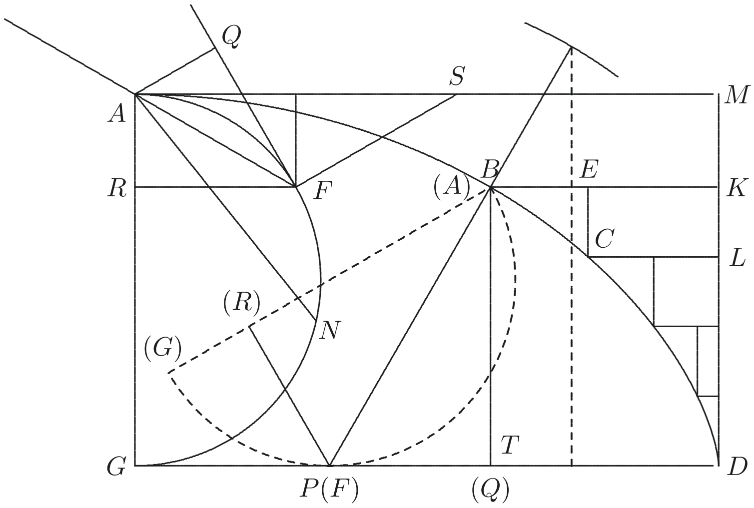
$\frac{a^2}{x}. \frown x \sqcap a^2$. Hyperbola dat cycloeidem per centrum seu lineam rectam. $\frac{a^2}{x} + b\frown x \sqcap a^2 + bx$. $a^4 - 2a^2bx + b^2x^2 - x^2$ est aequatio ad Hyperbolam vel Ellipsin, cujus revolutione describetur curva. Habemus ergo methodum figurae cuilibet exhibendi curvam proportionalem. Ergo ex datae Hyperbolae quadratura habetur curva Ellipseos et Hyperbolae.

Imo jam video nondum me posse datis perpendicularibus invenire curvam; si datis

8 rectam $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}}$ *(1)* – *(a)* a *(b)* b,$\frown$ x $\sqcap$ a^2– *(2)* +b *L*

6 f. *Fig. 9, Fig. 10*: Die Kurvenbögen bei Leibniz entsprechen in etwa Zykloidenbögen, die längs der Basis gestreckt wurden; so werden sie in Fig. 9 und 10 wiedergegeben. 8 Hyperbola: Leibniz versucht im Folgenden, die Rechnung von S. 152 Z. 9–12 bzgl. der durch eine Parabelgleichung gegebenen Subnormale auf das Beispiel einer durch eine Hyperbelgleichung gegebenen Subnormale zu übertragen, wobei er Änderungen der angesetzten Gleichung nicht konsequent durchführt. Die Rechnung ist nicht zulässig und führt zu einer falschen Schlussfolgerung. Leibniz bemerkt anschließend den Irrtum in seiner ursprünglichen Behauptung von S. 153 Z. 1 und setzt neu an.

perpendicularibus possem invenire curvam; possem etiam datis curvae laterum progressionibus invenire ejus descriptionem, et data curva invenire aliam cujus ipsa sit Trochoeides.



[*Fig. 11*]

Esto enim curva data $ABCD$, Trochoeides curvae AFG ordinatim applicatae ad oppositam ipsi AG directricem nempe ad DM. sunto BK. CL. quarum habetur progressio, habetur ergo et progressio ipsarum BE differentiarum, quibus in x, seu DL, DK ductis habetur earum momentum ex DG. Ergo habetur progressio perpendicularium a curva ipsis BE homogenea ad DG ductarum. Quod si ergo datis perpendicularibus inveniri potest curva, habebitur curva.

10–157,1 curva. *(1)* At curva illa est eadem cum ipsa AFG qvia BEK $\sqcap$ GNF, et EK $\sqcap$ CL $\sqcap$ GN ponendo enim BP. perpendicularem *(a)* aeqvalem *(b)* aeqvalem AF, posito scilicet punctum A esse describens, erit GP. *(2)* Ex *L*

4 *Fig. 11*: Eine Vorstufe des gestrichelten Halbkreises in Blindzeichnung mit demselben Auflagepunkt aber entgegengesetzt geneigtem Durchmesser wird nicht wiedergegeben. Leibniz hat die Figur auch als Vorzeichnung für Fig. 1 von N. 23 verwendet und wohl dabei die Punktbezeichnungen in Klammern hinzugefügt. In Leibniz' Zeichnung, die möglichst getreu wiedergegeben wird, entspricht die Lage von BP im abgerollten Halbkreis nicht der Lage von AF in der Ausgangsposition. Deshalb gelangt er in S. 157 Z. 1 f. zu den Beziehungen $PD = \widehat{GF}$ und $GP = \widehat{AF}$ statt $PD = \widehat{AF}$ und $GP = \widehat{GF}$. Diese werden von ihm konsequent weiter verwendet, beeinträchtigen die allgemeine Überlegung jedoch nicht.

Ex puncto B ducatur perpendicularis quae erit aequalis AF. Erit $PD \sqcap$ curvae GNF. quia $GP \sqcap$ curvae AF. et $GD \sqcap$ curvae GFA. Ergo perpendiculares Trochoeidis BP sunt rectae ex puncto quodam fixo ut A. figurae describentis, ad quodlibet ejus punctum velut F ductae seu AF, et Reductae PD seu v. sunt portiones Curvae describentis retrorsum sumtae, restat tantum ut investigemus, quid sit BK.

Ut ergo omnia rectius procedant ita faciemus: Curva describens esto $AFNG$. punctum fixum vel extra, vel si placet ut in figura intra curvam, nempe punctum A. abscissae AR, ordinatae RF, convergentes AF. quae eaedem et perpendiculares Trochoeidis, BP. demissae seu rectae ex puncto fixo ad tangentem curvae perpendiculares, AQ, eaedemque Trochoeidis ordinatae ad planum, $BT \sqcap DK$.

Porro PD semper aequatur Curvae GNF. Erit ergo DT abscissa ex plano $\sqcap PD - PT \sqcap GNF - PT$. Jam $PT \sqcap \sqrt{AF^2 - AQ^2}$. Ergo $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - AQ^2}$; et $DK \sqcap AQ$. Ergo $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$. Datur jam relatio inter AR et DK, item relatio inter AF et AR. Igitur habebitur valor ipsius AR per DK, et quoniam habetur valor ipsius AF per AR. habebitur et valor ipsius AF per DK. Itaque habebitur aequatio trium incognitarum, nempe DT. GNF (curvae). DK. Oblata jam aliqua curva BCD, ex DT datur DK vel contra; item ex DT inveniri potest AF vel BP perpendicularis, itemque ex DK inveniri potest BP, itaque habebuntur duae aequationes[,] una generalis, $DT \sqcap GNF - \sqrt{AF^2 - DK^2}$, altera curvae naturam explicans, et valorem ipsarum duarum ex his tribus, DT, BP, (vel AF) DK, per tertiam. Ac proinde habebitur valor ipsarum GNF quarum differentiae seu ipsarum DP differentiae sunt homogeneae elementis curvae descriptricis ad portiones axis Trochoeidis seu datae curvae relatis. Videamus jam an haec sufficiant ad inveniendam curvam descriptricem, nimirum datur triangulum AQF. Quod Triangulum haberi potest pro characteristico majori, si scilicet AF convergens habeatur pro ordinata. Datur inquam, id est datur relatio laterum invicem: Datur praeterea relatio Elementorum curvae AFG, ad ipsam AF, imo et summae elementorum. Ideoque momentum curvae quaesitae, ergo et perpendicularium ad curvam, FS. in ipsarum RF differentias ductarum progressio.

Breviter data Trochoeide habetur describentis curvae portionum dimensio sive ejus elementum; elementa curvae; demissae; interceptae inter demissas et puncta curvae in

5 f. BK *(1)*, in relatione ad *(2)* Ut *L* 17 BCD, *(1)* | datur *streicht Hrsg.* | *(2)* ex DT *(a)* vel DK, dantu *(b)* datur *L* 20 ipsarum *(1)* incogni *(2)* trium incognitarum *(3)* duarum *L* 29 sive *(1)* | momentum *streicht Hrsg.* | ipsarum *(2)* eius *L*

tangente sumta; omnia ex supposita convergente data. Seu ex dato quadrato aequali quadratis ordinatae et abscissae; et per consequens ex datis ordinata et abscissa simul.

Contra si data sit describens datur utique ejus $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ AQF ergo et $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BPT Trochoeidis. Quodsi ergo ex dato PBT curva BCD haberi potest patet eo ipso et curvae $AFNG$ dimensionem haberi in Trochoeide et provoluta $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AQF et BPT coincidunt, in Evolutis et evolutione descriptis triangula BPT utrobique similia. Sed reciproce.

Alia vide Schediasmate *de descriptionibus curvarum*, ibi de modo describendi curvas per motuum compositiones.

7 Schediasmate ... *curvarum*: Cc 2, Nr. 831, dat. Dezember 1674.

18. DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONIBUS REDUCTARUM AD ORDINATAS
24. Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 13–14. 1 Bl. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 828

Xb. 1674. ipsis Natalitiorum vigiliis

De Trochoeidibus, et Relationibus Reductarum ad ordinatas et de ratione efficiendi ut eadem curva sit trochoides plurium

Data Curva, et puncto quodam fixo, unde perpendicularis demittatur ad quamlibet curvae tangentem, investigare relationem inter perpendicularem demissam, et interceptam tangentis portionem inter demissam et punctum contactus.

Esto primum curva, circuli circumferentia. Si punctum fixum sit centrum, intercepta tangentis portio erit infinite parva, et perpendicularis semper eadem, nempe radius, locus ergo est ad rectangulum.

Si vero punctum fixum vertex A. quodlibet in curva punctum L. Tangens axi AT occurrens LT. sagitta AB. ordinata seu sinus rectus BL. constat esse $AC \sqcap AB$. quam appellemus x. Jam $AL \sqcap \sqrt{2ax}$. et $AL^2 \sqcap 2ax$. Ergo $CL^2 \sqcap AL^2 - AC^2 \sqcap 2ax - x^2$. Ergo $CL \sqcap \sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL$. Hinc jam patet figuram in qua ordinata ad reductam relationem habeat quam sinus versus ad rectum, esse Cycloeidem.

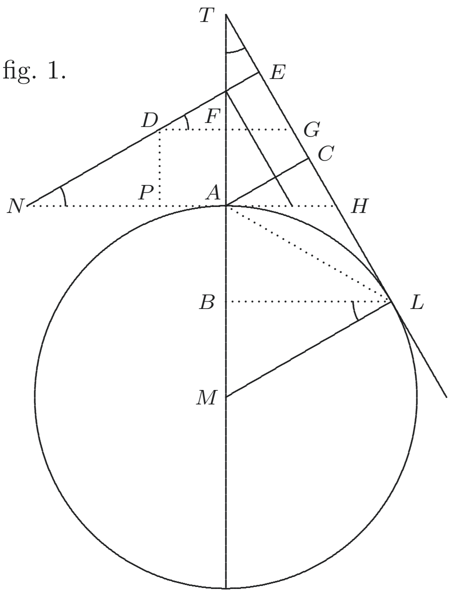
7–9 Nova hic methodus detegitur, qua diversarum figurarum quadraturae ad se invicem reducuntur, ope Trochoeidum.

7–9 De ... ut *(1)* diversa *(2)* eadem ... plurium *erg. L* 10 fixo | extra curvam *gestr.* |, unde *L* 12 inter *(1)* tangentem *(2)* perpe *(3)* perpendicularem *(4)* demissam *L* 22 ope *(1)* volutarum | etiam *streicht Hrsg.* | *(2)* Trochoeidum *L*

---

19 f. Hinc ... Cycloeidem: vgl. N. 17 S. 153 Z. 2–8.

fig. 1.



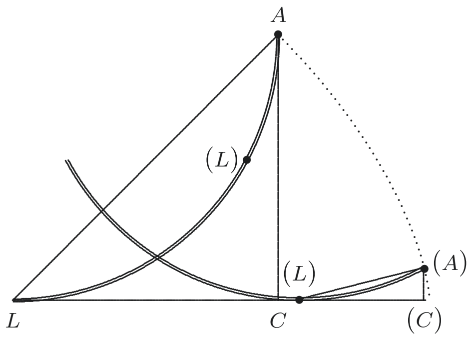


fig. 2.

[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*] [*Fig. 2*]

Nam generaliter in curva provolvenda AL, demissa ex puncto quodam fixo, ut A, in tangentem LT, fit ordinata in Trochoeide, et intervallum inter demissam et punctum contactus seu LC, fit reducta, quoniam LA in Trochoeide semper perpendicularis ad curvam. Ut patet conferendo figuram 2^{dam} primae, ubi $A(L)L$ provolvenda, $A(A)$ Trochoeides curva, LA vel $(L)(A)$ perpendicularis ad curvam Trochoeidem, AC vel $(A)(C)$ ordinata ad planum volutionis, LC reducta sive intervallum inter ordinatam et perpendicularem in directrice sumtum.

Esto jam punctum describens, non vertex circuli A, sed aliud quodlibet D. unde ad tangentem LT. demisssa perpendiculari DE, quaeratur relatio quae est inter DE et LE. Cum datum sit punctum D, datum erit ejus intervallum a diametro AB, nempe $DF \sqcap d_{[,]}$ dabitur et ejus intervallum a vertice, nempe recta $AF \sqcap f$. In ipsam LT

5 AL(L) *L ändert Hrsg.*

1 *Fig. 2*: Zwei verworfene Vorstufen der Figur, in denen Leibniz drei Phasen des Abrollens der Kurve darzustellen versuchte, werden nicht wiedergegeben. 9 Esto: Zum Folgenden vgl. Fig. 1.

tangentem ducantur AH. FG. AC. Nam per DFG. habebitur et DE. at FG. per AH. AH autem cognita est, ducto enim radio ML, patet Triangula LBM, TBL, ACH, esse similia, adeoque AH esse ad $AC \sqcap AB \sqcap x$, ut radius LM seu a est ad $BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$. Ergo $AH \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2} \sqcap BL}$. Jam ut BL ad BM ita TA ad AH. Ergo $\dfrac{TA}{AH} \sqcap \dfrac{BL}{BM \sqcap a - x}$. Ergo $TA \sqcap \dfrac{BL \frown AH}{a - x}$. Jam $BL \frown AH \sqcap ax$. Ergo $TA \sqcap \dfrac{ax}{a - x}$. Jam FG est ad TF ut AH ad TA. seu $FG \sqcap \dfrac{AH \frown TF}{TA}$. Jam $TF \sqcap TA \text{ ǂ } AF \sqcap \dfrac{ax}{a - x} \text{ ǂ } f$. Unde fiet $FG \sqcap \dfrac{\dfrac{\cancel{ax}}{\sqrt{2ax - x^2}}}{\dfrac{\cancel{ax}}{a - x}} \frown TF \sqcap \dfrac{\boxed{a - x}}{\sqrt{2ax - x^2}} \frown \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } xf}{\boxed{a - x}} \sqcap \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } xf}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $DG \sqcap \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } xf}{\sqrt{2ax - x^2}} (\text{ǂ}) d$. Si punctum D. esset in diametro producta, negligi posset d. Hinc patet semper si velis negligi posse quoniam etsi non in AM, tamen in alia diametro producta.

Quodlibet punctum extra Circulum existere intelligi potest. Habita jam DG. investigabitur facilius DE, est enim DE, ad DG, ut BL sinus rectus ad radium. Ergo $DE \sqcap \dfrac{DG \frown BL}{a}$, at $DG \frown BL \sqcap \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } fx (\text{ǂ}) dBL}{\cancel{BL}}, \frown \cancel{BL}$.

Ergo $DE \sqcap \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } fx (\text{ǂ}) d\sqrt{2ax - x^2}}{a}$. Producatur ED in N, dum occurrat ipsi HAN, et in AN demittatur perpendicularis $DP \sqcap AF \sqcap f$. erit $\dfrac{DN}{DP \sqcap f} \sqcap \dfrac{ML \sqcap a}{BM \sqcap a - x}$. ergo $DN \sqcap \dfrac{af}{a - x}$. et $EN \sqcap \dfrac{ax \text{ ǂ } af \text{ ‡ } fx (\text{ǂ}) d\sqrt{2ax - x^2}}{a} ((\text{ǂ})) \dfrac{af}{a - x}$. Inventa autem EN facile habetur EH. ergo et EL.

2 est, *(1)* sunt *(2)* Cum enim AC aeqvetur AB. erunt triangula ACL *(3)* ducto *L*   3 $\sqcap$ x, *(1)* ut BL *(a)* ad *(b)* $\sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ ad radium LM seu a, ergo AH $\sqcap$ *(2)* ut *L*   15 AHN *L ändert Hrsg.*   15 $\sqcap$ f. *(1)* erit $\dfrac{NP}{f} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a - x} \sqcap \dfrac{BL}{BM}$: ergo NP $\sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$ *(2)* erit *L*   16 f. inventa autem *(1)* EN *(2)* | EA *ändert Hrsg.* | facile ... EL *erg. L*

Imo ista ipsius DN. additio ad ED, locum tantum habere videtur, cum D sumta ut in figura [1.] extra diametrum in latere diametri a tangente averso.

Nota hic casum quo s i g n o r u m a m b i g u o r u m usus haerere videtur. Aliter enim in quibusdam instituendus erit Calculus si sit in sinistro, quam si sit in dextro tangentis latere, quia calculus per Triangulorum similium comparationes peragitur.

Alia enim methodo calculus reddi potest generalis, is ergo praeferendus, nimirum ex datis DE et DG. Est enim EG ad DG, ut $a - x$ seu BM ad ML seu a. Ergo $EG \sqcap \dfrac{DG \frown a - x}{a}$, et GL, ad $FB \sqcap x \ddagger f$ ut LM ad BL, seu ut a ad $\sqrt{2ax - x^2}$. seu $GL \sqcap \dfrac{ax \ddagger fa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. et $EL \sqcap EG((\mp))GL$. Quod si unicum exemplum calculare volumus, cum punctum D in sinistro latere ipsius AT, extra Circulum, intra T. et A. (vide supra

3–5 *Figur, gestrichen:*

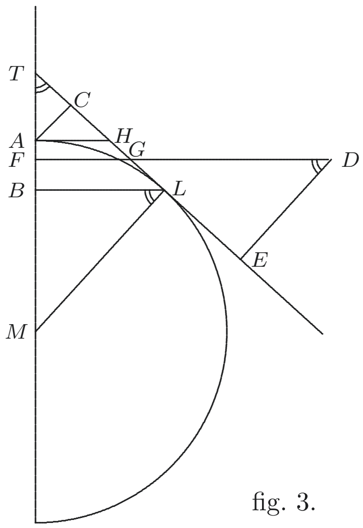


fig. 3.

1 ad |E *ändert Hrsg.*|, locum *L* 5 latere, *(1)* itaqve facilitatis causa, uno tantum casu utemur nunc qvidem Nimirum qvia omnia *(2)* qvia *L*

fig. 1.[)] tunc $EN \sqcap \dfrac{ax - af + fx + d\sqrt{2ax - x^2}}{a} + \dfrac{af}{a-x}$. Sin malis NH, uti[:] $\dfrac{NP}{f} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax - x^2}}{a-x}$. erit $NP \sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax-x^2}}{a-x}$, addatur AP sive d, et $AH \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}}$ fiet: $\dfrac{f\sqrt{2ax-x^2}}{a-x} + d + \dfrac{ax}{\sqrt{2ax-x^2}} \sqcap NH$.

Jam EH est ad NH, ut a ad $a - x$. Ergo $EH \sqcap \dfrac{NH \frown a}{a-x}$. Est autem

$$NH \sqcap \frac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax-x^2} - dx\sqrt{2ax-x^2} + a^2x - ax^2}{a - x, \frown \sqrt{2ax-x^2}}$$

ergo $EH \sqcap \dfrac{2fax - fx^2 + ad\sqrt{2ax-x^2} - dx\sqrt{2ax-x^2} + a^2x - ax^2}{a^2 - 2ax + x^2, \frown \sqrt{2ax-x^2}}$, cui addatur $HL \sqcap AH$, et fiet EL. et habebitur relatio inter EL et DE.

Sed quoniam calculos tam prolixos odi, videndum potius an omissa d, res sit facilior sumto puncto D in diametro producta si opus fig. 3.

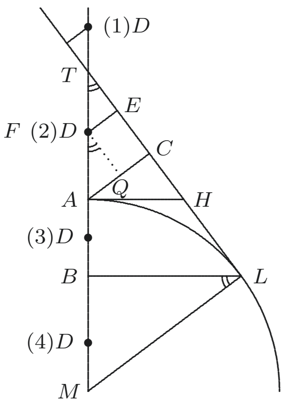


fig. 3.

Nimirum $TA \sqcap \dfrac{ax}{a-x}$, addatur vel adimatur vel plusquam adimatur AD, fiet: $TD \sqcap \begin{array}{l} +TA + AD \text{ seu} \\ +TA - AD \\ -TA + AD \end{array}$

$TD \sqcap \mp TA \mp AD$.

Jam $\dfrac{DE}{AC} \sqcap \dfrac{TD}{TA}$. Ergo $DE \sqcap \dfrac{TD \frown AC}{TA}$. Jam $AC \sqcap AB \sqcap x$. Ergo: $DE \sqcap \dfrac{\mp \dfrac{ax}{a-x} \mp f, \frown \cancel{x}}{\dfrac{a\cancel{x}}{a-x}}$, sive $DE \sqcap \dfrac{\mp ax \mp af \mp xf}{a}$. Jam DQ ad $AD \sqcap f$ ut $\sqrt{2ax-x^2}$ ad a. Ergo $DQ \sqcap \dfrac{f\sqrt{2ax-x^2}}{a} \sqcap EC$. Addatur vel ad-

2 addatur | AD *ändert Hrsg.* | sive *L* 16 $\sqcap$ EC *(1)* addatur CL $\sqcap$ BL fiet EL $\sqcap$ *(2)* addatur *L*

4 ut a ad $a - x$: Richtig wäre $EH : NH = (a - x) : a$. Der Fehler beeinträchtigt zusammen mit einem weiteren Versehen die Berechnung von EH in Z. 6.

imatur, etc. $CL \sqcap BL \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$ fiet EL. Nimirum si D sit intra A et T, seu quando $TD \sqcap +TA - AD$, erit $+EC + CL$, quando D intra A et B, tunc cadit E inter C. et L. et erit $EL \sqcap -EC + CL$. et $TD \sqcap TA + AD$: Quando D ultra B tunc TD etiam $TA + AD$. sed $EL \sqcap +EC - CL$. Quando D ultra T, seu quando $TD \sqcap -TA + AD$ tunc $EL \sqcap EC + CL$. Ut ergo digeramus erunt situs quatuor ipsius D, varietatem afferentes, $(1)D, (2)D, (3)D, (4)D$.

$$\begin{array}{lll}
(1)D,\ \text{dat:} & TD \sqcap -TA + AD & EL \sqcap +EC + CL \\
(2)D\ \ldots & TD \sqcap +TA - AD & EL \sqcap +EC + CL \\
(3)D\ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap -EC + CL \\
(4)D\ \ldots & TD \sqcap +TA + AD & EL \sqcap +EC - CL
\end{array}$$

Generaliter ergo TD ita exprimemus:

$$TD \sqcap \pm TA \mp AD\,, \quad EL \sqcap \pm EC \mp CL.$$

Ergo hoc modo $DE \sqcap \dfrac{\pm ax \mp af \mp xf}{a}$ et $EL \sqcap \mp \dfrac{f\sqrt{2ax - x^2}}{a} \mp \sqrt{2ax - x^2}$.

Ponendo jam $DE \sqcap y$, fiet: $\dfrac{ay \mp af}{\pm a \mp f} \sqcap x$, et $x^2 \sqcap \dfrac{a^2y^2 \mp 2a^2fy + a^2f^2}{a^2 \mp 2af + f^2}$.

Unde $EL \sqcap z \sqcap \dfrac{\mp f \pm a}{a} \frown \sqrt{2ax - x^2}$.

Jam $2ax - x^2 \sqcap \dfrac{2a^2y \mp 2a^2f \frown \pm a \mp f, -a^2y^2 \pm 2a^2fy - a^2f^2}{a^2 \mp 2af + f^2}$ sive

$$\sqcap \frac{\pm 2a^{\cancel{3}}y \boxed{\mp 2a^2fy} \mp 2a^{\cancel{3}}f + \boxed{2}\,a^2f^2, -\cancel{a^2}y^2 \boxed{\pm 2a^2fy} \boxed{-a^2f^2}}{\boxed{a^2 \mp 2af + f^2}} \sqcap \frac{\cancel{a^2}z^2}{\boxed{f^2 \mp 2af + a^2}}.$$

Adeoque: $z^2 \sqcap \pm 2ay - y^2 \mp 2af$ qui locus est ad Circulum; et cum $f \sqcap 0$. tunc fit $z^2 \sqcap +2ay - y^2$: aequatio simpliciter ad ipsummet circulum datum, quae est relatio inter ordinatam ad planum, et reductam in cycloeide primaria, quod cum aliunde sit notum index est calculi veri.

Jam sumtis aliis curvis, parabola, Hyperbola, Ellipsi, videamus an casus esse possint, quo puncta D. talia in illis sumantur, ut relatio ordinatarum et reductarum Trochoeidis parabolicae vel alterius, explicetur aequatione ad Circulum.

19 relatio *(1)* productae ad ord *(2)* inter *L* 20 f. , qvod ... veri *erg. L* 23 ut *(1)* locus *(2)* relatio *L* 24 vel alterius *erg. L* 24 ad *(1)* Hy *(2)* Circulum *L*

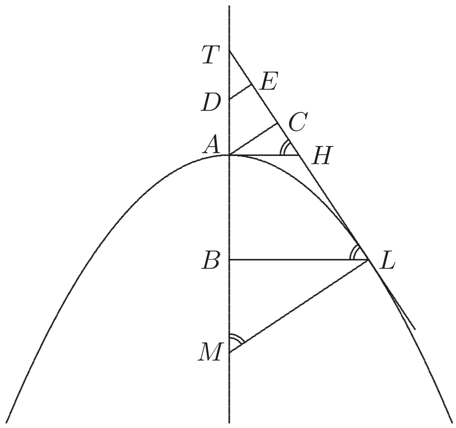


fig. 4.

Ac primum in parabolam inquiramus, et quo major sit calculi simplicitas casum investigemus faciliorem cum punctum D datur in axe parabolae, et intra T et A. Erit $TD \sqcap TA - AD$ seu $\sqcap x - f$. Ergo $AH \sqcap \frac{BL}{2} \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}$. Jam $\frac{AC}{AH \sqcap \frac{\sqrt{2ax}}{2}} \sqcap \frac{\sqrt{2ax} \sqcap BL}{ML \sqcap \sqrt{a^2 + 2ax}}$. Ergo $AC \sqcap \frac{\cancel{2}ax}{\cancel{2}\sqrt{a^2 + 2ax}}$. Jam $\frac{DE}{AC} \sqcap \frac{TD \sqcap x - f}{TA \sqcap x}$. Ergo $DE \sqcap \frac{AC \frown x - f}{x}$ sive $DE \sqcap \frac{\cancel{2}ax - \cancel{2}af}{\cancel{2}\sqrt{a^2 + 2ax}}$. Porro $TL \sqcap \sqrt{x^2 + 2ax}$. Erit EL ad TL, ut DB seu $f + x$ ad $TB \sqcap 2x$. Ergo $EL \sqcap \frac{f + x, \frown \sqrt{2ax + x^2}}{2x}$.

Jam $EL^2 \sqcap z^2 \sqcap f^2 + 2fx + x^2 \frown \frac{2a\cancel{x} + x^{\cancel{2}}}{4x^{\cancel{2}}}$, sive

6 $\sqcap \frac{\cancel{2}\mathrm{ax} - \cancel{2}\mathrm{af}}{\cancel{2}\sqrt{\mathrm{a}^2 + 2\mathrm{ax}}}$. *(1)* porro EL est ad DB *(2)* porro *L* 7 f. $\sqcap \frac{\mathrm{f} + \mathrm{x}, \frown \sqrt{2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2}}{2\mathrm{x}}$ *(1)* $\sqcap \frac{\mathrm{f} + \mathrm{x} \frown}{\quad}$ *(2)* Jam DE sit y, erit $\mathrm{y}^2 \sqcap$ *(3)* Jam | EL $\sqcap$ z *ändert Hrsg.* | $\sqcap \mathrm{f}^2$ *L*

---

6 $TL \sqcap \sqrt{x^2 + 2ax}$: Richtig wäre $TL = \sqrt{4x^2 + 2ax}$; auch die folgende Verhältnisgleichung ist falsch, es müsste $EL : TL = DM : TM = (f + x + a) : (2x + a)$ angesetzt werden. Die Fehler beeinträchtigen die weiteren Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

$$\begin{array}{llllll} \boxed{4z^2x} \sqcap 2af^2 & +\,4af\; x & +\,2a\; x^2 + x^3 \sqcap 0 \quad \odot \\ & +\;\; f^2 \;.. & +\,2f\;.. \\ & -\,4z^2\;.. & \end{array}$$

Eodem modo $DE^2 \sqcap y^2 \sqcap \dfrac{a^2x^2 - 2a^2fx + a^2f^2}{a^2 + 2ax}$, sive

$$\begin{array}{lll} x^3 - 2f & x^2 + f^2\,x & \sqcap 0\,. \quad ☽ \\ \;\;\; -\dfrac{2y^2}{a} & .. \;\; -y^2\;.. & \end{array}$$

Unde pro x^3 substituendo in priori $\odot$ ejus valorem ex ☽ fiet:

$$\begin{array}{llll} 2a & x^2 + 4af\; x & +2af^2 & \sqcap 0. \\ +\,4f & .. & \boxed{\begin{array}{l} +\;\; f^2\;.. \\ -\;\; f^2\;.. \end{array}} & \\ +\,\dfrac{2y^2}{a} & .. & & \\ & & +\;\; y^2\;.. & \\ & & -\,4z^2\;.. & \end{array}$$

et pro x^2, substituendo ejus valorem ex ☽, nempe $\begin{array}{l} 2f \quad x - f^2 \\ +\dfrac{2y^2}{a}\;.. + y^2 \end{array}$ fiet:

$$\left.\begin{array}{lcl} 2a & \frown & 2f \\ +\,4f & & \dfrac{2y^2}{a} \\ +\,\dfrac{2y^2}{a} & & \end{array}\right\} \begin{array}{l} +\,4\,af\;,, \frown x \text{ etc.} \\ + \;\; y^2 \\ -\,4\,z^2 \end{array}$$

Sed cum ita calculus fiat prolixior quam velim, contrahendi causa primam aequationem $\odot$ per brachylogiam ita scribemus: $x^3 + lx^2 + amx + 2af^2 \sqcap 0.$ $\odot$ alteram ☽ ita: $x^2 + nx + ap \sqcap 0$. Unde ex ☽. erit $x^3 \sqcap -nx^2 - apx$. Unde ex $\odot$ et ☽. fiet ☿:

$$\begin{array}{llll} +\,l\;\; x^2 & +\,am\,x & +\,2af^2 & \sqcap 0. \\ -\,n\;.. & -\,ap\;\;.. & & \end{array}$$

et pro x^2 substituendo ejus valorem ex aeq. ☽. qui est $-nx - ap$. fiet:

$$\begin{array}{llll} +\,l\;\; x^2 & \sqcap & -\,ln\; x & -\,lap \\ -\,n\;.. & & +\,n^2\;.. & +\,nap \end{array}$$

Unde aeq. ☿: $\begin{array}{ll} +am\,x^2 & +2af^2\,x \sqcap 0. \\ -ap\ .. & -lap\ .. \\ -ln\ .. & +nap\ .. \\ +n^2\ .. & \end{array}$ sive $x^2 \sqcap \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+2af^2\\-lap\\+nap\end{array}\right.}{\begin{array}{l}+am\\-ap\\-ln\\+n^2\end{array}}\,x \sqcap -nx-ap.$ Ergo

$x \sqcap \dfrac{-a^2mp+a^2p^2-lnap+n^2ap}{2af^2-lap\boxed{+nap},+nam\boxed{-apn}-ln^2+n^3}$. Jam idem $x \sqcap \dfrac{-2af^2+lap-nap}{am-ap-ln+n^2}$. Sed cum n contineat y^2, patet ascendere incognitas ad sextam usque dimensionem. Et multo impeditior erit, si punctum D assumatur, extra axem. Et credam casum aliquem inveniri posse, in quo possit ita deprimi hinc nota aequatio, ut fiat inde aequatio ad Circulum; quo facto haberemus reductionem quadraturae Hyperbolae ad quadraturam Circuli.

Si D sit ipse vertex erit $DE \sqcap AC \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{a^2+2ax}}$. et $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$. Unde $EL \sqcap CL$ ponendo z, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax+x^2$. et $DE \sqcap AC$ ponendo y, fiet: $y^2 \sqcap \dfrac{a^2x^2}{a^2+2ax}$, et ex hac et: $x^2 \sqcap y^2 \frown \dfrac{a^2+2ax}{a^2}$. Unde inserendo hunc valorem in priore, fiet: $4z^2 \sqcap 2ax + \dfrac{y^2 \frown a^2+2ax}{a^2}$, sive $4z^2a^2 \sqcap 2a^3x+a^2y^2+2ay^2x$, sive $x \sqcap \dfrac{4z^2a^{\cancel{2}}-a^{\cancel{2}}y^2}{2a^{\cancel{3}2}+2\cancel{a}y^2}$; et $x^2 \sqcap \dfrac{16z^2a^2-8z^2y^2a^2+a^2y^4}{4a^4,+8a^2y^2+4y^4}$. Unde $4z^2 \sqcap \dfrac{4z^2a^2-a^2y^2}{\cancel{2}a^2+\cancel{2}y^2}+x^2$ etc. Sed hinc judicatu

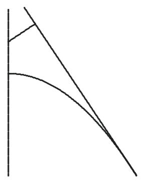
8 ad *(1)* sextum usqve gradum *(2)* sextam *L* 12 vertex *(1)* | fiet *streicht Hrsg.* | *(2)* erit *L* 13 $+x^2$. | qvae est ad Hyperbolam *gestr.* | et *L* 15 $+2ay^2x$, *(1)* sive $x^2 \sqcap \dfrac{4z^2a^2x-a^2y^2x}{2a^3+2ay^2} \sqcap \dfrac{a^{\cancel{2}}+2\cancel{a}x}{a^{\cancel{2}}}$ et reducendo: $4z^2a^3x-a^3y^2x \sqcap 2a^4y^2+2a^3xy^2+2a^2y^4+2ay^4x$, | sive *streicht Hrsg.* | $x \sqcap$ *(2)* sive *L*

3 $x^2 \sqcap$: Vor der folgenden Klammer fehlt ein Minuszeichen. Dieser und ein weiterer Vorzeichenfehler beeinträchtigen die daraus berechnete erste Gleichung für x in Z. 7, die zweite wird direkt aus der Gleichung ☿ bestimmt. 12 $EL \sqcap CL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax+x^2}}{2}$: vgl. die Erl. zu S. 165 Z. 6. 16 $x^2 \sqcap$: Konsequent gerechnet müsste der erste Term im Zähler der rechten Seite $16z^4a^2$ lauten. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

facile est, etiam in simplicissimo exemplo calculum sic satis prolixum, tanto magis in aliis. Sed persequi in omnibus Conicis valde operae pretium est, hinc enim in magnam Spem venio omnes Conicas ad se invicem reduci posse. Eadem serviet methodus etiam ad inveniendas dimensiones absolutas quarundam curvarum, dum scilicet quaeruntur quarum revolutione describantur curvae, quae aliarum quoque cognitarum revolutione describuntur, v. g. si Trochoeides paraboloeidis Heuratianae alterius quoque curvae Trochoeides esse possit, huc enim totius hujus schedae inquisitio redit, an fieri possit, ut una eademque curva sit Trochoeides plurium, eo ipso enim eae curvae erunt sygnotae; item an figurae quaedam cognitae, aliarum Trochoeides esse possint. Sed restat tantum inquirendum nonnihil, si punctum ipsum A non sit fixum, sed varians.

---

10 *Figur unter dem gestrichenen Text, nicht gestrichen:*



8 f. curvae *(1)* ad se invicem *(2)* erunt sygnotae *(a)*. Videndum *(b)*; item *L* 10 si *(1)* Tangens a *(2)* punctum *L* 10 varians. | sed de his vide parte 2. inqvisitionis in methodum Tangentium Cartesii inversam. 1674. *gestr.* | *L*

---

10 varians: s. N. 23. Der Verweis in der gestrichenen Variante bezieht sich auf den Schluss von N. 17, an den N. 23 inhaltlich anknüpft.

19. APPENDIX SCHEDIASMATIS DE TROCHOEIDIBUS ET RELATIONE REDUCTARUM AD ORDINATAS

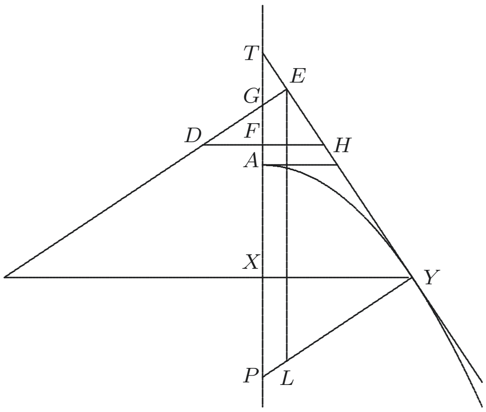
[24. – 31.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 15. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 15 r°. Bl. 15 v° leer. Cc 2, Nr. 829

Datierungsgründe: Das Stück ist nach dem auf den 24. Dezember datierten N. 18 entstanden.

Xb. 1674.

Appendix schediasmatis de Trochoeidibus et relatione Reductarum ad ordinatas



[*Fig. 1*]

Curva AY parabola, axis AX. tangens TY. punctum quoddam fixum D, ex quo perpendicularis ad tangentem DE. erit ergo parallela ipsi PY. Quaeritur relatio inter DE et EY. Datur DF, quam vocabimus $\underline{d}$, et FA, quam vocabimus $\underline{f}$. Est autem ex natura parabolae $XP \sqcap \underline{a}$, semilatus rectum et $TA \sqcap AX \sqcap \underline{x}$. et $XY \sqcap \sqrt{2ax}$. Ergo $TY \sqcap \sqrt{4x^2 + 2ax}$.

$\dfrac{GF}{DF \sqcap d} \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{a}$. Ergo $GF \sqcap \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $TG \sqcap AT$ sive x, demtis $AF + GF$. Ergo $TG \sqcap x - f - \dfrac{d}{a}\sqrt{2ax}$. Jam $\dfrac{TE}{TG} \sqcap \dfrac{TY}{TP \sqcap 2x + a}$. Ergo $TE \sqcap$

7–9 Xb. 1674. ... ordinatas *erg. L*

20 $\sqcap \dfrac{\sqrt{2ax}}{a}$: Richtig wäre $\dfrac{a}{\sqrt{2ax}}$. Der Fehler und weitere Versehen beeinträchtigen die folgenden Rechnungen, jedoch nicht die grundsätzlichen Überlegungen.

$\frac{\sqrt{4x^2+2ax},\frown x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$ et $EY \sqcap TY - TE \sqcap \sqrt{4x^2+2ax}\frown 1-\frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$

sive $EY \sqcap \sqrt{4x^2+2ax}\frown\frac{x+a+f+\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}$.

Jam $DG\sqcap\sqrt{d^2+\frac{d^2}{a^2}2ax}$, sive $DG\sqcap\sqrt{\frac{d^2a^2+d^2 2ax}{a^2}}$, sive $DG\sqcap\frac{d}{a}\sqrt{a^2+2ax}$.

Et $GE\sqcap\sqrt{TG^2-TE^2}$. sive $GE\sqcap\sqrt{TG^2-\frac{TY^2,TG^2}{4x^2+4ax+a^2}}$, sive $GE\sqcap$ $\frac{TG}{2x+a}\sqrt{\boxed{4x^2}+2\boxed{4}ax+a^2,\boxed{-4x^2}\boxed{-2ax}}$

sive $GE \sqcap \frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}\sqrt{2ax+a^2}$.

Et $DE\sqcap\frac{x-f-\frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{2x+a}+\frac{d}{a},\frown\sqrt{2ax+a^2}$, sive

$$\frac{xa-fa-d\sqrt{2ax}+2dx+ad}{\boxed{2ax+a^2}\sqrt{2ax+a^2}}\boxed{\sqrt{2ax+a^2}}\sqcap z.$$

sive $\frac{-d\sqrt{2ax}\ e\boxed{\begin{array}{l}+a\\+[2]d\end{array}}\begin{array}{l}x\\.\end{array}\ g\boxed{\begin{array}{l}-f\\+d\end{array}}\begin{array}{l}a\\a\end{array}}{\sqrt{2ax+a^2}}\sqcap z$. et quadrando:

$$\frac{2d^2ax-2dex\sqrt{2ax}-2dga\sqrt{2ax},+e^2x^2+2egax+g^2a^2}{2ax+a^2}\sqcap z^2$$

---

1 f. *Am rechten Rand:* Quaeritur relatio inter DE et EY.
Am linken Rand, isoliert: Jam $\frac{FH}{\sqrt{2ax}}\sqcap\frac{TF\sqcap x-f}{2x}$. $\frac{z[\sqcap]DE}{\omega\sqcap EY}\sqcap\frac{DH\sqcap d+FH}{EL}$. $\frac{z}{\omega}\sqcap$ $\frac{d+x-f\frac{\sqrt{2ax}}{2x}}{EL\sqcap}$ [*bricht ab*]

4 $\sqcap\sqrt{TG^2-TE^2}$. *(1)* sive GE $\sqcap x^2-2fx-\frac{2d}{a}x\sqrt{2ax},+f^2+\frac{2df}{a}\sqrt{2ax}+\frac{d^2}{a^2}2ax,,-$ *(2)* sive *L*

Unde ordinando: $\begin{array}{l} -2axz^2 - a^2z^2\,[+e^2x^2] + 2d^2\,ax + g^2a^2 \sqcap + 2dex\sqrt{2ax} \\ \qquad\qquad\qquad\quad + 2eg \qquad\qquad\quad + 2dga \end{array}$

$$\text{Aequationes duae: } z \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\,\sqrt{2x+a}}\,\boxed{\sqrt{2x+a}} \frown \sqrt{a}$$

$$\omega \sqcap \frac{x + a + f + \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\boxed{2x+a}\,\sqrt{2x+a}}\,\boxed{\sqrt{4x^2+2ax}}\,\sqrt{2x} \frown \boxed{\sqrt{2x+a}}$$

$$\sqrt{2x+a} \sqcap \frac{x - f - \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{z}\,\sqrt{a} \sqcap \frac{x + a + f + \frac{d}{a}\sqrt{2ax}}{\omega}\,\sqrt{2x} \text{ sive}$$

7–12 *Zur ersetzten Stufe (1) der Variante:* Error

1+3 $\sqrt{2\mathrm{ax}}$ *(1)* An brevius: $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} + \frac{\mathrm{x} - \mathrm{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x}+\mathrm{a}}, \frown \sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} \sqcap \mathrm{z}$. Ergo $\frac{\mathrm{x} - \mathrm{f} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}}}{2\mathrm{x}+\mathrm{a}}$ *(a)* $\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} \sqcap -\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} + \mathrm{z} \sqcap$ *(b)* $\sqcap \frac{-\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} + \mathrm{z}}{\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2}} \sqcap \frac{\mathrm{EY} \sqcap \omega}{\sqrt{4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}}}$. adeoqve: $\frac{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{a}^2}2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2 - \frac{2\mathrm{zd}}{\mathrm{a}}\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} + \mathrm{z}^2}{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2} \sqcap \frac{\omega^2}{4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}}$. Jam $2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2 \frown \frac{2\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$ dat $4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax}$ vel $4\mathrm{x}^2+2\mathrm{ax} \frown \frac{\mathrm{a}}{2\mathrm{x}} \sqcap 2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2$ ergo dividendo utrobiqve per $2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2$, fiet: $\mathrm{xd}^2 \frown \llcorner 2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2 \lrcorner\lrcorner - 2\mathrm{d}\cancel{\mathrm{z}}\mathrm{xa}\,\underbrace{\boxed{\sqrt{2\mathrm{ax}+\mathrm{a}^2}}}_{\frac{\mathrm{xa}-\mathrm{fa}-\mathrm{d}\sqrt{2\mathrm{ax}}+2\mathrm{dx}+\mathrm{ad}}{\cancel{\mathrm{z}}}} + \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2\mathrm{x} \sqcap \mathrm{a}^3\omega^2$

sive $\frac{\mathrm{xd}^2 2\mathrm{ax} + \mathrm{xd}^2\mathrm{a}^2, -2\mathrm{dxaxa} + 2\mathrm{dxafa} - 2\mathrm{dxa}2\mathrm{dx} - 2\mathrm{dxaad} + \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2\mathrm{x} - \mathrm{a}^3\omega^2}{\cancel{\mathrm{d}}} \sqcap \sqrt{2\mathrm{ax}} \sqcap$

$\frac{\begin{array}{l} -2\mathrm{axz}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{z}^2 + 2\mathrm{d}^2\mathrm{ax} + \mathrm{g}^2\mathrm{a}^2 \\ \qquad\qquad +2\mathrm{eg}\,.\,. \end{array}}{\begin{array}{l} +2\cancel{\mathrm{d}}\mathrm{ex} \\ +2\cancel{\mathrm{d}}\mathrm{ga} \end{array}}$ *(2)* Aeqvationes *(a)* tres: *(b)* duae *L*

---

3 $z \sqcap$: Leibniz setzt für $z = DE$ irrtümlich den von ihm für GE berechneten Wert ein.

$$+x-f\frown\omega\sqrt{a}-\frac{d}{a}\sqrt{a}\frown 2xz\ \sqcap\ \begin{array}{ll} & \frac{d}{\cancel{a}}\,\omega\,\cancel{a}\ \sqrt{2x}\\ + & x\ z\\ + & a\ .\\ + & f\ .\end{array}$$

et ordinando

$$\begin{array}{l}+\quad\omega\sqrt{a}\,x-\omega f\sqrt{a}\\ -2\,z\,\frac{d}{a}\sqrt{a}\ .\end{array}\ \sqcap\ \begin{array}{l}x\,z\,\sqrt{2x}\\ \omega\,d\\ +a\,z\\ +f\,z\end{array}$$

sive

$$\sqrt{2x}\sqcap\frac{\begin{array}{l}\omega\sqrt{a}\,x-\omega f\sqrt{a}\\ -\frac{2zd}{a}\sqrt{a}\ .\end{array}}{\begin{array}{l}xz+d\omega\\ az\\ fz\end{array}}\sqcap\frac{-z\sqrt{2x+a}}{\boxed{\sqrt{a}}}+x\sqrt{a}-f\sqrt{a},,\smile\frac{d}{a}\boxed{\sqrt{a}}\sqcap\frac{\omega\sqrt{2x+a}-\frac{d}{a}\sqrt{a}2x}{x+a+f}.$$

$$\text{Ergo }\sqrt{2x+a}\ \sqcap\ \frac{\begin{array}{l}\omega\sqrt{a}\,x-\omega f\sqrt{a}\\ -\frac{2zd}{a}\sqrt{a}\ .\end{array}}{\begin{array}{l}xz+d\omega\\ az\\ f\ .\end{array}}\ \frown\ d,,+f-x,,,\smile -z$$

$$\sqcap\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ \frown\ x+a+f,,+\frac{d}{a}\sqrt{a}2x,,,\smile\omega.$$

Unde

5 *(1)* et qvadrando: x^2 *(2)* et *L* 12–14 $\begin{array}{l}\smile -z\\ \smile\ \omega\end{array}$ *(1)* $\Big\}$ sive $\frac{\begin{array}{l}\omega\sqrt{2a}\ \ x-\omega f\sqrt{a}\ \frown\\ -2z\frac{d\sqrt{a}}{a}\ .\end{array}}{\boxed{\begin{array}{r}x+d\\ a\\ f\end{array}}}, \boxed{\begin{array}{l}d\\ x\\ a\\ f\end{array}},,+$ *(2)* Unde *L*

---

12 $+f-x$: Konsequent gerechnet müssten beide Terme mit $\sqrt{a}$ multipliziert werden.

$$\begin{array}{rllll} \omega & \boxed{\sqrt{a}} \; x - \omega f \boxed{\sqrt{a}},, \frown + \dfrac{d}{z} & ,,, \; \dfrac{+f-x}{z} \boxed{\sqrt{a}} + \dfrac{d}{a\omega} 2x \boxed{\sqrt{a}},, \frown xz + d\omega + a \; z \sqcap 0. \\ -\dfrac{2zd}{a} & \boxed{\sqrt{a}} \; . \qquad\qquad \dfrac{x+a+f}{\omega} & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad +f \;\; . \end{array}$$

Unde reducendo patet x non assurgere ultra quadratum. Cum antea semper ad cubum assurgere videretur, quo specimine discimus non semper ad quadrationes et irrationalium ablationes properandum.

Ex hac jam aequatione repertus valor ipsius x. inseratur in aliqua ex aequationibus superioribus, et evanescente x. solae restabunt incognitae z et ω.

Quo facto videndum est an aequatio inde orta sit ejusmodi, ipsis, d. et f (: et inde pendente e :) pro arbitrio explicatis, ut possit aequatio producta dividi per aliam ad Circulum, $z^2 \sqcap 2a\omega - \omega^2 + 2ag$. in qua rursus g arbitraria est. Ope igitur trium arbitrariarum utique procederet divisio, et proinde curva eadem certo casu a circulo et a parabola provolutis describeretur, adeoque haberetur curvae circularis et parabolicae dimensio, vel quadratura Circuli et Hyperbolae simul.

20. DE PROBLEMATIS QUADRATURARUM REDUCENDIS
[24. – 31.] Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 166. 1 Bl. 2°. 2 S. Textfolge Bl. 166 v°, Bl. 166 r°.
Cc 2, Nr. 830

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück verweist auf das auf den 24. Dezember 1674 datierte N. 18.

Xb. 1674.

De problematis quadraturarum reducendis ad dimensiones curvarum deque methodo tangentium inversa per duas radices aequales

Dimensio curvae propositae semper haberi potest, supposita quadam quadratura, sed non semper data quadratura inveniri potest curva cujus in rectum extensione absolvi possit. Quadratura Circuli et Hyperbolae per extensiones Curvarum Circuli et parabolae habetur; hoc si in omnibus quadraturis fieri posset, non laboraremus. Videndum tamen:

Sit curva quaelibet cujus aequatio: $x^2 + \dfrac{l}{a}yx + \dfrac{m}{a}y^2 + nx + py + aq \sqcap 0$. $BT \sqcap t$. $AB \sqcap$

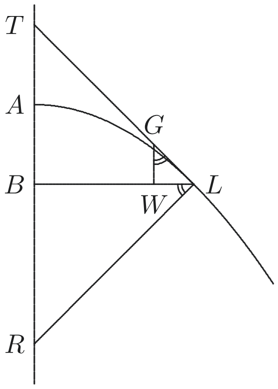
---

10 f. *Nebenbetrachtung, durch Striche abgetrennt:*
$a^2 - x^2 + y^2 \sqcap s^2$. $v^2 + x^2 - 2vx + y^2 \sqcap s^2$. Ergo $v^2 + x^2 - 2vx + \boxed{s^2} + x^2 - a^2 \sqcap \boxed{s^2}$ Ergo $x^2 - vx \left\{\begin{array}{c} +v^2 \\ \underline{-a^2} \\ 2 \end{array}\right. \sqcap 0$. Quam ad duas aequales radices determinari impossibile, nisi a ponatur $\sqcap 0$.

10 f. deqve ... aeqvales *erg. L* 16 aeqvatio *(1)* $\mathrm{x}^3 + \dfrac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{yx}^2 + \dfrac{\mathrm{m}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2\mathrm{x} + \dfrac{\mathrm{n}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^3 +$ *(2)* x^2 *L*

---

11 inversa: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f. 19 $\sqcap 0$: Für $v^2 = 2a^2$ ergeben sich Doppelwurzeln.



[*Fig. 1*]

x. $BL \sqcap y$. Ordinetur secundum tangentes et fiet:

$$\begin{array}{llll} 2xt & +\,\dfrac{l}{a}yt & \sqcap\ -\,\dfrac{l}{a}xy & -\,\dfrac{2m}{a}y^2. \\ & +\ n\ \ .. & \ \ \ -\ p\ \ .. & \end{array}$$

Ergo $t \sqcap \dfrac{\begin{array}{l} -\dfrac{l}{a}xy - \dfrac{2m}{a}y^2 \\ -p\ \ .. \end{array}}{2x + \dfrac{l}{a}y + n}$. Pro y substituatur ejus valor, ut habeatur t per x tantum. Jam $\dfrac{WL}{GW \sqcap \beta} \sqcap \dfrac{BL \sqcap y}{BT \sqcap t}$. Ergo $WL \sqcap \dfrac{\beta y}{t} \sqcap \beta \frown \dfrac{2x + \dfrac{l}{a}y + n}{\begin{array}{l} -\dfrac{l}{a}x - \dfrac{2m}{a}y \\ -p \end{array}}$. Jam ex superioribus:

$$\begin{array}{llll} y^2 & +\,\dfrac{l}{m} & xy & \\ & +\,\dfrac{ap}{m} & .. & \end{array} \dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\,\dfrac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\,\dfrac{2lapx}{m^2} \\ +\,\dfrac{a^2p^2}{m^2} \end{array}\right.}{4} \sqcap \left\{\begin{array}{l} +\,\dfrac{l^2}{m^2}x^2 \\ +\,\dfrac{2lapx}{m^2} \\ +\,\dfrac{a^2p^2}{m^2} \end{array}\right\} \smile 4 \quad -\,\dfrac{a}{m}x^2 - \dfrac{a}{m}nx - \dfrac{a^2}{m}q.$$

---

6 *Nebenbetrachtung, durch Strich abgetrennt:* $BR \sqcap \dfrac{WLy}{\beta}$. $\dfrac{\sqrt{WL^2+\beta^2}}{\beta} \sqcap \dfrac{s}{y}$. $y^2WL^2 + \beta^2y^2 \sqcap \beta^2s^2$. Jam $BR^2 \sqcap v^2 - 2vx + x^2$. Latet vero etiam x in WL. Unde elidendo x, restabit una incognita y determinanda ad duas radices aequales.

1 f. fiet: *(1)* $2x^2 + \frac{l}{a}y \sqcap$ *(2)* $2xt + \frac{l}{a}$ *(a)* ytx *(b)* yt $\sqcap$ *L* 5 $\frac{WL}{GL \sqcap \beta}$ *L ändert Hrsg.*

7–176,1 $-\frac{a^2}{m}q$. | Ergo $\ddagger y \ddagger \frac{lx+ap}{2m}$. *streicht Hrsg.* | Ergo *L*

Ergo $y \sqcap \dfrac{-lx - ap \ddagger \sqrt{\begin{array}{llll} l^2 & x^2 & -2manx & -2a^2qm \\ -2ma.. & & -2alp\ \ .. & +a^2p^2 \end{array}}}{2m}$. Qui valor in locum ipsius y in valore WL substitui potest.

Jam si $\sqrt{WL^2 + \beta^2}$ quaeratur, inquiretur in progressionem ipsius curvae.

Quod si vero data sit figura, et quaeratur alia seu BL cujus sit WL vel BR, item si data sit GL, et quaeratur BL, videndum an alteram ad alteram revocari queat.

Exempli causa si sit $BR^2 \sqcap 2ax \ddagger \dfrac{a}{b}x^2$, et $BL \sqcap y$. et $LR \sqcap \langle s \rangle$ fiet:

$$\odot \quad 2ax \ddagger \frac{a}{b}x^2 + y^2 \sqcap s^2{}_{[,]}$$

aequatio determinanda ad duas ipsarum x et y radices aequales.

Si detur $WL \sqcap \gamma \dfrac{\sqrt{2ax \ddagger \dfrac{a}{b}x^2}}{a}$, erit $\dfrac{BR}{BL} \sqcap \dfrac{WL}{\beta \sqcap GW}$. Ergo $BR \sqcap \dfrac{WLy}{\beta}$. Jam $BR^2 \sqcap \dfrac{2\gamma^2y^2\cancel{a}x \ddagger \dfrac{\gamma^2y^2\cancel{a}x^2}{b}}{a^{\cancel{2}}\beta^2}$. Unde

$$☽ \quad 2\gamma^2xy^2 \ddagger \frac{\gamma^2}{b}x^2y^2 + a\beta^2y^2 \sqcap s^2\beta^2a.$$

Determinata autem formula $\odot$ ad duas radices aequales etiam determinata est formula ☽.

Si autem GL detur $\sqcap \gamma \dfrac{\sqrt{2ax \ddagger \dfrac{a}{b}x^2}}{a}{}_{[,]}$ ergo $WL \sqcap \dfrac{\sqrt{2ax\gamma^2 \ddagger \dfrac{a}{b}x^2\gamma^2 - \beta^2a^2}}{a}$. Ergo $BR^2 \sqcap \dfrac{2\cancel{a}y^2x\gamma^2 \ddagger \dfrac{\cancel{a}}{b}x^2\gamma^2y^2 - \beta^2a^{\cancel{2}}y^2}{\beta^2a^{\cancel{2}}}$.

6 sit *(1)* $\mathrm{BR}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} + \mathrm{m} + \boxed{\sqrt{\cdots}}$ etc. *(2)* BR^2 *L* 9 Si | qvaeris *ändert Hrsg.* | $\mathrm{WL} \sqcap$ *L*

9 f. $\mathrm{BR}^2 \sqcap$ *(1)* $\dfrac{2\beta\mathrm{xy}^2 \ddagger \dfrac{\beta}{1}\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2}{\beta^2\mathrm{a}^2}$ *(2)* $\dfrac{2\beta\mathrm{xy}^2 \ddagger \dfrac{\gamma}{1}\mathrm{x}^2\mathrm{y}^2}{\beta^2\mathrm{a}^2}$ *(3)* $\dfrac{2\gamma^2\mathrm{y}^2\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{x} \ddagger \gamma^2\mathrm{y}^2\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^{\cancel{2}}\beta^2}$ *L* 14 autem *(1)* qvaeratur *(2)* GL *L*

1 Ergo: In der folgenden Gleichung müsste unter dem Wurzelzeichen stehen: $l^2x^2 - 4manx - 4a^2qm - 4max^2 + 2alpx + a^2p^2$.

Unde: $2b\gamma^2 x\boxed{y^2} \mp \dfrac{x^2\gamma^2}{\cancel{b}}\boxed{y^2}\boxed{-\beta^2 a\boxed{y^2}+\beta^2 a y^2} \sqcap bs^2\beta^2 a.$

Unde patet res memorabilis quando curva quaeritur, semper ipsius y quadratum addendum rursus destrui ac proinde facilius inveniri curvam homogeneam quam quadraturam. Porro haec aequatio videtur facilius posse determinari ad duas radices aequales; nam si secundum y^2 ordinetur, jam est determinata ad duas radices aequales, quia aequatio est pura, omnis autem aequatio pura est ad duas radices aequales. Hinc tantum determinanda x ad duas radices aequales. Sed ego jam in his errorem esse puto. Nam alioquin et quadraturae semper darentur.

Aequatio $2b\gamma^2 xy^2 \mp \gamma^2 x^2 y^2 - ab\beta^2 s^2 \sqcap 0$[,] ut determinetur ad duas radices aequales, ordinetur primum secundum x, fiet: $x^2 \mp 2bx \pm \dfrac{ab\beta^2}{\gamma^2 y^2}s^2 \sqcap 0$. Conferenda cum hac

$$\begin{array}{r}
+x \quad -e \ \sqcap 0\\
+x \quad -e \ \sqcap 0\\
\hline
+x^2-2ex\,[+]\,e^2 \sqcap 0.
\end{array}$$

Sed malum in eo esse video quod praeter capitales x, et y. non nisi una in aequatione data est incognita s. Et tamen collationes instituendae sunt duae. Cum contra in aequatione tangentium directa, ubi non nisi una instituenda sit aequatio semper duae incognitae v, et s. offerantur. Ergo hic pro x ponamus: $z+\omega$. Fiet:

$$\begin{array}{l}
z^2 + 2\omega z + \omega^2 \qquad \sqcap 0.\\
\quad \mp 2b \,..\, \mp 2b\omega\\
\qquad\qquad \pm \dfrac{ab\beta^2}{\gamma^2 y^2}s^2
\end{array}$$

Conferenda cum $z^2-2ez+e^2 \sqcap 0$. Fiet: $e \sqcap -\omega \pm b$. et $e^2 \sqcap \omega^2 \mp 2b\omega + b^2$, ergo $b \sqcap \pm\dfrac{a\beta^2 s^2}{\gamma^2 y^2}$, sive $\dfrac{s^2}{y^2} \sqcap \pm\dfrac{\gamma^2 b}{a\beta^2}$, sive $\dfrac{s}{y} \sqcap \dfrac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm\dfrac{b}{a}}$. Quae conclusio rursus absurda est. Habetur enim valor ipsius s ante tempus.

---

6 Imo falsum est aequationem puram duas habere radices aequales cum habeat oppositas.

20 $\dfrac{\gamma}{\beta}\sqrt{\pm\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}}$ *L ändert Hrsg.*

---

6 omnis: Die folgende Behauptung ist falsch, wie Leibniz selbst am Rand vermerkt.

An forte sic: $x \sqcap z + \omega$ et $y \sqcap v + \dfrac{c}{a}\omega$. Unde:

$$\begin{array}{ll} z^2 + 2\omega z + \omega^2 & \sqcap 0. \\ \dagger\ 2b..\ \dagger\ 2b\omega & \\ \qquad \ddagger\ \dfrac{ab\beta^2 s^2}{\gamma^2 v^2 + 2\gamma^2 \dfrac{c}{a} v\omega + \gamma^2 \dfrac{c^2}{a^2}\omega^2} & \end{array}$$

Unde post collationes fiet: $b \sqcap \ddagger \dfrac{\dfrac{a\beta^2 s^2}{\gamma^2}}{v^2 + \dfrac{2c}{a}v\omega + \dfrac{c^2}{a^2}\omega^2}$. Sed jam video ista esse erronea, quia ita non x. et y. sed z seu $x-\omega$, et v, seu $y-\dfrac{c}{a}\omega$ ad duas radices aequales determinabuntur.

An sic: $\dfrac{GL}{\sqrt{GL^2-\beta^2}} \sqcap \dfrac{s}{v-x}$ scilicet ponendo: $AR \sqcap v$. et $AB \sqcap x$.

Itaque $\dfrac{GL^2}{GL^2-\beta^2} \sqcap \dfrac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et pro GL^2 ponendo ejus valorem, hoc loco: $2ax \dagger \dfrac{a}{b}x^2$ fiet $\dfrac{2ax \dagger \dfrac{a}{b}x^2}{2ax \dagger \dfrac{a}{b}x^2 - \beta^2} \sqcap \dfrac{s^2}{v^2-2vx+x^2}$. Et in hac aequatione quod mirum non nisi una incognita capitalis est, x. Sed malum, quod non ita veniri potest ad duas radices aequales. Haec aequatio si jungatur superiori: $2ax \dagger \dfrac{a}{b}x^2 \sqcap \dfrac{s^2\beta^2}{y^2}$, ad duas radices aequales determinandae poterit inde fieri aequatio, in qua duae sint incognitae capitales ad duas radices aequales determinandae, et duae incognitae incidentes, s et v. Sed vereor tamen tunc quoque ne res non succedat, quia una aequatio alteri perfecte inserenda est, id est elidenda incognita.

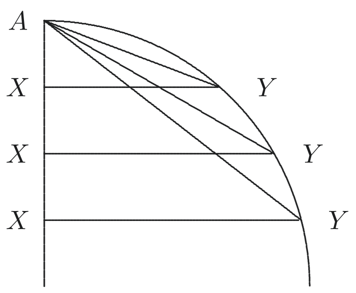
Nota[:] si junctis inter se duabus aequationibus elidere velis x, restabit una tantum incognita duarum radicum aequalium. Et ea determinata elidetur s. vel v. et habebitur

7 sic *(1)* $\dfrac{\mathrm{GL}}{\beta} \sqcap \dfrac{\mathrm{s}}{\mathrm{y}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{GL}}{\sqrt{\mathrm{GL}^2-\beta^2}}$ *L* 13 incognitae *(1)* supernumerariae *(2)* incidentes *L*

9 $2ax \dagger \dfrac{a}{b}x^2$: Leibniz vergisst den Faktor $\dfrac{\gamma^2}{a^2}$ für diesen Ausdruck. Dies wirkt sich auch auf die zwei folgenden Gleichungen aus.

aequatio in qua duae tantum supersint y et v. vel y. et s. Quarum proinde relatio habebitur. Et tale problema solvi poterit revolutione curvae, ut alibi docui ubi *de Geometria arcana et Methodo Tangentium inversa*, et *Trochoeidibus* Xb. 1674. Nimirum ad descriptiones illas ne puncto quidem fixo absolute opus esse arbitror. Omnia ergo problemata Methodi tangentium inversae ad curvarum in rectum extensiones reducerentur.

Notandum est unum hactenus a me omissum, et ut arbitror a Cartesio animadversum, non esse necesse, ut incognitae x. et y. seu capitales sint ordinata et abscissa, imo aliquando esse satius, ut sint rectae non parallelae rectangulae, sed parallelae obliquae, imo et convergentes.



[*Fig. 2*]

Ponendo $AX \sqcap x$, et $AY \sqcap y$. ita aequatio ad circulum est: $2ax \sqcap y^2$, quae alioquin ad parabolam. Ita fiet ut incognitae magis varientur, et facilius ad duas radices aequales aequationes determinentur.

Notanda valde haec schedula, cum tot nova obtulerit.

Nota: an curva quadam data punctum fixum capax demissam ad tangentes, quales postulamus, non ita inquirendum ut initio feceram in schediasmate *de Geometria arcana et methodo Tangentium inversa* sed ut in schediasmate *de Trochoeidibus*, ubi ex puncto assumto calculo.

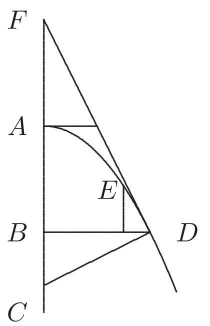
2 f. *de ... inversa*: vgl. *De progressionibus et geometria arcana et methodo tangentium inversa*, VII, 3 N. 39, insbesondere S. 570–574; *Trochoeidibus*: N. 18 u. 19. 6 a Cartesio: vgl. den Brief von Descartes an Debeaune vom 20. Februar 1639, gedr. in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 412–414 [Marg.] (*DO* II S. 514–517). Zum Übergang von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Koordinaten vgl. auch Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176 f. [Marg.].

21. METHODUS TANGENTIUM INVERSA
[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 6. 1 Bl. 4°. 1 1/2 S.
Cc 2, Nr. 840

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück setzt VII, 3, N. 39, dat. Dezember 1674, voraus (vgl. S. 181 Z. 4–7 und die zugehörige Erl.). Die Symbole für Mehrfachvorzeichen in den Varianten zu S. 181 Z. 8 – S. 182 Z. 1 verwendet Leibniz bis Anfang 1675.

M e t h o d u s   t a n g e n t i u m   i n v e r s a



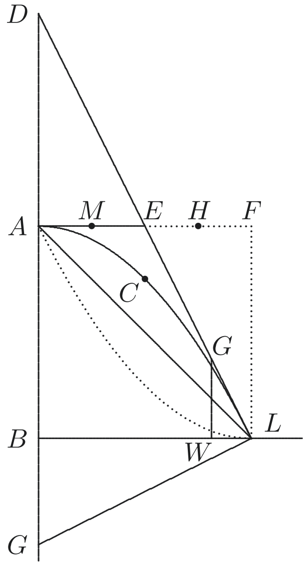
[*Fig. 1*]

Circa methodos Tangentium inversas notandum est, quando ex data BC. quaeritur BD. inquisitionem vel ideo satis difficilem esse, quia $BD \sqcap y$ habetur simpliciter ad quadratum ascendens, nam $BC^2 + y^2 \sqcap CD^2$ atqui talis aequatio ordinata secundum y^2,
$/ \quad \backslash$
$x^2 \,..\, x.\ a \qquad\qquad p^2$
non potest ad duas radices aequales determinari, quia nulla aequatio pura quadratica ad duas aequales radices determinari potest; sed contra ad duas oppositas, seu mole aequales, forma sive signo inaequales, jam determinata est.

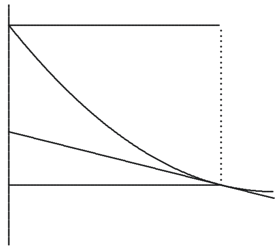
Cui malo videndum est an remedium quaeri possit, vel explicando quod experiemur, vel alia inquirendi ratione substituta:

8 M e t h o d u s ... i n v e r s a *erg. L* 14 qvia *(1)* omnis pur *(2)* nulla *L* 15 duas *(1)* inaeqvales *(2)* oppositas *L* 16 f. est. *(1)* Esto aeqvatio: *(2)* Cui *L*

14 determinari: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10 f.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Nempe non tantum semper haberi potest summa omnium BG, vel Summa omnium WL; sed et summa omnium AH. vel FM. Nimirum summa omnium AE aequatur segmento $ALCA$ duplicato; summa omnium EF concavo $AFLCA$ duplicato. Jam concavum simplex auctum segmento simplici aequatur Triangulo ABL. Ergo summa omnium AH, seu $AE + EH$ (ponendo $EH \sqcap \frac{EF}{2}$), vel summa omnium MF seu $EF + EM$ (ponendo $EM \sqcap \frac{AE}{2}$), aequatur Triangulo ABL. Appellando ergo AB, x, BL, y. $BD \sqcap l$. Erit $AD \sqcap -\,l + x$. vel si mavis $+l - x$ et $\frac{AE}{AD}$ erit: $\sqcap\ \frac{y}{l}$. Adeoque $AE \sqcap \frac{yAD}{l}$ sive

3 omnium *(1)* EF. *(2)* AH. *L* 5 segmentum *L ändert Hrsg.* 8 AD ⊓ *(1)* ⟨ǂ⟩l ǂ x. vel si mavis ⁺ǂl ⁺ǂ x *(2)* | + *ändert Hrsg.* | l + x *L*

---

1 *Fig. 2*: Die Punktbezeichnung G tritt zweimal auf. Im Text wird nur der auf der Geraden $DABG$ liegende Punkt verwendet. 2 semper: Dies setzt voraus, dass die Ordinate BL bekannt ist. 4–7 summa … ABL: Der richtige Wert für die Summe der EF wäre die einfache, nicht die doppelte Fläche $AFLCA$. Der Fehler wirkt sich aus auf die Summierung der AH. Leibniz hält die Summe der AH irrtümlich für gleich mit der Summe der MF, für die er den richtigen, in VII, 3 N. 39 S. 566 berechneten Wert angibt.

$AE \sqcap \dfrac{+yl-yx}{l}$. Porro $EF \sqcap y - AE$, sive $EF \sqcap \dfrac{yl-yl+yx}{l}$, fiet: $EF \sqcap \dfrac{yx}{l}$ et $EH \sqcap \dfrac{yx}{2l}$, et $AH \sqcap AE+EH \sqcap \dfrac{2yl-2yx+yx}{2l}$ sive $AH \sqcap \dfrac{2yl-yx}{2l}$.

Ponamus jam exempli causa AH esse applicatam parabolae quae valeat $\dfrac{x^2}{a}$, fiet $\dfrac{x^2}{a} \sqcap \dfrac{2yl-yx}{2l}$ sive $\underset{-}{+2lx^2}\underset{-}{+yxa}\underset{+}{-2yla} \sqcap 0$. et $l \sqcap \dfrac{yxa}{+2ya-2x^2}$. Est autem $\dfrac{l}{y} \sqcap \dfrac{y}{BG}$ seu $\dfrac{BG}{y} \sqcap \dfrac{y}{l} \sqcap \dfrac{1}{\dfrac{xa}{2ya-2x^2}} \sqcap \dfrac{2ya-2x^2}{xa}$, fiet: $BG \sqcap \dfrac{2y^2a-2x^2y}{xa}$[,] cujus quadratum: $\dfrac{4y^4a^2-4y^3ax^2,+4x^4y^2}{x^2a^2}$, addatur ei $BL^2 \sqcap y^2$, fiet: $\dfrac{4y^4a^2-4y^3ax^2+4x^4y^2+y^2x^2a^2}{x^2a^2} \sqcap p^2$, ponendo $p \sqcap GL$. sive

$$\begin{array}{llllll} y^4 & -\dfrac{x^2}{a}\; y^3 & [+]\; \dfrac{x^4}{a^2}\; y^2 & * & -\dfrac{x^2}{4}\; p^2 & \sqcap 0. \\ & & \quad\dfrac{x^2}{4} \;\; .. & & & \end{array}$$

vel aliter ordinando:

$$\begin{array}{llllll} x^4 & * & -\dfrac{a^2p^2}{4y^2}\; x^2 & * & +\; y^2a^2 & \sqcap 0. \\ & & -\;\; ya \;\; .. & & & \\ & & +\;\; \dfrac{a^2}{4} \;\; .. & & & \end{array}$$

Aequationem $y^2 \langle - \rangle\, 2ey + e^2$, multiplicemus per $\dfrac{l}{a}y^2 + my + an$, fiet:

$$\begin{array}{lllll} \dfrac{l}{a}\; y^4 & -2\dfrac{le}{a}\; y^3 & +\dfrac{le^2}{a}\; y^2 & & \sqcap 0 \\ & +\; m \;\; .. & -\; 2em \;\; .. & +\; e^2m\; y & \\ & & +\; an \;\; .. & -\; 2ane \;\; .. & +\; e^2an \end{array}$$

sive:

1 AE ⊓ *(1)* ǂyl *(2)* $\dfrac{ǂ\,yl\,ǂ\,yx}{l}$ *(3)* $\dfrac{+yl-yx}{l}$ *L*

5 quadratum: Im Zähler des folgenden Bruches müsste $-8y^3ax^2$ stehen. Der fehlerhafte Term geht in die weiteren Rechnungen ein und wirkt sich bis zum Ende des Stücks aus.

$$\left.\begin{array}{cccccccccc}
y^4 & - & 2e\ y^3 & + & e^2\ y^2 & + & \frac{e^2ma}{l}\ y & + & \frac{e^2a^2n}{l} \\
 & + & \frac{ma}{l}\ .. & - & \frac{2ema}{l}\ .. & - & \frac{2a^2ne}{l}\ .. & & \\
 & & & + & \frac{a^2n}{l}\ .. & & & &
\end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Unde aequationes collatitiae:

$-lx^2 \sqcap -2ela + ma^2$, et $m \sqcap \dfrac{2ela - lx^2}{a^2}$. Et:

$$4x^4l + a^2x^2l \sqcap 4e^2a^2l - 8e\underbrace{m}_{\frac{2ela-lx^2}{a^2}}a^3 + 4a^4n, \text{ sive } n \sqcap \frac{4x^4l + a^2x^2l \begin{array}{c}+12\\ \boxed{\begin{array}{c}-4\\+16\end{array}}\end{array} \begin{array}{c}e^2a^2l\\ \boxed{e^2a^2l}\end{array} - 8elx^2a}{4a^4}.$$

Et $em \sqcap 2an$, sive $8e^2a^3\cancel{l} - 4a^2e\cancel{l}x^2 \sqcap 8ax^4\cancel{l} + 2a^3x^2\cancel{l} + 24e^2a^3\cancel{l} - 16e\cancel{l}x^2a^2$.

Sed displicet quod ita video $\underline{l}$ ubique evanescere et ipsius quod nolim, $\underline{e}$ valorem definiri. Cui malo nescio an mederi liceat explicando y per $z + q$.

22. DE TRIANGULO CURVARUM CHARACTERISTICO

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 20 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S.
Cc 2, Nr. 891

Jan. 1675.

De Triangulo Curvarum characteristico

Ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ TDL et GWL similia

(1) $TD \frown WL \sqcap DL \frown GW$, sive productae, in partes basis aequantur ordinatis in partes axis, seu ordinatarum summae id est ipsi figurae. Adde 21.

(2) $TD \frown GL \sqcap TL \frown GW$. seu summa Tangentium aequatur productis ad curvam. Adde 16.

(3) $DL \frown GL \sqcap TL \frown WL$. seu Tangentes ad basin (vel axem reciprocum. Directus AD reciprocus AE) aequantur momento curvae ex axe.

Ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ LDM, GWL similia:

(4) $DL \frown WL \sqcap DM \frown GW$. Ergo summa omnium reductarum ipsius DL semiquadrato.

(5) $DL \frown GL \sqcap ML \frown GW$. seu summa omnium perpendicularium ad curvam ex axe aequatur momento curvae ex axe.

---

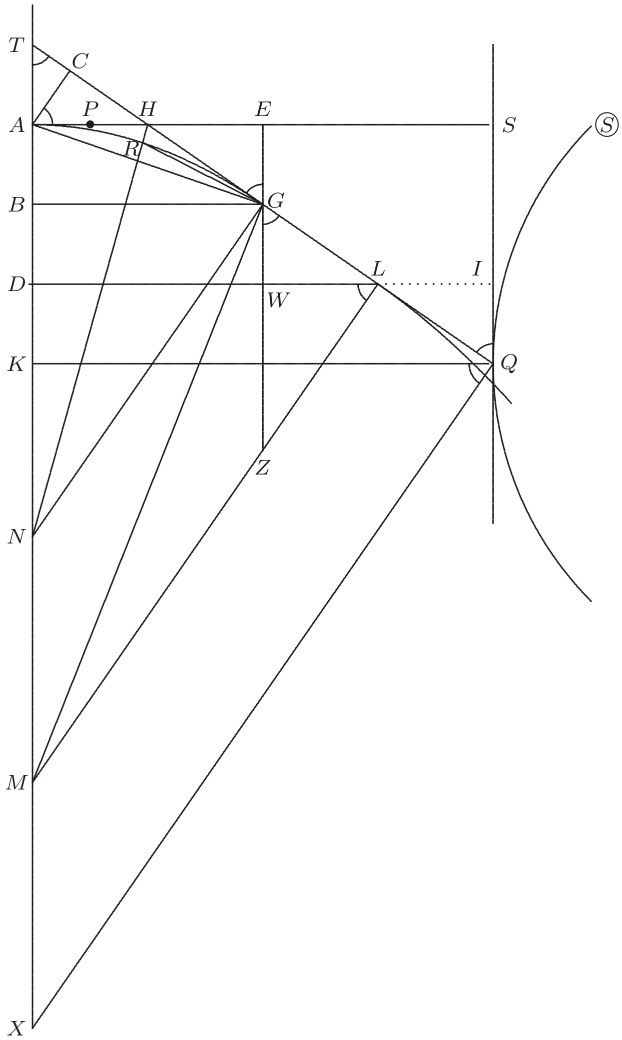
6 *Darunter:* Pleraque ista jam biennio abhinc a me deprehensa, hic breviter recolui; sub finem exemplum de crementorum Conicae momentis ex data Conicae quadratura.

15 f. *Hinter* semiquadrato: NB.

5 Ian. 1675. *erg. L* 6 de ... characteristico *erg. L* 7 ob ... similia *erg. L* 9 adde 21. *erg. L* 11 adde 16. *erg. L* 18 momento | figurae *ändert Hrsg.* | ex axe. | adde 19. *erg., streicht Hrsg.* | *L*

---

19 biennio abhinc: Leibniz bezieht sich wohl in erster Linie auf VII, 4 N. 26 u. 27; vgl. den Abschnitt zum charakteristischen Dreieck in der Einleitung, VII, 4 S. XXIII. 20 sub finem: s. u. die Sätze (27) bis (31) S. 189 Z. 21 – S. 191 Z. 7.



[*Fig. 1*]

C o r o l l a r. Hinc sequitur ex hac et 3, esse: $TL \frown WL \sqcap ML \frown GW$. Tangentes ad basin aequari summae perpendicularium scilicet ad axem.

(6) $DM \frown GL \sqcap ML \frown WL$ seu reductae ad curvam perpendicularibus ad basin.

2 |(6) *gestr.*| C o r o l l a r. *L*   3 f. axem. *(1)* (7) *(2)* (6) *L*   4 ad *(1)* axem *(2)* basin *L*

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia ACH, GWL

(8) $AC \frown WL \sqcap CH \frown GW$. Summa omnium $CH \sqcap$ omnibus AC. ad basin.

(9) $AC \frown GL \sqcap AH \frown GW$. seu summa resectarum aequatur duplo segmento AGA. quia summa omnium AC seu occurrentium, ad curvam aequatur dicto duplo segmento. Adde 11. et 14.

(10) $CH \frown GL \sqcap AH \frown WL$. seu occurrentes ad curvam, resectis ad basin.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia TAH, GWL

(11) $TA \frown WL \sqcap AH \frown GW$. seu summa omnium TA ad basin seu axem reciprocum, aequatur duplo figurae segmento. Quod idem etiam ex 1. demonstrari potest, nam quia omnes TD ad basin aequantur figurae convexo, et quoniam si a figurae convexo auferas omnes AD ad basin seu figurae concavum restat duplum figurae segmentum, patet residuorum TA summam ad basin aequari duplo figurae segmento, unde etiam 9. demonstrari posset. Adde 14.

(12) $TA \frown GL \sqcap TH \frown GW$.

(13) $AH \frown GL \sqcap TH \frown WL$.

Ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia GEH, GWL

(14) $GE \frown WL \sqcap EH \frown GW$. Omnes EG ad basin, aequantur summae omnium EH ad axem, unde cum constet EG ad basin complere figurae concavum, vel ut generalius loquamur s u p p l e m e n t u m ; sequitur etiam EH ad axem, eidem aequari, quod et ex prioribus, nempe 9. et 11. patet.

(15) $GE \frown GL \sqcap HG \frown GW$. seu summa omnium HG aequatur momento figurae ex vertice. Ut generalius loquamur, dicendum non ex vertice, sed axe reciproco. Potest enim fieri ut curva non perveniat ad AE.

(16) $HE \frown GL \sqcap GH \frown WL$. coincidit cum 2.

Sit in ipsa AH, medium punctum P, sequitur Theorema mirabile,

(17) summam omnium PE aequari Triangulo ABG. Nam si a summa omnium AE seu figura $ABGA$ auferatur summa omnium AP seu segmentum simplex AGA. restabit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ABG.

5 adde . . . 14 *erg. L* 9 ex *(1)* junctis *(2)* 1. *L* 13 adde 14. *erg. L* 15 f. $\sqcap$ TH $\frown$ WL *(1)* Sit in ipsa AH medium punctum P. *(2)* ob *L* 19 ad *(1)* basin *(2)* axem *L*

2 (8): Zählung springt. 6 occurrentes: Gemeint sind vielmehr die Tangentenabschnitte CH. 25 Theorema: vgl. N. 21 S. 181 Z. 6 f.

Portiones Tangentium infinite parvae seu latera curvae ponantur esse RG, GL etc. Sint N, M puncta ubi perpendiculares ad curvam axi occurrunt. Patet figuram totam $AMLGRA$. conflari ex omnibus Triangulis RNG, GML quorum vertices in axe[,] bases in curva; et ex omnibus Triangulis NGM etc. quorum vertices in curva[,] bases in axi. Jam

(18) summa omnium Triangulorum GNM, aequatur ordinatis in incrementa Reductarum dimidiatis seu $\dfrac{GB \frown NM}{2}$.

(19) Summa $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ RNG. aequatur dimidiis perpendicularibus in curvam.

(20) Hinc omnes $\dfrac{GB \frown NM}{2}$ aequantur spatio $AMLGRA$, demtis dictis dimidiis. Adde 26.

Sit recta SQ. ipsi ADK parallela; erit recta $KQ \sqcap a$. semper eadem. Porro $\bigtriangledown^{\text{la}}$ TKQ, GWL similia, hinc:

(21) $TK \frown WL \sqcap a \frown GW$. Semper ergo NB. habentur TK ad basin, et aequantur rectae constantis in abscissam facto. Unde et IQ, in basin WL, aequantur spatio inter curvam, et SI. Quod coincidit cum 1.

(22) $TK \frown GL \sqcap TQ \frown GW$.

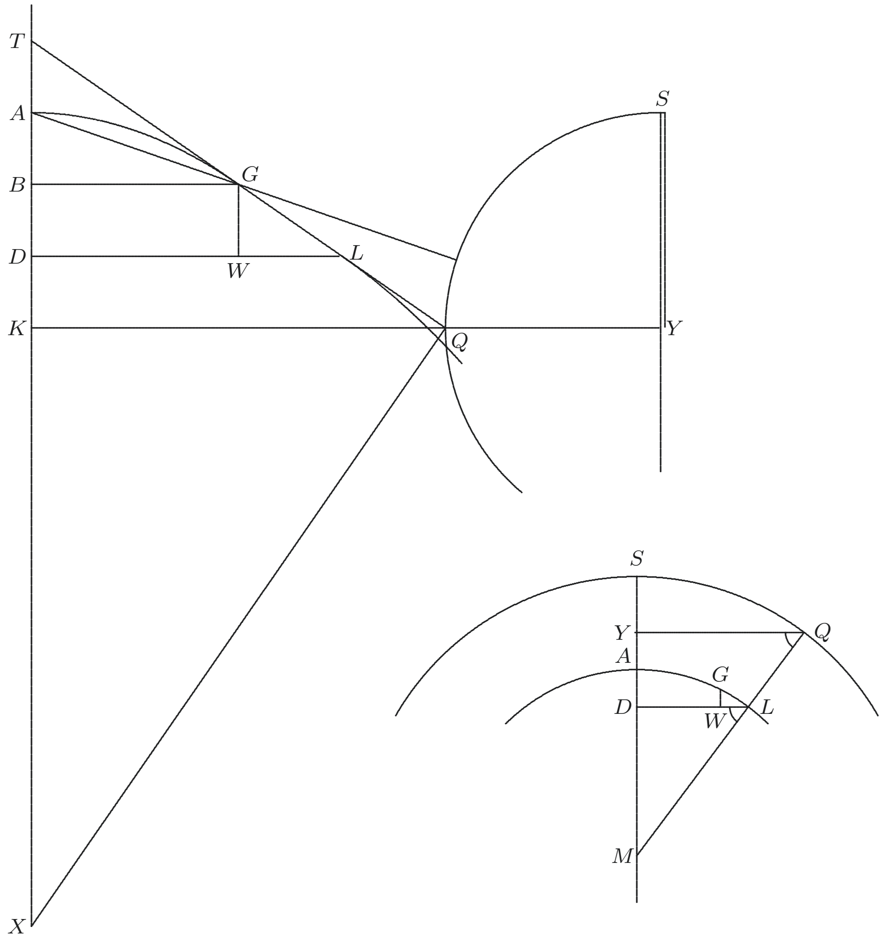
(23) $KQ\,(\sqcap a) \frown GL \sqcap TQ \frown WL$. Hinc summa omnium TQ. aeq. rectangulo sub curva et a.

Si ducatur QX perpendicularis ad TQ ob Triangula QKX et GWL similia, fiet

(24) (KQ sive) $a, \frown WL \sqcap KX \frown GW$. Habetur ergo summa omnium KX, quae semper aequabitur rectangulo $DL \frown a$. Sunt enim KX ipsis crementis seu WL homogenea.

1 f. etc. *(1)* sit N punctum ubi perpendicularis ad curvam occurrit *(2)* Sint *L* 8 f. dimidiis *(1)* productis in *(2)* perpendicularibus ... curvam | *(a)*, seu dimidio curvae momento ex axe. vide 5. *(b)* demtis ⟨—⟩ in perpendiculares *gestr.* | (20) *L* 9 aeqvantur *(1)* dimidio curvae momento ex axe *(2)* spatio AMLGRA, *(a)* demto dimidio curvae momento ex axe *(b)* demtis *L* 10 adde 26. *erg. L* 16 f. TK ⌢ GL ⊓ | DL ⌢ G. *ändert Hrsg.* | (23) *L* 17 ⊓ TQ ⌢ | GW. *ändert Hrsg.* | Hinc *L*

6 (18): Die folgende Aussage gilt für die NM, die Zuwächse der Subnormalen sind aber gleich $NM - GW$. Das Versehen wirkt sich auf Satz (26) aus.



[*Fig. 2*] [*Fig. 3*]

(25) Sit ipsa SQ non recta sed alia quaelibet linea v. g. Circularis. Idem dicendum est quod propositionibus 21. 22. 23. 24. nisi quod KQ. non est constans. Ideo nec $TQ \frown WL$, habetur nec $KX \frown GW$. Pone Circuli diametrum ipsi TX parallelam vel alterius curvae

3 f. nec | KQ $\frown$ GW, *ändert Hrsg.* | habetur *L* 4 pone *(1)* centrum *(2)* Circuli *L*

directricem SY. erit summa omnium KY, semper earundem seu rectangulum sub $KY \sqcap a$, et $AD \sqcap$ omnibus TK in WL. Hinc curvarum quarundam ex se invicem derivari possunt dimensiones, et rursus aperitur ratiocinandi campus; sed et eodem modo non tangentes, sed perpendiculares ad certam quandam lineam constantem rectam curvamve produci intelligi possunt, quae materia adhuc examinanda restat.

Usui inprimis haec inquisitio esse potest, cum portiones axis SY, semper aequales seu cum SY ipsi AD proportionaliter dividitur, quod intelligi inprimis potest in figuris similibus et similiter positis. Imo vereor ut eae semper proportionaliter dividantur, quod forte non nisi in circulis concentricis locum habet.

Huc adde cum curva una ad tangentem alterius angulum facit datum vel dato modo crescentem.

(26) Manifestum est ex dictis, spatium $AMLA \sqcap$ omn $GML +$ omn NGM. Vide 18. 19. 20. Jam omn $NGM \sqcap$ omn $\dfrac{GB \frown MN}{2}$. et $GML \sqcap \dfrac{GB \frown GZ}{2}$; et $GZ \sqcap GW + \dfrac{WL^2}{GW}$: et $AMLA \sqcap$ omn $GB \frown GW + \bigtriangledown LDM$. Ergo fiet:

$$\text{omn } GB \frown GW + \bigtriangledown LDM \sqcap \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} + \text{omn } \frac{GB \frown GW}{2}, + \text{omn } \frac{GB \frown WL^2}{2\,GW}$$

sive auferendo utrobique $GB \frown GW$, fiet:

$$+\bigtriangledown LDM \sqcap + \text{omn } \frac{GB \frown MN}{2} - \text{omn } GB \frown \frac{GW}{2}, + \text{omn } GB \frown \frac{WL^2}{2\,GW}.$$

Patet ergo *quadraturam figurae ex his tribus compositae semper haberi*. Unde sequitur si ex his tribus habeatur una haberi et compositam ex caeteris, si habeantur duae etiam tertiam haberi.

(27) In *Conicis* ipsa MN est constans, posito GW esse constantem; sive GW ad MN certam semper constantemque habet rationem, unde sequitur *in Conicis* $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW}$ *pendere ex quadratura figurae.*

5 intelligi | potest *ändert Hrsg.* |, qvae *L* 16 utrobiqve | $\dfrac{\mathrm{GB} \frown \mathrm{GW}}{2}$ *ändert Hrsg.* |, fiet *L* 19 et *(1)* summam, vel *(2)* compositam *L*

17 $+\bigtriangledown LDM \sqcap$: Da Leibniz die MN statt der $MN - GW$ für die Zuwächse der Subnormalen hält (s. o. S. 187 Z. 6 f.), erkennt er nicht die mögliche Vereinfachung der rechten Seite der Gleichung.

(28) In omni figura $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW}$ dupliciter concipi possunt, vel sumendo GW constantem, vel sumendo WL constantem. Itaque sic dici potest: Crementorum quadrata ducta in figuram, aequantur momento ex initio, figurae crementorum contrariorum (ad alteram directricem) reciprocae.

(29) Hinc sequitur in Conicis tam crementorum quadrata seu momenta ex axe ducta in figuram, quam momentorum momenta ex principio, figurae crementorum contrariorum reciprocae haberi posse: supposita Conicae Quadratura.

(30) Operae pretium est in eam rem calculo uti. Generalis est conicae proprietas: $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ ponendo $x \sqcap AB$ et $y \sqcap BG$. Ponatur $BT \sqcap t$. $GW \sqcap \beta$. Unde $2at \mp \dfrac{2a}{q}xt \sqcap 2y^2$, sive $t \sqcap \dfrac{y^2}{a \mp \dfrac{a}{q}x}, \sqcap \dfrac{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}{a \mp \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{ax}{a \mp \dfrac{a}{q}x} + x$. Est autem $WL \sqcap$

$$\frac{\beta,, \frown \dfrac{ax}{a \mp \dfrac{a}{q}x} + x \sqcap \dfrac{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}{a \mp \dfrac{a}{q}x}\beta}{\sqrt{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}}.$$ adeoque $WL \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}}{a \mp \dfrac{a}{q}x}$. Ergo $\dfrac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap$

$$\frac{\beta\sqrt{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \frown 2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}{a^2 \mp \dfrac{2a^2}{q}x + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}.$$ C u j u s d i m e n s i o e x i p s i u s C o n i c a e s e c t i o n i s d i m e n s i o n e p e n d e t.

1 figura *(1)* $\dfrac{\mathrm{GB} \frown \mathrm{WL}^2}{\mathrm{GW}}$ aeqvatur *(2)* |omnes *erg. u. gestr.*| $\dfrac{\mathrm{GB} \frown \mathrm{WL}^2}{\mathrm{GW}}$ *L* 3 momento *(1)* crementorum contrariorum *(2)* ex *L* 6 momentorum *(1)* crementorum *(2)* momenta *L* 12 $\dfrac{\beta\sqrt{2\mathrm{ax} \mp \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2} \frown 2\mathrm{ax} \mp \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2 \mp \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}}\mathrm{x} + \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{x}^2}$ *(1)* Data ergo *(2)* Ergo in sect *(3)* Ergo ex data sectione Conica haberi potest figura, Cubis *(4)* C u i u s *L*

10 $WL \sqcap$: Leibniz berechnet auf der rechten Seite $\dfrac{\beta t}{y}$ statt $\dfrac{\beta y}{t}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 12, wirkt sich aber nicht auf die Schlussfolgerung aus.

(31) Ponamus jam contra directricem esse non AD, sed AE, constantem WL, quam vocabimus λ. Crementum ordinatarum EG, esse GW; ipsam $EH \sqcap l$. primum investigemus hoc modo: $2ax \pm \frac{2a}{q}x^2 \sqcap 2yl$. sive $l \sqcap \frac{ax \pm \frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \frac{2ax \pm \frac{a}{q}x^2 - ax}{y}$ sive $\frac{y^2 - ax}{y}$. Jam ut x inveniatur, erit $x^2 \pm \frac{2q\cancel{\phi}}{\cancel{\phi}}x + q^2 \sqcap q^2 \pm y^2$, adeoque fiet $\mp x \mp q \sqcap \sqrt{,}\, q^2 \mp y^2$, et $x \sqcap \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}$ adeoque $l \sqcap \frac{y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y} \sqcap EH$. Ergo GW erit $\sqcap \frac{\lambda,, \frown y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}{y,, \frown \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}$; et $\frac{GB \frown WL^2}{GW} \sqcap \frac{y \frown \lambda\cancel{^2}, \frown y, \frown \mp q \mp \sqrt{q^2 \mp y^2}}{\cancel{\lambda},, \frown y^2 \mp qa \mp a\sqrt{q^2 \mp y^2}}$, cujus seriei itidem habetur summa, ex datis omnibus $\sqrt{q^2 \mp y^2}$.

Quae theoremata vel ideo annotanda duxi, quod semel elapsa non facile rursus in mentem venirent, et non nisi per multas ambages deprehensa sint. Et haec quidem de Trianguli characteristici usu ad dimensiones curvilineorum nunc sufficiant.

---

4 *Nebenbetrachtung zu* $\mp x \mp q$:

$$\begin{array}{c} + \; x \; + \; q \\ \boxed{- \; x \; - \; q} \\ + \; x \; - \; q \\ - \; x \; + \; q \end{array}$$

2 vocavimus *L ändert Hrsg.*

---

4 $\sqcap$ $q^2 \pm y^2$: Richtig wäre $q^2 \pm \frac{q}{a}y^2$; bei der Berechnung von GW kommt ein weiteres Versehen hinzu. Die Rechenfehler beeinträchtigen die Schlussfolgerung nicht.

23. DE TROCHOEIDIBUS GENERIS COMPOSITI
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 3 Bl. 11–12. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 11 r°. Bl. 11 v°, 12 r° u. 12 v° leer.
Cc 2, Nr. 902

Januar. 1675.

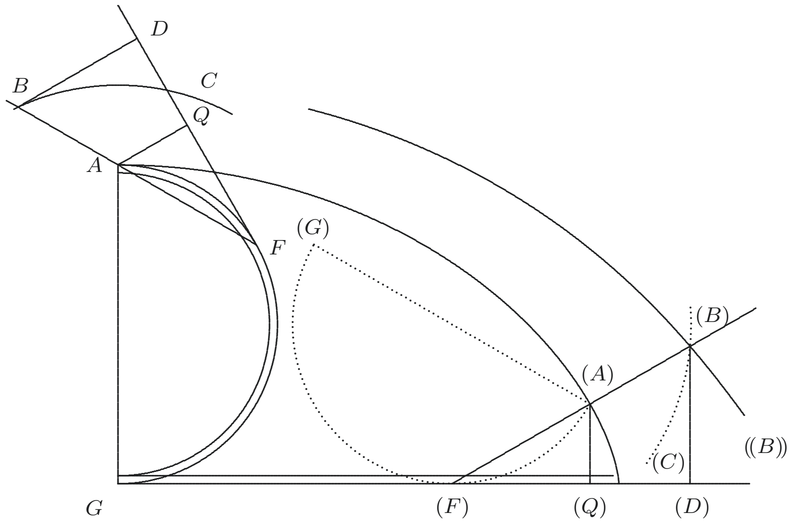
De Trochoeidibus generis compositi.

Trochoeidem voco quaecunque applicatione continua lineae cujusdam curvae rigidiae ad aliam lineam (: neque enim hic de motu rotae per planum superficiemve excurrente loquor :), describitur. Linea autem cui applicatur describens, quam possis appellare sustinentem, est aut curva, aut recta; rectam autem nunc quidem supponemus. Rursus descriptio fiet aut ope puncti fixi, aut ope puncti mobilis. Ac primum descriptio per punctum fixum super recta verbo attingenda est, ut altera eo clarius intelligatur.

Esto linea describens FG. punctum fixum A. recta super qua fieri debet volutio, sive sustinens sit $G(F)$. Transferatur motu dicta figura AFG in situm $(A)(F)(G)$ eoque motu describetur curva Trochoeides $A(A)$. Ex puncto A. ad rectam quae curvam describentem in puncto F tangit, demittatur perpendicularis AQ. Patet eam esse ordinatam Trochoeidis in basin seu rectam sustinentem.

Hinc posito curvam describentem esse analyticam, ex data AF, dabuntur AQ, FQ. Itaque Trochoeidis quoque inde descriptae trium rectarum perpendicularis $(A)(F)$, ordinatae $(A)(Q)$ et reductae $(Q)(F)$ nota invicem relatio erit, et aequatione analytica exprimi poterit; etsi ipsa Trochoeides non sit analytica, id est etsi ordinatarum $(A)(Q)$ ad abscissas $G(Q)$ relatio aequatione explicari non possit, nisi curvae GF magnitudine data. Haec autem qualiscunque et ut ita dicam semianalytica curvarum ejusmodi non analyticarum $A(A)$ explicatio in multis analyticam supplet. Nam si alia quaedam reperiatur curva, cujus eadem sit aequatio relationem explicans inter ordinatam et reduc-

7 Trochoeidibus *(1)* a puncto variante descri *(2)* compositionibus *(3)* generis *L* 9 f. (neqve ... loqvor :) *erg. L* 12 supponemus. *(1)* Si recta est sustentans *(2)* Rursus *L* 16 GF *L ändert Hrsg.* 24 f. nisi ... data *erg. L* 27 cuius *(1)* eadem sit proprietas *(2)* ea *(3)* eadem sit aeqvatio *(a)* semianalyti *(b)* relationem *L*



[*Fig. 1*]

tam, sequitur eam cum proposita esse eandem. Eodem modo et diversae curvae invicem similes agnosci possunt. Et si quidem ope diversarum curvarum describentium, ad eandem aequationem, qualem dixi relationem inter $(A)(F)$ et $(A)(Q)$ explicantem perveniri potest; hae duae curvae invicem dimensione pendebunt. Unde quam vastus aperiatur novae Geometriae campus Analyticus sagax facile judicabit, praesertim si eadem ope Trochoeidum compositi generis, ad quae nunc progrediar in immensum proferri cogitet.

Ostendam enim unius ejusdemque curvae analyticae ope tot alias describi posse curvas semianalyticas ex Trochoeidum genere, quot curvae analyticae sunt in rerum natura. In tanta autem multitudine infinitis utique modis evenire necesse est ut diversarum quarundam Curvarum describentium inter se coincidant Trochoeides. Satis tamen compertum habeo, impossibile esse, ut datis duabus quibuslibet curvis una utrique communis Trochoeides semianalytica reperiatur, alioquin enim omnes curvae ad unam reduci possent; et unius dimensione habita, uti certe habetur multorum, haberentur omnes: quod

1 *Fig. 1*: Leibniz übernimmt die Figur zum größten Teil aus Fig. 11 von N. 17 (s. Erl. zu S. 156 Z. 4). Dies gilt insbesondere für die falsche Neigung des punktierten Halbkreises, der hier in der korrekten Lage wiedergegeben wird.

impossibile esse scio. Itaque impossibile est, ut exempli causa parabolae Heuratianae et Apollonianae communis Trochoeides semianalytica reperiatur.

Porro ut hoc Trochoeidum genus novum intelligatur sumto quolibet in curva describente puncto F, recta per punctum constans A trajecta producatur dum curvae cuidam BC, occurrat in B. Unde in tangentem curvae ad F, seu in r e c t a m v o l u t i o n i s demittatur perpendicularis $(B)(D)$ ea erit trochoeidis descriptae ordinata. Itaque quot diversae substitui possunt curvae excipientes BC, tot diversae trochoeides unius ejusdemque curvae volutione describi possunt. Imo et situs unius ejusdemque c u r v a e e x c i p i e n t i s diversus aliam atque aliam faciet Trochoeidem $(B)((B))$. Quoniam autem ipsa $(F)(B)$ non est perpendicularis ad curvam $(B)((B))$ superest, ut in eam inquiramus.

1 f. et *(1)* Archimedeae *(2)* Apollonianae *L*

24. MOMENTA CURVAE PARABOLICAE. DE MAXIMIS ET MINIMIS
[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 148. 1 Bl. 4°. 1 3/4 S. Bl. 148 bildete ursprünglich mit LH 35 XIII 1 Bl. 355 (N. 25) und LH 35 XIV 1 Bl. 70 (Cc 2, Nr. 1450; Druck in einem späteren Band der Reihe) ein vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1167

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Januar 1675 belegt. N. 24 u. N. 25 sind vor Cc 2, Nr. 1450 geschrieben worden, in der sich Leibniz mit Schootens Methode der Koordinatentransformation vertraut macht. Der Hinweis in N. 26 S. 207 Z. 3–5 dürfte danach verfasst worden sein.

[*Teil 1*]

Momenta Curvae Parabolicae

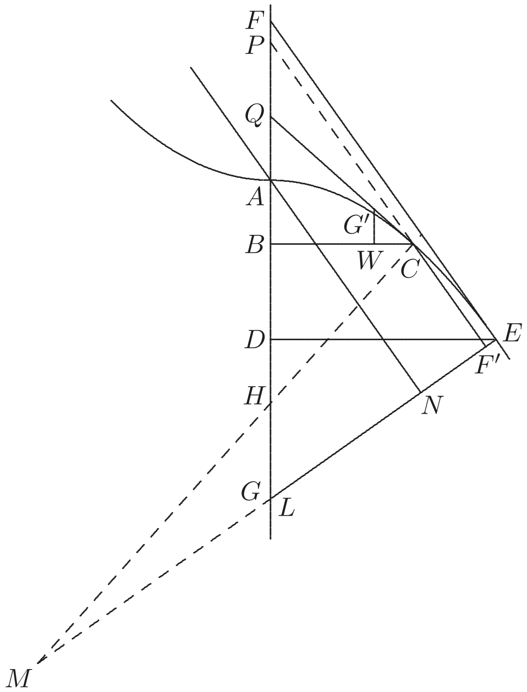
Cum Centrum Gravitatis et dimensio Curvae parabolicae ex sola Hyperbolae quadratura pendeat, sequitur omnia ejus momenta ex qualibet recta haberi posse.

In parabola: $AB \sqcap x$. $BC \sqcap \sqrt{2ax}$. $DE \sqcap b$. At $\sqrt{2ADa} \sqcap b$. Ergo $2aAD \sqcap b^2$, seu $AD \sqcap \dfrac{b^2}{2a} \sqcap AF$. $DG \sqcap a \sqcap BH$.

Ut $\overbrace{FE}^{}_{\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+b^2}}$ ad $\underset{\frac{b^2}{a}+a}{FL}$, ita PF' ad PL. Est autem $PL \sqcap PA + \underset{\frac{b^2}{2a}}{\overset{}{AD}} + \underset{\sqcap\, a}{DL}$

et $PA \sqcap PB - \underset{-AB}{x}$. et $\dfrac{PB}{BC \sqcap \sqrt{2ax}} \sqcap \dfrac{FD \sqcap \frac{b^{\cancel{2}}}{a}}{DE \quad \cancel{b}} \sqcap \dfrac{b}{a}$. Ergo $PB \sqcap \dfrac{b\sqrt{2ax}}{a}$. Et $PA \sqcap \dfrac{b\sqrt{2ax} - ax}{a}$ et $PL \sqcap \dfrac{2b\sqrt{2ax} - 2ax + b^2 + 2a^2}{2a}$.

11 M o m e n t a ... P a r a b o l i c a e *erg. L* 12 Gravitatis | *(1)* et dimensio *(2)* et dimensio *erg.* | Curvae *(a)* Hyperbo *(b)* parabolicae ex *(aa)* eius *(bb)* sola *L* 15 f. ⊓ BH. | *(1)* Triangula FDE, et CFM similia, item *(2)* FDE et ANL similia. *gestr.* | Ut *L* 17 $\sqrt{\frac{b^4}{a^2}+2ax}$ *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 1*]

Jam ut $\underbrace{FL}_{\frac{b^2+a^2}{a}} - PL$, ad FL, ita EF' ad $\underbrace{EL}_{\sqrt{b^2+a^2}}$ sive ut

$$\frac{\boxed{2}b^2\boxed{+2a^2}-2b\sqrt{2ax}+2ax\boxed{-b^2}\boxed{-2a^2}}{2\cancel{a}} \text{ ad } \frac{b^2+a^2}{\cancel{a}}\text{; ita } EF' \text{ ad } \sqrt{b^2+a^2} \text{ sive ut } ‡b‡$$

1 *Fig. 1*: Leibniz hat in der Figur und im Text die Punktbezeichnungen F und G doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung wurden die Bezeichnungen F' und G' eingeführt. Der Schnittpunkt der Normalen EM mit der vertikalen Achse trägt die Bezeichnungen G und L, welche beide von Leibniz im Text benutzt werden; dies wurde beibehalten. Ein verworfener Ansatz der Figur wird nicht wiedergegeben. 4 sive ut: Leibniz vernachlässigt ab jetzt den Faktor $\frac{1}{2}$ auf der linken Seite der Proportionsgleichung. Dies beeinträchtigt (zusammen mit einem weiteren Rechenfehler) die Rechnung bis S. 197 Z. 10.

$\sqrt{2ax}$ ad $\sqrt{b^2+a^2}$, $\square$; ita EF' ad $\sqrt{b^2+a^2}$. Ergo ut $\mp b \pm \sqrt{2ax}, \square$ ad $\sqrt{b^2+a^2}$, ita EF' ad 1. Eritque $EF' \sqcap \dfrac{\mp b \pm \sqrt{2ax}, \square}{\sqrt{b^2+a^2}}$.

Jam $G'C$ infinite parva est ad $G'W \sqcap \beta$. ut QC ($\sqcap \sqrt{\underset{\substack{\bigwedge \\ 4x^2}}{QB^2}+\underset{\substack{\bigwedge \\ 2ax}}{BC^2}}$) ad $QB \sqcap 2x$. Eritque $G'C \sqcap \dfrac{\beta\sqrt{4x^2+2ax}}{2x}$, ponamus compendii causa $\sqrt{b^2+a^2} \sqcap 1$. erit $G'C$ ducta in $EF' \sqcap \dfrac{\mp\beta b\sqrt{4x^2+2ax}}{2x} \pm \dfrac{\beta\sqrt{8ax^3+4a^2x^2}}{2x}$. Cujus summa ex quad. Hyperbolae. Ex quibus partibus, utraque separatim examinetur ponaturque $\dfrac{b\sqrt{4x^2+2ax}}{x} \sqcap y$. Ergo $\dfrac{b^2 \frown 4x+2a}{x} \sqcap y^2$. adeoque $b^2, \frown\ 4x+2a \sqcap y^2x$. sive $4b^2x+2ab^2-y^2x \sqcap 0$. et $x \sqcap \dfrac{-2ab^2}{4b^2-y^2} \sqcap \dfrac{2ab^2}{y^2-4b^2}$ quae pendet ex quad. Hyp. ut constat. Ergo et altera; ex eadem pendebit quam sic examinabimus, $\dfrac{\cancel{x}\sqrt{2ax+a^2}}{\cancel{x}}$. Ea autem est ipsissima Hyperbola. Sed si EF' jam sumta et appellata z, in caeteras inquiramus aliae habebuntur quadraturae.

[*Teil 2*]

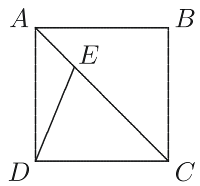
$\sqrt{2ax-x^2}+a-x \sqcap \omega$. Ergo $\sqrt{2ax-x^2} \sqcap \omega+x-a$. Ergo $2ax-x^2 \sqcap \omega^2+2\omega x-2a\omega, +x^2-2ax+a^2$. Unde ordinando ad tangentes fiet:

$$\begin{array}{rlcll} & -2\cancel{4}x^2 & +2\cancel{4}ax & \ldots\ldots & \cancel{2}\omega^2 & +\cancel{2}x\omega \\ & & -\cancel{2}\omega & & & -\cancel{2}a\omega \\ \text{vel} & -2xl & +2al & \sqcap & \omega^2 & +\ x\omega\ , \\ & & -\omega\ .. & & & [-a\omega] \end{array}$$

5 $\sqcap$ 1. |et $\beta \sqcap$ 1. *gestr.*| erit *L* 6 Cuius ... Hyperbolae. *erg.* *L* 7 partibus, *(1)* prior erit: *(2)* utraqve *(a)* ad aliam *(b)* separatim *L*

5 f. $G'C$ ducta in EF': Leibniz übernimmt EF' fehlerhaft ohne Quadrierung von $\pm b \mp \sqrt{2ax}$ im Zähler. 10 Hyperbola: Es müsste Parabola lauten.

sive $l \sqcap \dfrac{\omega^2 + x\omega - a\omega}{\begin{matrix}-2x{+}2a\\ \quad -\omega\end{matrix}}$. Ut autem ω sit omnium possibilium maxima, necesse est l esse infinitum, quod fit si nominator valoris sit $\sqcap$ 0. sive $\begin{matrix}-2x{+}2a\\ \quad -\omega\end{matrix} \sqcap 0$. seu $\boxed{+2}x - \boxed{2}a + \boxed{\omega}\ \sqrt{2ax - x^2}\ \boxed{+a}\ \boxed{-x} \sqcap 0$. Ergo $2ax - x^2 \sqcap a^2 - 2ax + x^2$. Id est necesse est ut sinus complementi sit aequalis sinui recto. Unde $2x^2 - 4ax + a^2 \sqcap 0$. unde $x^2 - 2ax + a^2 \sqcap \boxed{a^2 - \frac{a^2}{2}}\ \frac{a^2}{2}$. Ergo $a - x \sqcap \frac{a}{\sqrt{2}}$. sive $x \sqcap a - \frac{a}{\sqrt{2}}$. Igitur sinus complementi eligendus est, qui sit ad radium, ut quadrati latus ad diagonalem[,] id est faciendo $\frac{a - x \sqcap \text{sin. compl.}}{a} \sqcap \frac{a}{a\sqrt{2}}$, erit sinus complementi ipsis diagonali in quadrato radii et radio tertia proportionalis. Id est si quadratum a radio sit $ABCD$, sinus complementi quaesitus erit DE, recta ex D angulo quadrati a radio AD, demissa in diagonalem AC.



[*Fig. 2*]

$\sqrt{\frac{200}{100}} \sqcap \frac{\sqrt{200}}{10}$. $\frac{14}{10} \sqcap \frac{7}{5}$ ergo $\sqrt{2} \sqcap e + \frac{7}{5}$. et sinus complementi quaesitus $\sqcap \dfrac{a}{\frac{5e+7}{5}} \sqcap \dfrac{5a}{5e+7}$. id est sinus complementi suo sinui recto aequalis, seu qui maximam cum suo sinu recto summam constituit, $\sqcap \frac{5a}{7}$ seu paulo minor quam quinque radii septimae. Cujus

---

12 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{ccc} \cancel{1} & \cancel{2} & 4 \\ \dot{2} & 0 & \dot{0} \\ \hline 1 & & 4 \\ \hline \cancel{1} & \cancel{2} & \cancel{4} \end{array}$$

1 $+2x\omega - 2a\omega$ *L ändert Hrsg.* 5 sinus *(1)* versus *(2)* complementi *L* 6 f. id est *(1)* sumenda est media *(2)* faciendo *L* 7 erit *(1)* radius media proportionalis *(2)* sinus *L* 12 $\sqrt{2}$ *(1)* $\sqcap$ 1 *(2)* $\sqcap$ *(a)* 2 *(b)* $e + \frac{7}{5}$. *L* 12 qvaesitus *(1)* circiter *(2)* $\sqcap$ *L* 14–199,2 Cuius ... utilissimo *(1)* est ad utilissimum, *(2)* ad ... 7. *erg. L*

duplum, vis machinae est $\frac{10}{7}a$. Ergo status machinae in situ utilissimo ad inutilissim. est ut 10 ad 7.

Hic calculus exemplum est calculi pro invenienda maxima minimave alicujus figurae ordinata ad directricem datam. Nimirum ubi figuram ad aequationem duarum incognitarum reduxisti: tunc si maximam (m i n i m a m) quaeris ordinatam, retenta incognita abscissas seu parte axis (o r d i n a t a s) significante abjice membra omnia in quibus incognita retenta non reperitur; residua multiplicabis per numerum dimensionum incognitae quantitatis retentae, in ipsis: et formulam ita natam pones nihilo aequalem. Habes ergo duas aequationes[:] priorem, quae figurae naturam explicat, inventam, quarum ope alterutra tolli potest incognitarum, ac proinde determinatum est problema, cum residuae valor hoc modo habeatur. Saepissime ope posterioris statim ab initio habetur aequatio unius tantum incognitae, nempe retentae, si scilicet incognitae in se invicem non ducuntur.

Nota sint casus ubi regula applicari non potest. Sunt enim figurae quae nullam habent ordinatam maximam v. g. parabola, Hyperbola etc. sunt quae nullam habent minimam, ut Hyperbola. Regula generalis est; ut inveniatur maxima ordinata oportet l ponere infinitam; ut minima, infinite parvam. l autem per regulam tangentium invenitur.

Infinitum ita exprimit W a l l i s i u s ∞. sed rectius divisione finiti spatii per rectam infinite parvam 0. v. g. $\frac{a^2}{0}$.

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{10}{7} \frown \frac{7}{8} \sqcap \frac{5}{4}$

14 *Isolierte Nebenbetrachtung:* $a^2 \sqcap yx.\ l \sqcap -x.$

5 (m i n i m a m) *erg. L* 6 (o r d i n a t a s) *erg. L* 6 abjice *(1)* terminos omnes in qvibus incognita retenta non reperitur; residuos *(2)* sig *(3)* qvantitates *(4)* membra *L* 8 in *(1)* ipsa: *(2)* | ipso: *ändert Hrsg.* | *(a)* illi *(b)* productorumqve summa *(c)* et *L* 11 ope *(1)* novi *(2)* posterioris *L* 18 divisione *(1)* finitae per 0, ut $\frac{a^2}{0}$ *(2)* finiti spatii per rectum inf *(3)* finiti *L* 21 $a^2 \sqcap yx.$ | $yx \sqcap 0.$ *gestr.* | $l \sqcap$ *(1)* $\boxed{-y}x$ *(2)* $-x$ *L*

---

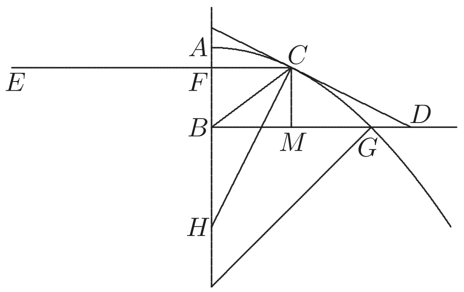
1 vis machinae: s. Cc 2, Nr. 1192 C. 14–17 Nota ... invenitur: Leibniz entgeht hier, dass die Lage der genannten Kurven entscheidend ist für das Vorhandensein von Maxima und Minima. Fehlerhaft ist außerdem die Bedingung für Minima als Punkte, in denen die Subtangente unendlich klein wird.
18 exprimit W a l l i s i u s : J. WALLIS, *De sectionibus conicis*, 1655, S. 4, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 70 u. *Mechanica*, 1670–71, pars 2, S. 12 (*WO* I S. 297, 405 u. 582).

25. DE MEIS FIGURIS SEGMENTORUM
[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 355. Ca 3/5 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 355 r°. Bl. 355 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XIV 1 Bl. 70 (Cc 2, Nr. 1450; Druck in einem späteren Band der Reihe) und LH 35 XIII 3 Bl. 148 (N. 24) ein vollständiges Bl. 2°. Bl. 355 v° enthält das ursprüngliche Ende des Textes der Aufzeichnung Cc 2, Nr. 1450, welches Leibniz vor dem Zerschneiden des Blattes weiter unten abschrieb (LH 35 XIV 1 Bl. 70 v°) und danach oben durchstrich.
Cc 2, Nr. 1196

Datierungsgründe: s. N. 24.

D e m e i s f i g u r i s s e g m e n t o r u m



[*Fig. 1*]

Methodus qua usus sum ad segmenta figurarum dimetienda semper utilis, quotiescunque certum aliquod punctum in figura inveniri potest a quo ductae ad curvam rectae habeant certam proprietatem, ut sunt centra et foci. Semper enim intervallorum a recta per punctum illud fixum transeuntium summa a figurae quadratura pendebit, ut in parabola, cujus focus B vertex A. et ad sumtum in ea punctum C, tangens CD. BD ex B productae occurrens in D. Summa omnium BD in EF translatorum portioni $CBGC$ aequabitur. Ducta jam CH perpendiculari ad CD tangentem, posita $AF \sqcap x$ et $AB \sqcap \frac{a}{2}$, patet esse ut $\underset{\sqrt{2ax}}{\underset{\wedge}{FC}}$ ad $\underset{a}{\underset{\wedge}{FH}}$ ita FB seu $CM \sqcap \frac{a-2x}{2}$ ad MD. Ergo

11 D e ... s e g m e n t o r u m *erg. L*

21 *Fig. 1*: Eine gestrichene Vorstufe zur Zeichnung wird nicht wiedergegeben. 23 portioni *CBGC*: Es müsste duplo portionis *CBGC* lauten.

$MD \sqcap \dfrac{a, \frown \dfrac{a-2x}{2}}{\sqrt{2ax}}$. Jam $BD \sqcap \sqrt{2ax} + MD$. Ergo $BD \sqcap \dfrac{2\,4\,ax + a^2 \boxed{-2ax}}{\sqrt{2ax}}$. Haberi ergo potest summa omnium $\dfrac{2ax + a^2}{\sqrt{2ax}}$; at $\dfrac{2ax}{\sqrt{2ax}} \sqcap y$. et $\dfrac{2\cancel{4}a^{\cancel{2}}x^{\cancel{2}}}{\cancel{2}\cancel{a}\cancel{x}} \sqcap y^2$ est ipsa parabola: Ergo habetur summa omnium $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax}}$. quod mirum non est cum sit Hyperboloeides. $\dfrac{x^2 - a^2}{\sqrt{2ax}}$, hinc etiam habetur, nam addendo ad $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax}}$ fiet: $\dfrac{x^2}{\sqrt{2ax}} \sqcap y$ et $\dfrac{x^4}{2ax} \sqcap y^2$. seu $\dfrac{x^3}{2a} \sqcap y^2$.

1 Ergo $BD \sqcap$: Der Ausdruck auf der rechten Seite des Gleichheitszeichens wäre im Zähler mit einem globalen Faktor $\dfrac{1}{2}$ zu multiplizieren. Leibniz rechnet konsequent weiter; die allgemeine Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

26. DE FIGURIS ANALYTICIS FIGURAE ANALYTICAE QUADRATRICIS CAPACIBUS

Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 282–283. 1 Bog. 2°. Unteres Drittel von Bl. 283 r° und Bl. 283 v° leer. 2 2/3 S.
Cc 2, Nr. 906

Januarii. 1675.

De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus

Figuras Analyticas appello, in quibus relatio ordinatae ad abscissam aequatione explicari potest.

Figuram Quadratricem voco, qua semel descripta cuilibet portioni figurae propositae spatium rectilineum aequale una generali constructione exhiberi potest.

Scholion.

Figuras malim vocare Analyticas, quas alii post Cartesium Geometricas. Nam Cycloeidem exempli [gratia] non video quid prohibeat appellari Geometricam, cum uno continuo motu eoque admodum simplici exacte describi possit, et proprietates habeat admirandas; Analyticam autem esse nego, quoniam relatio inter ordinatas et abscissas nulla aequatione explicari potest.

8 f. de figuris *(1)* Qvadrabilibus *(2)* analytice *(3)* analyticis ... capacibus *erg. L* 10 Figuras *(1)* Qvadrabiles *(2)* Analyticas *L* 11 f. potest. | Figuras | Analyticas *(1)* analytice *(2)* universaliter *erg.* | Qvadrabiles voco in qvibus relatio *(a)* segmentorum *(b)* portionum sub abscissa ordinata et curva comprehensarum ad Parallelogrammum *(aa)* ipsarum *(bb)* eiusdem basis et altitudinis analytice haberi, sive aeqvatione qvadam explicari potest Demonstrari potest circulum et Hyperbolam, et alias figuras ab harum dimensione pendentes non esse universaliter qvadrabiles. *gestr.* | *(aaa)* Figuras Qvadratices voco, *(aaaa)* qvarum ordinatae sunt portionibus sub abscissa ordinata, et curva figurae datae comprehensis, proportionales *(bbbb)* qvibus descriptis *(bbb)* Figuram *L* 17 exacte *erg. L*

15 post Cartesium: vgl. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 21. 17 uno continuo motu: vgl. *a. a. O.*, S. 18.

Lineae Quadratricis nomine jam et Veteres Geometrae usi sunt; nam si exacte et per omnia puncta sive continuo motu describi posset, Circuli omniumque ejus portionum dimensio haberetur. Prorsus quemadmodum Linea Logarithmica est quadratrix Hyperbolae.

Hinc facile demonstrari potest Circulum et Hyperbolam nullam habere Quadratricem Analyticam; quoniam impossibile est Quadratricem Veterum, et lineam Logarithmicam Analyticas esse.

Unde porro colligitur: impossibilem esse Circuli et Hyperbolae quadraturam, per quam portionum quarumlibet abscissa ordinata et curva comprehensarum relatio ad parallelogrammum inscriptum et circumscriptum aequatione quadam exprimatur.

Hinc illud porro sequitur inutiles esse omnes vias, quae si succederint una eademque regula quorumlibet Circuli Segmentorum dimensionem darent. Unde judicare possum problemata quaedam methodi tangentium inversae esse impossibilia; exempli gratia, lineam exhibere analyticam, in qua reductae ad abscissas eandem habeant relationem quam sinus recti ad versos.

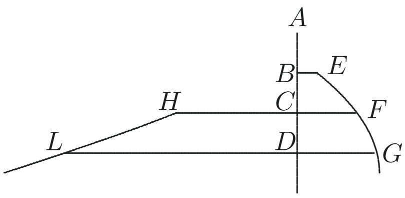


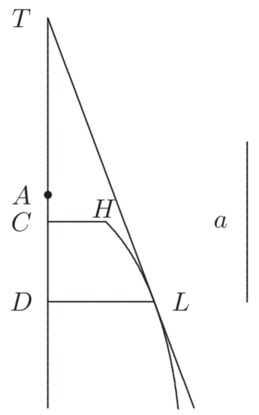
fig. 1.

Porro varia sunt linearum Quadratricium genera, sed ex omnibus eligam unum Simplicissimum, et ex quo alia derivari, aut ad quod alia reduci possint, nimirum pone rectam directricem AD, ad quam ex curva EFG, ordinatae BE, CF, DG. Sit alia curva, HL, ad eandem directricem relata, ita ut ordinatae ejus, HC, LD, sint portionibus prioris $EBCFE, EBDGE$. proportionales; ajo curvam HL esse curvae EFG [quadratricem]. Unde sequitur crementa ipsarum CH, DL, ipsis ordinatis datae, BE, CF, DG. proportionalia esse.

12 darent. *(1)* Unde illud didici methodo Tangentium inversa non *(2)* Unde *L* 21 EBCFE, | FCDGF *ändert Hrsg.* |. | etc. *gestr.* | proportionales *L*

2 f. Circuli ... dimensio: vgl. Pappus, *Collectio* IV, prop. 26 u. 27. 13–15 lineam ... versos: vgl. N. 18 S. 159 Z. 19 f.

Quod si ergo proposita figura Analytica, inveniri potest alia etiam Analytica, cujus crementa sint ordinatis datae proportionalia quadratura omnium portionum figurae propositae generali constructione haberi potest.



[*Fig. 2*]

Jam alibi a me demonstratum est, rectas crementis proportionales quales sunt ipsae BE, CF figurae 1. esse ad rectam quandam constantem quam vocabimus a, ut ordinata DL ad ipsam DT productam ipsius curvae HL, seu portionem axis inter ordinatam DL, et tangentem LT, interceptam.

Proposita ergo qualibet figura cujus ordinatae CF, DG, quaerenda est alia figura cujus ordinatae CH, DL, in qua ratio DL ad DT, sit perpetuo ut DG ad a.

Hoc problema per Analysin communem solvere nondum satis est in nostra potestate; advocanda est ergo Synthesis, et datis figuris seu DL, inquirendae sunt DT. quod ordine faciendo et de gradibus ad gradus figurarum procedendo, condi poterit velut Tabula in qua constantem quandam progressionem mox detectum iri pro certo habendum est quam facile sit continuare in infinitum, etiam sine calculo in singulis repetito; quo facto facile detegi poterit, oblata figura qualibet an sit ex numero quadrabilium per Quadratricem Analyticam.

Calculus autem investigandarum DT, ex datis DL. non est difficilis post publicatam a Slusio methodum tangentium. Ut ergo ordine procedamus, per omnes aequationum, quae duas incognitas continent, gradus assurgemus ac primum: ponendo $AD \sqcap x$, DL

6 ut *(1)* ipsa DT producta ad *(a)* i *(b)* por *(c)* qvadra *(2)* ordinata *L* 12 communem *erg. L* 19 poterit, | an *streicht Hrsg.* | oblata *L* 23–205,1 primum: *(1)* (I) $x + \frac{b}{a}y + c \sqcap 0$. *(a)* Unde $t \sqcap -b$ *(b)* ponendo $AD \sqcap x$, CD, y, vel contra; $DT \sqcap t$. *(aa)* Unde ope regulae Slusianae, fiet: *(bb)* si $AD \sqcap x$ fiet $t \sqcap \frac{-b}{a}y$. Sin $CD \sqcap x$, fiet: $t \sqcap \frac{-ax}{b}$. Jam prior aeqvatio multiplicetur per x (II) $x^2 + \frac{b}{a}yx$ *(2)* ponendo $AD \sqcap x$, | CD *ändert Hrsg.* $\sqcap$ *erg. Hrsg.* | y, vel contra $AD \sqcap y$, | CD *ändert Hrsg.* | $\sqcap x$ *L*

4 alibi: vgl. VII, 4 N. 40_1 S. 657 Z. 13–24 . 21 publicatam: vgl. R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

$\sqcap\ y$, vel contra $AD \sqcap y,\ DL \sqcap x.\ DT \sqcap t.$ ex aequationibus sequentibus ita habebitur valor ipsius t, et hujus ope valor ipsius $\dfrac{DL}{t}a \sqcap z \sqcap DG$.

(I) $b+\dfrac{c}{a}y+\dfrac{d}{a}x \sqcap 0$. Ergo ponendo $CD \sqcap y,\ DL \sqcap x,\ t \sqcap \dfrac{-dx}{c}$. et pro x substituendo $\dfrac{-cy-ab}{d}$, erit $t \sqcap \dfrac{+cy+ab}{c}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{-cy-ab}{d} \frown a \smile \dfrac{+cy+ab}{c} \sqcap \dfrac{-ac}{d}$.

Ponendo vero $CD \sqcap x.\ DL \sqcap y.$ fiet: $\underline{\underline{t}} \sqcap \dfrac{-cy}{d}$. et pro $\underline{\underline{y}}$ substituendo ejus valorem, $\dfrac{-dx-ba}{c}$ fiet: $t \sqcap \dfrac{+dx+ba}{d}$, et erit $z \sqcap \dfrac{-dx-ab}{c} \frown a \smile dx+ba \frown d \sqcap \dfrac{-ad}{c}$.

(II) $a^2b+acy+adx+ey^2+fyx+gx^2 \sqcap 0$.

Ponendo $CD \sqcap y,\ DL \sqcap x.$ fiet: $act+2eyt+fxt \sqcap -adx-fyx-2gx^2$. Adeoque $t \sqcap \dfrac{-adx-fyx-2gx^2}{ac+2ey+fx}$. Pro $-2gx^2$ ponatur ejus valor, $+2a^2b+2acy+2adx+2ey^2+2fyx$. Unde $t \sqcap \dfrac{+adx+fyx+2acy+2ey^2}{ac+2ey+fx}$, sive $-act-2eyt+2acy+2ey^2 \begin{array}{l} -ft\ x \\ +ad\ .. \\ +fy\ .. \end{array} \sqcap 0$. Sive $gx^2 \sqcap \dfrac{+actgx+2eytgx-2acygx-2ey^2gx}{-ft+ad+fy}$ adeoque $a^2b+acy+adx+ey^2+fyx+\dfrac{actgx+2eytgx-2acygx-2ey^2gx}{-ft+ad+fy} \sqcap 0$ sive

$$\begin{array}{llllll} -ftadx & -ftfyx & +\ act\,gx & -ft \frown & a^2b & \sqcap 0 \\ +ad\ ... & +ad\ ... & +2ey\,t\,g\ . & +ad & +acy & \\ +fy\ ... & +fy\ ... & -2acy\,g\ . & +fy & & \\ & & -\ 2ey^2g\ . & & & \end{array}$$

et pro x substituendo: $\dfrac{act+2eyt-2acy-2ey^2}{-ft+ad+fy}$, fiet:

$$act+2eyt-2acy-2ey^2\ ,, \frown \left(\begin{array}{ll} -ft \frown & -ft \\ +ad & +ad \\ +fy & +fy \end{array}\right) \begin{array}{l} +actg \\ +2eytg \\ -2acyg \\ -2ey^2g \end{array} \begin{array}{llll} ,,, -ft \frown & -ft \frown & a^2b \sqcap 0. \\ +ad & +ad & +acy \\ +fy & +fy & \\ & & \end{array}$$

10 $t \sqcap$: Im folgenden Term für t fehlt $+2a^2b$ im Zähler. Dies wirkt sich bis zum Abbruch der Rechnung Z. 21 aus. 12 sive: In der folgenden Gleichung fehlt auf der linken Seite $+ey^2(-ft+ad+fy)$. Dies wirkt sich zusammen mit einem weiteren Rechenfehler auf die Gleichung Z. 18–21 aus.

Sed quoniam reductio hujus calculi nimis prolixa est, satis est, opinor[,] ire per casus simpliciores, et paulatim assurgere ad altiores, ut appareat, an ad progressionem pervenire liceat:

1) $a^2b + acy + gx^2 \sqcap 0$. Unde ex y $t \sqcap \frac{-2gx^2}{ac} \sqcap \frac{2a^{\cancel{2}}b + 2\cancel{a}cy}{\cancel{a}c} \sqcap \frac{2ab+2cy}{c}$ et $x \sqcap \sqrt{\frac{-a^2b-acy}{c}}$ adeoque $z \sqcap \frac{xa}{t}$ erit $\sqcap \frac{xa}{\frac{2gx^2}{ac}} \sqcap \frac{a^2c}{2gx} \sqcap \frac{a^2c}{2g\sqrt{\frac{-a^2b-acy}{c}}}$ sive $z \sqcap \sqrt{\frac{a^{\cancel{4}3}c^3}{-4g^2a^{\cancel{2}}b-4g^2\cancel{a}cy}}$, quod si ponatur $b \sqcap 0$. fiet $z \sqcap \frac{c[a]\sqrt{a}}{2g\sqrt{y}} \sqcap \frac{ca}{2g}\sqrt{\frac{a}{y}}$. Et haec colligendo t ex y. sed si colligatur t ex x, fiet:

$2gxt \sqcap -acy$, sive $t \sqcap \frac{-acy}{2gx}$, et pro y ponendo $\frac{-gx^2-a^2b}{ac}$ fiet: $t \sqcap \frac{gx^2+a^2b}{2gx}$, adeoque $\frac{ya}{t} \sqcap z$ erit $\frac{\frac{-gx^2-a^2b}{ac}}{\frac{gx^2+a^2b}{2gx}}a \sqcap \frac{-2gx}{c}$.

2) $a^2b + acy + adx + gx^2. \sqcap 0$. Ex y fiet $t \sqcap \frac{-2gx^2-adx}{ac}$, et ut vero eliminetur x, pro $-2gx^2$, ponatur $2a^2b + 2acy + 2adx$. fiet:

$$t \sqcap \frac{2a^2b+2acy+2adx-adx}{ac} \sqcap \frac{2a^{\cancel{2}}b+2\cancel{a}cy+\cancel{a}dx}{\cancel{a}c},$$

unde $x \sqcap \frac{ct-2ab-2cy}{d}$ et $x^2 \sqcap \frac{c^2t^2-4cabt-4c^2ty+4a^2b^2+8abcy+4c^2y^2}{d^2}$, unde ex aequatione initio proposita eliminando x, fiet: $\overset{-}{\boxed{+}}a^2bd^2\overset{-}{\boxed{+}}acyd^2 + ad^2ct\boxed{-ad^2 2ab}\boxed{-ad^2 2cy} + gc^2t^2 - 4cabgt - 4c^2tgy + 4ga^2b^2 + 8abcgy + 4c^2gy^2 \sqcap 0$ et pro t substituendo $\frac{ya}{z}$ habebitur aequatio in qua solae ex incognitis restabunt z, et y.

---

5 $x \sqcap \sqrt{\frac{-a^2b-acy}{c}}$: Der Nenner unter der Wurzel müsste g lauten. In der anschließenden Berechnung von z kommen weitere Fehler hinzu. 16 $\frac{ya}{z}$: Die Substitution ist nicht zulässig; als Voraussetzung der Überlegung war $\frac{z}{a} = \frac{x}{t}$ gesetzt worden.

Sed calculus hic prolixus longe facilius expediri poterat, considerando locum esse ad parabolam, atque ita ipsam $\underline{t}$, ac proinde et ipsam $\underline{z}$ aequationis $a^2b+acy+ad[x]+gx^2 \sqcap 0$ facile derivari ex habita $\underline{t}$ vel $\underline{z}$ aequationis $acy+gx^2 \sqcap 0$ adhibita methodo generali ad exemplum Schotenii, quemadmodum abscissae ordinataeque unius directricis ex aliis alterius derivantur.

3 f. methodo ... Schotenii: vgl. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178 [Marg.]. Auf S. 177 hat Leibniz Eintragungen am Rand und in der Zeichnung angebracht; vgl. dazu auch die Aufzeichnung *Mutatio aequationis curvae pro mutata directrice* (Cc 2, Nr. 1450).

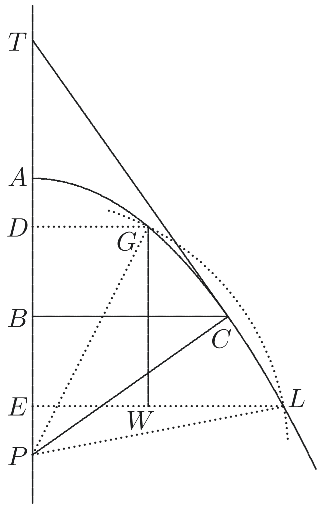
27. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA
Januar 1675

27_1. METHODUS TANGENTIUM INVERSA NUNC TANDEM EXPLICATA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. Cc 2, Nr. 903 tlw.

Januar. 1675.

Methodus Tangentium inversa nunc tandem explicata



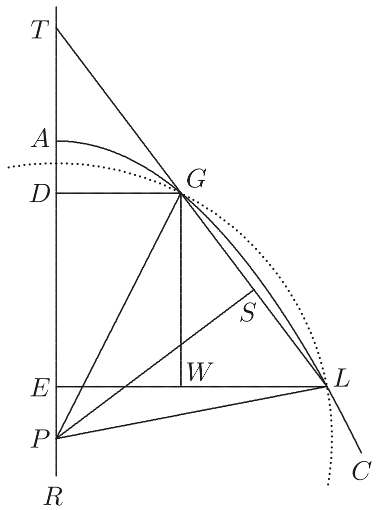
[*Fig. 1*]

6 Januar. 1675. *erg. L* 7 Methodus ... explicata *erg. L*

8 *Fig. 1*: vgl. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 44 f. Zu den Punkt- und Streckenbezeichnungen vgl. auch S. 40 f.

Esto AD vel $AE \sqcap x$, et DG vel $EL \sqcap y$ et $PC \sqcap s$. et $AP \sqcap v$. Erit $BP \sqcap v - x$. Jam $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$ ubi vero tam y, quam x duos habent valores nempe y significat tam DG, quam EL, et x tam AD, quam AE.

Sit alia quaedam aequatio data; ea sane admitti potest, si non nisi relationem inter AD et DG vel AE, et EL. exprimat; sed regulariter admitti non potest, ut in ea ipsa aequatione rursus contineatur $\underline{v}$, vel $\underline{s}$. Illud inprimis fieri non potest, ut in secunda aequatione data, una tantum contineatur ex indeterminatis; eo ipso enim quia valor ejus per ipsas s. et v. quae hoc loco pro determinatis habentur, explicari potest, illa ipsa indeterminata, fiet ex hac suppositione determinata. Ante omnia ergo necesse est ut in alteram illam aequationem duae ingrediantur indeterminatae, x et y. Insistamus huic methodo quantum licet. Reassumamus ergo.



[*Fig. 2*]

Esto curva quaelibet: GLC. referenda ad rectam AR a puncto fixo A indefinite progredientem. In qua sumta recta AP, quae data intelligatur, $\sqcap v$, et intervallo PG etiam dato $\sqcap s$. describatur arcus Circuli GL occurrens curvae in duobus punctis G et L. Jungatur LG arcus hujus chorda, quae producta ipsi AP occurrat in T. et ex P agatur in GL normalis PS. Ex punctis G. L. demittantur perpendiculares in directricem AR, nempe

6 ut *(1)* tam v *(2)* in ea sola ex incognitis contineatur una, v. g. x. *(3)* in L

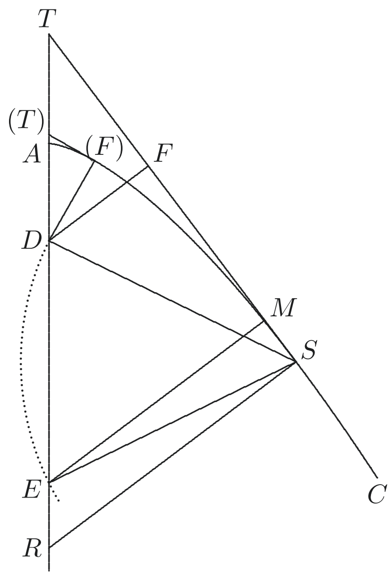
GD, LE. et ex G. demittatur GW, perpendicularis ad EL, aequalisque ipsi DE. Ipsas AD, vel AE, appellemus, x, et ipsas DG vel EL appellemus y. cum sint ordinatae et abscissae unius ejusdemque curvae GLC. Et hoc quidem modo patet, si dentur AP, seu v, PG seu s. et curva praeterea positione, dari positione et puncta G. L. adeoque problema esse definitum, et dari etiam rectas $AD, AE; DG, EL$.

Sed ponamus dari rectam AD vel DG, eo ipso si caetera omnia dantur dabitur et AE, vel EL. Attamen hac inquisitione nunquam hic utemur, sed semper ponemus AD et AE, et DG, EL, unam eandemque incognitam, itaque sumendo AD vel AE, dataque positione curva, eo ipso invenientur AP, PL. Juncta enim GL et bisecta[,] perpendicularis SP dabit punctum P. Quodsi punctum P. jam detur, necesse est ipsas DG et EL, non dari, neque adeo relationem inter x et y, seu AD et DG. Porro semper ex natura circuli dabitur haec aequatio ut supra: $v^2 - 2vx + x^2 + y^2 - s^2 \sqcap 0$.

Jam si velimus dari DP, vel quod idem est dari AP, ex data AD, necesse est dari eodem modo ex data AE. Si volumus servare coeptam characteristicam, ut scilicet x, significet aeque quamcunque abscissam quare cum eadem linea AP, componatur eodem modo ex duabus AD, et AE, componetur eodem modo ex omnibus, quemadmodum in aliqua figura latus rectum eodem modo componitur ex qualibet ordinata et abscissa. Cumque impossibile sit eodem modo componi ex omnibus abscissis, nisi et ingrediatur ordinata ut duae sint indeterminatae componentes unicam indeterminatam, ideo servato valore universali ipsius x vel y. necesse est s. non nisi ex ambabus simul componi. Sed hinc jam malum illud ingens, quod sit eadem AP, quae componitur eodem modo ex duabus, ergo erit et eadem quae componitur eodem modo ex omnibus. Quod est contra institutum, neque enim illud volumus eandem AP pro omnibus esse abscissis et ordinatis, sed eandem AP, pro duabus, et aliam AP esse pro aliis duabus.

Itaque ut servemus indeterminatas, non abscissis vel ordinatis; sed earum paribus aut independentibus imponenda essent haec nomina. Quod vero fieri non debet, neque enim ita unquam veniemus ad aequationem determinandam ad duas radices aequales. Nam si exempli causa rem reducamus ad aequationem in qua v. g. GL inquiratur AP. neque ullae aliae incognitae ingrediantur; nondum inde exitum video ullum etsi haec consideratio sit satis memorabilis.

5 definitum *(1)*; sed si qvid horum desit, pro *(2)*, et *L* 5 f. DG, | DP *ändert Hrsg.* | *(1)* qvoniam *(2)* Sed *(a)* et *(b)* ponamus aliqvid ex caeteris deesse; seu non dari, | et *streicht Hrsg.* | *(3)* Sed ponamus *(a)* eius loco *(b)* dari *L* 26 aut independentibus *erg. L* 26 non *(1)* potest *(2)* debet *L*



[*Fig. 3*]

Fingamus curvam quamlibet SC ad quam Tangens TS. Nota TS hic respondet AP figurae superioris. Centro S. intervallo SD, vel SE, describatur circulus rectam AR secans in duobus punctis $D.E$. Unde in ipsam TS. ducentur perpendiculares DF, EM. Patet jam TF, TM respondere AD, AE, figurae superioris et DF, EM. ipsis DG, EL et SD vel SE ipsis PG, PL. Itaque TF vocetur $x, FD \sqcap y$. $TS \sqcap v$. $SD \sqcap s$. Hinc jam inveniri poterit aequatio determinanda ad duas radices aequales.

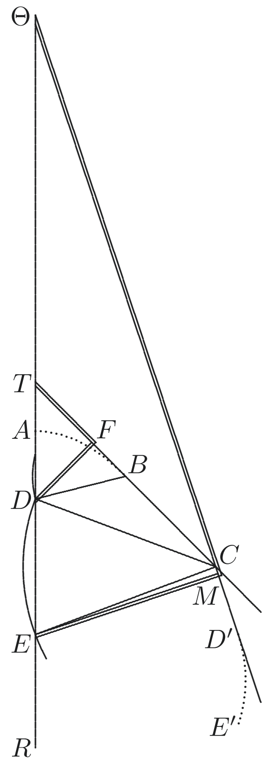
Sed considerandum id nihili esse, quoniam conditio illa non est ingressa calculum, quod TS sit alicujus curvae tangens. Nam si ingressa fuisset haec conditio, rem absolvissemus sane si $(T)(F)$ esset alia quaedam tangens, (distincta a TM,) ad quam $D(F)$ perpendicularis; tunc equidem apparet lineam $(F)SC$ esse curvam, sed non potest veniri ad aequationem duarum radicum aequalium. Et certe frustra inquiritur in methodos,

2 *(1)* | Si fingamus exempli causa *streicht Hrsg.* | *(2)* ponamus dari *(3)* fingamus *L* 2 TS *(1)* et perpendicularis PS. *(2)* nota *(a)* TS, h *(b)* T hic respondet puncto A, TS rectae *(c)* TS *L* 11 FSC *L ändert Hrsg.*

2 Nota: Leibniz' Konstruktionsvorschrift für Fig. 3 ist nicht korrekt; TS müsste TP aus Fig. 2 entsprechen. Ebenso sollten TF und TM mit den Linien TD bzw. TE aus Fig. 2 übereinstimmen. Dies ist bei der Wiedergabe der Figur berücksichtigt. Leibniz benutzt die falschen Beziehungen konsequent weiter; auf die allgemeinen Überlegungen hat dies jedoch keinen Einfluss.

quae si succederent in omnibus Curvis succederent, quod est impossibile. Opus enim quadam particulari in quibusdam tantum curvis succedente methodo; sed quae in proposita qualibet ostendat an res succedat an non.

Et ita tandem inani spe inveniendi per duas radices aequales serierum summas, et figurarum quadraturas sum liberatus; rationemque detexi cur sic ratiocinari non liceat, quod me diu satis vexavit.



[Fig. 4]

An sic: sit curva $ABCD'E'$ duo ejus latera infinite parva BC, CD'. duo Tangentes in eodem se puncto C secantes $TBC, \Theta CD'$. Centro C, radio $CD \sqcap CE$ describatur circulus secans rectam AR in punctis $D. E$. Ponatur data relatio inter TF, et DF vel inter ΘM et EM. ΘM vel $TF \sqcap x$. et EM vel $DF \sqcap y$. $TC \sqcap v$. $\Theta C \sqcap (v)$. Sed TF vocabo $x, DF\, y$. Et $\Theta M\,(x)$ et $EM\,(y)$. $FC \sqcap v - x$. et $MC \sqcap (v) - (x)$. $DC \sqcap s$.

$$s^2 \sqcap \boxed{y^2} + v^2 - 2vx + x^2 \sqcap \boxed{y^2} + (v)^2 - 2(v)(x) + x^2$$

Malum in eo, quod non potest una obtineri aequatio, qua derivetur s. eodem modo ex TF, DF, quo ex $\Theta M, EM$. Nimirum hoc modo fit una praeterea incognita v, nempe aequatio est: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$ et unam ex his tribus, $y. x. v.$ elidendo ope datae aequationis, restabit aequatio in qua duae sunt incognitae capitales, et utraque duas habet radices aequales, formula itaque inde proveniens ordinanda est utroque modo ad duas radices aequales, atque ita invenientur s, et v per x si (ablata jam ante y,) ordinentur omnia secundum x. Vicissim invenientur s. et x per v, si ordinentur omnia secundum v. Quod si ergo relationes duae inter x et v. inter se consentiunt, possibile est problema, et habebitur relatio inter ordinatam et perpendicularem.

26 v. *(1)* Reperitur ergo valor ipsius *(2)* qvod *L*

---

15 s^2: In der folgenden Gleichung wäre nach dem 2. Gleichheitszeichen $(y)^2 + (v)^2 - 2(v)(x) + (x)^2$ richtig gewesen. 28 *Fig. 4*: Leibniz hat die Punktbezeichnungen D und E in der Figur und im Text doppelt verwendet. Zur Unterscheidung wurden deshalb zwei Punkte mit D' bzw. E' bezeichnet.

Sed si quaeramus relationem inter ordinatam et abscissam non ΘM, vel TF, sed ΘD, et ΘE adhibebimus quas ingredietur x, abscissa, quippe earum pars ex TD^2 vel ΘE^2 subtrahendo DF^2 vel EM^2, habebimus TF^2 vel ΘM^2. quibus addemus novam incognitam FC vel CM. unde erunt incognitae ambiguae quatuor: ΘC vel TF, AD vel AE, DF vel EM, FC vel MC, et una fixa DC vel $EC \sqcap s$. Unde unam elidendo ex data problematis conditione restabunt incognitae ambiguae tres quarum quaelibet duos habet valores aequales, itaque secundum singulos ordinanda aequatio est, quod si consentiunt calculi provenientes solutum est problema; sin minus impossibilis habenda est aequatio quae naturam curvae quaesitae exhibeat.

Hic nota si duae datae essent conditiones non ideo numerum ambiguarum deminui posse, sed proceden[dum] quasi duo essent problemata et videndum an calculus consentiat. Quia una conditione res est satis determinata.

Vide haec melius tradita schedula addita sub signo $\mathfrak{X}$.

27_2. APPENDIX METHODI TANGENTIUM INVERSAE NUNC TANDEM EXPLICATAE

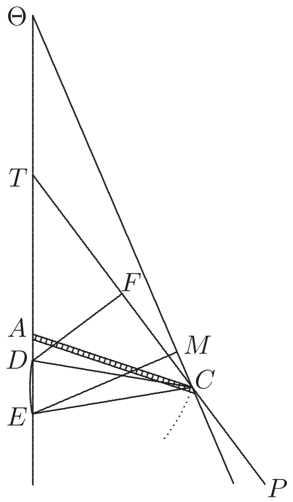
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. Papier unvollständig geschöpft, es fehlt ein halbmondförmiger Ausschnitt am rechten Rand. 1 S. auf Bl. 2 r°. Am linken Rand Figur außerhalb des Textzusammenhangs (s. u. S. 215 Z. 8). Auf Bl. 2 v° N. 27_3. Cc 2, Nr. 903 tlw.

Appendix Januar. 1675. methodi Tangentium inversae nunc tandem explicatae

TF vel $\Theta M \sqcap x$. DF vel $EM \sqcap y$. $CD \sqcap CE \sqcap s$. $AC \sqcap v$. FC vel $MC \sqcap t$. Ex datis TF. FD. AC. quaeritur CD. Videndum an hoc satis determinatum. Quod ita patebit, centro A, radio AC, describatur circulus[,] inde datus angulus rectus TFD extremitati lineae rigidae PFT affixus circa quodlibet in circumferentia circuli sumtum punctum C tamdiu agatur, simulque et sursum ac deorsum moveatur, donec puncta T. et D. cadant in rectam ΘAE. directricem. Quod cum dato quolibet puncto C. obtineri

4 ΘC vel | TD *ändert Hrsg.* |, AD *L* 20 Appendix ... explicatae *erg. L*

13 schedula addita: vgl. N. 27_2.



[*Fig. 1*]

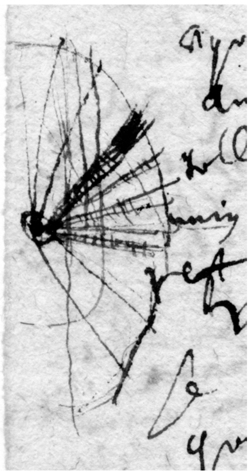
possit, patet non esse problema determinatum, nisi alia accedat data, v. g. FC. Itaque ex TF. FD. FC. AC. datis, quaeritur CD. Eodem autem modo quo ex his invenietur $CD\,(\sqcap\, CE)$ eodem modo etiam ex $\Theta M, ME, MC, AC$ invenietur CE, seu CD. Itaque habebitur aequatio ubi tres ambiguae seu duplicis valoris, nempe x. y. t. et duae simplicis valoris nempe s et v. Una autem ex his tribus, nempe ex x. y. t. poterit eliminari, ex problemate scilicet dato; itaque restabit aequatio duarum ambiguarum, et duarum simplicium indeterminatarum. Quam secundum utramque ex ambiguis determinabimus ad duas radices aequales, ordinando nunc secundum unam, nunc secundum alteram; et secundum utramque ordinationem, arithmetica progressione (compendio Huddenii) multiplicando praeter datam ergo, habebuntur adhuc duae aequationes, ope harum multiplicationum; id est habebuntur aequationes tres. Ergo duae quantitates ambiguae tolli poterunt duobus modis; nam tollantur primum una ope unius aequationis, inde altera bis, ope reliquarum duarum, restabunt tantum duae, nempe v et s. idque duobus modis, necesse est ergo inter se consentire hos duos modos atque coincidere; quo facto solutum erit problema, et habebitur modus describendi Geometrice curvam quaesitam. Sin vero

2 FC. *(1)* aut etiam qvaedam relatio *(2)* itaqve *L* 13 primum *(1)* ope duarum aeqvationum, *(2)* una *L*

3 quaeritur CD: Bei gegebenem FC ergibt sich CD bereits aus $CD^2 = FD^2 + FC^2$.
10 compendio Huddenii: vgl. J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 433–439 u. S. 507–516.

non consentiant, pro certo habendum est, problema esse impossibile sive naturam curvae quaesitae nulla ejusmodi aequatione relationem s et v continente, exprimi posse. Experienda haec methodus in quibusdam problematis methodi tangentium inversae jam a posteriori notis. Hinc etiam semper haberi potest methodus inveniendi curvam quam proxime satisfacientem. Etiam forte ope hujus methodi inveniri possunt ejusmodi solutiones ex hypothesi cujusdam quadraturae.

[*Figur ohne Bezug zum Text*]



[*Fig. 2*] *

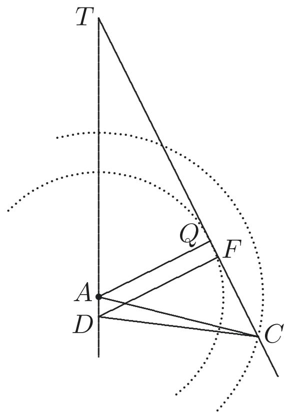
27_3. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA. JANUAR. 1675. PARS II[DA]

Überlieferung: *L* Konzept LH 35 VIII 2 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 2 v°. Auf Bl. 2 r° N. 27_2. Cc 2, Nr. 903 tlw.

De Methodo Tangentium inversa. Januar. 1675. pars II[da]

$DC \sqcap s$. $AC \sqcap v$. Jam $TA^2 - AQ^2 \sqcap TQ^2$. $v^2 - AQ^2 \sqcap QC^2$. $\dfrac{TQ}{AQ} \sqcap \dfrac{TQ+QF}{DF}$ sive $\dfrac{TQ}{AQ} - \dfrac{TQ}{DF}$, $\quad DF \sqcap QF$. $FC \sqcap \dagger\sqrt{v^2 - AQ^2}(\dagger)\dfrac{TQ \quad DF - TQ, AQ}{AQ}$. et $DC^2 \sqcap s^2 \sqcap$

* LH 35 VIII 2 Bl. 2 r° (Ausschnitt). Überarbeiteter Ausschnitt eines Digitalisats der GWLB.



[*Fig. 1*]

$v^2 - AQ^2 \text{ ǂ } (\text{ǂ})\ DF - AQ \frown \frac{TQ}{AQ}\ 2\sqrt{v^2 - AQ^2},, + DF^2 - 2DF, AQ, +AQ^2, \frac{TQ^2}{AQ^2},,, + DF^2$. In qua aequatione duae sunt simplicis valoris, nempe s et v, reliquae tres, AQ, DF, TQ. duplicis, ut ex figura paginae praecedentis patet. Res eodem redit, si ut TQ elidamus, ingredi calculum malimus TA. Item si nolimus uti DF possumus uti AD. Fiet enim: $\frac{QF}{AD} \sqcap \frac{TQ}{TA}$. Ergo $QF \sqcap \frac{TQ, AD}{TA}$. Atque ita neque AQ, neque DF utemur. Ergo $AQ^2 \sqcap TA^2 - TQ^2$. et $QC^2 \sqcap AC^2 - AQ^2 \sqcap AC^2 - TA^2 + TQ^2$ et erit: $FC \sqcap \frac{\text{ǂ}\sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2}\ TA(\text{ǂ}) - TQ, AD}{TA}$ et $\frac{DF}{AQ \sqcap \sqrt{TA^2 - TQ^2}} \sqcap \frac{TA + AD}{TA}$. Ergo $DF \sqcap \frac{TA + AD, \sqrt{TA^2 - TQ^2}}{TA}$. Ergo DC^2 seu s^2[,] $TA^2 \sqcap +AC^2 - TA^2 + TQ^2, TA^2,, \text{ ǂ } (\text{ǂ}) - 2TA, TQ, AD, \sqrt{AC^2 - TA^2 + TQ^2} + TQ^2, AD^2,,, + TA^2 + 2TA, AD, +AD^2,, \frown TA^2 - TQ^2$.

Unde cum rursus alia opus sit quadratione ad calculum purificandum; satis intelligi potest, posteriorem calculum priore nihilo esse compendiosiorem, imo fortasse priorem compendiosiorem esse. Obtenta ergo denique aequatione pura, et aliqua ex tribus ambiguis, AQ, DF, TQ vel TA, TQ, AD ope proprietatis tangentium datae ad curvam quaesitam, elisa; restabit aequatio duarum ambiguarum, determinanda ad duos utriusque ambiguae valores aequales. Itaque nunc secundum unam, nunc secundum alteram ordinata multiplicabitur ad duas radices aequales, methodo Huddeniana, itaque habebuntur aequationes tres, data, facta ex data secundum unam ordinationem, facta ex data secundum alteram ordinationem. Ope factae ex data secundum unam ordinationem, inveniatur unius ex ambiguis valor, et elidatur ambigua, illa ex data; ope factae ex

1 AQ^2(ǂǂ)DF *L ändert Hrsg.* 3 sunt *(1)* fixae ac *(2)* simplicis valoris *(a)* indeterminatae *(b)*, nempe *L* 17 AD *(1)* ope problematis dati particularis elisa, restat aeqvatio *(2)* ope *L*

4 figura: s. Fig. 1 in N. 27₂. 10 *Fig. 1*: Lediglich zur Konstruktion dienende Linien in Blindtechnik werden nicht wiedergegeben.

data secundum alteram ordinationem elidatur altera ambigua; et habebitur aequatio in qua nulla restabit ambigua.

Inspice exempli causa has tres aequationes[:] $x+y+a \sqcap 0$. $x^2+y^2+b \sqcap 0$. $y^2+x+c \sqcap 0$. Ope primae aequationis habebitur valor ipsius x. Substituatur is in secunda et tertia, elisa erit x. Restabunt aequationes duae, in quibus non nisi una incognita erit y. Itaque quaerendo valorem ipsius y tam secundum unam, quam secundum alteram, necesse est oriri aequationem identicam, sive coincidere hos duos valores; sin minus problema erit impossibile, non quidem absolute, attamen per calculum analyticum. Quod si aliquo casu felici fiat, ex natura problematis, ut ope conditionis sive proprietatis datae tollantur ex aequatione proposita ambiguae duae, tunc certum erit utique problema esse possibile. Itaque inquirendum subtilius, quaenam proprietates tangentium sint hujusmodi; item, an obliquato problemate, supposita aliqua quadratura aut dimensione curvae, veniri possit ad ejusmodi destructionem. Hoc enim jam superest maxime inquirendum quomodo problemata Tangentium inversa reducantur ad simplicissimas Quadraturas vel curvarum in rectum extensiones. Item videndum an ope quantitatum arbitrariarum effici possit, ut obtineatur sub finem duorum calculorum coincidentia. Denique ista ad numerorum quoque summas transferri possunt.

27_4. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA PARS III[TIA]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 3–4. 1 Bog. 4°. 4 S.
Cc 2, Nr. 904

Januar. 1675.

De Methodo Tangentium inversa pars III[tia]

Duabus prioribus schedulis rem antea desperatam effeci, ut problemata Tangentium inversa, seu modi inveniendi figuram, data tangentium proprietate, ad calculum analyticum revocarentur; secunda earum inprimis, ubi ostendi regulariter problemata

7 *Über* valores: error

23 prioribus schedulis: N. 27_1 sowie N. 27_2, 27_3. 23 effeci: vgl. die Erl. zu N. 4 S. 23 Z. 10.

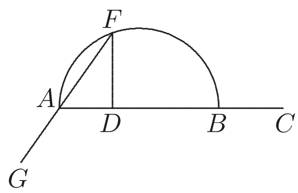
methodi tangentium inversae revocari ad aequationem quam ingrediantur indeterminatae quatuor, ex quibus duae sunt capitales, duae vero incidentes. Et duae capitales sunt ambiguae sive duos habent singulae valores aequales. Itaque aequatio primum secundum unam, deinde secundum alteram ordinanda, et semper Huddeniano more ad duas radices aequales multiplicanda est. Habebuntur aequationes tres, quarum unius ope ex duabus reliquis tolletur una indeterminatarum capitalium; restabunt aequationes duae, quarum cum quaelibet eandem habeat indeterminatam capitalem, ope unius ex ipsis valor ejus quae restat, capitalis habebitur; et in altera in ipsius capitalis locum substituetur; atque ea aequatio in qua substitutus est valor, nullam amplius ex duabus illis incognitis capitalibus habebit, sed residua aequatio nullas habebit indeterminatas praeter incidentes, quae tamen eae ipsae sunt quas potissimum quaerebamus.

Et ita quidem videtur semper haberi posse quod desideramus, regulariterque solvi poterunt problemata tangentium inversa; nisi subsit aliquid quod nos turbet, quod quale sit nondum satis judico. Fieri equidem potest quibusdam casibus, ut una sola aequatio tollat duas incognitas; et ut duae incognitae reapse non nisi pro una haberi possint, et eo casu calculus exitum reperire sane non potest, ut si sit aequatio $y^2+2yx+x^2+bx+by-a^2 \sqcap 0$. Nam in hac aequatione duae sunt in speciem incognitae y et x, reapse non nisi una est: $y+x \sqcap z$. Perinde enim est ac si diceres: $z^2+bz-a^2 \sqcap 0$. Saepe nimirum fiet ut una quadam linea recta incognita sive quaesita sumta, fiat aequatio unius incognitae; cum alias sit duarum incognitarum apparentium, ut si sit aequatio:
$$\begin{array}{l} +y^2+2y\sqrt{ax}+ax+by+a^2 \sqcap 0. \\ \qquad\qquad\qquad\quad +\ b\ \ldots \end{array}$$
Et adhuc ordinando:
$$\begin{array}{l} y^2+ax+by+a^2 \sqcap -2y\sqrt{ax} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -\ b\ \ldots \end{array}$$
sive quadrando:
$$\begin{array}{l} y^4+2a\,y^2x+2by^3+2a^2y^2,+a^2x^2+2ab\,yx+2a^3\,x,+2b^2y^2+2ba^2y,+a^4 \sqcap 0. \\ \quad -4a\ \ldots \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad -4ba\ \ldots -b^2a\ . \end{array}$$

Haec aequatio duarum in speciem incognitarum, non est revera nisi unius. Sint enim lineae, data $a \sqcap AB$. quaesitae $y \sqcap BC$, et $x \sqcap AD$. Circa AB diametrum describatur

1 ad *(1)* duas aeqvationes *(2)* aeqvationem *L* 3 Itaqve *(1)* ordin *(2)* multiplicando aeqvation *(3)* aeqvatio *L* 5 tres, *(1)* incognitae aut *(2)* indeterminatae autem *(3)* qvarum *L* 6 duae, *(1)* et unica in illis *(2)* qvarum *L* 20 si *(1)* dicas y + *(a)* $\sqrt{}$az *(b)* $\sqrt{}$ax $\sqcap$ z *(2)* sit *L* 21 adhuc *(1)* tollendo *(a)* ra *(b)* irrationalem *(2)* ordinando *L* 25 AD. *(1)* Centro B radio BA describatur ci *(2)* Circa *L*

22 $+\,2b^2y^2$: Es müsste $+b^2y^2$ heißen.



[*Fig. 1*]

circulus AFB, ita ut FD sit perpendicularis ad AB. Juncta AF erit $\sqcap \sqrt{ax}$. et producta FAG, dum AG aequetur ipsi BC erit $GF \sqcap y + \sqrt{ax}$. Quae si appelletur z, et ipsa z seu GF velut incognita quaeratur, aequatio producta in speciem tam alta, duarum incognitarum, ad unam redibit incognitam valde simplicem: $z^2 + bz + a^2 \sqcap 0$. Unde apparet saepe fieri, ut aequatio duarum appareat incognitarum, nec sit tamen, atque ita fiat, ut existentibus eo casu duabus aequationibus problema fiat impossibile. Oblata autem aequatione ejusmodi res ita apparebit, si ex ea unius incognitarum valorem extrahere laboremus, quaerendo aequationis radicem, ita enim eadem opera inveniemus duarum valorem: v.g. $y^2 + 2yx + x^2 + by + bx - a^2 \sqcap 0$. Ergo:

$$\begin{array}{llll} y^2 & +\ 2xy & +\ x^2 & \sqcap 0. \\ & +\ \ b\,. & +\ bx & \\ & & -\ a^2 & \end{array}$$

Unde

$$\begin{array}{llllll} y^2 & +\ 2xy & +\ 4x^2 & \sqcap\ \ 4x^2 & -\ x^2. \\ & +\ \ b\,. & +\ 4xb & \ \ +\ 4bx & -\ bx \\ & & +\ b^2 & \ \ +\ b^2 & -\ a^2 \end{array}$$

Unde extrahi potest radix etc.

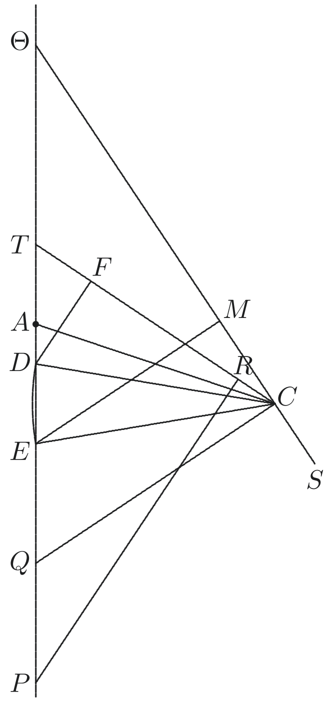
Sed jam video hic lapsum me, dum credo certis casibus problema esse nimis determinatum, quando certo valore novae incognitae assumto, ex aequatione duarum incognitarum fieri potest una, jam enim video id semper fieri posse, semper scilicet posse lineam duci qua pro incognita assumta, ex aequatione duarum incognitarum fiat aequatio incognitae unius, nimirum unius illius incognitae ratione problema est determinatum; non vero ratione duarum ex quibus componitur ejus valor, quemadmodum fieri potest, ut duarum linearum ignotarum summa sit nota etc.

7 f. impossibile. *(1)* Ibi *(2)* it *(3)* Haec facile agno *(4)* Oblata *L*   16 credo *(1)* problema *(2)* duas tantum incognitas locum habere *(3)* certis *L*

1 *Fig. 1*: Leibniz hatte zunächst (vgl. Stufe *(1)* der Variante zu S. 218 Z. 25) einen Halbkreis mit Radius BA gezeichnet, DF bis zum Schnittpunkt mit dem Halbkreis verlängert und die Verbindungsstrecke zu A gezogen. Anschließend hat er den Halbkreisbogen gestrichen. Es werden nur die gültigen Elemente der Figur wiedergegeben.   15 $+b^2 - a^2$: Es müsste $+b^2 + a^2$ stehen.

Hinc jam sequitur si sit aequatio duarum vel etiam plurium incognitarum, quarum quaelibet duos habeat valores aequales; semper posse reduci aequationem ad unicam duos tantum valores aequales habentem, quia semper linea aliqua poterit duci, cujus solius duplex valor sufficiat. Itaque tum demum impossibilis reddi potest aequatio, cum unius aequationis ope tolli possunt incognitae duae.

Caeterum in exempla inquiramus, in quibus certum est aliunde exitum haberi: Quaeritur curva, in qua sit reducta semper constans.

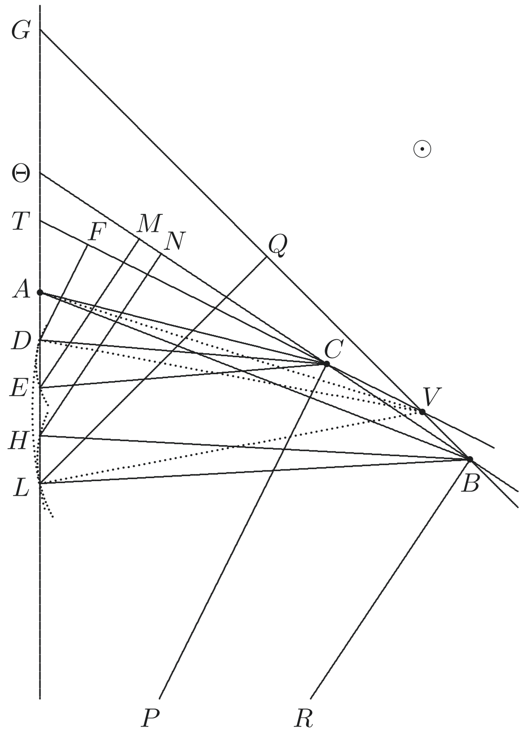


[*Fig. 2a*]

1 f. *Zwischen den Zeilen:* (+ Ita posset etiam methodus Tangentium inversa tractari methodo Fermatiana. [+])

1 si *(1)* sint aeqvationes *(2)* sit *L* 2 f. unicam *(1)* unius tantum valoris *(2)* duos *L*

8 *Fig. 2a*: Zwei gestrichene sowie eine durch Überschreiben ungültig gemachte Vorstufe werden nicht wiedergegeben. 10 methodo Fermatiana: s. Erl. zu N. 7_4 S. 84 Z. 9.



[*Fig. 2b*]

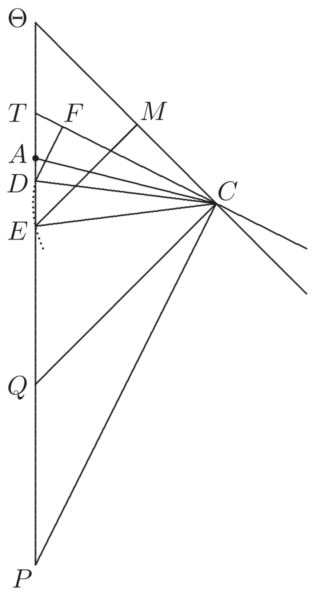
Esto directrix $G\Theta TADEHLPR$, in qua punctum fixum A. Tres curvae quaesitae tangentes $TC, \Theta CB, GB$. latus unum infinite parvum CB determinantes. Jungantur rectae AC, AB. Centro C, radio quolibet CD. describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis D. E. Eodem modo centro B radio BH describatur arcus circuli secans directricem in duobus punctis, H, L. Quod si intervallum DE ponatur infinite parvum, vel etiam HL. idem est ac si recta CD vel CE, item BH et BL esset ad directricem perpendicularis seu ordinatim applicata. Ipsi TC tangenti perpendicularis CP directrici occurrat in P, et ipsi ΘCB alteri tangenti perpendicularis BR, eidem occurrat in R, erunt reductae DP, et HR, inter se aequales.

3 unum *(1)* indefinite *(2)* infinite *L* 10 et | HP *ändert Hrsg.* | inter *L*

1 *Fig. 2b*: Die Punkte P und R fallen in Leibniz' Zeichnung jenseits des Papierrands als Schnittpunkte der Normalen mit der Achse GL. Eine nicht gestrichene Vorstufe wird nicht wiedergegeben.

Quo posito quaeritur natura hujus curvae, seu relatio ipsius CD, ad ipsam AC. Nimirum ducantur perpendiculares DF, EM, HN, LQ. Patet parallelas esse, DF, CP, item EM, HN, BR. Investigetur DC, ex DF, TF, TA (vel aliter,) habebitur CD, eodem modo ex EM, ΘM, ΘA fiet $CE \sqcap CD$. Unde aequatio trium incognitarum ambiguarum (quarum una elidi potest). Similiter rursus ex $HN, \Theta N, \Theta A$, investigetur BH, et eodem modo ex LQ, GQ, GA investigetur BL. Ita alia rursus aequatio.

Sed jam video Tribus istis tangentibus, duobusque punctis curvae, non esse opus, nisi quando quaerimus progressiones illas in se continue reflexas, cum terminus sequens derivatur ex antecedente; ubi fieri potest etiam ut duobus sit opus lateribus, et tribus punctis et quatuor tangentibus ut cum laterum progressio explicatur dependentia unius ex altero. Hoc loco videntur puncta $G. Q. B. H. L. R.$ omitti posse. Nempe ipsa DF valorem habet determinatum, et efficiendum ut ipsa calculum cujus ope [*bricht ab*]



[*Fig. 3*]

Sit per punctum datum A transiens recta indefinita positione data, ΘAP, quam vocabo directricem, cui in punctis $T. \Theta.$ occurrant duae rectae in puncto C. se secantes, CT, $C\Theta$. Centro C, radio, CD, describatur arcus circuli DE, secans rectam directricem, in punctis $D. E.$ Ex puncto D ducatur perpendicularis DF ad rectam TC, et ex puncto E, perpendicularis EM ad rectam $C\Theta$. Datum intelligatur punctum A, et rectae AC magnitudo ac proinde circulus in cujus circumferentiam incidit punctum C. Data etiam intelligatur AP. rectaque indefinita circa punctum C gyrata, secabit alicubi circulum centro A, radio AC descriptum. Quod si praeterea daretur etiam AT, determinatum erit punctum C, idem est si alia quaedam ejusmodi linea detur: denique data recta DF, dabitur etiam punctum D.

Jam ex rectis AT, AP, DF, AC, datur recta DC. et eodem plane modo, ex datis $A\Theta$, AQ, EM, AC, datur

3 ex *(1)* AC, TD, DF, *(2)* DF *L* 7 curvae *(1)* imo et pluribus *(2)* non *L* 10 f. ut ... progressio *(1)* pendet ex se invicem *(2)* explicatur ... altero *erg.* *L* 25 C, *(1)* qvia angulo |recto *erg.*| TCP circa centrum P gyrato *(2)* idem *L*

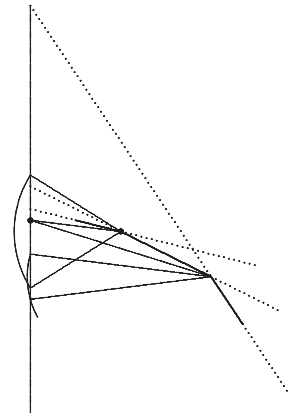
recta $CE \sqcap DC$. Itaque litera una eademque, sed duplicis valoris repraesentari possunt AT et $A\Theta$, item AP et AQ; ac denique DF, et EM. Ex his ambigua AP, vel AQ elidi potest, quia valor ejus hoc loco supponitur esse datus et constans; restant incognitae duae, AT vel $A\Theta$, et DF vel EM. Aequatio autem per quam ex datis AT, AP, DF, AC. invenitur DC, ordinetur tum secundum ambiguam AT vel $A\Theta$, tum secundum ambiguam DF vel EM, et multiplicetur secundum utramque ordinationem ad effectum duarum Radicum aequalium, et praeter inventam habebuntur duae aliae aequationes, quarum ope elidentur duae illae ambiguae, nec aliae restabunt indeterminatae quam AC, et DC. Recte ista quidem et intelligi potest sumta alia AC, et alio quolibet puncto C. etc. eundem calculum valere; sed una tamen difficultas superest, quod hac ratione exprimitur quidem puncta C. omnia cadere in curvam quaesitam; et quod miror, determinatur natura Curvae; sed non determinatur rectam TC ejus curvae esse tangentem; unde cum infinitis modis ductae intelligi possint rectae $TC, \Theta C$, ut si jungantur tangentes alterius cujusdam curvae datae ipsam curvam quaesitam in eo loco secantis; manifestum est problema non debere determinatum esse. Et miror tamen, ut dixi curvam fieri determinatam, seu restare duas tantum incognitas.

Nisi scilicet dicamus non exprimi magnitudinem ipsius DE. Quod ita videbimus: posita $T\Theta$ infinite parva, coincident puncta T et Θ. ergo et rectae CT et $C\Theta$. Rectae autem DF, et EM sunt aequales seu differentiae infinite parvae, sed hinc non potest probari eas coincidere. Itaque patet nullo modo exprimi naturam curvae, quia prout DE alia atque alia assumitur alia atque alia fit curva, et si sumatur infinite parva, tum demum habetur curva determinata.

Itaque ejusmodi inquisitione nihil agitur. Ac proinde etsi nondum desperem, video tamen alia ratione opus esse.

Quod si duabus ad unam eandemque aequationem ordinatis vel abscissis opus est, non veniemus profecto ad aequationem, sed semper ad calculos illos mirabiles in se reflexos, quos tamen fateor, valde operae pretium est persequi, cum profundas contineant et miras speculationes, quae apparent, cum duo diversissimis istis viis quaeruntur. Venit

2 AP, *(1)* | et *streicht Hrsg.* | *(2)* vel *L* 16 tantum *(1)* ambiguas *(2)* incognitas *L* 17 DE. *(1)* Neqve enim ex datis TQ, et EM. DF. *(2)* Imo exprimitur: nam posita *(a)* TQ *(b)*, TQ infinite parva, *(aa)* erit et *(bb)* erunt TC et CΘ linea eadem; *(3)* Qvod *L* 18 posita | TQ *ändert Hrsg.* | infinite *L* 18 et | Q. *ändert Hrsg.* | ergo *L* 18 et | CM. *ändert Hrsg.* | *(1)* puncta *(2)* rectae *L* 19 seu ... parvae *erg. L*



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

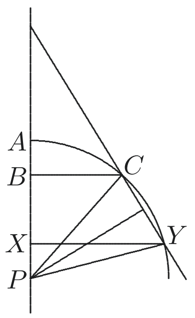
tamen in mentem aliqua observatio, cujus ope fortasse evitari potest duplicitas incognitarum earundem, inspice figuram ⊙. Ibi tres sunt tangentes TCV, ΘCB, et GVB. Sive si mavis polygoni ordinati circumscripti latera producta TCV, GVB curvam in punctis C. B. tangentia; latus unum polygoni inscripti productum ΘCB. Appello enim polygona ordinata, quaecunque curvae alicubi certa regula constanti, inscribuntur aut circumscribuntur. Centro V. radio VD vel VL describatur arcus circuli LD, secans directricem in punctis D, L. Unde posita recta DL. infinite parva, poterit VD. censeri ordinata curvae quaesitae. Jungatur AV. Videndum jam est, an ope ipsarum ductarum TC, ΘCB; eodem calculo inveniri possit DV, quomodo ope ductarum GB, et ΘCB inveniri potest VL. Adhibitis scilicet AT vel AG una ambigua expressis, et perpendicularibus tam ex D quam ex L in ipsam ΘCB. ductis rursus una ambigua expressis. Ita enim si postea ea ambigua dicatur habere duos valores aequales eo ipso dicetur puncta D. et L. coincidere. Ipsam autem CB. esse infinite parvam (quoniam ambigua non est) reapse assumetur. Quod si jam ita eodem modo habebitur valor ipsius DV vel LV. ex his ambiguis, etiamsi signa varientur forte, modo ulteriori multiplicatione ad altiorem gradum, signa reddi possint eadem, (: ecce usum methodi meae, quam voco universalium :) habebitur aequatio in qua ambiguae duos habent valores aequales; et determinando veniri poterit ad solutionem.

Sed et aliud jam succurrit remedium, ponamus duo ejusdem curvae puncta, et duas AC, item AB, simul in eundem calculum intrare; vitato solum, ne duae simul ambiguae eaedem intrent eundem calculum, quoniam AC et AB. pono non esse ambiguas, nec litera exprimi duplicis valoris. Hoc posito calculus absolvatur, et ambiguis caeteroquin, si licet, ope duarum radicum aequalium exterminatis, restabit denique aequatio trium

4 f. polygoni *(1)* reguli *(2)* ordinati *(a)* intra curvam *(b)* circumscripti *L* 28 aeqvatio *(1)* duarum *(2)* trium *L*

3 figuram ⊙: s. o. Fig. 2b. Im Folgenden wird der Punkt V eingeführt. Die Punkte D und L aus ⊙ erhalten eine neue Funktion (vgl. Z. 10). 22 methodi meae: vgl. *De la Methode de l'Universalité*, Cc 2, Nr. 863, tlw. gedr. in COUTURAT, *Opusc. et fragm.*, S. 97–143.

indeterminatarum, AB, AC, et DC (vel DE). Ubi in locum alterutrius ex his AB, AC substituendo valorem alterius quantitate infinite parva auctum vel minutum verbi gratia in locum AB ponendo $AC + 0$. et quae per 0. multiplicantur abjiciendo sive quod idem est in locum AB. simpliciter substituendo ubique AC. restabunt incognitae tantum duae. Sed ut hoc fieri possit, necesse est ut ipsa DC, ex ambiguis quae adhibentur, una cum ipsa AC et AC. eodem modo oriatur, quod tamen difficile. Sin vero plures calculum necesse sit intrare ejusdem denominationis rectas, seu ejusdem progressionis terminos; tunc remedium hoc locum non habet.



[*Fig. 5*]

$AP \sqcap v$. $PC \sqcap s$. $AB \sqcap x$. $s^2 \sqcap y^2 + v^2 + 2vx + x^2$. Pone s. esse quantitatem constantem seu determinatam, $\sqcap a$, fiet: $y^2 + x^2 + 2vx + \begin{smallmatrix} v^2 \\ -a^2 \end{smallmatrix} \sqcap 0$. Quod cum fiat in Circulo, videndum est an hinc derivari possit, talem curvam esse circumferentiam circuli. Nimirum tantum haec aequatio ad duas utriusque incognitae radices aequales determinanda est, quod per Slusii regulam ita fiet: $-2y^2 \sqcap 2xl + 2vl$; sive $l \sqcap \frac{-\cancel{2}y^2}{\cancel{2}x + \cancel{2}v}$. Jam $l \sqcap \frac{y^2}{x - v}$. ut constat aliunde. Ergo hinc nulla obtineri potest aequatio: Quandocunque s. vel v, ita explicari possunt, ut in eorum valorem non ingrediatur neque x, neque y. sequitur aequatio identica v. g. quaeritur curva, in qua sit $s \sqcap \frac{v^2}{a}$. Fiet: $v^4 \sqcap y^2a^2 + a^2v^2 + 2a^2vx + a^2x^2$, sive ordinando ad duas radices aequales:

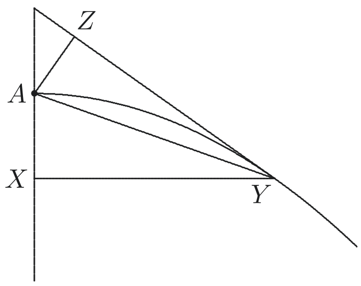
4 AC. *(1)* restabit incognita tantum una *(2)* restabunt *L* 5 ut *(1)* caeterae ambiguae e⟨o⟩sd *(2)* ipsa *L* 17 aeqvatio: *(1)* Sumamus aliam qvaestionem, in qva: s $\sqcap \frac{v^2}{a}$. et *(2)* Qvandocunqve *L* 18 y. *(1)* poterit semper solvi problema, Methodi Tangentium inversae. *(2)* seqvitur *L*

9 $s^2 \sqcap$: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste $-2vx$ stehen. Leibniz benutzt die fehlerhafte Gleichung bis S. 226 Z. 6. 14 f. Slusii regulam: s. *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059). Leibniz vermischt im Folgenden in unzulässiger Weise Berechnung der Subtangente und Bestimmung von Doppelwurzeln, wie er selbst in S. 228 Z. 7 f. erkennt. 16 *Fig. 5*: Die Kurve ACY war zunächst nicht als Kreis, sondern als allgemeine Kurve konzipiert. Die zugehörige Vorstufe enthielt zusätzlich zum Kurvenbogen einen später gestrichenen Kreisbogen durch C und Y.

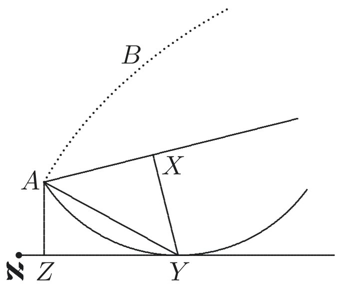
$-2y^2 \sqcap 2vl + 2xl$. Unde rursus aequatio identica seu valor ipsius l. dudum notus. Semper enim valor ille destruetur.

Ponamus jam valorem esse alium, v. g. $v - x \sqcap a$. vel $v - x - \beta \sqcap a$. Substituendo hunc valorem in aequatione $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + a^2$. Et alia: $s^2 \sqcap y^2 + a^2 + 2a\beta + \beta^2$. Quae duae aequationes sunt aequivalentes, sed nihil hinc duci potest.

Video jam semper videri posse inveniri curvam data relatione inter $\underline{s}$. et $\underline{v}$. nempe explicando non s per v, sed v per s. Ita ponendo $v \sqcap \frac{s^2}{a}$, ex aequatione generali: $s^2 \sqcap y^2 + v^2 - 2vx + x^2$, fiet: $s^2 \sqcap y^2 + \frac{s^4}{a^2} - \frac{2s^2}{a}x + x^2$, et ordinando ad duas radices aequales: $-\cancel{2}y^2 \sqcap -\frac{\cancel{2}s^2}{a}l + \cancel{2}xl$, sive $l \sqcap \frac{-y^2}{\frac{s^2}{a} + x}$. Jam $l \sqcap \frac{y^2}{-v - x}$. Ergo $-\frac{s^2}{a} - x \sqcap -v - x$, unde redit aequatio supposita $\frac{s^2}{a} \sqcap v$. neque quicquam hinc duci potest.



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*]

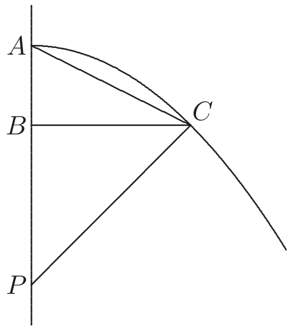
Sit planum rigidum ZY super quo volvitur curva AY, et puncto A describitur alia curva AB. quam pono dari. Directrix incipit in ZY ex $\aleph$. Data Analytice curva AB dabitur et relatio inter $\aleph Y$ et AY item inter AZ et ZY. Quaeritur an modus habeatur semper ducendi rectam AX in fig. 2. Is vero ex his solis datis non habetur. Si detur curva

4 + v² *(1)* + *(2)* −2vx *L* 9 +v² *(1)* + *(2)* −2vx *L* 14 Data *(1)* Geometrice *(2)* Analytice *L*

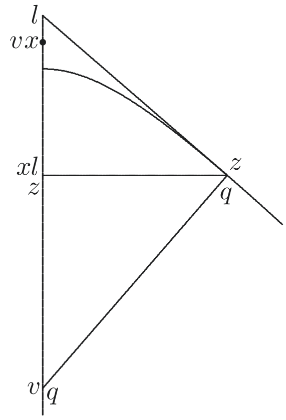
10 sive $l \sqcap$: Im Nenner müsste $-\frac{s^2}{a}$ stehen. 16 fig. 2: s. Fig. 6b.

AY. ejusque in rectum extensio, eo ipso dabitur descriptio Trochoeidis *AB*. Datur autem curvae in rectum extensio si detur [relatio] inter $\aleph Y \sqcap$ curvae *AY* et inter *AY*, ergo ex his datis, datur curvae *AB*. descriptio.

Videndum an liceat mutare non nihil calculum methodi tangentium inversae, utendo una tantum indeterminata simplici *s*, et non utendo ipsa *v*. sed ejus loco adhibendo ambiguas, ut scilicet valor per ambiguas substituatur in ambiguae locum, non vero valor simplicis in locum ambiguae.



[*Fig. 7a*]



[*Fig. 7b*]

Sit $AB \sqcap x$. $AC \sqcap z$. $BP \sqcap p$. et $CP \sqcap s$. fiet: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - p^2$, ubi patet etiam *p* esse ambiguam, solam *s*. non esse. Jam ponamus ut in parabola, *p*. esse fixam seu substituamus, *a*, fiet: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$. aequatio ad Hyperbolam; quae ad duas radices aequales ordinabitur inveniendo Hyperbolae hujus tangentes, nempe ordinando ad duas

2 ℵZ *L ändert Hrsg.* 11 $-\mathrm{a}^2$. *(1)* ordinando ad duas radices aeqvales: $\cancel{2}\mathrm{z}^2 \sqcap \cancel{2}\mathrm{xl}$. seu $\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{x}} \sqcap \mathrm{l}. \sqcap$ *(a)* $\frac{\mathrm{x}^2}{}$ *(b)* $\frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{v}-\mathrm{x}}$. fiet: $2\mathrm{x} \sqcap \mathrm{v}$. *(2)* aeqvatio *L*

12 nempe: Leibniz berechnet die Subtangente zu $z^2 = x^2 + s^2 - a^2$ nicht mit dem korrekten Wert $s^2 - a^2 = 2ax$, sondern mit konstantem $s^2 - a^2$. In der zugehörigen Zeichnung (s. Fig. 7b) hat er die oberen Endpunkte von *x* und *v* zunächst richtig in den Scheitelpunkt der Hyperbel gelegt, diese dann aber gemäß seiner falschen Annahme in den hervorgehobenen Punkt oberhalb des Scheitels verschoben. Bei konsequenter Rechnung hätte dieser Punkt sogar über dem Endpunkt der Subtangente *l* liegen müssen. Fig. 7b orientiert sich weitgehend an Leibniz' Vorlage.

radices aequales: $z^2 \sqcap xl$. $l \sqcap \dfrac{z^2}{x}$. $\sqcap \dfrac{z^2}{v-x}$. $v \sqcap 2x$. Substituantur hi valores in aequatione $q^2 \sqcap z^2 + v^2 - 2vx + x^2$ unde explicando $q^2 \sqcap z^2 + x^2$. Sed ex his nihil habeo. Quaerenda scilicet ratio, cujus ope aequatio aliqua ita ad duas radices aequales ordinetur ut nulla tamen inde oriatur nova litera, nempe haec: $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$, si ita ordinari posset, ut nova haberetur aequatio, in qua nulla esset alia litera nova, et in qua esset s. collatione duarum tolli posset s, et haberetur aequatio, in qua non nisi z et x extarent. Quae est quaesita. Sed regula Slusiana aequatio proposita non ordinatur ad duas radices aequales nisi nova adhibita incognita $\underline{l}$, credo Huddenium id aliter posse. Mira dubia, quomodo regula Huddenii de multiplicatione aequationis duas radices aequales habentis per progressionem Arithmeticam vera et universaliter esse possit cum tamen non habeat locum, quando duae sunt ambiguae, v. g. cum quaeritur modus ad duas radices aequales determinandi aequationem ad circulum: $x^2 + y^2 \sqcap a^2$. Deinde videndum an si sit aequatio: $x^2 - a^2 + ba \sqcap 0$. determinanda ad duas radices aequales, ubi simpliciter fieret $x \sqcap 0$. an liceat mederi explicando: $z^2 + 2cz + c^2 - a^2 + ba \sqcap [0]$ unde $2z + 2c \sqcap 0$. seu $z + c \sqcap 0$. Ergo nihil facit explicatio.

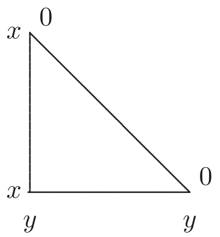
Si potuissent conferri $z^2 - x^2 \sqcap s^2 - a^2$ cum $z^2 + x^2 - 2vx + v^2 - q^2$ fuisset aliquid.

28. ORDINATARUM IN PARTES RESOLUTIO AD QUADRATURAS
[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 94. 1 Bl. 2°, von dem das obere Drittel abgeschnitten wurde. 4/5 S. auf Bl. 94 r°. Bl. 94 v° leer.
Cc 2, Nr. 788

Datierungsgründe: Dieses und das folgende Stück stehen in engem inhaltlichen Zusammenhang und dürften etwa gleichzeitig entstanden sein. Mit Überlegungen zur Umordnung und Division von Kurvengleichungen hatte Leibniz im Dezember 1674 begonnen (vgl. VII, 3 N. 39 S. 567 sowie VII, 1 N. 141 u. 143). Die in N. 28 u. 29 verwendeten Symbole für Mehrfachvorzeichen benutzt Leibniz in der zweiten Hälfte von 1674 und vereinzelt bis ins Frühjahr 1675. Das Wasserzeichen des Papiers von N. 28 ist für Januar 1675 belegt.

O r d i n a t a r u m i n p a r t e s r e s o l u t i o a d q u a d r a t u r a s



[*Fig. 1*]

Si sit Aequatio $y^2 + x^2 \sqcap 0$. seu $y^2 \sqcap -x^2$. quaeritur modus inveniendi ipsam y. Erit $y \sqcap x\sqrt{-1}$. Sane nondum video quomodo id quidem instrui queat, nisi ita procedamus forte: $ya \sqcap xa\sqrt{\dfrac{-a}{a}}$. Pro $-a$ substituatur b, et pro $+a$, ponatur $-b$, fiet: $\cancel{+}y\cancel{b} \sqcap \cancel{+}x\cancel{b}\sqrt{\dfrac{b}{a}}$. Sed ne hoc quidem satisfacit.

Si inde facias $y^2 + a^2 \sqcap a^2 - x^2$, fiet $y^2 + a^2 \sqcap a + x \frown a - x$. Jam $y^2 + a^2$, potest intelligi facta ex $ay \frown \dfrac{y}{a} + \dfrac{a}{y}$, fiet $\dfrac{ay^2}{a} + \dfrac{aya}{y}$, sive $y^2 + a^2$, fiet $\dfrac{ay}{a+x} \sqcap \dfrac{a-x}{\dfrac{y}{a} + \dfrac{a}{y}}$ sive

12 O r d i n a t a r u m ... q v a d r a t u r a s *erg. L* 13 *(1)* Constructio *(2)* Si *L* 14 ipsam *(1)* x, e⟨r⟩ *(2)* y *(3)* | x *ändert Hrsg.* | Erit *L* 15 qvidem *(1)* construi *(2)* instrui *L* 16 forte: *(1)* $\mathrm{y} \sqcap \mathrm{x}\sqrt{\dfrac{-\mathrm{a}}{\mathrm{a}}}$ *(2)* ya ⊓ xa | $\sqrt{-\mathrm{a}}$ *ändert Hrsg.* | pro *L*

$\sqcap \frac{a^2y - xay}{y^2 + a^2}$ sive $\frac{a}{a+x} \sqcap \frac{a^2 - xa}{y^2 + a^2}$. Idem quod ante.

Caeterum haec observatio de dissolutione ipsius $a^2 + y^2$, in partes ex quibus componitur, $ay \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}$ ad multa esse potest, inprimis autem ad destruendum; item ad resolvendum locum in lineas rectas, quod utile ad quadraturas.

$$\frac{yx}{a \rightmoon} + \frac{y}{y+b} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\rightmoon a}, \text{ fiet } \frac{x\cancel{y}}{\rightmoon a} + \frac{\cancel{y}}{y+b} \sqcap \frac{a\cancel{y}, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\rightmoon a}, \text{ sive } \frac{x}{\rightmoon a} + \frac{1}{y+b} \sqcap \frac{y + \frac{a^2}{y}}{\rightmoon a}.$$

Unde fit $x \sqcap y + \frac{a^2}{y} - \frac{\rightmoon a}{y+b}$.

Ordinata ergo curvae ad quam est locus propositus componitur ex ordinata ad Triangulum, et duabus ordinatis ad duas quasdam Hyperbolas. Quod ex aequatione

---

1 *Nebenbetrachtung:* $\frac{xa}{x^2+a^2}$. $\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3} + \frac{x^5}{a^5} - \frac{x^7}{a^7} \sqcap \frac{b^2}{2} - \frac{b^4}{4} + \frac{b^6}{6} - \frac{b^8}{8}$ etc. vel si $b \sqcap 1$. fiet: $\frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10}$ sive $\frac{2}{8} + \frac{2}{80}$ etc.

2 $a^2 + x^2$ *L ändert Hrsg.* 3 $\frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}$ *(1)* mire utilis esse potest ad multa, *(a)* in *(b)* inprimis autem ad deprimendas dimensiones, ut si sit: $\frac{a^2+y^2}{\rightmoon a} \sqcap$ *(aa)* $\frac{y}{\sqrt{\langle - \rangle}}$ *(bb)* $\frac{y}{y+b}$ haec aeqvatio cuilibet Cubica videbitur, si reducatur *(aaa)* vid *(bbb)* fiet enim $\genfrac{}{}{0pt}{}{a^2 \quad y + y^3 + by^2 + ba^2}{\rightmoon a \ldots}$, sed nostro tractandi modo fiet: $\frac{ay, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\rightmoon a} \sqcap \frac{y}{y+b}$, sive $\frac{y + \frac{a^2}{y}}{\rightmoon a} \sqcap \frac{1}{y+b}$. Unde reducendo habebimus: e. g. $\frac{ay, \frown \frac{y}{a} + \frac{a}{y}}{\rightmoon} \sqcap$ *(2)* sive *(3)* ad *L* 9 $\frac{x}{a^2} - \frac{x^3}{a^4}$ *L ändert Hrsg.*

---

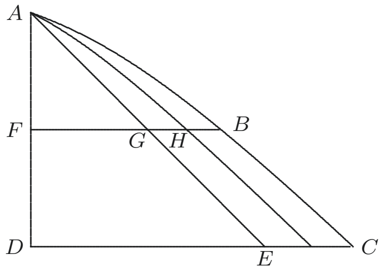
9 $\sqcap \frac{b^2}{2}$: Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der linken durch Quadratur. 10 $+\frac{1}{8} - \frac{1}{10}$: Richtig wäre $+\frac{1}{6} - \frac{1}{8}$ und anschließend $\frac{2}{8} + \frac{2}{48}$ etc.

ipsa: $\frac{yx}{a\rightmoon} + \frac{y}{y+b} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\rightmoon a}$ nemo judicasset, reducatur analogia in aequationem, fiet: $\frac{y^2x+byx+a\rightmoon y}{\rightmoon ay+ba\rightmoon} \sqcap \frac{a^2+y^2}{\rightmoon a}$, et multiplicando per crucem:

$$\begin{array}{l}\rightmoon ay^2x + b\rightmoon ayx + a^2\rightmoon^2\, y - \rightmoon ay^3 - ba\rightmoon y^2 - ba^3\rightmoon \sqcap 0.\\ \qquad\qquad\qquad\quad - \rightmoon a^3 \;\ldots\end{array}$$

vel ponendo $\frac{yx}{a\rightmoon} + \frac{\frac{e}{a}y}{\frac{f}{a}y+b} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, fiet $x \sqcap \frac{\frac{y+\frac{c^2}{y}}{da}}{\rightmoon a} - \frac{\rightmoon e}{\frac{f}{a}y+b}$, locusque propositus erit: $\frac{yx}{a\rightmoon} + \frac{eya}{fay+ba^2} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, sive $\frac{y^2xfa+ba^2yx+a^2\rightmoon ey}{a\rightmoon fay+ba^3\rightmoon} \sqcap \frac{c^2+y^2}{da}$, unde

$$\left.\begin{array}{l}fa^2dy^2x + ba^3dyx + a^3\rightmoon ed\;\; y - a\rightmoon fay^3 - ba^3\rightmoon y^2 - ba^3\rightmoon c^2\\ \qquad\qquad\qquad\quad - a\rightmoon fac^2\ldots\end{array}\right\} \sqcap 0.$$



[*Fig. 2*]

Curvae ad quam locus iste est, dimensio, utique patet ex quadratura Hyperbolae; cum componatur ejus ordinata FB ex FG ordinata Trianguli ADE et GH. HB. ordinatis duarum diversarum Hyperbolarum.

Utilis est conversio aequationum in analogias, qualem vides; ita enim modus etiam reperitur, quo quam plurimae rectae diversae, inseri possunt, ut hoc loco 6[:] $f.\,d.\,b.\,c.\,e.\,\rightmoon$. ita ut habeatur aliqua jam supernumeraria, cum non possint in Constructionibus esse aequationes collatitiae nisi 5. Sed non sunt ad figuram datam, verum ad quamlibet. Non refert hic qualia sint signa.

Inquirendum est in formulas, quarum ope cujuslibet formulae datae divisores tam rationales quam irrationales haberi possint. Quod ad formandas analogias utile est. Item ad curvas ex aliis curvis componendas metiendasque.

6 $-a\rightmoon fac^2y^3$ *L ändert Hrsg.* 16 f. nisi 5. *(1)* $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, unde $\frac{2a \mp \frac{a}{q}x}{y} \sqcap \frac{y}{x}$, | unde *streicht Hrsg.* | *(2)* Sed *L*

29. DE QUADRATURIS PER SUMMIS ORDINATARUM
[Dezember 1674 – Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 407. 1 Zettel ca 17,5 x 17,3 cm. Linke Kante geschwungen. 1 S. auf Bl. 407 r°. Bl. 407 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: s. N. 28.

De quadraturis per summas ordinatarum

Si per omnes possibiles combinationes Ordinatarum inferiorum curvarum procedatur, habebimus omnes curvas superiores quarum quadratura ex datarum combinatione pendet: e. g. $\dfrac{y^2}{a} + \dfrac{a^2b}{y^2} \sqcap z$. Ergo $\dfrac{y^4+a^3b}{ay^2} \sqcap z$. Hujus ergo figurae datur dimensio: Fiet aequatio: $y^4 + a^3b \sqcap zay^2$. Inde: $y^4 - azy^2 + \dfrac{a^2z^2}{4} \sqcap a^3b + \dfrac{a^2z^2}{4}$. Ergo $\mp y^2 \pm \dfrac{az}{2} \sqcap a\sqrt{ab+\dfrac{z^2}{4}}$ et $y \sqcap \sqrt{\dfrac{az}{2} + a\sqrt{ab+\dfrac{z^2}{4}}}$. Datur ergo summa harum radicum, etsi summa harum $\sqrt{ab+\dfrac{z^2}{4}}$ non detur.

---

7 *Am oberen Rand, außerhalb des Textes:*
Gestrichen: $x^2 + bx \sqcap 60750\,a^2$. $x^2 \sqcap -bx + a^2$. $a^2 + 2b$ *Nicht gestrichen:* a

11–233,2 *Am Rande:* Ex numero cognitarum agnosci potest, in quot simplices resolubilis sit ordinata curvae, hoc loco, a. b.

7 de ... ordinatarum *in anderer Tinte erg. L*

---

12 $\sqcap a^3b$: Richtig wäre $-a^3b$. Leibniz rechnet konsequent weiter, der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Überlegung nicht.

$\sqrt{az} + \dfrac{ab}{y} \sqcap z$. Ergo $\sqrt{az} \sqcap \dfrac{yz - ab}{y}$ sive $az \sqcap \dfrac{y^2z^2 - 2abyz + a^2b^2}{y^2}$ et fiet $y^2z^2 - y^2za - 2abyz + a^2b^2 \sqcap 0$.

Inquirendum est etiam in divisores aequationum quae sunt duarum incognitarum pluriumve.

$\dfrac{\pm x \pm b}{a} \sqcap \dfrac{c}{x}$. summa scilicet aut differentia x et b. Ergo $\pm x^2 \pm bx \sqcap ac$. sive $x^2 \sqcap \mp bx \pm ac$. Unde jam patet hoc modo semper cum bx est affectum signo $+$, alterum $\underline{ac}$ affectum signo $-$, nisi uno casu quo utrumque affectum signo $+$, ergo etiam x^2 aequatur summae aut differentiae ipsarum $bx.\,ac$.

Sic clarius: $\dfrac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \dfrac{c}{x}$. Ergo $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap ca$. sive $x^2 \sqcap (\omega\alpha\alpha)bx\,(\alpha\alpha\omega)ca$.

$\dfrac{(\alpha\alpha\omega)x(\alpha\omega\alpha)b}{a} \sqcap \dfrac{(\beta\beta\psi)x(\beta\psi\beta)c}{x}$. Unde fiet $(\alpha\alpha\omega)x^2(\alpha\omega\alpha)bx \sqcap (\beta\beta\psi)ax(\beta\psi\beta)ca$ sive $x^2 \sqcap \left(\dfrac{\beta\beta\psi}{\alpha\alpha\omega}\right)ax \left(\dfrac{\beta\psi\beta}{\alpha\alpha\omega}\right)ca$.

$(\omega\alpha\alpha)\ b..$

Hac methodo omnes varietates signorum possibiles possumus indagare, et determinationes etiam, pro qualibet analogia necessarias. Ita agnoscemus quoque ex ipsis formis aequationum in quas analogias sint resolubiles. Et in primis an agnosci possint ex ipsis analogiis, an imaginariae futurae aequationes. Neque enim puto analogiam posse esse intelligibilem, et tamen radicem omnem imaginariam.

Aequationes duobus generantur modis ex radicibus et ex analogiis. Illis in se, his per crucem multiplicatis. Utraque analysis utilis, illa ad inveniendas radices Arithmetice, seu ad inveniendas valores vel exactos, vel propinquos; ut analogiae usum videntur habere ad loca investiganda et ad valores Geometrice inveniendos, quod saepe ope curvarum satis compositarum compendiosissime fit, ut nihil aliud restet, quam ratio eas commode describendi, imprimis filis ex focis.

13 omnes *(1)* formas *(2)* varietates *L*

30. CURVAE MENSURABILES HEURATIANAE
[Mitte 1674 – 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 149. 1 Ausschnitt ca 18,0 x 6,2 cm. 11 Z. auf Bl. 149 r°. Bl. 149 v° leer. Am unteren Rand Fragmente von Kurven in Blindtechnik. Cc 2, Nr. 901

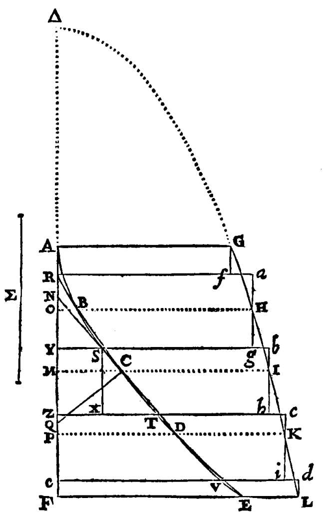
Datierungsgründe: Die schwer zu datierende Aufzeichnung dürfte während Leibniz' Parisaufenthalt entstanden sein. Die Verwendung des Gleichheitszeichens ⊓ und der Tangentenmethode von Hudde sowie das Fehlen von Differentialsymbolen deuten auf eine Entstehungszeit zwischen Mitte 1674 und Herbst 1675.

Curvae mensurabiles Heuratianae

Si sit aequatio: $ay^{z-1} \sqcap x^z$ semper inde Heuratii calculo, curva quadrabilis reperietur, nempe fiet (vide fig. Heurat. apud Schoten p. 518. 519) $MC. \sqcap \sqrt{(z-1)\,\frac{x^z}{a}}$. et

10 Curvae ... Heuratianae *erg. L* 12 519) *(1)* MQ ⊓ *(a)* $\frac{\mathrm{z}}{2\mathrm{a}}\mathrm{x}^{\mathrm{z}}$ *(b)* $\frac{\mathrm{z}}{2\mathrm{a}^{\mathrm{z}}}\mathrm{x}^{\mathrm{z}}$, eiusqve qvadratum $\frac{\mathrm{z}^2}{4\mathrm{a}^{2\mathrm{z}}}\mathrm{x}^{2\mathrm{z}}$. Cui adde y^2. Nempe y ⊓ *(2)* MC. *L*

11 Heuratii: H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I, S. 517–520. 12 fig.: *a. a. O.*, S. 518:



$MC^2 \sqcap \sqrt{z-1\;\frac{x^{2z}}{a^2}}$. Unde aequatio:

$$\begin{array}{ccccc} s^2 & -2sx & +x^2 & +\sqrt{z-1\;\frac{x^{2z}}{a^2}} & \sqcap\; v^2. \\ 0 & 1 & 2 & \frac{2z}{z-1} & 0. \end{array}$$

Videndum hic an liceat multiplicare hoc modo et an idem proveniat, quod provenit ablata irrationalitate.

---

3 f. *Darunter:* F o r m u l a e o m n i u m d i m e n s i o n u m. C u r v a r u m i n r e c t u m e x t e n s i o.

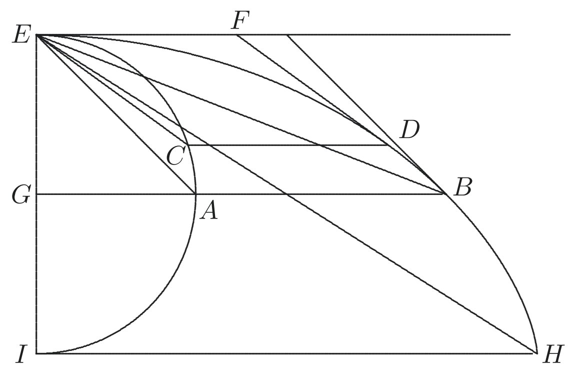
5 *(1)* Haec ad formu *(2)* Aeqvatio *(3)* F o r m u l a e *L*

31. FIGURA SEGMENTORUM
[März – Dezember 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 357. 1 Bl. 4°. 1 S. auf Bl. 357 r°. Bl. 357 v° leer. Cc 2, Nr. 1195

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für März und Dezember 1675 belegt. Aufgrund der inhaltlichen Berührungspunkte zu N. 22, 24 und 25 von Januar 1675 dürfte eine Entstehung im März 1675 wahrscheinlicher sein.

F i g u r a s e g m e n t o r u m



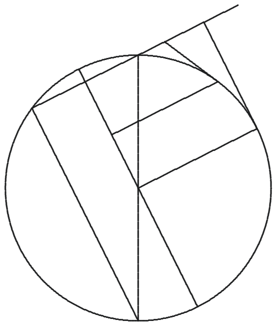
[*Fig. 1*]

Principium meum quo ostendo summam o c c u r r e n t i u m tangenti aequari duplo segmento, nullo negotio ostendit dimensionem Cycloeidis et omnium ejus partium, et dimensionem etiam segmenti cycloeidalis mei absolutam. Num semper $CD \sqcap EF$ jam figura $EDBCE$ quadrabilis et aequatur quadrato a radio. Ergo $EBDE$ aequatur dimidio ejus seu $\triangle^{\text{lo}}$ EGA. et $EHBDE$ aequabitur dimidio $ECAIHBDE$. Hinc facile demonstratur relatio cycloeidis ad circulum, sed et omnium partium ad circuli segmenta.

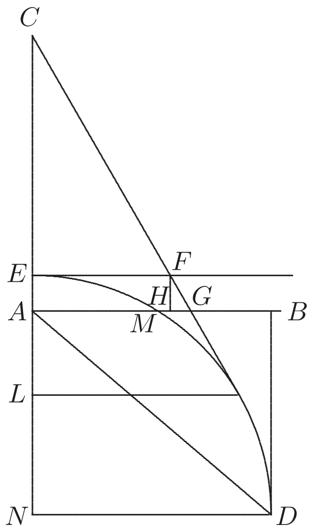
8 F i g u r a s e g m e n t o r u m *erg. L*

---

10 Principium meum: Zum Transmutationssatz vgl. VII, 4 N. 39_1 S. 617–620 sowie in der Einleitung, VII, 4 S. XXII f.   12 mei: vgl. VII, 4 N. 17 S. 345 f.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

In circulo: Ducatur AB, cui tangentes occurrant. Producantur dum occurrant diametro AC productae. Ipsam EL ponemus x. Erit $EF \sqcap \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. $2ax - x^2 \sqcap y^2$ unde $\cancel{2}al - \cancel{2}xl \sqcap \cancel{2}y^2$ sive $l \sqcap \dfrac{y^2}{a-x}$, sive $l \sqcap \dfrac{2ax - x^2}{a-x}$ sive $l \sqcap \dfrac{ax}{a-x} + x$. Ergo $EC \sqcap \dfrac{ax}{a-x}$. Jam ut EC ad EF, seu ut $\dfrac{ax}{a-x}$ ad $\dfrac{ax}{\sqrt{2a - x^2}}$ seu ut $a - x$ ad $\sqrt{2ax - x^2}$, seu ut sinus complementi ad sinum rectum[,] ita $FH \sqcap b$. ad HG, $\dfrac{\text{sin. comp.}}{\text{rect.}}$ [$\sqcap$] $\dfrac{b}{HG}$. Ergo, $HG \sqcap \dfrac{\text{sin. rect.} \frown b}{\text{sin. compl.}} \sqcap \dfrac{b\sqrt{2ax - x^2}}{a-x}$ sive ponendo $a - x \sqcap y$. fiet: $\dfrac{b\sqrt{a^2 - y^2}}{y} \sqcap HG$. Jam $AG \sqcap \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}} + \dfrac{b\sqrt{2ax - x^2}}{a-x}$ sive $\dfrac{a^2 - ay}{\sqrt{a^2 - y^2}} + \dfrac{b\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ fiet: $\dfrac{a^2y - ay^2 + ba^2 - by^2}{y\sqrt{a^2 - y^2}}$

3 ipsam | AL *ändert Hrsg.* | ponemus *L*

5 $a - x$ ad $\sqrt{2ax - x^2}$: Das richtige Verhältnis wäre $\sqrt{2ax - x^2}$ zu $a - x$. Leibniz rechnet konsequent weiter. Dies wirkt sich, zusammen mit weiteren kleineren Fehlern, auf die Ergebnisse für die Momente von HG bezüglich ND, EN und EF aus, beeinträchtigt jedoch nicht die allgemeinen Überlegungen.
7 ponendo $a - x \sqcap y$: Die Variable y wird neu definiert.

quorum summa pendet ex quad. Circ. quia summa omnium $AG \sqcap MADM$. Hinc ergo et $\underline{\underline{HG}}$ pendet ex q. circ. Ejus momentum ex basi ND est $b\sqrt{a^2 - y^2}$. Pendet ex Ellipsi. Momentum ex EN, sunt ejus $\square$, et fit $\dfrac{b^2a^2 - b^2y^2}{y^2}$, cujus datur dimensio absoluta. Ergo et momentum ex EF, seu $\dfrac{bx\sqrt{2ax - x^2}}{a - x}$, vel $\dfrac{ba\sqrt{a^2 - y^2} - yb\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$ ex quad. circ. haberi potest quod et jam tum patet.

32. METIRI FRUSTUM CONI RECTI
10. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 51. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 51 r°. Rückseite leer. Cc 2, Nr. 1063

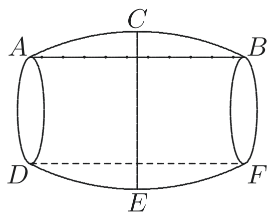
10 Octob. 1675.

Problema
Metiri frustum Coni recti abscissum plano axi parallelo

Sit Conus ABC. cujus basis Circulus BC. centro N. sectiones basi parallelae Circuli DE. FG. planum axi AN parallelum $P'Q$, quo secatur Conus, in punctis superficiei RTP. etc. Circulo DE aequalis est et similiter positus in basi circulus HI, et circulo FG respondet Circulus LN. idemque de caeteris omnibus in quolibet puncto sumtis intelligi potest. Planum quod Conum secat, a Circulo BC rescindit portionem RBS, a Circulo DE portionem TDV. a circulo FG portionem PFq. quibus in basi respondent portiones RBS. $\alpha H\beta$. $\gamma L\delta$. Summa ergo portionum ejusmodi RBS. TDV. PFq. sive RBS. $\alpha H\beta$. $\gamma L\delta$. erit area frusti a plano abscissi. Re jam a solido ad planum traducta, portionum RBS. etc. seriem in basi in plano hujus paginae collocata examinabimus. Bisecentur eae portiones recta BNC. nam si dimidii aream habeamus, etiam dupli habebimus. Jungantur radii: $N\delta$. $N\beta$. NS.

---

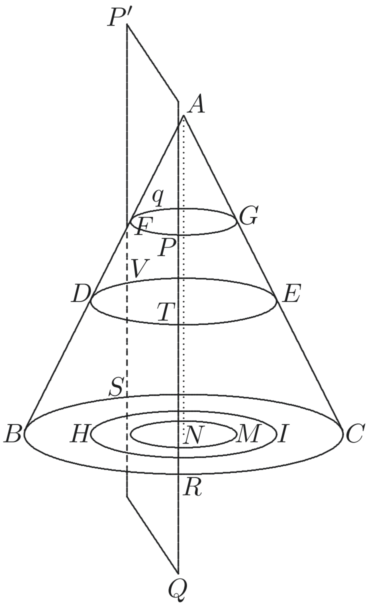
5 *Darunter:* Problema quod mihi hodie solvendum proposuit P. de Chales S. J.



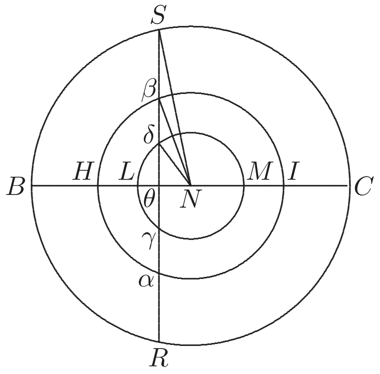
Nam ⟨d⟩oliis nec omnino repletis ut fiet vacuum ABC. portio talis superior et inferior habetur pro frusto Conico et AC, item CB pro recta.

Dazu am oberen Rand, durch Hinweisstrich mit solvendum *verbunden:* Solvi statim eodem vespere.

7 f. *Darunter:* Reduxi ad quadraturam Circuli et Hyperbolae simul.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

Ajo spatia NBS. $NH\beta$. $NL\delta$. esse in triplicata ratione diametrorum, sive si mavis radiorum NL. NH. NB. Hoc Lemma quod reliqui calculi fundamentum est, separatim demonstrabo. Nunc eo posito habebimus summam omnium spatiorum $NL\delta$. $NH\beta$. NBS. et intermediorum, quae sibi imposita in eo quo vides situ atque ordine, solidum quoddam cavum paulatim velut per gradus assurgens, et ut ita dicam cochleatum sive contortum (nam inter surgendum vergit semper in latus, ac se contorquet) efficiens, constituent, cujus contentum ita enuntiabimus. Solidum contortum BS, $H\beta$, $L\delta$, N. est frustum cylindricum cujus basis est eadem cum

7 cochleatum | sive contortum *erg.* | *(1)* efficiens, *(2)* (nam inter surgendum *(a)* convertitur) et *(b)* vergit *L*

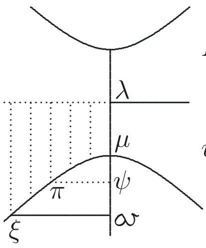
1 *Fig. 1a*: Leibniz hat in Figur und Text die Punktbezeichnung P doppelt verwendet. Zur Unterscheidung wird einer der Punkte mit P' gekennzeichnet. 2 Ajo: Die Behauptung zur Abhängigkeit der Sektorflächen NBS, $NH\beta$ etc. von den Radien NB, NH etc. ist nicht korrekt. Auch die anschließende Aussage, der Rauminhalt des solidum contortum entspreche dem Produkt aus Grundfläche und einem Drittel der Höhe, trifft nicht zu. 4 demonstrabo: nicht gefunden.

basi solidi, nempe Sector NBS. altitudo triens radii NB. Sive solidi contorti contentum aequatur trienti ex ductu basis in altitudinem.

Porro si ab hoc solido contorto circulari auferamus aliud quoddam solidum contortum rectilineare, cujus basis ob sectiones Basi parallelae sunt Triangula Rectangula $N\theta\delta$. $N\theta\beta$. $N\theta S$. et similia intermedia; restabit nobis semifrustum Conicum. Nimirum si ab omnibus sectoribus NBS. $NH\beta$. $NL\delta$ quae constituunt solidum contortum circulare auferamus omnia Triangula $N\theta\delta$. $N\theta\beta$. $N\theta S$. quae constituunt solidum contortum rectilineare restabunt omnia semisegmenta $\theta L\delta$. $\theta H\beta$. θBS. quae constituunt semifrustum Conicum datum. Superest ergo ut solidum contortum rectilineare metiamur. Reperi autem dimensionem solidi hujus contorti rectilinearis haberi posse ex data Quadratura Hyperbolae. Nimirum aequabitur solidum hoc contortum rectilineare Cylindro, cujus altitudo sit dimidia $N\theta$ et basis portio quaedam simplicissima Hyperbolae aequilaterae cujus semilatus, sit $N\theta$. Differentia ergo inter portionem cylindri circularis, et semicylindri Hyperbolici duplicata dabit frustum conicum quaesitum. Quod quaerebatur. Facile enim in numeris vero quantumlibet propinquis Circuli vel Hyperbolae portio quaevis haberi potest. Non est ergo mirum communiter hactenus non habitam cum ex tam diversis pendeat.

Ut portionem Hyperbolicam enuntiem, centro λ, vertice μ semilatere $N\theta$. describatur Hyperbola aequilatera $\mu\pi\xi$. In ejus axe sumatur $\lambda\text{ɷ}$ aequalis radio basis Coni, NB.

18–242,3 *Nebenbetrachtung:* $N\theta \sqcap a$. NL, NH, NB vel $N\delta$, $N\beta$, $NS \sqcap x$. $N\theta\delta$ vel



$N\theta\beta$ vel $N\theta S \sqcap \dfrac{a\sqrt{x^2-a^2}}{2}$.

$\lambda\text{ɷ} \sqcap x$. $\psi\pi \sqcap \omega$. $\mu\psi \sqcap z$. $\lambda\mu \sqcap a$. $\lambda\psi \sqcap v$. $2av + v^2 \sqcap \omega^2$. Sit $v \sqcap x - a$. fiet: $2ax - 2a^2 - 2ax + a^2 + x^2 \sqcap \omega^2$.

11 Cylindro, *(1)* cuius basis est Portio | cava semi *erg.* | Hyperbolae | aeqvilaterae *erg.* | recta ad axem perpendiculari abscissa, *(a)* latus rectum *(b)* cuius *(aa)* latus *(bb)* semilatus rectum vero Nθ. *(2)* cuius *L* 15 enim *(1)* ex data circuli qvadratura per polygona vel sinus, *(2)* in *L* 15 qvantumlibet *erg. L*

---

22 $2av + v^2 \sqcap \omega^2$: Leibniz benutzt jetzt $\text{ɷ}\xi = \omega$ und $\mu\text{ɷ} = v$.

Erit portio Hyperbolica $\mu\pi\xi\omega\varpi$ ea quam dixi quae in dimidiatam $N\theta$ ducta, si facto ex ductu Sectoris NBS in trientem radii NB auferatur, restabit dimidium frustum Conicum propositum.

1 qvae ... ducta: Um den Rauminhalt des solidum contortum rectilineare zu erhalten, muss die Hyperbelfläche $\mu\pi\xi\omega\varpi$ zusätzlich zu $\frac{N\theta}{2}$ noch mit dem Quotienten aus der Höhe und dem Radius der Grundfläche des Kegels multipliziert werden.

33. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM

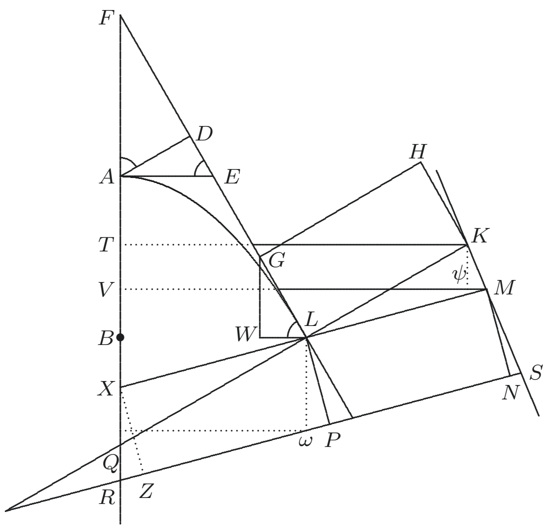
11. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 x 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 x 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 x 4 cm. 1. S. auf Bl. 409 v°. Am Ende von Teil 3 Textverlust durch Zerschneiden. — Auf dem Rest des Trägers Cc 2, Nr. 1069 u. 1070 (Druck in späteren Bänden der Reihe).
Cc 2, Nr. 1068

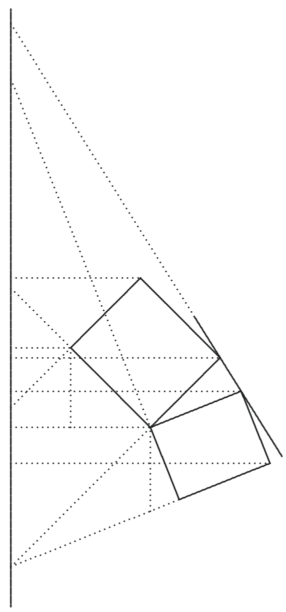
[*Teil 1*]

11. Octob. 1675

T r i a n g u l u m   C h a r a c t e r i s t i c u m

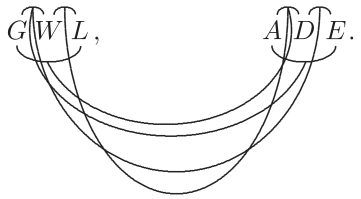


[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

10 *(1)* 21 *(2)* 11. *L* 11 T r i a n g u l u m C h a r a c t e r i s t i c u m *erg. L*



Triangula similia NB. ita scribuntur, ut ab aequali angulo incipiens, inde ad rectum pergas. Quo facto poteris dicere GW ad WL ut AD ad DE; vel GL est ad AE, ut GW ad AD, etc. Sed reapse non nisi tres oriuntur aequationes, nempe $\frac{GW}{AD} \sqcap \frac{GL}{AE} \sqcap \frac{WL}{DE}$, sive si in rectangula reducas habebimus aequationes

$$GW, AE \sqcap GL, AD. \quad GW, DE \sqcap WL, AD. \quad GL, DE \sqcap WL, AE.$$

Id est rectangula sub duabus combinationibus subcontrariis punctorum duorum triangulorum similium, sibi aequantur; sive rectangula respondentia sub duabus combinationibus differentibus, duorum Triangulorum in se invicem, ductis, sibi invicem aequantur, sive combinatio unius trianguli ducta in combinationem differentem alterius Trianguli aequatur Combinationi respondenti alterius Trianguli, ductae in combinationem differenti respondentem Trianguli sui, ut $\begin{matrix} GW \frown DE \\ WL \frown AD \end{matrix}$. Ecce jam characteristicae quoddam genus in lineis

$$GW, FA \sqcap GL, FD. \quad GW, DA \sqcap WL, FD. \quad GL, DA \sqcap WL, FA.$$

Ergo summa omnium FA ad basin aequatur etiam segmento duplicato. Jam summa omnium AB ad basin semper aequatur complemento figurae. Ergo summa omnium FB ad basin semper aequatur ipsi figurae. Quod aliunde constat. Nota lineae rectae ipsis GL dupliciter applicari possunt ad angulos rectos, vel extra planum, superimponendo scilicet, ut constituant superficiem cujusdam ungulae vel in eodem plano, sed tunc spatium non replebunt, ut $GHKL$, $LMNP$.

Ut tamen aliquid inde ducamus; ponatur curva nova fieri producendo QLK perpendicularem curvae, ita ut LK sit aequalis rectae applicandae, ita RPN erit perpendicularis

---

16 *Am Rande:* GWL, FDA

9 est *(1)* combinatio *(a)* ducta *(b)* unius trianguli ducta in differentem alterius Trianguli, aeqvatur *(2)* rectangula *(a)* combination *(b)* ex *(c)* sub *L* 10 aeqvantur; *(1)* sive combinatio unius Trianguli ducta in differentem combinationi *(2)* sive rectangula | respondentia *erg.* | sub *L* 19 aeqvatur *(1)* segmento *(2)* ipsi *L*

producta, et $PN \sqcap$ alii rectae ordine applicandae, habebitur curva nova transiens per puncta KM. et recta KM juncta, erit curvae novae tangens; a qua curva, ut figurae curvilineae aream, (saltem ex data area, primae[)] investigemus, quaerenda est dimensio supplementorum, KLM, ad has non habemus opus nisi longitudine rectae KM. Quam ita inveniemus: Ex K et M. demittantur in rectam AB perpendiculares KT, MV. et KT quidem habetur, quia KL et LQ, et Triangulum KTQ, $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ LBQ simile est. Ut vero inveniamus VM. producatur ML. dum occurrat ipsi AB in X. Est autem MX parallela NR. Ex X in RN demittatur perpendicularis XZ, aequalis et parallela LP, vel MN datis, Eodem modo ex L in PR demittatur perpendicularis $L\omega$. Datur Triangulum $L\omega P$ positione et calculo, at triangulum XZR. $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ $L\omega P$ simile est, et datur Trianguli XZR unum latus. Ergo dabuntur et reliqua. Dabitur ergo et recta RZ, qua differt RP data ab LX. quaesita. Habebitur ergo LX, ergo MX. Ergo habebitur $\bigtriangledown^{\mathrm{lum}}$ LBX. Ergo et $\bigtriangledown^{\mathrm{lum}}$ ei simile MVX, cujus unum latus habetur nempe MX. Ergo habebuntur et caetera; et inter ipsa et MV. Habemus ergo MV. Inventa MV, et antea TK, scilicet calculo, habebitur differentia inter KT et VM. id est $M\psi$. si scilicet $K\psi$ sit normalis ad $V\psi M$. Datur autem TV, calculo, quod sic ostendo[:] Datur AQ, datur et TB. ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ KTQ, et datum LBQ similia datumque latus KQ prioris habebuntur et caetera, ergo et TQ. Ergo et ejus differentia a BQ, nempe TB. Eodem modo ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia MVX et LBX data habebitur et differentia laterum VX, BX[,] ergo VB, ergo differentia inter TB, VB, nempe TV. sive $K\psi$. Ex datis autem $K\psi$ et ψM, habetur KM ob angulum $K\psi M$ rectum. Habentur ergo tandem magnitudine omnia latera $\bigtriangledown^{\mathrm{li}}$ KLM adeoque et area. Adeoque figura exhiberi poterit summae arearum homogenea.

Patet ex hoc specimine quam difficile saepe sit quae magnitudine jam data sunt, etiam calculo data habere, et contra, hinc aestimari potest quam saepe difficile sit ma-

17 *Am Rande:* $a^2 \sqcap xy$

2 tangens; *(1)* | cuius *streicht Hrsg.* | *(a)* curvae *(b)* figur *(2)* a qva *L* 6 et | LR *ändert Hrsg.* |, et *L* 8 parallela NR *(1)*, et LX $\sqcap$ RP. datur autem RP calculo, ergo et RX. datur ergo et MX et ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia MVX, LBX. habebitur et MV *(2)*. Ex *L*

9 perpendicularis $L\omega$: Gemeint ist das Lot von ω auf WL.

gnitudine sive calculo data, efficere etiam positione data. Cum de quadraturis quaeritur, necesse est quantitates magnitudine sive calculo datas haberi, ut inde inveniatur series progressionis de qua quaeritur.

[*Teil 2*]

Inveni alio schediasmate 19. Jun. 1675. curvae Ellipseos dimensionem reduci ad dimensionem spatii curvilinei cujus ordinata valet, $\sqrt{\begin{array}{l} +1 + \dfrac{a^2}{2ax - \frac{a}{b}x^2} \\ -\frac{a}{b} \end{array}} \sqcap z$. Fiet:

$\begin{array}{l} +1 + \dfrac{a^2}{2ax - \frac{a}{b}x^2} \\ -\frac{a}{b} \end{array} \sqcap z^2$. Poterit et pro $2ax - \frac{a}{b}x^2$, scribi: $a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2$, porro faciamus $1 \sqcap \frac{a}{b}$. et pro $z \sqcap \omega \ddagger \sqrt{\begin{array}{l} +1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}}$. fiet: $\boxed{\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}} + \dfrac{a^2}{a^2 - \frac{a^2}{b^2}y^2} \sqcap \dfrac{\omega^2 \ddagger 2\sqrt{\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}}\,\omega}{1} \boxed{\begin{array}{l} +1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}}$ et fiet:

$\frac{a^2}{b^2}y^2 \sqcap a^2 - \dfrac{a^2}{\omega^2 \ddagger 2\sqrt{\left.\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}\right\}}\,\omega}$. Unde patet sive y, sive ω pro abscissa ordinatave sumas eandem fere aequationis formam prodire. Nam si $\ddagger$ est $-$ et $\sqrt{1 - \frac{a}{b}} \sqcap \omega$ erit utraque forma utrobique $a^2 \sqcap a^2\omega^2 \ddagger 2a^2 \sqrt{\left.\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}\right\}}\,\omega - \frac{a^2}{b^2}y^2\omega^2 \ddagger 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left.\begin{array}{r} 1 \\ -\frac{a}{b} \end{array}\right\}}\,\omega y^2$, ut habeatur tangens, scribe

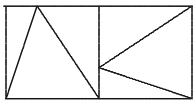
5 alio schediasmate: nicht gefunden; Leibniz verwendet die allgemeine Formel für das Bogenelement der Kegelschnitte bereits am 3. Oktober 1674 in N. 6 S. 33 Z. 3.

$$2\frac{a^2}{b^2}\omega^2\,y\,l \pm 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\omega l \sqcap \quad 2a^2\ \omega^2 \pm 2a^2\sqrt{\left.\frac{1}{-\frac{a}{b}}\right\}}\ \omega\ \boxed{-2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 \pm 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\left.\frac{1}{-\frac{a}{b}}\right\}}\ \omega a^2}$$

$$\odot -\frac{a^2}{b^2} \qquad \odot \pm 2\frac{a^2}{b^2}$$

$$\frac{b}{a}\sqrt{a^2 - \frac{a^2}{\omega^2 \pm 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\,\omega}}$$

[*Teil 3*]



[*Fig. 3*]

Quadrato $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ aequilaterum inscribere, etc. problema, quod non nisi semel in $\square^{\text{to}}$ fieri potest; et tamen aequatio habebit duas radices, et altera est pro alio quadrato contrario modo sumta.

[*Fig. 4*]

Rectam datam segmento circuli ad angulos rectos inserere, ut simul et basin et curvam attingat, hoc duobus modis fieri potest, ut patet, ob circuli uniformitatem a duabus partibus. Idem in Ellipsi. Exemplum naturale duorum ⟨— — —⟩

1 *Nebenrechnung:* $-2\frac{a^2}{b^2}\omega^{\cancel{2}} \pm 2\frac{a^2}{b^2}\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \cancel{\omega} \frown \frac{-a^2}{\omega^{\cancel{2}} \pm 2\sqrt{\frac{1}{-\frac{a}{b}}}\ \cancel{\omega}}$

7 *Dahinter:*

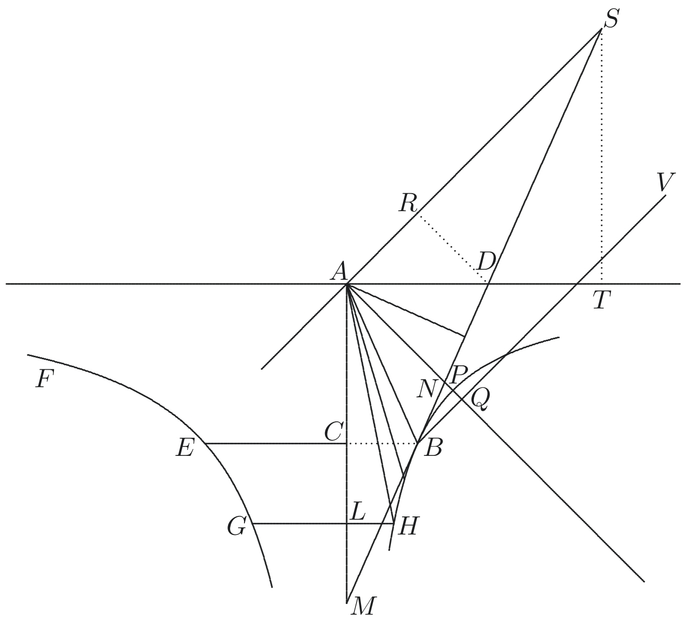
1 $2\frac{a^2}{b^2}\omega^2 yl$: Die Tangentenrechnung ist mit Flüchtigkeitsfehlern behaftet und wird nicht vollständig durchgeführt.

34. THEOREMATA TETRAGONISTICA GENERALIA EX TANGENTIBUS
19. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 123. Ca 2/5 Bl. 2°. 2 S. Auf Bl. 123 r° oben Cc 2, Nr. 1077 (gedr.: Hofmann, *Über frühe mathematische Studien*, 1970, S. 104). Bl. 123 bildete ursprünglich zusammen mit LBr 943 Bl. 158 (VI, 3 N. 33_3) ein fast vollständiges Bl. 2°.
Cc 2, Nr. 1076

19 Octob. 1675

T h e o r e m a t a t e t r a g o n i s t i c a g e n e r a l i a , e x t a n g e n t i b u s



[*Fig. 1*]

A Centrum Hyperbolae, *AC*. abscissa ex Asymptoto[,] *CB* ordinata, *BD* tangens occurrens alteri Asymptoto in *D*. Sit *BCE* recta, ita ut $CE \sqcap AD$. idque ubivis fac-

8 19 Octob. 1675 *erg. L* 9 f. *(1)* Quadraturae *(2)* p r o b l e m a t a *(3)* t h e o r e m a t a ... t a n g e n t i b u s *erg. L*

tum intelligatur. Curva FEG transire intelligatur per illa puncta (cui etiam DA et AC productae Asymptoti erunt). Erit exempli gratia spatium quadrilineum $ECLGE$, aequale trilineo $BAHB$. ut ex theoremate meo generali constat. Jam quaeramus calculo AD, vel CE. Ducta DBM, erit ACM dupla AC sive $AC \sqcap CM$. ex natura Hyperbolae aequilaterae. Ergo $AD \sqcap 2CB$. Sit $AC \sqcap x$. erit $CB \sqcap \frac{a^2}{x}$. et $EC \sqcap \frac{2a^2}{x}$.

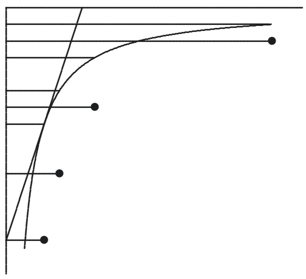
Hinc demonstratur illud sane pulcherrimum quod sector Hyperbolicus ABH, duplicatus aequetur ipsi $ECLGE$, id est duplo $BCLHB$, id est quod sector Hyperbolicus aequetur portioni respondenti ad Asymptoton. Ducatur Axis APQ. vertex P. axis transversus ARS. Sit DR. ad eum normalis, ob angulum RAD semirectum erit $AD^2 \sqcap \frac{2a^2}{x}\square, \sqcap \frac{4a^4}{x^2} \sqcap AR^2 + RD^2$, et $AR^2 \sqcap RD^2$, et $RD \sqcap AR$, et $AR \sqcap \frac{a^2\sqrt{2}}{x}$. Eodem modo ST, perpendicularis ad $ADT, \sqcap AT. \sqcap AD + DT$. Ergo $ST \sqcap \frac{2a^2}{x} + DT$. Jam $\frac{ST}{DT} \sqcap \frac{AM}{AD} \sqcap \frac{2x}{\frac{2a^2}{x}} \sqcap \frac{x^2}{a^2}$ seu in duplicata ratione x ad a. ergo $ST \sqcap \frac{x^2}{a^2}\,DT \sqcap \frac{2a^2}{x} + DT$. Ergo $x^3DT - a^2xDT \sqcap 2a^4$. et $DT \sqcap \frac{2a^4}{x^3 - a^2x}$ et $AT \sqcap ST \sqcap \frac{2a^4x}{x^2 - a^2}$. et $AS \sqcap \frac{2a^4x\sqrt{2}}{x^2 - a^2}$ quae etiam pendet ideo ex quadratura Hyperbolae, quod tamen et aliunde demonstrari potest,

5 *Nebenbetrachtung:* $xy \sqcap a^2$. fiat $\not{x}l \sqcap -\not{x}y$.

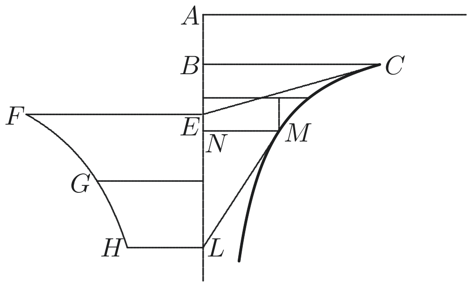
1 Curva FGH *L ändert Hrsg.* 2 producta *L ändert Hrsg.* 2 erunt) *(1)* Spatium ei respondens *(2)* Erit ... spatium *(a)* mixtilineum *(b)* qvadrilineum *L* 3 ex *(1)* alibi *(2)* theoremate *L* 7 duplo BAHB *L ändert Hrsg.*

2 f. aequale ... $BAHB$: Die Aussage ist falsch. Die Fläche $ECLGE$ ist gleich dem Doppelten der Fläche $BAHB$. Leibniz wiederholt die Aussage unten Z. 6 f. in korrekter Form. 3 theoremate: Gemeint ist der Transmutationssatz. 13 $\frac{2a^4x}{x^2 - a^2}$: Richtig wäre $\frac{2a^2x}{x^2 - a^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter; der Fehler beeinträchtigt die allgemeine Überlegung nicht.

quia si addatur, Hyperbolae commensurabilis, quae est $2a^4\sqrt{2}a$, fiet $\dfrac{2a^4x\sqrt{2}+2a^5\sqrt{2}}{x^2-a^2}$, et dividendo per $x+a$, fiet: $\dfrac{2a^4\sqrt{2}}{x-a}$, ad Hyperbolam. Imo video errorem meum, non x seu AC. sed AQ. sumenda est.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

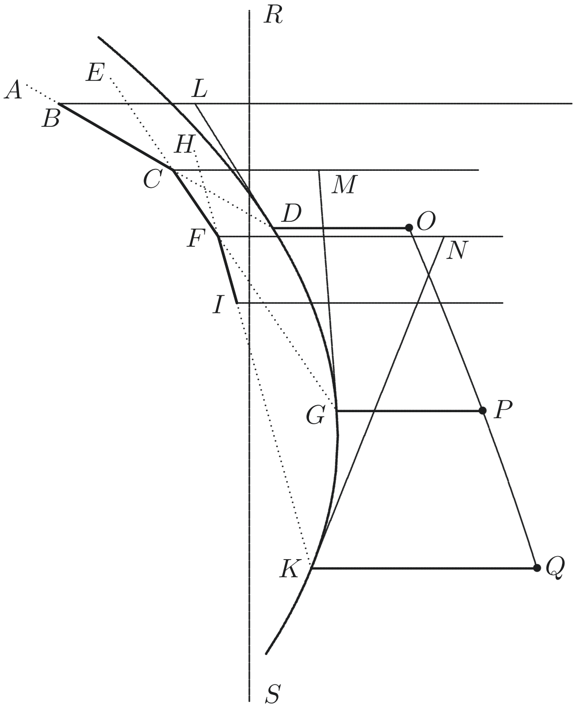
$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. $AE \sqcap 2AB$. $EF \sqcap BC$. erit $FGHLEF \sqcap$ bis $CELMC$. Est $AE \sqcap 2x \sqcap z$. Ergo $x \sqcap \dfrac{z}{2}$. et $EF \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap \dfrac{2a^2}{z}$. Unde illud rursus in Hyperbola memorabile[:] quadrilineum $CBNMC$. aequari quadrilineo $CELMC$ duplicato.

2 f. Imo ... est. *erg. L* 8 aeqvari *(1)* tril *(2)* qvadrilineo CELMC duplicato | unde ▽CBE+ *gestr.* | *L*

8 quadrilineum ... duplicato: Die Behauptung ist nicht richtig. Die beiden Flächen $CBNMC$ und $CELMC$ sind gleich.

Theorema illud meum memorabile, jam video non nisi Casum esse unicum ac simplicissimum generalioris, inspice figuram ⊙.

fig. ⊙

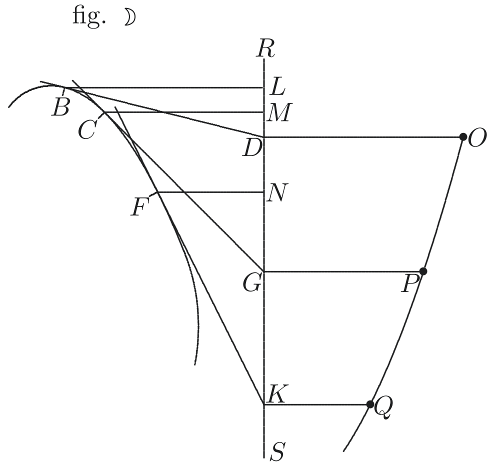


[*Fig. 4*]

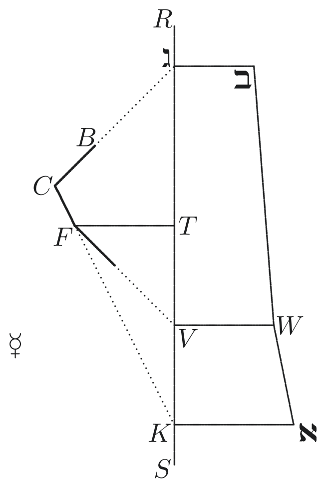
Sit curva $BCFI$, cujus latera infinite parva BC, CF, FI. Sit alia curva DGK, cui in punctis $D.G.K.$ tangentes prioris nempe $ABCD, ECFG, HFIK$, occurrant. Jam per puncta $B.C.F.$ transeant rectae indefinitae, BL, CM, FN, et DL, GM, KN. sint tangentes curvae DGK, transferatur BL ad DO, CM ad GP. FN ad KQ. erit spatium

3 *Fig. 4*: Eine skizzenhafte Vorstufe der Zeichnung wird nicht wiedergegeben.

$DGKQPO$ duplum spatii $BDGKIFCB$. Cujus theorematis casus, quo $BCFI$ est linea recta, dat theorema quod antea consideraveram.



[*Fig. 5*]

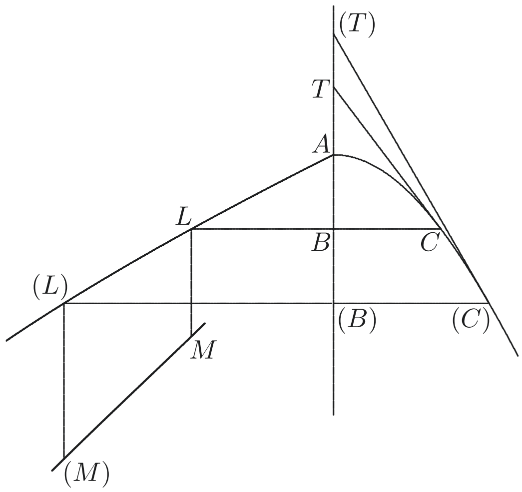


[*Fig. 6*]

Alter casus fingi potest, simplicissimus quo fingitur DGK linea recta, qualis RS. Sit in eam rem alia figura ☽, ubi curva BCF, cujus tangentes BD, CG, FK, occurrunt rectae RS, curvam DGK repraesentanti in punctis D, G, K. et translatis BL, in DO, CM in GP, parallelismo servato, erit spatium $ODKQPO$ spatii $BDKFCB$ duplum. Nec refert quem angulum ad eas faciat recta RS. Nec refert sitne curva BCF concava an convexa, vide fig. ☿. Ubi et illud annotatur, si ordinatae a curva BCF, ad rectam RS ut FT, quae sunt scilicet ad angulos, applicentur eidem ad angulos rectos, sed ibi ubi tangentes curvae BCF rectae RS. occurrunt, ut si transferatur FT. in VW. erit spatium $\beth\gimel K\aleph W\beth$ ipsius $B\gimel KFCB$ duplum.

7 BLKFCB *L ändert Hrsg.*

2 antea: S. 250 Z. 6–8. Tatsächlich ergibt sich das dortige Theorem jedoch für den im Folgenden betrachteten Spezialfall, in welchem DGK als gerade Linie angenommen wird. 3 *Fig. 6*: Die hier wiedergegebene Linie FT hat Leibniz in seiner Zeichnung irrtümlich gestrichen. 8–12 Nec refert sitne ... duplum: Leibniz entgeht, dass das Verfahren im Fall des Auftretens einer zu RS parallelen Tangente so nicht anwendbar ist. Der Verlauf der Kurve $\beth W\aleph$ in Fig. 6 und die Aussage über die Flächenstücke $\beth\gimel K\aleph W\beth$ und $B\gimel KFCB$ sind nicht korrekt.



[*Fig. 7*]

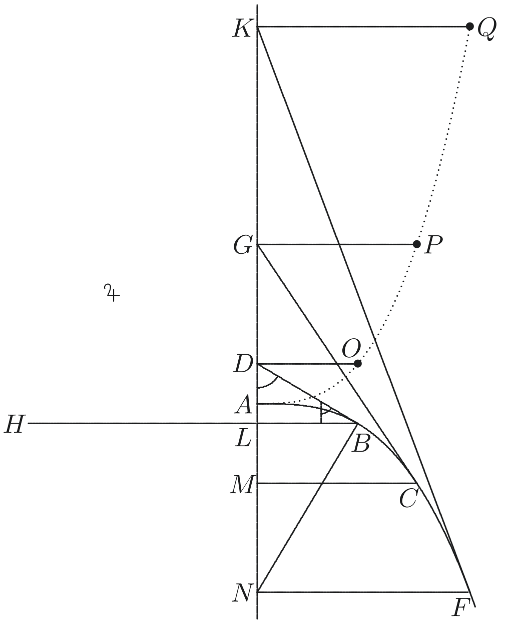
Hinc aliud notabile. Si $C(C)$ sit curva, intervalla tangentium ab ordinatis in axe BT, $(B)(T)$ applicentur axi in $BL, (B)(L)$. et in punctis $L, (L)$ ipsae BC, ipsis BL normaliter applicentur, in $LM, (L)(M)$. erit spatium $LM(M)(L)L$ spatii $CT(T)(C)C$ duplum.

Quae mira satis theoremata sunt et foecunda. Primum in fig. ♃. Curva BCF. tangentes BD, CG, FK. et DO, GP, KQ, parallelae et aequales, LB, MC, FN. Erit spatium $ODKQPO$ duplum spatii $FKDBCF$. Sit v. g. $ABCF$ quadrans circuli cujus centrum N. ubi si $NL \sqcap x$. erit LD ad LB, ut LB ad x. sive $LD \sqcap \dfrac{a^2 - x^2}{x} \sqcap \dfrac{a^2}{x} - x \sqcap y$. et $ND \sqcap y + x \sqcap \dfrac{a^2}{x} \sqcap z$. Unde ut obiter dicam ND translatae ad LH sunt ad Hyperbolam simplicissimam et ex $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ characteristico tangentes insistentes arcubus, aequantur

9–254,2 *Daneben:* Vide plura 24 Octob. 1675.

1–4 *Fig. 7 sowie* Hinc ... duplum *erg. L* 11 plura *(1)* 23 *(2)* 24 *L*

4 erit ... duplum: Die Behauptung ist falsch. Die Fläche $LM(M)(L)L$ ist gleich der Summe der Fläche $BC(C)(B)B$ und des Doppelten der Fläche $CT(T)(C)C$. 11 plura 24 Octob. 1675: N. 35, 36 und 37.



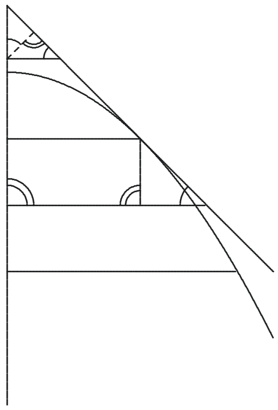
[*Fig. 8*]

portioni hyperbolicae seu secantibus ad axem. Sed hoc obiter. Jam ut pergam si LB, transferatur ad DO, cum sit $\sqcap \sqrt{a^2 - x^2}$. et $z \sqcap ND \sqcap \dfrac{a^2}{x}$. erit $x \sqcap \dfrac{a^2}{z}$. et: $DO \sqcap \sqrt{a^2 - \dfrac{a^4}{z^2}} \sqcap \dfrac{a\sqrt{z^2 - a^2}}{z}$, et curva cujus aequatio: $z^2\omega^2 \sqcap a^2z^2 - a^4$, erit Circulo commensurabilis sive: $\dfrac{a^4}{a^2 - \omega^2} \sqcap z^2$. sive $\dfrac{a^2}{\sqrt{a^2 - \omega^2}} \sqcap z$. pendet ex circuli quadratura et est illa ipsa cujus spatia angulis homogenea sunt.

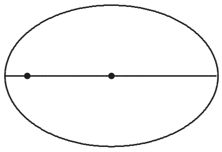
6 *Darunter:* Vide ellipsi 24. Octob.

1 *Fig. 8*: Leibniz hat als charakteristisches Dreieck offensichtlich irrtümlich GCM ausgezeichnet und den Winkel in G markiert. Dies wurde in der Zeichnung korrigiert. 7 ellipsi 24. Octob.: N. 36.

[*Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext*]



[*Fig. 9*]



[*Fig. 10*]

1 Fig. 9 diente möglicherweise als allgemeine Merkfigur für die Diskussion zu Fig. 1. Fig. 10 steht wahrscheinlich im Zusammenhang mit der Anwendung der Methode auf die Ellipse in N. 36.

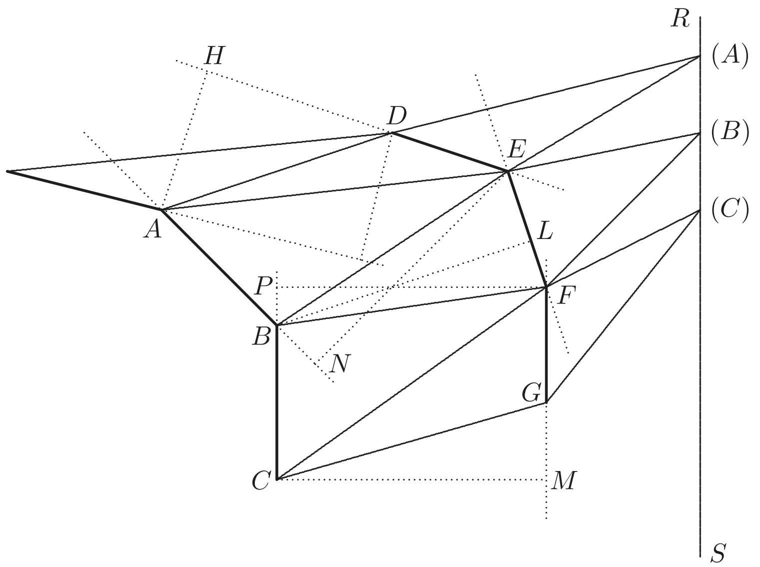
35. THEOREMA TETRAGONISTICUM EX SPATII SECTIONE

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 4. Ca 1/2 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 4 r°. Bl. 4 v° leer. Bl. 4 bildete ursprünglich den oberen Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 36) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 37).
Cc 2, Nr. 1086

24. Octob. 1675.

T h e o r e m a   t e t r a g o n i s t i c u m   e x   s p a t i i   s e c t i o n e



[*Fig. 1*]

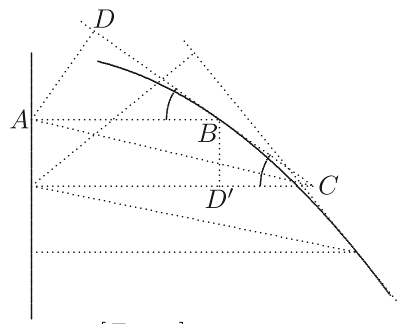
Sint duae lineae, rectae curvaeve una ABC, altera $DEFG$ quocunque inter se situ ac positione ista ut latera illius infinite parva sint AB, BC, hujus DE, EF, a puncto A ducantur rectae AD, AE. a puncto E, rectae EA, (quae jam ducta est) EB, a puncto B rectae BE, BF, a puncto F rectae FB, (quae jam ducta est,) FC. a puncto C rectae CF, CG etc. Et spatium inter ABC, et $DEFG$ interceptum, seu spatium comprehensum duabus lineis ABC, et $DEFG$, et rectis AD, CG aequabitur summae $\bigtriangledown^{\text{lorum}}$ ADE,

7 24. Octob 1675. *erg. L*   8 T h e o r e m a ... s e c t i o n e *erg. L*

$EAB, BEF, [FBC], FCG$. In DE productam, seu tangentem curvae $DEFG$ ad punctum DE, demittatur perpendicularis AH. similiter ad tangentem in EF, perpendicularis BL, et ad tangentem in FG perpendicularis CM. Erit AH in DE, $\sqcap$ [duplo] ADE, et ita in caeteris et ita AH in DE, $+BL$ in EF, $+CM$ in FG, $\sqcap$ duplo $\overline{ADE, +BEF, +CFG}$.

Eodem modo, erit, EN in AB, $+FP$ in BC $\sqcap$ duplo $\overline{EAB, +FBC}$. Et ita summa rectangulorum illorum pariter et horum, aequabitur duplo summae triangulorum illius pariter et hujus lateris, sive illis pariter quae basin in una[,] verticem in altera habent curva, quam quae contra. Itaque summa duarum superficierum curvarum, ex superpositione AH in DE etc. et EN in AB etc. aequabitur duplo Spatio inter duas curvas propositas intercepto, unde nova methodus superficies curvilineas dimetiendi in cylindro, variis curvis terminatas. Semper enim inveniri poterit alia, quae cum data faciat, spatium planum commensurabile.

Quod si in eodem plano AH ipsi DE applices, idemque de caeteris spatium hians relinquetur; quod methodo calculi satis subtilis a me initi, complendum erit. Idemque est si contra ad aliam curvam perpendiculares applicentur. Sed si alterutra linearum, ut ABC, degeneret in rectam RS. tunc recta RS, quomodocunque secta in partes, $(A)(B), (B)(C)$ etc. curvaque etiam quomodocunque secta; patet summam ordinatarum ex curva in rectam perpendicularium, in ipsas $(A)(B), (B)(C)$. junctam perpendicularibus ipsi curvae impositis aequari spatio $DEFG(C)(A)D$.



[*Fig. 2*]

Hinc novum Theorema: Perpendiculares ex punctis axis in tangentes productas, curvae impositae ut AD impositam in BC, aequatur ordinatae ad axem seu AB ad BD', tum, quia BDA et $CD'B$ similia, tum quia AD in BC, aequale duplo $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ABC quod a rectangulo ABD' non differt.

4–6 duplo *erg. L dreimal* 18 perpendicularium, *(1)* si modo recta *(a)* aeqv *(b)* in partes aeqvales *(2)* qvae determinata erit, si recta in partes aeqvales divisa *(3)* in *L* 18 junctam *(1)* Superficiei *(2)* momento curvae *(3)* perpendicularibus *L*

27 *Fig. 2*: Leibniz hat in der Vorlage die Bezeichnung D für zwei Punkte verwendet. Zur besseren Unterscheidung wird in Figur und Text der zweite Punkt mit D' benannt.

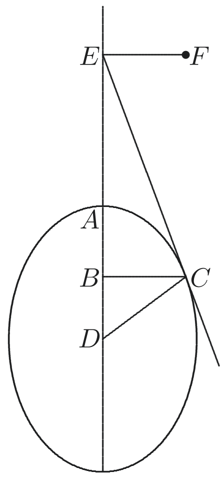
36. DIMENSIO CURVAE ELLIPSIS

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 147. 1 Streifen ca 19,2 x 5,3 cm. 8 Z. auf Bl. 147 r°. Bl. 147 v° leer. Bl. 147 bildete ursprünglich den mittleren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 35) und LH 35 VIII 30 Bl. 99 (N. 37).
Cc 2, Nr. 1085

24 Octob. 1675

D i m e n s i o   c u r v a e   E l l i p s i s



[*Fig. 1*]

Ellipsis AC, in qua ABD axis, $AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. erit $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. adeoque $2y^2 \sqcap 2al - \frac{2a}{q}xl$. et EB sive $l \sqcap \frac{y^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{2ax - \frac{a}{q}x^2}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} + x$ eritque $AE \sqcap \frac{ax}{a - \frac{a}{q}x} \sqcap z$. eritque $ax \sqcap az - \frac{a}{q}xz$. sive $ax + \frac{a}{q}xz \sqcap az$, sive $x \sqcap \frac{az}{a + \frac{a}{q}z}$. Ergo in $y \sqcap \sqrt{2ax - \frac{a}{q}x^2}$ pro

7 24 Octob. 1675 *erg. L*   8 D i m e n s i o ... E l l i p s i s *erg. L*

x substituendo ejus valorem, fiet: $EF \sqcap BC \sqcap \omega \sqcap \sqrt{\dfrac{2a^2z}{a+\dfrac{a}{q}z} - \dfrac{a}{q}\dfrac{a^2z^2}{a^2+2\dfrac{a^2}{q}z+\dfrac{a^2}{q^2}z^2}}$, vel:

$\dfrac{\sqrt{2a^3[z] + 2\dfrac{a^3}{q}z^2 \boxed{-\dfrac{a^3}{q}z^2}}}{a+\dfrac{a}{q}z}$. Cujus proinde dimensio a quadratura Ellipseos sive Circuli pendet per theorema de quo sub finem 19. Octob.

3 pendet *(1)*. si sumeremus $\mathrm{a} + \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{z}$ pro una qvantitate $\sqcap$ v, fiet $\omega \sqcap$ *(2)* per *L*

3 sub … Octob.: N. 34 S. 253 Z. 5 – S. 254 Z. 6.

37. LOGARITHMI IN HYPERBOLA DEMONSTRATI

24. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 99. 1 Zettel ca 19,2 x 11,0 cm. 1 S. auf Bl. 99 r°. Bl. 99 v° leer. Bl. 99 bildete ursprünglich den unteren Teil eines vollständigen Bl. 2°; die restlichen Teile sind LH 35 XII 1 Bl. 4 (N. 35) und LH 35 XIII 3 Bl. 147 (N. 36).
Cc 2, Nr. 1087

24 Octob. 1675

L o g a r i t h m i i n H y p e r b o l a d e m o n s t r a t i.

L o g a r i t h m i. I n c o g n i t a e i n e x p o n e n t e

In Hyperbola si abscissae AB, AC, AQ, sint progressionis Geometricae, etiam applicatae BD, CE, QF ejusdem erunt progressionis; ergo et differentiae earum. Caeterum applicatae et abscissae sunt in ratione reciproca, ergo et differentiae earum. Si sint x inter se progressionis geometricae, erunt curvae latera progressionis hujus, $\dfrac{\sqrt{1x^4 - a^2}}{1x}$.

---

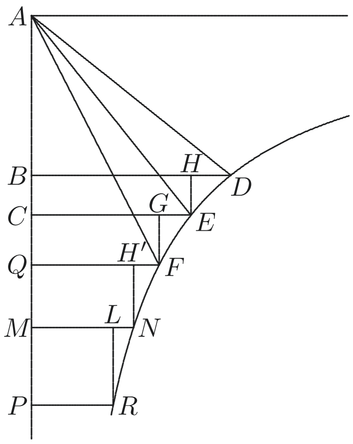
7 *Darüber Nebenbetrachtung:* $\dfrac{\frac{a}{x}}{\frac{a^2}{x^2}} \sqcap \dfrac{x}{a} \quad \dfrac{a}{x} \sqcap \dfrac{a^2}{x^2}$ [*bricht ab*]

8 *Darüber:* Nova hic et quae hactenus frustra quaesiveram[:] Adhiberi potest haec methodus etiam ad obliquas applicatas.

7 24 Octob. 1675 *erg. L* 8 L o g a r i t h m i ... d e m o n s t r a t i *erg. L* 9 L o g a r i t h m i. ... e x p o n e n t e *erg. L* 10 In *(1)* Ellips *(2)* Hyperbola *L* 12 earum, *(1)* Curva repraesentatur per $\sqrt{\mathrm{x}^2 - \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}^2}} \sqcap \dfrac{\sqrt{\mathrm{x}^4 - \mathrm{a}^2}}{\mathrm{x}}$. Item si $\mathrm{x}^4 - \mathrm{a}^2$ *(2)* si *L*

---

13 curvae latera: Die Ausdrücke für die Größen AD, AE und AF müssten $\dfrac{\sqrt{x^4 + a^2}}{1x}$, $\dfrac{\sqrt{16x^4 + a^2}}{2x}$ und $\dfrac{\sqrt{256x^4 + a^2}}{4x}$ lauten, wenn man $y = \dfrac{a}{x}$ als Hyperbelgleichung ansetzt. Leibniz übernimmt den Vorzeichenfehler in den folgenden Ausdrücken, was jedoch die allgemeinen Aussagen nicht beeinträchtigt.



[*Fig. 1*]

$\dfrac{\sqrt{16x^4 - a^2}}{2x}$. $\dfrac{\sqrt{64x^4 - a^2}}{4x}$ etc. Unde jam transitus habetur ad hujusmodi progressiones quae a Geometricis pendent in quibus ambigua in exponente, ut progressio hoc loco: $\dfrac{\sqrt{\left(\mathrm{I}^y\right)^4 - a^2}}{\mathrm{I}^y}$ cujus summa invenietur per curvam hyperbolicam. Cumque detur superficies hyperbolica ex data Hyperbolae quadratura, hinc ducendo in I^y videtur et hujus seriei $\sqrt{\left(\mathrm{I}^y\right)^4 - a^2}$ summa ex data Hyperbolae quadratura haberi.

Ecce transitum admirabilem ad calculos in quos exponentes ingrediuntur. Loco $\left(\mathrm{I}^y\right)^4$ scribi etiam poterit simpliciter: I^{4y}.

Interim[:] Nota in hyperbola rectangulum EHD aequari rectangulo FGE posita progressione continua geometrica rectarum AB, AC, AQ. Hinc jam videtur elegantissime de-

---

4 *Unter* $\dfrac{\sqrt{\left(\mathrm{I}^y\right)^4 - a^2}}{\mathrm{I}^y}$: Imo haec expressio inutilis.

7 *Darüber:* I m o i n u t i l e.

---

1 *Fig. 1*: Leibniz verwendet die Bezeichnung H für zwei verschiedene Punkte. Zur Verdeutlichung wird in Figur und Text einer der Punkte mit H' benannt.

monstrari posse aequalitas spatiorum $DBQFD$ et $QPRFQ$. positis AB, AQ, AP, sive positis BD, QF, PR progressionis continuae. Nam BQ, pariter et QP subdividatur in infinitum, alias medias proportionales continue interponendo, ut CE, MN. erunt DHE, EGF, etc. item FHN, NLR etc. aequales. Imo generaliter si BC[,] CQ. et similes sint infinite parvae, spatiola ipsa sive rectangula infinite parvae latitudinis, $HBCE, GCQF$ erunt inter se aequalia, fient enim ex ductu $\frac{a^2}{x}$ in $\frac{\beta}{a}x$. ponendo $BH \sqcap \frac{a^2}{x}$ et $BC \sqcap \frac{\beta}{a}x$ si β sit quantitas constans infinite parva. Continuando ergo interpositionem, manifestum est totidem spatiola interponi inter B et Q, quot inter Q et P. si AB, AQ, AP continue proportionales. Habemus ergo demonstrationem planam ac facilem pulcherrimi theorematis Gregorii a S. Vincentio, quaeque ad longe subtiliora aditum facit.

Si ordinatae sint x^2y. sive $y \sqcap \frac{a^3}{x^2}$, erunt y in reciproca duplicata: Hinc si x progressionis Geometricae, erunt et y progressionis Geometricae. Hinc si AB, AC, AQ. progressionis Geometricae, erunt spatiola $\frac{a^2\beta}{x}$. Hinc sequetur spatia ordinaria $DBQFD$. $FQPRF$ fore etiam progressionis Geometricae, adeoque abscissis reciproce proportionalia.

4 aeqvales. *(1)* Ergo Spatia *(2)* Differentiae *(3)* Imo *L*

---

9 theorematis: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CVIII, S. 585 f.

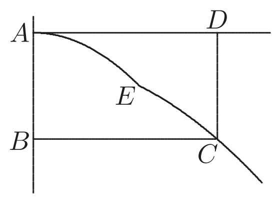
38. ANALYSIS TETRAGONISTICA EX CENTROBARYCIS
25. und 26. (?) Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 1. 1 Bl. 2°. 2 S. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Brief*, 1851, S. 344–348; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 117–121; 3. *LBG*, 1899, S. 147–151; 4. (engl. Übers. von 2.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 65–72.
Cc 2, Nr. 1089, 1090

Datierungsgründe: Vermutlich wurde der zweite Teil der Aufzeichnung (ab S. 267 Z. 7) am 26. Oktober 1675 geschrieben; die entsprechende, möglicherweise ergänzte, Datumsangabe in S. 267 Z. 5 f. kann sich sowohl darauf als auch auf das an gleicher Stelle erwähnte Stück N. 39 beziehen.

25. Octob. 1675

Analysis Tetragonistica ex Centrobarycis



[*Fig. 1*]

Sit curva quaelibet AEC referenda ad angulum rectum BAD, sit $AB \sqcap DC \sqcap x$. et ultima $x \sqcap b$ et $BC \sqcap AD \sqcap y$. et ultima $y \sqcap c$. Patet Omn. yx. ad x. $\overset{(1)}{\sqcap}$ $\dfrac{b^2c}{2}$,, $-$ Omn. $\overline{\dfrac{x^2}{2}}$, ad y. Nam momentum spatii $ABCEA$ ex AD, fit ex rectangulis ex $BC \sqcap y$, in $AB \sqcap x$. At vero momentum spatii $ADCEA$ ex AD, seu complementi prioris, fit ex summa quadratorum DC, sive $\dfrac{x^2}{2}$, dimidiata; quod momentum, si auferatur a momento totius rectanguli $ABCD$, ex AD, id est a c in Omn. x. sive a $\dfrac{cb^2}{2}$, restabit momentum spatii

11 *Darunter:* Vid. ejusdem part. 2. alia scheda.

10 *Darüber:* vide eiusdem part. 2. alia scheda *L streicht Hrsg.* 11 Analysis ... Centrobarycis *erg. L* 15 $\overset{(1)}{\sqcap}$ *(1)* omn x^2. ad y. *(2)* Mom *(3)* $\dfrac{b^2c}{2}$ *L*

20 part. 2.: N. 40.

$ABCEA$. Unde habetur aequatio quam dixi. Qua reformata sequitur Omn. $\overline{yx, \text{ad}\, x}$ + Omn. $\overline{\frac{x^2}{2}\,\text{ad}\, y} \overset{(2)}{\sqcap} \frac{b^2c}{2}$. adeoque harum duarum figurarum in unum junctarum semper haberi quadraturam. Qui est centrobarycae apex.

Sit aequatio curvae naturam exprimens: $ay^2+bx^2+cxy+dx+ey+f \overset{(3)}{\sqcap} 0$. Ponatur $yx \overset{(4)}{\sqcap} z$. fiet $y \overset{(5)}{\sqcap} \frac{z}{x}$. quo valore in aequatione 3. inserto fiet: $a\frac{z^2}{x^2}+bx^2+cx\frac{z}{x}+dx+\frac{ez}{x}+f \overset{(6)}{\sqcap} 0$. sive sublatis fractionibus fiet $az^2+bx^4+cx^2z+dx^3+ezx+fx^2 \overset{(7)}{\sqcap} 0$. Sit rursus $x^2 \overset{(8)}{\sqcap} 2\omega$ eumque valorem inserendo in aeq. 3 fiet: $ay^2+2b\omega+cxy+dx+ey+f \overset{(9)}{\sqcap} 0$. adeoque erit $x \overset{(10)}{\sqcap} \frac{-ay^2-2b\omega-ey-f}{+cy+d} \overset{(11)}{\sqcap} \sqrt{2\omega}$ et quadrando utrobique, fiet:

$$a^2y^4+4aby^2\omega+2aey^3+2afy^2, +4b^2\omega^2+4be\omega y$$
$$+4bf\omega, +e^2y^2+2efy+f^2, -2c^2y^2\omega-4cdy\omega-2d^2\omega \overset{(12)}{\sqcap} 0.$$

Quod si jam curva describatur secundum aequationem 7. itemque alia secundum aequationem 12. ajo quadraturam figurae unius pendere ex quadratura figurae alterius, et contra. Quod si jam loco aequationis 3. aliam sumamus altiorem, seu tertii gradus, rursus duas alias habebimus loco 7. et 12. Et ita continuando dubium non est, quin certam quandam progressionem ipsarum 7, et ipsarum 12 habituri simus, ut sine calculo continuari possit in infinitum, non difficili opera. Ex data autem una alicujus curvae aequatione omnes aliae generali expressione exhiberi possunt; ex quibus compendiosissima eligi potest.

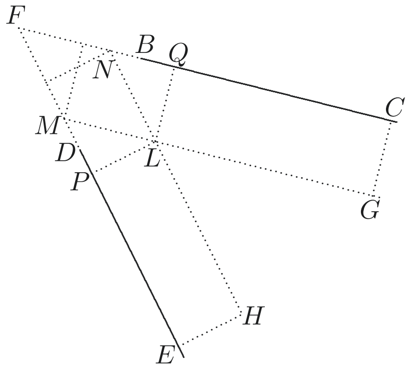
Datis figurae cujusdam momentis ex duabus quibusdam rectis, dataque figurae ejusdem area, habetur ejus centrum gravitatis. Dato autem figurae cujusdam (aut etiam lineae) centro gravitatis et magnitudine habetur ejus momentum ex aliis quibuscunque rectis. Itaque data figurae cujusdam magnitudine, et momento ex duabus quibusdam

1 f. *Am Rande:* Hodie sic exprimo $\int \overline{yxdx} + \int \frac{1}{2}xxdy = \frac{x^2y}{2}$.

20 f. (aut etiam lineae) *erg. L* 23 = *(1)* b²c *(2)* | x²y *ändert Hrsg.* | *L*

23 Hodie: Die Anmerkung stammt aus hannoverscher Zeit.

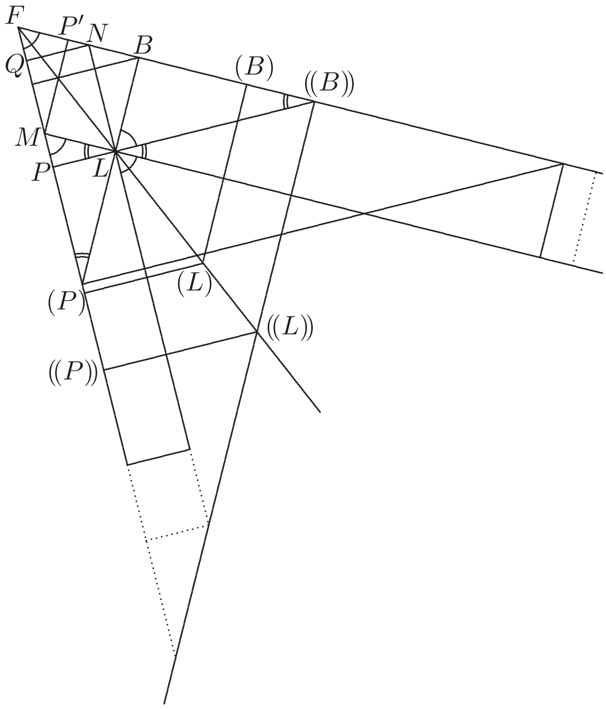
rectis, datur ejus momentum ex qualibet recta data. Hinc etiam multae quadraturae ex quibusdam datis. Momentum autem cujusdam figurae ex recta qualibet etiam generali calculo exprimi potest.



[*Fig. 2*]

Momentum divisum per magnitudinem dat distantiam centri gravitatis ab axe librationis. Sint in eodem plano rectae positione datae sive parallelae sint, sive productae concurrant in F. Momentum ex BC inventum sit ba^2. Momentum ex DE inventum sit ca^2. Area figurae sit v, erit distantia centri gravitatis a recta BC, nempe $CG \sqcap \dfrac{ba^2}{v}$. et distantia ejus a recta DE, nempe $EH \sqcap \dfrac{ca^2}{v}$. Ergo CG ad EH est ut b ad c. sive rationem habent datam. Ponatur jam rectam EH in eodem plano manentem percurrere normaliter ipsam DE, et rectam CG percurrere normaliter ipsam BC, et apicem G rectam GM, apicem vero H rectam HN, vestigium scilicet suum relinquere. Necesse est si BC et DE alicubi concurrunt etiam GM et HN alicubi concurrere, sive intra sive extra, F. concurrant in L. Erit angulus HLG aequalis angulo EFC. et angulus PLQ. (ponendo $PL \sqcap EH$ et $LQ \sqcap CG$) erit supplementum ipsius anguli EFC ad duos rectos; adeoque erit datus. Juncta PQ habebitur Triangulum PQL cujus dabitur angulus verticis L ad rationem laterum ad verticem QL, ad LP.

5 f. axe *(1)* aeqvilibrij *(2)* librationis. *(a)* qvod si ergo non sint datae *(b)* sit momen *(c)* Sint *L* 11 et | ex *streicht Hrsg.* | apicem *L* 16 f. ad ratio laterum *L ändert Hrsg.* 17–266,2 LP. | Datur angulus MFP. ergo datur MP $\sqcap$ ψ. dabitur FP $\sqcap$ dψ. Eodem modo data NQ $\sqcap$ eψ. dabitur FQ $\sqcap$ deψ *gestr.* | Cum *L*



[*Fig. 3*]

Cum ergo sumta BL vel $(B)(L)$ quantacunqve, angulus BLP semper maneat idem; ac praeterea sit, ut BL ad LP, ita $(B)(L)$ ad $(L)(P)$[;] erit etiam ut BL ad $(B)(L)$, ita LP ad $(L)(P)$ quod contingere patet si etiam FL ipsis proportionalis, seu recta transit per $FL(L)$ etc. Unde cum non dentur plura hic loca, sequitur locum esse rectam. Datis ergo duobus momentis figurae ex duabus rectis non parallelis dabitur linea recta transiens per centrum gravitatis. Quare datis tribus figurae momentis ex tribus axibus librationis qui non sint omnes paralleli inter se, dabitur figurae area et centrum gravitatis. Ecce apicem Centrobarycae. Si dentur duo ejusdem figurae momenta ex duabus rectis inter se parallelis dabitur figurae area, sed non centrum gravitatis.

9 apicem | artis *gestr.* | Centrobarycae L

1 *Fig. 3*: Die Punktbezeichnung P wird von Leibniz in Figur und Text (Lesart zu S. 265 Z. 17 bis Z. 2) doppelt verwendet. Zur besseren Unterscheidung erhält einer der beiden Punkte in der Figur die Bezeichnung P'.

Cum sit finis Centrobarycae ex datis momentis invenire dimensiones hinc habemus duo theoremata generalia[:] Si dentur ejusdem figurae momenta duo ex duabus rectis sive axibus librationis parallelis inter se, dabitur ejus magnitudo. Item si ex tribus licet non parallelis. Hinc jam videtur methodus patere ad inveniendas curvas Ellipticam et Hyperbolicam, ex datis Circuli et Hyperbolae quadraturis. De quo Schediasmate peculiari. 26. Octob. 1675.

Alia Analysis Tetragonistica haberi potest, ope Curvarum. Scilicet eadem curva in diversa resolvetur Elementa, prout ad diversas rectas ordinatae referuntur. Unde diversae quoque oriuntur figurae planae curvae propositae Elementis homogeneae, cumque ex data curvae dimensione, inveniantur omnes, sequitur ex data unius figurarum hujusmodi dimensione, etiam caeteras haberi.

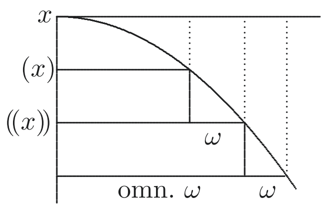
Aliis modis inveniri possunt figurae quae ex alia pendent, si ordinatae figurarum quarum quadratura habetur, aut quarum quadratura ex data habetur adduntur datae. Quemadmodum tractabiliora sunt spatia quam curvae, quoniam pluribus modis secari ac resolvi possunt. Ita tractabiliora sunt solida planis et generatim superficiebus. Itaque ubi methodum qua superficies examinamus ad solida transferemus, multa nova detegemus, et facile saepe demonstrabimus de superficiebus per solida; quae in ipsis superficiebus difficulter habentur. Eleganterque observavit Tschirnhausius pleraque ab Archimede demonstrata, ut quadraturam parabolae, et quae ab his pendent circa sphaeram, conum, Cylindrum, ex sola solidorum r e c t i l i n e o r u m sectione ac compositione manifesta ac palpabilia reddi posse.

Modi varii describendi nova solida. Si ex puncto in sublimi posito recta rigida descendens circa planum ducatur, cujuscunque illud sit figurae[,] Coniformium genera producentur. Nam si planum circuli Circumferentia terminatum sit, orietur Conus rectus vel scalenus. Ita si figura quae pro basi est, seu planum, aliquod centrum habeat, ut Ellipsis, orietur coniforme Ellipticum rectum, si punctum datum centro i m m i n e a t , sin minus, scalenum. Aliud Conoeides aliud coniforme Ellipticum. Si linea rigida ex puncto descendens sit circularis aliave curva; tunc aut puncto vel polo illi ita affixa est, ut non

1 invenire *(1)* qvadraturas *(2)* | dimensionis *ändert Hrsg.* | hinc *L* 5 datis *(1)* Ellipseo *(2)* Circuli *L* 28 aut *(1)* rigida est, et circulus e *(2)* centro *(3)* puncto *L*

5 Schediasmate: N. 39. 18 observavit: vgl. Tschirnhaus' Quadraturmethode in seinem Brief an Leibniz, 27. Januar 1678, III, 2 N. 134 S. 318–330.

nisi unius in eo motus libertatem habeat, scilicet circa quendam axem; et tunc necesse est ut basis seu planum sit circulus, et ut centro ejus immineat punctum vel polus. Sin aliter[,] necesse est ut linea rigida aliorum habeat motuum libertatem, nempe seorsum et deorsum, aliterve, secundum quandam rectam; et tunc semper ubi opus erit ascendet, descendetve, ut semper planum datum sua circumrotatione circa axem attingat. Et hoc est secundum Coniformium genus. Tertium genus est eorum, ubi praeter motum illum duplicem gyrationis cum axe, et exaltationis et descensionis curva sola vel axis solus, vel etiam figura cum axe; rursus alios interim motus exercent, vel ipsum etiam punctum interim movetur.



[*Fig. 4*]

Aliud: Differentiarum momenta ex perpendiculari ad axem, aequantur complemento summae terminorum sive: Momenta Terminorum aequantur complemento summae summarum.

Sive omn. $\overline{x\omega}$ $\sqcap$ ult. $x, \overline{\text{omn.}\,\omega},, -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\omega}$. Sit $x\omega \sqcap az$. fiet: $\omega \sqcap \frac{az}{x}$. fiet omn. $\overline{az}$ $\sqcap$ ult. $x\,\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x}}$. Ergo, omn. $\overline{\frac{az}{x}}$ $\sqcap$ ult. $x.\ \overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{az}{x^2}}$. Quo valore in aeq. praecedenti inserto fiet:

$$\text{omn. } \overline{az} \sqcap \text{ult. } x^2\,\overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}} - \text{ult. } x, \overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } \frac{az}{x^2}}} - \text{omn. } \overline{\overline{\text{ult. } x.\text{omn. } \frac{az}{x^2}} - \overline{\text{omn. } \overline{\text{omn. } \overline{\frac{az}{x^2}}}}}.$$

Et ita iri potest in infinitum.

omn. $\frac{a}{x}$ $\sqcap$ ult. $x.\ \overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x^2}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x^2}}$. Et omn. a $\sqcap$ ult. $x.\ \overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x}} -$ omn. $\overline{\text{omn.}\,\frac{a}{x}}$. Quod postremum theorema exhibet summam logarithmorum ex data Hyperbolae quadratura.

3 libertatem, *(1)* | v. g. *streicht Hrsg.* | seorsum et deorsum *(2)* nempe *L*

Numeros abscissas repraesentantes soleo appellare ordinales, quia ordinem terminorum sive ordinatarum exhibent.

Si quadrato ordinatae figurae quadrabilis addas quadratum rectae constantis, radices summae duorum quadratorum repraesentabunt curvam quadratricis. Quod si radices summae duorum quadratorum dent figuram quadrabilem, etiam curva erit rectificabilis.

Datae progressionis curvam describere. A Termino progressionis quadrato auferatur quadratum quantitatis constantis; Radicum ex duobus quadratis figura quadratrix descripta curvam habebit quaesitam. Curva rectificabilis non ideo est descriptibilis. Descriptae curvae elementa pluribus diversis modis enuntiari possunt. Comparentur diversi modi enuntiandi elementa curvae cum diversis modis enuntiandi figuram ei homogeneam, prout ad diversa refertur. Imo et solidum curvae homogeneum adhuc pluribus modis enuntiari potest; et superficies homogenea curvae vel figurae.

4 qvadratricis. *(1)* itaqve si descriptio curvae *(2)* qvod *L* 10 enuntiandi *(1)* curvam ei ho *(2)* figuram *L*

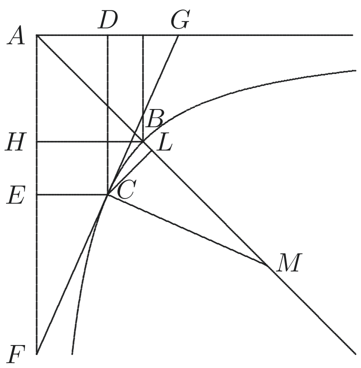
39. INQUISITIO DE DIMENSIONE CURVARUM ELLIPSEOS ET HYPERBOLAE

26. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 144–145. 1 Bog. 2°. 4 S. — Auf Bl. 144 r° u. 145 v° unten spätere Zusätze, durch Striche abgetrennt (S. 273 Z. 4–12).
Cc 2, Nr. 1091

26 Octob. 1675.

Inquisitio de dimensione Curvarum Ellipseos et Hyperbolae.



[*Fig. 1*]

Sit Hyperbolae aequilaterae rectangulae centrum A, vertex B. punctum in ea quodlibet C. Unde in duas asymptotos ADG, AEF, erunt ordinatae DC. EC. abscissae AD, AE, tangens curvae est FCG. et $DG \sqcap AD \sqcap EC$. et $EF \sqcap AE \sqcap DC$.

Sit $AE \sqcap y$, erit $EC \sqcap \dfrac{b^2}{y}$. ponendo $AH \sqcap b \sqcap HB$.

Differentia inter duas ordinatas proximas, erit $\dfrac{b^2}{y} - \dfrac{b^2}{y+\beta}$ sive $\dfrac{\boxed{b^2y - b^2y} + b^2\beta}{y^2 + \cancel{y\beta}}$. et Elementum

18 *Nebenbetrachtungen:* $\dfrac{b^2}{y} \sqcap \displaystyle\int \dfrac{b^2}{y^2}$. $\dfrac{ab^2}{y^2} - \dfrac{ab^2}{y^2+2y\beta+\beta^2} \sqcap \dfrac{2y\beta ab^2}{y^4} \sqcap \dfrac{2}{y^3}$.

12 asymptotos *(1)* AD, AE *(2)* | ADF, AEG *ändert Hrsg.* |, erunt *L*

curvae ad asymptoton relatae erit $\sqrt{\frac{b^2}{y^2}+1} \sqcap \omega$. sive $\frac{\sqrt{b^2+y^2}}{y} \sqcap \omega$. Cujus rectangulum in distantiam ab asymptoto seu momentum erit $\sqrt{b^2+y^2}$ quae est ad Hyperbolam, habetur ergo momentum Curvae Hyperbolicae rectangulae aequilaterae, ex asymptoto una, ac proinde et ex altera cum par sit ratio, ex data Quadratura Hyperbolae. Cum ergo habeamus momentum Curvae Hyperbolicae ex duabus rectis, habebimus rectam unam per ejus centrum gravitatis transeuntem; (ex data scilicet Hyperbolae quadratura.) Quare ad curvae ipsius dimensionem inveniendam, tantum opus est, ut ad huc unum ejus momentum ex alia quadam recta inveniamus. Itaque in axem ABL ducatur ordinata CL. Sit $AB \sqcap a$. et $BL \sqcap x$. erit $CL \sqcap \sqrt{2ax+x^2}$. et $LM \sqcap a+x$. Ergo $CM^2 \sqcap a^2+2ax+x^2+2ax+x^2$ et $\frac{CM}{\sqrt{2}} \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{2}+2ax+x^2}$. et pro $a^2+2ax+x^2$ ponendo v^2, fiet $\frac{CM}{\sqrt{2}} \sqcap \sqrt{v^2-\frac{a^2}{2}}$ quae aequatio est etiam ad Hyperbolam. Earum autem summa exhibet momentum Curvae Hyperbolae ex axe. Habemus ergo momentum portionis Curvae Hyperbolicae datae ut BC, ex tribus rectis, nempe AG, AF, AL, duabus scilicet asymptotis, et axe. Omnia ex quadratura Hyperbolae data. Ergo ex data quadratura Hyperbolae datur dimensio Curvae Hyperbolae aequilaterae rectangulae et ejus centrum gravitatis per schediasma *Analyseos tetragonisticae* 25 Octob. 1675. Hinc omnia

---

1 *Dazu am Rande:* Err⟨o⟩r. Potius Elementum Hyp. Curvae est $\frac{\sqrt{b^4+y^4}}{y^2}$.

1 f. Cuius | rectangulum in *erg.* | distantiam | a vertice *ändert Hrsg.* seu momentum *erg.* | erit *L*
15 f. et ... 1675 *erg. L*

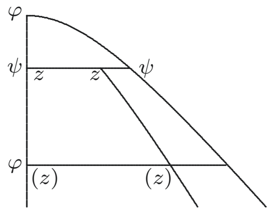
---

1 $\sqrt{\frac{b^2}{y^2}+1}$: Richtig wäre $\sqrt{\frac{b^4}{y^4}+1}$. Leibniz erkennt den Fehler nachträglich, notiert am Rand den richtigen Wert und zieht die Folgerung in S. 272 Z. 2 f. in Zweifel. Er korrigiert jedoch nicht die Rechnung und die daraus abgeleitete Folgerung in Z. 14–16, die Rektifikation und die Berechnung des Schwerpunkts des Bogens der Hyperbel ließen sich auf die Quadratur zurückführen. 16 schediasma: vgl. N. 38 S. 267 Z. 1–6.

alia curvae Hyperbolicae aequilaterae momenta ex sola Hyperbolae quadratura dantur.

H i n c s e q u i t u r [:] Cujuslibet alterius Curvae Hyperbolicae dimensionem haberi posse. Quod sic ostendo[:] Elementum curvae Hyperbolicae ad axem relatae est $\sqrt{\left.\begin{matrix}1\\ +\dfrac{a}{q}\end{matrix}\right\} + \dfrac{a^2}{2ax+\dfrac{a}{q}x^2}}$. Posito Portionem ab axe inde a vertice abscissam esse x et ordinatam ad axem esse $\sqrt{2ax+\dfrac{a}{q}x^2}$.

Quod si ergo latus rectum et transversum sint aequalia fiet: $\sqrt{2+\dfrac{a^2}{2ax+x^2}} \sqcap \psi$ valor Elementorum curvae. Quorum datur summa ex data Hyperbolae Quadratura, ut jam ostendi.



[*Fig. 2*]

Multiplicetur Elementum curvae Hyperbolae aequilaterae per $\sqrt{\dfrac{q}{a}}$, fiet $\sqrt{\dfrac{2q}{a}+\dfrac{a^2}{\dfrac{2a^2x}{q}+\dfrac{ax^2}{q}}} \sqcap z$. Videndum an inde fiat Elementum alterius curvae Hyperbolicae iniqui-laterae. Neque vero necesse est, ut ordinata ejusmodi, z, sit ad eandem abscissam x, sed pro x sumi potest $\varphi \sqcap \dfrac{d}{a}x$ seu datae constantis rationis ad x. Nec ideo minus habebitur ratio figurae seu omnium z, vel (z) ad omnes ψ. Nam et differentiae abscissarum erunt in eadem ratione, ergo et rectangula omnia infinite parvae latitudinis sub ipsis et ordinatis facta, erunt inter se in composita ratione ex 1.

---

2 *Zu* H i n c s e q u i t u r : Error forte.

1 f. dantur. | At vero inventum est ab Hugenio, | qvin etiam a *(1)* Gregorio et *(2)* Wallisio et Gregorio *erg.* | momentum curvae Hyperbolicae ex *(a)* basi *(b)* axe transverso pendere a qvadratura Ellipseos sive Circuli; qvo posito seqvitur: ex data qvadratura Hyperbolae, etiam Circuli qvadraturam haberi; ac proinde, ex data *(aa)* ⟨—⟩ *(bb)* sectione rationis, etiam anguli sectionem inveniri posse *gestr.* | H i n c *L*

---

8 ostendi: s. o. Erl. zu S. 271 Z. 1. 18 inventum: Die von Leibniz als falsch erkannte und daher gestrichene Aussage bezieht sich vermutlich auf Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673 [Marg.], S. 75–77 (*HO* XVIII S. 214–219), J. GREGORY, *Geometriae pars universalis*, 1668, S. 92–96, J. WALLIS, *Tractatus duo*, 1659, S. 104 (*WO* I S. 559).

ad $\sqrt{\dfrac{q}{a}}$. et ex d. ad a. Itaque scribemus: $\sqrt{\dfrac{2q}{a} + \dfrac{a^2}{\dfrac{2a^3}{qd}\varphi + \dfrac{a^3}{qd^2}\varphi^2}}$ $\sqcap$ (z) quam conferendo Elementis curvae Hyperbolicae datae nempe $\sqrt{\dfrac{1}{+\dfrac{r}{s}} + \dfrac{r^2}{2r\varphi + \dfrac{r}{s}\varphi^2}}$ conferendo inveniemus

---

1 *Zusatz auf Bl. 144 r°, durch Strich abgetrennt:*

$$\begin{array}{lll} 2b & + \dfrac{a^2b}{2ax + x^2} & \text{conferatur cum} \\ +d & & \\ +\dfrac{dc}{q} & + \dfrac{d^3}{2dx + \dfrac{d}{q}x^2} & \text{vel cum} \\ +d & & \\ +\dfrac{dc}{q} & + \dfrac{d^2q}{2qx + x^2}. & \end{array}$$

Conferendo erit et q aequ. a. Ergo d^2q seu d^2a erit aequ. q^2b seu d^2 aequ. qb seu b aequ. $\dfrac{d^2}{q}$. Denique $2b$ aequ. $d + \dfrac{dc}{q}$. Ergo $\dfrac{d}{q}$ aequ. $1 + \dfrac{c}{q}$ seu d aequ. $q + c$. Quo casu habetur dimensio curvae.

Zusatz auf Bl. 145 v°, durch Strich abgetrennt:

Aequatio ad curvae conicae Elementum z aequ. $\sqrt{\dfrac{q^2\,\boxed{-aq + aq}\,\dagger\,1\,y^2 \;\; + \dfrac{a}{q}..}{\ddagger q^2 \dagger y^2}}$. $\dagger$ in Hyp. $+$ in Circ. et Ell. $-$. Sit in Hyp. aequilatera multiplicato elemento per b^2: v aequ. $\sqrt{\dfrac{br^2 + 2by^2}{-r^2 + y^2}}$. Conferendum priori, fiet: Imo res non procedit.

2 Ellipticae *L ändert Hrsg.*

---

7 Ergo $\dfrac{d}{q}$: Richtig wären $\dfrac{2d}{q} = 1 + \dfrac{c}{q}$ und damit $2d = q + c$. 10 z aequ.: Auf der rechten Seite der Gleichung müsste im Zähler des Bruches unter der Wurzel $\ddagger q^2$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter und bricht dann ab. 11 per b^2: Tatsächlich multipliziert Leibniz mit $\sqrt{b}$.

arbitrarias $q.\,a.\,d.$ Fiet enim $\frac{q}{a} \sqcap 2+\frac{2r}{s}$. $\frac{1}{\frac{2a^5}{qd}\varphi+\frac{a^5}{qd^2}\varphi^2} \sqcap \frac{1}{2r^3\varphi+\frac{r^3}{s}\varphi^2}$ et conferendo $r^3 \sqcap \frac{a^5}{qd}$, sive $a^5 \sqcap r^3qd$. et rursus $r^3 \sqcap \frac{a^5s}{qd^2} \sqcap \frac{a^5}{qd}$. Ergo $\frac{s}{d} \sqcap 1$. Ergo habetur d. Ergo habetur $r^3 \sqcap \frac{a^5}{qd}$. Ergo habebitur valor ipsius a^4 absolutus. Adeoque inventis arbitrariis habebitur dimensio curvae Hyperbolicae cujusque. Et si pro $\langle r\rangle$ ponatur $\langle R\rangle a$, habebitur valor absolutus ipsius a.

Nunc ad Ellipsin transeamus. Generaliter Elementum curvae tam Hyperbolae quam Ellipseos est $\sqrt{\frac{1}{\ddagger\frac{a}{q}}+\frac{a^2}{2ax\ddagger\frac{a}{q}x^2}} \sqcap z$. Pro x ponatur $\gamma y+\delta q$ sumendo γ. et δ. pro signis.

Fiet $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap \begin{array}{l} +\,2a\gamma\;\;y\;+\;2a\delta q\;\ddagger\;\frac{a}{q}y^2. \\ \ddagger\,\frac{2a}{q}\gamma\delta q\;y\;\ddagger\;\frac{a}{q}q^2 \end{array}$ Debet autem esse $\cancel{2a\gamma y} \ddagger \frac{\cancel{2a}}{\cancel{q}}\cancel{\gamma}\delta\cancel{qy} \sqcap 0$.

2 ergo *(1)* $\frac{\mathrm{as}}{\mathrm{qd}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{as}}{\mathrm{d}} \sqcap 1$ ergo $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{d}} \sqcap \frac{1}{\mathrm{s}}$ et $\mathrm{r}^3 \sqcap \frac{1}{\mathrm{s}} \frown \boxed{\boxed{\frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{q}}} \sqcap \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}} \frown \mathrm{a}^3}$ $\frac{1}{2+\frac{2\mathrm{r}}{\mathrm{s}}} \frown \mathrm{a}^3 \sqcap \frac{1}{2\mathrm{s}+2\mathrm{r}}\mathrm{a}^3$. et $\frac{\mathrm{r}^3}{\mathrm{a}^3} \sqcap \frac{1}{2\mathrm{s}+2\mathrm{r}}$. Habetur ergo a. qvia s. et r. datae. *(a)* Ergo et *(b)* (per inventionem duarum mediarum proportionalium), ergo et q et d. *(3)* $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{d}} \sqcap 1$ *L*   2 habetur | s. *ändert Hrsg.* | Ergo *L*   6 tam | Circuli *ändert Hrsg.* | qvam *L*   7 $\sqcap$ z *(1)* sive pro x ponendo *(a)* $\ddagger$y $\ddagger$ q fiet: *(b)* $\ddagger$y *(c)* pro *(d)* $\ddagger$y $\ddagger$ q *(e)* pro x ponendo $\ddagger$y $\ddagger$ q tunc pro 2ax *(aa)* fiet *(bb)* $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2$, fiet: *(aaa)* $\mathrm{y}^2\ddagger$ *(bbb)* $\begin{array}{l}\ddagger\ 2\mathrm{a}\;\;\mathrm{y} \ddagger 2\mathrm{aq}\\ \ddagger\frac{2\mathrm{aq}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{q}^2\end{array}$,, *(aaaa)* $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(bbbb)* $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}^2$ sive fiet $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(aaaaa)* $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(bbbbb)* $\ddagger\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}^2$ sive Elementum Ellipseos erit: $\ddagger\frac{1}{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}$ *(2)* pro *L*

1 $2+\frac{2r}{s}$: Richtig wäre $\frac{1}{2}+\frac{r}{2s}$. In der folgenden Gleichung multipliziert Leibniz in den Nennern der Brüche mit a^2 bzw. r^2 statt zu dividieren.

Erit ergo $\delta \sqcap \ddagger 1$. adeoque $x \sqcap (\ddagger)y \ddagger q$, fietque $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap \ddagger aq \ddagger \frac{a}{q}y^2$. Adeoque erit $z \sqcap \sqrt{\frac{1}{\ddagger\frac{a}{q}} + \frac{aq}{\ddagger q^2 \ddagger y^2}}$. Quod si jam $q \sqcap a$ et $\ddagger 1 \sqcap -1$ ut in Circulo, erit $z \sqcap \sqrt{\frac{a^2}{a^2-y^2}} \sqcap \sqrt{1+\frac{y^2}{a^2-y^2}}$. Eodem modo $\frac{aq}{+q^2-y^2} \sqcap \frac{a}{q} + \frac{\frac{a}{q}y^2}{q^2-y^2}$. Multiplicetur $\sqrt{1+\frac{y^2}{b^2-y^2}}$ elementum curvae circuli per $\sqrt{\frac{d}{e}}$ fiet $\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{\frac{d}{e}y^2}{b^2-y^2}}$. Ordinata quae fiet erit ad aliam figuram proportionalem Elementis curvae Circuli.

Rursus pro y ponatur $\frac{f}{a}\varphi$. fiet: $\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{\frac{df}{ae}y^2}{b^2-\frac{f^2}{a^2}\varphi^2}}$ sive $\sqrt{\frac{d}{e}+\frac{\frac{da}{fe}y^2}{\frac{b^2a^2}{f^2}-y^2}}$. Quarum ordinatarum habentur summae.

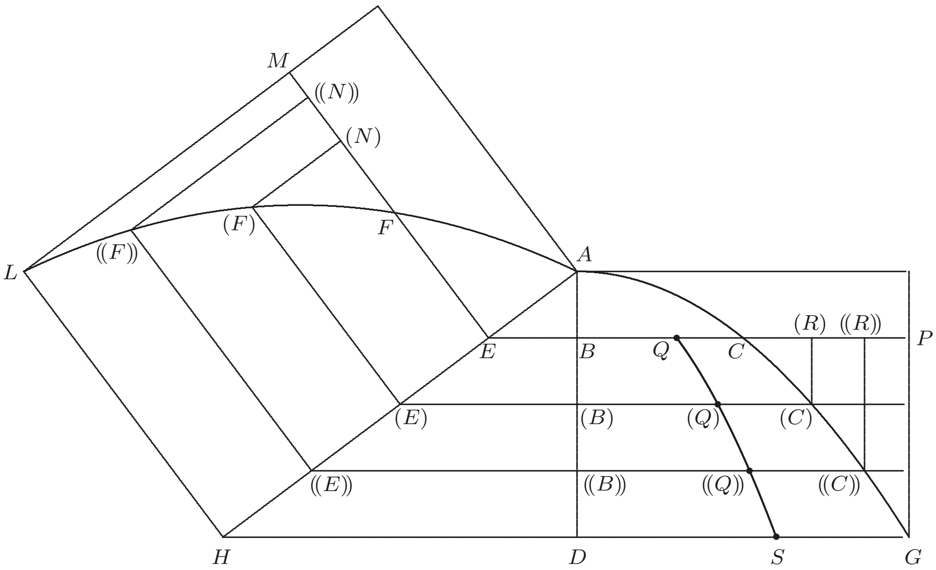
Sed haec ut demonstrentur sit theorema:

Theorema.

Si spatium comprehensum sit axe BD duabus ordinatis BC, DG et curva qualibet $C(C)G$ et axem si opus est productum alicubi secet in A alia recta AH, producanturque si opus ordinatae $CB, (C)(B)$, etc. GD dum ipsi AH occurrant in punctis $E, (E)$ etc. H et ex punctis $E, (E), H$ applicatae $EF, (E)(F)$ etc. HL ipsis $BC, (B)(C)$, DG aequales, ad rectam AH. velut axem ordinentur, et curva $F(F)L$ per earum extrema ducatur, erit spatium ipsa EH velut axe, duabus ordinatis extremis EF, HL, et curva $F(F)L$ comprehensum; ad spatium prius $CBDG(C)C$ ut est recta AE ad rectam AB.

4 $\sqrt{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}+\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}}\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2-\mathrm{y}^2}}$. *(1)* Prodibit a *(2)* qvod fiet ad aliam curvam Ellip *(3)* fiet *(4)* ordinata *L*
10 comprehensum *(1)* rectis B((B)) | BC, ((B))((C)) *erg.* | Curva C(C)((C)) *(2)* sit *L* 15 f. curva | EF(F)L *ändert Hrsg.* | comprehensum *L* 16–276,2 AB. *(1)* qvod ita demonstro *(2)* Sive *L*

6 fiet: Leibniz führt die Ersetzung von y durch $\frac{f}{a}\varphi$ nur teilweise und fehlerhaft durch.



[*Fig. 3*]

Sive quod idem est, si iisdem positis duarum figurarum ordinatis, abscissae sint proportionales, erunt figurae in ratione abscissarum.

Compleantur rectangula $EHLM$ et $BDGP$. quae erunt etiam in ratione abscissarum EH, BD, sive $E(E), B(B)$. Quod si jam ostendam duorum spatiorum complementa ad sua rectangula circumscripta, esse his duobus rectangulis, sive quod idem est abscissis inter se respondentibus proportionalia, sive esse $FMLF$ ad $CPGC$, ut rectang. EL ad rectang. BG, sive ut recta EH ad BD. sequitur ipsa spatia eodem modo se habere. Quod dixi de complementis sic ostendo: Ex punctis (C). $((C))$ etc. demittantur in CP. ordinatae $(C)(R)$ $((C))((R))$ etc. et ex punctis $(F)((F))$ etc. in FM, ordinatae $(F)(N)$ $((F))((N))$ etc.

3 f. abscissarum. *(1)* Compleatur rectangulum *(2)* Compleantur rectangula *(a)* AHLN et ADGP *(b)* EHLM et BDGP. *(aa)* Et complementa duorum spatiorum Qvadrilineorum erunt *(aaa)* qvinqve-lineis qvinqve *(bbb)* qvinqve-linea qvinqve rectis et una curva comprehensa, FEANLE, CBHPGC, ipsorum spatiorum complementa ad rectangula. *(bb)* qvae *L* 5 ostendam *(1)* spatiorum ipsorum complementa ad rectangula circumscripta, esse rectangulis sive *(2)* duorum *L*

1 *Fig. 3*: Leibniz hatte ursprünglich die unbezeichneten Eckpunkte der durch AH und HL bzw. durch AD und DG aufgespannten Rechtecke mit N bzw. P bezeichnet; vgl. die Stufe *(2)* der Variante zu Z. 3 f.

Patet abscissis $B(R)$ et $E(N)$ (: id est $(B)(C)$ et $(E)(F)$:) semper existentibus aequalibus ordinatas $(C)(R)$ ad $(F)(N)$ esse in ratione abscissarum (quippe illis aequalium) $B(B)$ ad $E(E)$ id est ut BD ad EH. sive ut rectangulum BG ad EL. At spatia quorum abscissae eaedem, ordinatae autem proportionales, sunt in ratione ordinatarum ut constat. Ergo complementa $CPGC, FMLF$, adeoque et spatia ipsa $CBDGC$, $FEHLF$ rectangulis BG, EL, id est suis abscissis $B(B), E(E)$ proportionalia sunt.

Hinc sequitur Corollarium: Si figurarum duarum pariter et abscissae abscissis, et ordinatae ordinatis sint proportionales erunt figurae in ratione composita ordinatarum et abscissarum. Ut si in ipsis $BC, (B)(C)$ etc. usque ad DG sumantur puncta $Q. (Q)$ etc. usque ad S. ita ut sint BQ ad BC, ut $(B)(Q)$ ad $(B)(C)$ usque ad DS ad DG perpetuo, erit spatium $QBDSQ$ ad spatium $FEHLF$, in composita ratione DS ad HL et BD ad EH. id est erunt duo spatia, ut rectangula circumscripta BDS, EHL.

Hinc si jam ponamus $BQ. (B)(Q)$ etc. $\sqcap$ z repraesentare elementa curvae Circuli, et esse $z \sqcap \sqrt{1+\dfrac{y^2}{b^2-y^2}}$ multiplicetur z per $\sqrt{\dfrac{c}{a}}$: id est fiat alia ψ. quae sit ad z, ut $\sqrt{c}$ est ad $\sqrt{a}$, quae ponatur esse ratio DG ad DS[,] erit BC, vel $(B)(C)$ etc. sive $\psi \sqcap \sqrt{\dfrac{c}{a}+\dfrac{\frac{c}{a}y^2}{b^2-y^2}}$. ponendo scilicet $B(B), B((B))$, etc. esse y.

Jam si eaedem rectae ψ sive $BC, (B)(C), ((B))((C))$ etc. transferantur in EF, $(E)(F), ((E))((F))$ etc. et applicentur ad abscissas $E(E), E((E))$ etc. ipsis $B(B), B((B))$ etc. sive ipsis y proportionales, et rationem earum sive EH ad BD, esse ut d ad a; tunc appellando $E(E), \omega$, erit $\omega \sqcap \dfrac{d}{a}y$. et vicissim $y \sqcap \dfrac{a\omega}{d}$. Ut ergo ipsarum EF sive $(E)(F)$ etc., sive ψ. relationem habeamus ad ipsas $E(E), E((E))$ sive ω, hinc pro y in valore ipsius ψ, substituendo ejus valorem inventum, $\dfrac{a\omega}{d}$. fiet:

$$\psi \sqcap \sqrt{\frac{c}{a}+\frac{\frac{ca}{d^2}\omega^2}{b^2-\frac{a^2}{d^2}\omega^2}}.\ \text{sive}\ \psi \sqcap \sqrt{\frac{c}{a}+\frac{\frac{c}{a}\omega^2}{\frac{b^2d^2}{a^2}-\omega^2}}.$$

1 Patet *(1)* ordinatis E(N), E((N)) ita et *(2)* abscissis *L* 2 ratione *(1)* rectangulorum *(2)* abscissarum *L* 17 f. transferantur *(1)* ad abscissas *(2)* in EF, | (E)(F), ((E))((F)) *erg.* | etc. *(a)* ad *(b)* et *L*

Sed ex Ellipticae curvae Elementis fiet: $\sqrt{1+\dfrac{\frac{a}{q}\omega^2}{q^2-\omega^2}}$. Quae duo video comparari non posse nisi sit $a \sqcap q$. Nondum ergo quicquam pro dimensione Curvae Ellipseos actum est.

Datur ergo summa harum $z \sqcap \sqrt{1+\dfrac{\omega^2}{e^2-\omega^2}}$ (ponendo $\dfrac{bd}{a} \sqcap e$). At nondum habemus summam harum: $\varphi \sqcap \sqrt{1+\dfrac{\frac{a}{q}\omega^2}{q^2-\omega^2}}$. Habemus talium ordinatarum φ. momentum seu quadrata ex data Hyperbolae quadratura, seu summam omnium: $1+\dfrac{\frac{a}{q}\omega^2}{q^2-\omega^2} \sqcap \varphi^2$. Hoc amplius si reducamus valorem ad aequationem $q^2 \begin{array}{l}-\\+\frac{a}{q}\end{array} \begin{array}{l}\omega^2\\ ..\end{array} \sqcap q^2\varphi^2 - \omega^2\varphi^2$. fiet $\omega^2 \sqcap \dfrac{+q^2\varphi^2-q^2}{+\frac{a}{q}-1+\varphi^2}$ quorum summa, adeoque aliud figurae curvae Ellipticae homogeneae momentum datur ex Circuli quadratura si $\dfrac{a}{q} \sqcap 1$. ex Hyperbolae quadratura si $\dfrac{a}{q} \sqcap 1$. et $\omega \sqcap q\sqrt{\dfrac{\varphi^2-1}{\varphi^2-1,+\frac{a}{q}}}$ sive $\omega \sqcap q\sqrt{1-\dfrac{1}{\varphi^2-1,+\frac{a}{q}}}$, sive $\omega \sqcap q\sqrt{+1+\dfrac{1}{\underbrace{1-\frac{a}{q},-\varphi^2}}}$.

3 ergo *(1)* dimensio spatii: *(2)* summa *L* 4 summam | horum *ändert Hrsg.* |: *(1)* z *(2)* φ *L* 5 data *(1)* Circuli *(2)* Hyperbolae *L* 9–279,1 $\omega \sqcap \mathrm{q}\sqrt{+1+\dfrac{1}{\underbrace{1-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}},-\varphi^2}}}$ *(1)* Qvi forma | ipsarum ω *gestr.* |, cum forma ipsarum *(2)* qvae alia est form *(3)* Si faciamus $\varphi \sqcap \mathrm{w}+\sqrt{\begin{array}{l}+1\\-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\end{array}}$ fiet aeqvatio: $\boxed{\mathrm{q}^2}\ \boxed{\begin{array}{l}-\\+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\end{array}\begin{array}{l}\omega^2\\ ..\end{array}} \sqcap \mathrm{q}^2\mathrm{w}^2 + \begin{array}{c}2\mathrm{q}\\ \sqrt{\begin{array}{l}1\\-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\end{array}}\end{array}\mathrm{w}\ \boxed{+\mathrm{q}^2}, -\omega^2\mathrm{w}^2 - 2\omega^2\mathrm{w}\ \boxed{\begin{array}{l}-\\+\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\end{array}\begin{array}{l}\omega^2\\ ..\end{array}}$ *(4)* Operae *L*

9 sive ω: Leibniz vergisst bei der folgenden Umformung den Faktor $\frac{a}{q}$ im Zähler des Bruches unter der Wurzel. Dieser und weitere Fehler beeinträchtigen die Überlegung bis S. 279 Z. 7.

Operae pretium est figurae Curvae Ellipticae homogeneae invenire tangentem.

$\frac{\cancel{2}a}{q}\omega l + \cancel{2}\varphi^2\omega l \sqcap \cancel{2}q^2\varphi^2 - \cancel{2}\omega^2\varphi^2$. Pro ω^2 ponatur ejus valor $\frac{q^2\varphi^2-q^2}{+\frac{a}{q}-1+\varphi^2}$.
$-\cancel{2}$

$$l \sqcap \frac{2q^2\varphi^2}{\frac{a}{q}-1+\varphi^2} + \varphi^2\sqrt{1+\frac{1}{1-\frac{a}{q}-\varphi^2}},\ \text{sive}\ l \sqcap \frac{2\varphi^2q^2+q\varphi^2\sqrt{\begin{array}{l}\varphi^4-2\,\varphi^2+1\\ \quad+\frac{a}{q}\,..\,-\frac{a}{q}\end{array}}}{\varphi^2-1+\frac{a}{q}}.$$

Nam et ω ita enuntiari potest optime: $\omega \sqcap q\sqrt{\begin{array}{l}\varphi^4-2\,\varphi^2+1\\ \quad+\frac{a}{q}\,..\,-\frac{a}{q}\end{array}} \smile \begin{array}{l}\varphi^2-1.\\ +\frac{a}{q}\end{array}$ Quod si jam sit $1 \sqcap \frac{a}{q}$ erit $\begin{array}{l}\varphi^2-1\\ +\frac{a}{q}\end{array} \sqcap \varphi+\sqrt{1-\frac{a}{q}}, \frown\ \varphi-\sqrt{1-\frac{a}{q}}$. Adeoque si harum $\sqrt{\begin{array}{l}\varphi^4-2\,\varphi^2+1\\ \quad+\frac{a}{q}\,..\,-\frac{a}{q}\end{array}} \smile \varphi+\sqrt{\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{q}\end{array}}$ ut et ipsarum $\sqrt{\begin{array}{l}\varphi^4-2\,\varphi^2+1\\ \quad+\frac{a}{q}\,..\,-\frac{a}{q}\end{array}} \smile \varphi-\sqrt{\begin{array}{r}1\\ -\frac{a}{q}\end{array}}$ summa haberi posset, haberetur et summa ipsarum ω. Item ex data summa ipsarum ω dabitur et summa ipsarum l. et contra.

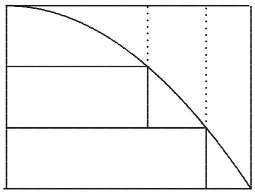
Si Progressionis cujusdam termini multiplicentur in numeros ordinales (NB. abscissas possemus generaliter vocare ordinales, scilicet numerum repraesentant, quotus scilicet sit terminus seriei) fiet progressio sygnotos progressioni summatrici.

$a\omega x \sqcap$ omn. $\overline{a\,\text{omn.}\,\omega} + ba^2 \sqcap za^2$. Ergo $\frac{za^2}{x} \sqcap \omega a$ et pro ω. [*bricht ab*]

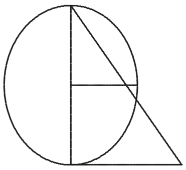
12 *Dazu:* Vide alibi in *Analysi tetragonistica*.

9 qvibusdam *L ändert Hrsg.* 11 fiet *(1)* summa commensurabilis figurae summatricis *(2)* figura *(3)* progressio *L* 12 $\sqcap$ ωa *(1)* et *(a)* $\overline{\text{omn a}}$ *(b)* za^2 $\sqcap$ omn $\overline{\text{omn}\frac{\text{za}}{\text{x}}}$ + ba^2: *(2)* et *L*

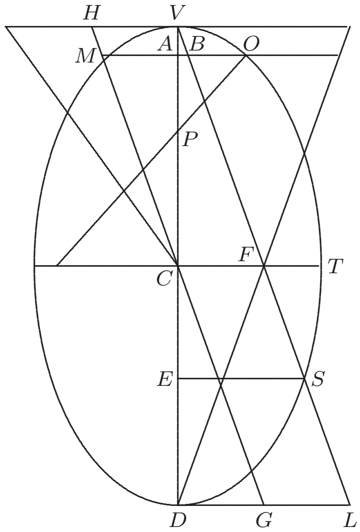
13 alibi: s. N. 38 S. 268 Z. 14–17.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]



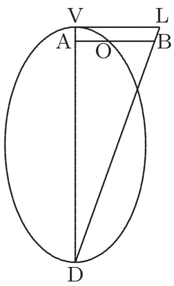
[*Fig. 6*]

In Ellipsi, sit axis, sive Directrix VD. vertex V. Abscissa VA. ordinata ad punctum in curva O, sit AO. Applicetur vertici opposito D. recta $DL \sqcap 2a$ sive aequalis parametro, seu rectae cuidam certae, et jungatur VL. quae ipsi AO productae si opus est occurrat in B. Constat esse rectangulum DAB, aequale quadrato AO. Sit $VA \sqcap x$. et $VD \sqcap 2q$. erit $\dfrac{VA \sqcap x}{VD \sqcap 2q} \sqcap \dfrac{AB}{2a}$. et $AB \sqcap \dfrac{ax}{q}$ et $\square\ DAB \sqcap 2q - x, \frown \dfrac{ax}{q} \sqcap 2ax - \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. posito $AO \sqcap y$. Sin DA vocetur $\sqcap z$. erit $x \sqcap 2q - z$. et substituendo pro x. ejus valorem, fiet:

$$4aq\ \ -2az\ \ -4aq\ + 2\,4\,az - \frac{a}{q}z^2 \sqcap y^2$$

eadem aequatio quae ante. Ergo duos habet valores x, nempe VA, et DA. Sed hoc

4 AO. *(1)* Applicetur vertici normaliter ad axem, latus rectum VL. et jungatur | VL *gestr.* | qvae ipsi AO, productae si opus est occurrat in puncto B



(2) Applicetur *L*

obiter, (+ Unde in exacta characteristica Geometrica deberent etiam designari punctis communibus. +) Sin pro x, substituas $q-\omega$ ponendo $CA \sqcap \omega$ fiet:

$$y^2 \sqcap 2\, aq\ \boxed{-2a\omega},\ \boxed{-\frac{a}{q}q^2}\ \boxed{+\frac{2a}{q}q\omega}\ -\frac{a}{q}\omega^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}\omega^2.$$

Caeterum ut obiter dicam ipsa ES. qua VL secat curvam, cum sit determinata, certam quandam naturam habere debet, quam cum exhibeat determinatum in curva punctum S, in axe E, investigare operae erit S. Est autem $\dfrac{VE}{\cancel{2}q} \sqcap \dfrac{ES}{\cancel{2}a}$. Ergo $\dfrac{VE}{ES} \sqcap \dfrac{q}{a}$. Porro $DE \frown ES \sqcap ES^2$. ex natura Ellipseos. Ergo $DE \sqcap ES$. Et haec est abscissa aequalis ordinatae sive $2ax - \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap x^2$. Erit $2a - \dfrac{a}{q}x \sqcap x$, sive $x \sqcap \dfrac{2a}{1+\dfrac{a}{q}} \sqcap y$. Quae usui sine dubio in Conicis futura est.

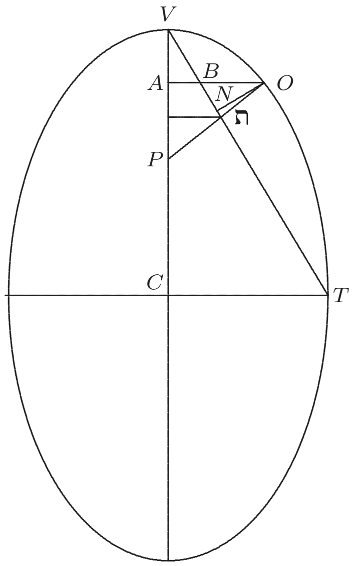
Nunc ipsam CT, velut transversum axem investigemus quem VL secat in F. Erit $CF \sqcap a$. et $CDF \sqcap CT^2$, sive $aq \sqcap CT^2$. Ergo $CT \sqcap \sqrt{aq}$. Sit jam PO. perpendicularis ad curvam, cui occurrit in O. et axi in P. Ducatur GCH. ipsi VL parallela ipsi AO. productae si opus, occurrens in M, erit (vid. Schoten. pag. 245. *Com.*) $AM \sqcap AP$. Est autem $\dfrac{AM}{DG \sqcap a} \sqcap \dfrac{q-x}{q}$. fiet: $AM \sqcap a - \dfrac{a}{q}x$. et $PO^2 \sqcap a^2 - \dfrac{2a^2}{q}x + \dfrac{a^2}{q^2}x^2 + 2ax - \dfrac{a}{q}x^2$. Et faciendo: $x \sqcap v+e$. fiet

$$\begin{array}{llll}
+\ a^2 & -\dfrac{2a^2}{q} & v + \dfrac{a^2}{q^2}\, v^2 \sqcap PO^2. \\[2ex]
-\dfrac{2a^2}{q}\, e & +\, 2a & v - \dfrac{a}{q}\ \ .. \\[2ex]
+\, 2a\ \ e & \left.\begin{array}{l} +\dfrac{a^2}{q^2} \\[2ex] -\dfrac{a}{q} \end{array}\right\}\, 2\, e\, v & \\[2ex]
\left.\begin{array}{l} +\dfrac{a^2}{q^2} \\[2ex] -\dfrac{a}{q} \end{array}\right\} e^2 & &
\end{array}$$

12 GHC. *L ändert Hrsg.*

13 vid.: Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659 [Marg.], *DGS* I S. 245.

Pone $e \sqcap \dfrac{\frac{a}{q}+1}{\frac{1}{q}-\frac{a}{q^2}}$, sive $\dfrac{aq+q^2}{q-a} \sqcap \dfrac{q+a}{q-a}\,q$. Apparebit aequatio ipsarum PO naturam explicans et apparebit si q sit major quam a, aequationem ipsarum PO, axi ordinatim applicatarum fore ad Ellipsin; sin minus ad Hyperbolam, adeoque superficies sphaeroeidis oblongi pendet a quadratura Ellipsis, superficies sphaeroeidis lati a quadratura Hyperbolae. Quae jam et ab Hugenio inventa sunt.



[*Fig. 7*]

Videamus jam an adhuc aliud curvae Ellipticae momentum ex alia quadam recta determinata habere liceat. Jungatur VT. et ex puncto in curva O. ducatur in VT. ordinata NO.

1 $\sqcap \dfrac{\mathrm{q+a}}{\mathrm{q-a}}$ a *L ändert Hrsg.* 3 f. sphaeroeidis *(1)* lati *(2)* oblongi *L* 4 qvadratura *(1)* Hyperbolae superficies sphaeroeidis lati a qvadratura Elli *(2)* Ellipsis *L*

5 inventa: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 74 f. (*HO* XVIII S. 212–215). In seinem Handexemplar hat Leibniz zur Figur auf S. 74 eine Strecke in Blindtechnik hinzugefügt; vgl. VII, 4 N. 2 S. 43.

Sit $VA \sqcap x$. $AO \sqcap \sqrt{2ax - \frac{a}{q}x^2} \sqcap y$. ut ante. $VN \sqcap z$. $NO \sqcap \omega$. Ante omnia $\frac{VA \sqcap x}{AB} \sqcap \frac{q \sqcap VC}{\sqrt{aq} \sqcap CT}$. Ergo $AB \sqcap \frac{x\sqrt{aq}}{q}$. et $BO \sqcap y - \frac{x\sqrt{aq}}{q}$ et $VB \sqcap \sqrt{x^2 + \frac{x^2aq}{q^2}} \sqcap x\sqrt{1+\frac{a}{q}}$. et $BN \sqcap z - x\sqrt{1+\frac{a}{q}}$ et $NO^2 \sqcap \omega^2 \sqcap y^2 - 2yx\frac{\sqrt{aq}}{q}\boxed{+x^2\frac{a}{q}} - z^2 - x^2\boxed{-x^2\frac{a}{q}}$ $-2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$.

Rursus $\frac{VB}{VA \sqcap x} \sqcap \frac{\sqrt{1+\frac{a}{q}}}{1} \sqcap \frac{y - \frac{x\sqrt{aq}}{q}}{z - x\sqrt{+1+\frac{a}{q}}}$ et erit $y - \frac{x\sqrt{aq}}{q} \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - x\overline{1+\frac{a}{q}}$ sive $yq \sqcap qz\sqrt{1+\frac{a}{q}} - qx$ et $x \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - y$ et $y \sqcap z\sqrt{1+\frac{a}{q}} - x$. Unde in aeq. superiore, explicando y. fiet

$$2ax - \frac{a}{q}x^2, \llcorner - 2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}, \frac{\sqrt{aq}}{q}\lrcorner + \frac{2x^2\sqrt{aq}}{q}, -z^2 - x^2 - 2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \sqcap \omega^2.$$

Rursus quia $y^2 \sqcap z^2 + z^2\frac{a}{q}, +x^2, -2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$ fiet

$$z^2 + x^2 - 2ax + \frac{a}{q}x^2 \sqcap -z^2\frac{a}{q} + 4\,2\,zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \quad \sqcap$$

$$-\frac{2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}} \frown \sqrt{aq}}{q} - \omega^2 \boxed{-2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}} + \frac{2x^2\sqrt{aq}}{q}$$

1 $\sqcap$ x | $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | AO *L*   2 $\frac{q \sqcap AC}{\sqrt{aq} \sqcap CT}$ *L ändert Hrsg.*   6 $-$x *(1)* sive x ad q, ut *(2)* Qvem valorem inserendo in aeqvatione ω^2, fiet: $y^2 - 2yz\frac{\sqrt{aq}}{q} \frown \sqrt{1+\frac{a}{q}} + 2y^2 - z^2\llcorner - z^2\overline{1+\frac{a}{q}}\lrcorner + 2zy\sqrt{1+\frac{a}{q}}$ $-\,y^2$ *(3)* Unde *L*

4 $-2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$: Richtig wäre $+2zx\sqrt{1+\frac{a}{q}}$. Dieser und weitere Fehler führen zu einem falschen Ergebnis für z in S. 284 Z. 1, beeinträchtigen aber nicht die Überlegung.

sed his non est opus. Sufficit habere nos $\dfrac{y+x}{\sqrt{1+\dfrac{a}{q}}} \sqcap z$. Unde ut obiter dicam, sequitur omnes z. semper haberi posse. Caeterum rectius videmur factare si generaliter calculemus:

Aequatio est $y^2 \sqcap 2ax - \dfrac{a}{q}x^2$. sive $y^2 \sqcap aq - \dfrac{a}{q}v^2$, (et s^2 seu quad. a perpendiculari $\sqcap a^2 \begin{array}{l}+\,1\\ -\,\frac{a}{q}\,..\end{array} y^2 \sqcap \boxed{a^2} + aq - \dfrac{a}{q}v^2, \boxed{-a^2} + \dfrac{a^2}{q^2}v^2$. sive $s^2 \sqcap aq \begin{array}{l}+\,1\\ -\,\frac{a}{q}\end{array} \frown \dfrac{a}{q}v^2$). In aeq. $y^2 \sqcap aq - \dfrac{a}{q}v^2$. pro y ponatur $\dfrac{e^2+ez-b\omega}{\sqrt{e^2+b^2} \sqcap d}$. et pro v fiat $\dfrac{\left\{\begin{array}{l}+\,eb\\ -\,c\sqrt{e^2+b^2}\end{array}\right. +bz+a\omega}{\sqrt{e^2+b^2}}$. Per compendium $\sqrt{e^2+b^2}$ vocetur d. et $eb-cd$ vocetur f. et valoribus pro y et v substitutis, fiet:

$$\begin{array}{l} e^4+2e^3z-2e^2b\omega, +e^2z^2-2ebz\omega+b^2\omega^2 \qquad \sqcap \\ d^2aq, -\dfrac{a^3f^2}{q}-\dfrac{2a^2fbz}{q}-\dfrac{2a^3f\omega}{q}-\dfrac{b^2az^2}{q}-\dfrac{2ba^2\omega z}{q}-a^3\omega^2, \end{array}$$

sive

$$\left.\begin{array}{llllllllllll} +\,e^2 & z^2 & +\,b^2 & \omega^2 & -\,2eb & z\omega & +\,2e^3 & z & -\,2e^2b & \omega & +\,e^4 \\ +\,\dfrac{b^2a}{q} & .. & +\,\dfrac{a^3}{q} & .. & +\,\dfrac{2a^2b}{q} & .. & +\,\dfrac{2a^2fb}{q} & . & +\,\dfrac{2a^3f}{q} & . & -\,d^2aq \\ & & & & & & & & & & +\,\dfrac{a^3f^2}{q} \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quae est aequatio ad Ellipsin aut si q. quantitas negativa sit, Hyperbolam, quam maxime variata. Compendii causa scribamus

$$gz^2+h\omega^2+lz\omega+mz+n\omega+p \sqcap 0.$$

quam ad tangentes ordinando, scribemus

$$2gzt+l\omega t+mt \sqcap -2h\omega^2-lz\omega-n\omega.$$

2 factari *L ändert Hrsg.* 3 est *(1)* $y^2 \sqcap aq - \frac{a}{q}v^2$. pone y $\sqcap$ *(2)* $y^2 \sqcap 2ax - \frac{a}{q}x^2$. *(a)* Et perpendicularis $s^2 \sqcap a^2$ *(b)* sive *L*

4 sive $s^2 \sqcap$: Richtig wäre $s^2 = aq-(1-\frac{a}{q})\frac{a}{q}v^2$. 5 ponatur: Leibniz unterlaufen bei der folgenden Koordinatentransformation, bei der er schematisch die Formeln aus Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 177 f. [Marg.], anzuwenden versucht, mehrere Fehler. Die weitere Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

Porro $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \pi$. et $\frac{\omega^4}{t^2} + \omega^2 \sqcap s^2$. fiet $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1} \sqcap s$. Jam ergo literas arbitrarias nempe $e.\,b.\,c.$ ita explicare tentemus, ut omnium s. per z. explicatarum haberi possit summa. Sic enim novum curvae vel Ellipticae vel Hyperbolicae momentum habebitur. Est autem $t \sqcap \frac{-2h\omega^2 - lz\omega - n\omega}{2gz + l\omega + m}$. Ergo erit $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \frac{2gz\omega + l\omega^2 + m\omega}{-2h\omega - lz - n}$. Porro

$$\omega^2 \sqcap \frac{-gz^2 - lz\omega - mz - n\omega - p}{g} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{2gz\omega + l\omega^2 + m\omega}{-2h\omega - lz - n}+1}}.$$

Ponamus $-gz - l\omega - m \sqcap \psi$. per brachylogiam, et fiet:

$$\frac{-\psi z - n\omega - p}{g} \sqcap \frac{s}{\sqrt{\frac{gz\omega + \psi\omega}{-2h\omega - lz - n}+1}}.$$

$$\begin{array}{ccccccccccc} \omega^2 & + \frac{lz}{g}\,\omega & + \frac{l^2z^2}{4g^2} & \sqcap & + \frac{l^2}{4g^2}\,z^2 & + \frac{1}{2}\,\frac{ln}{g^2}\,z & + \frac{n^2}{4g^2} \\ & + \frac{n}{g} & + \frac{2lzn}{4g^2} & & -\ 1\ \ ..\ - & \frac{m}{g}\ .\ - & \frac{p}{g} \\ & & + \frac{n^2}{4g^2} & & & & \end{array}$$

et $\omega \sqcap \dfrac{\begin{array}{c}-lz\\-n\end{array} + \sqrt{\begin{array}{ccc} \frac{l^2}{-4g^2}\ z^2 & +\frac{2ln}{-4mg}\ z & +\frac{n^2}{-4pg}\end{array}}}{2g}$ sed calculus paulo prolixior.

---

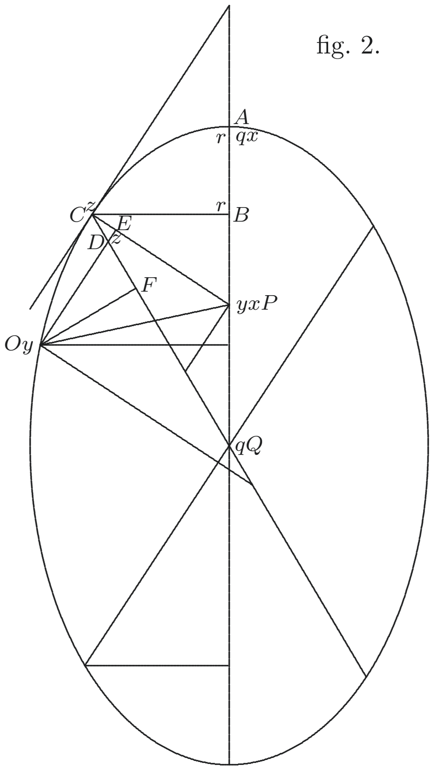
1 *Daneben, durch Strich mit S.* 287 *Z.* 7 *f. verbunden:* ++

---

1 $\frac{\omega^2}{t} \sqcap \pi$: In der Vorlage steht der Buchstabe p sowohl für den konstanten Term des Polynoms wie für die Subnormale. Zur besseren Unterscheidung wird die Bezeichnung der letzteren zu π geändert.

1 $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}$: Richtig wäre $\omega\sqrt{\frac{\omega^2}{t^2}+1}$. Leibniz rechnet anfangs mit $\omega^2\sqrt{\frac{\omega^2}{t}+1}$; in S. 287 Z. 7 f. erkennt er den Fehler nur teilweise und verbessert punktuell $\frac{\omega^2}{t}$ in $\frac{\omega^2}{t^2}$. Das Versehen, zu dem weitere hinzukommen, beeinträchtigt die folgenden Rechnungen.

Vide sec. fig. hic.



[*Fig. 8*]

Sit punctum in curva C[,] inde ordinata CB, vertex Ellipseos A, abscissa Axis $AB \sqcap r$. Erit $BP \sqcap a - \dfrac{a}{q}r$. $CB \sqcap \sqrt{2ar - \dfrac{a}{q}r^2}$. Ipsa CQ. semidiameter sit

$$c \sqcap \sqrt{q^2 - 2qr + r^2 + 2ar - \frac{a}{q}r^2}.$$

4 CQ. *(1)* diameter *(2)* semidiameter *L*

2 *Fig. 8*: Eine gestrichene Vorstufe der Figur wird nicht wiedergegeben.

Ex sumto in curva puncto O. ducatur ad diametrum CQ. ordinata (tangenti parallela) OD et posita $CD \sqcap z$ et $2b$. latere recto respondente diametro $2q$. fiet $OD \sqcap \sqrt{2bz - \frac{b}{q}z^2}$. Producatur usque in E, ubi perpendiculari CP. occurrat, patet triangula etc. Sed haec quoque puto inutilia.

Si in calculo superiore essent l. et $n \sqcap 0$: foret $\frac{\omega^2}{t} \sqcap 2gz + m$. et $\omega^2 \sqcap -z^2 \frac{-mz - p}{g}$ et $s \sqcap \sqrt{2gz + m + 1}, \frac{-z^2 - mz - p}{g}$.

Error in praecedentibus inde a signo quod scripseram $\frac{\omega^2}{t} + 1$, cum debeat scribi $\frac{\omega^2}{t^2} + 1$. Est autem $t^2 \sqcap \omega^2 \boxed{2} \overline{\frac{-2h - lz - n}{2gz + l\omega + m}}$. Ergo $\llcorner\llcorner \frac{\omega^2}{t^2} \sqcap \llcorner\llcorner\llcorner \boxed{2} \frac{2gz + l\omega + m}{-2h - lz - n} \lrcorner\lrcorner + 1 \lrcorner\lrcorner\lrcorner \surd \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \sqcap s$. Unde ponendo $l \sqcap 0$ fieret $\frac{2gz + m}{-2h - n} \sqcap \sqrt{s^2 - 1}$. Quae est aequatio ad Hyperbolam, quod si ergo fieri potest $l \sqcap 0$ et nullus est error in calculo, haberemus momentum quoddam curvae Conicae ex quad. hyperbolae. Ut autem sit $l \sqcap 0$. fiet $e \sqcap \frac{a^2}{q}$.

---

8 $t^2 \sqcap$: Der erste Term im Zähler des Bruches der rechten Seite müsste $-2h\omega$ lauten; weitere Fehler in den folgenden Rechnungen beeinträchtigen das Ergebnis.

40. ANALYSEOS TETRAGONISTICAE PARS SECUNDA
29. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 18 Bl. 2. 1 Bl. 2°. 1 3/4 S. Anstreichungen unbekannter Hand mit Rotstift in Höhe von S. 290 Z. 11 und S. 294 Z. 1. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Brief*, 1851, S. 348–354; 2. Gerhardt, *Analysis*, 1855, S. 121–127; 3. *LBG*, 1899, S. 151 bis 156; 4. (engl. Übers. von 2.) Child, *Early mathematical manuscripts*, 1920, S. 76–83. Cc 2, Nr. 1092

29. Octob. 1675

A n a l y s e o s T e t r a g o n i s t i c a e p a r s 2[da].

Credo nos tandem dare posse methodum, qua cujuslibet figurae Analyticae figura analytica quadratrix inveniri potest, quando id possibile, aut quando id fieri non potest, poterit tamen semper figura describi analytica, fungens vice quadratricis, quam proxime. Hoc ita concipio. Proposita sit aequatio figurae cujus incognitae x. et v[,] cujus quaeritur quadratrix. Sumatur aequatio ad curvam indeterminatam: $0 \overset{(1)}{\sqcap} b + cx + dy + ex^2 + fy^2 + gyx + hy^3 + lx^3 + myxy + yxx$ etc. Ordinetur ad tangentes, hoc modo: $-dy - 2fy^2 - gyx - 3hy^3 - 2mxy^2 - x^2y$ etc. $\overset{(2)}{\sqcap}$ $ct + 2ext + gyt + 3lx^2t + my^2t + 2yxt$ etc. Jam $\dfrac{t}{y} \overset{(3)}{\sqcap} \dfrac{a}{v}$. Ergo ex aequatione $\dfrac{t}{y} \sqcap \dfrac{a}{v}$. tollendo ipsas t et y. ope aequationum 1. et 2. debet prodire aequatio illa ipsa, quae est figurae curvilineae ad quadrandum propositae. Et conferendo terminos productae terminis datae, si nulla est in conferendo impossibilitas, habemus quadraturam. Sin oritur impossibilitas, certum est figuram analyticam propositam non habere analyticam quadratricem. Facile autem apparebit, si quae ei addantur, quae eam insensibiliter immutent[,] posse inde figuram fieri quadrabilem, ob

9 *Daneben:* Refertur ad praecedentem 25. Octob. 1675.

8 29. Octob. 1675 *erg. L* 10 methodum, *(1)* qva qvaelibet figura Analytica qvadrari potest analytice, qvando id possibile est *(2)* qva *L* 18 est *(1)* curvae cuius *(2)* figurae *L* 20 f. figuram *(1)* unam per aliam qvadrari non posse. *(2)* analyticam *L*

23 praecedentem: N. 38.

aliam plane aequationem prodeuntem. Caeterum ut impossibilitas appareat, considerandae sunt difficultates.

Nimirum, obstat quod aequatio producta est prolixitatis infinitae; data autem definita. Respondeo eo ipso dum comparantur, videbitur quousque maximae potestates incognitarum indefinitae excurrere possint. Regeri potest, fieri posse; ut producta aequatio indefinita plures habet terminos quam finita data et tamen ad eam reduci possit, quod scilicet per aliam vel finitam vel indefinitam dividi possit. Haec difficultas me diu jam anno abhinc tenuit. Sed nunc video non debere nos ea deterreri. Nam nunc fieri potest, ut methodo tangentium ex figura quadam determinata (cujus aequatio sit indivisibilis per rationalem) oriatur figura ambigua, quia non potest ad unum punctum figura quaelibet nisi unam habere tangentem. Ergo aequatio producta neque per finitam dividi potest neque etiam per indefinitam[,] nam etiam figurae indefinitae revera, seu quarum ordinatae exprimuntur aequatione infinita habent ordinatas, easque aliquando finitas quae deberent satisfacere. Tametsi difficultatem adhuc exiguam praevideam, quod scilicet videatur fieri aliquando ut radices aequationum omnes non servant ad problematis solutionem. Ego tamen ut verum fatear, credo.

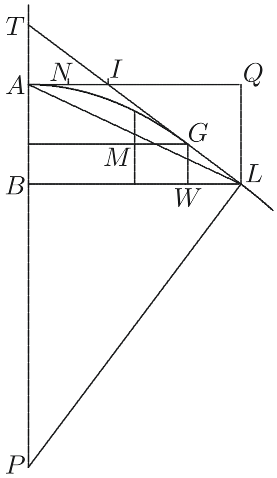
Alia est difficultas satis magna, quod scilicet fieri possit, ut aequatio finita exprimatur etiam per indefinitam, adeo ut aequatio producta coincidere possit cum data, etsi id non appareat, v. g. $y^2 \sqcap \dfrac{x}{1+x} \sqcap x - x^2 + x^3 - x^4 + x^5 - x^6$ etc. et ita infinitae aliae possunt formari variis compositionibus et divisionibus. Hic fateor difficilis nodus. Sed responderi sic potest: Si quam habet figura quadratricem analyticam, utique ipsa sub indefinita intelligi potest. Et tunc non dabit utique indefinitam sed finitam datae aequivalentem. Eodem modo certum est etiam quadratricem datae ordinarie tractatam si qua est, datam solam non ambiguam daturam. Adeoque et illa quae ab ea non nisi nomine differt.

Una superest difficultas[:] non videri judicari posse quis sit ultimus vel primus terminus productae indefinitae; quia potest fieri ut termini inferiores destruantur; et tunc ipsa sit divisibilis vel per y. vel per x. vel per yx. aut horum potestates. Et hoc non video quod prohibeat. Eademque manet difficultas sive a minimo sive maximo gradu incipias assumtam initio aequationem indefinitam. Pone ergo in aequatione producta

13 aeqvatione *(1)* indefinita *(2)* infinita *L* 20 f. nodus. *(1)* Crediderim tamen non posse evenire qvandocunqve *(2)* sed *L* 21 analyticam *(1)* debet utiqve prodire ordinario mo *(2)*, utiqve *L* 29 prohibeat. *(1)* Hoc tamen videtur regeri posse *(2)* Eademqve *L*

dividi posse[,] necesse est absit quantitas cognita, item absint omnes termini, ubi sola x. vel si mavis, omnes termini ubi sola abest y. quod si id examinando continue inciditur in impossibilitatem. In calculo hoc generali, tunc pro certo habere poterimus solutam esse hanc difficultatem nec unquam posse evenire talem divisionem post calculum. Sin fieri potest tunc alii post alios destruentur, ut deprimi possit aequatio producta, et instituenda comparatio. Et tunc videndum an non generaliter evinci possit, procedere non posse, comparationem, utcunque procedamus destruendo.

Forte si figurae quadrandae redigantur antea ad simplicissimas aequationes facilius detegentur impossibilitates. Nam et quadratrix praesumitur fore simplicior. Succurrit adhuc aliud auxilium, quod scilicet varii ad idem ducentes plane diversi inter se calculi institui possunt, quorum producti comparabiles.



[*Fig. 1*]

$BL \sqcap y$. $WL \sqcap l$. $BP \sqcap p$. $TB \sqcap t$. $AB \sqcap x$. $GW \sqcap a$. $y \sqcap$ omn. l.

Ut obiter dicam sunt numeri compositi qui sibi addi non possunt vel demi per partes nempe denominati a potestatibus seu sub potestatibus sive surdi. Sunt alii numeri denominati qui nec in se multiplicari possunt per partes: Et tales sunt numeri summarii v. g. omn. l. non possunt multiplicari in omn. p. nec enim fieret $y^3 \sqcap 2\,\overline{\text{omn. omn.}\,pl}$. Ut tamen multiplicatio illa fieri in rebus intelligatur; sic agendum: Volumus spatium quod reprae-

3 generari *L ändert Hrsg.* 8 figurae *(1)* qvadratri *(2)* qvadrandae *L* 13 f. omn. l. | $y^2 \sqcap 2\,\overline{\text{omn p}}$ *gestr.* | |(+ *streicht Hrsg.* | Ut *L* 14 compositi *erg. L* 15 f. denominati *erg. L*

sentet omnes p. in omnes l. Non poterunt servire ductus Gregorii a S. Vincentio qui figurae in figuras dicuntur, sic enim non ducitur una ordinata in alias omnes; sed una ordinata in unam. At inquies si una ordinata ducenda in alias omnes, prodibit spatium sursolidum. Summa nimirum infinitorum solidorum. Huic malo remedium reperi sane admirabile. Repraesententur omnes l, per lineam infinite parvam WL. id est opus est linea quadratrix omn. l. Erit linea $BL \sqcap$ omn. l. quae ducatur in omnes p. figura plana repraesentatas fiet solidum. Si omn. l. sint recta et omnes p, curva fiet superficies curvilinea ductui homogenea; sed haec vetera. Ecce jam novum. Si ipsis WL, MG seu omnibus l. imponatur singulis eadem curva repraesentans omnes p. debet autem certa curva p. esse ejusdem plani, et sibi semper parallelo ejus plano existente per curvam AGL ferri, et habebitur quod desideramus. Loco curvae et planum variis modis terminatum ita ferri potest per curvam, et fiet solidum; priore modo superficies curvilinea; et superficiei sive solidi sectio semper eadem. Possumus tamen fingere quod decrescant interim inter ferendum; videndum an certus sit numerus superficierum analyticarum ut linearum analyticarum. Sed haec obiter.

Nota superficies curvilinea facta motu curvae sibi parallelae per curvam; aequabitur cylindro curvae sub BL, summa omnium l. Sed haec obiter.

Porro $\dfrac{l}{a} \sqcap \dfrac{p}{\text{omn.}\, l \sqcap y}$. Ergo $p \sqcap \dfrac{\overline{\text{omn.}\, l}}{a}\, l$. Itaque omn. $\dfrac{yl}{a}$. non vult dicere omn. y

---

21–26 *Zur gestrichenen Lesart:* Errores

Neben omn $p \sqcap \dfrac{\overline{\text{omn.}\, l}^{\boxed{2}}}{a}$: male

4 nimirum *(1)* plurium *(2)* infinitorum *L* 18 $\mathrm{p} \sqcap \dfrac{\overline{\mathrm{Omn\,l}}}{\mathrm{a}}\ \mathrm{l}$. | Ergo *(1)* $\mathrm{y}^2 \sqcap 2\,\overline{\mathrm{omn\ l}\dfrac{\overline{\mathrm{omn\ l}}}{\mathrm{a}}}$, sive $\overline{\mathrm{omn\ l}}^{\boxed{2}} \sqcap 2\,\overline{\mathrm{omn\ l}\dfrac{\overline{\mathrm{omn\ l}}}{\mathrm{a}}}$ *(2)* Ergo omn $\mathrm{p} \sqcap \dfrac{\overline{\mathrm{omn.\,l}}^{\boxed{2}}}{\mathrm{a}}$. Ergo Omn. p. $\sqcap \dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}}$. Brevius. $\dfrac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}} \sqcap \dfrac{\mathrm{p}}{\mathrm{y}}$. Ergo $\mathrm{p} \sqcap \dfrac{\mathrm{l}}{\mathrm{a}}\mathrm{y} \sqcap \dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{a}}\mathrm{l}$. Ergo erit omn. $\mathrm{p} \sqcap$ Omn $\dfrac{\overline{\mathrm{yl}}}{\mathrm{a}}$ (Nota Omn. non debet esse sub sua linea). At si dicam omnes, 2, 3. *(a)* non dico omnes *(b)* seu omnes senarios non dico Omnes binarios in Omnes ternarios; sed diconi omnes ternarios bis; at qvidni ergo etiam omnes *(aa)* ternari *(bb)* binarios ter, qvae duo non coincidunt, itaqve e r r a v i m u s. *gestr.* | itaqve *L*

---

1 Gregorii a S. Vincentio: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, lib. VII.

in omn. l. nec $y \frown$ omn. l. quare cum sit $p \sqcap \frac{y}{a}\,l$ sive $p \sqcap \frac{\text{omn.}\,l}{a}\,l$. hoc vult dicere. omn. l. ductas in unum illud quod uni illi p respondet. Ergo omn. $p \sqcap$ omn. $\frac{\overline{\text{omn.}\,l}}{a}.\,l$. Atqui aliunde demonstravi omn. $p \sqcap \frac{y^2}{2}$. sive $\sqcap \frac{\overline{\text{omn.}\,l}\,\boxed{2}}{2}$. Ergo habemus theorema quod mihi videtur admirabile, et novo hujus calculo magni adjumenti loco futurum, nempe quod sit, $\frac{\overline{\text{omn.}\,l}\,\boxed{2}}{2} \sqcap$ omn. $\overline{\overline{\text{omn.}\,l}\,\frac{l}{a}}$, qualiscunque sit l. Id est si omnes l. ducantur in ultimam, et aliae omnes l, rursus in suam ultimam; et ita quoties id fieri potest[,] summa horum omnium aequabitur dimidiae summae quadratorum quorum latera sunt summae ipsorum l, seu omnes l. pulcherrimum ac minime obvium theorema.

Tale est etiam Theorema: omn. $\overline{xl} \sqcap x\,\overline{\text{omn.}\,l}$ − omn. $\overline{\text{omn.}\,l}$. ponendo l. esse terminum progressionis, et x esse numerum qui exprimit locum seu ordinem ipsius l. ei respondentis, seu x. esse numerum ordinalem, l. rem ordinatam.

Nota in his calculis observari potest lex homogeneorum. Nam si omn. praefigatur numero seu rationi, vel infinite parvo, fit linea, si lineae fit superficies, si superficiei fit corpus, et ita in infinitum etiam ad dimensiones.

Utile erit scribi $\int$. pro omn. ut $\int l$ pro omn. l. id est summa ipsorum l. Itaque fiet $\frac{\overline{\int l}^{2}}{2} \sqcap \int \overline{\int \overline{l}\,\frac{l}{a}}$ et $\int \overline{xl} \sqcap x \int \overline{l} - \int \int \overline{l}$. Et ita apparebit semper observari legem homogeneorum, quod utile est, ut calculi errores vitentur.

Nota si analytice detur $\int l$. dabitur etiam l. Ergo si detur $\int\int l$ dabitur etiam l. sed non si datur l. dabitur et $\int l$.

Semper $\int x \sqcap \frac{x^2}{2}$.

15 $\frac{\overline{\int 1}^{2}}{2a}$ *L ändert Hrsg.*

3 aliunde demonstravi: s. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. sowie im vorliegenden Band N. 22 S. 184 Z. 15 f. 7 f. aequabitur . . . ipsarum l: Richtig müsste es heißen: aequabitur dimidio quadrato cujus latera sunt summae ipsarum l. 9 Theorema: s. N. 38 S. 268 Z. 14.

Nota omnia haec theoremata vera de seriebus in quibus differentiae terminorum ad terminos rationem habent minorem qualibet assignabili.

$\int x^2 \sqcap \frac{x^3}{3}$.

Nota jam si termini summandi affecti sint, quomodo hinc afficiatur summa regulam generalem, talem: v. g. $\displaystyle\int \overline{\frac{a}{b}\,l} \sqcap \frac{a}{b}\int \bar{l}$. scilicet si $\frac{a}{b}$ sit terminus constans, ducendus est in maximum ordinalem. Quod si sit terminus inconstans tunc tractari non potest, nisi ad ipsum l. reduci possit, vel utcunque ad quantitatem communem nempe ordinalem.

Nota quotiescunque in aequatione Tetragonistica non nisi una est litera varians ut l. tunc potest poni esse terminus constans, et $\int l$ erit $\sqcap$ x. Et huic fundamento innititur theorema: $\frac{\overline{\int l}^2}{2} \sqcap \int \overline{\int \bar{l}\, l}$ id est $\frac{x^2}{2} \sqcap \int x$. Eodem ergo modo statim innumera similia possunt solvi, ut $\displaystyle\int \overline{c\,\overline{\int l}^2 + ba^2} + [\int]\overline{\int l}^3 + \int l^3 \sqcap ea^3$ quaeritur qualis sit e. Fiet $a^3 e$

$\boxed{1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4}$

$\sqcap \frac{cx^3}{3} + ba^2 x + \frac{x^4}{4} + xa^3$. Nimirum $\int l^3 \sqcap x$. quia $l \sqcap a$ supponitur calculi causa.

$\boxed{1 \qquad 2 \qquad 3 \qquad 4}$

$\frac{\int l}{a} \sqcap x$. $\int \overline{c\overline{\int l}^2} \sqcap \frac{cx^3}{3}$. id est $\sqcap \frac{c\overline{\int l}^3}{3a^3}$. $\int ba^2 \sqcap \int l\; ba$. Intelligitur autem a. esse unitatem. Satis haec nova et notabilia. Cum novum genus calculi inducant.

Pono ut ad priora redeamus. Datur l. relatio ad x. quaeritur $\int l$. Quod fiet jam contrario calculo scilicet si sit $\int l \sqcap ya$. ponemus $l \sqcap \frac{ya}{d}$. Nempe ut $\int$. augebit ita d. minuet dimensiones. $\int$. autem significat summam, d. differentiam: Ex dato y. semper

5 $\sqcap \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *(1)* x. *streicht Hrsg.* *(2)* $\int \bar{\mathrm{l}}$ *L* 6 inconstans *(1)* vel *(a)* ref *(b)* exprimatur relatione ad ordinalem, vel non *(2)* tunc *L* 11 $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\, \overline{\int \mathrm{l}}^2$ *L ändert Hrsg.*

---

11 Fiet: Leibniz benutzt im Folgenden bis Z. 13 inkonsistent $l = 1, \int l = x$ und $l = a, \int l = ax$ nebeneinander; die grundsätzliche Überlegung wird dadurch nicht beeinträchtigt.

invenitur $\frac{ya}{d}$, sive l. sive differentia ipsarum y. Hinc aequatio una mutari potest in aliam, sublatio ut ex aequatione: $\int \overline{c\int l}^2 \sqcap \frac{\overline{c\int l}^3}{3a^3}$, facere possumus: $c\overline{\int l}^2 \sqcap \frac{c\int l^3}{3a^3 d}$.

Nota $\int \frac{x^3}{b} + \int \frac{x^2 a}{e} \sqcap \int \overline{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}$. Eodem modo $\frac{x^3}{db} + \frac{x^2 a}{de} \sqcap \frac{\frac{x^3}{b} + \frac{x^2 a}{e}}{d}$.

Sed ut ad superiora redeamus. Investigare possumus $\int l$ bis. Primum sumendo y. et quaerendo $\frac{ya}{d}$. $\sqcap l$. datae. Deinde aliter sumendo $\frac{z^2}{2a} \sqcap y$. sive sumendo $\sqrt{2ay} \sqcap z$ et inde $\frac{z^2}{t} \sqcap p \sqcap l \sqcap \frac{ya}{d}$. Quare si in aequatione indefinita ⟨ex⟩ yx; y. et x tollamus y, substituendo in ejus locum, $\frac{z^2}{2a}$: et investigemus ipsam t. Hujus novae aequationis indefinitae ut ante prioris denique ope valoris $\frac{z^2}{t} \sqcap l$. et novi valoris t. ex indefinita z continente ipsas z. et t. tollamus[,] restabit sola ex istis quatuor $y. z. t. l.$ litera l. et debet rursus aequatio prodire quae eadem esse debet tum cum data, tum cum paulo ante producta. Unde cum habeamus duas aequationes indefinitas earundem non tantum capitalium sed et arbitrariarum nonnihil tamen dissimiles quae coincidere debent, facere apparebit an aliqui termini possint tolli; an possibilis sit ista comparatio; aliaque id genus, et quod caput est qui termini vere maximi et minimi seu numerus terminorum aequationis. Sed quoniam in Triangula similia TBL, GWL, LBP. nondum intravit abscissa x. seu punctum fixum A. Nimirum ex puncto quodam fixo, A. ducatur AIQ indefinita ipsi LB. parallela; occurrens tangenti LT in I. et sit $AQ \sqcap BL$. Bisecetur AI in N. Ajo summam omnium QN. aequari semper Triangulo ABL. ut facile demonstrari potest, ex alibi a me dictis. Quae rursus novum dant calculi fundamentum. Nimirum $\frac{xv}{2} \sqcap y$. ponendo $BL \sqcap v$. et $QN \sqcap l$. et y. $\sqcap \int l$. $\frac{AI}{v} \sqcap \frac{t-x}{t}$ (signa ambigua). Ergo $AI \sqcap \frac{t-x}{t}v$. et $QI \sqcap v - AI \sqcap$

6 si *(1)* pro aeqvatione superiore, in qva *(a)* yx *(b)* y. et *(2)* in *L* 9 istis | tribus *ändert Hrsg.* | y. z. t. | l. *erg.* | litera *L*

18 alibi: s. VII, 4 N. 39_1 S. 617–620.

$v - \frac{t}{t}v + \frac{x}{t}v$. $QI \sqcap \frac{xv}{t}$, et $QN \sqcap QI + \frac{AI}{2} \sqcap \frac{xv}{t} + \frac{v}{2} - \frac{xv}{2t} \sqcap \frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. Et ope hujus aequationis $\frac{xv+tv}{2t}, \sqcap l$. et hujus $y \sqcap \frac{xv}{2}$. et illa ipsa prima aequatione indefinita seu generali, jam tertium resumta, tollendo primo y, deinde t ope inventi valoris ipsius t ad x. in aeq. ex x. v. indefinita; ac denique v ope aeq. $\frac{xv+tv}{2t} \sqcap l$. habebitur rursus aequatio in qua solae capitalium restabunt x. et l. ut ante, quae coincidere debet iterum datae. Habemus ergo tres aequationes productas, diversis viis inventas, quae inter se et cum data coincidere debent; et hae quidem tres non tantum sunt coincidentes, sed et iisdem constare debent literis et vocabulis. Quod an fieri possit analytice profecto, mox apparebit.

De figuris secundariis multa credo determinari posse inventis primariarum areis et centris gravitatis. Hinc enim et momenta habebuntur ex rectis quibusdam minus principalibus, quae momenta plerumque in figuras secundarias cadere solere arbitror. Operae pretium erit pro eo instituere calculum generalem.

7 tantum *(1)* similes *(2)* sunt 8 et *(1)* terminis *(2)* vocabilis *L*

41. HISTORIA TETRAGONISTICAE CONICAE
[31. Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 VIII 11 Bl. 4. 1 Bl. 2°. 6 Z. auf Bl. 4 r° unten u. 4 Z. auf Bl. 4 v° unten. Auf dem Rest des Blattes VII, 1 N. 17 sowie eine Aufzeichnung zur Kombinatorik (Cc 2, Nr. 1097 tlw.; Druck in einem späteren Band der Reihe).
Cc 2, Nr. 1097 tlw.

Datierungsgründe: Das auf demselben Blatt geschriebene VII, 1 N. 17 ist auf den 31. Oktober 1675 datiert.

Historia Tetragonisticae Conicae.

Conicae figurae sunt Triangulum, Parabola, Circulus, Ellipsis, Hyperbola. Spatium Trianguli et partium exhibet Euclides, Parabolae Archimedes. Relationem partium Circuli ad totum Archimedes, unde descriptio quadratricis. Relationem partium Hyperbolae, Greg. a S. Vinc. unde descriptio logarithmicae, illic sectio anguli, hic rationis. Appropinquationem Circuli Arithmeticam Wallisius, Geometricas Elegantes, Snellius, Hugenius, Gregorius. Gregorius et pro Hyperbola. Quadraturam Hyperbolae et omnium ejus partium Arithmeticam, Mercator; circuli, ego. Nunc ad solida gyratione facta seu Conoeides. Conoeides omnes excepta Hyperbola primus Archimedes. Hyperbolae Cavalerius. Un-

10 Parabola *erg. L* 13 Vinc. *(1)* illic perfectione *(2)* unde *L* 16 Arithmeticam, *(1)* Gregorius *(2)* Mercator *L* 17 primus | credo *gestr.* | Archimedes *L*

---

11 Trianguli: Euklid, *Elemente* I, insbesondere prop. XLI. 11 Parabolae: Archimedes, *Quadratura parabolae*, prop. XXIV. 11 f. Circuli: Gemeint ist wohl Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. I. 12 Hyperbolae: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. 125–130, S. 594–597. 14 Arithmeticam: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. 191, S. 178–182 (*WO* I S. 467–469). 14 Geometricas: W. Snell, *Cyclometricus*, 1621; Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, S. 1–44 (*HO* XII S. 113–181); J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, S. 11–19; ders., *Geometriae pars universalis*, 1668, prop. I, S. 1–3; ders., *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 6–8 [Marg.]. 16 Arithmeticam: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, prop. XVII, S. 31–33; vgl. VII, 4 N. 3_1 S. 50 f. 16 ego: VII, 4 N. 42_1. 17 Conoeides omnes: Archimedes, *De conoidibus et sphaeroidibus*. 17 Hyperbolae: B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635, S. 63–80. 17–297,1 Ungulas: Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. IX , Tl 1–5, S. 955–1037; Torricellis Bestimmung des parabolischen Zylinderhufs ist gedruckt in B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, 1647, S. 365 bis 367.

gulas Gregorius a S. Vinc., Torricellius. Superficies Sphaerae et Coni Archimedes, alias circuli Guldinus et Tacquet. Conoeidum et Sphaeroeidum Hugenius et problemate ab Hugenio proposit⟨o⟩ etiam suo marte Wallisius. Quasdam alias superficies aliis rotationibus factas Wallisius et Gregorius. Jam ad Curvas. Curvam Circuli seu Ellipseos primariae primus dimensus est Archimedes, Curvam parabolae, sive Wallisius sive Hugenius, sive Heuratius. Curvam Hyperbolae primariae Ego 26 Octob. 1675. cum paulo ante literam ab Oldenburgio accepissem qua fatetur id nondum posse Anglos. Ellipseos et Hyperbolae; secundariarum curvae adhuc desiderantur. Aditum tamen ad illas quoque arbitror mihi apertum. Superficiem Coni scaleni dedit Albius.

4 seu Ellipseos primariae *erg. L*

---

1 Superficies: Archimedes, *De sphaera et cylindro I*, prop. XIV u. XXXIII. 1 alias: P. Guldin, *Centrobaryca*, 1635–1641, lib. III, cap. I–II u. V, S. 211–231 u. 246–262; A. Tacquet, *Cylindricorum et annularium liber IV*, 1651, in der uns zugänglichen Ausgabe von 1669, S. 83–106. 2 Conoeidum et Sphaeroeidum: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 72–79 (*HO* XVIII S. 211–221). 3 proposit⟨o⟩: vgl. *a. a. O.*, S. 73 (*HO* XVIII S. 213), sowie J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 97–99, 102–104, 109 f. (*WO* I S. 554–556, 558 f., 562 f.). 4 factas: *a. a. O.*, S. 111–115 (*WO* I S. 563–565); J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, S. 51–100. 4 Circuli: Archimedes, *Dimensio circuli*, prop. III. 5 parabolae: Die Rektifikation der Parabel wurde erstmals publiziert in H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, 1659, *DGS* I S. 517–520. Chr. Huygens und J. Wallis reklamierten jeweils für sich Anteile an den von ihnen vertretenen Prioritätsansprüchen von H. v. Heuraet bzw. W. Neile. Leibniz bezieht sich vermutlich auf folgende gedruckte Quellen: J. Wallis, *Tractatus duo*, 1659, S. 90–98, 108–110 (*WO* I S. 550–555 u. 561 f.); ders., *Mechanica*, pars 2, 1670, S. 555 (*WO* I S. 923); Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209–211); sowie die in den *Philosophical Transactions* VIII, Nr. 98 vom 17./27. November 1673, S. 6146–6150, abgedruckten Briefe von J. Wallis, W. Brouncker u. Chr. Wren. 6 Ego: vgl. die Erl. zu N. 39 S. 271 Z. 1. 7 fatetur: Leibniz bezieht sich auf eine Aussage von J. Collins, die H. Oldenburg im Brief vom 10. Oktober 1675, III, 1 N. 65 S. 289 Z. 11–13, mitteilt. 9 Albius: R. White, *Hemisphaerium dissectum*, 1648, S. 271 bis 289; vgl. Leibniz' Studie *De superficiebus coniformium rectilineorum inprimis cono scaleno*, dat. 30. Oktober 1675, VII, 1 N. 16, insbesondere die Erl. zu S. 154 Z. 3.

42. VARIA AD TANGENTES ET QUADRATURAS
[Oktober (?) 1675]

Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XIV 1 Bl. 47 bis 48. 1 Bog. 2°. 2 S. gegenläufig auf Bl. 47 v° und Bl. 48 r°. Textfolge Bl. 48 r°, 47 v°. — Auf dem übrigen Bogen VII, 2 N. 53 und VII, 2 N. 54. Die einzelnen Textstücke sind teilweise ineinandergeschrieben.
Cc 2, Nr. 00

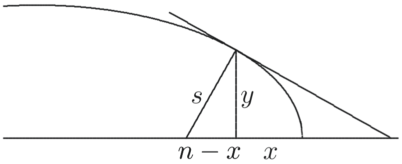
Datierungsgründe: N. 42 dürfte im Zusammenhang mit der Gesprächsaufzeichnung VII, 2 N. 54 entstanden sein.

[*Teil 1*]

[*Leibniz*]

$x^2 + cy^2 + dy + ex + f \;\; + hyx \sqcap 0$
$x^2 + \;\; y^2 + gy + hx + m \sqcap \; 0$

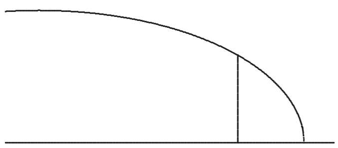
[*Tschirnhaus*]



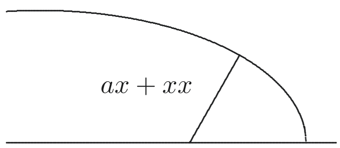
[*Fig. 1*]

[*Fig. 2*]

$xxy \;\not\rho$ ——— [*bricht ab*]



[*Fig. 3*]

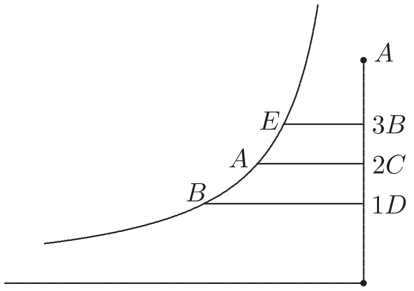


[*Fig. 4*]

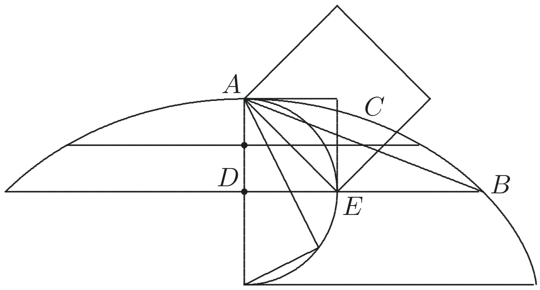
12 +f *(1)* ⊓ 0 *(2)* +hyx *L* 16 f. *Text und Figuren verwischt T*

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]



[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

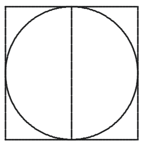
$$\frac{1}{z} - \frac{1}{3z^3} + \frac{1}{5z^5} - \frac{1}{7z^7} \text{ etc.}$$

[*Tschirnhaus*]

1

[*Leibniz*]

1



[*Fig. 7*]

$$\frac{1}{1000\,000\,0}$$

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

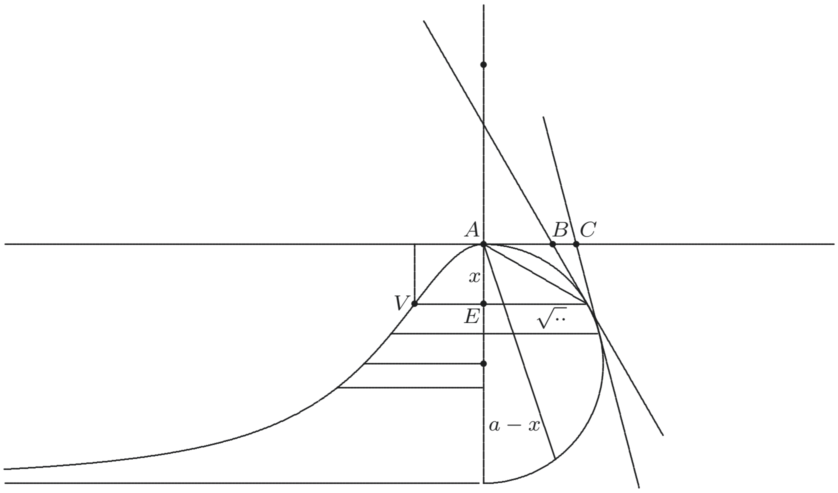
$$\frac{a}{1+a} \sqcap \frac{a}{1} - \frac{a^2}{2} + \frac{a^3}{3} -$$

11 *(1)* $\frac{1}{1+\mathrm{a}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{1+\mathrm{a}}$ *L*

11 $\frac{a}{1+a} \sqcap$: Die rechte Seite der Gleichung ergibt sich aus der linken durch Quadratur.

$yx \sqcap a^2. \quad \dfrac{a^2}{y} \sqcap x. \quad \dfrac{a^2}{a+z} \sqcap x$

$x^2 \sqcap a^2 - y^2$



[*Fig. 8 (Bezeichnungen* $\sqrt{..}$ *und* $a - x$ *von Tschirnhaus)*]

$\dfrac{a^2}{a^2-x^2} \sqcap z$

$+$

[*Tschirnhaus*]

$ax - xx \propto yy$

[*Leibniz*]

$\dfrac{1}{2;3,4}$

4 *(1)* ax *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2}$ *L* 4 + *erg. T*

2–6 Leibniz bezeichnet mit a den Kreisradius, Tschirnhaus hingegen den Kreisdurchmesser.

43. MARGINALIEN IN BARROWS LECTIONES GEOMETRICAE
[Ende Januar 1673 – 1716 (?)]

Überlieferung: *LiH* Marginalien, An- und Unterstreichungen in Bleistift oder Tinte in I. Barrow, *Lectiones geometricae*, London, 1670, Titelauflage in: *Lectiones XVIII ... opticorum phaenomenωn ... Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*, London, 1672: Hannover *Leibniz-Bibl.* Leibn. Marg. 0. — Teildruck der Marginalien zu S. 85 und zu den Figuren 119, 122 und 125 sowie zu den Addenda: Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 23 f.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat Barrows *Lectiones geometricae* (1670) während seines ersten Londonaufenthalts von Ende Januar bis Ende Februar 1673 zusammengebunden mit den *Lectiones opticae* (1669) in der Titelauflage von 1672 erworben (vgl. Leibniz an Oldenburg, 26. April 1673, III, 1 N. 17 S. 87). Erste Hinweise auf die Lektüre der *Lectiones geometricae* finden sich in den *Observata Philosophica in Itinere Anglicano sub initium anni 1673* (Cc 2, Nr. 344, tlw. gedr. in Gerhardt, *Leibniz in London*, S. 165 f.). Leibniz studierte zunächst den optischen Teil (Druck der Marginalien in Reihe VIII), brach die Lektüre der geometrischen Vorlesungen jedoch recht bald ab (Unterstreichungen auf S. 13, 17, 21 und 27). Die eigentliche Beschäftigung mit den *Lectiones geometricae* wurde vermutlich erst durch Tschirnhaus' Eintreffen in Paris Ende September 1675 angestoßen. Tschirnhaus hatte seinerseits ein Exemplar der *Lectiones* in der Titelauflage von 1674 einschließlich der in der früheren Titelauflage fehlenden Addenda auf S. 149–151 aus London mitgebracht (s. Collins an Gregory, 19. (29.) Oktober 1675, *GT* S. 342). Die Marginalien auf S. 85 und zu den Addenda sowie diejenigen zu den Figuren 122 und 125 in Leibniz' Handexemplar dürften in diesem Kontext entstanden sein; letztere sind aufgrund der Verwendung des Integralsymbols nicht vor Ende Oktober 1675 anzusetzen. Die Randbemerkungen zu Fig. 119 überschneiden sich teilweise mit den in anderer Tinte geschriebenen Ergänzungen zur Figur und dürften vorher entstanden sein. Während letztere eindeutig in Zusammenhang mit der Untersuchung *De Quadratura quadratricis* (LH 35 XIII 1 Bl. 236–239), dat. 6. Juli 1677, stehen, könnten erstere auch der auf Juni 1676 datierten N. 86 zuzuordnen sein. Die Marginalien auf S. 131–133 sowie 136 schließlich sind aufgrund der Notation entweder bis Sommer 1674 entstanden oder der hannoverschen Zeit zuzurechnen. Vgl. insgesamt Mahnke, *Neue Einblicke*, S. 20–25.

Barrows Text ist die Seitenzählung aus der Titelauflage 1672 in eckigen Klammern vorangestellt. Marginalien erscheinen als Fußnoten zum Text bzw. zu den Figuren, Unterstreichungen werden durch Sperrung der entsprechenden Passagen hervorgehoben. Zur Wiedergabe von Leibniz' Ergänzungen von Linien und Punktbezeichnungen innerhalb Fig. 119 wird der ursprünglichen Abbildung von Barrow eine entsprechend erweiterte Figur gegenübergestellt. Die Korrektur eines Druckfehlers auf S. 111, der Nachtrag der Seitenzahl auf der unpaginierten Seite 148 sowie kurze Hinweise auf S. 96 und S. 102 bzgl. der fehlerhaften Heftung des Exemplars (S. 103 f. zwischen S. 95 f. und S. 97 f. eingebunden) werden nicht wiedergegeben.

[S. 13]

... Lationis modum spectando generantur magnitudines vel per motus simplices, vel per motus compositos, vel ex concursu motuum (nam compositionem a concursu distinguo, quae tamen a nonnullis confunduntur.) De simplicium motuum hypothesibus, ac effectis primo videamus. ...

[S. 17]

... Quin, ut paucis complectar multa, quae *de Superficiebus aut Solidis Prismaticis ac Cylindricis stricte dictis generatim enunciantur aut probantur uspiam,* quod ea pleraque justam analogiam observando, universis congruunt hoc modo progenitis quantis. Neque jam de progressivo motu quidpiam succurrit adjiciendum; quaedam enim δυσδιήγητα consulto videntur reticenda. Porro simplicis motus alterum genus, quod adhibet *Mathesis*, est *circumlatio, seu motus conversivus*; ...

[S. 21]

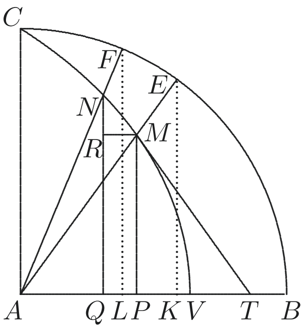
... Vel; quod omnes in mobili sitae rectae lineae axi perpendiculares efficiunt circulos (si revolutio ponatur integre peracta) aut circulares similes sectores, illos intelligo qui simul eodem tempore delineantur. Ut si v.g. linea quaevis circa axem VK rotetur, eo procreabitur motu curva quaedam Superficies, circularibus quasi peripheriis constans (*Atomistarum* enim phrasin facilitatis, perspicuitatis, brevitatis, addere licet et verisimilitudinis causa non illibenter usurpo) ...

[S. 27]

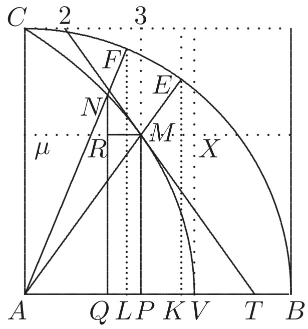
... Nec ulla sane magnitudinis est species (nulla linea, nulla superficies, nullum corpus) cujus generatio non e rectis peracta motibus concipiatur. Omnis, inquam, in uno plano constituta linea procreari potest e motu parallelo rectae lineae, et puncti in ea; omnis superficies e motu parallelo plani, et lineae in eo (lineae scilicet alicujus e rectis modo jam insinuato motibus progenitae) consequenter et linea quaevis etiam in curva superficie designata rectis motibus effici potest. ...

18 f. *Am Rand durch senkrechten Strich hervorgehoben.*

[Fig. 119 zu S. 83]



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b einschl. Leibniz' Ergänzungen*]

[S. 83]

...

Exemp. IV.

Sit *Quadratrix* CMV (ad circulum CEB pertinens cui centrum A,) cujus axis VA; ordinatae CA. MP ad VA perpendiculares.

Protractis rectis AME, ANF, ductisque rectis EK, FL ad AB perpendicularibus, dicantur arcus $CB = p$; radius $AC = r$; recta $AP = f$; $AM = k$. Estque jam $CA\,.\,\text{arc.}\,CB :: NR\,.\,\text{arc.}\,FE$. hoc est, $r.p :: a.\dfrac{pa}{r} = \text{arc.}\,FE$. et $AM.MP :: AE.EK$; hoc est, $k.m :: r.\dfrac{rm}{k} = EK$; item $AE\,.\,EK :: \text{arc.}\,FE\,.\,LK$. hoc est $r.\dfrac{rm}{k} :: \dfrac{pa}{r}.\dfrac{pma}{rk} = LK$. Verum $AM.AE :: AP.AK$; hoc est $k.r :: f.\dfrac{rf}{k} = AK$. ergo $\dfrac{rf}{k} - \dfrac{pma}{rk} = AL$. Et $\dfrac{rrff}{kk} - \dfrac{2fmpa}{kk}$ (abjectis superfluis) $= ALq$; adeoque $LFq = \dfrac{rrkk - rrff + 2fmpa}{kk} =$

---

2 *Oben rechts, teils innerhalb der Figur:* $\dfrac{CA}{CEB} \sqcap \dfrac{NR}{FE}$.
Unter der Figur: AT: $\sqcap \dfrac{\overline{AM}^2}{AV}$.

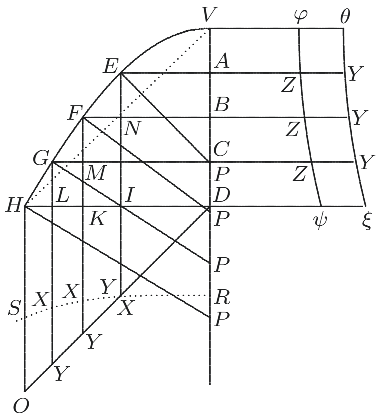
---

2 *Fig. 1a, 1b*: vgl. N. 86 Fig. 1, Gln. 1 (S. 563 Z. 17) und 17 (S. 565 Z. 2) sowie *De Quadratura quadratricis*, dat. 6. Juli 1677.

$\dfrac{rrmm + 2fmpa}{kk}$.

Est autem $AQq.QNq :: ALq.LFq$; hoc est $Q : f - e.Q : m + a :: ALq.LFq$. hoc est $ff - 2fe.mm + 2ma :: rrff - 2fmpa.rrmm + 2fmpa$. Unde (sublatis ex norma rejectaneis) emerget *aequatio*, $ffpa + mmpa - rrfa = rrme$; seu $kkpa - rrfa = rrme$; vel substituendo juxta *praescriptum*; $kkpm - rrfm = rrmt$; vel $\dfrac{kkp}{rr} - f = t$. Hinc colligitur esse rectam $AT = \dfrac{kk}{rr}p$; hoc est (quoniam, ut notum est, $AV = \dfrac{rr}{p}$) erit $AT = \dfrac{AMq}{AV}$; seu, $AV.AM :: AM.AT$.

[Fig. 122 zu S. 85–88]



[*Fig. 2*]

9 *Oberhalb und links neben der Figur:*

$$AZ \sqcap AP. \quad VD\psi\varphi \sqcap \frac{DH^2}{2} \sqcap \int\overline{AZ}.$$

$$\int\overline{ZAE} \sqcap \frac{DH^3}{3}. \quad \int\overline{ZAEEA} \sqcap \frac{DH^4}{4}.$$

$$\int\overline{VAZ\varphi, \frown AZ} \sqcap \frac{\overline{VAZ\varphi}^2}{2}.$$

$$VP \sqcap AY. \quad \int\overline{AY} \sqcap \frac{VH^2}{2}.$$

$$IX \sqcap AP. \quad \int\overline{DIX} \text{ ad } DH \sqcap \int\overline{AZ^2} \text{ ad } VD.$$

9 *Fig. 2*: Der Verlauf der Kurve $\theta Y\xi$ ist in Barrows Figur nicht korrekt wiedergegeben.

[S. 85]

Lect. XI.

Reliquis utcunque patratis, apponemus jam *quae ad magnitudinum e tangentibus* (seu e perpendicularibus ad curvas) *Dimensiones eliciendas pertinentia se objecerunt Theoremata*; de compluribus utique selectiora quaedam.

I. Sit curva quaepiam VH (cujus axis VD, applicata HD ad VD normalis) item linea $\varphi Z\psi$ talis, ut si a curvae puncto libere sumpto (puta E) ducatur recta EP ad curvam perpendicularis, et recta EAZ ad axem perpendicularis, sit recta AZ interceptae AP aequalis; erit *spatium* $AD\psi\varphi$ *aequalis semissi quadrati* ex recta DH.

...

[S. 86]

II. Iisdem positis, atque paratis; *summa rectangulorum* $AZ \times AE + BZ \times BF + CZ \times CG$, etc. aequatur *trienti cubi* ex base DH.

...

III. Simili ratione constabit summam $AZ \times AEq + BZ \times BFq + CZ \times CGq$, etc. aequari τῷ $\dfrac{DHqq}{4}$; et esse summam $AZ \times AE\,\text{cub.} + BZ \times BE\,\text{cub.} + CZ \times CG\,\text{cub.}$ etc. $= \dfrac{DH^5}{5}$; ac eodem in continuum tenore.

IV. Exhinc consectantur haud aspernanda *Theoremata*: Sit $VD\psi\varphi$ spatium quodlibet, cujus axis VD, ut dictum, aequisectus; si concipiantur singula spatia $VAZ\varphi$, $VBZ\varphi$, $VCZ\varphi$, etc. in suas ordinatas AZ, BZ, CZ, etc. respective singulas duci, quae proveniet summa adaequabitur ipsius spatii $VD\psi\varphi$ semiquadrato.

...

[S. 87 f.]

...

VII. E dictis porro sequitur, si omnes (vertici, et perpendicularibus interjectae) VP

9 *Daneben:* Novi dudum.

26 Novi: vgl. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467 f. sowie im vorliegenden Band N. 22 S. 184 Z. 15 f. vom Januar 1675.

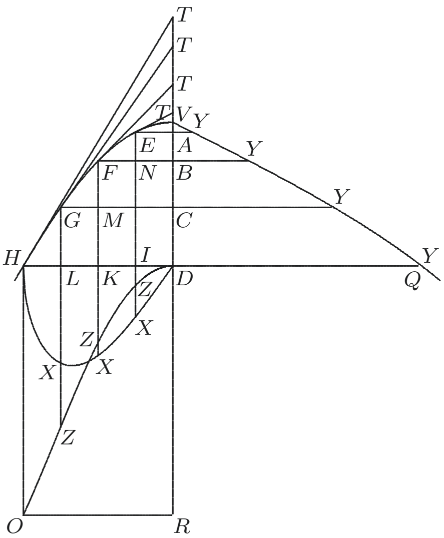
per respectiva puncta A, B, C, etc. Concipiantur applicatae, puta ut AY, BY, CY, etc. respectivis VP aequentur; erit e sic applicatis *constituum spatium* $AD\xi\theta$ *aequal. semisse quadrati ex subtensa* VH.

...

VIII. Porro, si (positis iisdem) sit curva $RXXS$ talis, ut sit $IX = AP$, et $KX = BP$; et $LN = CP$, etc. erit *solidum factum ex spatio* $VD\psi\varphi$ *circa axem* VD *rotato subduplum solidi ex spatio* $DRSH$, *itidem circa axem* VD *rotato, confecti.*

...

[Fig. 125 zu S. 88 f.]



[*Fig. 3*]

[S. 88 f.]

...

X. Sit rursus curva quaepiam VH (cujus axis VD, basis DH) et linea $DZZO$ talis, ut a curvae puncto quopiam, ceu E, ducta recta ET, quae curvam tangat, et recta EIZ

---

10 *Links neben und rechts unterhalb der Figur:*

$IZ \sqcap AT$. $\int \overline{IZ}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE}$ ad VD.

$\int \overline{DIZ}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE^2}$ ad VD.

$\int \overline{ZIDDI}$ ad $DH \sqcap \int \overline{AE^3}$ ad VD.

ad basin parallela, sit perpetuo IZ aequalis ipsi AT; dico *spatium* DHO *spatio* VDH *aequari*.

...

Hoc *perutile Theorema* doctissimo Viro *D. Gregorio Aberdonensi* debetur; cui sequentia subnectimus.

...

XII. Hinc, summa $DI \times IZ + DK \times KZ + DL \times LZ$, etc. aequatur summae quadratorum ex applicatis ad VD; scilicet ipsis $AEq + BFq + CGq$, etc.

XIII. Simili ratiocinio constabit summam $DIq \times IZ + DKq \times KZ + DLq \times LZ$, etc. triplam esse summae $DIq \times IE + DKq \times KF + DLq \times LG$, etc. hoc est aequalem summae cuborum ab omnibus AE, BF, CG, etc. ad VD applicatis. Idem quoad *reliquas potestates* observabilis est Conclusionum tenor.

...

[S. 131]

Lect. XIII.

Aequationum naturam e terminorum *analogia* exposuit *Vieta*; illam ex eorum in se ductu dilucidius explicuit *Cartesius*. Eam ego jam e linearum singulis appropriatarum descriptione conabor aliquatenus enucleatam dare; qui sane modus rem praesertim elucidare videtur, ac ob oculos ponere, agedum.

Notetur, In sequentibus perpetim ad easdem series redigi aequationes, quae *coefficientes* habent easdem.

Aequationum Series prima.

$$\begin{array}{ccl} a+b & = & n. \\ aa+ba & = & nn. \\ a^3+baa & = & n^3. \\ a^4+ba^3 & = & n^4, \text{ etc.} \end{array}$$

...

23–26 *Am Rande:*

$$1+b = \left\{ \begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array} \right\} \text{Hyp.}$$

[S. 132]

...

Series secunda.

$$\begin{array}{rcl} a-b & = & n. \\ aa-ba & = & nn. \\ a^3-baa & = & n^3. \\ a^4-ba^3 & = & n^4,\ \text{etc.} \end{array}$$

...

[S. 133]

...

Series tertia.

$$\begin{array}{rcl} b-a & = & n. \\ ba-aa & = & nn. \\ baa-a^3 & = & n^3. \\ ba^3-a^4 & = & n^4,\ \text{etc.} \end{array}$$

...

4–7 *Am Rande:*

$$1-b=\left\{\begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array}\right\}\text{Hyp.}$$

12–15 *Am Rande:*

$$b-a=\left\{\begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array}\right\}\text{Circ.}$$

[S. 136]

...

Series quarta.

$$\begin{array}{rcl} a+\dfrac{cc}{a} & = & n. \\ aa+cc & = & nn. \\ a^3+cca & = & n^3. \\ a^4+ccaa & = & n^4,\ \text{etc.} \end{array}$$

...

[S. 151 (nicht paginiert, leer)]

4–7 *Am Rande:*

$$1+b^2=\left\{\begin{array}{c} n \\ n^2 \\ n^3 \\ n^4 \end{array}\right\}\text{Hyp.}$$

9 *Am oberen Rande:* Vidi addenda. pag. 149. 150. 151. *Animadverti* inquit *potuisse secundo Appendiculae tertiae lectionis XII problemati pag. 122.*

---

12 inquit: s. I. Barrow, *Lectiones XVIII ... opticorum phaenomenωn ... Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*, London, 1674, S. 149.

Zum 2. Teil (S. 310)