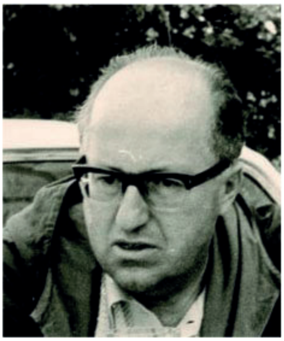
Robert Schaback

Nachruf auf Erhard Heinz

30. April 1924 – 29. Dezember 2017



Erhard Heinz,
30.04.1924 – 29.12.2017,
Ordentliches Mitglied seit 1970

Biographisches

Mein Doktor-Großvater Rudolf Walter Erhard Heinz wurde am 30. April 1924 in Bautzen als Sohn des Technischen Reichsbahnangestellten Walter Heinz geboren. Ab 1942 studierte er vier Semester Mathematik und Physik an der Technischen Hochschule Dresden und wurde 1944 zur Wehrmacht einberufen. Im August 1944 geriet er in Frankreich in englische Gefangenschaft. Er kehrte im Januar 1948 zurück, setzte sein Studium an der Georg-August-Universität in Göttingen fort und legte im November 1949 das Staatsexamen für das höhere Lehramt ab. Im darauffolgenden April wurde er Assistent und reichte seine später von Franz Rellich und Carl Ludwig Siegel mit „ausgezeichnet" beurteilte Dissertation[1] im Dezember ein. Das ist, fast wörtlich, dem handgeschriebenen Lebenslauf aus der Dissertation entnommen, und es ist bemerkenswert, daß die Promotion etwa ein Jahr nach dem Staatsexamen erfolgte.

Zu Carl Ludwig Siegel und Franz Rellich sollte ich einige Anmerkungen machen. Carl Ludwig Siegel gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts.[2] Zur Trauerfeier 1981 für Siegel auf dem Göttinger Stadtfriedhof hielt Manfred Eigen den Nachruf im Namen des Ordens Pour le Merite. Siegel und Rellich, obwohl durch die Rassengesetze nicht bedroht, waren mit dem NS-Regime aneinandergeraten. Sie spielten eine zentrale Rolle beim Wiederaufbau der Göttinger Mathematik nach dem Kriege, berufen 1946 (Rellich) und 1951 (Siegel, wegberufen vom Institute for Advanced Study, als erneute Berufung nach seinem Weggang 1940).

Am 21.1.1954 erhielt Erhard Heinz die venia legendi.[3] Sein Doktorvater Franz Rellich verstarb unerwartet früh, am 25. September 1955, und schon fünf Tage später beantragte Carl Ludwig Siegel, die Lehrstuhlvertretung an Erhard Heinz zu vergeben. Das schloß die Betreuung der hinterbliebenen Doktoranden von Rellich ein, inklusive meines Doktorvaters Helmut Werner, der dadurch als der erste Doktorand von Erhard Heinz gilt.[4]

[1] Beiträge zur Störungstheorie der Spektralzerlegung.

[2] https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Ludwig_Siegel.

[3] Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung, publiziert in Math. Ann. 127, 258–287, 1954.

[4] Siehe die Danksagung in H. Werner: Das Problem von Douglas für Flächen konstanter

1956 ging Erhard Heinz nach Stanford als Associate und später Full Professor, und 1962 folgte er einem Ruf auf ein Ordinariat der Ludwig-Maximilians-Universität München. Sein Nachfolger in Stanford war Lars Hörmander.[5]

Im Jahre 1965 bekam Erhard Heinz den Ruf auf eine Professur am Mathe- matischen Institut in Göttingen. Vorausgegangen war ein Vorstoß des Physikers Flammersfeld und des Physikochemikers Jost mit dem Ziel, einen Lehrstuhl für Numerische Mathematik einzurichten, aber das Vorhaben wurde aus Platz- und Geldgründen auf 1968/69 verschoben und dann auch realisiert.[6]

Schon in München begann Erhard Heinz mit dem Aufbau seiner ‚Schule', an der man für mehrere Jahrzehnte bei der Besetzung von Professuren für Partielle Differentialgleichungen nicht vorbeikam. Unter seinen 23 Doktoranden[7] gibt es 14 Professoren, und ich erinnere mich an viele Gespräche, in denen seine Schüler begeistert von der einzigartigen Arbeitsatmosphäre um Erhard Heinz berichteten. Als Beispiel zitiere ich aus dem Vorstellungsvortrag 2010 seines Schülers Gerhard Dziuk (Freiburg) für die Heidelberger Akademie:[8]

> Mich faszinierten vor allem die lebhaften und engagierten Vorlesungen von Herrn Heinz mit ihren wunderbaren analytischen Tricks und den weitreichenden Methoden. [...] Die Forschung und die Persönlichkeit von Erhard Heinz gaben den entscheidenden Impuls für meine spätere akademische Arbeit.

In Göttingen setzte Erhard Heinz bis zu seiner Emeritierung 1992 seine Münchner Aktivitäten sehr erfolgreich fort. Im Jahre 1970 wurde Erhard Heinz in die Akademie gewählt, auf Vorschlag von Hans Grauert, Martin Kneser, Max Deuring, Wilhelm Maak und Carl Ludwig Siegel. Die Laudatio weist unter anderem deutlich darauf hin, daß die Arbeiten von Erhard Heinz in enger Verbindung zu den Ideen von Gauß, Riemann, Schwarz, Hilbert, Minkowski, Weyl, Courant und Rellich stehen. In meiner unten folgenden Darstellung der Mathematik von Erhard Heinz wird das für Fachleute ablesbar sein, aber ich kann diese Querverbindungen nicht im Detail ausführen. Bemerkenswert ist auch, daß Erhard Heinz mit vielen Vorlagen mathematischer Arbeiten die Nachrichten unserer Akademie sehr bereichert hat.

Er wurde 1962 Mitherausgeber der Mathematischen Zeitschrift, wechselte 1976 in deren Beirat und verblieb dort bis 1990. In zweijährigem Rhythmus fanden im Mathematischen Forschungsinstitut Oberwolfach Tagungen über Partielle Differentialgleichungen statt, auf denen Erhard Heinz ab 1967 regelmäßig vortrug. Im Jahre 1971 trat er in die Tagungsleitung ein und legte sie 1979 nieder. Schließlich wurde er im Jahre 1994 mit der Georg-Cantor-Medaille der Deutschen Mathematiker-Vereinigung ausgezeichnet.

---

mittlerer Krümmung, Math. Ann. 133, 303–319, 1957.

[5] A Century of Mathematics in America, Teil 2, von Richard Askey, Harold M. Edwards, S. 270.

[6] Protokoll einer Kommissionssitzung der Fakultät am 04.12.1963.

[7] https://www.genealogy.math.ndsu.nodak.edu/id.php?id=21560.

[8] Jahrbuch 2010 der Heidelberger Akademie, S. 232.

Im persönlichen Umgang war Erhard Heinz stets außerordentlich liebenswürdig und warmherzig, verbunden mit höchsten Qualitätsansprüchen an die Arbeit der Studierenden, was jene durchaus zu schätzen wußten.

Nach seinem 85. Geburtstag gab Erhard Heinz sein Haus in Geismar auf und siedelte ins Wohnstift über. Von schwerwiegenden Krankheiten verschont, aber körperlich geschwächt, hatte er sich seine geistige Frische stets bewahrt, und er verstarb friedlich am 29.12.2017 im gesegneten Alter von 93 Jahren.

Die Mathematik von Erhard Heinz

Mit Erhard Heinz verliert die Mathematik – nicht nur in Göttingen, sondern weltweit – einen der selten gewordenen Vertreter der klassischen reellen Analysis. Schon zum Zeitpunkt seiner Berufung 1966 nach Göttingen waren Mathematiker seines Typs rar, denn in der Laudatio steht:

> Herr Heinz ist einer der seltenen jüngeren Mathematiker, welche die letztlich doch unentbehrliche klassische reelle und komplexe Analysis konkret-konstruktiver Richtung ebenso souverän beherrschen wie die moderne, abstrakt orientierte Analysis.

Diese Dichotomie wird durch einen polemischen Ausspruch Carl Ludwig Siegels[9] verdeutlicht:

> Ich habe Angst, dass die Mathematik vor dem Ende des Jahrhunderts zugrunde geht, wenn dem Trend nach sinnloser Abstraktion [...] nicht Einhalt geboten wird.

Damit ist unter anderem der sogenannte Bourbakismus[10] gemeint, der damals in Mode war.

Was ist nun die „reelle und komplexe Analysis konkret-konstruktiver Richtung" von Erhard Heinz? Ich wähle dazu die vier wichtigsten Arbeitsschwerpunkte aus.

Störungstheorie der Spektren von Operatoren im Hilbertraum

Das war ein Steckenpferd von Franz Rellich, mit wichtigen Anwendungen in der Quantenmechanik. Heinz zitiert in seiner Dissertation drei von fünf Arbeiten von Rellich zu diesem Thema, aber dieses Arbeitsgebiet kann ich hier aus Platzgründen nicht detailliert kommentieren.

Minimalflächen

Das sind Flächen kleinsten Flächeninhalts, die von einer gegebenen geschlossenen Raumkurve berandet werden. Dadurch resultieren Flächen verschwindender mittlerer Krümmung. Jeder Punkt ist anschaulich ein Sattelpunkt, und in jedem Punkt schneiden sich eine konkave und eine konvexe Kurve auf der Fläche mit gleich großem minimalem Krümmungskreis unter allen Kurven, die durch diesen Punkt gehen

[9] https://de.wikipedia.org/wiki/Carl_Ludwig_Siegel.
[10] https://de.wikipedia.org/wiki/Nicolas_Bourbaki.

und in Ebenen verlaufen, die senkrecht zur Tangentialebene sind oder den Normalenvektor enthalten, vgl. Abb. 2. Die mittlere Krümmung ist der Mittelwert dieser beiden extremalen vorzeichenbehafteten Krümmungen, und er ist Null bei Minimalflächen. Zur Veranschaulichung: die nach oben und unten wirkenden und mit der Krümmung wachsenden ‚Kräfte' in Abb. 2 versuchen, den Flächeninhalt zu verkleinern, aber sie heben sich auf, denn der Flächeninhalt läßt sich lokal nicht verkleinern.

Wenn man geschlossene Randkurven vorschreibt, die über dem Einheitskreis liegen (vgl. Abb. 3), ist zunächst nicht klar, ob die beiden betragsgleichen Extremalkrümmungen K_{max} im über dem Nullpunkt liegenden Flächenpunkt beliebig groß werden können, wenn man die Randkurve fürchterlich verbiegt. Man will durch Verbiegen der Randkurve einen möglichst kleinen Krümmungskreis über dem Nullpunkt erzielen.

Erhard Heinz bewies die Endlichkeit der maximal möglichen Krümmung im Jahre 1952,[11] aber der endliche Maximalwert ist meines Wissens bis heute nicht bekannt. Die Heinz'sche Arbeit zeigt $K_{max} \leq \frac{8}{\mu}$ mit der (kompliziert definierten) *Heinz'schen Konstante* μ, und Heinz bewies ‚konkret-konstruktiv', daß

$$\mu \geq 2 - \sum_{n \geq 2} \frac{8}{\pi n^2} \approx 0.358$$

gilt, was erst dreißig Jahre später von R.R. Hall[12] auf die Hopf'sche Vermutung

$$\mu = \frac{27}{2\pi^2} \approx 1.367$$

aus dem Jahre 1953 verbessert wurde. Eigentlich müßte man statt μ die kleinste obere Schranke für K_{max} die Heinz'sche Konstante nennen. Sie ist eine ‚Naturkonstante' wie π und e.

[11] Über die Lösungen der Minimalflächengleichung. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 51–56 (1952).
[12] On an inequality of E. Heinz, J. Analyse Math. 42, 1982/83, 185–198.

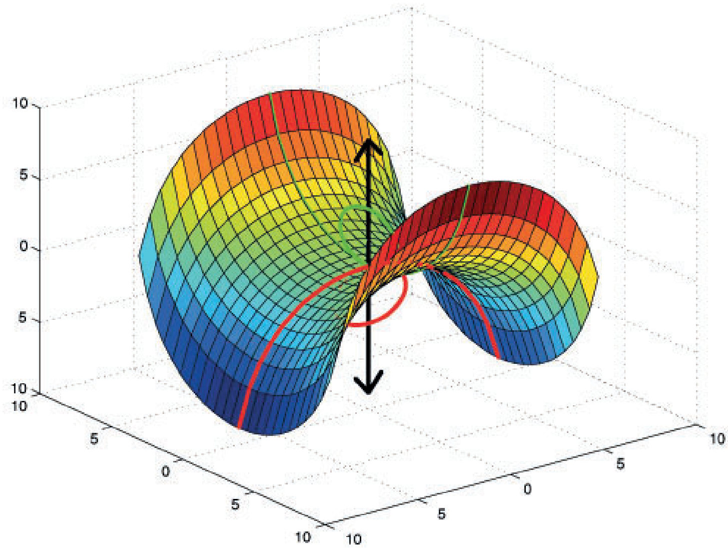


Abb. 1: Zwei Kurven maximaler Krümmung auf der Scherk'schen Minimalfläche, mit Krümmungskreisen und antagonistischen ‚Kräften'

Flächen konstanter mittlerer Krümmung

Wenn man von Flächen *verschwindender* mittlerer Krümmung übergeht zu Flächen *konstanter* mittlerer Krümmung, so bestehen die Flächen nicht mehr aus lauter Sattelpunkten. Das einfachste Beispiel sind Kugeloberflächen, bei denen die Krümmungsdefinition auf den Großkreisen basiert, und diese haben alle dieselbe Krümmung.

Wer glaubt, daß solche Flächen immer so einfach wie Kugeloberflächen sind, wird durch Abb. 5 schnell enttäuscht.[13]

Für Flächen konstanter von Null verschiedener und vorgegebener mittlerer Krümmung ist zunächst nicht klar, ob jede geschlossene Randkurve durch eine solche Fläche ‚ausgefüllt' werden kann. Für den Kreis als Randkurve gibt es zwei Lösungen, die Halbkugeln, oder bei kleinerer Krümmung eine Kugelkappe und einen größeren ‚Rest' (vgl. Abb. 4). Man hat keine Eindeutigkeit, und das macht oft auch Existenzsätze schwierig.

[13] Karsten Große-Brauckmann, Konrad Polthier: Numerical Examples of Compact Constant Mean Curvature Surfaces, in: Elliptic and Parabolic Methods in Geometry, Eds: B. Chow, R. Gulliver, J. Sullivan, AK Peters, Wellesley, 1996, S. 23-46.

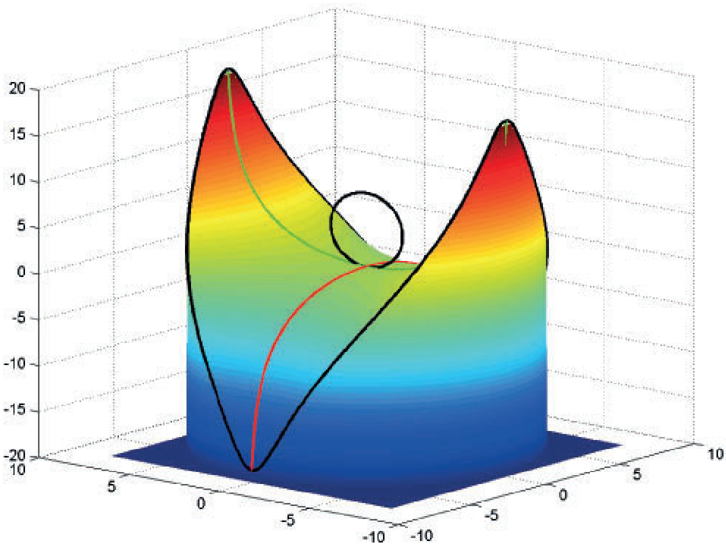


Abb. 2: Minimalfläche über dem Kreis, mit stark verbogener Randkurve, zur Erzielung einer möglichst großen Krümmung oder eines möglichst kleinen Krümmungskreises über dem Nullpunkt

Aus dem Berufungsgutachten:

> Herr Heinz hat als Erster das Problem gelöst, in eine vorgegebene Raumkurve eine Fläche konstanter mittlerer Krümmung einzuspannen, eine Erweiterung des bekannten Problems der Minimalflächen, das fast ein Jahrhundert lang den Bemühungen zahlreicher Mathematiker widerstanden hatte.

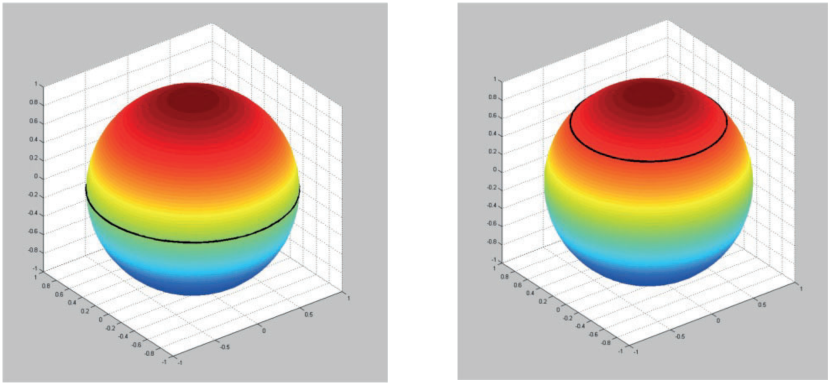


Abb. 3: Flächen konstanter mittlerer Krümmung: Zwei Halbkugeln oder zwei Kugelsegmente, die jeweils von einem Kreis berandet sind

Um die Mehrdeutigkeit zu vermeiden, schränkt Heinz in seiner Habilitationsschrift[14] die Lage der Randkurve auf die Oberfläche der Einheitskugel ein und betrachtet nur Lösungen, die ganz im Innern der Kugel liegen (in Abb. 6 die unsichtbare obere Kugelkappe der unteren Kugel, im Innern der ‚aufgesetzten' Kugel). Im Fall des Kugelbeispiels wird dadurch nur die ‚flache Kappe' zugelassen, und man kann hoffen, daß es zu jeder hinreichend kleinen vorgegebenen mittleren Krümmung H eine Lösung gibt, wenn die Randkurve hinreichend glatt ist und auf der Oberfläche der Einheitskugel liegt. Ein konkretes Beispiel zeigt Abb. 7. Für die ‚konkret-konstruktive Richtung' der Heinz'schen Mathematik ist bezeichnend, daß er 1954 a.a.O. bewies, daß die Existenz von Lösungen generell für alle mittleren Krümmungen $H < (\sqrt{17} - 1)/8 \approx 0.3904$ gesichert ist.

Über diese Arbeit trug Erhard Heinz 1954 auf dem Internationalen Mathematikerkongreß[15] vor, in guter Gesellschaft früherer oder späterer Göttinger: Felix Bernstein, Hans Grauert, Martin Kneser und Wilhelm Maak. Aber der maximal mögliche Wert der Krümmung H oberhalb des Heinz'schen Wertes $(\sqrt{17} - 1)/8 \approx 0.3904$ ist immer noch unbekannt.

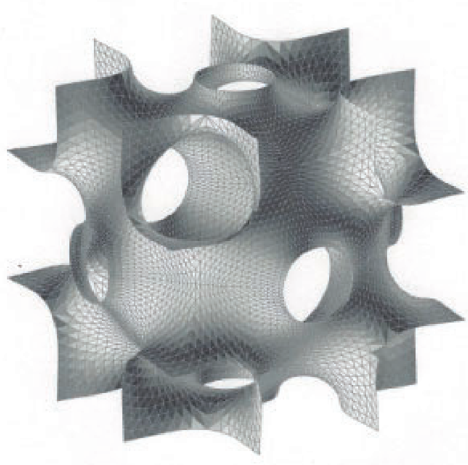


Abb. 4: Eine etwas exotischere Fläche konstanter mittlerer Krümmung, dreifach periodisch, hier nur der Fundamentalbereich im Einheitswürfel

[14] Publiziert als *Über die Existenz einer Fläche konstanter mittlerer Krümmung bei vorgegebener Berandung*, Math. Ann. 127, 1954, 258–287.

[15] Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II, Amsterdam 1954, North-Holland, S. 121.

Regularitätssätze für die Monge-Ampère-Gleichung

Dieses Gebiet begann Erhard Heinz schon 1956, und er hat es in seiner Göttinger Zeit wesentlich vorangebracht. Das Randwertproblem für die Monge-Ampère-Gleichung in einem Gebiet $\Omega \subset R^2$ mit Rand $\partial\Omega$ besteht im einfachsten Fall darin, zu zwei vorgegebenen Funktionen g auf dem Gebiet und f auf dem Rand eine Funktion u zweier Variablen x und y zu finden mit

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial^2 x}\frac{\partial^2 u}{\partial^2 y} - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y}\right)^2 &= g \text{ in } \overline{\Omega} \\ u &= f \text{ in } \partial\Omega. \end{aligned}$$

Die Monge-Ampère-Gleichung wird unter Anderem gebraucht, um Flächen mit vorgegebener Gaußkrümmung zu berechnen, und hängt mit klassischen Einbettungsproblemen von Weyl und Minkowski zusammen.[16]

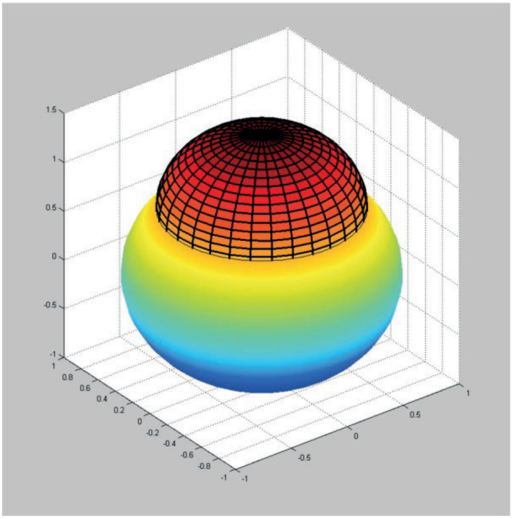


Abb. 5: Einschränkung auf das unsichtbare Kugelsegment, das innerhalb der aufgesetzten Halbkugel liegt

Bei Minimalflächen weiß man, daß sie im Innern ihres Definitionsbereiches immer unendlich oft differenzierbar sind, aber bei Lösungen der Monge-Ampère-Gleichung ist das anders. Selbst wenn f und g und die Randkurve beliebig oft differenzierbar sind, muß das für die Lösung u nicht gelten, es kann Singularitäten in den höheren Ableitungen geben. Deshalb interessiert man sich für die maximal mögliche

[16] Z.B. Josef Bemelmans, Stefan Hildebrandt und Wolf von Wahl: Partielle Differentialgleichungen und Variationsrechnung, in: Ein Jahrhundert Mathematik 1890–1990, Festschrift zum Jubiläum der DMV, S. 149–230, Springer-Verlag 1990.

Differenzierbarkeit der Lösung, und Erhard Heinz hat bewiesen, daß man nur etwas mehr als zweifache Differenzierbarkeit (die man zum Aufstellen der Gleichung ohnehin braucht) garantieren kann.

Um Beispiele für singuläre Lösungen zu bekommen, geht man von einer singulären Funktion u aus, setzt sie in die Differentialgleichung ein, rechnet f und g aus, und hofft, daß diese Funktionen gutartig sind, weil sich die Singularitäten wegheben. Im Umkehrschluß hat man dann für zwei gutartige Funktionen f und g eine bösartige Lösung u. Das klappt z.B. für

$$\begin{aligned} u(x,y) &= (x^2+y^2)^{3/2} \\ g(x,y) &= 18(x^2+y^2) \end{aligned}$$

mit $f = 1$ auf dem Einheitskreis $x^2 + y^2 = 1$. Eine der zweiten Ableitungen von u ist im Nullpunkt nicht mehr differenzierbar, siehe Abb. 8. In einem bestimmten Sinne ist u genau 2.5-mal differenzierbar und belegt damit, daß die Theorie von Erhard Heinz kaum verbesserbar ist. Dieses Standardbeispiel wird oft zur Beurteilung numerischer Lösungsverfahren für die Monge-Ampère-Gleichung verwendet, weil es deren Grenzen aufzeigt.[17]

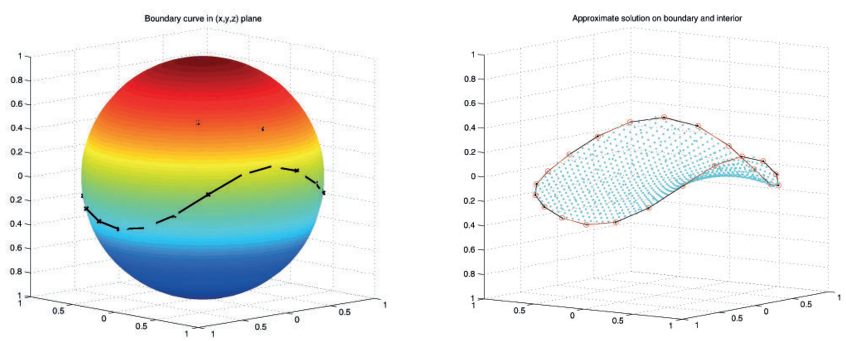


Abb. 6: Eine Fläche mit $H = 0.2$ innerhalb der Einheitskugel zu gegebener Randkurve auf der Einheitssphäre

Erhard Heinz hat anläßlich der Verleihung der Cantor-Medaille 1994 einen zusammenfassenden Übersichtsvortrag[18] auf der Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung gehalten, der den vierzigjährigen Bogen seit seiner ersten Arbeit[19]

[17] Z.B. K. Böhmer, R. Schaback: A Meshfree Method for Solving the Monge-Ampèere Equation, *Numerical Algorithms* 82(2), 2019, 539-551.

[18] Monge-Ampèresche Gleichungen und elliptische Systeme, Jahresber. Deutsch. Math.-Verein. 98 (1996), 173–181.

[19] Über gewisse elliptische Systeme von Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit Anwendung auf die Monge-Ampèresche Gleichung, Math. Ann. 131, 1956, 411-428

zu diesem Thema überpannt. Aus Platzgründen muß ich für weitere Details auf diesen Übersichtsartikel verweisen. Sein Schüler Friedrich Sauvigny (Cottbus) schreibt dazu in den *Mathematical Reviews:* [20]

> With his fundamental results on nonlinear elliptic systems the author opened a king's road to nonlinear elliptic differential equations via the uniformization method.

Dem ist nichts hinzuzufügen, aber es ist zu hoffen, daß sich Jüngere finden, die Erhard Heinz' Königswege in der reellen Analysis ‚konkret-konstruktiver Richtung' beschreiten und weiterverfolgen.

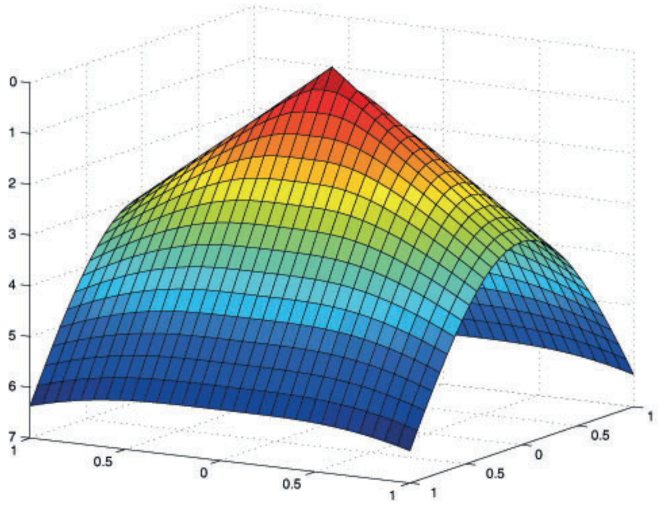


Abb. 7: Die Funktion $-\partial^2 u \,/\, \partial^2 x$ mit Singularität im Nullpunkt

Danksagung

Der Verfasser dankt Frau Ulla Deppe (Akademie), Herrn Dr. Holger Berwinkel (Universitätsarchiv) und Herrn Philipp Kastendieck (Mathematisches Institut) für die Bereitstellung von Materialien, und Prof. Dr. Friedrich Sauvigny (TU Cottbus) für Korrekturen und Verbesserungsvorschläge.

---

[20] MR1421951 (97k:35063) über https://mathscinet.ams.org/mathscinet/.