Thomas Schick

Die vierte Dimension und positive skalare Krümmung

Thomas Schick, Professor für Mathematik in Göttingen, Ordentliches Mitglied seit 2016

Eine Orangenschale kann man nicht platt auf den Tisch ausbreiten. Eine Darstellung der gesamten Erde ohne Verzerrung auf einer Landkarte ist nicht möglich.

Diese Alltagserfahrungen beruhen darauf, dass die Kugeloberfläche in zwei Richtungen gekrümmt ist. Mit der mathematischen Betrachtung solcher Krümmungsphänomene hat sich schon Carl Friedrich Gauß beschäftigt, motiviert durch seine Arbeit bei der Kartografie des Königreichs Hannover. Weitergehende Fragen werden heute von Topologen und Differenzialgeometern in der Mathematik erforscht.

Beispiele von Flächen sind die Oberfläche der Kugel, genannt die zweidimensionale Sphäre, jede Ebene oder auch die Oberfläche eines Rettungsrings, genannt 2-Torus. Die Krümmung, die von Punkt zu Punkt variieren kann, wird gemessen durch eine jedem Punkt zugeordnete Zahl. Präziser spricht man daher von skalarer Krümmung. Dabei werden drei fundamental verschiedene Situationen unterschieden:

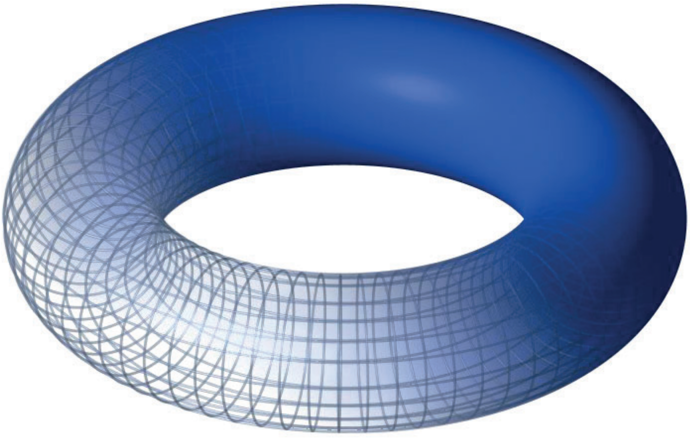

Abb. 1: 2-Torus. Außen positive Krümmung, innen negative Krümmung.

– Die Krümmung an einem Punkt ist positiv, wenn die Fläche in der Nähe des Punktes einer Kugeloberfläche ähnelt. Dies ist bei den äußeren Punkten des Torus der Fall.
– Die Krümmung an einem Punkt ist negativ, wenn die Fläche in der Nähe des Punktes einer Sattelfläche ähnelt. Diese Situation liegt bei den inneren Punkten des Torus vor.
– Die Krümmung ist null, wenn man ein den Punkt enthaltendes Stück der Fläche nahezu verzerrungsfrei auf die Ebene abwickeln kann. Beispiele sind alle Punkte einer Zylinderröhre.

Topologen stellen sich Flächen aus sehr stark dehnbarem Gummi vor, so dass man die Fläche beliebig deformieren kann. Untersucht wird nun die Frage: Welche Form (genannt Riemannsche Metriken) kann man auf diese Weise der Fläche geben – natürlich ohne sie zu zerreißen und neu zusammenzukleben? Kann man die Torusoberfläche so deformieren, dass ihre Krümmung überall positiv ist?

links: **Abb. 2**: Fläche vom Geschlecht 2.

Dies wurde schon vor langer Zeit beantwortet, mit Hilfe der Gauß-Bonnet Formel. Diese besagt, dass der Mittelwert der Krümmung einer Fläche gleich $4\pi(1\text{-}g)$ ist. Hierbei ist g das Geschlecht der Fläche, definiert als die Anzahl der „Löcher". Das Geschlecht der Sphäre ist null, das des Torus eins. Die Oberfläche eines Doppel-Rettungsrings hat Geschlecht zwei. Das bemerkenswerte an dieser Formel: sie gilt für jede mögliche Deformation der Fläche. Die Krümmung kann sich dabei natürlich sehr stark ändern, aber der Mittelwert ist immer die gleiche Zahl. Insbesondere ist wegen des Gauß-Bonnet-Theorems der Mittelwert der Krümmung für den Torus immer null. Auf der anderen Seite: wenn es eine Deformation gäbe, so dass die Krümmung überall positiv wäre, dann wäre natürlich auch der Mittelwert positiv. Allgemeiner folgt aus der Gauß-Bonnet Formel: nur die Fläche mit keinem Loch, also nur die Sphäre, hat eine Deformation, so dass die Krümmung überall positiv ist.

Die gerade beschriebene Methode ist eines der Grundprinzipien der modernen Topologie und Differenzialgeometrie: es werden Invarianten bestimmt (hier das Geschlecht) die Unabhängig von der Deformation sind, aber dann eine Beziehung mit den Krümmungseigenschaften (hier mittels der Gauß-Bonnet-Formel) hergestellt.

Flächen haben Dimension zwei. Nicht so gut anschaulich vorstellbar, aber wichtig in der Physik, bei Modellierungen und innerhalb der Mathematik sind analoge Objekte höherer Dimension, die man in der Regel nur noch durch Formeln darstellen kann. Sie werden Mannigfaltigkeiten genannt. So gibt es Sphären und

Tori beliebiger Dimension. Und auch hier wollen wir die Riemannschen Metriken und ihre Krümmungseigenschaften untersuchen.

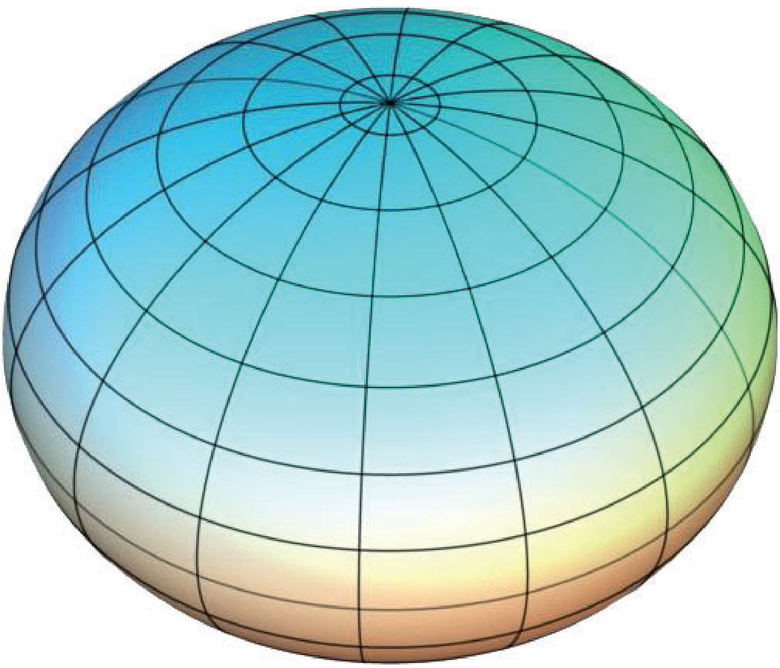

Abb. 3: 2-dimensionale Sphäre. Überall positive Krümmung. Geschlecht 0.

Einsteins allgemeine Relativitätstheorie beschreibt Raum und Zeit durch eine vierdimensionale gekrümmte Mannigfaltigkeit, und die Krümmung ist die entscheidende Größe für die physikalischen Eigenschaften. Positive skalare Krümmung hängt dann mit der Frage zusammen, ob die kosmologische Konstante (eine fundamentale physikalische Größe in der allgemeinen Relativitätstheorie) positiv oder negativ ist, was wiederum die Expansion des Weltalls beeinflusst.

Motiviert hiervon beschäftigen wir uns nun mit der allgemeineren Frage, ob eine gegebene n-dimensionale Mannigfaltigkeit eine Deformation zulässt, so dass die Krümmung überall positiv ist (wie bei der zweidimensionalen Sphäre), oder ob dies nicht der Fall ist (wie beim 2-Torus).

Das Gauß-Bonnet-Theorem gilt allerdings nur in Dimension 2. Ein Ausweg kommt aus einer ganz anderen Richtung der Physik. Paul Dirac hat einen speziellen Differenzialoperator D eingeführt (heute Dirac-Operator genannt). Die zugehörige Differenzialgleichung $Ds = \lambda s$ beschreibt die Energieniveaus des Elektrons. Erwin Schrödinger [7] hat diesen Operator auf die gekrümmten Raumzeiten der allgemeinen Relativitätstheorie verallgemeinert. Und er hat gezeigt, dass

$D^2 = \Delta + k/4$, wobei k die skalare Krümmungsfunktion und Δ der Laplace-Operator ist. Die möglichen Energieniveaus des Elektrons in der allgemeinen Relativitätstheorie werden also durch die skalare Krümmung beeinflusst.

Die Mathematiker Michael Atiyah und Isaac Singer haben diese Ideen aufgegriffen. Sie betrachten eine Mannigfaltigkeit M und den Dirac-Operator D welcher von der Metrik abhängt. Wichtig ist nun die Lösungsmenge der Gleichung $Ds = 0$. So wie der Dirac-Operator hängen auch diese Lösungsmengen von der Metrik ab. Es stellt sich heraus, dass es zwei Typen von Lösungen gibt. Der Index von D, ind(D), wird definiert als Dimension der Menge von Lösungen positiven Typs minus Dimension der Menge der Lösungen negativen Typs.
Überraschend ist nun das Atiyah-Singer-Indextheorem [1] mit der Indexformel **ind(D) = $\hat{A}$(M)**. Hierbei ist $\hat{A}(M)$ eine höherdimensionale Variante des Geschlechts einer Fläche, welche effizient berechnet werden kann und nicht von der Riemannschen Metrik abhängt, im Gegensatz zu D und damit a priori auch ind(D). Schrödingers Formel $D^2 = \Delta + k/4$ kann man nun benutzen um zu zeigen, dass Gleichung $Ds = 0$ dann, wenn die Skalarkrümmung überall positiv ist, nur die Lösung $s = 0$ hat. Dann ist die Lösungsmenge nulldimensional, also auch $\mathrm{ind}(D) = 0$ und somit auch $\hat{A}(M) = 0$. Umgekehrt: $\hat{A}(M) \neq 0$ verhindert die Existenz einer Metrik mit positiver Skalarkrümmung.

Dies kann benutzt werden, um für viele Mannigfaltigkeiten höherer Dimension zu zeigen, dass es keine Metrik mit positiver skalarer Krümmung gibt. Allerdings hat die Methode keine Konsequenz für den n-dimensionalen Torus, da $\hat{A}$ für jeden Torus null ist.

Der vorgestellte Index basiert auf der Dimension der Lösungsräume. Diese sind Vektorräume über den reellen Zahlen. Letzteres gilt, weil der Operator D verträglich mit der Skalarmultiplikation ist.

Eine grundlegende Verfeinerung ist möglich durch Ersatz der reellen Zahlen durch neue, kompliziertere Skalare. Hier verwendet man eine nicht-kommutative Algebra A. Das heißt, man kann Elemente aus A addieren und multiplizieren wie gewöhnliche reelle Zahlen, es gilt aber manchmal, anders als für reelle Zahlen, $ab \neq ba$. Der Dirac-Operator wird dann durch einen neuen Operator D_A ersetzt, der mit der A-Multiplikation kompatibel ist. Die Lösungsmengen von $D_A s = 0$ erhalten dann eine Zusatzstruktur, sie werden A-Moduln. Dies benutzt man, um mehr Information in den Index zu packen. Statt einer Zahl wird der Index ein Element einer der Algebra A zugeordneten Menge K(A), der K-Theoriegruppe von A. Mit diesen Methoden kann man in der Tat zeigen, dass kein Torus irgendeiner Dimension so deformiert werden kann, dass die skalare Krümmung überall positiv ist.

Die aktuellen Forschungen beschäftigen sich mit der Konstruktion von geeigneten A und zugehörigen Dirac-Operatoren, und dann mit der sehr komplizierten Berechnung von K(A), zum Beispiel in [3,4]. Hierzu gibt es wichtige Vermutungen wie die Baum-Connes-Vermutung [2] und die Novikov-Vermutung, die für spezielle A bewiesen wurden, aber im Allgemeinen noch offen sind.

Es wurde sogar eine universelle Algebra A_u konstruiert, für die man vermutet hatte, dass M dann und nur dann eine Riemannsche Metrik mit überall positiver skalarer Krümmung besitzt, wenn der Index des Dirac-Operators in $K(A_u)$ verschwindet, die Gromov-Lawson-Rosenberg-Vermutung [5]. Allerdings konnten wir schon vor einiger Zeit beweisen, dass diese Vermutung falsch ist, indem wir Gegenbeispiele konstruiert haben [6]: es gibt Mannigfaltigkeiten, deren universeller Index verschwindet, die aber trotzdem keine Metrik mit positiver skalarer Krümmung zulassen.

Aktuelle Forschungen versuchen, die oben genannten Vermutung in weiteren Fällen zu beweisen. Gleichzeitig sind wir auf der Suche nach Gegenbeispielen, deren Existenz von den meisten Experten auch erwartet wird. Anwendungen in der Physik wären insbesondere, Modelle von Raumzeiten für die allgemeine Relativitätstheorie auszuschließen, die nicht mit den topologischen Obstruktionen zur Skalarkrümmung und der gewünschten kosmologischen Konstante kompatibel sind.

Literatur

[1] Atiyah, M. F. and Singer, I. M. (1968) The index of elliptic operators. (I). Ann. of Math. (2) 87, 484–530

[2] Baum, P., Connes, A. and Higson, N. (1994) Classifying spaces for proper actions and K-theory of group C*-algebras. In: C*-algebras: 1943–1993 San Antonio, TX, 1993. Contemp. Math. 167, 240–291. Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[3] Hanke, B. and Schick, T. (2006) Enlargeability and index theory. J. Differential Geometry 74, 293–320.

[4] Hanke, B., Kotschick, D., Roe, J. and Schick, T. (2008) Coarse topology, enlargeability, and essentialness. Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. (4) 3, 471–493.

[5] Rosenberg, J. (1983) C*-algebras, positive scalar curvature, and the Novikov conjecture. Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 58, 197–212.

[6] Schick, T. (1998) A counterexample to the (unstable) Gromov-Lawson-Rosenberg conjecture. Topology 37, 1165–1168.

[7] Schrödinger, E. (1932) Diracsches Elektron im Schwerefeld. I. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., Phys.-Math. Kl., 105–128.