GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ

SÄMTLICHE SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
IN GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE
MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

VIERTER BAND

2008

Inhaltsverzeichnis
Copyright

GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN
VON DER
LEIBNIZ-FORSCHUNGSSTELLE HANNOVER
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN
BEIM LEIBNIZ-ARCHIV DER
GOTTFRIED-WILHELM-LEIBNIZ-BIBLIOTHEK
HANNOVER

VIERTER BAND

1670–1673

INFINITESIMALMATHEMATIK

2008

Inhaltsverzeichnis
Copyright

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS HERBERT BREGER

BEARBEITER DIESES BANDES
WALTER S. CONTRO · EBERHARD KNOBLOCH

Inhaltsverzeichnis

INHALTSVERZEICHNIS

VORWORT

Der vorliegende vierte Band der Mathematischen Schriften enthält den ersten Teil von Leibniz' infinitesimaler Mathematik: die Aufzeichnungen bis zum Jahre 1673. Dabei ist die arithmetische Kreisquadratur ihres Umfangs wegen ausgegliedert; die Aufzeichnungen dazu sind für den sechsten Band vorgesehen.

Die Bearbeitung des Bandes erfolgte am Leibniz-Archiv hauptamtlich durch Dr. Walter S. Contro. Prof. Dr. Eberhard Knobloch führte die von ihm übernommenen Arbeiten als freier Mitarbeiter neben seinen anderen zahlreichen Verpflichtungen durch. Der vorliegende Band der Mathematischen Schriften ist der letzte, für den Eberhard Knobloch als Reihenleiter fungiert hat. Ihm gebührt ein großer Dank für seine jahrzehntelange engagierte Tätigkeit.

Bei der Bearbeitung konnten eine Reihe von Transkriptionen von Conrad Heinrich Müller (1878–1953) zum Vergleich herangezogen werden. Die Schlussredaktion wurde von beiden Bearbeitern gemeinsam durchgeführt. Das Sachregister wurde von Dr. Uwe Mayer und Dr. Siegmund Probst nach Vorgaben von Eberhard Knobloch erstellt. Die digitale Erfassung der Stücke und die Erstellung des Satzes lag in den bewährten Händen von Manuela Mirasch-Müller.

Die Akademie der Wissenschaften zu Göttingen hat die Arbeit an diesem Band nicht nur finanziert, sondern auch, nicht zuletzt durch die Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften und ihren Vorsitzenden, Herrn Professor Dr. Jürgen Mittelstraß, die Belange der Editionsstelle betreut. Auch dem Ltd. Direktor der Gottfried-Wilhelm-Leibniz-Bibliothek Niedersächsische Landesbibliothek Hannover, Dr. Ruppelt, gilt ein Dank. Anke Hölzer und Jutta Wollenberg sowie vielen anderen Mitarbeitern/innen der Leibniz-Bibliothek ist für gute Zusammenarbeit zu danken.

Für die Beantwortung von Einzelfragen möchte ich Prof. Dr. Ursula Goldenbaum (Atlanta) danken. Teile des Bandes standen schon seit dem Jahre 2002 in unkorrigierter Fassung im Internet. Auf die Konkordanzen und Kumulierungen im Internet sei verwiesen (http://www.leibniz-edition.de).

Prof. Dr. Manfred Breger hat freundlicherweise die unter Linux laufenden Programme und Datenbanken betreut. Wie schon bei früheren Bänden ist der Satz auch dieses Bandes mittels des TEX-Macropakets EDMAC vom Leibniz-Archiv erstellt worden; Herrn John Lavagnino (Massachusetts) und Herrn Dominik Wujastyk (London) ist für die freundliche Überlassung der Macros zu danken. Der Verlag hat wieder eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten. Für die Zusammenarbeit in der Schlussphase danke ich Herrn Peter Heyl vom Akademie-Verlag.

Hannover, September 2008 Herbert Breger

EINLEITUNG

Der vorliegende Band umfasst – bis auf das in Zusammenhang mit Leibniz' Hobbes-Lektüre stehende Stück N. 4 – die Studien, Entwürfe, Aufzeichnungen zur Infinitesimalrechnung von März 1673 bis Ende 1673. Beigegeben sind die hierzu gehörenden Unterstreichungen und Marginalien, die Leibniz in seinen Handexemplaren der Werke von Fabri (N. 1), Huygens (N. 2), N. Mercator und Ricci (N. 3) eingetragen hat. Ein großer Teil der von Dietrich Mahnke bereits 1926 in einer bahnbrechenden Arbeit studierten Leibnizschen Aufzeichnungen wird damit erstmals veröffentlicht.

Die Texte wurden in 51 Hauptstücken zusammengefasst, deren Länge zwischen sechs Zeilen (N. 13) und 76 Seiten (N. 16) schwankt. Nur von drei Stücken (N. 10; 16_1; $16_4 4$) waren bisher Teile, insgesamt nur wenige Seiten im Druck zugänglich.

Die chronologische Anordnung der Stücke, die (von N. 4 abgesehen) nur einem Zeitraum von gut neun Monaten angehören, war sehr schwierig, da nur zwei von ihnen (ungefähr) datiert sind: N. 40 auf August 1673, N. 51 auf Ende 1673. Alle anderen Stücke mussten wie im Falle der drei vorangegangenen Bände dieser Reihe vor allem mit Hilfe von Verweisen, charakteristischen Besonderheiten des Inhalts, der Schreibweise (Notation), des Papiers (Wasserzeichen) relativ datiert werden. Nachträgliche Überarbeitungen haben dazu geführt, dass sich bestimmte Stücke aus inhaltlichen Gründen scheinbar wechselseitig voraussetzen. Solche Überarbeitungen sind insbesondere in der so genannten *Mathematica Collectio* (N. 9; 10; 12; 14; 15; 16; 17) und in den Stücken N. 26; 27 nachweisbar.

Quellen, Marginalexemplare

Beraten durch Huygens beginnt Leibniz im Frühjahr 1673 mit dem ernsthaften Studium der Infinitesimalmathematik. Am Beginn stehen die Werke von Fabri, Huygens, Pascal. Von hier ausgehend arbeitet sich Leibniz auf breiter Front, zugleich rezipierend und weiterentwickelnd, in die gesamte Materie ein. Neben dem weiteren Studium von Fabri (N. 8; 34), Huygens (N. 7; 11) und Pascal (N. 19) befasst er sich insbesondere mit Sluse (N. 6; 8), J. Gregory (N. 8), Schooten (N. 24), Grégoire de St. Vincent (N. 31), Wallis (N. 34), Descartes (N. 24; 35; 41), Hudde (N. 35).

Von den aus Leibniz' Pariser Zeit auf uns gekommenen Werken enthalten die meisten nur wenige Marginalien. Ausnahmen mit gehäuften Einträgen sind die Werke von Fabri und Huygens. Pascals *Lettres de Dettonville* hat Leibniz sich nicht beschaffen können; dies erklärt die ausführlichen Exzerpte von N. 10. Ebenso besaß Leibniz kein Exemplar von Wallis' *Mechanica*; hier hat er sich vornehmlich auf die ergänzenden Artikel in den *Philosophical Transactions* bezogen. J. Gregorys *Exercitationes geometricae* hat Leibniz zwar bereits 1673 besessen, die Marginalien darin stammen aber zum größten Teil erst aus der späteren Pariser Zeit. Die Schootensche *Geometria*-Ausgabe hat Leibniz erst nach 1673 zu Eigen bekommen. Er hat sie zwar ausgiebig benutzt, hat aber kaum Marginalien darin hinterlassen. Das Werk von Grégoire de St. Vincent hat Leibniz zwar recht früh gekannt, hat aber in der Pariser Zeit kein eigenes Exemplar zur Verfügung gehabt. Die Marginalien in dem uns erhaltenen Handexemplar stammen sehr wahrscheinlich aus früher Hannoverscher Zeit.

Abgedruckt werden hier die Eintragungen in den Handexemplaren von Fabri (N. 1), Huygens (N. 2), N. Mercator und Ricci (N. 3).

Terminologie

(1) functio, officium

Im Sommer 1673 führt Leibniz die Ausdrucksweise facere officium, facere functionem ein (N. 27; vgl. *LSB* VII, 3 S. XXIV), um auszudrücken, dass bestimmte Strecken den Tangentenabschnitt, die Subtangente (N. 35; 39; 40; 50: producta), Normale, Subnormale (N. 35; 40: reductae) usf. bilden (Mahnke, *Neue Einblicke*, S. 47 f.). In N. 28, 35, 40, 41, 44, 51 ist nur noch von functiones die Rede, die ab N. 40 (functionem obtinere) mit diesen von den Kurvengleichungen abhängigen Größen gleichgesetzt werden: z. B. heißt es in N. 41: An Stelle der Subnormalen können auch andere functiones zum Ermitteln der Quadraturen dienen.

(2) Unendlich klein und verwandte Begriffe

Um Größen als unendlich klein zu bezeichnen, verwendet Leibniz eine Fülle nicht äquivalenter, nicht konsistenter, gegebenenfalls nicht definierbarer Ausdrücke:

minimus

Die Sprechweise minimum seu punctum in N. 7 geht auf Nicolaus von Kues zurück, wo auch die Wendung punctum seu nihilum auftritt. Nicht cusanisch ist die Gleichsetzung von punctum und quantitas inassignabilis, nicht zuordenbare Größe (N. 16_4), da für Cusanus der Punkt keine Größe, sondern gemäß der aristotelischen Größendefinition ein nonquantum, eine Nichtgröße ist. Wie Kepler spricht Leibniz von minimi arcus (N. 10), minimae partes (N. 16_4). Diese im Wortsinn nicht definierbare Minimalität (etwa einer Differenz) definiert er in N. 16_4 durch minor assignabili quavis, durch kleiner als eine beliebige zuordenbare. Zwar muss eine solche Größe (Differenz usf.) Null sein und ist es auch für Leibniz (s. u. minor assignabili quavis), dennoch bildet er kleinste Teile 2. Ordnung, minimies minimae partes bzw. die Differenz zwischen zwei minimae applicatae: differentia … inter duas minimas applicatas minor est qualibet recta quae non dicam cogitari, sed fingi possit (N. 16_4). Er unterscheidet also zwischen Denken und Vorstellen einer solchen Größe. In N. 7 setzt er die Begriffe minimus und infinite parvus nicht einander gleich: die minima seu prima chorda ist qualibet assignabili minor. Die latitudo infinite parva ist qualibet data minor.

infinite parvus

In N. 7 verwendet Leibniz unmittelbar hintereinander die Ausdrücke latitudo qualibet data minor und latitudo infinite parva, setzt also kleiner als jede beliebige gegebene (sc. Breite) mit unendlich kleiner Breite gleich, ohne diese Gleichsetzung durchgängig beizubehalten. Das entscheidende Wort ist data, gegeben. Es erlaubt, diesen Leibnizschen Begriff unendlich klein unmittelbar in eine ε-δ-Abschätzung des 19. Jahrhunderts zu übersetzen.

Nach dieser Definition ist unendlich klein eine variable, keine konstante Größe. Entsprechende Teile einer Strecke heißen deshalb partes indefinitae (N. 10). Im linearen Fall ist eine quantitas quavis data minor eine portio lineae (N. 16_1).

inassignabilis

Eine andere Definition von unendlich klein gibt Leibniz in N. 39: inassignabilis seu infinite parva, nicht zuordenbar oder unendlich klein. Dies gilt widerspruchsfrei auch von einer variablen Größe im Sinne der vorangehenden Gleichsetzung. Umgekehrt spricht Leibniz von einer linea finita seu assignabilis (N. 40_1). Die Terminologie lehnt sich an Nicolaus von Kues an, der quanta als signabilia, als in Zeichen angebbar, charakterisiert hatte.

Eine entsprechende Strecke ist linea assignabili infinities minor bzw. quadratilli latere infinities maior (N. 16_1). In N. 16_4 erhalten u. a. pars, aliquota, magnitudo das Attribut inassignabilis. Aber Leibniz sagt dort auch, der Punkt sei eine quantitas bzw. linea inassignabilis. Dies steht zwar im Einklang mit der minimum-Definition, ist jedoch nicht mit der qualibet data minor Definition von unendlich klein äquivalent.

In den Stücken N. 26 und 27 entwickelt Leibniz anhand seines charakteristischen Dreieckes eine trigonometria inassignabilium. In N. 29 ist von chorda seu arcus inassignabilis die Rede.

minor assignabili quavis

In N. 7 treten chordae qualibet assignabili minores auf. In N. 16_4 zieht Leibniz den richtigen, notwendigen Schluss, dass eine Größe, die kleiner als jede zuordenbare (nicht mehr zugeordnete oder gegebene) Größe ist, Null sein muss: differentia erit nulla vel quod idem est assignabili qualibet minor. Dennoch bildet er Differenzen zwischen solchen Differenzen, die Null sind (s. minimus).

minor quolibet finito (numero)

Ein Bruch, dessen Zähler eine endliche, dessen Nenner eine unendliche Zahl ist, ist minor quolibet finito numero (N. 16_1).

infinitesima pars (lineae)

Leibniz verwendet den Ausdruck infinitesima attributiv, wie in infinitesima pars lineae (N. 16_1; 38), und substantivisch, wie in infinitesima lineae seu punctum (N. 27).

indivisibilia

Was keine Teile hat, kann nach Aristoteles bzw. Nicolaus von Kues keine Größe sein, ist deshalb für Geometrie und Arithmetik unbrauchbar. Ausdrücklich vermerkt deshalb Leibniz im späten Frühjahr 1673 (N. 16_1): Indivisibilien sind als unendlich klein zu definieren, seu quorum ratio ad quantitatem sensibilem (vel differentia) infinita est, deren Verhältnis (oder Differenz) zu einer wahrnehmbaren Größe unendlich ist. Das ergänzte (vel differentia) ist irreführend. Die Rückführung auf ein unendliches Verhältnis entspricht dem minor-quolibet-finito-numero-Beispiel, in dessen Nähe sie auch steht. Wichtig ist, dass diese Erklärung von unendlich klein ausdrücklich ein Verständnis von unendlich voraussetzt.

Dementsprechend wird eine Indivisible gegebenenfalls als infinitesimaler Streckenteil verwendet (N. 38). Wegen des Größencharakters der Indivisiblen kann Leibniz im arithmetischen wie geometrischen Zusammenhang von einer Summe von Indivisiblen sprechen (N. 10; 38). In der Geometrie der Indivisiblen setzt er eine unendlich kleine Einheit voraus (N. 10; 29). Seine Überlegung führt er für geometrische Objekte beliebiger Dimension durch. Um ein Objekt n-ter Dimension zu erhalten, bedarf es einer Einheit (n-1)ter Dimension und einer (n-1)fach unendlichen Schar von zweidimensionalen Linien (N. 10). Die Applizierung einer Strecke an eine lineare Einheit ergibt eine Fläche, die kleiner als eine beliebige gegebene ist, also unendlich klein gemäß einer seiner Definitionen von unendlich klein.

unitas constructionis

Im Anschluss an diese Überlegungen zu einer (unendlich kleinen) Einheit im Rahmen der Indivisibelngeometrie stellt er allgemein fest (N. 17): Bei jeder bis ins Unendliche teilenden Konstruktion sei eine unitas constructionis zu suchen oder eine Strecke, die in partes indefinitas aequales, in gleiche Teile unbestimmter Größe geteilt wird. Er definiert also die unendlich kleine Konstruktionseinheit als eine variable Größe, die in der Rechnung mit Eins gleichgesetzt (N. 18), in der Konstruktion angenommen wird (N. 26). Die Festlegung der unitas constructionis ist – modern gesagt – mit der Wahl der unabhängigen Variablen gleichbedeutend. Diese Erkenntnis hat sich Leibniz schrittweise erarbeitet. Sie ist für die Genesis des neuen Begriffs functio grundlegend geworden.

(3) infinitus

Von den möglichen logischen Umkehrungen der Erklärungen von unendlich klein tritt nur eine Kombination der Umkehrungen von minor assignabili quovis und minor quolibet finito numero auf. Die Summe der als divergent erkannten harmonischen Reihen bezeichnet Leibniz als major quolibet numero finito assignabili (N. 16,1).

(4) Paraboloide, Hyperboloide

Paraboloide sind für Leibniz Kurven vom Typ $ax^n = y^m$, Hyperboloide Kurven vom Typ $x^n y^m = a$.

(5) Quadraturen

Leibniz unterscheidet zwischen drei Arten von Quadraturen. Die arithmetische Quadratur stellt die Fläche einer Figur genau und geometrisch durch eine unendliche Reihe rationaler Zahlen dar. Sie heißt geometrisch und völlig vollkommen, wenn sie die Fläche durch eine endliche Größe genau darstellt. Sie heißt mechanisch, wenn die Fläche durch eine Größe dargestellt wird, deren Differenz zur wahren Größe so klein ist, dass die Differenz in der Praxis vernachlässigt werden kann (N. 40). Leibniz sagt nicht: unendlich klein ist.

(6) „Falsche“ und „wahre“ Kurvengattungen

Die bis zum Schnittpunkt mit der senkrechten, der „falschen“ Tangente verlängerte Kreissehne des Komplements heißt „falsche“ Sekante. Die Konchoide heißt „falsch“, wenn die Sekante nicht vom Mittelpunkt, sondern vom anderen Ende B des Durchmessers AB ausgeht, während die Tangente vom einen Ende A ausgeht (N. 26).

Die „wahre“ Hyperbel heißt auch Figur der Verhältnisse oder der Logarithmen (N. 34; 40).

Die Figur der Winkel (N. 34; 39; 40; 41) heißt so, weil sich Abschnitte der durch eine Asymptote begrenzten Fläche wie die zugehörigen Kreisbögen bzw. Winkel verhalten. Diese Figur heißt auch „falsche“ Hyperbel, da dieselben Sekanten je nach Verwendung eine Hyperbel bilden oder zu einer Winkelfigur führen (N. 39).

Themenschwerpunkte

(1) Kreissegment und Transmutationssatz

Von besonderer Bedeutung für die Kreisquadratur ist Leibnizens Gedanke, Flächen (spatia) auf verschiedene Weisen in unbestimmte (indefinitae), da unendlich kleine Teile zu zerlegen (N. 17, Fig. 11a, 11b). Leibniz sagt alia atque alia constructio, verwendet also einen geometrischen Begriff. Er führt die allgemeine Überlegung am Beispiel eines Kreissegments und eines Halbkreises durch. Die Teile können gleich oder verschieden, parallel oder nicht parallel sein. Die in Fig. 11a vom Punkt A aus gezogenen Sehnen führen zu verschiedenen Dreieckchen. Die in Fig. 11b gezogenen Ordinaten führen zu parallelen Flächenstückchen. Leibniz fügt die Teile der einen Fläche an die Teile der anderen Fläche an (etwa Sehnen an die Ordinaten): applicare (anfügen, anlegen) ist ein geometrischer, kein arithmetischer Begriff (etwa multiplizieren), wie der Ausdruck figura applicata ad quodlibet punctum beweist. Das Ergebnis (productum seu summa areae productae) ist, so Leibnizens Behauptung, unabhängig von der Wahl der Konstruktionen. Es ist keine fehlerhafte Formulierung des Transmutationssatzes (s. dagegen Mahnke, *Neue Einblicke*, S. 35).

Einen weiteren Schritt zum Transmutationssatz legt Leibniz in N. 12 zurück. An einem Kreissegment mit dem Scheitelpunkt B und dem Kreislinienpunkt C (Fig. 1) weist er nach, dass der Abstand der Tangente in C vom Scheitelpunkt B gleich dem sinus versus (1 – cosinus) des vom Segment aufgespannten, am Kreismittelpunkt zu messenden Winkels ist. Die Fläche des Kreissegmentes bzw. Kreispolygons sei danach: summa sinuum versorum ducta in latus polygoni. Leibniz vergisst also die Division durch Zwei zur Berechnung einer Dreiecksfläche.

Die richtige Formulierung des Satzes über die Kreissegmente steht in N. 16_1: Summa sagittarum arcui impositarum, facit duplum segmentum. Leibniz begründet dort, warum er die Bezeichnung sagitta (Pfeil) dem Ausdruck sinus versus vorzieht. In derselben Studie findet sich freilich erneut die fehlerhafte Formulierung.

Eine arithmetische Weiterführung des Erreichten findet sich in N. 27. In voller Allgemeinheit — Esto figura quaelibet — und richtig ist die Überlegung mittels der Tangentenabstände vom Scheitelpunkt der Kurve in N. 39 (fig. 1) durchgeführt.

(2) Charakteristisches Dreieck
Im Anschluss an N. 12 beginnt Leibniz ein sorgfältiges Studium des Pascalschen *Traité des sinus du quart de cercle*. Die Abhandlung Pascals beginnt mit einem Lemma und einer zugehörigen Figur 26: in einem beliebigen Punkt des Viertelkreises ist das Dreieck gezeichnet, dessen Hypotenuse Tangentenabschnitt ist. Diese und die Figur 16 zum Pascalschen Satz von der Summe der sinus versi haben Leibniz zur Konzeption seines von ihm triangulum characteristicum genannten unendlich klein zu denkenden Dreiecks geführt (Mahnke, *Neue Einblicke*, S. 37 f.) Der Ausdruck tritt erstmalig in N. 24 (Frühsommer 1673) auf, programmatisch in den Titeln von N. 28 für die Ellipse, von N. 29 für Trochoiden und Zykloide. Im Programmstück N. 36 vom Sommer 1673 spricht er allgemein vom „rechtwinkligen Dreieck mit unendlich kleinen Seiten, das von mir das charakteristische genannt zu werden pflegt“, so wie er es auch in N. 40 (August 1673) tut. Der Sache nach tritt es bereits in N. 20, 21, 22, 23 (je am Kreis) vom Frühsommer, später in N. 34 vom Sommer auf. Grundlegend ist es für die Ableitung der 80 Sätze von N. 26 bzw. 77 Sätze von N. 27. In N. 26 verwendet Leibniz unter Verweis auf N. 27 den Ausdruck trigonometria inassignabilium, Trigonometrie des nicht Zuordenbaren. N. 27 hat den Begriff inassignabilia, auf den sich Leibniz viermal in N. 26 bezieht. Dementsprechend spricht er von N. 28 vom triangulum characteristicum inassignabile.

(3) Kreisquadratur
In N. 12 legt Leibniz den Grund für die Entdeckung der arithmetischen Kreisquadratur, das heißt einer konvergenten, unendlichen Reihe von rationalen Zahlen, deren Summe die Kreisfläche ergibt. Er gewinnt die Einsicht in den Zusammenhang zwischen Kreisquadratur und Pascalschen Sätze über die Summe der sinus (sinus recti) sowie der Summe für 1 − cosinus (sinus versi). Die Fläche der Dreiecke, in die er ein Kreissegment zerlegt, wird mittels Bogenelement und sinus versus dieses Bogenelements berechnet. Die Segmentfläche ist aber gerade der Summe der sinus versi gleich, die sich auch durch die Summe der Quadrate der sinus des halben Bogens ausdrücken lassen. Da er noch an der Möglichkeit einer rationalen Kreisquadratur zweifelt, zweifelt er vorübergehend an der Richtigkeit der Pascalschen Sätze. Die Stücke N. 27, 31, 32, 33, 40, 42, 44, 45 lassen seinen Weg zur Kreisquadratur erkennen.

In N. 27 leitet er 77 Sätze ab, die aus dem charakteristischen Dreieck eines Kreisquadranten folgen, und versucht, die Ergebnisse auf andere Kurven zu übertragen. Leibniz stellt fest, niemand habe bisher die Kreisausmessung mittels einer unendlichen Reihe rationaler Zahlen geben können. Er betont die große Bedeutung einer solchen Rückführung des Kreises auf rationalitas. In N. 32 bemüht er sich um die Quadratur mittels Momentenbetrachtungen. In N. 33 identifiziert er die Summe der sinus mit der Kreisquadratur. Es sei der Mühe wert, die Möglichkeit einer rationalen, derartigen Quadratur zu prüfen. Im August 1673 durchschaut er die Erzeugung einer arithmetischen Quadratur und die Wesensgleichheit von Rektifikationen, Quadraturen, umgekehrten Tangentenkonstruktionen. Er hebt hervor, niemand habe vor ihm eine solche Quadratur für den Kreis gegeben. Die Aufdeckung (nicht Lösung) des bedeutendsten Problems, die arithmetische Quadratur aller Figuren, schreibt er sich zu (N. 40). Die erste Kreisquadratur in unmittelbarem Zusammenhang mit der Hyperbelquadratur lässt sich auf den Herbst 1673 datieren (N. 42). Dazu gehören N. 44 und 45. Schon früh hat Leibniz den Zusammenhang zwischen Kreis- und Hyperbelquadratur thematisiert (N. 25 vom Frühsommer), danach in N. 34, 40, 42, 44. In N. 25 gelangt er zu der fundamentalen Einsicht, dass ein solcher Zusammenhang mit Hilfe des Imaginären hergestellt werden könnte, verfolgt aber diesen Gedanken nicht weiter.

(4) Konchoide, Zykloide, Zissoide, Spirale, Bertetsche Kurve
Im Zusammenhang mit der Zyklometrie widmet sich Leibniz Schwerpunkt-, Tangenten-, Quadratur- und Kubaturproblemen, die sich bei bestimmten höheren Kurven ergeben, oder der Ermittlung der Kurvengleichung:

bei der Konchoide (N. 16_1; 17; 22; 24; 26; 28; 34; 35; 39; 40):
Sie heißt auch figura tangentium (N. 16_1 retorta conchoeidis; 22; 34), wenn man den Flächenanteil des erzeugenden Kreises fortlässt. Unter diesem Rest versteht er ausdrücklich eine Konchoide (N. 26). Sie entsteht aus der Ordinate des Kreises und der Hyperbel zur Asymptote (N. 40). Er spricht von „falscher“, statt „wahrer“ Konchoide, wenn die Sekante nicht vom Kreiszentrum, sondern einem Ende des Kreisdurchmessers ausgeht (N. 26);

bei der Zykloide (N. 7; 9; 10; 14; 15; 17; 26; 29; 30; 34; 36; 39; 40):
Er verweist auf Torricelli, Pascal, Fabri, Lalovera (N. 39). Er fragt sich, ob die Zykloide die Trochoide einer anderen Kurve sein kann (N. 30);

bei der Zissoide (N. 26; 27; 34; 39; 41; 42):
Er verweist auf Wallis und identifiziert die Zissoide, entsprechend seinem Vorgehen bei der Konchoide, als figura tangentium falsorum (N. 34);

bei der Kreis- und Zykloiden-Spirale (helix circularis, helix cycloeidalis (N. 14; 15);

bei der Bertetschen Kurve (N. 50):

Bertet hatte Ozanam, dieser Leibniz aufgegeben, die Kurve zu finden, die die verlängerten Radien eines Viertelkreises miteinander verbindet. Die Verlängerung ist dem bis dahin überstrichenen, rektifizierten Kreisbogen gleich.

(5) Paraboloide, Hyperboloide
Leibniz untersucht die entsprechenden Probleme wie im Falle der anderen höheren Kurven (N. 9; 10; 16_4; 17; 19; 25; vor allem 37; 38; 39; 40; 49). Spezielle Hyperboloide nennt er hyperboloeides apotomicae (N. 16_4), quadraticae (N. 17), cubicae (N. 19).

(6) Die Umkehrung des Tangentenproblems
Von der Kurvengleichung hängt das Veränderungsgesetz der abhängigen Größen Tangente, Subtangente, Normale, Subnormale, Sekante usf. ab, die Leibniz functiones nannte (N. 27; 40; s. Abschnitt Terminologie). Das umgekehrte Tangentenproblem besteht darin, aus dem gegebenen Veränderungsgesetz dieser Größen auf die zugrunde liegende Kurve rückzuschließen. Demgemäß wählt Leibniz für N. 40 die Überschrift Methodus tangentium inversa seu de functionibus. Modern gesprochen geht es um die Lösung gewöhnlicher Differentialgleichungen 1. Ordnung. Deren Problem ist N. 27, vor allem N. 40 und erneut N. 44 gewidmet. In N. 40_1 bildet Leibniz unendlich kleine Linien höherer Ordnung (dimensio), in moderner Terminologie also Differentiale höherer Ordnung. Er hebt die Bedeutung der doctrina de linearum dimensionibus hervor. Das Thema sei eine Art Analysis der Analysis, auf der der Gipfel der menschlichen Wissenschaft beruhe (N. 40_4).

(7) Kugel, Sphäroide
Im Anschluss an Huygens, Fabri, Regnauld studiert Leibniz die Oberflächen von Drehellipsoiden (sphaeroeides) und setzt jene in Beziehung zu Oberflächen von Kugeln und Halbkugeln (N. 11).

(8) Verallgemeinertes Keplerproblem
In seiner Sendung für Leibniz vom 20. IV. 1673 (*LSB* III, 1 S. 72) hatte Oldenburg das Problem erwähnt, das Kepler in der *Astronomia Nova* (Kap. 60) gestellt und für apriorisch, das heißt mathematisch unlösbar erklärt hatte: Man zerlege die Fläche eines Halbkreises von einem beliebigen Punkt des Durchmessers aus in einem gegebenen Verhältnis.

In einer Reihe von Studien untersucht Leibniz das allgemeinere Problem von Flächenteilungen. In N. 32 vom Sommer 1673 formuliert er die Aufgabe, einen beliebigen Teil der Kreisfläche „statisch zweizuteilen“. In voller Allgemeinheit tritt das Flächenteilungsproblem in den Stücken N. 39, 40, 46, 50 auf: Gegeben sei eine beliebige Kurve, man finde eine figura, die mit derselben Kurve in einem Verhältnis geteilt wird (N. 39); gegeben sei eine beliebige figura, man teile sie in einem beliebigen Verhältnis. Die zugehörige

Kurve heißt curva ὁμότομος (N. 40). N. 46 ist den curvae bzw. figurae syntomoi gewidmet: das Attribut syntomos erklärt Leibniz in N. 51 durch aequisecabilis (gleiche Schnitte hervorrufend). Instrumentelle Lösungen solcher Teilungsprobleme werden in N. 40 und N. 51 erwähnt. Huygens gegenüber definierte er im Oktober 1674 solche figurae als solche, deren portiones beständig einander gleich sind (*LSB* III, 1, S. 142).

(9) Die Collectio Mathematica

Im Laufe des Frühjahrs 1673 entstand eine Reihe von sieben Studien (N. 9; 10; 12; 14; 15; 16; 17), die Leibniz nachträglich zu einer Gruppe zusammengefasst hat. Wir haben ihr den gemeinsamen Titel *Collectio mathematica* gegeben. N. 17 gehörte ursprünglich dazu, ist dann aber von Leibniz ausgeschieden worden, obwohl in N. 17 der Satz über das Zykloidensegment abgeleitet wird (vgl. *LSB* III, 1 S. 115). Hauptgrund für das Ausscheiden ist eine später von Leibniz als falsch erkannte Begriffsbildung bezüglich des Schwerpunktes. Wir haben aus inhaltlichen und historischen Gründen der Textgenese N. 17 bei der Gruppe belassen. Ebenso gehört N. 7 in den Umkreis der *Collectio*.

Im Anschluss an die Lektüre von Pascal (*Lettre à Carcavi*) arbeitet sich Leibniz in die Schwerpunktlehre ein. Den Schwerpunkt möchte er als geometrischen, nicht mechanischen Begriff gewertet wissen. Er stellt qualitative Überlegungen zum wechselseitigen Zusammenhang der Kegelschnittquadraturen zueinander und zur Berechnung gekrümmter Oberflächen an. Für das Produkt aus Gewicht und Arm verwendet er den Begriff figura isostatica oder momentum (N. 9). Die Früchte seiner Lektüre der Pascalschen *Lettres*, die ihm Huygens nach dem Gespräch vom Frühjahr 1673 über Schwerpunktbestimmungen geliehen hatte (*LSB* III, 1 S. LIV), zeigen sich in N. 10. Leibniz betont, dass in der Indivisiblengeometrie zur Erzeugung von Größen höherer Dimensionen (Fläche, Körper, vierdimensionale Gebilde) die Strecken einer geeigneten Potenz einer Einheitsstrecke (unitas) appliziert werden müssen. Die unendlich vielen Strecken ergeben unendlich viele Flächen, von denen jede kleiner als eine beliebig gegebene ist (superficies qualibet data minores). Diese ergeben notwendigerweise die endliche Fläche. Leibniz verwendet nicht den Begriff unendlich klein, weder für die Einheit noch für entstehende höherdimensionale Größe, den er im Laufe des Jahres 1673 auf diese Weise streng definiert. Leibniz dehnt die Überlegung im Anschluss an Pascals Bemerkungen über vierdimensionale Gebilde sofort auf diese aus: man benötigt z. B. unendlichmal unendlichmal unendlich viele Strecken, die der dritten Potenz der Einheit appliziert werden müssen, um ein vierdimensionales Gebilde zu erhalten.

Auf der Suche nach Methoden, die die Arithmetica infinitorum verbessern, zeichnet er zweimal die von Pascal übernommene Figur, die später zur arithmetischen Quadratur des Kreises führen sollte (N. 10_2 , Fig. 1a, 1b). Er berechnet die vom gemeinsamen Kreispunkt ausgehenden Sehnen (chordae ad ordinatas), noch nicht die Segmentflächen. Die Summe dieser Sehnen ergibt den Flächeninhalt einer Halbparabel.

In N. 12 bekennt er angesichts der Pascalianae dimensiones nichts Neues gefunden zu haben. Er bedauert, die Natur habe alle Zugänge zur Kreisquadratur versperrt. Dennoch spielt N. 12 eine entscheidende Rolle zu deren Entdeckung (s. Themenschwerpunkt (1) Kreisquadratur).

In N. 14 setzt Leibniz im Anschluss an Huygens und Pascal die Schwerpunktbetrachtungen fort. Er untersucht den Zusammenhang zwischen der Schwerpunktberechnung einer Kurve und der Oberflächenberechnung des zugehörigen Hufes und Rotationskörpers. Er verwendet kleinste Teile 2. Ordnung (minimies minimae partes), aus denen er die „kleinsten Teile“ (minimae partes) erzeugt.

Diese Überlegungen werden in N. 15 und N. 17 fortgesetzt. Auf der Suche nach dem richtigen Umgang mit dem Unendlichen fällt der entscheidende Satz: *Ita cum infinito agendum est, ut cum finito agi posset, nisi sit ratio in contrarium.*

Das umfangreiche Stück N. 16 ist bei aller Themenvielfalt (unendliche Reihen, Schwerpunktbetrachtungen, Quadraturen, Algebra usf.) vor allem diesem richtigen Umgang gewidmet, dem Zusammenhang zwischen arithmetica infinitorum oder continuorum und arithmetica pura, den Indivisiblen, dem Unendlichen, der Rolle infinitesimaler Einheiten. Er leitet allgemeine Sätze der Art ab wie: eine quantitas inassignabilis ändert bei Multiplikation oder Division nicht die vorliegende Größe oder Dimension. Die allgemeinste Methode, krummlinig begrenzte Flächen zu quadrieren, verwendet die Differenzen der Ordinaten.

Programmatische Studien und Aussagen

Von besonderem Interesse sind die programmatischen Studien N. 36 und entsprechende Äußerungen in Stücken wie N. 16, 17, 27, 29, 36, 40. Ziel der Geometrie sei, die Größen gegebener Figuren zu messen bzw. die Figuren einer gewünschten Größe zu finden. Diese Aufgabe führt ihn zunächst zu einer Zweiteilung der Geometrie in apollonische und archimedische (N. 16_3), die er durch Hinzunahme einer euklidischen zu einer Dreiteilung erweitert (N. 36). Die allgemeinste Methode, krummlinige Figuren zu quadrieren, stützt sich auf die Differenzen der Ordinaten (N. 16_4 Teil 3). Leibniz bemerkt jedoch bald, dass auch andere Elemente als die Ordinaten nicht unnützlich seien, sofern sie parallel sind (N. 17).

Er beklagt die Unvollkommenheit der Algebra und Reihenlehre (arithmetica serierum) und der davon abhängigen arithmetica infinitorum (N. 36). Dies zeigt sich u. a. darin, dass unendliche Reihen nicht analytisch behandelbar sind, wenn irrationale Wurzeln auftreten. Bis auf weiteres könnten daher Figuren nur synthetisch, durch Transformationen, quadriert werden, nicht aber auch analytisch unter Annahme einer quadrierbaren Reihe (progressio quadrabilis (N. 38 Teil 2)). Diese Unvollkommenheit trete allenthalben in der Geometrie auf, da die Arithmetik des Unendlichen nicht alle unendlichen Reihen rationaler Zahlen summieren könne. Genauer will er dazu in einer eigenen Abhandlung über Approximationen Stellung nehmen. Tatsächlich spielen Approximationen in vielen Stücken eine Rolle (N. 12; 27; 30; 34; 40; 49). Entsprechend groß sind seine Erwartungen an eine Verbindung aus Algebra, Geometrie der Indivisiblen und Arithmetik des Unendlichen (N. 10_1).

Er betont, wie notwendig eine tiefer gehende Betrachtung der Indivisiblen und des Unendlichen ist. Ohne diese sei den Schwierigkeiten nicht beizukommen, die in der Lehre des Unendlichen und der Indivisiblen auftreten (N. 16_1 Teil 3). Er spricht von den wunderbaren Paradoxien der arithmetica infinitorum (ebd.) und an anderer Stelle von den Wundern des Kontinuums oder des Unendlichen: denn nur in der arithmetica infinitorum könne etwas ohne Kompensationen zugefügt oder weggenommen werden, ohne dass die Rechnung falsch werde (N. 7 Teil 2).

Die Betrachtungen über das Unendliche und Nichtzuordenbare enthielten die verborgensten Mysterien des Wesens der Dinge. Der Calculus inassignabilium infinitorum sei langsam und sorgfältig auszubauen. Andernfalls werde er zur Pflanzstätte von Trugschlüssen (paralogismi) (N. 16_4 Teil 2).

Er unterscheidet zwischen der arithmetica infinitorum und der analysis indivisibilium. Wenn die Methode jener Arithmetik versagt, ist zu dieser Analysis überzugehen. Sie bestehe darin, eine gegebene Kurve oder Fläche auf ein oder mehrere Flächenstücke (spatia) zurückzuführen, von deren Quadratur das Maß der Kurve oder Fläche abhängt. Dies geschehe durch Bilden des charakteristischen Dreiecks und beliebig viele dazu ähnlicher Dreiecke einer Figur (N. 29). Diese Verfahren mittels ductus rectarum oder Rechnung führt er in den Nummern 26 und 27 vor.

Grundsätzlich kann die Geometrie helfen, endliche oder unendliche arithmetische Reihen zu summieren (N. 41). Die Vervollkommnung der ars analyseos hängt davon ab, eine gegebene Reihe in einen handhabbaren Zustand zu versetzen und in ein charakteristisches Dreieck eingehen zu lassen (N. 29).

Von Interesse ist seine Bemerkung, beliebig hohe Dimensionen von Figuren seien nicht imaginär, sondern könnten tatsächlich aufgezeigt werden, so wie es mittlere Dimensionen zwischen Punkten, Geraden, Flächen, Körpern usf. gibt. Dies sei ein noch viel größeres Paradoxon (N. 26). Solche mittleren Dimensionen nennt er imaginär (N. 39). Immer wieder weist er auf die herausragende Schönheit einer Untersuchung (N. 10_1), eines Beweises (N. 37), einer Reihe, die wunderbaren Harmonien der Natur der Dinge hin (N. 39), die seine Tafel aufdeckt. Er mahnt den Ausbau des calculus centrorum und das Anlegen einer Tafel an, um harmoniae non elegantes, pulcherrimae, praeclarae, elegantes aufzuspüren (N. 39).

Allenthalben betont er die Allgemeinheit bzw. Universalität, ja Göttlichkeit (N. 27) seiner Regeln (N. 7; 10), Sätze (N. 16_4), Methoden (N. 27; 38; 40), Beweise (N. 12; 37).

Notation und Rechentechnik

Leibniz verwendet bei seinen Rechnungen eine vielgestaltige Symbolik, die er zwar größtenteils aus der zeitgenössischen Literatur, insbesondere der *Geometria*-Ausgabe, übernimmt, aber zugleich auch weiterzuentwickeln versucht. Im Einzelnen wirken seine Bezeichnungen dadurch oft fließend, gelegentlich unscharf und führen manchmal sogar direkt zu Fehlern. Im Grunde ist aber Leibniz' Schreibweise von der unseren kaum verschieden, so dass seine Formeln leicht lesbar bleiben, sofern man einige Einzelheiten berücksichtigt. (Zu dem gesamten Abschnitt siehe auch S. 873).

Diese betreffen insbesondere

(1) Vorzeichen:
Zur Vermeidung von Fallunterscheidungen verwendet Leibniz ab Sommer 1673 Doppelvorzeichen in der Form ǂ, $\not\equiv$ (N. 30).

(2) Operationen:
Die Addition von zusammengesetzten Bruchtermen deutet Leibniz oft einfach durch einen größeren Zwischenraum an, ohne ein Pluszeichen vor den Gesamtterm zu setzen. Beispiel (N. 41).

$$\frac{s^4 - 2s^2x^2 + x^4}{16y^2} \quad \frac{-as^2 + ax^2}{2y} \quad \frac{+\frac{3}{16\,\cancel{4}}s^2\cancel{y} - \frac{3}{16\,\cancel{4}}x^2\cancel{y}}{\cancel{4}\cancel{y}}\ [2] + a^2$$

Die Multiplikation wird in der Regel durch Position (Nebeneinanderschreiben ohne bzw. mit geringem Zwischenabstand) aber auch explizit mittels $\frown$ angezeigt.

Zeitgemäß üblich sind die (Überwärts-)division und das (Überwärts-)wurzelziehen mit ihren charakteristischen Streichungsschemata.
Bei der Darstellung der Wurzeln setzt Leibniz in der Regel keinen Wurzelbalken, wenn der Radikand eindeutig bestimmt ist.
Bei Potenzen und Wurzeln werden die Operatoren den Operanden sowohl vor wie nachgestellt (N. 22).

(3) Klammern:
Die Klammern variieren stark nach Größe und Form. Sie werden nicht immer konsequent gesetzt. Außer den heute üblichen Zeichen verwendet Leibniz den Klammerbalken sowie ein- und zweiseitige Halbklammern (im Text durch , bzw. ˛ und ˏwiedergegeben). Häufig erfolgt Klammerung durch Position, teilweise auch durch Wechsel im Schriftbild. Beispiel (zugleich für fortlaufende Rechnung) (N. 20):

$$BCFG = \; a \frown \frac{a}{2},,,, + Rq\,2a^2, -a,, \frown \frac{a}{4},,, = Rq\,, \frac{2a^4}{16} - \frac{a^2}{4}$$
$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{Rq\,2a^4}{4} = \boxed{\frac{a^2}{4} + \frac{Rq\,2a^4}{4}}.$$

(4) Wiederholungszeichen, Platzhaltersymbole, Indices:

(a) Bei mehrzeiligen Schemata bezeichnet Leibniz mehrfach auftretende Formelbestandteile durch entsprechende Striche bzw. punktierte Linien (N. 40_2).

(b) Gelegentlich benutzt Leibniz Platzhaltersymbole.Unbestimmt gelassene Vorzeichen werden durch Punkte zweiter Größe (N. 16_1), unbestimmt gelassene Terme durch Punkte dritter Größe (N. 47) angezeigt.

(c) Als Indexbezeichnung verwendet Leibniz vereinzelt vorgestellte geklammerte Ziffern (N. 40_2).

(5) Leibniz rechnet gelegentlich „fortlaufend“, d. h. er verwendet Zwischenergebnisse ohne Neuansatz weiter. Beispiel s. oben Punkt (3).

(6) Leibniz schreibt Gleichungen den geometrischen Gegebenheiten entsprechend im Allgemeinen homogen.

(7) An verschiedenen Stellen verwendet Leibniz zur Rechenerleichterung mnemotechnische Hilfsmittel, insbesondere geometrische Symbole (N. 17) und Zuordnungsstriche (N. 12, 16_2).

(8) Umformungen:
Rechenschritte zur Vereinfachung von Gleichungen und Termen werden von Leibniz mittels Streichungen angezeigt. Die Reihenfolge kennzeichnet Leibniz mitunter durch Mehrfachstreichung. Bei Mehrfachstreichungen werden aus Gründen der Lesbarkeit die betreffenden Größen nur einmal durchgestrichen und die Anzahl der Streichungen mittels Zählstrichen in entsprechender Häufigkeit angezeigt. Beispiel (N. 26):

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cancel{ca} & - & cf & + & 2if & - & 2ia & = & 2di & + & \cancel{ab} & - & db & - & \cancel{2ia}. \\
 & & /\backslash & & /\backslash & & & & /\backslash & & \text{//} & & /\backslash & & \\
 & & \cancel{ab} & & \cancel{2ab} - \cancel{2ai} & & & & \cancel{2ca} - \cancel{2ai} & & & & \cancel{ca} & & \\
 & & & & \text{//} \quad \text{///} & & & & \text{////} \quad \text{///} & & & & \text{////} & &
\end{array}$$

Figuren

Eine Eigentümlichkeit des vorliegenden Bandes ist die große Anzahl an Figuren verschiedener Herkunft: Wir finden Figuren mit Leibniz'schen Ergänzungen in den Marginalexemplaren selbst. Des Weiteren zitiert Leibniz gelegentlich Figuren aus der Fachliteratur (meist Huygens, Pascal, Descartes bzw. Schooten), aber auch aus eigenen Stücken. Schließlich enthalten die Leibniz'schen Texte Figuren in großer Anzahl.

Bezüglich der Behandlung der Figuren in den Marginalexemplaren s. die Ausführungen zu Beginn von N. 1 und N. 2.

Bei Zitaten aus der Literatur wird die angezogene Figur (ggf. in etwas verändertem Maßstab) originalgetreu wiedergegeben. Bei Zitaten aus eigenen Stücken wurde die betreffende Figur unter Hinweis auf die Fundstelle textgetreu rekonstruiert.

Die Figuren der Handschriften sind zum größten Teil Freihandzeichnungen unterschiedlichen Charakters. Für die Wiedergabe im Druck wurden sie möglichst genau ausgemessen. Auf dieser Grundlage wurde eine maßstabsgetreue, mathematisch sinnvolle Zeichnung in Konformität mit dem zugehörigen Text erstellt. In den Figurenunterschriften wird auf die jeweilige Art der Zeichnung sowie bei Bedarf auf die Autorschaft hingewiesen. Nicht direkt ersichtliche Einzelheiten werden gesondert erläutert.

Eberhard Knobloch Walter S. Contro

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Die vorliegende Reihe bedingt aber zusätzlich folgende Besonderheiten:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes. Eigene Überschriften von Leibniz werden unmittelbar vor dem Text wiederholt.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird gemäß den Editionen der Klassiker normalisiert. Insbesondere werden i und j sowie u und v entsprechend vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Mißverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, daß bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage wiedergegeben. In Blindtechnik erstellte (Teil-)Zeichnungen werden in der Unterschrift nachgewiesen.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der anderen Reihen. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluss eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist *L*) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

A. MARGINALEXEMPLARE

1. ZU FABRI, SYNOPSIS GEOMETRICA
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *LiH* Marginalien, An- und Unterstreichungen in: H. FABRI, *Synopsis geometrica* cui accessere tria opuscula, nimirum *De linea sinuum et cycloide*, *De maximis et minimis, centuria*, et *Synopsis trigonometriae planae*, Lyon 1669: HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibn. Marg. 7,1.

Datierungsgründe: Anlässlich eines Gesprächs, das höchstwahrscheinlich Anfang April 1673 stattfand, hat Huygens die *Synopsis geometrica* Leibniz zur Lektüre empfohlen. Leibniz dürfte diese gleich danach studiert haben.

Das Werk Fabris, insbesondere das *Rudimentum Secundum*, in welchem Fabri seine Integrationsmethode darlegt, hat auf Leibniz, wie die gehäuften Eintragungen zeigen, einen starken Eindruck hinterlassen. Noch Jahrzehnte später hat er auf Fabris Methoden aufmerksam gemacht (*Acta Eruditorum*, Jan. 1705, S. 30–36).

Eine detaillierte Würdigung des Werkes gibt E. A. FELLMANN, *Die mathematischen Werke von H. Fabry*, in: *Physis* I (1959) S. 5–54.

Das Marginalexemplar erscheint als Text, die zugehörigen Seitenzahlen sind in eckigen Klammern vorangestellt; im Falle des *Rudimentum Secundum* sind zusätzlich die Seitenwechsel angegeben. Am Rande stehende Hinweise auf die Figurentafeln sind mittels runder Klammern an passender Stelle in den laufenden Text integriert. Die Schreibweise des Lateins wurde dem heutigen Gebrauch angepasst. Der Textbestand – insbesondere die Notation – blieb bewahrt. Die Grundanordnung des Werkes: Text und nachfolgend vier separate Figurentafeln sind beibehalten worden.

Die Figuren, welche für das Verständnis des angezogenen Textes nötig sind, werden im Allg. in Originalgröße beigefügt. Ihre Nummerierung wird möglichst beibehalten; sie wird bei Bedarf durch Hinzufügen von kleinen Buchstaben eindeutig gemacht; hierbei richtet sich die Reihenfolge nach dem jeweils ersten Vorkommen im Text. – Zusätzlich wird eine Verkleinerung (60 % des Originals) des oberen Teils von Tafel 1 beigegeben, um die ursprüngliche Anordnung der Figuren zu dokumentieren, die Leibniz mehr als einmal verwirrt hat.

Leibniz hat sowohl zum Text wie zu den Figuren Eintragungen vorgenommen. Entsprechend der Anordnung des Werkes werden diese im Folgenden getrennt behandelt.
Im Textteil werden Marginalien als Fußnoten, Unterstreichungen durch Sperrung der entsprechenden Passagen, Anstreichungen mittels Vermerk in den Fußnoten wiedergegeben.

Bei den Figuren hat Leibniz zeichnerische Ergänzungen in Tinte (Tafel 1, Fig. 5a, 11a, 15a, 15b, 16a) sowie in Blindtechnik (Tafel 1, Fig. 41a, 41b, 44) vorgenommen; sie werden durch Strichelung direkt an den Originalfiguren Fabris angezeigt. In Fig. 11a, 12b hat Leibniz Buchstaben ergänzt; sie werden durch Einklammern kenntlich gemacht. Diese Eintragungen werden zugleich mit den Marginalien und weiteren Eintragungen aufgelistet.

[*Teil 1*]

[*Eintragungen zum Text*]

[p. 23 f.] *Schol. II.*

Nihil vulgare mage aut tritum apud Geometras, quam lineam in lineam duci, vel planum in lineam; duci autem linea in lineam dicitur, quando extremum illius punctum, cum sua linea directe semper insistente, totam istam decurrit; v. g. (*Figura* 1.) LM duci dicitur in LK, si dum LM directe insistit LK, id est perpendiculariter et in neutram partem inclinans, punctum L cum sua linea LM, eodem servato situ, totam LK decurrit, et per hunc lineae LM fluxum, in linea LK, gignitur superficies LS; non tamen gignitur figura LQ, licet ducatur LM in LP, quia LM non ducitur in LP directo fluxu, seu motu; gignitur tamen LQ si LM ducatur in LK; nempe ut demonstrabimus infra, LS, LQ sunt aequales: hoc ipsum est, quod non parum negotii Cavalerianae methodi assertoribus facessere hactenus visum est; nempe ut suum transitum rectum ab obliquo distinguant; ut autem difficultatem augeam, si LM decurrat LS, et LQ aeque cito haud dubie punctum L movetur velocius per LP, quam per LK; et cum tempora sint aequalia, velocitates sunt ut lineae LK, LP; igitur tota LM movetur velocius; igitur m a i u s spatium decurrit; igitur spatium LQ m a i u s est spatio LS, quod absurdum dictu est. Deinde singula puncta LM gignunt lineas aequales LP, MQ, quando LM movetur per $LPMQ$; quando vero LM movetur per LK, MS, singula puncta LM gignunt lineas aequales LK, totidem scilicet totidem, sed totidem lineae aequales LP, faciunt maiorem quantitatem, quam totidem aequales LK, unde etiam sequitur LQ maius esse LS, quod tamen dici nequit, ergo absurda illa methodus, ex qua huiusmodi absurda sequuntur.

18–21 σοφισμός

21 f. *Leibniz korrigiert zweimal* maius *in longius*.

23–26 σόφισμα

[p. 27] *Definitio II.*

Linea recta, minima a puncto ad punctum distantia; curva, omnis alia; superficies plana, cui linea recta, in quolibet puncto, quoquoversum, intra ipsam superficiem, applicatur et adhaeret; curva, omnis alia.

[p. 28] Dixi, quoquoversum; nam quibusdam curvis linea recta applicatur, ut cylindricae, conicae, etc. sed in unam duntaxat partem; dixi demum, intra eamdem superficiem; sic tangens toti perimetro circuli applicatur, non tamen intra eamdem superficiem.

[p. 29] *Schol.*

Linearem Angulum aliqui esse dicunt, duarum linearum inclinationem; sed profecto Angulus rectus talis est, ut linea in lineam cadens, puta (*Figura* 2.) HG in FI in neutram partem inclinet;

[p. 37] *Definitio XV.*

Sphaera est figura solida u n i c a e t s i m p l i c i s u p e r f i c i e , cuius singula puncta a communi centro aequidistant, circumscripta

[p. 39] Si (*Figura* 5.) secetur conus per planum basi parallelum, sectio est circulus, ut LN; si per planum lateri opposito p a r a l l e l u m , sectio est parabola, ut KNR; si per planum non parallelum basi, sed ad latera opposita terminatum, sectio est ellipsis, ut YZ; si demum per quodlibet aliud planum, sectio est hyperbola; ut SIT.

[p. 47] *Axioma VII.*

Quae sibi congruunt invicem, vel congruere possunt, aequalia sunt, et vicissim; i l l a a u t e m c o n g r u u n t inter se, quae communibus terminis continentur.

[p. 54–81] *Rudimentum Secundum.*

Hoc Secundum Rudimentum genesim et analysim figurarum complectitur; gignitur autem quantitas continua per motum; linea quidem, per motum, seu fluxum puncti;

---

7 *Leibniz korrigiert* circuli *in* sphaerae.

10 *Zwischen* talis *und* est *gestr.:* non

13 Quae superficies una sit, est altioris indaginis.

---

19 *Axioma VII.*: s. dazu *LSB* VII, 1 N. 9 S. 110.

superficies, per motum lineae; solidum, per motum superficiei; nullam porro aliam quantitatem considero, abstractam scilicet, et geometricam, nisi spatium illud, non physicum, nec sensibile, sed tantum intelligibile, a puncto, linea, et superficie, ut dixi, decursum; perinde atque si sua post se linquerent vestigia; hoc Rudimentum breviter expediemus, et maioris distinctionis gratia, suis numeris distinguemus et partiemur.

1. Genesis figurae, vel quantitatis, nihil est aliud, nisi eiusdem ex suis elementis productio; et analysis eiusdem in sua elementa resolutio; utraque fit, motu [p. 55] quasi obstetricante; nihil enim aliud est, quantitatem intelligibilem gigni, nisi spatium intelligibile decurri, seu designari a mobili; decurritur autem motu; quia fluxu illo, mobile sua quasi vestigia signat, et post se relinquit in similibus elementis; resolvi demum quantitatem intelligibilem, genitam in sua elementa, nihil est aliud, nisi praedictorum elementorum rationem, tum inter se, tum cum ipsa quantitate genetrice, si tamen quantitas est, invenire; nam et ex iis quantitas constat, in quae resolvitur, et in ea resolvitur, ex quibus constat; unde linea resolvitur in puncta; superficies, in lineas; corpus, in superficies.

2. Linea gignitur motu puncti; diversa, pro diverso motu; hinc vulgo lineam motus appellamus; puta centri gravitatis corporis deorsum euntis; centrum enim gravitatis punctum est, illudque mathematicum; linea recta, motu recto, a puncto scilicet ad punctum, brevissimo; punctum illius genitor est; quia lineam motu gignit, continua infinitorum punctorum vestigia post se relinquens, non physice, sed intelligibiliter; linea quippe ex infinitis punctis constat, [p. 56] nimirum intelligibilibus; quia sit (*Figura* 6.) linea QR, alia YZ; haec moveatur ab X, in R, in illo motu semper secat QR, et nunquam non in puncto, et totam successive tangit; et nihil intactum relinquit; et ibi tantum tangit, ubi secat; igitur ex punctis linea recta gignitur etiam per sectionem cum plano, quae fit in linea; sed per motum, planum secatur a plano, v. g. (*Figura* 7.) planum AC per planum ME, et communis sectio est linea recta GH; et vero ut DA secatur tantum in puncto H, et CB in G, omnes aliae parallelae ita secantur in puncto; igitur totum planum in linea HG.

3. Linea curva gignitur ab extremo puncto lineae mobilis in eodem plano, circa aliud punctum immobile, v. g. (*Figura* 2. *Figura* 5.) a puncto F extremo lineae FG, mobilis circa G; item ab extremo puncto P, lineae PM, mobilis circa axem MO; vel ab extremis punctis AH, mobilis circa BG; in his omnibus circinum habes; citra quem, gignuntur aliae lineae curvae, ut ellipsis, parabola, hyperbole, et aliae huiusmodi; sed haec ageometrice; eaedem quoque lineae gignuntur per sectionem: v. g. secta sphaera a plano, sectio est circulus; [p. 57] item secto cono, vel cylindro a plano parallelo basi, ut LN, CD; haud

aliter aliae lineae curvae, ut ellipsis, secto cylindro a plano non parallelo basi, ut EF; aut cono a plano non parallelo basi, et ad utrumque latus coni terminato, ut YZ; parabola a plano parallelo alteri lateri, ut KNR, et hyperbole ab omni alio, ut IST.

4. Si linea recta ducatur in lineam rectam gignit planum; id est, si linea motu recto, per aliam moveatur, v. g. (*Figura* 1.) AD, per AE, aequalem, gignit quadratum ED: si LM, motu recto per LK, inaequalem, gignit rectangulum LS; si motu obliquo, per aequalem, gignit rhombum, si demum per inaequalem, gignit rhomboidem. Si vero ducatur planum in lineam rectam gignitur solidum; si quadratum in latus, motu recto, gignit cubum, v. g. AH, in AB, gignit cubum EC; si (*Figura* 4.) quadratum in lineam lateri inaequalem, gignit parallelipipedum, ut IH; si rectangulum DA, in AB inaequalem, ED, gignit etiam parallelipipedum, EC.

5. Si ducatur linea curva in rectam, motu recto, gignit superficiem curvam[;] [p. 58] sit (*Figura* 7.) peripheria circuli FR, diameter illius FR, sit FS perpendicularis, ducatur peripheria in FS, id est, moveatur motu recto per FS, seu centrum Z, per ZV, parallelam SF, gignit superficiem cylindri: ducatur demum circulus FR in FS, id est, moveatur per ZV, motu recto, gignit cylindrum; pari modo ducatur (*Figura* 4.) triangulum POQ, in PM, motu recto, gignitur prisma; idem dictum sit de quacumque alia basi, sive sit linea recta, aut curva, sive sit planum, quodcumque tandem illud sit, et quacumque linea terminatum, si ducatur motu recto in rectam. Et haec est prima classis, quam sive cylindricorum, sive parallelogrammatum, sive quocumque alio nomine voces, perinde est; puta elementorum aequalium, hoc enim figuris, seu quantitatibus huius classis competit, ut per elementa aequalia gignantur; v. g. (*Figura* 1.) LS ita gignitur ab LM, ducta in LK, ut LM relinquat post se in suo motu, elementa aequalia, puta LM, YX, KS, vel LM, IV, PQ; item EG, AC; vel in figur. 4. POQ, MNL; vel in septima FR, XY, ST. Haec etiam vocari potest linearium; quia in eadem ratione secatur figura, sive [p. 59] per planum, sive per lineam parallela basi, in qua secatur linea eiusdem altitudinis.

6. Si (*Figura* 8.) ita ducatur linea motu recto in rectam, ut altera illius extremitas adhaereat lineae in quam ducitur, secetur vero a tertia linea recta, cum utraque angulum faciente gignitur triangulum; v. g. sit recta AB, ducta in AC, ita ut A semper adhaereat rectae AC, et in suo motu semper secetur a linea recta CB, gignit triangulum ABC; item FC ducta in FB, et secta semper in suo motu a recta CB, gignit triangulum FEB, aequale priori; quia est eadem genitrix, et aequalis motus; pari modo, sit planum HN, ductum motu recto in NM, et in motu semper sectum a plano KL, gignit prisma

$KMNH$; nempe in eadem ratione decrescit planum HN, in suo motu, per PL in qua decrescit recta HP, ducta in PL, et secta ab HI; est enim PH ad VR, ut planum HN ad RQ; res autem ista perinde se habet atque si A gigneret AB, et D, DE, vel A, AC, TE; nempe A gignit per totam AC, T per TE, etc.

7. Si recta circa extremum punctum immobile moveatur, seu volvatur in [p. 60] eodem plano, gignit c i r c u l u m , si extremum punctum mobile redeat ad idem punctum; s e c t o r e m v e r o c i r c u l i , si orbem integrum non perficiat; v. g. (*Figura* 7.) sit recta IK, volvatur circa I, per $QNPK$, gignit circulum, et ut punctum K gignit peripheriam circuli, ita O gignit, in suo motu, peripheriam circuli minoris. Sive (*Figura* 8.) autem punctum Y describat arcum $Y\theta$, motu circulari, sive YZ, aequali motu, sed recto, perinde est; nam aequalis motus aequale est spatium; item punctum X arcum XT, aut rectam aequalem $X\gamma$; idem de quolibet alio, puncto dictum sit et ut SY gignit triangulum, Y vero YZ, et X, $X\gamma$, et utraque parallela est, facitque angulum rectum cum YS; ita SY gignit quadrantem, Y vero arcum $Y\theta$; X, XT; et uterque parallelus est; facitque ubique angulum rectum cum SY, $S\delta$, $S\theta$, etc.

8. Huc revoca omnes figuras, sive planas, sive solidas, sive rectilineas, quae gignuntur ut triangulum; id est, quorum elementa fluunt et decrescunt ut elementa trianguli. Haec autem sit secunda classis, quae omnes huiusmodi figuras complectitur, revera quam plurimas; [p. 61] de quibus in secunda parte, quibus id solemne est, et commune, ut resolvantur in elementa inaequalia, eo scilicet modo, quo sunt inaequalia in triangulo; nimirum, ut demonstrabimus, i n r a t i o n e a l t i t u d i n u m ; ita ut AB sit ad DE, ut altitudo AC, ad DC: vocetur igitur haec c l a s s i s t r i a n g u l a r i u m. Cum autem CF ducta in FB, et AB, in AE aequali motu, aequalia producant triangula; item AE, in AB, et FB, in FE; certe ut AB ad DE, quam gignit decurso AD, ita FE, ad GE, quam gignit, decurso FG, aequali AD; et ut AC ad TE, quam gignit, decurso AT, ita FB, ad μE, quam gignit, decurso $F\mu$, aequali AT; denique cum AB in AC, et AC in AB, idem gignant, item FC in FB, et FB in FC, idem; cum demum motus AC per AB, et AB, per AC, aeque cito fiant, ac proinde AC, per AB, et FE per FB, semper decussentur in CB, quo tempore FE, decurrit FG, AC decurrit AT; unde concurrunt in E, TE, GE; igitur FG, vel AD, ad AT, ut AC ad AB; ergo ut TE, vel μE ad EG, vel TB; ergo ut AB ad AE, ita TB ad TE, vel PE, ad DC; ergo ut AB ad DE, ita altitudo AC, ad DC; [p. 62] ergo in hac classe decrescunt elementa ut altitudines; haec forte Tyrones non capient, sed Rudimento 4. et alibi, explicabimus huiusmodi proportiones; quare per me licet, omittant.

9. Habemus igitur in hac secunda classe, solidas et non solidas, planas et non planas, rectilineas et curvas, quarum talis est genesis, ut earum elementa decrescant ut altitudines, sive sint lineae, sive plana, sive curvae superficies, vocetur classis triangularium, vel simplicis decrementi, id est, in ratione altitudinum; ita ut elementa linea recta terminentur, si sunt lineae; secus vero, si sunt plana, aut superficies: huc revoca c y l i n d r u m et c o n u m , et alia multa, sit enim (*Figura* 10.) rectangulum PN, volvatur circa YP; NR describit superficiem cylindricam, et omnia puncta rectae NR describunt suas peripherias aequales; item singula puncta rectae SQ suas aequales; est autem genita ab NR ad genitam, ab SQ, ut peripheria genita ab N, ad peripheriam genitam, ab S. Id est, ut YN, ad YS; ab ipso igitur rectangulo PN revoluto circa YP gignitur cylindrus, cuius elementa sunt superficies, genitae ab [p. 63] NR, SQ, aliisque parallelis, et altitudo YN; decrescunt autem haec elementa in ratione altitudinum; igitur q u a t e n u s c y l i n d r u s r e s o l v i t u r i n s u p e r f i c i e s c y l i n d r i c a s , a d h a n c c l a s s e m p e r t i n e t , a d p r i m a m v e r o q u a t e n u s r e s o l v i t u r i n p l a n a b a s i p a r a l l e l a , pari modo si circa TZ volvatur triangulum ZXT, recta TX gignit s u p e r f i c i e m c o n i c a m , c u i u s e l e m e n t a s u n t p e r i p h e r i a e , q u a e d e c r e s c u n t i n r a t i o n e a l t i t u d i n u m ; unde ad hanc classem pertinent; altitudo vero dictae superficiei conicae est latus coni, nimirum XT.

10. Antequam ad tertiam classem veniam, dicendum est prius quid sit aequatio et quotuplex; ducatur (*Figura* 10.) CD in DB, motu recto, gignitur DA rectangulum; censeatur ita moveri tota figura CB, praeter basim CD, ut AB, transeat in HK, FI, in OM; idem dico de aliis; ac proinde tota figura CB, in CK; item triangulum DBC, in CKD, traductis omnibus lineis parallelis CD, ut EI in LM; prima aequatio in eo posita est, ut genita obliquo motu, traducatur praedicto modo et motu, in genitam recto motu, puta CK in CB, aut CKD, in [p. 64] CBD; et si sit figura primae classis, alia aequatione opus non est; nam basis ducitur in altitudinem; nimirum CD, in DB; at si sit figura secundae classis, alia indiget aequatione, qua scilicet reducitur ad primam classem, ducta scilicet CD, in CF subduplam, seu dimidiam altitudinis CA; quia cum ABC sit aequale CDB, tota DA ex illis duobus constat; igitur CI est aequale CBD. Pari modo, si (*Figura* 9.) figura FB traducatur dicto motu in $FNCDPG$, ita ut lineae parallelae EM, IO, NP sint aequales; aequabitur, si reducatur in FB; triangulum item KLH est aequale figurae $KVXTL$ quia singulae parallelae sunt aequales singulis, ut QR, aequalis VT, unde aequatur traducta in KHL, et ducta LK in dimidiam LH.

11. Si decrescant elementa in duplicata altitudinum, inde tertia classis constituitur, sive linea ducatur in lineam, sive planum, sive superficies; et quia pyramis iuxta hunc modum gignitur; et in huiuscemodi elementa resolvitur, haec classis Pyramidalium apposite appellatur. Sit enim (*Figura* 11.) pyramis KMH, sub basi quadrato KM; aut $BCDA$, sub basi [p. 65] triangulo BDC; resolvitur in plana KM, PN parallela, vel in BCD, GEF, etc. parallela; haec quidem triangula, illa vero quadrata, tanquam in sua elementa, ex quibus gignitur, decrescentibus scilicet in ratione duplicata altitudinum, uti revera decrescunt, ut demonstrabimus Rudimento 4. Et alibi; nempe triangulum BDC est ad triangulum GEF, non quidem ut BA, ad GA, sed ut BA ad δA; posito, quod BA sit ad GA, ut GA ad δA; et quadratum KM non est ad PN, ut altitudo MH, ad NH, sed ut MH ad VH; posito, quod sit MH, ad NH, ut NH ad VH.

12. Hanc igitur classem talem statuimus, ut hoc iis omnibus quantitatibus commune sit, quae ad illam pertinent, nimirum ut gignantur ex elementis in duplicata altitudinum decrescentibus; nimirum ita secta semper quantitate genitrice, dum in lineam ducitur, a linea scilicet, vel a plano; hoc autem competere pyramidi ostendam et demonstrabo infra; item cono; v. g. (*Figura* 5.) PMQ; nam circulus PQ, est ad circulum LN, in duplicata PM, ad LM; id est, ut PM ad δM; item (*Figura* 11.) in trilineo parabolico $TXRS$, in [p. 66] quo TS est ad XV, ut SR, ad YR; posito, quod SR sit ad VR, ut VR, ad YR. Item haec genesis competit sphaerae, quatenus sphaera resolvitur in superficies sphaericas, assumpta prima et maxima ut basi, et semidiametro ut altitudine; item hemisphaerio, cono sphaerico, et hoc ablato ex hemisphaerio, ipsi residuo, nec non multis aliis sphaericis; item residuo cylindri, detracto hemisphaerio eiusdem basis et altitudinis: item (*Figura* 10.) cono resoluto in superficies conicas parallelas, quales sunt genitae a TX, $\delta\gamma$ revolutis circa TZ, aliisque parallelis, acceptis scilicet in ZG, perpendiculari in XT; est enim genita a TX ad genitam a $\gamma\delta$, in duplicata ZX, ad $Z\gamma$. Cuncta haec suis locis demonstrabimus; item de multis aliis figuris, quibus haec eadem proprietas inest.

13. Quarta classis illas omnes quantitates complectitur, quae resolvuntur in elementa decrescentia in triplicata ratione altitudinum, vel in quadruplicata, quintuplicata, sextuplicata, septuplicata, etc. Et hanc proprio nomine vocabimus trilinea-

4 f. pyramis KMH: In der zugehörigen Figur steht anstelle von H die Bezeichnung B; s. S. 23 [*Fig.* 11a].

r i u m p a r a b o l i c a r u m s e c u n d u m a p p l i c a t a s, sit enim (*Figura* 11.) rectangulum GE, du- [p. 67] cantur GE, FD; sintque ut FD, ad AD, ita haec ad BD, ita haec ad CD, ita haec ad ID; item ut KE ad DE, ita haec ad NE, et haec ad ME, et haec ad LE; idem intelligatur ducta qualibet alia parallela PQ, sitque ut PQ ad SQ, ita haec ad RQ, et haec ad OQ, et haec ad TQ: ductae denique censeantur curvae $EBRG$, $ECOG$, $EITG$; in GEK decrescunt elementa GK, SQ, AD, in ratione altitudinum KE, QE, DE; in trilineo $GBEK$, decrescunt elementa GK, RQ, BD, in duplicata altitudinum. Estque GK ad BD, ut KE ad NE; prima figura pertinet ad secundam classem; altera vero ad tertiam; in trilineo $GCEK$ decrescunt elementa GK, OQ, CD in triplicata altitudinum, estque GK ad CD, ut KE ad ME; in trilineo $GTIEK$, decrescunt elementa GK, TQ, ID in quadruplicata altitudinum, estque GK ad ID, ut KE ad LE, sint pariter alia trilinea, in quibus elementa decrescant in quintuplicata, sextuplicata, septuplicata altitudinum, atque ita in infinitum; cuncta haec ad quartam classem reducuntur: ut autem i n p r i m a c l a s s e h a b e t u r a e q u a t i o, d u c t a [p. 68] b a s i, s e u q u a n t i t a t e g e n i t r i c e, i n a l t i t u d i n e m; ita i n s e c u n d a habetur, d u c t a b a s i i n s u b d u p l u m a l t i t u d i n i s; i n t e r t i a d u c t a i n s u b t r i p l u m; i n q u a r t a d u c t a i n s u b q u a d r u p l u m; a t q u e i t a i n i n f i n i t u m, et haec demonstrabimus in altera parte; u t i i a m C a v a l e r i u s i n v e n i t ac demonstravit q u a m v i s a l i a p r o r s u s a n o b i s r a t i o n e.

14. Quinta classis illas omnes quantitates continet, quae resolvuntur in elementa planis elementis hemisphaerii homologa; unde haec iure dicitur c l a s s i s H e m i s p h a e r i i. V. g. sit (*Figura* 13.) hemisphaerium $Z\theta Y$, sectum in plana parallela YZ, $\delta\gamma$. Ut autem res ista melius intelligatur; sit cubus AD, sectus a plano ACF, bifariam, in duo scilicet prismata aequalia, eiusdem altitudinis FA, sub basi FED alterum, et alterum sub basi FHD; sit basis pyramidis quadratum BF, et altitudo HD; haec resolvi potest, vel in plana parallela basi BF, ut BF, $L\delta$; et sic pertinet ad tertiam classem, uti et pyramis sub basi ABC, et altitudine CD, in plana parallela ABC, LMN; vel in plana

---

1 *Leibniz korrigiert* applicatas *in* axem.
Dazu am Rande: Parallela sunt potius elementa axi parabolae, vid. infra p. 73.

---

22 (*Figura* 13.): Anstelle von Fig. 13 müsste es Fig. 12 und 13 heißen, der Fehler wird in den *Errata* behoben. Leibniz hat dies nicht beachtet; stattdessen hat er die ursprüngliche Nummerierung auf Tafel 1 geändert, s. dazu S. 20 [*Fig.* 12b *und* 13b].

parallela faciei, puta triangulo FHD, ut FHD, $GKLM$; et iuxta hunc [p. 69] modum resolutionis, pertinet pyramis ad hanc classem hemisphaerii, ut demonstrabimus in secunda parte; ut enim cubus AD est ad prisma, sub basi FHD, et altitudine FA, in ratione dupla, ita hoc ad pyramidem BFD, in ratione sesquialtera; et ad pyramidem $ABCD$ in ratione tripla; ac proinde prisma ad pyramidem BFD, ut cylindrus ad hemisphaerium eiusdem altitudinis; igitur pyramis et hemisphaerium, iuxta hunc modum resolutionis, sunt figurae homogeneae, id est, eiusdem classis.

15. Idem dico de semiparabola, quatenus resolvitur in elementa parallela axi: sit enim $QSOT$; ducatur ROP, XOY; sitque quadrans circuli $QSIT$; trilineum $TOSZ$ pertinet ad tertiam classem, quia in TZ, OP, etc. elementa resolvitur, decrescentia in duplicata altitudinum ZS, PS; igitur ut cylindrus ad conum eiusdem basis et altitudinis, ita TS ad trilineum $TOSZ$; igitur ut cylindrus ad hemisphaerium eiusdem basis et altitudinis, ita TS ad semiparabolam $TOSQ$; igitur ut hemisphaerium resolvitur in sua elementa, nimirum in plana parallela basi, ita et semiparabola in sua [p. 70] parallela axi, nimirum in QS, RO, etc. Igitur semiparabola, iuxta hunc modum resolutionis, ad hanc quintam classem reducitur; hinc ut RO, ad RI, ita haec ad RP; idem dico de qualibet alia parallela RP, et ut $X\theta$, ad XO, ita haec, ad XY, haec tantum indico, quia Tyronum captum superant; demonstrabimus tamen accuratissime in secunda parte; uti et illud longe sane pulcherrimum; nimirum quatuor istas figuras TS, $TOSQ$, TQS, $TOSZ$, quatenus resolvuntur in elementa parallela QS, RP, TZ, esse homogeneas 4. genitis a figura TS, revoluta circa QS; nimirum cylindro genito a rectangulo TS, hemisphaerio genito a quadrante $TISQ$, solido parabolico genito a semiparabola $TOSQ$, et cono genito a triangulo TSQ; quatenus resolvuntur in plana parallela genitis a rectis QT, XY, etc. Quanti autem sit reducere figuras solidas in planas homogeneas, sciunt Geometrae, et Tyrones facile discent.

16. Sexta classis illas omnes figuras continet, quae sunt complementa figurarum quartae classis, id est, quarum elementa ita decrescunt, ut sint differentia [p. 71] elementorum primae et quartae classis; v. g. sit (*Figura* 12.) figura primae classis GE, Quartae $GCEK$; sit quodlibet elementum primae puta DF; quartae DC, erit CF, differentia utriusque, elementum figurae huius classis; figura igitur $GCEH$, quae gignitur per elementa HE, FC, PO, secta scilicet a linea curva $ECOG$, item figura $GIEH$, in qua FI est differentia

DF, DI, et PT, differentia PQ, TQ; atque aliae deinceps in infinitum, hanc sextam classem constituunt, quae proprie dici potest classis Parabolarum secundum axes; ducta enim $\mu\beta$, secat EG in ω; EBG, in B; ECG, in V; EIG, in T; et est HG ad $\mu\omega$, ut HE, ad μE; at vero ut HE ad μE, ita quadratum HG, ad quadratum μB; ita cubus HG, ad cubum μV, ita quadratoquadratum HG, ad quadratoquadratum μT; id est ut altitudines, in triangulo GHE; in subduplicata altitudinum, in parabola simplici $GBEH$; in subtriplicata altitudinum, in parabola secundi gradus $GCEH$; in subquadruplicata altitudinum, in parabola tertii gradus $GIEH$, atque ita deinceps.

17. Septima classis easdem figuras [p. 72] complectitur, et insuper semiparabolam primi gradus; quatenus resolvuntur in elementa, non quidem parallela axi, ut HE, FC, PO; sed in elementa parallela applicatis HG, μV, etc. Unde id maxime observandum est, eamdem aequationem quadrare in figuras diversae classis; v. g. in semiparabolam $GBEH$, quatenus resolvitur in parallelas axi HE; ac proinde pertinet ad quintam classem; et quatenus resolvitur in parallelas applicatae HG, ac proinde pertinet ad septimam; unde sive ducas HE in $\frac{2}{3}$ HG; sive HG, in $\frac{2}{3}$ HE, perinde est, et semper habebis semiparabolam $HEBG$; item $HECG$ ducta HG, in $\frac{2}{4}$ HE, et $HEIG$ ducta HG, in $\frac{3}{4}$ HE; ut ostendam in altera parte; unde haec classis recte vocatur classis Parabolarum, secundum applicatas.

18. Octava classis, continet trilineares parabolicas omnes, quatenus resolvuntur in elementa parallela applicatis et tangenti verticem axis; v. g. sit trilineum $GBEK$, resolvatur in EK, $B\beta$, aliasque parallelas; item trilineum $GCEH$, in EK, $C\beta$; item $GIEH$, in EK, $T\beta$, etc. Constituunt hanc clas- [p. 73] sem, quam vocamus trilinearium parabolicarum, secundum applicatas: habita autem figura plana secundum axem, habetur etiam secundum applicatas; quamquam ad diversas classes pertineat. Hinc ut habeatur $GBEK$ ducatur GK in $\frac{1}{3}$ EK, ut $GCEK$, in $\frac{1}{4}$ ut $GIEK$, in $\frac{1}{5}$ cuncta haec accuratissime demonstrabimus.

---

1 f. Sub sexta classe comprehendi potest 5^{ta}, et tertia sub quarta, ut in 7. et 8. Complementa sibi sunt mutuo: 3^{tia}–5^{ta}. 4^{ta}–6^{ta}. 7.–8. classes.

23 *Dazu am Rande:* add. sup. p. 63.

19. Nona classis est Quadrantis circuli, cuius elementa decrescunt in ratione sinuum; e s t a u t e m s i n u s m e d i a p r o p o r t i o n a l i s i n t e r s i n u m t o t u m, s e u r a d i u m v e l s e m i d i a m e t r u m, e t p a r a l l e l a m a x i p a r a b o - l a e, a e q u a l i r a d i o; sit (*Figura* 14.) quadrans $AFDB$; triangulum ABF, semiparabola $FEBA$, cuius axis AB; ducatur AB in AF, motu recto; perpetuo secatur ab arcu FDB, et gignitur quadrans; decrescunt autem elementa ut sinus; v. g. AB, ut GD, decurso scilicet AG; est porro GD media proportionalis inter GE, GC, idem dico de qualibet alia parallela.

20. Ad hanc classem revocabis quadrantem ellipseos; sit enim $NPAL$ quadrans ellipseos; sitque ut AF, ad GF, ita LN, ad MN; erit ut AB, ad BD, [p. 74] ita LQ ad MP, aut si ut AF ad GF, ita LQ ad XQ, erit ut AB ad GD, ita LN ad XV huc etiam revoca quadrantem cylindri divisum per rectangula parallela haec enim sunt ut sinus paralleli v. g. sit quadrans cylindricus $\beta Z\theta\nu$; sintque plana, seu rectangula parallela $\theta\delta, \gamma I$, haec sunt ut sinus $\theta Z, \gamma I$; unde quadrans cylindri, si resolvatur in plana parallela basi $\theta Z\beta$ pertinet ad primam classem; si in superficies cylindricas, pertinet ad secundam, si in plana, seu rectangula parallela refertur ad nonam; sic quadrans circuli quatenus resolvitur in sinus, ad nonam, quatenus in peripherias, ad secundam pertinet.

21. Omittere non possum rem ellipticam, quae ex hac genesi ubertim germinat; sit enim (*Figura* 15.) quadrans circuli $DCNB$; sit tangens BEF, producta in infinitum; ducatur DF, cum parallelis quotlibet PMT, CG; sitque NM traducta in SR; et aliae similiter; ac demum his traductis, sint totidem aequales adiunctae, ut RT; habebitur figura $CKSFTG$, dupla quadrantis CBD; est enim semiellipsis, cui si altera aequalis addatur $GHLC$, erit tota ellipsis toti circulo aequalis, cuius DCB [p. 75] est quadrans; observas autem, maximam diametrum LF dividere bifariam aequaliter tum CG, tum ST, omnesque alias his parallelas; ducta autem KDH perpendiculari in DF, erit ut DF, ad DB ita DB ad DK, aut DH, aequalem DO: pari modo semiellipsis TZY traduci

2–4 Adde quod Hugenius in Cyclom. adhibita parabola.

9–11 *Dazu am Rande:* Hae literae in figura perturbatae.

2 e s t a u t e m s i n u s: s. a. S. 20 Z. 28 f. — Leibniz zitiert den Satz *LSB* VII, 1 N. 106 S. 658 f.
27 Adde: Leibniz spielt hier auf Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, an. Den Hinweis darauf hat er wahrscheinlich aus J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 2. — Auf dieser Seite hat Leibniz Zuordnungsstriche in ein Rechenschema eingetragen.

potest tota in TXY; quod ut obtineas facillime, finge volvi δZ circa δ, ita ut δZ tantum producatur, quantum necesse est, ut punctum Z nunquam a recta ZX, etiam producta in infinitum, discedat; idem obtinebis si cylindrum rectum basi TY traducas in obliquum; et semiellipsim TZY ex illius sectione ortam in TXY eodem prorsus modo traduci possunt parabolae a situ recto in obliquum; unde omnes illae, quae inter duo plana parallela coni in infinitum producta continentur, et sub eadem basi, sunt aequales; idem de hyperbole dictum sit, et haec licet Tyrones modo non capiant, ubi tamen in altera parte demonstrata fuerint, omnino ab iis facile capientur.

22. Decima classis est superficiei Hemisphaerii, cuius tantum genesim hic describo; sit (*Figura* 16.) quadrans ACB; volva- [p. 76] tur circa AC; arcus CFB describit superficiem hemisphaerii, cuius quarta pars tantum accipiatur, puta $DECFB$; ut puncto B respondet quadrans BD, ita puncto F respondet suus FE; et si AB volvatur circa A per totum BFC, in singula puncta cadit perpendiculariter, ac proinde arcus BD, FE atque alii his paralleli cadunt perpendiculariter in CFB, CED; unde tot sunt huiusmodi, arcus, quot sunt puncta in BFC, et perinde movetur DB, per DEC, BFC, atque BA per AC, incidens semper directe et ad angulos rectos; decrescunt autem elementa DB, EF, ut decrescunt sinus AB, GF; sunt enim peripheriae, ut diametri; iam vero dum BFC deflectitur in BI, et simul BD in BR, et dato quod BH sit ad BI, ut BF ad BC, punctum F cadit in H, et arcus FE deflectitur in HL, idem dico de aliis; ac proinde tota superficies $BDCFB$ explicatur in planam figuram $BIOR$: iam vero si accipiantur RS, LM, aequales BR, HL, item aliae parallelae, habebitur figura $BIMS$, dupla prioris; item si aliae aequales BS, HM etc. habebitur quadrupla; [p. 77] aequalis igitur superficiei hemisphaerii.

23. Illae igitur omnes figurae, quarum elementa decrescunt ut BD, FE, vel BR, HL ad hanc classem reducuntur. Cum autem BI sit aequalis BFC, ac proinde BS semiperipheriae, sequitur rectangulum NS aequale esse $BIMS$; id est, dimidiae superficiei hemisphaerii; nimirum maiori circulo; item NR semicirculo; ac demum $BQKI$

---

16 f. Hinc sequitur $BILR =$ superficiei hemisph. $ACFBDE$ aequari quadranti circuli cuius radius IB vel BR est quadrans peripheriae circuli maioris hemisphaerii ἄτοπον. Consequentia patet, quia si altitudo et basis est radius applicataeque crescunt ut sinus, erunt revera sinus, et totum quadrans.

24 f. Sed haec decrescunt ut sinus per §22. Ergo pertinent ad classem 9. quid ergo opus classe 10^{ma}.

quadrato BO; hanc lineam I, KQ vocabam alias lineam sinuum in opusculo a me edito sub nomine Antimi Farbii; quare ut ad aequationem ultimam huius figurae veniamus, debet duci, puta BR, in illud segmentum altitudinis BI, quod sit ad BI, ut BN ad BI; id est, ut radius ad arcum quadrantis; faciamus autem BI inflecti denuo in arcum quadrantis $Y\,\theta\,X$; sitque quadrans cylindricus, contentus duobus quadrantibus $TV\gamma$, YXZ, et duobus quadratis ZV, ZT, et superficie cylindrica $YXVT$; nec non sectus censeatur a plano $ZV\delta\lambda Y$, ductisque $\omega\mu, \theta\nu$ parallelis ZX, item $\mu\delta$, $\nu\lambda$ parallelis ZV, ac demum $\omega\delta$, $\theta\lambda$ parallelis XV, ha- [p. 78] bebitur solidum, quod resolvitur in triangula similia parallela ZXV, $\mu\omega\delta$; $\nu\theta\lambda$ etc. atque ita reducitur ad quintam classem; et habetur figura, si triangulum, seu basis ZXV ducatur in $\frac{2}{3}$ altitudinis ZY; estque figura, vel superficies contenta curvis $Y\theta X$, $Y\lambda\delta R$, et recta XV, aequalis figurae sinuum $BIKQ$, ac proinde aequalis quadrato ZV; unde quatenus resolvitur solidum in superficies parallelas YXV, quae decrescunt in duplicata altitudinum, ut patet, reducitur ad tertiam classem, et ducta superficie YXV in $\frac{1}{3}$ altitudinis YZ, habetur solidum; unde constat etiam superficiem YXV esse duplam trianguli ZXV, ac proinde aequalem quadrato; ac demum dictum solidum aequale pyramidi sub quadrato ZV, tanquam basi et altitudine ZY.

24. Superficies autem comprehensa curvis $Y\delta V$, $T\beta V$ et recta YT, est ad superiorem ut differentia semicirculi et quadrati sub radio, ad dictum quadratum; solidum vero comprehensum dicta superficie; triangulo $Z\gamma V$ et quadrato YR resolvitur vel in rectan- [p. 79] gula parallela quadrato $Y\gamma$, vel in trapezia parallela triangulo $Z\gamma V$; ac proinde pertinent ad classes incognitas; observabis autem, lineam sinuum IKQ inflexam esse circa quadrantem cylindricum, in quadrantem ellipseos $Y\delta V$; unde si superficies cylindrica $YXVT$ deflectatur in planum, erit ipsum planum IQ, et superficies $YX\lambda Y$ erit ipsa figura $BIKQ$, et quadrans ellipseos $Y\delta V$ in lineam sinuum IKQ redibit. Ad hanc classem appendix accedet, in qua illa omnia solida discutientur, quae gignuntur a figura sinuum $BIKQ$, sive circa IB volvatur, sive circa BQ, sive circa QE, sive circa IE.

---

5 *Dazu am Rande:* Nova ad hoc figura opus, quam non reperio.

---

27 non reperio: Hier ist Leibniz ein Opfer der unübersichtlichen Anordnung der Figuren geworden. Die von ihm vermisste Figur steht bei Fabri links von der mit 16 bezeichneten Hauptfigur, s. u. [*Fig.* 16b] auf S. 24.

25. Undecima classis est cycloidis: Genesis huius lineae facilis est; gignitur enim motu orbis et centri v. g. statuatur (*Figura* 17.) rota, vel circulus GHF, centro A; ubi G motu orbis pervenit in I, m o t u c e n t r i a e q u a l i , pervenit in B; ita ut GI, IB aequales sint; item GH, HC; GIK, KD; GHF, FE; unde figura GFE quatenus resolvitur in elementa parallela FE, AC etc. hanc classem constituit: cum autem figura GFE [p. 80] contineat tres semicirculos aequales GHF, et productum ex FE, in FG, quatuor; ut aequetur figura FGE, ducenda est FE in $\frac{3}{4}$ altitudinis; cuncta haec suis locis demonstrabimus; accedentque huic classi omnia genita a praedicta figura diversimode revoluta.

26. Classis duodecima est hyperbolicorum; sit (*Figura* 18.) semiconus $ABEH$, sit quodlibet punctum P, recta PC, parallela DH; sit sectio CGI; haec est hyperbole; traducatur in MKN, et triangulum ADH, in LKV, volvatur LKV circa LK, genitum a plano $MSNV$ est aequale genito a rectangulo DC, vel KO; igitur genitum a semihyperbola KMN aequale genito a triangulo CGH, et resolvitur in plana genita a parallelis KN, RS, etc. ex quo facile invenitur proportio aliorum solidorum, quae per appendicem, ad hanc classem referuntur.

27. In hanc ultimam classem reicimus omnes alias figuras quales sunt quadratrix, helix, atque aliae huiusmodi; adde annulares diversi generis; adde conoides parabolicum resolutum in plana axi parallela; et [p. 81] alia huius generis, quae breviter quidem, accurate tamen demonstrabimus.

Schol.

Observabis autem, eamdem figuram ad diversas classes pertinere, ut supra vidimus, pro diversa illius genesi et analysi, vel resolutione; v. g. quadrans resolvi potest in arcus parallelos, vel in rectas parallelas radio; item sphaera in plana parallela; vel in superficies

---

4 *Über GH:* arcus; *über HC:* rectae.

10 f. Aliud hyperbola, aliud hyperbolica ipsam hyperboles genesin nondum vel verbo attigit.

17 Quasi scilicet ista omnia eodem modo resolverentur. Si vero incognita in unum congerere voluit, huc referendae quoque classes 9. 10. 11.

Rectius dividisset figuras in cognitae et incognitae aequationis: illae class. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. hae 9. 10. 11. 12. etc. infinitae, quarum investiganda summa genera.

parallelas; semiparabola in parallelas axi, vel applicatae, cylindrus in superficies cylindricas vel in plana parallela basi, vel in plana parallela axi; pari modo conus in plana parallela basi, vel in superficies conicas, vel in sectiones conicas; item conois parabolica in plana parallela basi, aut axi: Unde huius methodi pretium facile intelliges, qua scilicet, eiusdem figurae aequatio per diversam genesim et analysim tam copiose, quam facile demonstratur. Sed de hoc rudimento, haec sint satis.

[p. 184 f.] … volvatur (*Figura* 18. *Tab.* 1) circa LK tota figura; dico, gigni a plano $MSNVO$, id est, ab NV, ST, etc. quae sunt differentiae applicatarum hyperbolae KN, RS et applicatarum triangulo LKV; gigni, inquam, solidum cylindricum, nimirum ab MO, $STNV$, plana aequalia, cum enim productum a KV sit ad productum a KN ut quadratum KV ad quadratum KN, cum quadratum DH, vel DI, vel KV, sit maius quadrato GI, vel KN, quadrato $D\,G$; et cum productum a KV sit maius producto a KN, producto seu genito ab NV, id est annulo; sequitur annulum illum aequalem esse circulo, sub DG semidiametro;

[p. 218] 25. Si cylindrus eiusdem altitudinis et basis cum hemisphaerio, dividatur per plana basi parallela, erit quodlibet segmentum cylindri sesquialterum sectoris hemisphaerii, qui sectioni respondet;

[p. 285 f.] 5. Sit ergo (*Figura* 43. [Tab. 2.]) quadrans ellipticus DBF cum quadrantibus circuli DLF, DBH, ut habeatur arcus quadrantis circuli aequalis elliptico FEB, innui supra dividendam esse FH bifariam in I, et describendum quadrantem sub radio DI, cuius quadrantis arcus aequalis forsitan esset arcui quadrantis elliptici FEB; sed pari modo, assumpto quolibet alio puncto inter FD, etiam ipso D, traducta curva FEB in rectam DA, aequalem DK, I divideret bifariam ipsam DK; sed hoc dici nequit; sit enim arcus quadrantis GEC aequalis rectae DK, erit DG ad DK, ut radius ad arcum quadrantis; sed radius est maior subduplo arcus quadrantis, at constat; igitur sit ut arcus quadrantis ad radium, ita FH ad FG; idemque fiat assumpto quolibet alio puncto, inter FD; eritque GEC arcus quadrantis quaesitus, aequalis scilicet FEB; quia ut DG ad

---

4–6 Sed nihil detegitur incogniti novique, alicuius momenti.

12 semper eodem

15–17 *Satz am Rande angestrichen.*

27 *Zu FEB ergänzt:* arcui elliptico. Valde dubito.

DK, ita FG ad FH; idem de quolibet alio puncto, inter DG assumpto, dictum sit.

[p. 321] ... sed (*Figura* 3. [Tab. 3.]) genitum a BFG aequale est genito a trilineo AED sublato autem communi genito a trilineo VED, erunt residua aequalia, genita scilicet a BVD, et AEV igitur g e n i t u m a $B\,A\,D$ a e q u a l e g e n i t o a $B\,A\,E$ [;]

[p. 326] Sint (*Figura* 8. [Tab. 3.]) BAE ad angulos rectos, sitque AE quadrupla AB; sit quilibet quadrans APL, eius arcus AL divisus bifariam in S, sinus SZ, dividatur AB, bifariam in D, sitque ut sinus totus AP ad SZ ita AE ad ordinatim applicatam DH, ...

[p. 327] ... (*Figura* 8. [Tab. 3.]) basis AE quadrupla est axis AB, estque ut AP ad SZ, ita AE ad DH, AE, est aequalis peripheriae sub radio AP genitae scilicet ab A, igitur DH aequalis peripheriae sub radio SZ genitae scilicet ab S, igitur f i g u r a $A\,B\,E$ e t s u p e r f i c i e s h e m i s p h a e r i i g e n i t a , a b a r c u $A\,S\,L$ s u n t f i g u r a e h o m o g e n e a e , ...

[p. 330 f.] *Schol.*

Fingendum est (*Figura 8.* [Tab. 3.]) animo arcum ASL, remissa curvitate, in rectam AB deflecti, item singulas peripherias arcui ASL ordinatim ad angulos rectos applicatas (sic enim radius in arcum incidit) in rectas aequales etiam deflecti, ipsi AB ordinatim applicatas ad angulos rectos; sic tota superficies hemisphaerii ab arcu ASL genita in figuram planam $ABHE$ abit, e a d e m q u e m a n e t q u a n t i t a s , s e d r o t u n d a d u m t a x a t e t c u r v a i n r e c t a e t p l a n a m u t a n t u r .

[p. 497] *Problema XXVII.*

D a t o a g g r e g a t o l a t e r u m , e t b a s i , i n v e n i r e t r i a n g .

6–9 *Zu AE ergänzt:* $AE \sqcap 4AB$

Zu DH ergänzt: $DH \sqcap \dfrac{5z, 4AB}{AP \text{ rad.}}$

13 f. *Dazu am Rande, gestrichen:* Falsum, falsa omnia quae superstruuntur, aut potius non demonstrata

20 f. *Dazu am Rande, gestrichen:* falsum

---

22 *Problema XXVII.*: s. dazu *LSB* VII, 1 N. 8 S. 105 f., s. a. *a. a. O.* N. 4 S. 31–36 und N. 106 S. 667 bis 670.

[*Teil 2*]

[*Eintragungen zu Tafel 1*]

[Fig. 5a]	*Erg.*:	*Eine weitere Schnittellipse.*
	Marg.:	Ellips.
[Fig. 11a]	*Erg.*:	*Mittelpunkt der Grundebene R; Lot BR; Mittelpunkt der Schnittebene (nur markiert, Leibniz verwendet dafür die ursprüngliche Benennung I).*
	Marg.:	$KML : PNO :: Q.RB : Q.IB$.
[Fig. 11c]	*Marg.*:	Trilin. parabol. $TS : XV :: SR : YR$. si $SR \,\vdots\, VR \,\vdots\, YR$. Ergo $TS : XV :: Q.SR : Q.VS$.
[Fig. 12a]	*Erg.*:	*Zählung 12.*
	Marg.:	Trilin. parabol. HE axis. $FD \,\vdots\, AD \,\vdots\, BD \,\vdots\, CD \,\vdots\, ID$ GEK Elem. ut altit. $KE \,\vdots\, DE \,\vdots\, NE \,\vdots\, ME \,\vdots\, LE$ item $GIEK$ ut *qq*. alt. $PQ \,\vdots\, SQ \,\vdots\, RQ \,\vdots\, OQ \,\vdots\, TQ$ $GCEK$ ut cub. alt.
[Fig. 12b]	*Erg.*:	*Punkte α und β.* *Zählung 12 gestr. und durch 13 ersetzt.*
	Marg.:	$Y\alpha z : \delta\beta\gamma :: BAF : LM\delta$.
[Fig. 13b]	*Erg.*:	*Zählung 13.*
	Marg.:	$QSOT$ semiparab. QS axis. $TQSZ : TOSZ$ :: cylind. : con. $TOSZ : QSOT$ :: con.: hemisphaer. $TQSZ$ ut $\overset{1}{\text{cylind.}}$ $TOSQ$ ut $\overset{2}{\text{hemisphaer.}}$ QST ut $\overset{3}{\text{solidum}}$ parabolicum, et $TOSZ$ ut $\overset{4}{\text{conus}}$, si genita intelligantur resolutione exhibitorum[:] 1. rectanguli, 2. quadrantis, 3. semiparabolae, 4. trianguli.
[Fig. 14a]	*Marg.*:	$AFDB$ quadrans circ. $AFEB$ semiparabola $GE \,\vdots\, GD \,\vdots\, GC$.

[Fig. 15a]	*Erg.*:	*Ellipse jenseits von FT vervollständigt.*
	Marg.:	$NM = SR$. etc. Ellips. = circ. hic.
		$DK \,\vdots\, DB \,\vdots\, DF$.
[Fig. 15b]	*Erg.*:	*Ellipse jenseits von $X\mu$ vervollständigt.*
[Fig. 16a]	*Erg.*:	*Kurve NR.*
	Marg.:	$ADBC$ quadrans hemisphaerii, ADB eius basis. $BI = BFC = BD = BR = RS$. $EF = HL = LM$. $BIMS$ = superficiei dimidiae hemisphaerii radio BI. IKQ linea sinuum. $BIKQ = BNO^{\square to}$
[Fig. 18a]	*Marg.*:	pag. 80 p. 184. 293.
[Fig. 18b]	*Marg.*:	p. 184.
[Fig. 41a]	*Erg.*:	*Zählung 41 erg. und wieder ausgewischt.* *Verschiedene Blindlinien*; s. S. 23.
[Fig. 41b]	*Erg.*:	*Verschiedene Blindlinien*; s. S. 23.
[Fig. 44]	*Erg.*:	*Verschiedene Blindlinien*; s. S. 23.

Tintenspuren finden sich im Text auf den Seiten 32, 33, 58, 96, 131, 132, 183, 184, 337, 346, 393–396, 421 sowie bei Tafel 2, Fig. 16 und Tafel 3, Fig. 7, 49.

Ferner hat Leibniz auf den S. 146 und 223 sowie bei Tafel 3, Fig. 24 verschiedene Druckfehler verbessert.

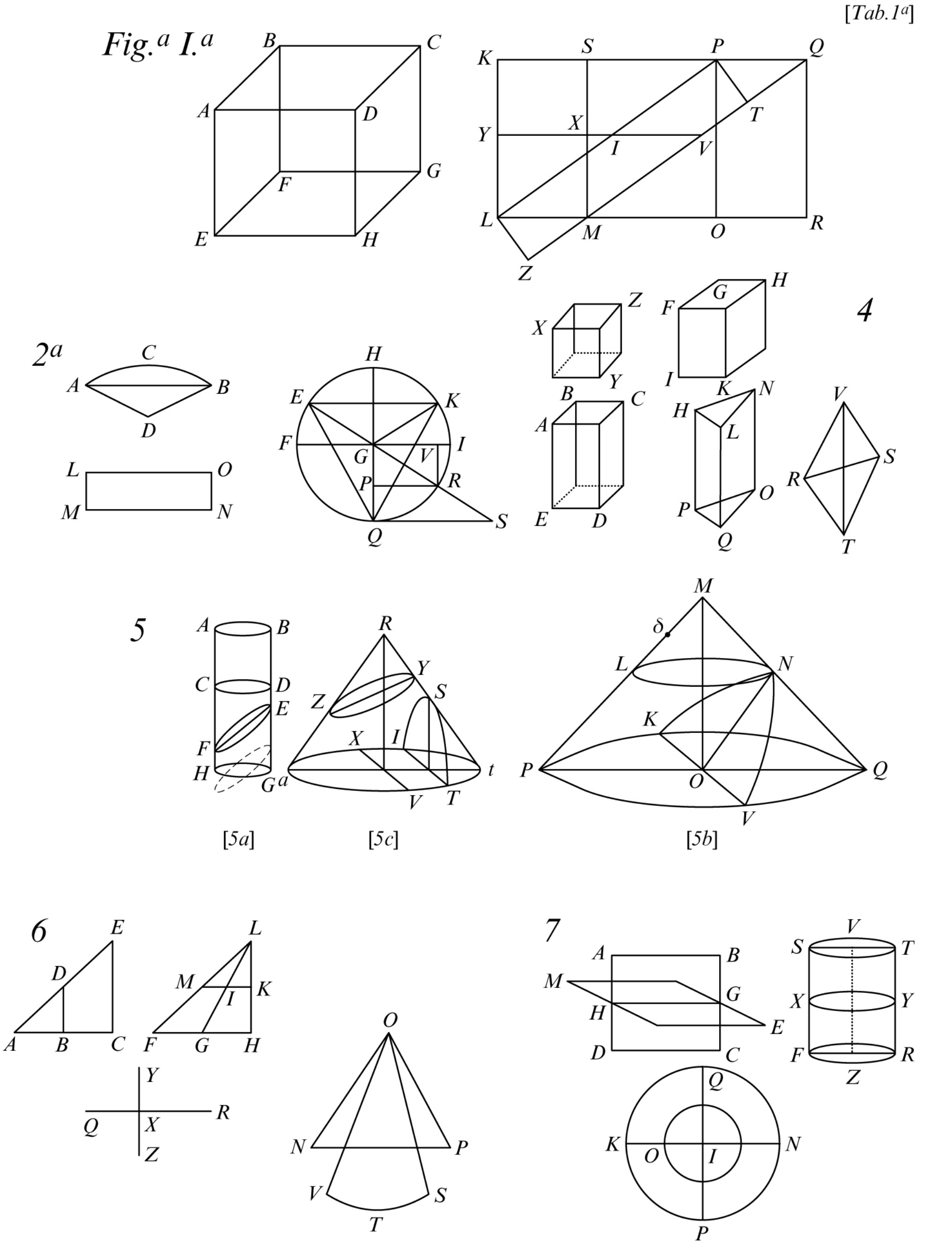
---

5 *Dazu gestrichen:* Error est puto, erit superficies hemisphaerii aequalis: *BNR*.

---

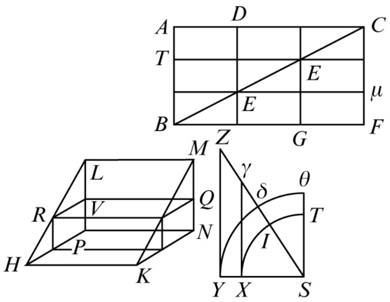
8 BI: Anstelle von BI müsste genauer BN stehen. 13–16 Zu Fig. 41a, 41b, 44: Die von Leibniz in Blindtechnik ergänzten Linien haben keine Entsprechung im Text Fabris, es wurden auch keine diesbezüglichen Stücke ermittelt.

[*Tab.1a*]

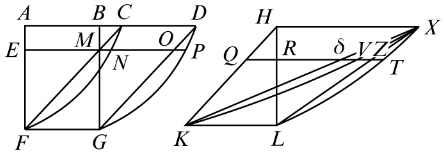


[*Tab.1*[a]]

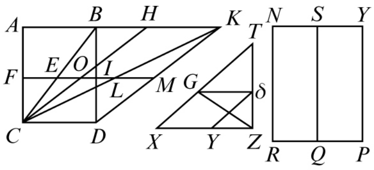
8



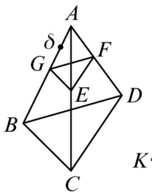
9



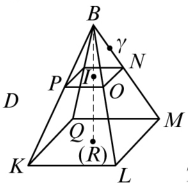
10



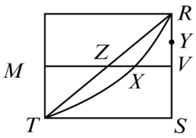
11



[*11b*]

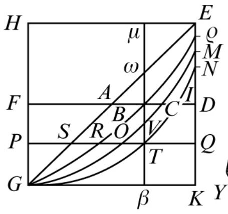


[*11a*]

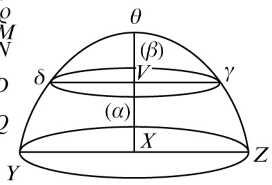


[*11c*]

12

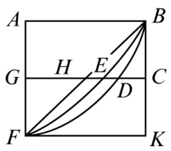


[*12a*]

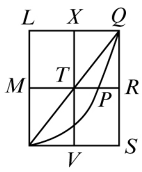


[*12b*]

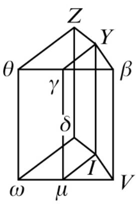
14



[*14a*]

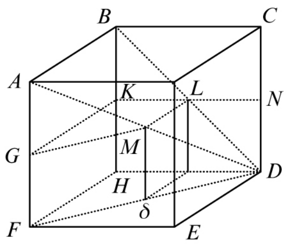


[*14b*]

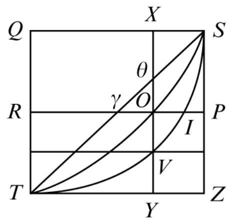


[*14c*]

13



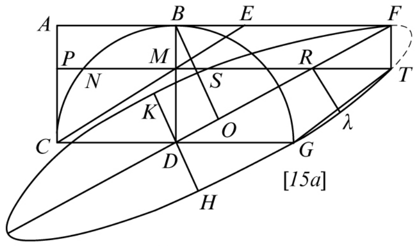
[*13a*]



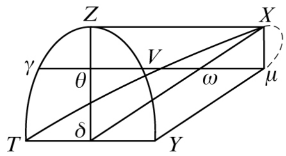
[*13b*]

[*Tab.1ª*]

15

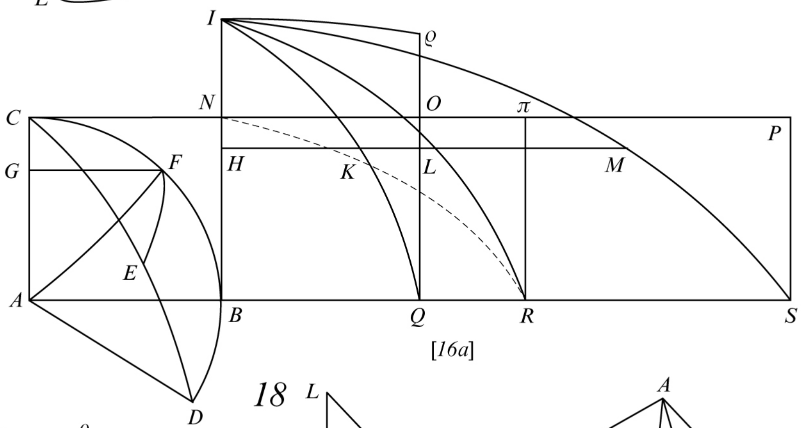


[*15a*]

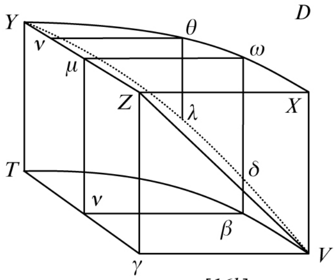


[*15b*]

16

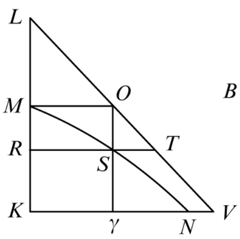


[*16a*]

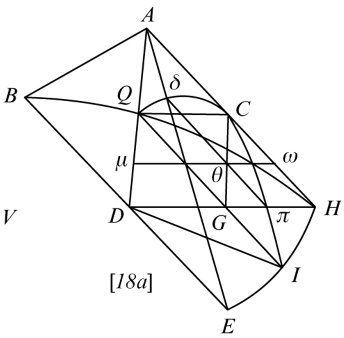


[*16b*]

18

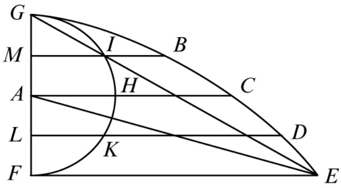


[*18b*]



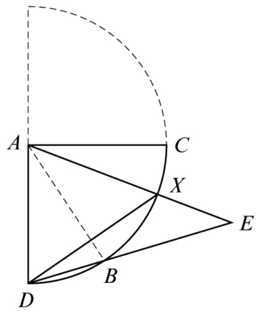
[*18a*]

17

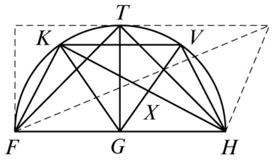


41

[*Tab.1a*]

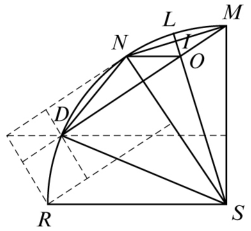


[*41b*]



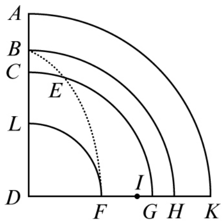
[*41a*]

44



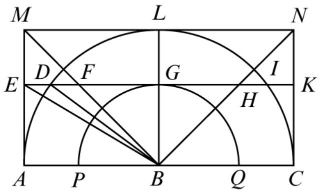
[*Tab.2a*]

43



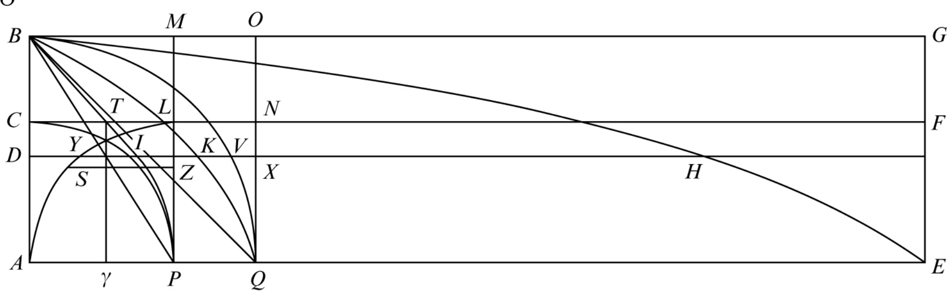
[*Tab.3a*]

3



8

[*Tab.3a*]



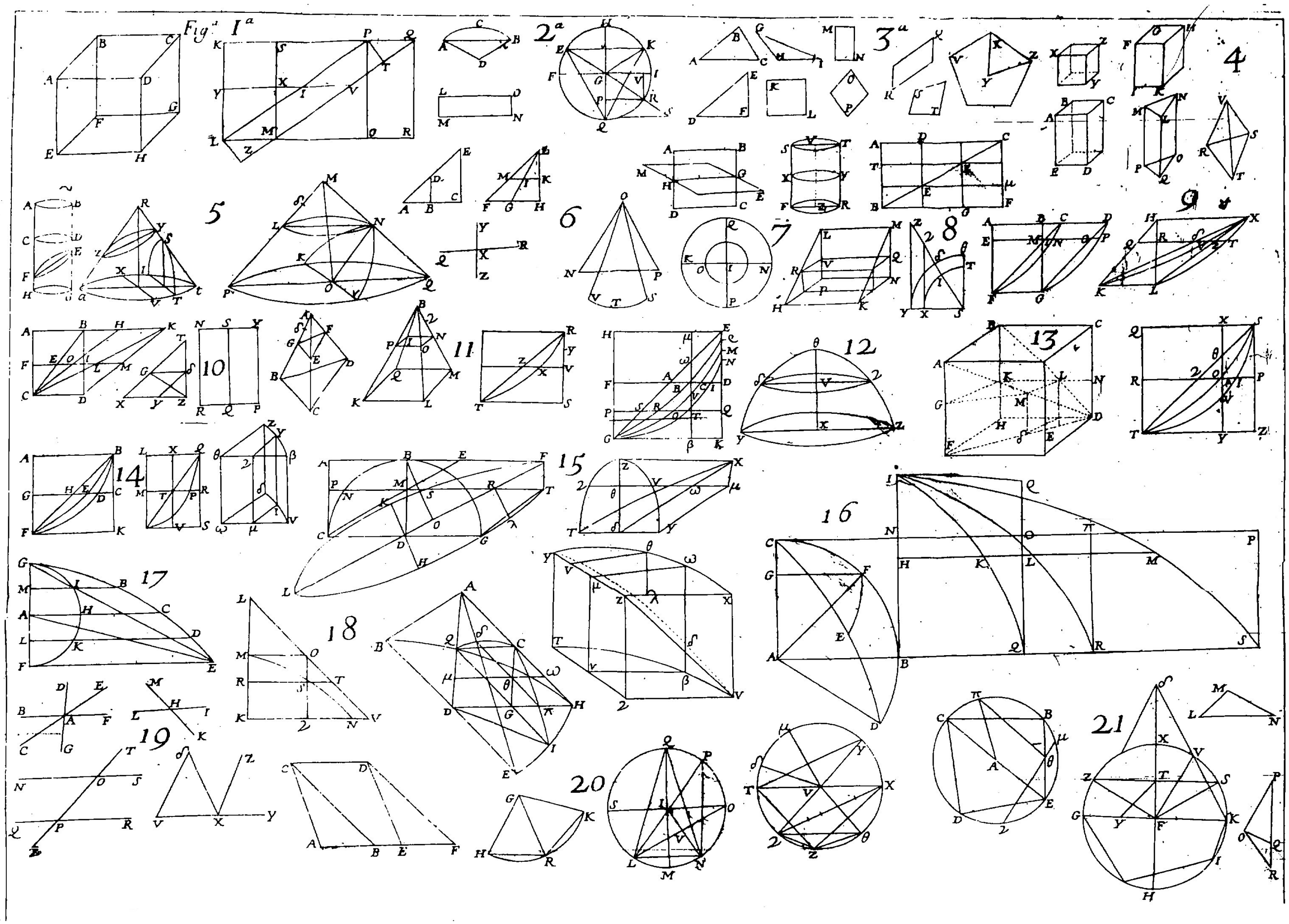


Fig.a 1a
2a
3a
4
5
6
7
8
9
10
11
12
13
14
15
16
17
18
19
20
21

2. ZU HUYGENS, HOROLOGIUM OSCILLATORIUM
[April/Mai 1673]

Überlieferung:

LiH[1] Marginalien und Unterstreichungen in: Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, Paris 1673: HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.*, Leibn. Marg. 70.

LiH[2] Marginalien zu dem von Leibniz selbst separierten Bl. 3 r° /v° des Handexemplars: LH 38 Bl. 185.

Cc 2, Nr. 542 A, B

Datierungsgründe: Anlässlich eines Besuchs bei Huygens, der sehr wahrscheinlich Anfang April 1673 stattfand, schenkte dieser Leibniz ein Exemplar seines gerade erschienenen Werkes, was Leibniz stolz auf dem Titelblatt vermerkt hat.

Leibniz dürfte das Werk sogleich nach Empfang intensiv zu studieren angefangen haben. Dies zeigen neben den vielfältigen Eintragungen in das Handexemplar selbst die vielen Verweise auf Huygens in anderen frühen Stücken, vor allem aber die Stücke N. 14, 10, 15, 38 sowie N. 7, denen die Huygens'schen Figuren von S. 66 und 79 direkt bzw. indirekt zugrunde liegen.

Das Marginalexemplar erscheint als Text, die zugehörigen Seitenzahlen sind in eckigen Klammern vorangestellt. Die Schreibweise des Lateins wurde nach heutigem Gebrauch vereinheitlicht. Die Figuren, welche für das Verständnis des angezogenen Textes nötig sind, werden im Allg. in Originalgröße beigefügt, größere Abweichungen davon werden jeweils angezeigt.

Leibniz hat sowohl zum Text wie vereinzelt zu den Figuren Marginalien angefügt bzw. im Text Unterstreichungen vorgenommen. Marginalien werden als Fußnoten, Unterstreichungen durch Sperrung der entsprechenden Passagen dargestellt.

Eine Eigentümlichkeit des Handexemplars ist die große Anzahl rein zeichnerischer Ergänzungen, die Leibniz sowohl in Tinte wie in Blindtechnik vorgenommen hat. Ergänzungen in Tinte allein betreffen die Figuren der S. 4, 70, 105; Ergänzungen in Tinte plus Blindtechnik die Figuren der S. 49, 89; die restlichen Ergänzungen sind in reiner Blindtechnik. Nicht alle dieser Eintragungen haben eine Entsprechung im Text Huygens' bzw. in anderen Stücken des vorliegenden Bandes; sie sind auch im Lichte der Ausführungen von N. 26 S. 12 f. zu sehen. Hinzugefügte Linien werden durch Stricheln, hinzugefügte Buchstaben durch Einschließen in runde Klammern gekennzeichnet und direkt an den Originalfiguren wiedergegeben; sie werden bei Bedarf zusätzlich aufgelistet und ggf. erläutert. Eintragungen in Tinte werden separat vermerkt.

FIG. I.

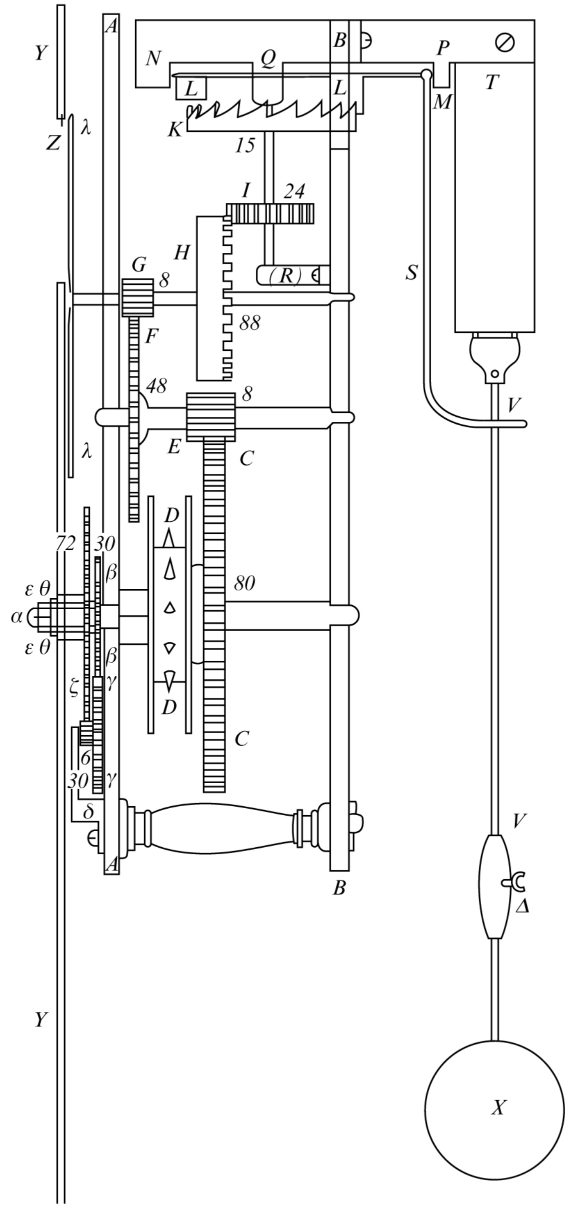

A
B
N
Q
P
T
L
L
M
K
15
I
24
H
G
8
(R)
S
88
F
48
8
V
E
C
D
72
30
β
ε θ
80
α
ε θ
β
ζ
γ
D
C
6
30
γ
δ
A
B
V
Δ
Y
Z
λ
λ
Y
X

FIG. II.

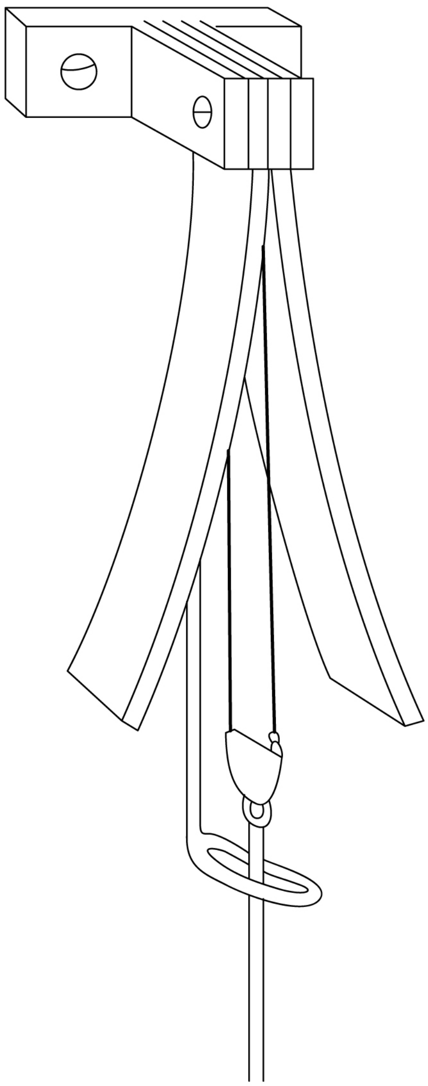
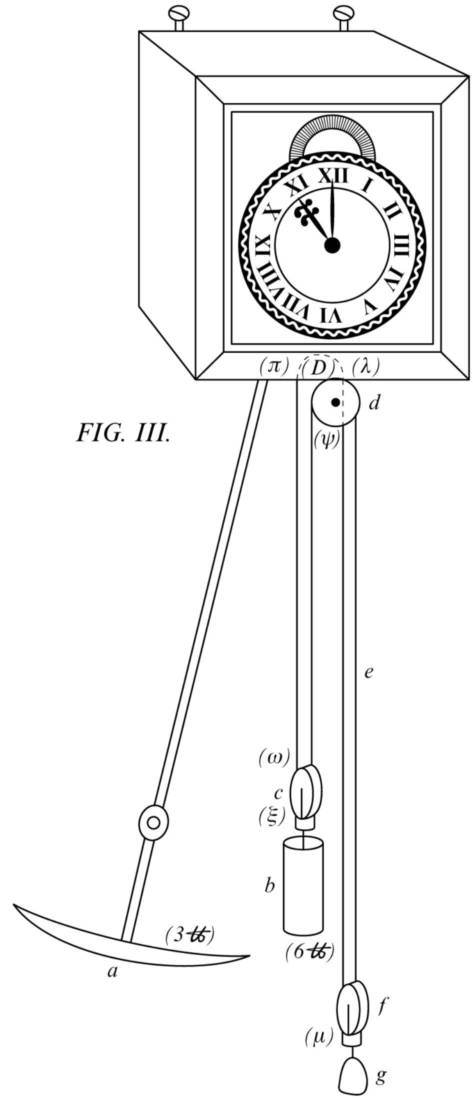


FIG. III.



[*Teil 1*]

[*Marginalien und Unterstreichungen*]

[*Titelblatt*] Ex dono autoris Leibnitius possidet.

[p. 4 = *Figurenseite zur Pendeluhr* (*s. S. 28 u. 29*)]

[*Zu* Fig. I. (70 %)]

Ergänzungen: Punkt R. DD 1 pollex. AA sex pollicum aut paulo ultra.

Horologium hoc ad hominis altitudinem suspensum 30 horis moveri perseverat. Rota Z 12 horis circuitum absolvit eique affixus index designat horas. Rota C quemadmodum et β una hora, eique affixus index designat minuta prima. Rota H vel $\lambda\lambda$ uno minuto primo absolvitur eique affixus index designat minuta secunda.

Penduli longitudo ut scrupulum secundum qualibet oscillatione simplici conficiat est trium pedum horariorum, et unus pes horarius est ad Parisinum ut 881 ad 864. TX hic exhibet quintam partem trium pedum horariorum. P o n d u s V aequat 20^{mam} aut 30^{mam} partem ponderis X. P o n d u s X trilibre.

[*Zu* Fig. II. (141%)]

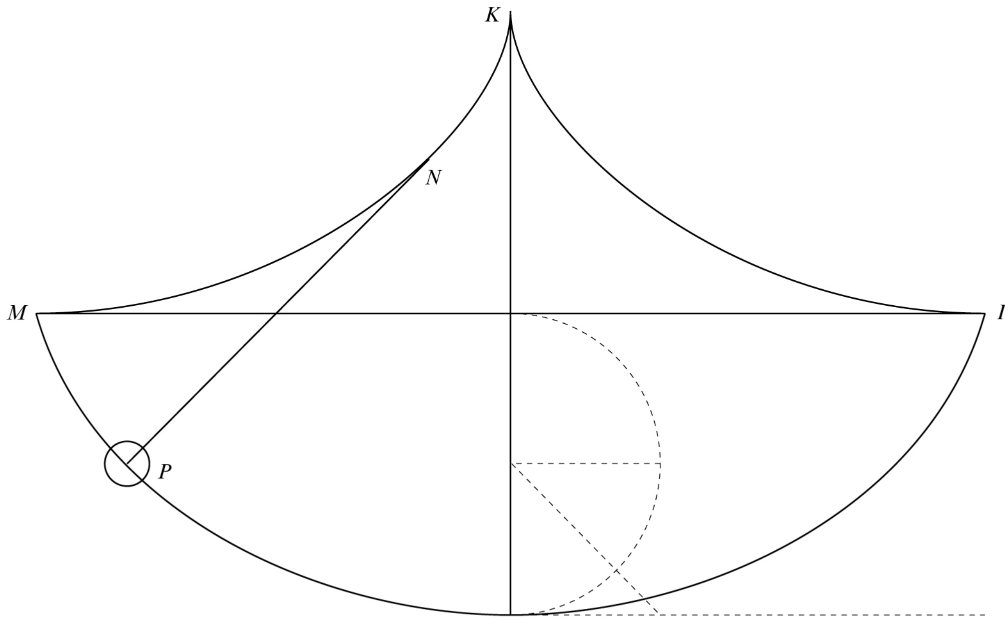
Circulus genitor cycloidis debet esse dimidia perpendiculi longitudo, et sumuntur portiones cycloidales non a vertice, sed a basi.

[*Zu* Fig. III. (141%)]

Ergänzungen: Punkte $D, \lambda, \mu, \xi, \pi, \psi, \omega$; *Seilzug* (*bei* d); Gewichtsangabe 3 ℔ (*bei* a), 6 ℔ (*bei* b).

Ut pondus horologii maius $\underline{b}$ iterum altrahatur, sine machinae interruptione, manus trahit funem $\underline{e}$ deorsum, eo ipso vertitur trochlea $\underline{d}$ a summo dextrorsum, et fune $\underline{ed}$ continuato in $d\psi\omega\xi c\pi\lambda\mu fed$ et ω ascendente versus ψ. Simul et convertitur (ab ξ versus ω) et ascendit trochlea $\underline{c}$ et pondus ex ea suspensum $\underline{b}$. Sed eodem pondere $\underline{b}$ nitente deorsum; convertitur trochlea $\pi\lambda$ seu D ut in fig. 1. exprimitur, quae nempe denticulis ferreis asperata est; unde ad caeteras horologii rotas motus pervenit. Funis autem a $\pi\lambda$ iterum descendit ad μ, et trochlea $\underline{f}$ cum pondere minuto $\underline{g}$ appenso descendit. Contrarium autem evenit, cum manu non trahente, pondus $\underline{b}$ sibi relictum descendit. Semper autem eodem nisu agit pondus $\underline{b}$ in rotam $\pi\lambda$ seu D. Sive libere descendat, sive a manu in $\underline{e}$ modo dicto sursum trahatur, $\pi\lambda$ debuisset poni a postica circuli horarii parte.

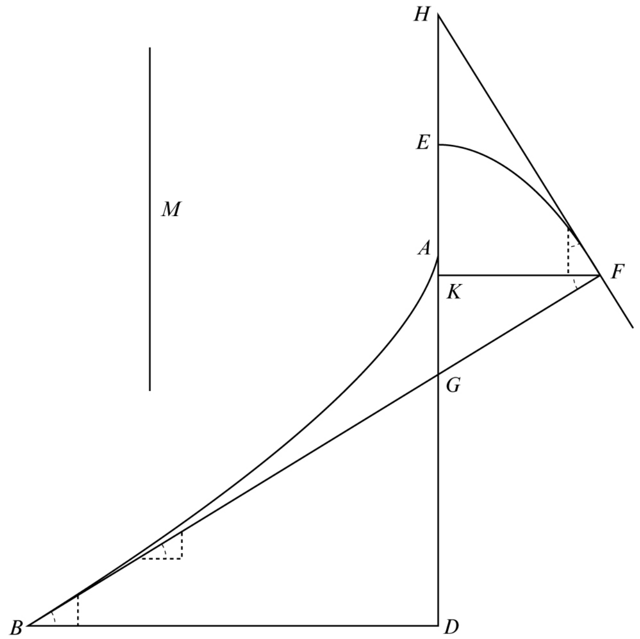
[p. 11 f.] Verum, ut mirabilis lineae natura atque effectus plenius intelligantur, integras semicycloides KM, KI, alio schemate hic exprimere visum fuit, inter quas suspensum agitatumque pendulum KNP, diametri circuli genitoris duplum, cuiuscunque amplitudinis oscillationes, usque ad maximam omnium per arcum MPI, iisdem temporibus confecturum sit: atque ita, ut appensae spherae P centrum, in linea MPI, quae et ipsa cyclois integra est, semper versetur. Quae proprietas insignis, *nescio an alii praeter hanc lineae data sit, ut nempe se ipsam sui evolutione describat.* Haec autem quae dicta sunt, in sequentibus, ubi de descensu gravium, deque evolutione curvarum agemus, singula demonstrabuntur.



[p. 69 f.] Propositio VIII.

Cuius lineae evolutione parabola describatur ostendere.

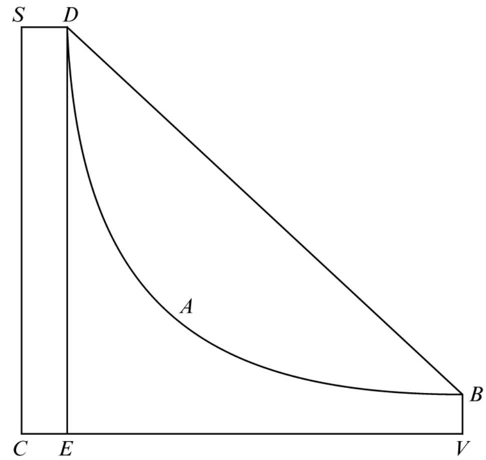
Sit paraboloides AB, cuius axis AD; vertex A; proprietas autem ista, ut ordinatim ad axem applicata BD, cubus abscissae ad verticem DA aequetur solido, basin habenti quadratum DB, altitudinem vero aequalem lineae cuidam datae M; quae quidem curva pridem geometris nota fuit; et ponatur axi DE iuncta in directum AE, quae habeat $\frac{8}{27}$ ipsius M. Iam si filum continuum circa EAB applicetur, idque ab E evolvi incipiat, dico descriptam ex evolutione esse parabolam EF, cujus axis EAG, vertex E, latus rectum aequale duplae EA.



[*Zur Figur*]: *Ergänzungen (Winkelmarkierungen und infinitesimale Dreiecke) in Tinte*.

1 *Zu* latus rectum *erg.*: $\frac{16}{27}\ M$.

[p. 78 f.]

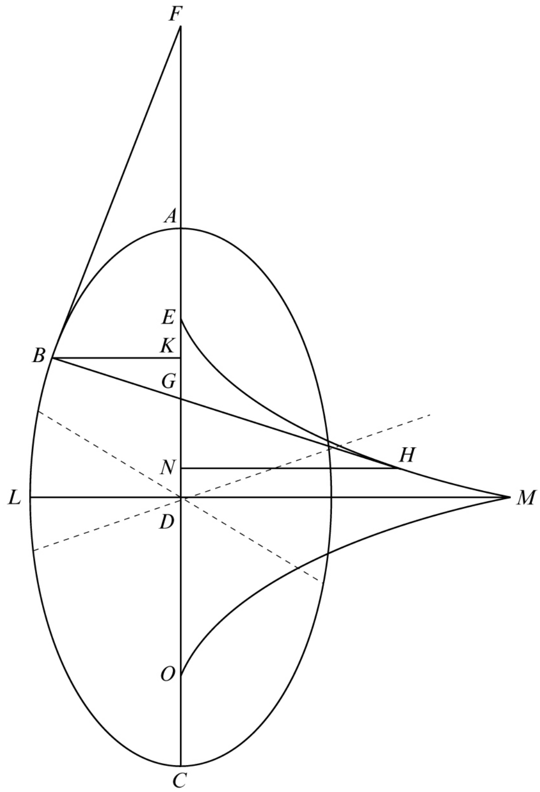


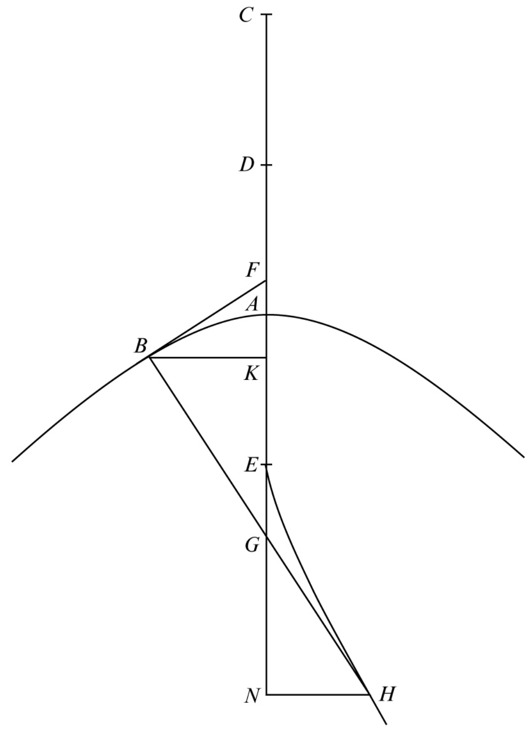
Sit ex. gr. proportio DE ad BV ea quae 36 ad 5.

Ab	1, 55630, 25008,	logar$^{\text{o}}$. 36.
auferatur	0, 69897, 00043.	logar$^{\text{us}}$. 5.
Erit	0, 85733, 14965.	differ. logar$^{\text{orum}}$.
Et	9, 93314, 92856.	logar$^{\text{us}}$. differentiae.
Cui addatur	0, 36221, 56887.	logar$^{\text{us}}$. semper addendus.
Fit	10, 29536, 49743.	logar$^{\text{us}}$. spatii $D\ E\ V\ B\ A\ D$.

5–7 *Jeweils dahinter:*
log. $\frac{36}{5}$.
log. log. $\frac{36}{5}$.
log. log. 10$^{\text{narii}}$ hyperbolici seu Log. de 2.30258, 50929.

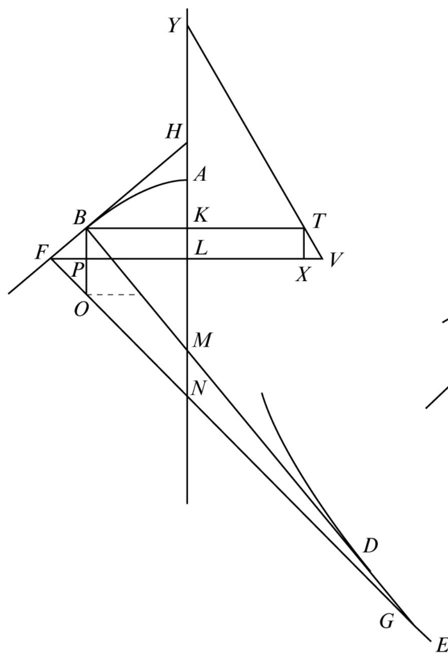
[p. 80]

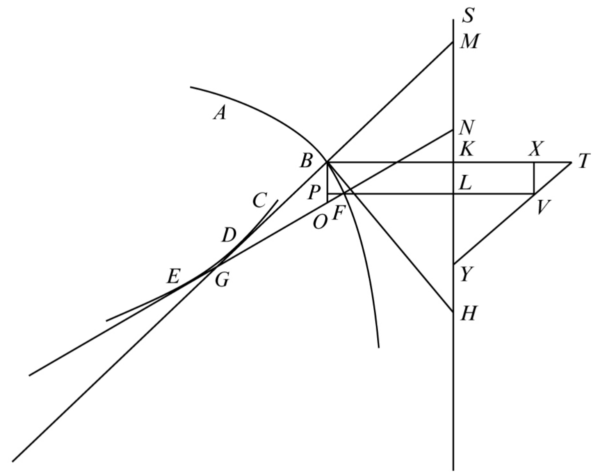




1 *Zu den Figuren:* $\dfrac{BH}{HG} = \dfrac{GF \frown AD}{FK \frown DE}$.

[p. 81 f.]





Sit BO parallela KL, et in hanc perpendiculares cadant BK, FL: secetque FL rectam BO in P, et sint puncta notata M, N, in quibus rectae, BD, FE, occurrant ipsi KL. Quia igitur ratio BG ad GM est eadem quae BO ad MN, data hac dabitur et illa; et quia recta BM datur magnitudine ac positione, dabitur et punctum G in producta BM, sive D in curva CDE, quia G et D in unum convenire diximus. Datur autem ratio BO ad MN; simpliciter quidem in Cycloide, ubi primum omnium illam investigavimus, invenimusque duplam; in aliis vero curvis, quas hactenus examinavimus, per duarum datarum rationum compositionem. Nam quia ratio BO ad MN componitur ex rationibus BO ad BP, sive

---

6 quia … diximus.: *Leibniz ändert in:* (quia … diximus) modo detur ratio BO ad MN.

9 *Zu* ratio BO ad MN *am Rande*: $\dfrac{BO}{MN} = \dfrac{BO}{BP}\left(\dfrac{NH}{LH}\right)^{\frown}\dfrac{BP = KL}{MN}$.

NH ad LH, et ex BP sive KL ad MN; patet si rationes hae utraeque dentur, etiam ex iis compositam rationem BO ad MN datum iri. Illas vero dari in omnibus curvis geometricis, in sequentibus patebit; ac proinde iis semper curvas adsignari posse, quarum evolutione describantur, quaeque ideo ad rectas lineas sint reducibiles.

Ponatur primo parabola esse ABF, cujus vertex A, axis AQ. Cum igitur lineae BM, FN, sint parabolae ad angulos rectos; ductaeque sint ad axem AQ perpendiculares BK, FL, erunt, ex proprietate parabolae, singulae MK, NL dimidio lateri recto aequales; et ablata communi LM, aequales inter se KL, MN. Hinc, quum ratio BG ad GM componatur ex rationibus NH ad HL, et KL ad MN, uti dictum fuit, sitque earum posterior ratio aequalitatis; liquet rationem BG ad GM fore eandem quae NH ad HL; et dividendo, BM ad MG, eandem quae NL ad LH, sive MK ad KH; n a m LH, KH pro eadem habentur, propter propinquitatem punctorum B, F.

[p. 84] Sint rectae KT, LV, perpendiculares super KL, sitque KT aequalis KM, et

---

8 *Hinter GM erg.:* vel BO ad MN

12 *Hinter* eadem *erg.:* puncta K et L. vel M et N pro iisdem

13–37,7

$$\begin{array}{llccccl} & & & LU & & KT & \\ & & & | & & | & \\ MN - & LK & = & LN & - & KM & = XU. \\ & & & /\backslash & & /\backslash & \\ & & & \llcorner LM+MN\lrcorner & - & \llcorner LM+LK\lrcorner & \\ \text{Ergo} & XU & + & TX = MN. & & & \\ & & & /\backslash & & & \\ & & & KL & & & \end{array}$$

$$\frac{XT+XU}{XU} = \frac{XT}{XU} + 1.$$

13–37,7 In der zugehörigen Figur (auf der oberen Hälfte der Seite) hat Leibniz keine Ergänzungen vorgenommen; sie ist identisch mit der Figur von S. 81, s. o. S. 35. 21 KL: Leibniz bezieht sich auf die nicht ganz textkonforme linke Teilfigur der S. 84 (bzw. 81), genauer müsste, wie rechts, XU und nicht TX mit KL gleichgesetzt werden. — Zur linken Teilfigur s. auch *HO* XVIII S. 224, Erl.

LV aequalis LN, et ducatur VX parallela LN, quae occurrat ipsi KT in X. Quoniam ergo semper eadem est differentia duarum LK, NM, quae duarum LN, KM, hoc est, quae duarum LV, KT; est autem differentiae ipsarum LV, KT aequalis XT, et XV ipsi LK; erit proinde NM aequalis duabus simul VX, XT, vel ei quo VX ipsam XT superat. Atque adeo, si data fuerit ratio VX ad XT, data quoque erit ratio VX ad utramque simul VX, XT, vel ad excessum VX supra XT, hoc est, data erit ratio VX sive LK ad NM.

[p. 100] Propositio V.

Dato pendulo ex ponderibus quotlibet composito, si singula ducantur in quadrata distantiarum suarum ab axe oscillationis, et summa productorum dividatur per id quod fit ducendo ponderum summam, in distantiam centri gravitatis communis omnium ab eodem axe oscillationis; orietur longitudo penduli simplicis composito isochroni, sive distantia inter axem et centrum oscillationis ipsius penduli compositi.

[p. 130] ... invenimus $\frac{3}{8}b - \frac{3br}{8a} + \frac{3pr}{8a}$.

9–13 *Daneben am Rande:*
Distantia centri oscillationis ab axe, ducta in momentum gravitatis facit momentum oscillationis.
Est autem momentum gravitatis, pondus ductum in distantiam centri gravitatis; et coincidit cum aggregato ex momentis partium.
Momentum oscillationis est pondus libere situm, ita ut in uno velut puncto situm spectari possit, ductum in distantiae huius puncti ab axe, quadratum, et coincidit cum aggregato ex momentis partium. Est in his aliqua difficultas.

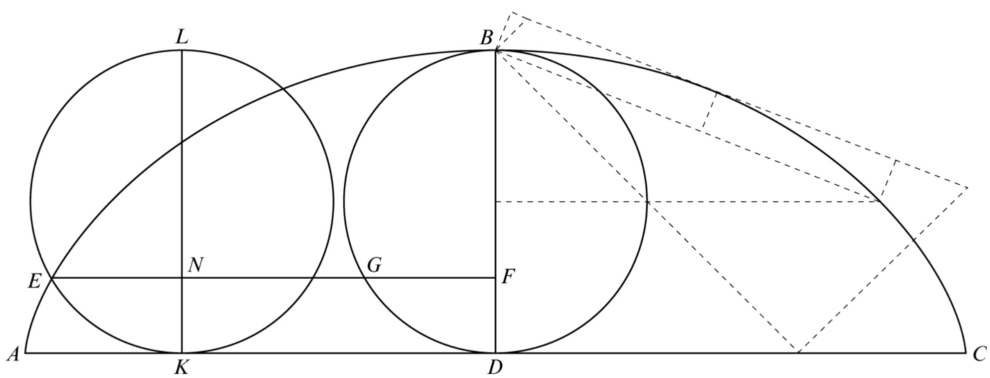
9 f. *Zu* quadrata distantiarum *speziell:* Sed quomodo sumemus quadrata distantiarum sive ipsas distantias ponderum? Puto intelligi debere distantias centrorum gravitatis.

14 $\frac{3}{8}\ \overline{b + \frac{r}{a}\ \overline{-\ b + p}}$

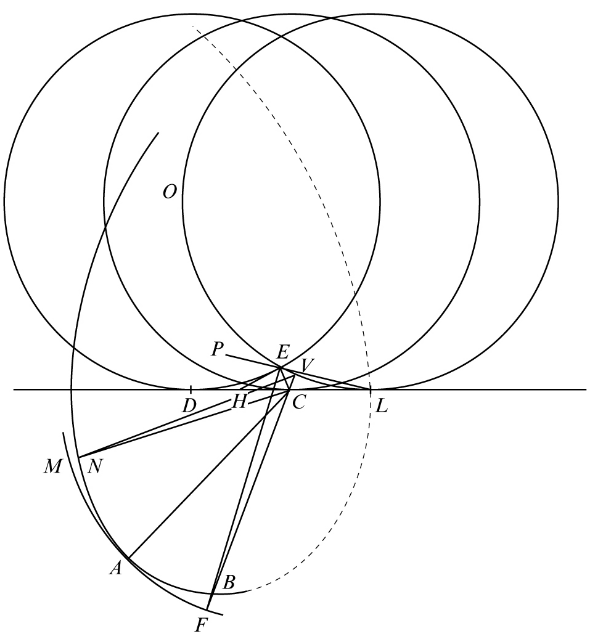
[*Teil 2*]

[*Zeichnerische Ergänzungen*]

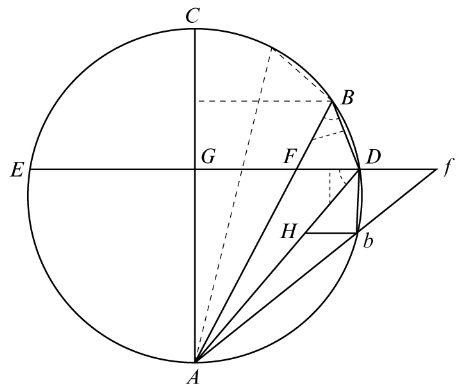
[p. 38 *untere Figur*]



[p. 41]

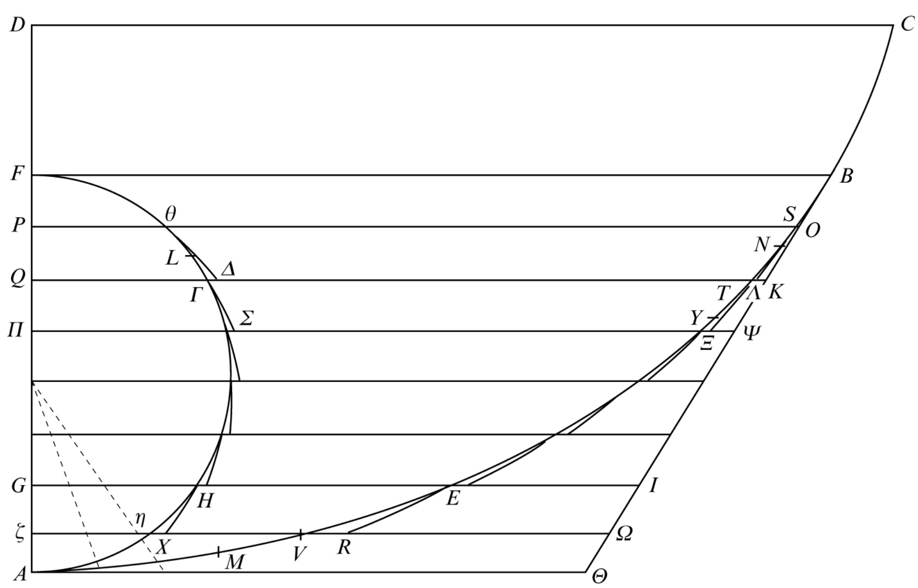


[p. 49]

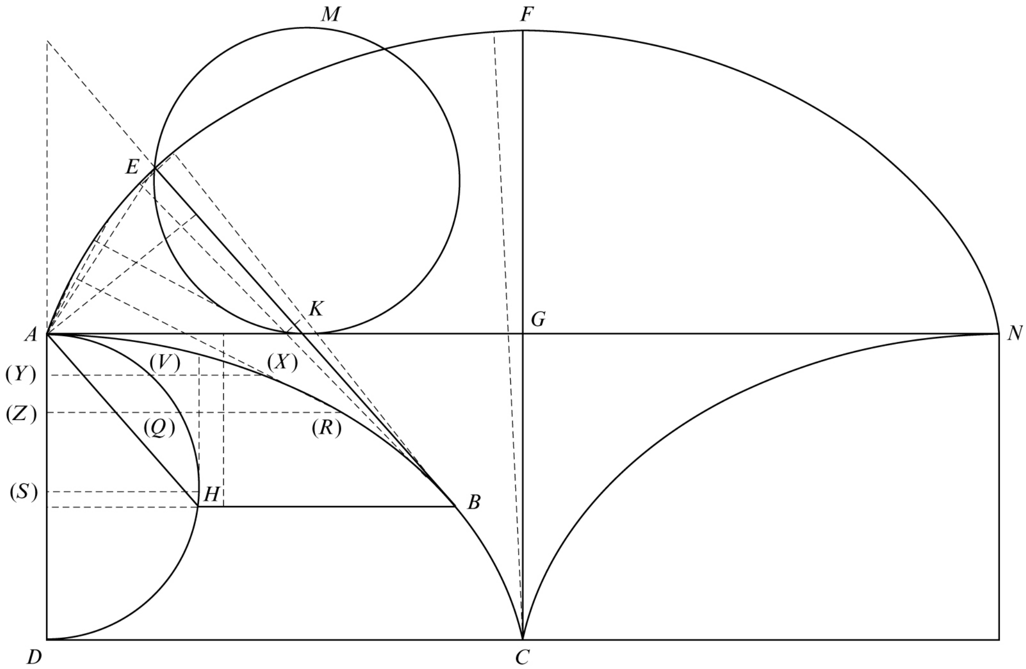


Merkdreiecke und Winkelmarkierungen bei B und D in Tinte; restliche Ergänzungen in Blindtechnik.

[p. 55]



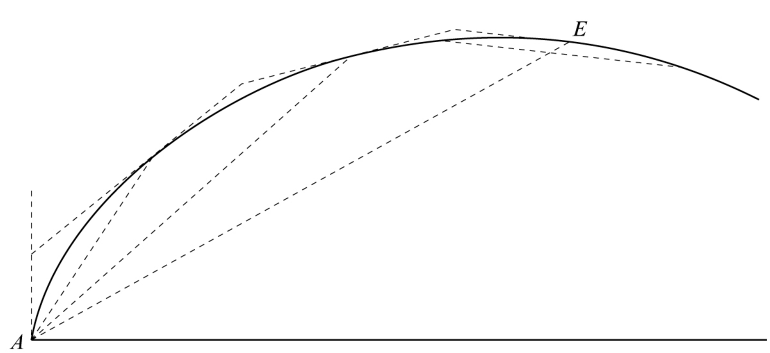
[p. 66]



Ergänzungen: Punkte Q, R, S, V, X, Y, Z. Linien in Blindtechnik. Zum Bogen AE s. u. Erl.

---

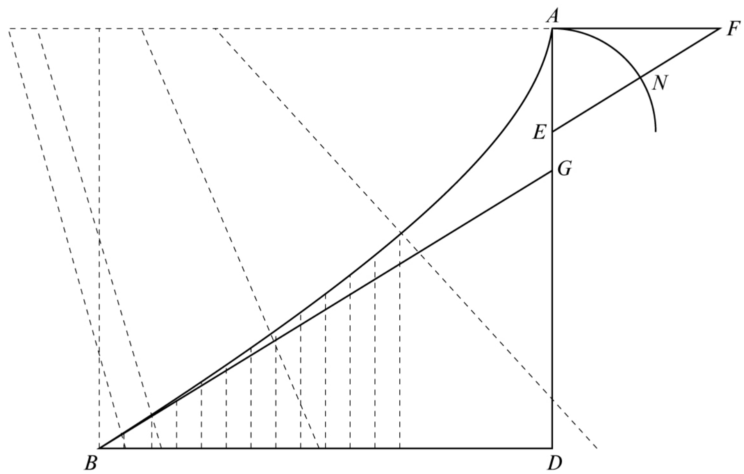
2 f. Am Bogen AE häufen sich die Eintragungen in Blindtechnik. Zur besseren Übersicht hat Hrsg. folgende Detailzeichnung beigefügt, in welcher der Bogen AE in geeigneter Weise vergrößert wurde, die zugrunde gelegte Zykloide entspricht der des Originals.



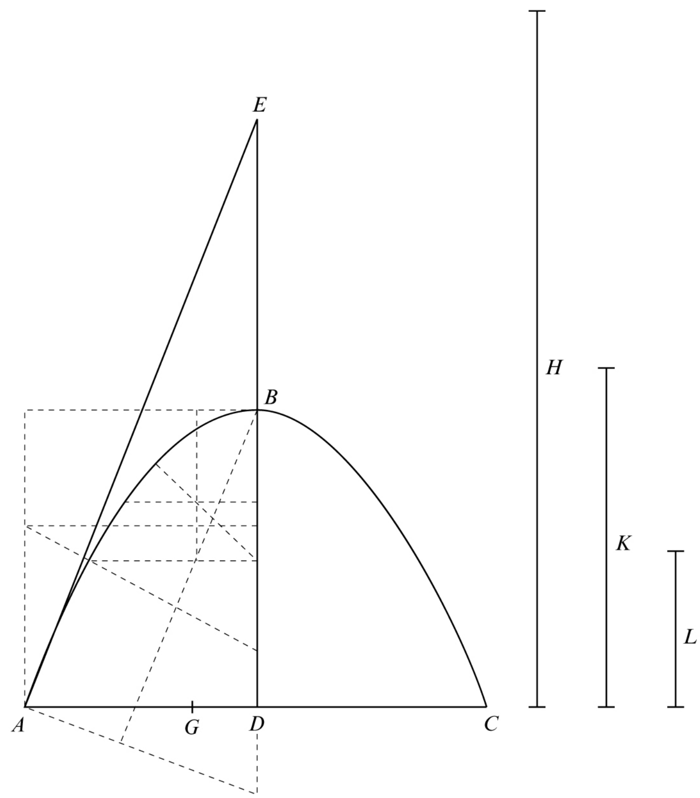
[p. 68]

Der Text wiederholt die Figur von S. 66. Leibniz ergänzt zwischen H und K den Parallelbogen zum Bogen AE.

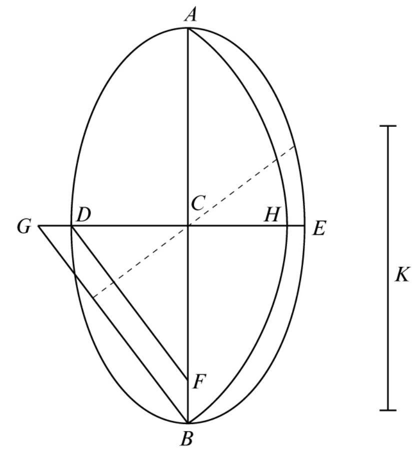
[p. 71]



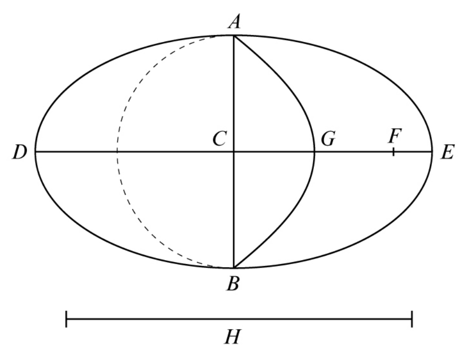
[p. 73 (141%)]



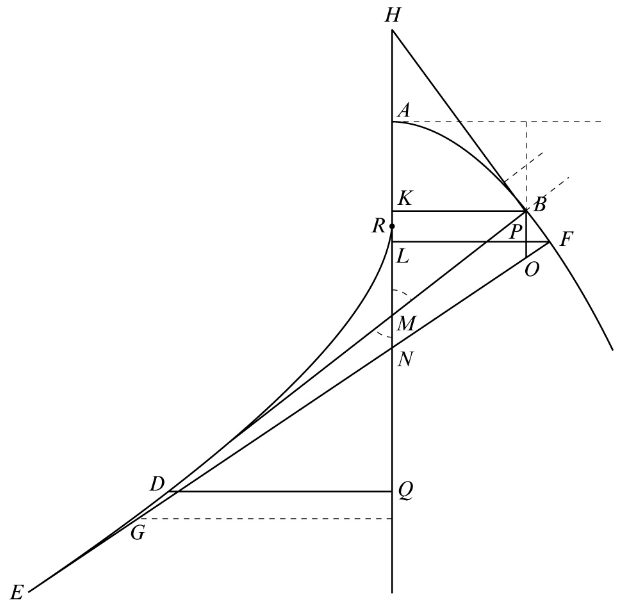
[p. 74]



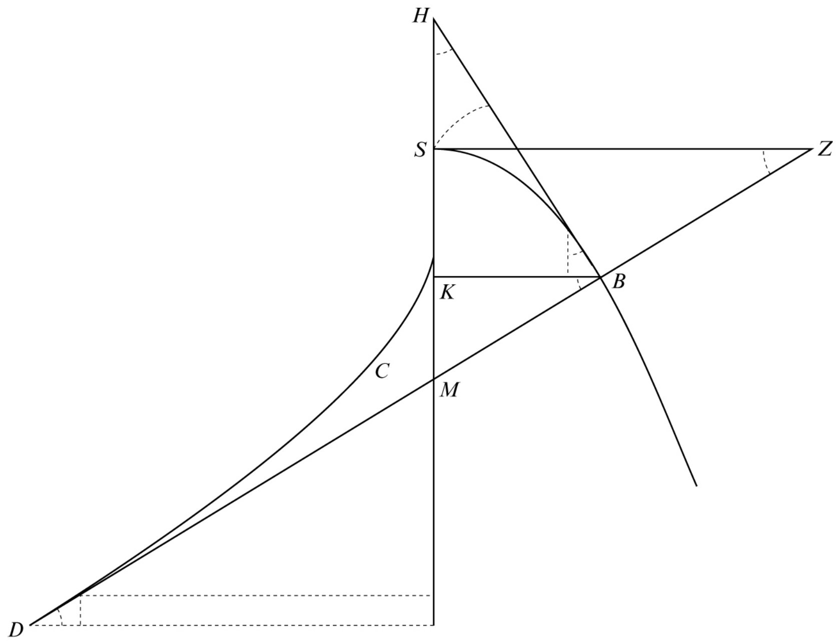
[p. 75]



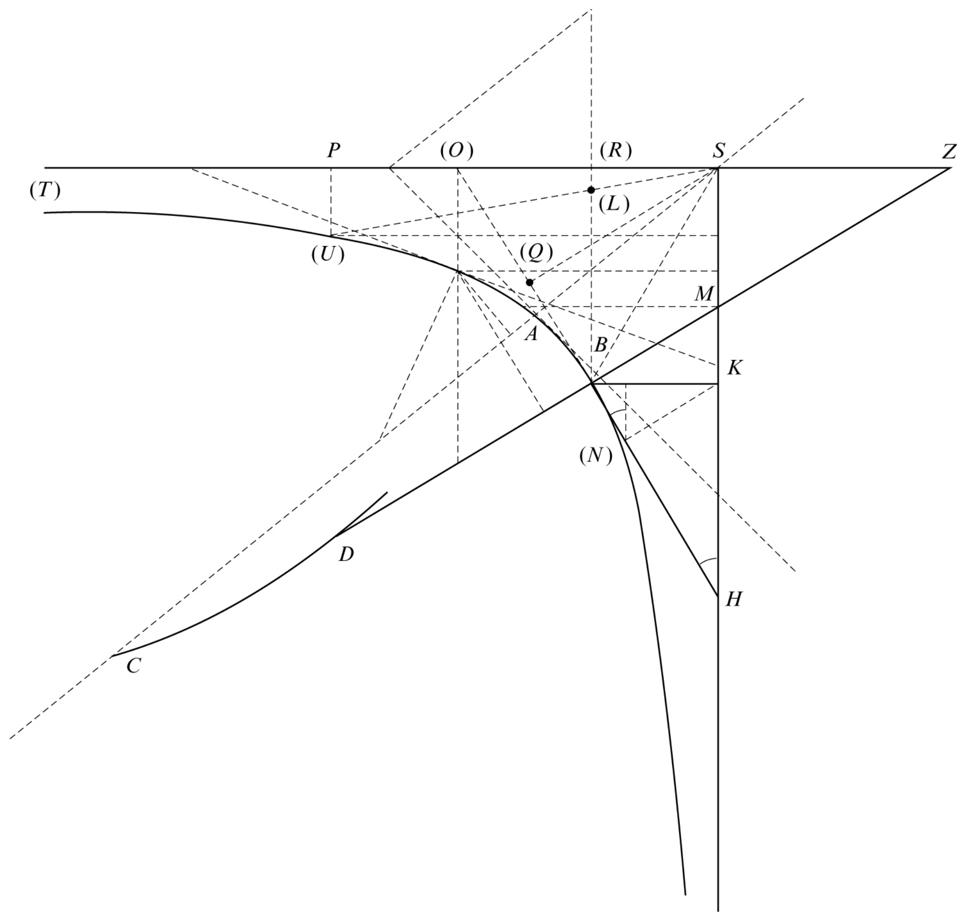
[p. 83]



[p. 88]



[p. 89 (141%)]



Ergänzungen:
Punkte L, N, O, Q, R, T, U.
Linien SB, SQ, SU, BO, BR, KN, PU, *Lot auf* PZ *durch* 0 *bis zum Schnitt mit der Hyperbel in Tinte.*

3–5 Die zusätzlichen Punkte ergeben zusammen mit den in Tinte ergänzten Linien Figur 3 von N. 38.

Restliche Linien sowie die Winkelmarkierungen bei H und N in Blindtechnik.

[p. 105]
Leibniz ergänzt und markiert in Tinte den Mittelpunkt M der Schnittellipse AD.

Tintenspuren finden sich auf den Seiten 2, 17, 23, 25, 46, 51, 67, 78, 80, 81, 84, 88, 104, 105, 112, 147, 148, 149, 150, 158.

Druckfehler und Druckunsauberkeiten hat Leibniz auf den Seiten 5, 53, 78, 117, 145, 148, verbessert.

3. ZU MERCATOR, LOGARITHMOTECHNIA, UND ZU RICCI, EXERCITATIO GEOMETRICA

[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *LiH* Marginalien, An- und Unterstreichungen in: *Logarithmotechnia: sive methodus construendi logarithmos* ... Auctore Nicolao Mercatore ... Huic etiam iungitur Michaelis Angeli Riccii *Exercitatio geometrica*, London 1668: HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Ms IV 377.

Datierungsgründe: Leibniz hat die Schrift zusammen mit J. GREGORY, *Exercitationes geometricae*, London 1668, und weiteren Werken während seines 1. Londoner Aufenthalts erstanden. Beide Schriften sind später zusammengebunden worden, wobei die Ränder beschnitten wurden, die Stellen mit Leibniz' Bemerkungen aber ausgespart blieben.

Alle drei Abhandlungen enthalten eigenhändige Eintragungen von Leibniz. Die Eintragungen zu Gregory sind mehrheitlich deutlich später als die übrigen; sie werden in einem späteren Band dieser Reihe erfasst. Die beiden anderen Schriften dürfte Leibniz bald nach seiner Rückkehr studiert haben. Dies zeigen die Verwendung einer frühen Form des Gleichheitszeichens und Anspielungen in frühen Studien. Leibniz hat beide Schriften aber auch später noch herangezogen, wie u. a. die Verwendung einer späteren Form des Gleichheitszeichens beweist.

Das Marginalexemplar erscheint als Text, die zugehörigen Seitenzahlen sind in eckigen Klammern vorangestellt. Bei Ricci am Rand stehende Hinweise auf die Figurentafel am Schluss der Abhandlung sind in den Text in runden Klammern integriert. Die Schreibweise des Lateins wurde dem heutigen Gebrauch angepasst. Marginalien werden als Fußnoten zum Text, Unterstreichungen durch Sperrung der entsprechenden Passagen, Anstreichungen mittels Vermerk in den Fußnoten wiedergegeben.

3_1. ZUR LOGARITHMOTECHNIA

[p. 8/9] Ita, licet utilis sit demonstrationibus geometricis consideratio vulgaris, qua minor terminus antecedens ad maiorem consequentem dicitur minorem rationem habere, quam idem ille maior tanquam antecedens ad eundem minorem tanquam consequentem obtineat: Negari tamen haut potest, eundem numerum ratiuncularum contineri in sesquialtera ratione, sive ternarius sit antecedens, sive binarius, sive neuter; adeoque

---

27–49,2 *Anstreichung von* Negari *bis* habere.

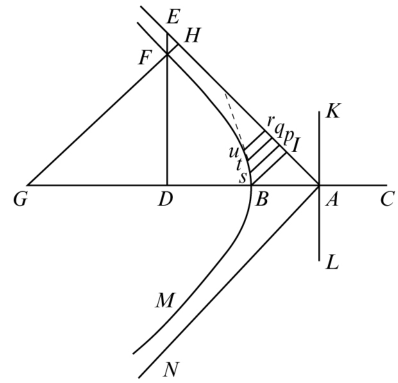
considerationem antecedentis et consequentis in aestimanda mole vel mensura rationum nullum instar habere. Non secus ac quinarius negatus (− 5) mole haud differt a quinario affirmato (+ 5) cum uterque constet quinque unitatibus; dissimulata nimirum affectione, propter quam negatus vel affirmatus censetur, et sola mole vel quantitate simpliciter aestimata: cum tamen accipiendo quinarium negatum, prout signo negationis affectus est, verum sit, eum minorem esse, non modo quovis numero affirmato, sed et omni negato, qui a nihilo minus differat, quam ipse, quales sunt binarius vel ternarius negatus (−2, vel −3). Ubi praeter molem numeri consideratur quoque, utram in partem eadem abeat a nihilo, affirmatam an negatam.

[p. 26] Atque ita exposita methodo construendi Logarithmos nova, accurata, et facili, haud scio, an opus sit monere Lectorem, si ad praxin accedere luberet, non requiri compositorum numerorum Logarithmos; ideoque omnes pares primum excludendos, deinde omnes a quinario productos; ita ut restent soli Logarithmi numerorum in unitatem, 3^{rium} 7^{rium} 9^{rium} exeuntium, atque horum quoque tertium quemque, cum sit ex ternario compositus, omitti posse.

[p. 27] Pari modo tertius quisque in unitatem 7^{rium}, 9^{rium} exeuntium omittetur. Itaque fiet, omissis paribus lucrifaciamus semissem operae, et detractis quinariis rursus partem decimam, denique excluso tertio quoque in 1, 3, 7, 9, desinentium, trientem laboris residui; unde non nisi $\frac{4}{15}$. nonaginta chiliadum, quae sunt a 10000 ad 100000, industriam nostram expectant.

2 f. Hoc modo ratio erit differentia logarithmorum.

[p. 28] Propositio XIV.



[*Fig. 1*]

Sit Hyperbole MBF, cuius latus rectum KL aequale sit transverso BC; erunt asymptoti AN et AE ad angulos rectos, et quadratum DF aequale rectangulo CDB per 21. I. *Conicor.* Ex B et F cadant perpendiculares ad asymptoton BI et FH. Dico, AH esse ad AI, ut BI ad FH.

---

2 *Ap. Aq. Ar.* numeri. *BIps. spqt. tqrv.* sunt mensurae rationum numerorum seu absolutorum aequidifferentium ad unitatem *AI.* *BIps. BIqt. BIrv.* logarithmi harum rationum.

Itaque si $1+a$ sint ut numeri, erunt $\dfrac{a}{1}-\dfrac{a^2}{2}+\dfrac{a^3}{3}-\dfrac{a^4}{4}$ etc. ut logarithmi.

4 *Dazu gestrichen:* $y^2 = ax + a^2$ seu $DF^2 = DB \frown CB + CB^2$. Ergo $\dfrac{y^2-a^2}{a} = x$.

2 *Tangente von t zur Asymptote AE erg. LiH* 10 si *(1)* a *(2)* 1 + a *L* 10 logarithmi. | Adeoque data aequatione: a $\sqcap$ b^l. erit l $\sqcap$ $\dfrac{a}{1}-\dfrac{a^2}{2b}+\dfrac{a^3}{3b^2}-\dfrac{a^4}{4b^3}$ etc. *gestr.* | *LiH*

[p. 29] Propositio XV.

In diagrammate praecedenti, posita $AI = BI = 1$, et $HI = a$; oporteat invenire FH.

Dico per praecedentem: ut AH ad AI, ita BI ad FH; hoc est, $1 + a.\ 1 :: 1.\ \dfrac{1}{1+a}$; nimirum FH aequalis est unitati divisae per $1 + a$.

[p. 34] Hinc patet, quomodo productum continuum omnium a 0 ad numerum datum arithmetice progredientium inveniri queat. Nam summa Log-orum, est Log-us producti continui.

Patet quoque ex praecedentibus, quo pacto Problema *Mersennianum*, si non geometrice saltem in numeris, ad quotvis usque locos solvi possit. Atque hic jam filum abrumpere cogor, tantisper dum otium pertexendi reliqua largiatur Deus.

Des Weiteren finden sich Tintenspuren S. 4, 11 und 31 f.

3_2. ZUR EXERCITATIO GEOMETRICA

[Widmung an Stjepan Gradič]

[Fol F2 r°/v°] *Nam si hoc assequar, ut tibi caeterisque amicis earundem disciplinarum intelligentibus probetur, minus erit in posterum quam ob rem humanissimis tuis hortationibus oblucter, cum autor mihi esse perseverabis edendi alia quae tecum iampridem communicavi, de praeceptis universae artis analyticae, geometrica methodo breviter et expedite demonstratis, una cum animadversione erratorum quae in ipsis tradendis magni nominis auctores errasse deprehendi; faciliusque obtinebis ne diutius premam apud me quaecumque de Geometria in genere disputata et*

5 $FH = \dfrac{a^2}{a+x}$ ponendo $AI = a.$ et $HI = x.$

9–11 *Unregelmäßige Bleistiftmarkierung.*

9 Problema *Mersennianum*: s. dazu M. Mersenne, *Novarum observationum physico-mathematicarum tomus III*, 1647, S. 72 sowie A. A. de Sarasa, *Solutio problematis a R. P. Mersenno Minimo propositi*, 1649.

literis consignata incertas propositiones redegi; et ex his illam praecipue a Torricellio, *et a te quoque tantopere commendatam, quae integram doctrinam triginta propositionum* Archimedis, Lucae Valerii, *et aliorum, una complectitur; duasque praeterea, quibus totam pene* Io. Caroli de la Faille *de centro gravitatis partium circuli, et ellipseos doctrinam* [*iusto volumine ab ipso explicatam*] *absolvo.*

[p. 1] *DEFINITIONES*

1. Potestatem quamlibet, eiusque radicem, voco dignitatem.

2. Si Dignitas in Dignitatem ducatur, ut A 2 in, B 3, fiet productum A 2 in B 3; cui producto illud simile dicimus, quod gignitur ex Dignitatibus graduum eorumdem. Ita, in facta hypothesi, productum E 2 in C 3, ex quadrato et cubo, simile est producto A 2 in B 3.

1–5 *Anstreichung von* et ex his *bis* absolvo.

6–54,8 *Zu S. 1 f. zusammenfassend:*

Dignitas $a.$ $a^2.$ $a^3.$ $a^4.$

Producta similia $a^2b^3.$ $c^2d^3.$

Homogenea producta $a^2b^3.$ $c^5.$

Termini $\begin{array}{ccc|cc|cc|cc} 1 & & 2 & & 2 & & 3 & & 2 \\ & \text{vel} & & \text{vel} & & \text{vel} & & \text{vel} & \\ 2 & & 2 & & 1 & & 2 & & 3 \end{array}$

Productum secundum terminos datos aut positos est:

$3a^3 2b^2$. si a est ad b ut 3 ad 2.

Lemma I. $\dfrac{a^3b^2}{\overline{a+b}^5} \sqcap \dfrac{c^3d^2}{\overline{c+d}^5}$. si a. b. proportionales c. d. seu si $\dfrac{a}{b} \sqcap \dfrac{c}{d}$. Sunt enim omnia proportionalia.

7 Radicem; quad. cub. etc. a. a^2. a^3. a^4.

10 f. a^2b^3 sim. e^2c^3.

5 *Klammerung im Text.* 23 proportionalia. | Lemma *bricht ab, streicht Hrsg.* | *LiH*

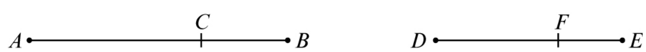
3. Homogenea producta sunt quae ad eundem gradum pertinent; ut duo rectangula, quippe quae ad secundum gradum pertinent; et duo solida, quae ad tertium.

4. Terminos cum dico, intelligi volo duos numeros seu aequales seu inaequales, vel numerum et unitatem, vel duas unitates. Terminos inaequales appello duos numeros inaequales, vel numerum et unitatem. Terminos autem aequales, duos aequales numeros, vel duas unitates.

5. Productum in linea fieri secundum terminos datos, aut positos, dicimus, quum illud fit ex duabus dignitatibus, quarum exponentes sunt ipsi termini dati vel positi; radices vero segmenta illius rectae lineae sectae in proportione terminorum eorumdem.

[p. 2] Lemma Primum.

Si duae rectae in eadem ratione secentur, producta similia facta ex segmentis tanquam ex radicibus, erunt proportionalia productis homogeneis quae fient ex totis.



(Fig. I.)

---

1 a^3b^2 et c^5.

Omnia similia producta sunt homogenea non contra.

7 V. g. $3a^3 \frown 2b^2$.

10 Si $\dfrac{AC}{CB} = \dfrac{DF}{FE}$. erit: $\dfrac{AC^3\ CB^2}{DF^3\ FE^2} = \dfrac{AB^5}{DE^5}$ $\left(= \dfrac{AC^4\ CB^1}{DF^4\ FE^1}\right)$ seu $= \dfrac{AC+CB,^5}{DE+FE,^5}$. seu $\dfrac{AC^3\ CB^2}{AC+CB,^5} = \dfrac{DF^3\ FE^2}{DE^5}$. Ponamus enim $\dfrac{AB}{DE} = \dfrac{1}{\beta}$. erit: $\dfrac{AC^3\ CB^2}{DF^3\ FE^2} = \dfrac{AC^3\ CB^2}{AC^3\ CB^2\ \beta^5}$. quia $\dfrac{AC^3\ CB^2}{DF^3\ FE^2} = \dfrac{AC^3\ CB^2}{AC^3\ \beta^3\ CB^2\ \beta^2} = \dfrac{AC^3\ CB^2}{AC^3\ CB^2\ \beta^5} = \dfrac{AB^5}{AB^5\ \beta^5} = \dfrac{1}{\beta^5}$. Idem enim est, ac si idem repetatur, modo posteriore vice ductum intelligatur in potestatem rationis totorum, $\dfrac{1}{\beta^5}$ eiusdem gradus.

13 *Fig. I nach Vorbild der Figurentafel am Schluss erg. LiH* 16 $2b^2$. | vel: $3a^2 \frown 2b^3$ *gestr.* | *LiH*

Sint AB, DE, rectae, in punctis C, et F ita sectae, ut quam rationem AC ad CB habet, eandem habeat DF ad FE, et fiant ex illarum segmentis producta AC 2 in CB 3, et DF 2 in FE 3, quae sunt similia per secundam definitionem; iisque homogenea producta fiant ex totis AB, DE, nimirum AB 5, DE 5 per tertiam definitionem. Dico AC 2 in CB 3 eandem rationem habere ad AB 5, ac DF 2 in FE 3 ad DE 5. Quia rationes ex quibus ratio producti AC 2 in CB 3 ad AB 5 componitur, eaedem sunt, ac componentes rationem producti DF 2 in FE 3 ad DE 5, ob sectionem linearum proportionalem, et inde proportionales dignitates ex quibus producta illa resultant. Quod, etc.

Außerdem findet sich eine Tintenspur auf S. 10.

B. STUDIEN

4. NUGAE PUERILES

[2. Hälfte 1670 (?)]

Überlieferung: *L* verworfenes Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 13. 1 Bl. 8°. 1 S. auf Bl. 13 r°. Bl. 13 v° leer. Konzeptpapier für das *CJR*.
Cc 2, Nr. 817

Datierungsgründe: Die verschiedenen Aussagen des Stückes sind, wie sich aus dem Duktus ergibt, nacheinander in kurzem zeitlichen Abstand entstanden. Sie sind auf *CJR*-Papier geschrieben, welches Leibniz im Wesentlichen in den Jahren 1670/71 benutzt hat (vgl. *LSB* VI, 2). Hinweise auf eine engere zeitliche Eingrenzung lassen sich aus folgenden Aussagen gewinnen:

(1) Die Überlegungen zur Behandlung der Hyperbel mittels Indivisiblen stehen deutlich in Zusammenhang mit den *Vorarbeiten zur Theoria motus abstracti* (= *LSB* VI, 2 N. 38). Insbesondere zeigen sich Parallelen zu N. 38_5, die im Herbst 1670 entstanden sein dürfte.

(2) Im Briefwechsel mit Friedrich Nitzsch (s. *LSB* II, 1) werden insbesondere Fragen der Herstellung von Kegelschnitt-Linsen und ihres Nutzens für die Optik angesprochen. Der Brief an Martin Fogel vom 24. Januar 1671 zeigt, dass Leibniz sich bereits in die einschlägige Literatur eingearbeitet hat. Das vorliegende Stück steht, wie der nachträgliche Kommentar zeigt, ganz am Anfang dieser Betrachtungen. Daraus ergibt sich die mutmaßliche Datierung.

Ad instrumentum nostrum analyticum geometriam universam inaudita hactenus ratione complexum opus est funiculo ex arena. Is fiet magnete, si pro arena scobs ferreus adhibeatur.

Hyperbolae et omnis alterius figurae facilis per indivisibilia indagatio est. Sume triangulum rectangulum, altitudinem divide in partes quotcunque, hae sint indivisibilium seu punctorum loco. Intelligatur gyratione sua circa altitudinem velut axem describere conum. Constabit conus ex tot circulis basi parallelis, quot sunt puncta altitudinis. Iam

---

18 *Zusatz aus späterer Zeit über dem Text:* Nugae pueriles

ut fiat hyperbola sumatur punctum aliquod in superficie coni, ac proinde in alicuius circulorum parallelorum peripheria, ab eo demitti intelligatur perpendicularis in basin, altitudo futurae hyperbolae, ducaturque chorda in basi diametrum secans in puncto demissae perpendicularis, haec erit latitudo hyperbolae. Ducanturque per altitudinem intra conum tot parallelae latitudini quot sunt circuli paralleli in cono, totidem scilicet horum circulorum chordae. Connectantur chordae, linea connectens una si quidem chordae seu circuli paralleli sint infiniti, erit hyperbolica; [si] sint finitae hyperbola mechanice describetur per puncta seu rectam fractam.

Hinc intelligi potest minimum hyperbolicum ad minimum rectae esse ut rectam duas chordas circulorum parallelorum in eadem recta omnia centra habentium inaequalium connectentem ad rectam connectentem duas diametros. Sed quia haec rectarum ratio variat, et in universum neque numeris neque lineis exhiberi potest, hinc hyperbolica exacte quadrari non potest.

An parabolica linea quadrari possit alias expendemus.

Caeterum hinc solvi potest quaestio de hyperbolis, an conferant ad dioptricam. Hobbius ad urendum non ad videndum utiles fore putat. Ego puto saltem focos unius puncti minus esse a se invicem remotos, ac proinde remotiores ab alio, quam in circulo. Idque de omni curva verum esse, quae propius accedit rectae quam circulus.

Uno instrumento tornari possunt varia simul vitra, variarum sphaerarum et formarum variis brachiis fusti illi mobili applicatis.

2 peripheria, *(1)* connectatur cum circulo proxime supposito *(2)* ab *L* 6 Connectantur *(1)* rectis *(2)* chordae *(a)* in unam lineam *(b)* erit *(c)* , linea *L* 7 sint sint *L ändert Hrsg.* 13 f. potest. *(1)* Secus est de parabolic *(2)* An *L*

---

15 f. Hobbius: *Opera philosophica*, 1668, *De homine* S. 51. — In dem sowohl von Leibniz wie von J. Chr. v. Boineburg mit Marginalien versehenen Handexemplar Boineburgs (Erfurt, *Universitätsbibliothek*, 3-Pu-1430) sind auf S. 51 die Worte hyperbolica, ellipticis und ad comburendum von Leibniz unterstrichen. (Freundliche Mitteilung von U. Goldenbaum, Atlanta.)

5. IN GULDINI THEOREMATA. PERPENDICULARES AD TANGENTES. EXTRACTIO RADICUM

[März – April 1673]

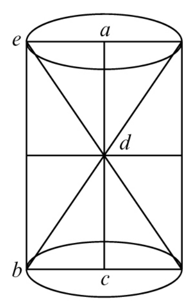
Überlieferung: *L* (teilweise) verworfenes Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 129–130. 1 Bog. 2°. 3 S. und 1 Sp. Neben dem Beginn in anderer Tinte, mit Bezug auf Teil 1 und Teil 2: falso. Cc 2, Nr. 639

Datierungsgründe: Das Stück ist typisch für die Frühzeit der Erarbeitung mathematischer Erkenntnisse durch Leibniz. Hierzu passt das Wasserzeichen des Papiers, welches für März – Mai 1673 belegt ist.

[*Teil 1*]

Habito centro gravitatis conoeidis parabolici, habebimus eius superficiem. Eodem modo habito centro gravitatis solidi cycloeidalis ex revolutione sphaerae, habebimus huius quoque superficiem. Videndum an haberi possit centrum hemisphaerii, cum area eius et superficies habeantur. Idem est de hemisphaeroeide.

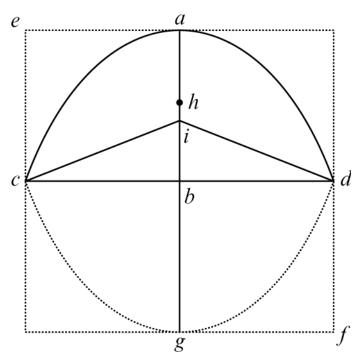
Probanda est huius doctrinae veritas in superficie cylindrica; ex supposito centro gravitatis cylindri.



[*Fig. 1*]

Rectangulo $\underline{abc}$ circumvoluto circa axem $\underline{ac}$ fiat cylinder cuius centrum gravitatis $\underline{d}$. Demantur duo coni ex revolutione triangulorum $\underline{dae}$. $\underline{deb}$ facti. Quorum aream ita investigabimus[:] circulus $\underline{ea}$ seu basis esto x. altitudo $\underline{ad}$ vel $\underline{cd}$ esto a. erit conus unus $\frac{ax}{3}$ et ambo $\frac{2ax}{3}$. At totus cylinder est $2ax$. ergo duo coni sunt aequales cono maximo

qui cylindro inscribi potest, et residua cavitas demtis duobus conis est $\frac{4ax}{3}$, et proinde si rectangulum *ab* esse quadratum supponatur, aequabitur hemisphaerio.
Videamus an idem $\frac{4ax}{3}$ producatur ducta superficie cylindrica, quae est $\frac{2ax}{\frac{1}{4}a}$. posito *bc* esse $\frac{1}{4}$ de *ac*. seu $\frac{1}{2}a$. vel $8x$ in tertiam partem $\frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a$. fit $\frac{8xa}{6} = \frac{4xa}{3}$. En ergo idem productum utrobique.



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

Esto parabola *cad* altitudinis seu axis *ab*. et ut species parabolae determinetur semiapplicatae *cb* aequalis axi *ab*.
Centrum gravitatis parabolae est in axe *ab* quod ita definiemus[:] constat ex demonstratis a Cavalerio, solida, figurarum eiusdem basis atque altitudinis revolutione genita esse in composita ratione figurarum generantium, et distantiarum centri gravitatis cuiusque figurae ab axe communi revolutionis.

3 est *(1)* $\frac{2ax}{\frac{1}{2}a}$ vel 4x. in tertiam partem $\frac{1}{2}a = \frac{1}{6}a$. fit $\frac{4xa}{6}$ seu $\frac{2xa}{3}$. quae duplicata, quia non tantum superficies cylindrica eb ducitur in bc. sed et idem fit *(2)* $\frac{2ax}{\frac{1}{4}a}$ *L* 10 genita | ut sunt cylinder genitus *(1)* ex figura *(2)* a rectangulo ed et conoeides genitum a parabola cad *gestr.* | esse *L*

9 constat: Diesen Hinweis hat Leibniz aus H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 324 entnommen. Fabri bezieht sich auf B. Cavalieri, *Exercitationes geometricae sex*, 1647, S. 229–238.

Ergo circa basin parabolae $\underline{cd}$ volvatur rectangulum $\underline{ed}$ et ei inscripta parabola $\underline{cad}$. Cylinder productus $\underline{ef}$ erit ad fusum parabolicum $\underline{cadg}$ ut 15 ad 8. Quae ratio $\frac{15}{8}$ divisa per rationem figurarum $\frac{3}{2}$ dabit $\frac{30}{24}\Big|\frac{5}{4}$ rationem distantiarum quibus centra absunt ab axe communi. Cum ergo centrum gravitatis rectanguli $\underline{ed}$ nempe $\underline{h}$ distet a basi recta $\underline{bh}$ dimidiae altitudinis $\underline{ce}$ seu quinque decimis, ergo $\underline{i}$ centrum gravitatis parabolae $\underline{cad}$ dimidia seu 4 decimis aberit ab axe $\underline{cd}$ seu recta $\underline{ib}$ erit $\frac{2}{5}$ de $\underline{ab}$. Ergo $\underline{ia}$ erit $\frac{3}{5}$ de $\underline{ab}$. Iam ex centro gravitatis $\underline{i}$ ducantur rectae in extrema figurae $\underline{ic}$. $\underline{id}$. Et nunc tandem calculus ineatur.

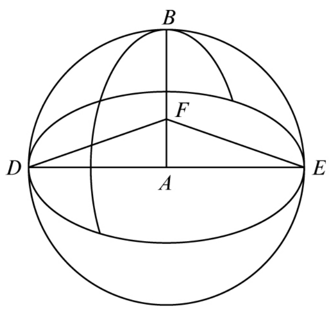
Altitudo $\underline{ab}$ esto (a). basis $\underline{cd}$ $(2a)$. Rectangulum $\underline{ed} = (2a^2)$. parabola $\underline{cad} = \left(\frac{4a^2}{3}\right)$. Distantia centri parabolae a basi $\underline{ib} = \left(\frac{2a}{5}\right)$. Ergo triangulum $\underline{cid}$ erit $2a \frown \frac{2a}{5} \smile 2$ hoc est $\left(\frac{2a^2}{5}\right)$. Ergo residuum mixtilineum $\underline{cadi}$ erit parabola demto triangulo seu $\frac{4a^2}{3} - \frac{2a^2}{5}$ seu $\frac{20a^2}{15} - \frac{6a^2}{15} = \left(\frac{14a^2}{15}\right)$.

Quod mixtilineum cum intelligi possit fieri ex basi, curva parabolica $\underline{cad}$ decrescente seu evanescente usque in centrum gravitatis $\underline{i}$ in ratione altitudinum sumtarum in recta $\underline{ia} = \left(\frac{3a}{5}\right)$. hinc intelligi potest mixtilineum produci ex basi curva parabolica ducta in dimidiam altitudinem $\left(\frac{3a}{10}\right)$. et contra si per $\frac{3a}{10}$ dividatur mixtilineum, $\frac{14a^2}{15} \times \frac{3a}{10} = \frac{140a^2}{45a} = \frac{28a}{9}$. producetur $\left(\frac{28a}{9}\right)$ = curvae parabolicae $\underline{cad}$.

Ergo si basis sit a. curva semiparabolica erit $\frac{14a}{9}$. Ergo si basis sit 1. semiparabolica erit $\frac{14}{9}$. et si basis sit 9. semiparabolica erit 14. Regulam ergo hanc constituere possum[:]

1–8 Vgl. dazu H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 298 f.; s. a. J. Wallis, *Mechanica*, 1670–71, S. 157–164 (*WO* I S. 674–678).

In omni semiparabola, cuius basis aequalis altitudini, latus rectilineum (id est basis vel altitudo), est ad curvilineum, id est curvam parabolicam, ut 9 ad 14.
Eadem methodo rem definire facile est, quaecunque sit ratio baseos ad altitudinem.



[*Fig. 3, tlw. Blindzeichnung*]

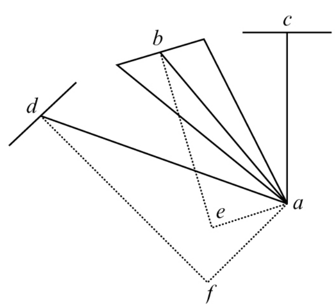
Nunc age de centro gravitatis hemisphaerii ratiocinemur: est illud sine dubio in radio AB. semicirculi maximi $DBEA$ ponatur esse in F. et distantia eius AF a DE basi esse (x). radium autem esse (a). Ductis rectis FD. FE. et triangulo FAE circa axem FA voluto, gignetur conus, cuius basis eadem quae hemisphaerii, circulus scilicet maximus, cuius quantitas ponatur (az). erit conus $FDE = \left(\dfrac{azx}{3}\right)$.

Residuum mixtilineum concavum demto cono quod scilicet fit mixtilineo plano $DBEF$ circa axem BF voluto fiet ex superficie hemisphaerica DBE velut basi $= (2az)$ ducta in tertiam partem altitudinis $BF = (a - x)$, erit ergo hoc mixtilineum concavum $= 2az \frown \dfrac{a-x}{3} = \left(\dfrac{2a^2z - 2azx}{3}\right)$. Cui si addatur conus $\dfrac{azx}{3}$ fiet totum $\dfrac{2a^2z}{2} - \dfrac{azx}{3} =$ toti hemisphaerio $\dfrac{2a^2z}{3}$. Quod est absurdum, ergo errorem necesse est fuisse in ratiocinatione.

4 [*Fig. 3*]: Leibniz hat in der Figur und zu Beginn des Textes kleine Buchstaben zur Benennung verwandt, dann aber geändert und mit Großbuchstaben weitergerechnet. — Die Figur ist vom Hrsg. vervollständigt. Leibniz hat lediglich den Meridiankreis und den Teil oberhalb des Durchmessers gezeichnet.

Et difficultas occurrit ingens, si centrum gravitatis in hemisphaerio quaeritur interpositione hemisphaeriorum continue proportionaliter lateribus homologis decrescentium. Quando hemisphaeria interponentur hemisphaerio dato etiam semicirculi eorum interponentur semicirculo dato, et si hemisphaeria sunt laterum homologorum, erunt et semicirculi laterum homologorum, et cum simul evanescant, idem erit centrum hemisphaerii et semicirculi maioris. Quod est absurdum, neque enim planum basi parallelum, per semicirculum maiorem transiens, alios semicirculos minores bisecat.
Examinanda haec difficultas in polyedris. NB. NB.

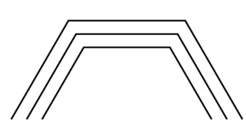
Sed ista methodus generaliter ita refutatur: Curvae aequiparandae sunt polygonis laterum infinitorum. Iam in polygonis, nisi quae regularia sunt, qualis ex curvis est circulus tantum, non procedit illa methodus ducere perpendicularem, a centro gravitatis ad superficiem, sed separatim mensurandum est omne triangulum ex duobus radiis et uno latere formatum. Idem ergo et in curvis ut ellipsi, parabola, etc. fieri debet. In circulo res procedit puto et methodum in ellipsi haberi posse, etsi singulae tangentes considerandae, forte enim certa ratio progressionis, imo forte in parabola itidem.



[*Fig. 4*]

---

1 f. *Dazu am Rande:*



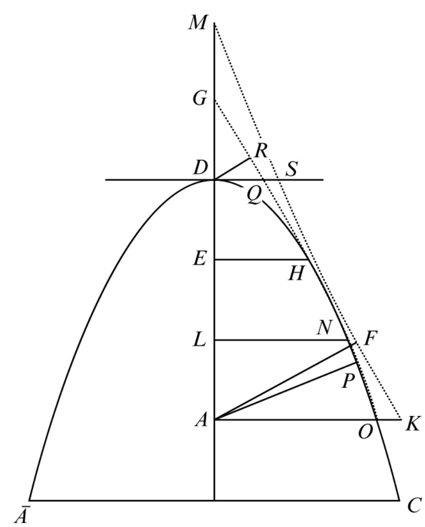
12 ex *(1)* centro formatum, *(2)* duobus *L*

Quando ergo rectis a centro ad tangentes ductis, ut ex a ad b. c. d. altitudines ca. be. df. crescunt in certa quadam ratione, velut ut altitudines aut ut quadrata etc. certae cuiusdam lineae, tunc ex ipsis inveniri potest ambitus, data area.

Pone istas altitudines continue decrescere eadem ratione, figura fiet ex quarta parte radii maximi et peripheria, si scilicet ad evanescentiam usque procedatur. Sed quia id non fit, centro quippe posito intra figuram, ideo residuum ab evanescentia detrahendum. Ita etiam si crescant altitudines, ut applicatae parabolarum, vel ut earum axi parallelae, vel alia quadam ratione summabili. Ita excogitari possunt certa linearum genera in quibus ea sit quam ratio altitudinum seu intervallorum inter tangentes et centrum figurae.

Sed in parabola id inveniri maxime operae pretium foret.

[*Teil 2*]



[*Fig. 5*]

1 ergo *(1)* lineae a *(2)* rectae *(a)* a puncto gravitati *(b)* a centro ad tangentes ductae *(3)* rectis *L* 4 decrescere *(1)* proportionaliter in certa *(2)* eadem *L* 5 procedatur *(1)* , ut si loco centri sumatur aliud *(2)* . Sed *L*

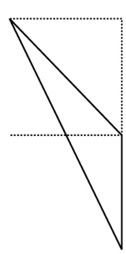
12 [*Fig. 5*]: Die Figur ist mit kleinen Buchstaben bezeichnet. Auch im Text werden anfänglich mehrheitlich kleine Buchstaben verwendet. Im weiteren Verlauf der Betrachtung ist Leibniz dann generell zu Großbuchstaben übergegangen. Die Bezeichnung A kommt in der Figur doppelt vor; sie wurde eindeutigkeitshalber in A und $\overline{A}$ aufgespalten.

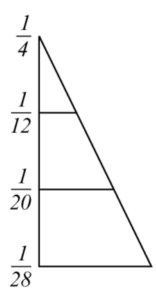
Assumto quodam in parabolae $\overline{A}DC$ axe puncto intervalla tangentium a puncto, dato A, investigemus; et quidem primae tangentis D basi parallelae intervallum est ipse axis AD.
Linea DE esto (a). erit $EG = (2a)$. $EH = (b)$. ergo GH erit $(Rq \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner)$. GA esto $\left(\frac{a\alpha}{2}\right)$. erit AK $\left(\frac{b\alpha}{2}\right)$. et GK $\left(\frac{\alpha}{2}\ Rq\ a^2 + b^2\right)$ et $\bigtriangledown$ AGK $\left(\frac{ab\ \frac{\alpha^2}{4}}{2}\right)$. Idem dividatur per GK. et productum duplicetur habebimus

$$AF = \frac{ab\alpha}{2\ Rq\ a^2 + b^2}.$$

En ergo regulam generalem calculandi intervalla puncti dati in axe parabolae a tangentibus[:] Rectangulum ex applicata ad punctum contactus et diametro ab ea abscissa ducatur in duplam rationem maioritatis inter diametrum abscissam ab applicata et abscissam a puncto dato, productum dividatur per latus summae quadratorum applicatae et eius diametri. Quotiens erit intervallum tangentis a puncto dato.

4–66,11 *Nebenbetrachtungen:*





a	b	a	
$2a$	$Rq\ 2b$	$4a$	$2b$
$3a$	$Rq\ 3b$	$9a$	$3b$
		$12a$	$4b$

4 f. GA esto *(1)* (aα) *(2)* $\left(\frac{\text{a}\alpha}{2}\right)$ *L*

Porro si duplicetur a. ut fiat DL $(2a)$. fiet $LM = (4a)$. et LN fiet $(Rq\ 2,b)$. et MN fiet $(Rq\ \llcorner 16a^2 + 2b^2 \lrcorner)$. MA erit $\frac{a\alpha}{4}$ (si longius procedas $\frac{a\alpha}{6}$). AO $\left(\frac{b\alpha}{4}\right)$. MO $\left(\frac{\alpha}{4}\ Rq\ a^2 + b^2\right)$. et

$$AP = \frac{\dfrac{\dfrac{ab\alpha^2}{24}}{2}}{\dfrac{\alpha}{4}\ Rq\ a^2 + b^2} = \frac{ab\alpha}{6\ Rq\ a^2 + b^2}.$$

Ergo primo intervallo posito $\frac{ab\alpha}{2\llcorner Rq\ a^2 + b^2}$, secundum erit $\frac{ab\alpha}{6\llcorner Rq\ a^2 + b^2}$, tertium erit $\frac{ab\alpha}{10\llcorner Rq\ a^2 + b^2}$. Ergo ita decrescent intervalla, ut $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{10}$ etc. quae si duplicentur omnia fiet:

$$\frac{1}{1}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{5}\ \frac{1}{7}\quad \text{etc.}\quad \text{in infinitum.}$$

Si a supponatur esse punctum primum seu $\frac{ab\alpha}{1\llcorner Rq\ a^2 + b^2}$ erit ipsa diameter AD. At sequentem statim, quae non nisi puncto differre debet esse partem eius 2^{dam} absurdum est. Errorem ergo calculo inesse necesse est.

Nota $a\alpha$ est ipsa diameter, licet enim a sit punctum, α tamen est infinitum.

Redinchoemus: $DE = (a)$. $EH = (b)$. $DA = (a\alpha)$. $GA = (a\alpha + a)$ seu $(a \frown \alpha + 1)$. $GH = (Rq\ \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner)$. Iam ratio GE ad GA est ut $2a$ ad $a \frown \alpha + 1$. seu ut 2 ad $\alpha + 1$. seu ut 1 ad $\frac{\alpha + 1}{2}$. ergo AK est $\left(\frac{b\alpha + b}{2}\right)$. et GK est $(\alpha + 1, \frown Rq\ \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner)$. Triangulum GAK

14 GH = *(1)* $a^2\alpha^2 + a^2 + 2a^2\alpha$ vel $(\llcorner a^2 \frown \alpha^2 + 2\alpha + 1 \lrcorner\lrcorner + b^2 \lrcorner\lrcorner\lrcorner$ Rq). Iam ratio *(2)* (Rq $\llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner$).

L — Dazu ungestrichen am Rande (!): $\begin{array}{l} \alpha\ \ +1 \\ \alpha\ \ +1 \\ \alpha^2 + \alpha + 1 \end{array}$

est $a\alpha + a, \frown \dfrac{b\alpha + b}{4}$ $\left(\dfrac{ba\alpha^2 + 2ab\alpha + ba}{4}\right)$. et hoc divisum per GK producto duplicato vel sic: $\dfrac{a \frown \llcorner \cancel{\alpha+1} \lrcorner\lrcorner \frown b \frown \llcorner \dfrac{\alpha+1}{4} \lrcorner}{\cancel{\alpha+1} \lrcorner \frown \dfrac{1}{2}\ Rq\ \llcorner 4a^2 + b^2 \lrcorner}$ dabit AF $\left(\dfrac{ab \frown \alpha + 1}{2\ Rq\ \llcorner 4a^2 + b^2}\right)$. intervallum puncti dati a tangente quaesitum.

Iam duplicemus DC ut fiat DL. DL erit $(2a)$. LN erit $(Rq\ 2b)$. MA erit $(a \frown \llcorner \alpha + 2 \lrcorner)$. MN $Rq\ \llcorner 16a + 2b \lrcorner$. ML erit $(4a)$. ratio ML ad MA erit ut 4 ad $\llcorner \alpha + 2 \lrcorner$ seu ut 1 ad $\dfrac{\alpha+2}{4}$. Ergo AO est $\left(Rq\ 2b \frown \dfrac{\alpha+2}{4}\right)$. et MO est $\llcorner Rq\ \llcorner 16a + 2b \lrcorner\lrcorner \frown \dfrac{\alpha+2}{4}$. Triangulum MAO est $a \frown \llcorner \cancel{\dfrac{\alpha+2}{4}} \lrcorner\lrcorner \frown Rq\ 2b \frown \dfrac{\alpha+2}{4} \smile \cancel{2}$ dividatur per $\llcorner Rq\ \llcorner 16a + 2b \lrcorner\lrcorner \frown \cancel{\dfrac{\alpha+2}{4}} \frown \cancel{2}$ producto duplicato fiet:

$$[AP] \qquad \frac{a\ Rq\ 2b \frown \dfrac{\alpha+2}{\cancel{4}}}{4\ Rq\ 16a + 2b}.$$

Si DL supponatur esse $3a$. fiet

$$\frac{a\ Rq\ 3b \frown \alpha + 3}{6\ Rq\ 36a + 3b}.$$

$$GE\ \ 2a. \quad EH\ \ b. \quad GD\ \ a. \quad QD\ \ \frac{b}{2}. \quad GQ\ \ Rq\ a^2 + \frac{b^2}{4}.$$

$$\bigtriangledown DGQ = \llcorner \frac{ab}{2} \smile Rq\ a^2 + \frac{b^2}{4} = DR.$$

$LN = Rq\ 2, b$. $DM = DL = 2a$. $ML = 4a$.

DS $\dfrac{Rq\ 2, b}{2} = \dfrac{Rq\ 2, b}{Rq\ \dfrac{1}{4}} = Rq\ 8, b;$

MD $2a$. Eius $\square$ ad $\square$ DS fiet: $Rq\ 4a^2 + 8b^2 = MS$. porro $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ $MDS = 2a \frown Rq\ 8, \frown b$ vel $2ab \frown Rq\ 8$. dividatur per $Rq\ 4a^2 + 8b^2$.

Habuimus ante $\dfrac{ab}{Rq\ a^2 + \dfrac{b^2}{4}}$ nunc $\dfrac{2ab}{Rq\ 32a^2 + 64b^2}$.

1 $\left(\dfrac{\mathrm{ba}\alpha^2 + 2\mathrm{ab}\alpha + \mathrm{ba}}{4}\right)$. *(1)* dividatur per GK et productum dimidietur fiet: $\dfrac{\mathrm{ba}\alpha^2 + 2\mathrm{ab}\alpha + \mathrm{ba}}{4}$ *(2)* et *L* 9 AP *erg. Hrsg.*

Si iam LN ponatur $Rq\ 3, b$. $DM = DL = 3a$. ML $6a$. DS $\dfrac{Rq\ 3, b}{2}$ vel $\dfrac{Rq\ 3,\frown b}{Rq\ \frac{1}{4}}$ vel $Rq\ 12,\frown b$. MD $3a$. Eius $\square$ ad $\square$ DS fiet $Rq\ \llcorner 9a^2 + 12b^2 \lrcorner = MS$. porro $\bigtriangledown^{\text{lum}} MDS =$ $3a \frown Rq\ 12, b$ vel $3ab \frown Rq\ 12$. dividatur per $Rq\ \llcorner 9a^2 + 12b^2 \lrcorner$ fiet $\dfrac{3ab}{108a^2 + 144b^2} =$ $\dfrac{ab}{Rq\ \llcorner 36a^2 + 48b^2 \lrcorner}$.

$$\frac{ab}{Rq\ a^2 + \frac{b^2}{4}} \qquad \frac{ab}{Rq\ 16a^2 + 32b^2} \qquad \frac{ab}{Rq\ 36a^2 + 48b^2}$$

$$\frac{ab}{\dfrac{Rq\ a^2 + b^2}{Rq\ 16}} \qquad \frac{ab}{Rq\ \llcorner a^2 + 2b^2 \lrcorner} \qquad \frac{ab}{Rq\ \dfrac{9a^2}{4} + 3b^2}$$

[*Teil 3*]

$$\begin{array}{llcr}
 & & & \cancel{4} \\
9 & & + & \cancel{1}\cancel{6} \\
. & & & . \\
\hline
\cancel{3} & & + & 2 \\
\hline
3 & \cancel{6} & + & \cancel{2} \\
 & & & \\
\frac{9}{4}a^2 & & + & 3b^2 \\
\hline
\frac{3}{2}a & & + & x \\
\hline
 & & \multicolumn{2}{c}{\dfrac{3\ \cancel{6}ax}{\cancel{2}}}
\end{array}$$

$$+\cancel{a^2} + \frac{3\ \cancel{6}ax}{\cancel{2}} - x^2 = 3b^2 + \cancel{a^2}$$

16 Anstelle von $-x^2$ müsste es $+x^2$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Vorzeichenfehler konsequent weiter.

Methodus in extrahendis radicibus aliquando utilis, extrahere ex parte, pro residuo novum fingere terminum.

$$a^2 + ax - \frac{x^2}{3} = b^2 + a^2$$

$$a^2 + ax - \frac{x^2}{3} - b^2 = a^2$$

$$a^2 + ax - b^2 = a^2 + \frac{x^2}{3}$$

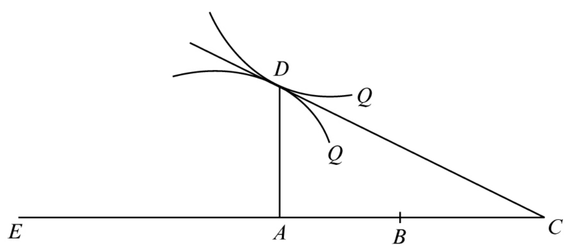
$$a^2 - b^2 = a^2 + \frac{x^2}{3} - ax$$

6. DE SLUSII METHODO DUCENDI TANGENTES
[März – April 1673]

Überlieferung: *L* Auszug: LH 35 VIII 30 Bl. 150. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 150 r° (Bl. 150 v° leer).
Cc 2, Nr. 616

Datierungsgründe: Das Stück beinhaltet zwei nahezu wörtliche Auszüge (vgl. S. 5143 bzw. 5145 des Druckes) aus de Sluses sogenannten Tangentenbrief, welcher in den *Philosophical Transactions*, Bd VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/73 S. 5143–47, abgedruckt wurde. Leibniz hat diese Ausgabe nach seiner Rückkehr aus London persönlich an Huygens überbracht. Vermutlich ist der vorliegende Auszug vor der Übergabe des Heftes an Huygens entstanden. (Vgl. dazu *LSB* III, 1 S. 31 f. sowie J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 72–74.)

Methodus ducendi tangentes ad omnis generis curvas,
sine calculi labore, quam etiam puer ἀγεωμέτρητος
doceri possit



[*Fig. 1*]

Data sit quaelibet curva DQ cuius puncta omnia referantur ad rectam quamlibet datam EAB per rectam DA; sive EAB sit diameter, seu alia quaelibet, sive etiam aliae simul lineae datae sint, quae vel quarum potestates aequationem ingrediantur; parum id refert.

In aequatione analytica facilioris explicationis causa DA perpetuo dicatur v, BA y, EB vero et aliae quantitates datae c o n s o n a n t i b u s exprimantur. Tum supponatur ducta DC, tangens curvam in D et occurrens EB productae, si opus sit, in puncto C. et

15 [*Fig. 1*]: Die Figur ist identisch mit Sluses Fig. 1; sie steht in der Höhe des 2. Auszugs quergezeichnet am Rande.

CA perpetuo quoque dicatur [a], ad inveniendam AC vel a haec erit regula generalis:

(1) Reiectis ab aequatione partibus in quibus y vel v non inveniuntur, statuantur ab uno latere omnes in quibus est y, et ab altero illae in quibus habetur v cum suis signis $+$ vel $-$. Hoc dextrum illud sinistrum latus facilitatis causa vocabimus.

(2) In latere dextro praefigatur singulis partibus exponens potestatis quam in illis obtinet v, seu quod idem est in illum ducantur partes.

(3) Fiat idem in latere sinistro, praeponendo scilicet unicuique illius parti exponentem potestatis quam in illa habet y. Sed et hoc amplius: Unum y in singulis partibus vertatur in a.

Aio aequationem sic reformatam modum ostendere ducendae tangentis ad punctum D datum. Cum enim eo dato pariter datae sint y et v, et caeterae quantitates quae consonantibus exprimuntur, a non poterit ignorari.

Cum vero accidere possit, ut tangens non sit versus partes B ducenda, ut si sit parallela ipsi [AB] vel etiam ducenda ad partes contrarias, definiendum est, quomodo haec casuum diversitas in aequationibus discernatur. Cum futura sit fractio $= a$. considerandae sunt partes tam numeratoris quam nominatoris et earum signa.

(1) Si in utroque vel partes omnes habeant signum $+$, vel saltem affirmatae praevaleant negatis ducenda est tangens versus B.

(2) Si affirmatae praevaleant negatis in numeratore sed aequales sint in denominatore recta per D ducta parallela AB tanget curvam in D. hoc enim casu a est infinitae longitudinis.

(3) Si tam in denominatore quam numeratore partes affirmatae minores sint negatis ducenda erit rursus tangens versus B. hic enim casus cum primo in idem recidit.

(4) Si in denominatore praevaleant in numeratore minores sint, vel contra; mutatis signis illius in quo sunt minores, ducenda erit tangens versus partes contrarias, hoc est AC sumenda erit versus E.

(5) Ac tandem si in numeratore partes affirmatae sint aequales negatis quomodocunque se habeant in denominatore, a abibit in nihilum. Itaque vel ipsa AD erit tangens, vel ipsa EA. aut ei parallela. Quod ex datis facile dignoscitur.

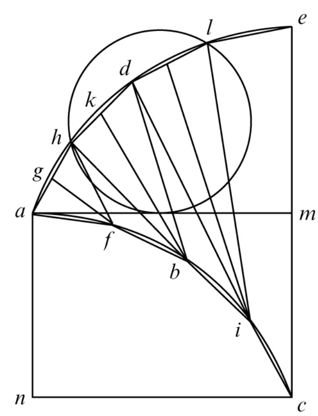
1 a *erg. Hrsg. nach Druck* 14 B *L ändert Hrsg. nach Druck*

7. VARIA DE CYCLOEIDE
[April – Mai 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 125–126. 1 Bog. 2°. 4 S. — Mehrere teilweise ineinander übergehende Ansätze mit Ergänzungen, Wiederholung von Teilergebnissen, umfangreiche Nebenbetrachtungen. — Textzusammenhang: Teil 1 auf Bl. 126 v° und 125 r° oben; Teil 2 auf Bl. 125 v° und 126 r°; Teil 3 auf den freigebliebenen Stellen von Bl. 125 v° und 126 r° (Beginn) sowie zwischen und neben dem bereits vorher geschriebenen Text von Teil 4 auf Bl. 125 r° (Fortsetzung); Teil 4 auf Bl. 125 r°. — Auf Bl. 125 r° Mitte außerdem Figur 5b von N. 14.
Cc 2, Nr. 609, 610, 611

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück steht in naher Beziehung zu *LSB* VII, 3 N. 16, die auf April – Mai 1673 zu datieren ist; es dürfte kurz zuvor entstanden sein und in den gleichen Zeitraum gehören.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

15 [*Fig. 1*]: Die Hauptlinien von Fig. 1 sind zunächst in Blindtechnik vorgezeichnet worden, wobei Leibniz die Zykloide durch einen geschickt gewählten Kreisbogen angenähert hat. Dann erst ist mit Tinte ausgezogen worden. Diese Konstruktion wird hier reproduziert.

Semicycloeidalis linea $\underline{abc}$ ponatur composita ex rectis aequalibus velut chordis infinite parvis, constat evolutione cycloeidalis $\underline{abc}$ describi cycloeidalem $\underline{ade}$ per Hugeniana, et describentem filum, inter evolvendum crescere semper aequaliter cum unam chordam post aliam evolvat. Evolvens tangit evolutam, et secat ad angulos rectos evolutione descriptam, seu eius tangentem, ut $\underline{fg}$ seu $\underline{bfg}$ tangens ipsius $\underline{abc}$. chordam $\underline{ah}$ ipsius $\underline{ade}$. similiter recta $\underline{ibk}$ tangens, $\underline{hkd}$ chordam. Igitur infinitis istis triangulis $\underline{afh}$. $\underline{hbd}$. $\underline{dil}$. etc. completur figura, si addantur triangula scalena interiecta $\underline{hfb}$. $\underline{dbi}$. etc. His ita positis metiri licebit totam figuram evolutionis $\underline{adecba}$.

Sunt enim infinita triangula eiusdem baseos $\underline{ah}$ vel $\underline{hd}$ vel $\underline{dl}$ altitudinumque arithmetica proportione crescentium. Hinc si summa omnium chordarum $\underline{ahdle}$ dimidiatarum ponatur extendi in rectam eique applicari ad angulos altitudines continue crescentes, fiet triangulum cuius altitudo recta curvae dimidiatae $\underline{ahdle}$ aequalis, basis maximi trianguli, altitudo $\underline{ce}$.

Et hoc triangulum aequabitur toti figurae, nam summa infinitorum triangulorum scalenorum infinite parvorum $\underline{hfb}$. $\underline{dbi}$. etc. nullius momenti est, nec nisi rectangulum latitudinis qualibet data minoris constituit quod ita facile ostendo[:] eius altitudo enim est chorda evolutae, basis semichorda evolutione descriptae. Iungantur omnes chordae in unam rectam, triangulum cuius basis erit ista recta, altitudo semichorda evolutione descriptae, omnibus illis triangulis scalenis aequalis est. Triangulum autem cuius longitudo finita, latitudo infinite parva, non superficies sed linea est.

9 vel dl *(1)* quae tota aequatur *(2)* cum chordae sint aequales, *(3)* et summa omnium fiet *(4)* altitudinumque *L* 10 omnium *(1)* chordarum *(2)* semichordarum *(3)* chordarum *L* 12 dimidiatae *erg. L* 15 nisi *(1)* figuram *(2)* rectangulum *L* 20 non *(1)* figu *(2)* spatium *(3)* area *(4)* superficies *L*

---

2 per Hugeniana: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 66 f. (*HO* XVIII S. 198–203). Dieselben Sätze zieht Leibniz noch einmal ab S. 74 Z. 6 heran. 9–74,19 Der folgende Quadraturversuch ist verfehlt. Im Schlussergebnis versucht Leibniz in unzulässiger Weise, das Archimedische Ergebnis für den Kreis auf Evoluten-Evolventenpaare zu verallgemeinern. — Die Betrachtung wird in N. 14 wieder aufgenommen.

Idem brevius: quodlibet ex his triangulis scalenis punctum est, cum eius basis et altitudo sint lineae infinite parvae. Ergo omnia simul, in unam rectam ex evoluta extensa conflatam disposita (tot enim sunt scalena, quot in ea chordae, seu puncta) non nisi lineam facient.

Iam constat ex constructione rectam $\underline{ce}$ esse curvae evolutae $\underline{afbic}$ aequalem, constat quoque ex demonstratis ab Hugenio hac evolutione semicycloeidis $\underline{afbic}$ descriptam $\underline{ahdle}$ esse itidem semicycloeidem priori similem et aequalem. Ergo aequalia sunt $\underline{afbic}$ evoluta, $\underline{ahdle}$ evolutione descripta; et recta terminans evolutionem $\underline{ce}$ aequales sunt. Iam linea semicycloeidalis aequalis est diametro circuli genitoris duplicato. Cum ergo (per demonstrata) figura evolutionis fiat ex semicycloeidali ducta in semicycloeidalem, et semicycloeidalis sit diameter, fiet ergo figura evolutionis $\underline{ahdlecibfa}$ ex diametro in diametrum, seu aequabitur quadrato diametri, ergo dimidium eius aequabitur quadrato inscripto circuli genitoris. Sed hoc esse absurdum ita ostendo[:] figura evolutionis aequatur rectangulo $\underline{ncm}$ quod apparet si transponatur semicycloeidalis figura $\underline{aem}$ in locum $\underline{acn}$. At huius rectanguli dimidium aequatur circulo generatori cum eius basis sit aequalis circumferentiae $\underline{nc}$. altitudo radio $\underline{cm}$. Si ergo eius dimidium aequatur circulo, non aequabitur rectangulo inscripto.

Necesse est ergo fuisse errorem in ratiocinatione praecedente. Is vero non alibi esse potest quam quod chordae vel tangentes assumtae sunt aequales. Hinc regula[:] ubi curva intelligi potest composita ex chordis aequalibus, figura evolutionis aequatur rectangulo sub semievoluta et dimidia per evolutionem descripta.

1–4 Ut alias ex infinitis quadratis componitur solidum, ita nos ex infinitis quadratis vel rectangulis componimus lineam, eodem servato ratiocinandi modo, quasi ex dimensione in dimensionem transiremus.

14 quod apparet *erg. L* 19 vel tangentes *erg. L* 23 vel rectangulis *erg. L* 23 f. ex *(1)* solido *(2)* dimensione *L*

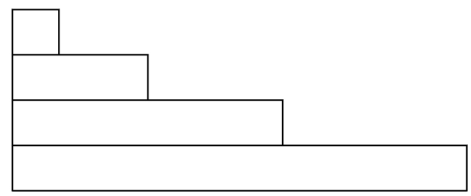
---

13 ita ostendo: Das folgende Argument ist im Grunde richtig. Es müsste jedoch genauer die figura evolutionis dem Rechteck aus Halbkreisbogen und Durchmesser gleichgesetzt werden.

[*Teil 2*]

In semicycloeide *afbic* decrescunt chordae qualibet assignabili minores cycloeidem componentes, ab *a* versus *c*. contra in semicycloeide aequali et simili *ahdle* crescunt ab *a* versus *e*. Hinc maxima seu ultima chordarum ducitur in minimam seu primam chordam, penultima in minimam et sequentem, seu primam et secundam, antepenultima in primam secundam et tertiam, penantepenultima in primam secundam tertiam quartam etc. productum dimidiatum, dabit figuram evolutionis.

4	⌢	1
3		$1+2$
2		$1+2+3$
1		$1+2+3+4$



[*Fig. 2, Blindzeichnung*]

Imo contra: Minima seu prima semichorda ducitur in maximam seu ultimam, secunda in ultimam et penultimam, tertia in ultimam penultimam et antepenultimam etc. et schema hoc erit:

8–11

4	⌢	1	4
3		$1+2$	9
2		$1+2+3$	12
1		$1+2+3+4$	$\underline{10}$
			35

2 decrescunt *(1)* arcus vel tangentes *(2)* chordae *L* 4 maxima | seu ultima *erg.* | chordarum *(1)* dimidiata, seu maxima semichorda *(2)* ducitur *L*

2–77,20 Auch dieser Quadraturversuch schlägt fehl. In S. 77 Z. 8 verweist Leibniz auf Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 66 (*HO* XVIII S. 199).

$$
\begin{array}{llr}
1 & \frown & 4 \\
2 & & 4+3 \\
3 & & 4+3+2 \\
4 & & 4+3+2+1
\end{array}
\begin{pmatrix} 4 \\ 14 \\ [27] \\ 40 \end{pmatrix}
=
\begin{array}{rrrr}
16 & (1) & (1) & (1) \\
9 & 16 & (4) & (4) \\
4 & 9 & 16 & (9) \\
1 & 4 & 9 & 16 \\
1 & & & \\
9 & 4 & 1 & \\
1 & & & \\
\hline
41 & & &
\end{array}
$$

1–4 *Numerische Nebenbetrachtungen:*

$$
\begin{array}{llrrrr|rrrr}
1 & \frown & & & & 1 & 1 & & & \\
2 & . & & & 2 & 2 & 4 & 4 & & \\
3 & . & & 3 & 3 & 3 & 9 & 9 & 9 & \\
4 & . & 4 & 4 & 4 & 4 & 16 & 16 & 16 & 16
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rrrrr}
 & & 3 & 4 & 5 \\
1 & 4 & 9 & 16 & 25 \\
1 & 16 & & &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
25 \\ 16 \\ 19 \\ \\ \hline 50
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
5 & 3 \\ 4 & 4 \\ 3 & 5
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
15 \\ 16 \\ 15 \\ 4 \\ \hline 50
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rr}
2 & 4 \\ 3 & 3 \\ 4 & 2
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
8 \\ 9 \\ 8 \\ 4 \\ \hline [29]
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
16 \\ 9 \\ 4
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
4 & 16 \\ 3 & 9 \\ 2 & 4 \\ 1 & 1
\end{array}
\qquad
\begin{array}{rr}
7 & 1 \\ & 1 \\ & 1
\end{array}
$$

4 *Ursprüngliche Fortsetzung des rechten Schemas:*

$$
\begin{array}{lrrr}
\text{minus} & I & IV & IX \\
 & & I & IV \\
 & & & I
\end{array}
$$

3 28 *L ändert Hrsg.* 22 26 *L ändert Hrsg.*

Cycloeis ita crescit: chorda maxima, pene maxima etc. fila evoluta ita crescunt: 1. chorda maxima, 2. chorda maxima et pene maxima, 3. chorda maxima pene maxima et tertia, et NB. eo ipso fila ista crescunt in inversa ratione chordarum, ut minima, peneminima etc. Videndum an hoc in istas universale, an proprium huic loco.

Hinc iam sequitur compendium fieri posse ratiocinationis nostrae, nam chordae infinitae cycloeidalem componentes crescunt ab $\underline{a}$ versus [$\underline{e}$] per $\underline{h}$. $\underline{d}$. $\underline{l}$. ut chordae circuli, etc. Porro fila crescunt eodem modo seu cycloeidis evolutae, sunt, ut patet ex schemate Hugenii prop. 5. part. 3. Ergo crescunt ut quadrata chordarum multiplicata per basin, seu ut

$$\begin{array}{lll} a^2 & \frown & x \\ b^2 & & \\ c^2 & & \\ d^2 & & \\ e^2 & & \end{array}$$

Summa horum est numerus quadratorum aequalium maximo, a^2 multiplicatorum per numerum quadratorum dimidiatum. Invenienda ergo linea quae ita est ad cycloeidem, ut quadratum aliquod ad lineam ex chordis, ut dictum conflatam eiusdem basis et altitudinis. Et haec linea ambiformis, seu si cycloeidem componentes arcus non decrescerent est circularis diametri duplicati, ut si circulus loco provolutionis circa aliquod punctum in circumferentia immobiliter circumageretur.

1–3

$$\begin{array}{ccccccccc} z & \frown & a & \frown & xe & & a & \frown & a & \frown & xz \\ & & b & & xd & & b & & b & & \\ & & c & & xc & = & c & & c & & \\ & & d & & xb & & d & & d & & \\ & & e & & xa & & e & & e & & \end{array}$$

1–20 | Nota si quia crescat in decrescente chordarum ratione, una minima, duae peneminimae *erg. u. gestr.* | Cycloeis ... circumageretur *erg. L* 6 e *erg. Hrsg.*

Investigandum exacte quae sit differentia vel ratio

$$
\begin{array}{c}
\text{huius} \\
\boxed{A}\ \boxed{\begin{array}{cccccc}
a & 16 & \frown & a & 16 \\
b & 9 & & b & 9 \\
 & & & & \\
c & 4 & & c & 4 \\
d & 1 & & d & 1
\end{array}}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\text{ad hoc.} \\
\boxed{B}\ \boxed{\begin{array}{cccccc}
a & 16 & \frown & d & 1 \\
b & 9 & & c & 4 \\
 & & & & \\
c & 4 & & b & 9 \\
d & 1 & & a & 16
\end{array}}
\end{array}
$$

Hoc ita quaeremus. A prius aequatur huic.

$$
\boxed{D}\ \boxed{\begin{array}{cccc}
a & \boxed{\boxed{\begin{array}{cccccc} 16 & \frown & d & 1 & + \\ 9 & & c & 4 & + \\ & & & & \\ 4 & & b & 9 & - \\ 1 & & a & 16 & - \end{array}}} & \begin{array}{cc} \llcorner a-d \lrcorner & 15 \\ \llcorner b-c \lrcorner & 5 \\ & \\ \llcorner b-c \lrcorner & 5 \\ \llcorner a-d \lrcorner & 15 \end{array}
\end{array}}
$$

1–79,6 *Vorbetrachtung:*

$$
\begin{array}{lrrl}
a & 16 \frown & 1 + 15 & d + a - d \\
b & 9 & 4 + \ \ 9 & c + b - c \\
c & 4 & 9 - \ \ 5 & b - b + c \\
d & 1 & 16 - 15 & a - a + d
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
a & d & ad & a^2 \\
b & c & bc & b^2 \\
c & b & cb & c^2 \\
d & a & da & d^2
\end{array}
$$

$2 + 15 \frown 16 - 15 \frown 1 + 5 \frown 9 - 5 \frown 4$

[*Rechnung bricht ab*]

$$
\begin{array}{ll}
a \frown d & \\
b \quad c & \\
c \quad b & \\
d \quad a &
\end{array}
=
\begin{array}{lc}
a^2 & + a - d \frown a \\
b^2 & + b - c \frown b \\
c^2 - & - c + b \frown c \\
d^2 & - d + a \frown d
\end{array}
=
\begin{array}{l}
+ a^2 - da \\
+ b^2 - bc \\
- cb + c^2 \\
- da + d^2
\end{array}
$$

1 differentia vel *erg. L*

1–79,6 In der Vorbetrachtung unterläuft Leibniz ein Vorzeichenfehler; er wird im Haupttext bereinigt.

Iam a D quod aequale est ipsi A auferatur quod lineola duplici circumdatum est intra D, aequale ipsi B restabit differentia inter A et B =

$$\begin{array}{lll} a \frown + & a-d \\ b \;\; + & b-c \\ c \;\; - & \llcorner b-c \lrcorner \\ d \;\; - & \llcorner a-d \lrcorner \end{array} = \begin{cases} a-d, \frown a,, \; - \; a-d, \frown d \; = \; a-d, \frown a-d. \\ b-c, \frown b,, \; - \; b-c, \frown c \; = \; b-c, \frown b-c. \end{cases}$$

~~100~~	100	100	100	100	100	100	100	100	100
81	81	81	81	81	81	81	81	81	81
64	64	64	64	64	64	64	64	64	64
49	49	49	49	49	49	49	49	49	49
36	36	36	36	36	36	36	36	36	36
25	25	25	25	25	25	25	25	25	25
16	16	16	16	16	16	16	16	16	16
9	9	9	9	9	9	9	9	9	9
4	4	4	4	4	4	4	4	4	4
~~1~~	1	1	1	1	1	1	1	1	1

3–6 *Daneben am rechten Rande:*

$$a + d = b + c.$$

Ergo $a + d - b = c$. Ergo $a - b = c - d$.

Item $a + d - c = b$. Ergo $a - c = b - d$.

7–16 $100 - 16 = 36$. $36 - 16 = 100 - 2 \frown 16$. [*sic !*]

16	4 $\frown$	4 $\frown$	1		4
9	3	3	2		6
4	2	2	3		6
1	1	1	4		4
40 [*sic!*]					20

16	1	16			16	16	256
9	4	36		25	9	9	81
4	9	36		225	4	4	16
1	16	16		104	1	1	1
	$104 + 15 \frown 15 + 5 \frown 5$			354			354

Si numeri sint progressionis arithmeticae, et primus per ultimum secundus per penultimum etc. multiplicetur, summa horum rectangulorum, erit dimidium summae quadratorum numerorum. Regula generalis, si in quacunque progressione vel serie primi per

---

1–10 *Vorstufen:*

10 $\frown$	1	10		100 $\frown$	1
9	2	18	8	81	4
8	3	24	6	64	9
7	4	28	4	49	16
6	5	30	2	36	25
5	6	30		25	36
4	7	28		16	[*bricht ab*]
3	8	24		9	
2	9	18		4	
1	10	10		1	

11–81,4 Die Aussage bezüglich der arithmetischen Folge ist aufgrund des Rechenfehlers in Z. 5 falsch, die allgemeine Aussage jedoch ist korrekt.

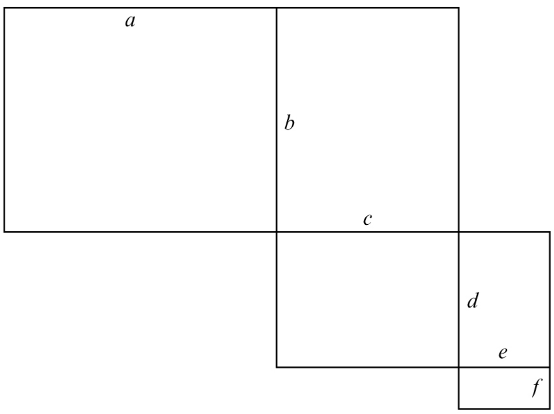
postremos peneprimi per penepostremos multiplicentur [etc.], summa rectangulorum inverse productorum aequabitur summae directe productorum seu quadratorum, si scilicet quadrata differentiarum inter primum et ultimum, secundum et penultimum etc. adiciantur.

[*1. Fortsetzung, mit Ausnahme von Z. 6–8 u. Fig. 3 gestrichen*]

$$\begin{array}{l} 4-2 \\ \underline{4-2} \\ 16+4-16 \end{array} \qquad 4 \frown 4 - 2 \frown 2 = 8 \quad [\textit{bricht ab}] \qquad \begin{array}{l} a \ -b \\ \underline{a \ -b} \\ \cancel{a^2} + b^2 - 2ab, \end{array} \quad \begin{array}{l} a^2 - b^2 \\ \\ -\cancel{a^2} + b^2 = 2b^2 - 2ab. \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2b \frown a - b. + \quad 2c \frown b - c. + \quad 2d \frown c - d. \quad \text{etc.} = \\ 2b^2 - 2ab \quad + \quad 2c^2 - 2bc \quad + \quad 2d^2 - 2cd \quad \text{etc.} = \\ 2b^2 + 2c^2 \quad + \quad 2d^2 \quad \text{etc.} \quad - \quad 2ab - 2bc - 2cd \quad \text{etc.} \end{array}$$

Investiganda iam est summa $2ab + 2bc + 2cd$ etc.



[*Fig. 3*]

1 etc. *erg. Hrsg.* 3 f. adiciantur. | Quae cum infinita sint puncta, negligi possunt *gestr.* | *L*
8 f. −2ab. *(1)* = *(a)* 2 ⌢ b *(b)* 2b ⌢ a − b *(2)* Porro a − b, ⌢ 2b, , + b − c, ⌢ 2c. *(3)* 2b ⌢ a − b. *L*

$$\begin{array}{lll} 2ba + 2bc = 2b \frown a+c & & 2ba)\ 2bc + 2cd = 2c \frown b+d \\ 2cd + 2de = 2d \frown c+e & \text{vel sic :} & 2de + 2ef = 2e \frown d+f \\ 2ef + 2fg = 2f \frown e+g & & = 2g \frown f+h \\ & \text{etc.} & \end{array}$$

$$2ba + \llcorner 2b \frown a+c \lrcorner + 2c \frown \llcorner b+d \lrcorner + 2d \frown c+e$$
$$+ \ 2e \frown d+f. \quad 2f \frown e+g. \quad 2g \frown f+h =$$
$$\text{bis} : 2ab + 2bc + 2cd \text{ etc.}$$

[*2. Fortsetzung*]

Quadratis continue decrescentibus, ut quadrata chordarum a^2. b^2. etc. detrahenda sunt quadrata differentiarum inter radices, seu chordas. Haec quadrata ergo sunt: $\dfrac{a-b}{\underline{a-b}} = a^2 + b^2 - 2ab$. aliaque numero infinita, sed omnia haec quadrata simul non nisi punctum conficere atque ideo in calculo tuto negligi posse ita demonstro. Constat differentias ipsorum quadratorum in infinitum decrescentium $a^2 - b^2 \ + \ b^2 - c^2 \ + \ c^2 - d^2$ etc. in unam summam collectas, aequari quadrato primo seu puncto. Iam quadrata differentiarum minora sunt differentiis quadratorum, (quod calculus facile monstrat $a - b \frown a - b = a^2 + b^2 - 2ab$. auferatur inde $a^2 - b^2$. restabit $2b^2 - 2ab$. quod est minus adhuc nihilo, quia $2ab$ maius quam $2bb$ cum a sit maior quam b). Ergo cum quod maius est punctum sit, seu nullius considerationis, multo magis erit etiam id quod minus est.

---

13 *Zusätzlich am oberen Rande:*

$$\begin{array}{lllllll} & a^2 - b^2 & + & b^2 - c^2 & + & c^2 - d^2 & \text{etc.} = a^2. \\ \text{Iam} & a \ - b & + & b \ - c & + & c \ - d & \text{etc.} = a. \end{array}$$

9 f. chordarum | a^2. b^2. etc. *erg.* | *(1)* summae adiciendae sunt di *(2)* detrahendae sunt differentiae radicum *(3)* detrahenda sunt quadrata *(a)* sub differentiis radicum *(b)* differentiarum *L* 14 puncto *(1)* , auferantur differentiae quadratorum *(2)* . Iam *L*

Hinc demonstratur in arithmetica infinitorum

$$\begin{array}{ccccccc} a & \frown & a & & a & \frown & d \\ b & & b & & b & & c \\ c & & c & \text{et} & c & & b \quad \text{aequari.} \\ d & & d & & d & & a \\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} \end{array}$$

Res soli arithmeticae infinitorum propria, ut aliquid adici aut abici possit, sine compensatione calculo salvo. Quod videtur impossibile, et est certe hoc quoque unum ex miraculis continui seu infiniti.

[*Teil 3*]

[*Beginn*]

$a+b \qquad a-b$

Differentia inter summam et differentiam est minor terminus duplicatus.

$\cancel{a}+b-\llcorner\cancel{a}-b\lrcorner=2b$

$$\begin{array}{l} a+\ b=c+d \\ a-\ b=c+d-2b \\ c-\ d=a+b-2d \\ \cancel{c+d}-2b \infty \cancel{a+b}-2d \\ 0-2b\infty \ 0 \ -2d \\ \quad 2b \infty \ 2d \end{array} \qquad \begin{array}{l} \cancel{a}+b\infty\cancel{a}-b \\ \ \ 2b \quad 0 \end{array} \qquad \left[\begin{array}{l} a+b=c+d \\ a+b-c=d \\ a-c=d-b \\ a+b-d=c \\ a-d=c-b \end{array}\right]$$

Si sint quatuor termini [$a.\ d.\ b.\ c.$] et duorum ex illis [$a.\ d.$] summa sit aequalis summae reliquorum duorum, [$b.\ c.$] differentia terminorum duorum ex diversis summis sumtorum, aequatur differentiae reliquorum duorum.

$a+d=b+c$

Ergo $a+d-b=c$. Ergo $a-b=c-d$.

Item $a+d-c=b$. Ergo $a-c=b-d$.

15–19 *rechts gestr. L, erg. Hrsg.* 21 termini *(1)* A. B. C. D. *(2)* | A. D. B. C. *ändert Hrsg.* | et *L* 21 illis | A. D. *erg., ändert Hrsg.* | summa *L* 22 duorum, *(1)* C. D. *(2)* | B. C. *ändert Hrsg.* | differentia *L*

15–20 Die Rechnung ist nur zulässig, wenn die Beziehung $a-b \infty c-d$ als Setzung aufgefasst wird und das Symbol ∞ die Bedeutung des gewöhnlichen Gleichheitszeichen erhält — Zur Verwendung von ∞ vgl. auch N. 27 S. 489 sowie *LSB* VII, 1 N. 6_4 S. 80.

[*Fortsetzung*]

$a + d = b + c$

Ergo $a = b + c - d$. Ergo $a - d = b + c - 2d$.

$b = a + d - c$. Et $b - c = a + d - 2c$.

Differentia differentiarum seu $a - d$ minus $b - c =$

$b + \cancel{c} - \cancel{2}d \infty a + \cancel{d} - \cancel{2}c_{[,]}$ $\quad b - d \infty a - c$

$23 + 1 \quad 21 + 3 \quad 20 + 4 \quad 17 + 7 \quad 16 + 8 \quad 12 + 12$

23	23	23	23	23	23	23	23	23	23	23
21	21	21	21	21	21	21	21	21	$\cancel{21}$	$\cancel{21}$
20	20	20	20	20	20	20	$\cancel{20}$	$\cancel{20}$	$\cancel{20}$	$\cancel{20}$
17	17	17	17	17	$\cancel{17}$	$\cancel{17}$	$\cancel{17}$	$\cancel{17}$	$\cancel{17}$	$\cancel{17}$
16	16	16	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$	$\cancel{16}$
12	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$	$\cancel{12}$
$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	8	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$
$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	7	7	7	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$
$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	4	4	4	4	4	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$
$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	3	3	3	3	3	3	3	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$
$\cancel{1}$	1	1	1	1	1	1	1	1	1	$\cancel{1}$

$\overset{a}{23} + \overset{d}{1} = \overset{b}{21} + \overset{c}{3}$

Ergo $23 = 21 + 3 - 1$. Ergo $23 - 1 = 21 + 3 - 2 \frown 1$.

2–6

$a + d = b + c \qquad a - d, -_{\llcorner} b - c_{\lrcorner} = b + c - \cancel{2}d - a \cancel{+} \cancel{d} + 2c$

$a - d = b + c - 2d \qquad = 3c + b - a$

$b - c = a + d - 2c \qquad = 2c + \cancel{d} + d - a$

Ergo $c - \cancel{d} + 2c + \cancel{d} = a - b \qquad 3c = a - b$

2–6 Hier wiederholt Leibniz die Rechnung von S. 83 Z. 15–20; er gelangt nur deshalb zu einem schlüssigen Ergebnis, weil sich die begangenen Fehler neutralisieren. — Die Rechnung der Anmerkung ist verfehlt.

Item $21 = 23 + 1 - 3$. Ergo $21 - 3 = 23 + 1 - 2 \frown 3$.

Ergo $\overset{a}{23} - \overset{d}{1}$, minus $\overset{b}{21} - \overset{c}{3}$. aequatur:

$21 + \cancel{3} - \underset{3}{(2)} \frown 1$ minus $23 + \cancel{1} - \underset{3}{(2)} \frown 3$ aequatur

$21 - (3) \frown 1$ minus $23 - (3) \frown 3$ aequatur

$\overset{b}{21} + (3) \frown \overset{c}{3} - \overset{a}{23} - (3) \frown \overset{d}{1}$ aequatur

$\overset{b}{21} + (3) \frown \overset{c}{3}$ minus $\overset{a}{23} + (3) \frown \overset{d}{1}$

$\overset{b}{21} + \overset{c}{3} + (2) \frown \overset{c}{3}$ minus $\overset{a}{23} + \overset{d}{1} + (2) \frown \overset{d}{1}$ aequatur $(2) \frown \overset{c}{3} - (2) \frown \overset{d}{1}$.

En ergo theorema memorabile: Si $a + d = b + c$, erit $a - d$ minus $b - c =$ aequale ipsi $2c - 2d$.

Si 1 intelligatur esse minimum seu punctum erit $12 = \dfrac{23}{2}$ item $21 + 3$ vel $20 + 4$ etc. erunt $= 23$ seu primo, et $23 - 3 = 21$. $23 - 4 = 20$

$$\text{NB. } 23 - 3 = 21 - 1$$
$$23 - 21 = 3 - 1$$

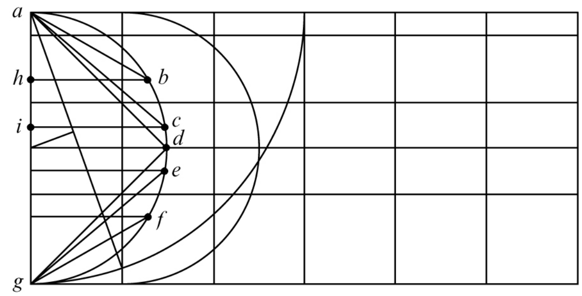
Ideo si a 23 ad 16 auferenda sint 12 ad 1, et 1 supponatur esse punctum seu nihilum, erit $23 - 1 = 23$, et $21 - 3 = 23 - 2 \frown 3 - 1$ seu $23 - 2 \frown 3$, et $20 - 4 = 23 - 2 \frown 4$, et $17 - 7 = 23 - 2 \frown 7$, et $16 - 8 = 23 - 2 \frown 8$ etc. Ergo totum 23 ad $12 - 8$ ad $1 = 23 \frown 5 - 8$ ad $2, \frown 2$.

[*Teil 4*]

Problema: Si sint plura triangula orthogonia eiusdem hypotenusae datae, dataque sit summa quadratorum super altitudinibus, invenire summam ex differentiis quadratorum laterum incognitorum. Dictum est datam esse summam quadratorum super altitudinibus. Cumque hypotenusa data sit data quoque erit summa quadratorum super summis

19 orthogonia *(1)* , et in unoquolibet *(2)* eiusdem *L* 19 hypotenusae | datae *erg.* | *(1)* cognitaqu *(2)* dataeque summae *(3)* dataque *L* 20 f. summam | ex differentiis *erg.* | quadratorum | super differentiis laterum *gestr.* | laterum *L* 21 incognitorum. *(1)* Apparet *(2)* Constat *(3)* Dictum *L*

laterum incognitorum, tantum quaeritur summa differentiarum inter quadrata laterum incognitorum.



[*Fig. 4, Blindzeichnung*]

Habemus summam quadratorum super chordis semicirculi ita assumtis ut diversorum quadrantium chordae sibi mutuo respondeant ut *ab*. *ac*. *ad*. *gd*. *ge*. *gf*. etc. Habemus summam quadratorum super sinubus has chordas subtendentibus *hb*. *ic*. etc. crescunt enim ut elementa hemisphaerii basi circulo. Habebimus ergo et summas quadratorum sinuum versorum *ah*. *ai*. *ag*. etc. sunt enim differentiae duarum priorum summarum nam quadratum *ah*. est differentia inter quadr. *ab*. et quadr. *hb*. Iam quaeritur summa quadratorum eiusmodi, si non totus semicirculus percurratur sed procedatur tantum v.g. ab *a*. usque ad *c*. nam si procedatur usque ad *d*. percurretur quadrans, summaque erit dimidium prioris, et postea invenienda est summa summarum. Sed idem sic reperiri potest ut patet ex schemate numerorum.

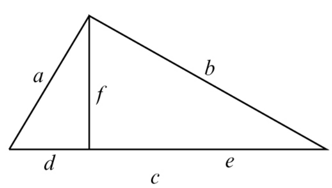
1 summa *(1)* quadratorum super differentiis *(2)* differentiarum *L*

Patet ex hac mutua deletione.

10	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$	$\cancel{10}$
$\cancel{9}$//	9	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$	$\cancel{9}$//
$\cancel{8}$//	$\cancel{8}$//	8	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$	$\cancel{8}$//	$\cancel{8}$//
$\cancel{7}$//	$\cancel{7}$//	$\cancel{7}$//	7	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$	$\cancel{7}$//	$\cancel{7}$//	$\cancel{7}$//
$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//	6	$\cancel{6}$	$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//	$\cancel{6}$//
$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//	5	$\cancel{5}$	$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//	$\cancel{5}$//
$\cancel{4}$//	$\cancel{4}$//	$\cancel{4}$//	4	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$	$\cancel{4}$//	$\cancel{4}$//	$\cancel{4}$//
$\cancel{3}$//	$\cancel{3}$//	3	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$	$\cancel{3}$//	$\cancel{3}$//
$\cancel{2}$//	2	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$	$\cancel{2}$//
1	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$	$\cancel{1}$

Omnia quadrata minima detrahantur ab omnibus maximis. Omnia inquam id est tot quot sunt chordae per arcum in quadratum [dispositae]. Postea omnia pene minima demto uno ab omnibus pene maximis demto uno, deinde omnia antepeneminima demtis duobus ab omnibus antepenemaximis demtis duobus et ita porro: summa omnium differentiarum est quaesitum.

[*Nebenbetrachtung*]



[*Fig. 5, Blindzeichnung*]

13 quadratum. | disposita est *ändert Hrsg.* |. Postea *L*

$$\begin{array}{lllll}
f^2 = de & \quad & d & f & e \\
a^2 = d^2 + ed & \quad & d & a & d+e \\
b^2 = e^2 + ed & \quad & e & b & d+e
\end{array}$$

$$a = \frac{d^2+ed}{a} \qquad b = \frac{e^2+ed}{b}$$

$$\begin{array}{l} d^2+ed \\ \underline{e^2+ed} \end{array}$$

$$[a^2b^2] = de^3 + ed^3 + 2e^2d^2$$

$$Rq\, a^2 + b^2 = Rq\, d^2 + e^2 + 2de = d + e.$$

quae est 47. primi.

7 ab *L ändert Hrsg.*

9 est 47. primi: Euklid, *Elemente* I,47.

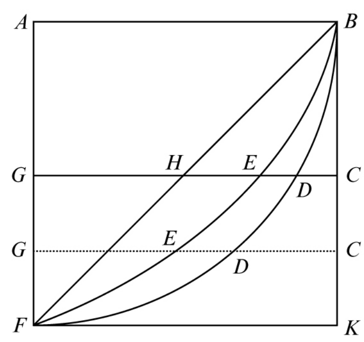
8. THEOREMATA NOTABILIA EX FABRIO, SLUSIO ET GREGORIO SCOTO

[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 113. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 113 r° (v° = leer). — Rechte untere Ecke ausgerissen, dadurch geringfügiger (behebbarer) Textverlust.
Cc 2, Nr. 500

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück steht in engem Zusammenhang mit der Studie *LSB* VII, 3 N. 17 (s. S. 225), die sich auf April – Mai 1673 datieren lässt, und dürfte kurz vor dieser entstanden sein.

Ait P. Fabri in *Geometriae Synopsi* rudiment. 2. num. 19. (ubi de nona classe) sinum esse mediam proportionalem *inter sinum totum seu radium, vel semidiametrum, et parallelam axi parabolae*, cuius axis radio aequalis est.



[*Fig. 1*]

Sit, inquit, *quadrans AFDB. triangulum ABF. semiparabola FEBA cuius axis AB. ducatur AB in AF motu recto, perpetuo secatur ab arcu FDB. et gignitur quadrans, decrescunt autem elementa ut sinus, v. g. AB ut GD. decurso* videlicet *AG. est porro GD media proportionalis inter GE* et *GC. idem dico de qualibet alia parallela.*

9 Ait P. Fabri: *Synopsis Geometrica*, 1669, S. 73. Leibniz zitiert fast wörtlich. In dem Handexemplar ist die Stelle unterstrichen und zudem mit einer Randbemerkung versehen, außerdem hat Leibniz die grundlegende Beziehung an die zugehörige Figur geschrieben; s. dazu N. 1. — Der Satz kommt auch in *LSB* VII, 1 N. 106 S. 658 f. sowie in VII, 3 N. 17 S. 225 vor.

Supponendo hoc loco AF applicatam parabolae esse axi eius aequalem.

Sed hinc sequitur totum quadrantem esse mediam proportionalem inter semiparabolam propositam, et quadratum a radio. Supponatur quadratum a radio esse $3000,000$. erit semiparabola proposita $2000,000$. Esset ergo quadrans circuli media proportionalis inter $3000,000$ et $2000,000$. Ergo si omnia quadruplicentur erit circulus, media proportionalis inter $3000,000$ quadratum a semidiametro, et $2000,000$ parabolam a radio duplicatam. Ergo si quadratum circumscriptum circulo est $3000,000$, erit circulus media proportionalis inter $3000,000$ et $2000,000$. Erit ergo circulus $Rq\,6\,000,000,000,000$.
Iam circulus aequatur triangulo rectangulo sub radio et circumferentia, ergo rectangulo sub radio et semicircumferentia. Radius hoc loco est $\dfrac{Rq\,3000,000}{2} = Rq\,\dfrac{3000,000}{4}$. Ergo si $Rq\,6\,000,000,000,000$. dividatur per $Rq\,\dfrac{3000,000}{4}$. productum erit semicircumferentia. Fiet $Rq\,\dfrac{24\,000,000,\cancel{000,000}}{3\cancel{000,000}} = Rq\,8\,000,000$. cuius duplum est

$$Rq\,32\,000,000 = \text{circumferentiae circuli.}$$

Ita ergo si hypothesis illa vera est haberemus rationem diametri Rq 3. ad circumferentiam Rq 32.

$$Rq\ 3 \frown Rq\ 1000,000.\ \text{ad}\ Rq\ 32 \frown Rq\ 1000,000.$$

seu si ponatur □ circumscriptum $3000,000$. erit diameter Rq $3000,000$. et circumferentia Rq $32\,000,000$.

---

2 Imo non sequitur.

2–91,15 Der Versuch, die Kreiszahl zu bestimmen, ist missglückt. Den Hauptfehler vermerkt Leibniz gleich zweimal. Die zugehörige Numerik ist nicht ganz exakt, ergibt aber zusammen mit der archimedischen Näherung dennoch ein aussagekräftiges Ergebnis. — Eine ähnliche Betrachtung auf anderer Grundlage aber mit denselben numerischen Werten findet sich *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 63–66. Auch hier stellt Leibniz das Scheitern fest.

$$\begin{array}{c}
\cancel{1}\,3\\
\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{3}\\
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{1}\,\cancel{7}\,1\\
\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{2}\,1\\
\cancel{3}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\\
.\quad .\quad .\quad .\\
\hline
1\quad 7\quad 3\quad 3\\
\hline
\cancel{1}\,\cancel{2}\,\cancel{7}\,\cancel{4}\,\cancel{3}\,\cancel{6}\,\cancel{3}\\
\cancel{3}\,\cancel{3}\,\cancel{4}\\
\cancel{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
1\\
\cancel{2}\,7\\
\cancel{1}\quad \cancel{2}\,\cancel{4}\,\cancel{8}\,5\\
\cancel{7}\,\cancel{6}\,\cancel{4}\,\cancel{8}\,\cancel{4}\,\cancel{6}\,6\\
\cancel{3}\,\cancel{2}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\,\cancel{0}\\
.\quad .\quad .\quad .\\
\hline
5\quad 6\quad 6\quad 2\\
\hline
\cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{0}\,\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{6}\,\cancel{2}\,\cancel{2}\\
\cancel{1}\,\cancel{1}\,\cancel{0}\,\cancel{1}\,\cancel{3}\\
\cancel{1}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
3\,0\,0\,0\,0\,0\,0\\
3\,1\,1\\
\hline
2\,\cancel{9}\,\cancel{9}\,\cancel{9}\,5\,8\,\cancel{9}\\
\\
2\,5\\
7\quad\\
5\quad 5\quad\\
6\quad\quad
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
4\,6\\
\cancel{2}\,\cancel{3}\,\cancel{7}\,6\\
\cancel{3}\,\cancel{6}\,\cancel{6}\,\cancel{2}\ \ ⨍\ \ 3\,\dfrac{466}{1733}\\
\cancel{1}\,\cancel{7}\,\cancel{3}\,\cancel{3}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
4\,3\\
\cancel{3}\,\cancel{3}\,5\\
1\,\cancel{7}\,\cancel{3}\,\cancel{3}\ \ ⨍\ \ 3\\
\cancel{4}\,\cancel{6}\,\cancel{6}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
\cancel{2}\,\cancel{2}\ \ ⨍\ \ 3\,\dfrac{1}{7}\\
\cancel{7}
\end{array}$$

Hic nondum $3\,\frac{1}{4}$. Puto ergo errorem inesse hypothesi.

Theorema Slusii *Mesolab.* in Miscellan. cap. 4. De maximis et minimis.
Si qua magnitudo dividatur in partes quae sunt invicem ut numerus ad numerum, productum (credo aggregatum) potentiarum eiusdem gradus ab illis partibus, *as the parts themselves denominate*, maximum est omnium productorum eorundem graduum partium eiusdem magnitudinis aliter divisae.

---

15 Imo recte Fabri, consequentia autem a partibus ad summam non sequitur.

---

16 Theorema Slusii: *Mesolabum*, 1668, S. 114–117. Wie die Passage in Englisch zeigt, hat Leibniz den Satz durch die Besprechung in *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903–909 kennengelernt. Dort (S. 906) heißt es: „If any Magnitude (or Number, as the whole) be devided into such parts, that are to each other as a Number to a Number, the Product of those powers of the parts, that are of the same degree, as the parts themselves denominate, is the greatest of all Products of the like powers of the parts of the same magnitude when otherwise divided.“ Die Originalfassung (S. 116) lautet: „Si magnitudo quaelibet dividatur in ratione numeri ad numerum; productum ex dignitatibus partium, quarum exponentes sint iidem numeri, erit omnium similium maximum.“

Theoremata notabilia ex Gregorio Scoto:
Sit A polygonum regulare circulo inscriptum, B eidem simile circumscriptum, C polygonum inscriptum numeri laterum dupli, *D eidem simile circumscriptum.* [...]
C erit medium geometricum inter A et B.
D erit medium harmonicum inter B et C.
Idem est de polygonorum perimetris.

A			B	vel	A	C	B
	C					D	
		D					

Trigonum inscriptum,	hexagonum inscriptum,	trigonum circumscriptum.
Hexagonum inscriptum,	dodecagonum inscriptum,	hexagonum circumscriptum.
Dodecagonum inscriptum,	24$^{\text{gonum}}$ inscriptum,	dodecagonum circumsc⟨riptum.⟩

Investigandum quae sit ratio in primo casu, quae in secundo, qu⟨ae in⟩ tertio, etc. seu quomodo decrescant rationes. An fortasse id lumen ad ipsa⟨m⟩ circuli rationem afferre posset.

1 ex Gregorio Scoto: *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 5. — Leibniz zitiert beinahe wörtlich.

9. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE ℵ
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 201–204. 2 Bog. 2°. 8 S. Durchgehende Paginierung, zusätzliche Bogenmarkierung ℵ auf Bl. 202 v° und 204 v°, beide Bogen rechts gefalzt.
Cc 2, Nr. 564

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück steht an der Spitze einer Reihe von Studien, die Leibniz nachträglich zu einer Sammlung vereinigt und durch hebräische Buchstaben miteinander verknüpft hat. Die Stücke der Gruppe waren ursprünglich selbständige Untersuchungen und bestehen ihrerseits großenteils aus in sich geschlossenen Teilabschnitten. Bei der Zusammenstellung sind einige Stücke trotz verwandten Inhalts und zeitlicher Nähe nicht aufgenommen (s. N. 7), bzw. ausgeschieden (s. N. 17) worden. Auch ist festzustellen, dass die Reihenfolge der Einzelstücke und ihrer jeweiligen Teile nicht unbedingt mit ihrer zeitlichen Entstehung konform geht (z. B. N. 10 sowie N. 16). Außerdem sind fast alle Stücke im Lichte später gewonnener Erkenntnisse überarbeitet worden. Aus inhaltlichen Gründen sind sie sämtlich in das Frühjahr bzw. späte Frühjahr 1673 zu datieren.

9_1. PLAGULA PRIMA

Centrum gravitatis res est non mechanica, sed geometrica, potest enim exprimi definitione, in qua nihil mechanicum contineatur. Mechanica definitio est: centrum gravitatis est punctum per quod transeuntes rectae, figurae pondera bisecant. Sed quia non bisecant ipsam figuram, semper, ideo alia opus est definitione. Quia nimirum pondus velut novam superaddit dimensionem, est enim quasi linea nova in omnia puncta ducta, continue crescens instar trianguli, inde a puncto suspensionis ideo lineae ascendent ad superficies, superficies ad solida, solida ad quartam dimensionem. Unde intelligi potest dimensiones illas altiores esse reales; etsi enim non figuris, quantitatibus tamen continuis exprimi possent iisque minime imaginariis.

Nunc superficies easque planas, per exemplum consideremus. Supponatur figurae datae centrum gravitatis velut inventum, et in quolibet circumferentiae puncto erigatur recta plano figurae perpendicularis (Quid si figura sit superficies curva, tum perpendicularis erit plano subtendenti superficiem curvam, vel potius semper erigetur perpendi-

28 curva, *(1)* alia tum res est *(a)*) *(b)* sed facile explicanda) *(2)* tum *L*

cularis horizonti, quicunque sit situs figurae, res enim redibit eodem, etsi alio atque alio situ, alia sit proditura f i g u r a c e n t r o b a r y c a .) rationis cuiusdam α ad diametrum, seu distantiam eius puncti circumferentiae a centro gravitatis, ita scilicet ut semper perpendicularis erectae ad semidiametrum suam ratio sit eadem. Et facilioris operationis causa assumamus e r e c t a m semper r a d i o id est distantiae a centro aequalem. Inde extremitates erectarum puncto per diagonales iungantur. Huius figurae ita constitutae ea debet esse proprietas, ut planum quodcunque horizonti perpendiculare, seu lineae directionis gravium parallelum, per centrum transiens eam bisecet. Sed ut ablegemus horizontis etc. nomen, ita erit definitio (quia semper idem manet centrum gravitatis quomodocunque inclinetur figura, positis scilicet lineis directionis inter se parallelis)[:] omnes erectae sunto inter se parallelae, et si figurae planum sit ad planum cui erectae insistunt inclinatum, non ad distantiam a centro proportionales erunt erectae, sed ad distantiam a perpendiculari per planum super quo erectio est et centrum transeunte. Ergo a centro triangulum excrescet, in ratione distantiarum ab ea linea.

Quodlibet punctum valet lineam erectam, valores punctorum sunt ut distantiae a linea quadam certa, pro arbitrio assumta per centrum figurae transeunte. Lineae erectae sunto parallelae lineae illi assumtae, ac per consequens etiam inter se. Lineae erectae sunto inter se confusae, ac proinde figura plana inclinari quidem potest, in situm perpendicularem seu ut planum aliquod in ipsa figura, rectae directionis assumtae parallelum fiat, erigi non potest; curva autem superficies, v. g. hemisphaerii, ne inclinari quidem etc. Hic est status figurae centrobarycus.

NB. Hoc facto figura data centrobaryce posita intelligi potest, fulta hypomochlio seu recta ad lineam directionis perpendiculari per centrum gravitatis transeunte, sive ea incidat in figuram, sive eam non nisi in puncto secet (quanquam prius si figura plana est regularius). Cumque hinc necesse sit nisum aequalem esse ab utraque figura, etiam erectae nisus exprimentes, utrinque aequalis erunt summae, seu planum quodcunque (id est quaecunque linea pro hypomochlio sumatur) lineae directionis figuram centrobarycam bisecabit. Optimum autem considerare planas, easque ita positas ut linea directionis ipsis sit perpendicularis.

9 erit *(1)* regula *(2)* definitio *L* 11 f. si *(1)* figura sit inclinata non consideranda *(2)* figurae ... inclinatum, *(a)* distantia *(b)* non *L* 14 f. linea. *(1)* Breviter[:] Sufficit rectam quandam transire utcunque per centrum figurae, sufficit omnes erectas ex punctis figurae omnibus esse *(2)* Quodlibet *L* 16 transeunte. *(1)* Lineae erectae sunto perpendiculariter ad figuram seu tangentem figurae; *(2)* Lineae *L*

Hoc pacto solius circuli figura centrobaryca est figura nota, iam et geometrice describtibilis continuo motu, est enim residuum cylindri exemto cono eiusdem basis et altitudinis; ac proinde figura circuli centrobaryca, est hemisphaerio aequalis. Porro eam bisecari omni plano per centrum circuli transeunte ad circulum perpendiculari manifestum est.

Superficies omnis centrobarycae figurae planae curvilineae est cylindrica truncata. Cuius cylindri basis figura data. Ad figurarum istarum descriptionem imaginari nobis possumus, rectam ferri per peripheriam alicuius figurae, sed inter circumferendum continue crescere aut decrescere, ea ratione, qua radii figurae. A figura centrobaryca abscindi potest cylinder basi figura, altitudine radii minimi. Residuum retinebit easdem leges, ut a plano quolibet centrobaryco bisecetur.

Omnis linea figuram datam bisecans in partes similes et aequales etiam eius centrobarycam ita bisecabit, seu transit per centrum gravitatis, ut sector circuli angulo bisecto.

Omnis figurae quae binis modis secari potest in partes similes et aequales, habetur centrum gravitatis ut circuli qui ita secari potest modis infinitis, ellipsis, etc. Hinc iam NB. etsi rectae per centrum ellipseos transeuntes eam non semper bisecent, plana tamen earum rectarum centrobarycam ellipseos bisecabunt.

Hinc iam innumerabilium segmentorum dissimilium aequalitas haberi potest, et per consequens rectilinea solida plurimis curvilineis aequalia. Non puto rem in ellipsi posse usui esse, quia in ea omnes rectae, per centrum transeuntes etiam ellipsin bisecant. Sed in parabola, forte ad reperiendam rectam curvae parabolicae aequalem. Item in curva cycloeidali, cuius centrum gravitatis dedit nobis post Wrenni dimensionem, Pascalius.

NB. Lineas non est necesse erigi parallelas lineae directionis, cum lineae alicuius centrum gravitatis quaeritur, sunto modo parallelae inter se et horizonti, et res eodem redibit.

Centrobaryca ergo circumferentiae est ipse circulus, et peripheriae ellipticae ipsa ellipsis. Imo falsum est, cylindrica superficies cuius basis circumferentia altitudo radius est centrobaryca circumferentiae. Erigi ergo debent, alioqui se confundent. Ellipticae circum-

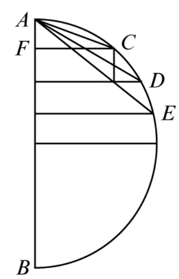
9 ea *(1)* lege *(2)* ratione *L* 27 Imo *(1)* $\mathfrak{S}$ *(2)* falsum *L*

22 dedit ... Pascalius: Diesen Hinweis hat Leibniz aus Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 (*HO* XVIII S. 205) entnommen.

ferentiae centrobaryca est etiam circumferentia centrobarycae ellipseos. Porro superficies centrobaryca, fit ex ductu basis, id est peripheriae datae figurae, in altitudinem seu maximum, ita divisimus prout progressio radiorum continuo decrescentium docet, si modo ea progressio inveniri seu aequari potest.

Adde propositionem Hugenii memorabilem: Feratur recta perpendicularis super peripheria figurae planae, quam planum cuius basis recta figuram tangens, inclinatum ad figurae planum angulo semirecto, secet, abscindet cuneum, aequalem solido ex figura in distantiam centri eius gravitatis, a puncto contactus ducta. Hoc iam Pascal.

Prop. 1. Hugenii de centro oscillationis: *Ponderibus quotlibet ad eandem partem plani existentibus, si a singulorum centris gravitatis agantur in planum illud perpendiculares, hae singulae in sua pondera ductae tantundem simul efficient, ac perpendicularis a centro gravitatis* [*ponderum*] *omnium in planum idem cadens, ducta in pondera omnia*.



[*Fig. 1*]

$AB = a$. AC vel AD vel AE b. intervallum a tangente $\dfrac{b^2}{2a}$.

Iam $AF = \alpha$. minimum seu punctum. $FC = Rq\ a - \alpha \frown \alpha = Rq\ a\alpha - \alpha^2$. Et $FC\square = a\alpha - \alpha^2$ (1 vel 4). iam $b^2 = a$ (1 vel 2)α − (1 vel 4 etc.)α^2 + (1 vel 4

8 Hoc iam Pascal. *in anderem Duktus erg. L* 12 ponderum *erg. Hrsg. nach Huygens*

5 propositionem Hugenii: *a. a. O.*, S. 104 f. (*HO* XVIII S. 267). 8 Hoc iam Pascal.: Der Satz steht nicht in dieser Form bei Pascal, ergibt sich aber als direkte Folgerung aus der *Lettre à Carcavy*, 1658 (*PO* VIII S. 331–384) bzw. dem *Traité des trilignes*, 1658 (*PO* IX S. 3–45). 9 Prop. 1.: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 96 (*HO* XVIII S. 251).

etc.)α^2. ergo $b^2 = a \frown (1 \text{ vel } 2 \text{ vel } 3 \text{ etc.})\alpha$. Ergo intervalla tangentium cum sint $\dfrac{b^2}{2a} = \dfrac{a \frown \alpha(1 \text{ vel } 2 \text{ etc.})}{2a}$. erunt $\dfrac{\alpha(1 \text{ vel } 2 \text{ etc.})}{2}$ seu a vertice abscissae dimidiatae.

Iam FC dividatur per α vel $Rq\ \alpha^2$ fiet $Rq\ \dfrac{a}{\alpha} - 1$.

Iam AC. CD. DE. etc. duci intelligantur in α. producto dimidiato bis, fiet totus semicirculus.

Nota si chordae ducantur in a vertice abscissas producto quadripartito habetur semicirculus, si in applicatas habetur superficies cylindrica cuius basis arcus semicirculi, altitudo distantia centri gravitatis eius arcus a centro circuli.

Iam abscissa est $\alpha(1 \text{ vel } 2)$, applicata est $Rq\ a\alpha(1 \text{ vel } 2) - \alpha^2(1 \text{ vel } 4)$ et series abscissarum $\dfrac{\alpha}{\cancel{2}}$. $\dfrac{2\alpha}{\cancel{2}}$. $\dfrac{3\alpha}{\cancel{2}}$. $\dfrac{4\alpha}{\cancel{2}}$. series applicatarum $Rq\ a\alpha - \alpha^2$. $Rq\ a2\alpha - 4\alpha^2$. $Rq\ a3\alpha - 9\alpha^2$.

$$\begin{array}{llll}
\text{Ergo ratio primae applicatae ad primam abscissam:} & Rq\ \dfrac{a\alpha - \alpha^2}{\alpha^2} & = & Rq\ \dfrac{a-\alpha}{\alpha}. \\
\qquad\text{ratio } 2^{\text{dae}} \qquad\qquad \text{ad } 2^{\text{dam}} \text{ erit:} & Rq\ \dfrac{a2\alpha - 4\alpha^2}{4\alpha^2} & = & Rq\ \dfrac{a-2\alpha}{2\alpha}. \\
\text{et}\quad \text{ratio tertiae} \qquad\qquad \text{ad tertiam:} & & & Rq\ \dfrac{a-3\alpha}{3\alpha}.
\end{array}$$

Iam constat cum non eadem est ratio partium ad partes, nec totorum rationem iniri posse. Illud vero hactenus non repertum est, rationibus partium non iisdem manentibus, sed certo modo crescentibus, inire rationes summarum, ut si sint

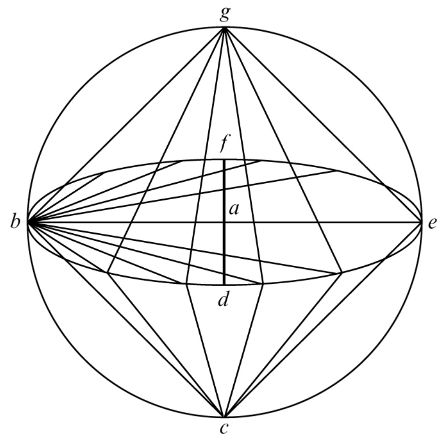
$$\begin{array}{ccccccccccc}
a & b & c & d & e & \text{ad} & a & b & c & d & e. \\
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

Hoc vero tanto minus inveniri potest, quando ipsis a. b. c. d. e. ratio non constat.

Sed et illud est pulcherrimum theorema Hugenii; *si datis in plano punctis quotlibet ex centro gravitatis illorum circulus quilibet describatur et ab omnibus punctis datis, ducantur lineae rectae ad punctum aliquod in circuli illius circumferentia sumtum, erit summa quadratorum ab omnibus semper aequalis eidem plano*, seu eadem, ubicunque assumatur illud punctum in circumferentia. Ergo si puncta forent infinita, semper solidum produceret idem.

---

20 theorema Hugenii: *a. a. O.*, S. 109 f. (*HO* XVIII S. 275–277), Leibniz zitiert den Satz fast wörtlich.



[*Fig. 2*]

Hoc ita applicare placet ellipseos centro a. quo describatur circulus ab ellipsi circumscriptus[,] sumatur in eius circumferentia praeter b. aliud punctum c, et aliud g, et ab omnibus circumferentiae ellipticae punctis ducantur rectae versus b. Deinde ab omnibus circumferentiae ellipticae punctis ducantur rectae versus c. quod ut sit distinctius: ab latere bde. ducantur versus c. et loco earum quae ex latere bfe ducendae essent versus c. ne prioribus confundantur, ducantur ex bde versus g. Summa $\square^{\text{torum}}$ omnium rectarum ex bfed in b. aequatur summae quadratorum omnium rectarum ex bde in c. et in g. Ergo dimidium unius aequatur dimidio alterius, seu omnes ex bde in b. aequantur omnibus ex bd in c et g.

Ex prima Hugenii regula colligi potest propositio talis: Si cylindricum quodcunque secetur per planum quodcunque, truncus abscissus aequabitur alii cylindrico cuius basis sectio, altitudo recta a centro sectionis ducta ad basin trunci abscissi perpendicularis.

---

11 *Rechts über* talis: Error

12 aequabitur *(1)* cylindro *(a)* sub basi et recta ab eius centro gravitatis ad planum abscindens perpendiculari. *(b)* sectione *(2)* | alii *erg.* | cylindrico *L*

---

11 Hugenii regula: s. o. S. 96 Z. 5.

Eodem modo superficies trunci abscissi aequabitur superficiei cylindrici alterius, cuius basis peripheria sectionis, altitudo recta sub centro sectionis ad basin trunci abscissi. Hinc dari potest cylinder ellipticus aequalis alii cylindro, cuius basis segmentum circuli. Imo deest aliquid, truncus tum cylindri cuius basis segmentum circuli aequabitur cylindro elliptico, at quid si iungantur duo trunci, aequabuntur cylindro elliptico, ergo totus cylinder cuius basis segmentum circuli aequari poterit cylindrico elliptico, ergo et circulari, ergo segmenti ratio dabitur ad circulum si vera hactenus diximus. Imo deest semper aliquid, necesse est enim sectionem ut sit ellipsis integra non incipere a recta basin terminante; si enim inciperet ab ea, fieret segmentum ellipseos. Quid si posset haberi abscissione ista semiellipsis etsi segmentum sit v. g. segmentum quadrantis, rursus triumpharemus. Imo detegeretur aliquid si aliud segmentum ellipseos abscindi posset, quam est segmentum circuli quod est cylindri basis. An vero necesse est semper segmentum sectionis esse simile segmento basis? Quod si est foret rursus theorema notabile, verum non tantum in circulo sed generaliter in omnibus, sectionibus cylindricorum.

Porro hinc patet ratio exhibendi rationem circumferentiae ellipticae ad circularem, iunctis inter se duobus superficierum truncis. Et ita semper exhiberi potest ratio sectionis ad basin cylindrici, si datur centrum gravitatis sectionis, et ratio peripheriae sectionis ad peripheriam basis, si datur peripheriae sectionis centrum. Vicissim datis iam aliunde rationibus figurarum et peripheriarum, basis et sectionis, dabitur centrum gravitatis sectionis. Imo iam proferri ultra potest speculatio, secetur scilicet cylindricum per curvam ut per superficiem sphaericam sectio erit quaedam superficiei curvae secantis portio sed terminata singulari quodam modo. Data ratione peripheriae ellipticae ad circularem, videtur inveniri posse ratio superficiei sphaeroeidis ad superficiem hemisphaerii, at hac inventa habetur quadratura circuli et hyperbolae.

Figura aliqua aut plana est, aut non plana, si plana, tunc alteri plano utcunque producto aut parallelum est eius planum, aut perpendiculare, aut inclinatum. Si parallelum

---

15 f. *Zwischen* circularem *und* iunctis *hochgestellt:* Error

22–24 *Darunter, nachträglich gestrichen:* Error

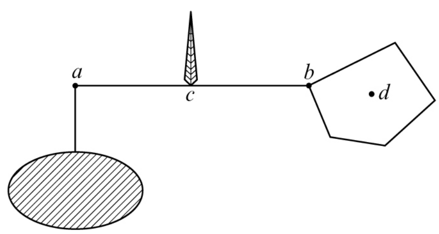
98,13–99,1 ad *(1)* planum *(2)* basin *(a)* cylindrici *(b)* trunci abscissi | perpendicularis *erg.* | Eodem *L* 22 modo *(1)* , hinc si secari intelligatur circularis vel ellipticus cylinder, facile sectionis illius centrum gravitatis inveniemus *(2)* . Data *L* est, tunc res per se manifesta nullo inde lucro, cylindricum enim factum ex figura erecta ex eius centro gravitatis ducta ad figuram perpendiculari est utique aequale eidem rectae in totam figuram ductae, quia plano ubique aequidistans. Sin figura sit plano perpendicularis, sumenda est recta in illo plano, quam scilicet rectae in figura producto secant, seu quae in planum figurae productum incidit. Cuiuslibet puncti figurae distantiae ab ea recta super ipso puncto figurae erigantur perpendiculares ad figurae planum, solidum inde ortum, vel figura inde orta aequalis erit distantiae centri gravitatis ab illa recta in figuram ductae. Porro investigandum per aequationes, quae sit talis figurae sic erectae terminatio, ut inde inveniatur quae sit sectio, qua ille truncus a cylindro eiusdem figurae abscindi intelligi potest, futura[;] curva plerumque non planum, aliquando tum et planum, ut si figura tangat illam rectam, quo casu incidemus in exemplum quod solum consideravit Hugenius de cuneo abscisso. Is autem cuneus abscissus non tantum aequabitur ut observatum Hugenio, ducta in basin recta perpendiculari ex centro gravitatis basis ad planum sectionis, sed et ducta sectione in rectam ex eius centro gravitatis in basin perpendicularem.

Esto basis a^2. sectio b^2. recta ex centro basis x. recta ex centro sectionis z. Erit $a^2x = b^2z$. Ergo $\dfrac{a^2}{b^2} = \dfrac{z}{x}$. Ergo $\dfrac{a^2}{z} = \dfrac{b^2}{x}$. Iam si basis sit semicirculus, sectio sit semiellipsis (vel aliter segmentum simile), dabitur ratio $\dfrac{a^2}{b^2}$. Ergo dabitur et ratio duarum illarum centra gravitatis determinantium. Hic videndum an per analysin accedentibus aliis theorematis iam inveniri possit quaenam illae esse debeant, si aliis quibuslibet assumtis ratio illa non potest obtineri. Debent enim esse aequales distantiis punctorum baseos in quae perpendiculariter incidunt a puncto contactus rectae supradictae. Addendum autem illud theorema, cuius ope videtur investigari posse dato centro gravitatis semicirculi centrum gravitatis semiellipseos, quodsi a praesenti principio est independens, ita veniemus ad determinationem. Similiter videtur necesse esse, in casu cunei abscissi, quando basis est circulus et sectio ellipsis, et figura data seu basis rectam ex qua ponderat tangit, ut scili-

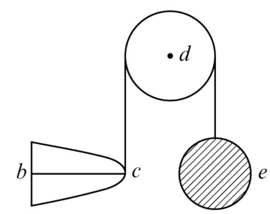
11 f. exemplum *(1)* sem *(2)* cuius species est tantum id *(3)* quod | solum *erg.* | consideravit *L* 25 Similiter *(1)* superficies cunei huius *(2)* Imo *(3)* videtur *L* 25 casu *(1)* Hugeniano, ut *(2)* cunei *L*

12 Hugenius de cuneo abscisso: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 103–106 (*HO* XVIII S. 265–269).

cet ellipsis secans, sit circulo basi aequalis. Vid. fig. prop. 7. Hug. ubi apparet demissam ex centro sectionis M in basin cui perpendicularis est incidere in F. et contra erectam perpendiculariter ex basi in F incidere in M. Ergo cum $z = x$. erit $a^2 = b^2$. Quod est impossibile, cum ellipseos $2z^2$ diameter maxima sit $Rq\ 2a^2$. et eius diameter minima ipsa a. Semper enim diameter minima sectionis est diam. basis. Error in eo quod posueram duci in figuram obliquis rectis. Quod falsum. Ideo sic dicendum: Si eaedem rectae quae cuneum faciunt ex sectione productae potius intelligantur perpendiculariter totum aequabitur sectioni illi in $z = x$ ductae, ergo ductae illae lineae oblique vel perpendiculariter, sunt ut bases, seu figurae. Sed sic cadunt illa quae de comparatione peripheriae ellipticae et circularis dici poterant, aliaque id genus. Illud notandum videtur: semper erectam ex centro gravitatis baseos perpendiculariter, transire per centra gravitatis omnium sectionum cylindrici, hinc dato centro gravitatis baseos dabitur omnium illarum sectionum, ut in parabolarum dabitur et ellipsium parabolicarum. Potes iungere duas parabolas in cylindrum.



[*Fig. 3a*]



[*Fig. 3b*]

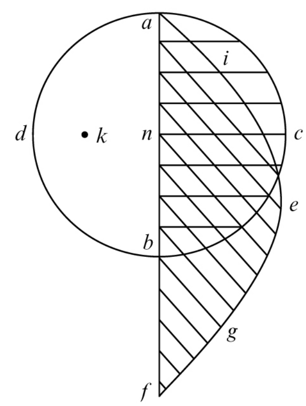
5 *Über* sectionis:

5 diameter *(1)* maxima *(2)* minima *(a)* ellipseos *(b)* sectionis *L*

1 Vid. fig. prop. 7. Hug.: *a. a. O.*, S. 105 (*HO* XVIII S. 267). In seinem Handexemplar hat Leibniz zusätzlich in die Figur den Schwerpunkt M der Schnittfläche eingezeichnet, s. a. N. 2.

N o t a [:] F i g u r a c e n t r o b a r y c a [,] sic generaliter appello factam ex distantiis a fulcro, sive id punctum sive recta sive planum *c*. in figuram ductis, libere suspensa ex *a*. aequiponderat figurae fixae ex *b*. si $ac = cb$. ergo eidem figurae ex centro gravitatis suspensae. An sic potius[:] ut in figura *b*. data[,] fixa in *c*. fulcrum descendere vult, non possit, nisi linea recta elevet *e*. quae repraesentet centrobarycam. Sed nec hoc placet.

9_2. PLAGULA SECUNDA



[*Fig. 1*]

Esto fulcrum *ab*. super quo aequiponderent arcus aequales et similes *acb*. *adb*. Ex punctis arcus *acb*. erigantur distantiae eorum a fulcro habebimus isostaticam[,] sic enim appellare placet arcus *acb*. scilicet superficiem cylindricam truncatam super eo erectam[,] intelligatur arcus *acb*. in rectam extendi, eique applicari sinus, ita ut basis seu linea media

4 *Hinter* suspensae:

9 habebimus *(1)* centrobarycam arcus acb. ex fulcro dato *(2)* isostaticam *L* 11 basis *(1)* sinus dimi *(2)* applicata arcui quadrantis sit radius *(3)* seu *L*

sit radius. Manifestum est figuram sinuum, de qua extat tractatus P. Fabry esse ipsam arcus isostaticam. Haec iam figura sinuum constituatur horizonti perpendicularis, et fulcro ita *aiegf*. applicetur, ut ab eo distet minimo, seu linea minore quavis data, necesse est eam aequiponderare tunc arcui *adb*. nec miretur quisquam lineam aequiponderare figurae, quia scilicet et distantia lineae infinities maior quam figurae. Iam arcus *adb*. ponderat velut ex centro suo gravitatis quod ponatur esse *k*. Ergo si ducatur arcus *adb*. in distantiam centri sui gravitatis a fulcro *k*. nempe *nk*. superficies producta quae erit curva cylindrica (cui circulus aequalis dari potest) aequabitur figurae sinuum. Iam figura sinuum semicirculi aequatur ut ait P. Fabry quadrato radii duplicato, hinc intelligi potest quomodo ex supposita quadratura circuli centrum gravitatis arcus *adb*. haberi possit (distat ut mox dicam a centro [*n*]. semicirculo per diametrum diviso seu arcu quadrantis).

Regula generalis: figura isostatica data aequatur datae in distantiam centri gravitatis a fulcro ducto. Nam idem intelligi potest verum esse, etsi superficies non linea seu arcus assumtus fuisset.

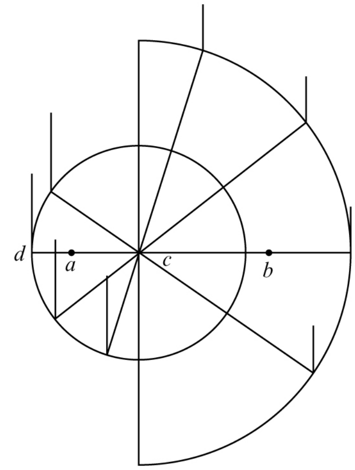
---

12 Figura isostatica, idem quod m o m e n t u m .

2 f. fulcro | (producto imaginatione) *gestr.* | ita | aiegf. *erg.* | applicetur *L* 11 (distat ... centro | k. *ändert Hrsg.* | semicirculi ... seu | dimidio *streicht Hrsg.* | arcu quadrantis) *erg. L*

---

1 tractatus: *Opusculum geometricum*, 1659, bzw. der fast unveränderte Wiederabdruck in der *Synopsis geometrica*, 1669, S. 313–411. 9 ait P. Fabry: s. insbesondere *Synopsis geometrica*, 1669, S. 77. In Leibniz' Handexemplar finden sich sowohl dort wie bei der zugehörigen Figur Marginalien — s. dazu auch N. 1. 11 distat: Leibniz vertauscht hier Zähler und Nenner.



[*Fig. 2*]

Hinc si figura quaedam secetur recta per centrum gravitatis eius ducta, una quaedam portio in distantiam centri gravitatis huius portionis a centro gravitatis totius ducta, aequatur suae isostaticae, sed ita factae ut basis eius in semicircularem aequalem transformata, eique distantiae illae punctorum a centro gravitatis superpositae intelligantur[;] ita quia hic non videtur opus centro gravitatis portionis, aequiponderat (non aequatur tamen) si ipsa data ex altera parte in radium huius circuli ducta intelligatur. Radius autem circuli huius determinatur eo, quia necesse est deflecti in semicirculum. Sed est in his aliquid dubitationis, cur enim necesse est in semicirculum deflecti? Imo recte puto, ideo ut determinari possit, quantum a minimo absit. Et est semper eadem quantitas superficiei curvae cylindricae vel quasi, utcunque eam flectas. Iam centris gravitatis utrinque repertis superficierum cylindricarum alterius integrae cuius centrum $\underline{b}$. alterius truncatae cui radii scilicet applicati sunt, figurae istae adhuc aequiponderabunt, ac proinde erunt ut distantiae centrorum gravitatis novorum a priore illo centro totius $\underline{c}$. sc. ut $\underline{ac}$. ad $\underline{cb}$. Ergo si utraque dividatur per radium $\underline{cd}$. prodibit illic arcus ille initio datus cuius isostaticam quaesivimus; ab altera parte isostatica per radium divisa, et haec erunt ut duae istae distantiae a centro gravitatis dicto. Universalissimae sunt hae propositiones et subtilissimae.

4 isostaticae, *(1)* et per consequens *(a)* isostatica *(b)* centrobaryca *(2)* sed *(a)* in circulum ita deflexae *(b)* ita *L*

Porro quod supra dixi de linea sinuum potest transferri ad omnes lineas applicatarum, ut sunt applicatae quoque parabolae. Hinc intelligi potest dato nobis curvae parabolicae centro gravitatis, datum iri, eius longitudinem vel contra. Hinc cum habeamus pure centrum gravitatis curvae cycloeidalis eiusque curvae aequalem rectam, habebimus eius superficiei cylindricae truncatae aequalem figuram rectilineam, seu aequale rectangulum. Ergo rectangulum aequale figurae applicatarum eius. At figura applicatarum eius est ad ipsam cycloeidalem, ut curva cycloeidalis ad altitudinem eius. At haec ratio datur, igitur. Si quadrari potest linea applicatarum cycloeidis, etiam quadrata erit cycloeis. Quadrata autem cycloeide quadratus erit circulus. Quare si omnia ista vera essent, maxime illud de ratione figurae applicatarum ad figuram ipsam, haberemus quadraturam. Consideratio linearum applicatarum, ubi eadem videntur producere diversum, illustrare potest quae Galilaeus de rarefactione cum ostendit punctum sed quod reapse conus est minor quolibet dato esse ingenti circumferentiae circuli, infinitae 0. aequale

Si centrum gravitatis paraboloeidis curvae rectificatae haberi potest, etiam ipsa figura eius paraboloeidis poterit quadrari.

Si in figura quadam quadrabili ut parabola detur centrum gravitatis curvae, dabitur recta curvae aequalis. Quod ita ostendo. Esto altitudo figurae curvilineae quadrabilis a. eius summa seu area b^2. distantia centri gravitatis curvae ab altitudine seu axe, quam notam pono c. quantitas curvae esto x. Quaeramus figuram applicatarum[,] ea ita est ad figuram ipsam, ut curva eius ad axem, erit ergo $\dfrac{b^2x}{a}$. At eadem figura applicatarum est xc. Sed ita non perveniemus ad aequationem, cum utrobique possit deleri x. Ergo ostendetur $c = \dfrac{b^2}{a}$. Ergo habebimus aliud theorema[:] distantiam centri gravitatis curvae a vertice aequari areae eius per axem divisae seu rectangulum sub axe et distantia centri gravitatis eius ab axe aequari areae curvae. Hinc omnium curvarum, quarum figurae quadrari possunt, reperiri potest centrum gravitatis. Et contra quarum curvarum habetur

---

17 *Über* recta curvae aequalis: Male

24–106,1 *Zu* Hinc omnium ... quadrari possunt, *am Rande:*

---

12 Galilaeus de rarefactione: *Discorsi*, 1638, S. 28–30 (*GO* VIII S. 74 f.) — s. dazu auch Leibniz' Exzerpt, *LSB* VI,3 N. 11_2 S. 167.

centrum gravitatis, earum figurae quadrari possunt, hinc rursus cycloeidis quadratura sequitur.

Porro hinc inveniri potest quam rationem habeant distantiae centrorum gravitatis diversarum curvarum, quando tum axium, tum arearum ratio habetur, erunt enim distantiae centrorum in ratione composita, ut arcus semicirculi ad arcum semiellipseos. Hinc si accedant Guldiniana de via centri gravitatis dabitur ratio superficiei sphaeroeidis lati ad superficiem sphaeroeidis compressi, quo posito si vera sunt Hugeniana de his superficiebus, data quadratura circuli vel ellipseos datur quadratura hyperbolae aut curvae parabolicae et vicissim. Ait enim Guldinus fieri ex curva in viam centri gravitatis ducta. Iam cum detur ratio sphaeroeidum ad sphaeras vel circulorum ad ellipses, dabitur et ratio distantiarum centrorum gravitatis ab axibus. Ergo erunt superficies sphaeroeides ad superficiem sphaerae in composita distantiarum centrorum grav. et arcuum generantium. Iam arcus generantes sphaeroeidem latam et compressam sunt aequales, ergo earum superficies sunt ut distantiae centrorum ab axi. Quarum ratio datur, dabitur ergo et ratio superficierum sphaeroeidis lati et compressi. Ex his iam datis dabitur ratio arcus circuli ad curvam parabolicam.

Videndum iam an eadem applicari ita possint, ut ex dato centro gravitatis figurae totius, inveniri possit area, vel contra, et per consequens ex uno horum, area, centrum areae, centrum curvae, reliqua. Caeterum hinc illud quoque intelligi potest curvas ipsas cognitas, nihil in hoc quidem loco seu quantum ex praesenti theoremate colligi potest ad caetera cognoscenda conferre, nisi et eorum centra gravitatis cognoscantur. Et vicissim ex omnibus caeteris non posse, ope huius quidem theorematis colligi curvas. Sed altera methodus ipsarum centra, et alia Guldini etc. forte aliquid conferunt. Caeterum haec omnia ex eo pendent[:] Figuram applicatarum esse ad ipsam figuram ut curva ad verticem, ut in linea sinuum. Hoc posito restabunt nobis tantum recta aequalis arcui elliptico, et curvae hyperbolicae. Quodsi etiam reperta quadratura constat ratio superficierum

26–107,1 ratio | superficierum *erg.* | sphaeroeidum | longorum ad sphaericas *erg.* |. Iam *L*

---

7 Hugeniana: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 74 f. (*HO* XVIII S. 213–215). Leibniz hat die Stelle hier nur flüchtig angesehen. Huygens unterscheidet zwischen einem sphaeroeides oblongum einerseits und einem sphaeroeides latum vel compressum andererseits. S. dazu auch Z. 25 f. 9 Ait enim Guldinus: *Centrobaryca* Bd II, 1640/41, S. 147.

sphaeroeidum longorum ad sphaericas. Iam tum habebitur et ratio ellipticae ad circularem seu rectam, ut adeo sola curva hyperbolica sit superfutura.

Quodsi alia arte dato centro curvae recta ei aequalis haberi potest, cum posita hyperbolae quadratura detur centrum curvae eius, tunc et recta eius curvae aequalis habebitur. Sed omnia haec ex hypothesi.

Si hactenus ratiocinata vera sunt habemus centrum gravitatis superficiei hemisphaerii, imo et quadrantis hemisphaerii. Nam altitudo hemisphaerii basi perpendiculariter erecta ad horizontem est circulus, eo dividatur area hemisphaerii, prodibunt $\frac{2}{3}$ radii. His ergo distat centrum gravitatis superficiei hemisphaerii a basi. Etiam quadrantis hemisphaerii, distabit enim $\frac{2}{3}$ partibus radii (divisa scilicet area quadrantis hemisphaerii per basin, quadrantem semicirculi). Hinc centra gravitatis hemisphaerii et duorum quadrantium hemisphaerii sunt in eadem recta. Hinc videntur et dari posse centra gravitatis omnium superficierum segmentorum, distabunt nimirum a basi tertia parte sinus versi, sed non semisegmentorum, distabunt enim a basi tertia parte sinus versi, sed non scimus qua parte sinus recti distent ab altitudine seu sinu verso. Hinc et centrum gravitatis superficiei coni determinari potest distare a basi $\frac{1}{3}$ altitudinis, ideoque absolute habetur. At superficiei semiconi non habetur, etsi enim detur distantia eius a basi semiconi, quia datur ratio semiconi ad semicirculum, non tamen datur distantia ab altitudine coni seu triangulo, nisi supposita ratione areae coni ad triangulum generans, quae vero ratio cognosci non potest, nisi simul et quadratura circuli habeatur.

Cum detur quadratura parabolae, dabitur quoque centrum gravitatis curvae parabolicae, nimirum distabit a basi $\frac{2}{3}$ axis. Iam datur superficiei conoeidis aequalis circulus per inventa Hugenii. Et per inventa Guldini superficies conoeidis parabolici fit ex ductu

---

21 f. *Zu* Cum detur ... $\frac{2}{3}$ axis: Error

7 hemisphaerii | est *streicht Hrsg.* | *(1)* quadrans *(2)* semicirculus *(3)* circulus *(4)* semicirculus *(5)* basi *L*

---

23 inventa Hugenii: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 73 f. (*HO* XVIII S. 213).

curvae parabolicae generantis in viam sui centri gravitatis seu ex rectangulo sub circuli circumferentia (cuius radius est distantia centri ab axe) et curva parabolica. Ponatur circuli circumferentia esse z. curva parabolica esse x. erit superficies conoeidis zx. At vero eadem est aequalis circulo cuius radius datur a. ergo eius circumferentiae ratio dabitur ad z. ea ratio esto β. Ergo $zx = \dfrac{za}{\beta}$. ergo $x = \dfrac{a}{\beta}$. Curvae ergo semiparabolicae dabitur ratio ad rectam, si scilicet ex praedictis eius centrum gravitatis detur. Nimirum non tantum centrum gravitatis datur curvae parabolicae, sed et curvae semiparabolicae.

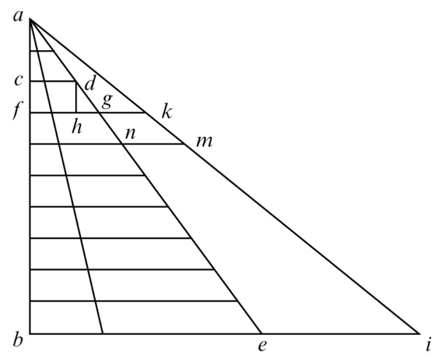
Hinc iam habemus et quadraturam hyperbolae ex istis scilicet positis; habebimus etiam superficiei fusi parabolici aequalem circulum. Posita iam hyperbolae quadratura facile cum Hugenio inveniemus superficiei conoeidis hyperbolici aequalem circulum. Hinc iam porro habebimus curvae hyperbolicae aequalem rectam, quia data hyperbolae quadratura habemus eius curvae centrum gravitatis, ergo et viam centri gravitatis curvae rotatae, ergo rectangulum sub circumferentia circuli et curva hyperbolica, aequale rectangulo sub circumferentia circuli et recta quadam cognita, ergo curvae hyperbolicae rectam cognitam aequalem.

Hinc etiam facile invenientur superficies conoeidis cycloeidalis, et conoeidis figurae sinuum. Illa quidem supposita, haec ne supposita quidem circuli quadratura. Imo utrobique eam supponi necesse est.

Hinc iam videtur sequi quae figurae quadrari possunt, quarumque per consequens datur centrum gravitatis curvarum, in iis dari curvis aequales rectas, supposita circuli quadratura. Nam superficies [curva] fit ex linea curva et arcu circuli, per consequens posita quadratura, ex linea curva et recta cognita. Iam videtur area solidi superficie curva contenti produci posse ex superficie curva et replicata. Dubito tamen, imo id erroneum. Credo id ergo omittendum est.

17 f. Imo *(1)* contra, fusi sinuum haberi *(2)* utrobique *L*   21 curvae *L ändert Hrsg.*

8 quadraturam hyperbolae ex istis: Vgl. dazu Huygens, *a. a. O.*, S. 77 (*HO* XVIII S. 219).
10 cum Hugenio: *a. a. O.*, S. 75–77 (*HO* XVIII S. 215–219).



[*Fig. 3*]

Si sit figura quaevis *abe*. in qua ad axem *ab*. applicatae *cd*. *be*. etc. sunt perpendiculares[;] eaedemque applicatae in terminationem earum *ae*. ducantur[,] producetur figura quam vocare liceat lineam applicatarum, quae erit ad datam *abe*. ut *ae*. ad *ab*. Huius exemplum est linea sinuum a Fabrio considerata. Hinc si omnes illae *cd*. *be*. ita circumagi intelligantur ut ex obliquis ad *ae*. fiant perpendiculares, manifestum est productum maius quam ante fore. Unde sequitur ex eodem fieri maius modo minus. Sed ratio huius rei est quia nunquam figura dividitur in lineas, semper in trapezia tantum; trapezia autem ista intelligantur minora quolibet dato, quo facto patet trapezium *cdfg*. si recta *cf*. et chorda *dg*. intelligantur minores quibuslibet rectis datis a rectangulo *cfdh*. non differre nisi puncto, et si omnia ista puncta in tota figura negligantur, non nisi lineam negligi. Ergo censeatur trapezium *cfdg*. aequale rectangulo *cdf*. vel *cfg*. vel potius utrique, seu *cd*. *fg*. censeantur aequales quantum ad huius rectanguli productionem. Ergo rectangulum *cf*. ductae in *fg*. ad rectangulum *dg*. ductae in *fg*. est ut *cf*. ad *dg*. Hinc si semper eadem esset ratio chordae ad altitudinem seu [*dg*. ad *cf*.] demonstrata esset propositio.

Sed ut huic quoque defectui mederi tentemus ita procedendum est: *ae*. etiamsi curva sit deflexa in rectam, et applicatae prioris antea obliquae ipsi, nunc ipsi quoque rectae intelligantur. Dividatur huius lineae applicatarum altitudo seu *ae*. recta vel in rectam

5 a *(1)* Cartesio *(2)* Fabrio *L* 15 cf. ad dg. *L ändert Hrsg.*

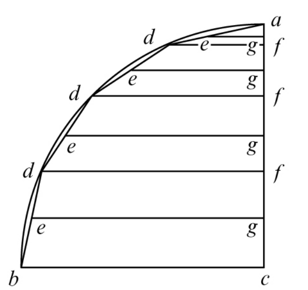
---

5 a Fabrio considerata: s. o. Erl. zu S. 103 Z. 9.

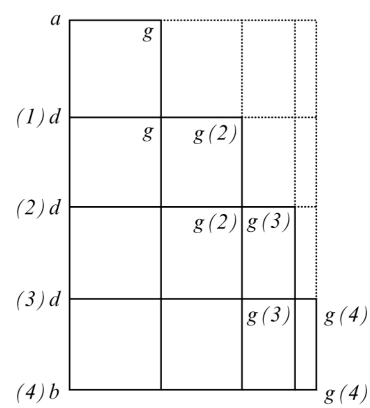
extensa in quotcunque partes aequales, *ab*. in totidem. Eaeque partes intelligantur esse minores qualibet assignabili, erunt rectangula singula ad singula in composita altitudinum et basium. Sunt autem altitudines semper eaedem, et quidem ut figurae, at basium ratio continue variat. Ergo nondum sufficiens remedio malum.

Ergo aliter et sic quidem procedatur[:] sumatur in ipsa figura applicatarum radius pro altitudine, deflexa pro basi, et aequisecetur radius seu altitudo, tam in figura applicatarum, quam in figura data. Et sit *bi* = *ae*. extensae[;] manifestum est, cum sint duo triangula eiusdem basis [,] fore ut altitudines[,] nam ut *be*. ad *ei*. ita *fg*. ad *gk*.
Obi.[:] sed ista vera forent, si duae illae figurae essent triangula.
Respondeo[:] etsi non sint triangula, seu etsi *ae*. et *ai*. non sint rectae, sunt tamen figurae homogeneae, id est ut est *be*. ad *ei*. ita est *fg*. ad *gk*.

Hoc probandum. An sic probari potest. Omnes applicatae utriusque figurae sunt sinus crescunt ergo utrobique ut sinus, ergo figurae sunt homogeneae, cumque sint eiusdem basis, erunt ut altitudines. Sed opus est methodo exactiore et plane convincente.



[*Fig. 4a, Blindzeichnung*]



[*Fig. 4b*]

15 *Zu Fig. 4b:* = distantiae centri gravitatis arcus quadrantis ab axe, ductae in arcum quadrantis.

15 [*Fig. 4*]: Beim Übergang von der linken zur rechten Seite der Figur hat Leibniz die Bezeichnungen f und g vertauscht. Im folgenden Text bezeichnet Leibniz die Punkte der Figur zur Unterscheidung von den Rechengrößen mit Großbuchstaben.

	$gg(2)$		$g(2)g(3)$		$g(3)g(4)$		etc.					
Iam si sint	z	$+$	x	$+$	u	$+$	t		$=$	$a.$		
ducenda in b. ita :	zb	$+$	$2xb$	$+$	$3ub$	$+$	$4tb$	etc.	$=$	?	[=]	$x.$

Hoc x. si detrahatur rectangulo sub AB et BG. habebitur residuum figura sinuum. Cum autem b. sit punctum, ideo summa linearum: $gg(2) \frown 1 + g(2)g(3) \frown 2 + g(3)g(4) \frown 3$ (ducta in b.) aequabitur differentiae inter rectangulum AGB et lineam applicatarum propositam. Ipsa linea applicatarum eodem modo composita intelligi potest ex iisdem terminis, sed inverso modo, ut quod in uno est ultimum et per maximum numerum multiplicandum in altero sit primum et per unitatem multiplicatur. Ponatur divisio non esse nisi in 4 partes erit haec dispositio[:]

	1	2	3	$\frown\ b.$	Fig. Applicat.
Rectang.	$g(3)g(4)$	$g(2)g(3)$	$gg(2)$		
	3	2	1	$\frown\ b.$	Resid.
Summa	rectang. tot.	$ABG(4)$			
	4	4	4	$\frown\ b.$	

Porro rectangulum istud totum si curva data ponatur arcus quadrantis aequabitur semicirculo.

Porro si in ad. vel dd. etc. non ducatur eg. sed totum $edgf$. idem utique prodibit, et erit recta, et erit $dg(2)$. rectang. ad $degf$ rectang. ut de. ad gf. Sunt autem de. semper eaedem, at fg. diminuuntur.

$DE = [AE]$ esto a.[,] fg. esto x.[,] EG vel $[DF]$ esto z.

Rectangula ita crescent in trilineo dato:

Trilin.	$\dfrac{x \frown z}{\alpha\ \ \aleph}$	$\dfrac{x \frown z}{\beta\ \ \beth}$	$\dfrac{x \frown z}{\gamma\ \ \gimel}$	etc.
Lin. applic.	$\dfrac{az}{\aleph}$	$\dfrac{az}{\beth}$	$\dfrac{az}{\gimel}$	etc.

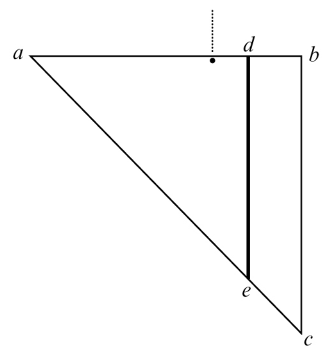
Rationes ergo rectangulorum correspondentium ita crescunt:

Ratio primi ad primum $\dfrac{x}{a\alpha}$. ratio secundi ad secundum $\dfrac{x}{a\beta}$. etc.

3 = *erg. Hrsg.* 21 *AD, DG L ändert Hrsg.* 22 f. dato: *(1)* $\begin{matrix} \mathrm{az} & \mathrm{az}\alpha & \mathrm{az}\beta & \mathrm{az}\gamma \\ \mathrm{az} & \frac{\mathrm{az}}{\delta} & \frac{\mathrm{az}}{\epsilon} & \frac{\mathrm{az}}{\vartheta} \end{matrix}$ | *In der oberen Zeile dann zuerst* $\mathrm{az}\alpha$ *in* $\frac{\mathrm{az}}{\alpha}$ *und danach* az *in* xz *verbessert.* | Imo z. et x. sunt = seu maximus utrobique n. est basis, sed non earum progressiones *(2)* Trilin. *L*

Figurae sinuum aequalem exhibuit Pascalius, *Ettonville traité des sinus*, prop. [1]. Et quidem ostendit esse aequalem quadrato radii. Quo posito haberi poterit centrum gravitatis arcus quadrantis, productum scilicet ex quadrato radii per arcum quadrantis diviso. Ponatur radius esse a. eius quadr. a^2. arcus quadrantis $\frac{x}{4}$. erit x. circumferentia et erit $\frac{4a^2}{x}$ = distantiae centri gravitatis ab axe et basi.

Invenimus figurae sinuum versorum aequale semper segmentum circuli, imo si quando omnes sinus versi summantur totum semicirculum. Unde summa omnium sinuum versorum aequalis summae omnium ordinatarum. Summa sinuum versorum est summa triangularis partium in quas secatur axis a sinubus ad axem. Summa simplex earum partium est ipse axis. Summa earum partium pyramidalis erit summa ipsorum segmentorum. Hinc aliae quoque summae colligentur iuxta tractatum Pascalii de his summis. Hinc illud sequitur elegantissimum, si primus sinus versus sumatur semel, 2^{dus} bis, tertius ter etc. idem plane produci, seu summam aequari segmento.



[*Fig. 5*]

1 Ettonville ... prop. | 4 *ändert Hrsg.* | *erg. L* 6–113,6 *Schlussabschnitte in anderem Duktus erg.*

---

1 exhibuit Pascalius: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 2, prop. 1. (*PO* IX S. 64). Auf diese Abhandlung bezieht sich Leibniz später Z. 11 noch einmal.

Sit iam [summa] partium in quas axis dividitur *abc*. Sit quasi bilanx *ab*. ex qua pendent pondera id est lineae illae seu sinus recti *bc*. *de*. etc. Quodsi iam reperiri posset punctum aequilibrii[,] brachium unum (a quo latere series triangularis incipit) ductum in summam partium aequabitur summae totorum seu triangulari, seu segmento. Hinc si illa partium ratio posset dari, daretur non tantum quadratura sed et sectio angulorum universalis res ⟨praestantior⟩ quadratura.

1 iam *(1)* summa *(2)* series *(a)* ista *(b)* seu *(c)* sinuum versorum *(3)* | summa *erg. Hrsg.* | partium *L*

10. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE ב
[Frühjahr 1673]

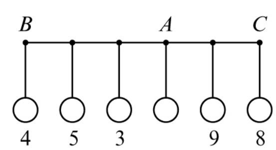
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XV 1 Bl. 18–23. 3 Bog. 2°. 12 S. Durchgehende Bogenmarkierung ב, weitere Bogenmarkierungen (2 Dettonville), (3 Dettonville), zusätzlich Kustode beim Übergang vom ersten zum zweiten Bogen (= S. 128 Z. 2). Durch Abknicken erzeugte ca 4-5 cm breite Randstreifen für Figuren, Anmerkungen und Ergänzungen. Abschabungen an den Rändern, rechte untere Ecke von Bl. 22 ausgerissen, dadurch geringfügiger Textverlust in S. 148 Z. 9. — Umfangreichere Ergänzungen werden jeweils als Anhang abgedruckt.
Teildruck: C. I. GERHARDT, *Leibniz und Pascal*. In: *Sitzungsberichte* der Kgl. Preuß. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 1891, S. 1053–1068. Engl. Übers. in J. M. CHILD, *The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz*, Chicago u. London 1920, S. 223–227 (= Z. 16 – S. 119 Z. 3 dieser Ausgabe).
Cc 2, Nr. 544

Datierungsgründe: s. N. 9.

10_1. PLAGULAE PRIMA ET SECUNDA

Ex Dettonvillaeo seu Pascalii Geometricis excerpta: Cum additamentis.

1	2	3	4
A	B	C	D
	B	C	D
		C	D
			D



[*Fig. 1*]

16 Cum additamentis. *in anderem Duktus erg. L*

16 Leibniz hat in Paris keine eigene Ausgabe der *Lettres* besessen und hat deshalb die folgenden ausführlichen Exzerpte angefertigt. Das hannoversche Exemplar ist erst später in seinen Besitz gekommen; es enthält keine Marginalien.
Nach Leibniz' Selbstzeugnissen hat er das Werk von Huygens geliehen bekommen. Er hat zunächst die *Lettre à Carcavi* gründlichst durchgearbeitet (N. 10_1). Dann hat er es noch einmal von Buot ausgeliehen

Si quantitates sint $A. B. C. D.$ summa eorum triangularis incipiendo ab $A.$ est $1A.$ $2B.$ $3C.$ $4D.$

Recta quacunque $BC.$ in partes aequales divisa quotcunque et ponderibus quibuscunque ex punctis divisionis suspensis, aequalibus vel inaequalibus, sumtoque eorum puncto aequilibrii $A.$ necesse est summam triangularem ponderum unius brachii $AB.$ aequari summae triangulari ponderum alterius brachii $AC.$ incipiendo summam triangularem utrobique a puncto interiore, seu a latere $A.$ Et ratio est, quia pondera gravant in composita ratione ex ratione ponderum, et distantiarum a centro. Distantiae autem, ob divisionem rectae seu iugi in partes aequales, crescunt ut 1. 2. 3. etc.

Haec Pascalius quibus ego adicio: etsi summae triangulares ab utroque puncti latere non sint eaedem, seu etsi duo brachia non sint in aequilibrio, fore tamen semper momenta ad se invicem ut summas triangulares. Semper enim momenta sunt summis triangularibus aequalia.

Hinc regulam longe generaliorem, si sit recta $BC.$ quaecunque in partes aequales divisa, ponderibus onerata quibuscunque ex punctis divisionis suspensis, puncto quolibet divisionis assumto, A, erunt momenta ponderum brachii $BA.$ unius ad momenta ponderum brachii alterius CA, ut summae triangulares incipiendo a pondere ipsi $A.$ proximo. Et cum figura qualibet, id est linea, superficie vel solido ita locata, ut recta aliqua in ea assumta sit horizonti parallela ista recta haberi potest pro libra, et omnia puncta aut rectae aut plana, punctis in recta assumtis horizontaliter supposita, seu in plana eorum punctorum horizonti perpendicularia, incidentia, possunt haberi pro ponderibus.

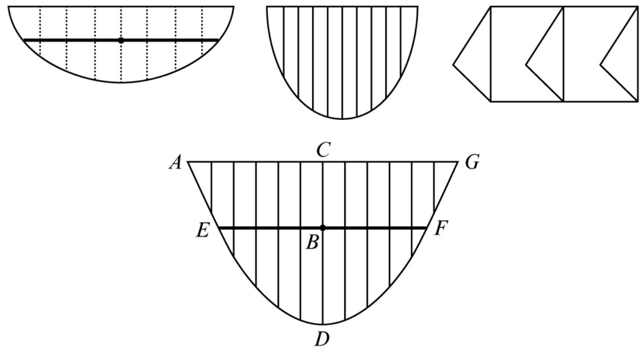
Hinc si constet nobis de horum ponderum quantitate seu progressione, et per consequens de eorum summa triangulari, hinc potest inveniri centrum aequilibrii non quidem in figura, attamen in recta figurae assumta. Centrum aequilibrii in ipsa figura eius est naturae, ut recta per id transiens secet figuram in duas partes ita ut utrinque summae triangulares punctorum, rectarum, solidorum horizontalium fiant aequales. Hinc centro gravitatis figurae totius reperto, centra gravitatis eiusmodi brachiorum extra figuram assumibilium haberi possunt.

---

und sich insbesondere den *Traité des sinus et des arcs de cercle* angesehen (N. 10_2). Dazu passt, dass N. 10_2 auf Papier mit anderem Wasserzeichen als das von N. 10_1 geschrieben ist.

Eine eingehende Beschreibung des Inhalts gibt MAHNKE, *Neue Einblicke*, 1926, S. 31–34.

1–13 S. *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 1 f. (*PO* VIII, S. 336 f.).



[*Fig. 2*]

Ponatur enim figura esse A. in qua centrum gravitatis B. ponatur horizonti parallela et centrum gravitatis eius super stylo horizontali locatum, vel ex filo suspensum intelligatur, manifestum est figuram foret in aequilibrio. At si in aequilibrio est, ergo recta CD. facta per centrum gravitatis eam figuram ita secabit ut summae utrinque triangulares sint aequales; si scilicet alia recta EF. priori CD. perpendicularis secta intelligatur in partes aequales infinitas per rectas infinitas ipsi CD. parallelas, summa triangularis rectangulorum infinitorum utrinque erit aequalis, quia ex praesuppositis ipsa EF. velut libra[,] rectangula velut pondera ex punctis divisionis suspensa iudicari possunt (unde patet pondera suspensa non necessario horizonti perpendicularia intelligi debere posse et esse parallela). His positis mutetur situs figurae ex horizontali in perpendicularem, fiatque libra AG. manifestum est punctum aequilibrii cadere in C. cum summae triangulares rectangulorum ab utroque latere sint ex hypothesi aequales. Ergo dato centro gravitatis figurae cuiusque librae, extra vel intra figuram assumtae, cui figura rigide affixa intelligitur, punctum aequilibrii haberi potest si modo perpendicularis ex centro gravitatis ad libram ducatur, ea libram in puncto aequilibrii secabit.

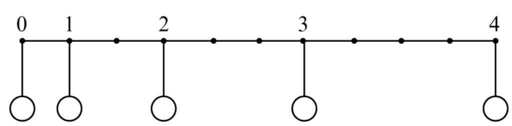
Contra si duarum librarum eiusdem figurae puncta aequilibrii dentur, inventum erit centrum gravitatis figurae (sive id sit extra sive intra figuram, cadit enim aliquando

9–11 possunt | , non est ergo necesse *gestr.* | (unde patet ... esse parallela) *erg.* |. His L 14 figura *(1)* suspensa *(2)* rigide L

1 [*Fig. 2*]: A bezeichnet sowohl einen Punkt wie die gesamte Figur.

centrum gravitatis intra figuram aliquando [extra] ut in annularibus, figuris, lineis curvis, aliisve incompletis) in puncto scilicet concursus duarum perpendicularium ex duabus illis libris ad easdem partes ductarum, in eodem plano, si figura sit plana, aut si duae illae librae sint in eodem plano, quod si vero duae librae non sint in eodem plano, opus est tribus. Hoc examinandum. Imo sic potius: affigatur figura primum uni librae, et planum librae et horizonti perpendicularem ex puncto aequilibrii demissum figuram secet, postea affigatur alteri librae, et rursus aliud planum demissum figuram secet, illorum duorum planorum intersectio dabit rectam, quae continebit centrum aequilibrii, quod si iam accedat tertia libra, seu tertium planum, punctum intersectionis omnium planorum, seu punctum quo tertium planum lineam inventam secat, erit centrum aequilibrii. Quod si autem figurae sunt planae, tunc sufficiunt duae librae, duaeque perpendiculares, ergo etiam si sint lineae curvae in eodem plano manentes.

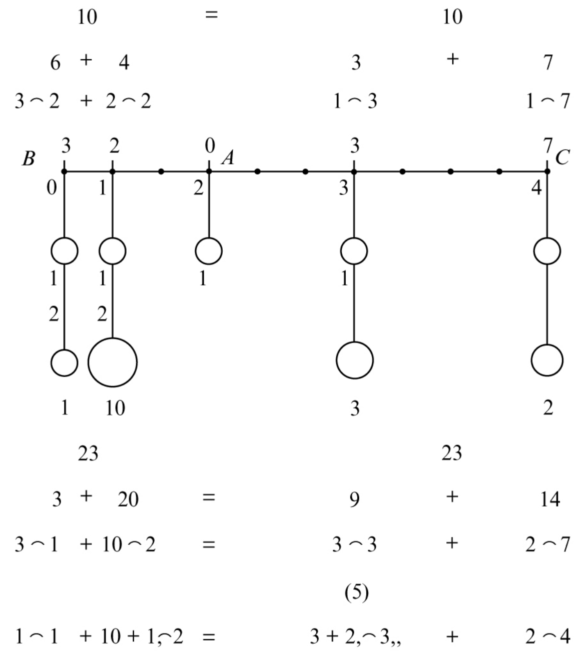
Iam operae pretium est quaedam annotare de iis casibus, in quibus libra non est secta in partes aequales, fieri enim potest ut habeamus certo quodam modo summas ponderum earumque progressiones, sed ita ut ea librae applicata, eam dividant in partes inaequales; tunc investiganda progressio partium in quas dividitur libra, ut si in partes continue crescentes ut quadrata, aliterve, dividatur. Ut ponamus pondera aequalia esse, libram autem dividi in partes crescentes ut 1. 2. 3. 4. etc.



[*Fig. 3*]

Sed ut rem regula complectamur ita procedendum est, ponatur punctum illud aequilibrii iam inventum, et esse per exemplum 2.

1 extra *erg. Hrsg.* 5 f. potius: |sufficiunt duae *gestr.*| *(1)* suspendat *(2)* affigatur ... et *(a)* perpendicularis *(b)* planum *L*



[*Fig. 4*]

Manifestum est a puncto illo 2. assumto velut centro, brachia fore numeris notanda et punctum 1. notandum numero 2. punctum 0. numero 3. ab altero latere punctum 3. numero 3. punctum 4. numero 7. Et iam ponderibus suppositis in suorum punctorum seu brachiorum numeros ductis necesse est productum fieri aequale, quod si non sit, aliud quaerendum est punctum (aut ponderibus aliquid addendum demendumve ut hoc loco si pondera 2. 3. ponantur duplicata seu loco 1. 1. ipsis subscriptum 2. 2. utrobique esset aequilibrium 10). Sed ne opus sit ire per omnia puncta compendium quaerendum esset; quod si nullam certam progressionem servent partes librae, et pondera, compendium erit impossibile, at ubi certa quaedam progressio haberi potest, tunc compendium inveniri potest, quatenus progressio illa patitur. Sed magna pars difficultatis cessat quando omnia pondera appensa intelliguntur aequalia.

Imo inventa est regula generalis simplex Pascalianae reciproca[,] nimirum punctum tale assumendum est, ut summa triangularis numerorum utriusque lateris, semper incipiendo ab extremo usque ad medium sit aequalis,

$$\text{ut summa triangularis}\quad \begin{array}{ccc} 4 & 3 & (7) \\ & 3 & (3) \\ (4) & (6) & \end{array} \quad \text{deberet esse} \quad = \quad \begin{array}{ccc} 2 & 1 & (3). \\ & 1 & (1) \\ (2) & (2) & \end{array}$$

Quod si iam tam librae partes quam pondera ipsa sint inaequalia, rursus regula generalis haec est: Debere punctum librae eligi, ut summa rectangulorum factorum ex quolibet pondere in summam partium librae (ab extremo sumtarum) sibi superpositam seu inter punctum suum et assumtum interceptam, ducto, sit utrobique aequalis[,] ut

$$\begin{array}{ccccccc} 2 \frown 7 & + & 3 \frown 3 & = & 10 \frown 2 & + & 1 \frown 3 \\ 14 & + & 9 & & 20 & + & 3 \end{array}$$

Vel aliter, ut si summa ponderum omnium suppositi et sequentium versus librae extremitatem multiplicetur per numerum partis librae punctum suspensionis antecedentis versus librae medium; summa productorum utrobique sit aequalis.

Ita si punctum aequilibrii sit dictum 2. vel A. momentum ponderum brachii AC. ita inibimus quoque, hac methodo:

$3+2$. summa ponderum sequentium multiplicetur per 3. numerum partium aequalium partis librae inaequalis $A3$. habemus 15. Iam 2. summa ponderum sequentium (restat nullum hoc loco) multiplicetur per 4. numerum punctorum partis $3C$. antecedentis versus A. medium, habemus 8.

Eodem modo ab altero latere $10+1$. multiplicetur per 2. punctorum partis antecedentis, punctum ex quo suspensum pondus 10. habemus 22. et pondus 1. per 1. numerum punctorum partis antecedentis punctum ex quo suspensum pondus 1. nempe 1.

$$\begin{array}{rrl} \multicolumn{3}{l}{\text{Iam summa}} \\ 3+\ 2 & 2 & \\ 5 & 4 & \\ 15 & +\ 8 & = 23 \\ & & \ \ \| \\ 10+\ 1 & 1 & \\ 2 & 1 & \\ 22 & +\ 1 & = 23 \end{array}$$

Ex his intelligi potest, etsi punctum aliquod tale sit, ut non fiat aequilibrium, tamen eam esse rationem momentorum utrinque quae est horum productorum, et ita theorema generaliter concipiendum est.

7 rursus | facilis *gestr.* | regula L

1 regula … Pascalianae reciproca: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 2 (*PO* VIII, S. 336 f.).

Porro theorema Pascalii non est nisi casus huius simplicissimus, patet enim ex nostro summas ponderum duci in numeros partium librae, summam productorum dare momentum. At si numeri partium librae sint 1. summa productorum, erit summa summarum ponderum, seu summa ponderum triangularis. Patet autem ex nostro theoremate summam productorum ex quolibet pondere in summam partium librae antecedentium versus centrum aequari summae productorum ex summis ponderum, in numerum partis antecedentis versus centrum, imo, etsi aliud punctum assumatur loco centri, et utrobique eatur versus illud punctum. Id ergo necesse est pendere ex theoremate aliquo generali, quod tale est,

si sint duae series quaecunque,

ut 3. 4. item 3. 2. sibi suppositae $\begin{array}{l}3.\ 4.\ 0.\\ 3.\ 2.\ 0.\end{array}$

et summae partium ineantur,

$$\begin{array}{rrclrrrcl} \text{unius ab una parte} & 0+4+3 & = & 7 & \text{alterius ab altera parte} & 3 & 2 & 0 & = 5\\ & 4+3 & = & 7 & & & 2 & 0 & = 2\\ & 3 & = & 3 & & & & 0 & = 0 \end{array}$$

quae sibi ita subscribantur:

$$\begin{array}{ccccccccl} & & & & 3 & 7 & 7 & D & \text{summae}\\ & 9 & 14 & 0 & & \| & \| & & \\ & & & & 3 & 4 & 0 & A & \text{series}\\ 23 = & & & & 3 & 2 & 0 & B & \text{series altera}\\ & 15 & 8 & 0 & \| & \| & & & \\ & & & & 5 & 2 & 0 & C & \text{summae} \end{array}$$

atque eo situ servato, termini seriei unius A. in summas [C.] seriei alterius. B. et vicissim termini seriei posterioris B. in summas D. seriei prioris A. ducantur, productorum summae sunt aequales.

23 C. *erg. Hrsg.*

Id literis exprimamus,

sunto duae series quantitatum	$a.$	$b.$	$c.$	$d.$	F
et alia	$u.$	$x.$	$y.$	$z.$	G

ita ut numerus terminorum sit aequalis (quod fieri semper potest quando inaequalis, locis vacuis per zero vel cyphram suppletis), eaeque series sibi, ut libuerit, subscribantur (modo is subscriptionis ordo in iis quae mox dicemus servetur) vel coordinentur — aio si quantitates posterioris seriei G. v.g. $u.$ $x.$ $y.$ $z.$ ducantur in summas respondentes quantitatum prioris seriei [F.] continue diminutas[,] inde ab uno aliquo latere v.g. ab $\underline{a}$. ita ut primus posterioris ducatur in omnes terminos prioris, secundus posterioris in omnes prioris demto termino primo, tertius posterioris in omnes prioris demto primo et secundo etc.

$$\begin{array}{cccc|ccc|cc|c|c}
a. & b. & c. & d. & b. & c. & d. & c. & d. & d. & \\
 & & & u. & & & x. & & y. & z. & \\
\hline
au. & bu. & cu. & du. & bx. & cx. & dx. & cy. & dy. & dz. & H
\end{array}$$

seu si posterioris seriei G. primus ducatur in prioris seriei F. primum et omnes sequentes, secundus posterioris in secundum prioris et omnes sequentes, tertius posterioris in tertium prioris et omnes sequentes: et summa productorum appelletur H.

Iamque vicissim quantitates prioris seriei F. nempe $a.$ $b.$ $c.$ $d.$ ducantur in summas respondentes quantitatum seriei posterioris G. opposito modo, v.g. inde a latere z; diminutas, ita ut primus prioris seriei F. ducatur in primum terminum posterioris seriei G. secundus

---

1

$$\begin{array}{cccc}
3 & 2 & 0 & 0 \\
a & b & c & d
\end{array}$$

8 F. *erg. Hrsg.* 20 in *(1)* omnes terminos posterioris seriei G. secundus prioris in omnes posterioris demto ultimo, tertius prioris in omnes posterioris | demto ultimo et penultimo *streicht Hrsg.* |, quartus prioris in omnes posterioris demto ultimo penultimo et antepenultimo, et ita porro; et summa horum productorum appelletur I. aio duas istas productorum summas esse inter se aequales seu H = I. Nam:

$$\cancel{au}.\ \cancel{bu}.\ \cancel{cu}.\ \cancel{du}.\ |\ \cancel{bx}.\ \cancel{cx}.\ dx.\ |\ cy.\ dy.\ |\ dz. = \frac{\begin{array}{cccc} u.x.y.z. & u.x.y. & u.x. & u. \\ a. & b. & c. & d. \end{array}}{\cancel{ua}.\ xa.\ ya.\ za. | \cancel{ub}.\ \cancel{xb}.\ yb. | \cancel{uc}.\ \cancel{xc}. | \cancel{ud}.} = \mathrm{I}$$ *(2)* primum L

6–17 aio ... appelletur H.: In der folgenden Betrachtung verwendet Leibniz zuerst das Begriffspaar unus – alter, hat es dann aber deutlichkeitshalber durch prior – posterior ersetzt.

prioris in primum et secundum posterioris, tertius prioris in primum secundum et tertium posterioris, quartus prioris in primos quatuor posterioris, et ita porro; et summa horum productorum appelletur I. aio duas istas productorum summas esse inter se aequales seu $H = I$. Nam:

$$\begin{array}{l} \\ \\ \cancel{au}.\ \cancel{bu}.\ \cancel{cu}.\ \cancel{du}.|\cancel{bx}.\ \cancel{cx}.\ \cancel{dx}.|\cancel{cy}.\cancel{dy}.|\cancel{dz}. = \end{array}\begin{array}{c|c|c|c} u. & u.x. & u.x.y. & u.x.y.z. \\ a. & b. & c. & d. \\ \hline \cancel{ua}. & \cancel{ub}.\cancel{xb}. & \cancel{uc}.\cancel{xc}.\cancel{yc}. & \cancel{ud}.\cancel{xd}.\cancel{yd}.\cancel{zd}. \end{array}\begin{array}{l} \\ \\ \Big| = I \end{array}$$

Demonstratio manifesta est, quia prima series summae factorum H. coincidit primis terminis serierum, summae factorum I. secunda series terminis primis serierum residuarum, post praecedentes abiectos, tertia series rursus primis serierum residuarum, quarta rursus primis residuarum, donec nihil restet, qualibet autem subductione unius seriei magnae H. ex seriebus in I. una series in I. evanescit, et idem est numerus serierum utrobique. Breviter: si series duae eundem numerum terminorum habentes sibi ut libuerit coordinentur, ac termini unius seriei ducantur in summas terminorum alterius seriei, unusquisque prioris in summam ex termino posterioris sibi respondente[,] omnibusque, eum sequentibus conflatam; vicissim vero termini posterioris seriei ducantur in summas terminorum prioris seriei, opposito modo assumtas, unusquisque scilicet posterioris seriei in summam ex termino prioris sibi respondente, omnibusque eum antecedentibus conflatam; summae productorum multiplicationis unius, sunt summis productorum multiplicationis alterius aequales.

Tentari posset quomodo theorema tale constitui debeat assumtis pluribus seriebus. Tentari potest etiam quid futurum sit si iidem utrobique sint termini, sed perturbato modo ordinati. Occurrere casus potest, ubi ista aequatio magnum usum praestet in geometria. Porro variis seriebus inter se iunctis punctum eiusmodi medium aequilibrii invenire ex calculi principiis res futura est pulcherrimae inquisitionis summique usus in geometria ad invenienda centra gravitatis. Vicissim ubi iam habentur centra gravitatis vel etiam saltem puncta librarum possunt infinitae inveniri aequationes, libris variis assumtis; et variae illae aequationes inter se collatae magnam afferre lucem possunt et aliquando nova theoremata seu figurarum incognitarum dimensiones aperire.

26 f. vel etiam ... librarum *erg. L*

Porro Pascalius ex eo lemmate, quod libra in aequales partes divisa summae triangulares ponderum ab utroque latere suspensorum, incipiendo ubique ab extremo, brachii, sint aequales, deducit tres propositiones, quarum fundamentalis haec est:
Summa triangularis omnium ponderum aequatur summae simplici omnium [ponderum multiplicatae] in numerum punctorum brachii, a cuius latere summa triangularis iniri coepta est[,] unde sequitur summam omnium ponderum ductam in numerum omnium punctorum librae, esse ad summam triangularem omnium ponderum ut numerus punctorum librae integrae ad numerum punctorum unius brachii, a quo coepta est summa triangularis, et si sint duae summae triangulares eorundem ponderum, a diversis lateribus coepta, ea fore inter se ut numeros punctorum brachiorum, a quibus sunt coepta. Sed propositionis fundamentalis non demonstrationem affert sed potius exemplum.

Hinc facile apparet, data libra dataque una summa triangulari, et area, dari alteram quoque, seu potius data saltem ratione summae triangularis ad aream, dari brachium unum librae. Ergo datur et alterum, quo in aream ducto, fit summa triangularis altera, seu brachium a quo incipit summa triangularis scilicet summa triangulari divisa per aream figurae.
Interim hanc inde consequentiam duco: sint ordinatae quaecunque ad aliquam rectam (sinus sunt ordinatae ad curvam in rectam extensam, aliaeque lineae aut plana orta in figura curvilinea cuius curva in partes aequales secta est), unde fiet quoddam trilineum, aio si in isto trilineo considerentur haec: axis (cui applicantur ordinatae), basis, area figurae, summa triangularis ordinatarum ad axem (vel huius loco punctum aequilibrii in axe), summa triangularis ordinatarum ad basin (vel huius loco punctum aequilibrii in basi), centrum gravitatis figurae, aio eam esse relationem harum rerum, ut unumquodque eorum detur, caeteris omnibus datis. Quod ita facile patet: data area figurae seu summa ordinatarum ad basin axemque (velut ponderum ad libram totam), dataque summa triangulari applicatarum ad axem, datur punctum aequilibrii in ipso axe, velut

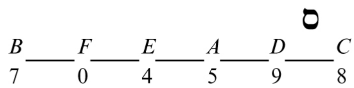
3 propositiones, *(1)* quas ego sic contraho in unam *(2)* quarum *L*   4 f. numerum multiplicatarum *L ändert Hrsg. nach Pascal*   12–16 Hinc facile ... aream figurae. *in anderem Duktus erg. L*   18 aut plana *erg. L*   26–124,1 velut *(1)* balance, *(2)* libra *L*

1–16 S. *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 2–6 (*PO* VIII, S. 336–343). Auf das Beweisverfahren Pascals kommt Leibniz S. 124 Z. 13 ff. zurück.   17–124,6 Zu Leibniz' Schlussfolgerungen vgl. insbesondere *a. a. O.*, S. 3–10 (*PO* VIII, S. 348–350); die Definition des Sinus steht *a. a. O.*, S. 11 (*PO* VIII, S. 354 f.) bzw. S. 19 (*PO* VIII, S. 369).

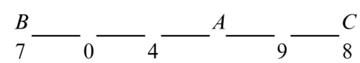
libra, datur enim ratio brachii a quo coepto summa triangularis ad libram totam seu axem totum. Idem in basi: vicissim si dentur iam puncta aequilibrii dantur summae triangulares. Hinc uno dato centro gravitatis dataque area figurae, dantur omnes summae triangulares tam super axem quam super basin; vicissim data una summa triangulari, datoque centro gravitatis, datur area figurae. Quod manifestum est, quia semper datis duobus illis aequilibrii punctis datur centrum gravitatis, eorum intersectione.

Intellige haec de trilineo plano, nam si sit superficies curva, aut si sit solidum, opus est tribus punctis aequilibrii, vel tribus summis triangularibus ad habendum centrum gravitatis. In omnibus superficiebus quae bisecari semel possunt in duas partes similes et aequales non opus est nisi uno puncto aequilibrii ad habendum centrum gravitatis; et in omnibus f i g u r i s i n u n o p l a n o n o n m a n e n t i b u s quae bisecari possunt, non opus est nisi duobus.

Quod attinet demonstrationem propositionis fundamentalis, eam affert talem:



[*Fig. 5a*]



[*Fig. 5b*]

11 *Über* f i g u r i s: solidis *L*.

9 omnibus *(1)* figuris | planis *erg.* | *(2)* superficiebus *L* 9 f. bisecari | semel *erg.* | possunt | in duas ... aequales *erg.* | non *L*

14 [*Fig. 5a,b*]: Die Figuren sowie die beiden unmittelbar folgenden Schemata hat Leibniz im Wesentlichen aus Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 3 f. (*PO* VIII, S. 339–341) entnommen.

$$\left.\begin{array}{rllllllr} & & & M & & & & \\ & 7. & 0. & 4. & 5. & 9. & 8. & \\ & 7. & 0. & 4. & 5. & 9. & & \\ & 7. & 0. & 4. & 5. & & & \\ \hline K & & & & & & & K \\ & 7. & 0. & 4. & & & & \\ & 7. & 0. & & & & & \\ & 7. & & & & & & \end{array}\right\} = \begin{array}{llllllll} & & N & & & & & \\ 7. & 0. & 4. & 5. & 9. & 8.\,/ & L & \\ 7. & 0. & 4. & 5. & 9.\,/ & 8. & & \\ 7. & 0. & 4. & 5.\,/ & 9. & 8. & & \\ & & & L & & & & \end{array} \qquad \begin{array}{lcl} 7.0.4. & = & 9.8. \\ 7.0. & & 8. \\ 7 & & \end{array}$$

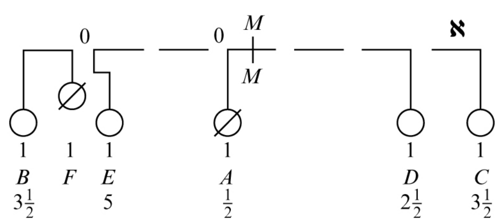
$$\begin{array}{rcl} 7.\,0.\,4. & = & 8.\,9. \\ 0.\,4. & & \,9. \\ 4. & & \end{array} \quad \text{falsum, sed sic} \quad \begin{array}{l} 7.\,0.\,4 \\ 7.\,0. \\ 7. \end{array} \quad \text{vel} \quad \begin{array}{rcl} \multicolumn{3}{c}{25 = 25} \\ \hline 4.\,0.\,7. & = & 9.\ \ 8. \\ 0.\,7. & & \ \ 8. \\ 7. & & \end{array}$$

Summa triangularis horum ponderum e libra BC. aequaliter secta cuius punctum aequilibrii A. suspensorum incipiendo a C. seu omittendo primum 8. postea 9. 8. postea 9. 8. 5. etc. aequatur summae eorundem ponderum simplici in brachium CA. ducto seu per numerum punctorum brachii $A.D.C.$ seu 3. multiplicatae. (Medium punctum A. simul computandum in finitis. Nam in infinitis nil refert an simul computetur, an non.) Nam summa triangularis ponderum brachii BA. seu $\begin{array}{l} 7.0.4. \\ \ \ 0.4. \\ \ \ \ \ 4. \end{array}$ aequatur alteri $\begin{array}{r} 9.8. \\ 8 \end{array}$ per theorema praecedens. Abscindatur hoc commune, utrobique per lineam K. et per lineam L. restat ut monstretur residua M. et N. post L. et K. abscissa esse aequalia, hoc Pascalius non demonstrat, quia scilicet id in schemate apparet, sed ostendendum ita semper eventurum in quolibet exemplo. Et ratio haec est, quia in ineunda omni summa triangulari primum aufertur ultimum, deinde ultimum et penultimum, continuando aufertur summa triangularis[,] semper summa triangularis ab eodem latere incipiens brachii cuiusdam a C. assumti, et ea quidem semper aequalis summae triangulari oppositi brachii si quidem id brachium sit brachium aequilibrii, seu quando punctum ad quod in generanda summa triangulari totius perventum est, est punctum aequilibrii. Porro si ultra pergetur in ea totius summa triangulari facienda non adicie-

25 f. penultimum, *(1)* aufertur ergo *irrtüml. nicht gestr.* *(2)* | in toto *erg.* | aufertur summa triangularis *(3)* continuando aufertur | tota *gestr.* | summa *L* 30 pergetur *(1)* residuum *(2)* in *L*

tur nisi summa triangularis oppositi brachii incipiendo ab eodem puncto aequilibrii, ea ergo aeque ac quod adiectum est omittatur, et quia non generatur id quod in summa triangulari totius restat, abiecta summa triangulari brachii oppositi nisi toties assumta summa simplici, quoties aliquis terminus oppositi brachii abici potest, tot autem abici possunt quot sunt, et quando ad punctum aequilibrii perventum est, nihil amplius brachii illius a quo inceptum, abicitur. Ideo id quod in summa triangulari totius restat abiecta summa triangulari brachii oppositi (seu potius nondum eum attingendo), id est toties sumta summa simplex quot sunt factae abiectiones, seu quod sunt termini abicibiles, id est quot sunt, et adhuc semel (nam prima vice nihil abicitur). Ergo sic concipiendum erat theorema Pascalium, ut monstrat demonstratio scilicet toties multiplicandam summam simplicem in numerum punctorum brachii a quo inceptum, addito uno, quod ut dissimulavit Pascalius centrum brachio illi computando, quod tamen computari debet neutri. Argumento id est claram eius rei demonstrationem tunc ei ob oculos non fuisse.

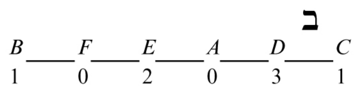
Sed operae pretium videtur nostrum quoque construere theorema, si libra divisa sit in partes inaequales, sint autem pondera aequalia. Eo casu manifestum est libram esse bisecandam; sed videtur tamen et aliud theorema construi posse. Bisecari [posse] quidem patet, si nullum intercedat 0. seu zero, at si hoc intercedat in effectu ibi pondera desinunt esse simplicia.



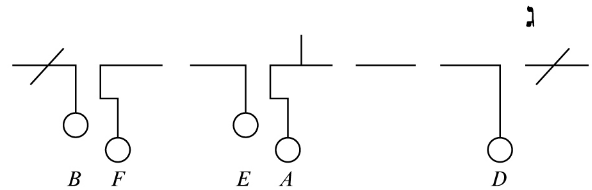
[*Fig. 6*]

16 f. posse. *(1)* Imo falsum est, bisecari posse, alio opus est theoremate; nam ut patet in fig. ℵ. *(2)* Bisecari | posse *erg. Hrsg.* | quidem | ita *gestr.* | patet *(a)* : esto sustentaculum in M. *(b)* , si *L*

19 [*Fig. 6*]: Leibniz hat nicht konsequent zu Ende gerechnet: anstelle von 5 müsste es $2\,\frac{1}{2}$ heißen, $\frac{1}{2}$ gehörte gestrichen. Die Figur wird dann stimmig. Das Versehen beeinflusst die Aussage in S. 128 Z. 1 f.



[*Fig. 7*]



[*Fig. 8*]

Quod elegantissimae est considerationis, nimirum cum antea ut in fig. ב libra BC. fuerit aequalium partium, pondera vero inaequalia 1. 0. 2. 0. 3. 1., rem nunc invertamus ut in א, ibique libram dividamus in partes inaequales 1. 0. 2. 0. 3. 1., pondera sunto aequalia; utque inversio procedat rectius uti semper pondus pertinebat ad partem librae sequentem in ב versus centrum ab utroque latere, ita nunc in ג faciamus librae partem pertinere ad pondus sequens versus centrum utrinque quo facto fiet, nulla alia mutatione, ut quemadmodum antea numerus ponderum superabat unitate numerum partium librae, ita nunc numerus partium librae superet numerum ponderum; sed quia inde duae extremae partes sunt vacuae omitti possunt calculo non variato, et ita rursus per consequentiam salvis inversionis legibus fit ut tamen numerus ponderum excedat numerum partium unitate. Iam notabile est, ut 0. repraesententur in partibus librae, in effectu idem esse ac si duo pondera quorum unum ex parte aliqua vera librae, alterum ex imaginaria seu zero suspenditur, reapse intelligi debeant suspensa ex puncto librae eodem, unde reapse eo casu falsum est librae pondera omnia esse aequalia, ideo eo casu non procedit bisectio, ut in exemplis א et ג apparet, me initio admirante, ante intellectam causam. Hinc observatio est mirabilis: casum ponderum inaequalium reduci posse ad casum ponderum aequalium, modo partes librae reddantur inaequales, id est ipsis interponi intelligantur zero, tot quoties pondus

---

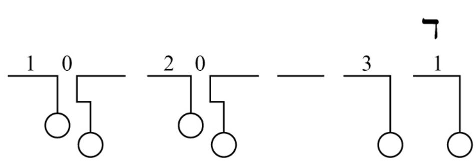
1 *Über* [*Fig. 8*]: imo aliter

5 pertinebat *(1)* ad brachium sequens *(2)* ad L

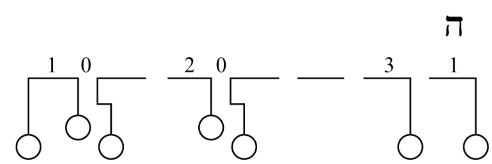
---

1 [*Fig. 7*]: Die Figur wiederholt Leibniz später in vollständigerer Form, s. S. 129 Z. 5 [*Fig. 11*]. 1–128,18 [*Fig. 8*]–[*Fig. 10*]: In [*Fig. 8*] vernachlässigt Leibniz zu Unrecht das Gewicht C. Das Versehen wird in [*Fig. 9*] korrigiert. [*Fig. 10*] wird korrekt, wenn man sich den Aufhängepunkt gegenüber den früheren Figuren um $\frac{1}{2}$ nach links verschoben denkt.

in pondere continetur, imo et dimidia zero, etc.; si sint fractiones, id est zero. Vicissim casum partium librae inaequalium reduci posse ad partium librae aequalium, eadem arte, si scilicet ubi partes librae sunt inaequales, redactis illis ad aequalitatem ubi partes librae iusto maiores sunt, pondera, quae zero sint, interponi intelligantur, seu aliquando cum fractiones sunt, ne opus sit quaerere minimas partes commensurabiles, sufficit pondera esse quasdam ipsius zero fractiones, aut rationes cum partes sunt incommensurabiles. Tandem cum utraeque sunt inaequales, reduci possunt, ad casum, in quo alterutrae sunt aequales, non, quo utraque. Quaerendus ergo est modus, quo resolvatur casus quando pondera quidem sunt aequalia, et partes librae inaequales, seu iis interponuntur zero. Hoc fieri duobus modis potest, partim hunc casum mutando in alium, quo partes librae fiunt aequales, pondera inaequalia, quo casu res reducitur ad puncti inventionem, cuius ab utroque latere summae triangulares sunt aequales, in quibus ineundis zero negligenda non sunt, zero autem hoc efficiunt in summa triangulari, ut quot sint zero, toties sequens summa sumenda sit, quodsi sit fractio de zero, vel ratio de zero, etiam fractio eiusmodi de summa sequente assumenda est, cuius demonstratio patet, si ad evitandas fractiones, in partes minores, ut omnia fiant commensurabilia (quando id fieri potest) partes divisae intelligantur.

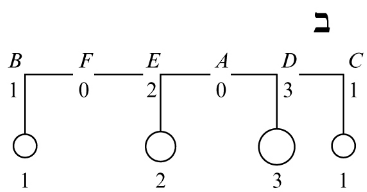


[*Fig. 9*]

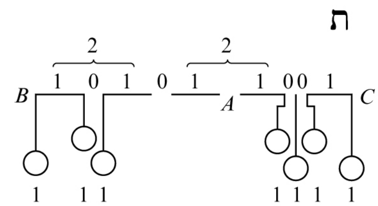


[*Fig. 10*]

Quaestio est an initio an fini partis pondus appendendum, vide ex ד et ה quam ista varient, ego malim ut ה suspendendo simul ab utroque latere, semper ad terminos partis a medio remotos ita ut habebamus ante in ב pondera 6. nempe 1. 0. 2. 0. 3. 1. ita nunc habemus tales quoque partes librae totidem, sed malum est quod pro 5. partibus librae aequalibus habemus 7. pondera aequalia — sed hoc evitari non poterat abiectis enim duobus ponderibus extremis abicientur eo ipso seu inutiles vel reicibiles fient (cum calculum non varient) partes librae extremae. Certum enim est in summis triangularibus ineundis zero initio et fine positum nihil variare, bene tamen in medio. Imo corrigo me non variat positum fine, variat positum initio, hinc interest a quo latere incipere velis. Sed cum ab utroque debeat incipi posse ne calculus varietur, hinc patet nullam esse rationem cur ut in ד ab altero tantum latere vacua librae portio relinquatur. Imo certum est in libra ista portiones quotcunque sub fine adiectas nil ad rem pertinere. Sed ut dubitatione ista solide exeamus, veram rigorosamque instituamus conversionem methodo paulo ante demonstrata.



[*Fig. 11*]



[*Fig. 12*]

Casus datus est ב, hunc casum transformemus in casum ponderum aequalium, partium librae inaequalium. Habemus 1. 2. 3. 1. fient unitates 7. abiectis zero ponderum et ex ב fiet ת, seu ex 1. 1. 1. 1. 1. partibus librae aequalia et 1. 0. 2. 0. 3. 1. ponderibus fient 2. 0. 2. 0. 0. 1. partes librae et 1. 1. 1. 1. 1. 1. 1. pondera aequalia. Aequilibrium quidem semper erit in A, sed quomodo id ostendemus non reducendo in casum partium librae aequalium, sumamus summam triangularem ipsarum partium librae, incipiendo unde libet v.g. a 2. fiet

$$\begin{array}{cccccc}
2. & 0. & 2. & 0. & 0. & 1. \\
 & 0. & 2. & 0. & 0. & 1 \\
 & & 2. & 0. & 0. & 1 \\
 & & & 0. & 0. & 1 \\
 & & & & 0. & 1 \\
 & & & & & 1 \\
\hline
2. & 0. & 6. & 0. & 0. & 6.
\end{array} = 14$$

---

5 *Zu den Figuren:*

2.	0.	1.	0.	3.	1.	Nulla hic aequalitas, aequalitas ergo summarum
	0.	1.		3.	1.	triangularium partium est in ponderibus incipi-
		1.			1.	endo ab extremis, in partibus librae a mediis.
						Omitte

Sed hanc summam summa simplex non metitur, quare non video [quomodo] eam producere possit, in aliud datum (nulla enim fractio data est[)], ducta. An ergo sic inquiremus: summa quaeratur triangularis numerorum partium cuiusque brachii, incipiendo ab extremo versus medium (contra quam in ponderum inquisitione).

Numeri unius brachii BA (fig. ת) sunt 2. 0. 1. quorum summa triangularis

$$\begin{array}{cccc} 2. & 0. & 1. & = 5 \\ & 0. & 1. & \\ & & 1. & \end{array}$$

alterius brachii AC numeri 1. 0. 0. 1 horum summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$

$$\begin{array}{ccccc} 1. & 0. & 0. & 1. & = 5 \\ & 0. & 0. & 1. & \\ & & 0. & 1. & \\ & & & 1. & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} 1. & 0. & 0. & 1. & = & 2. & 0. & 1. \\ 0. & 0. & 1. & & & 0. & 1. & \\ 0. & 1. & & & & 1. & & \\ 1. & & & & & & & \end{array}$$

Ut rectius iam fiat comparatio secundum 2. in 2. 0. 2. 0. 0. 1. resolvatur in duas unitates fiet 2. 0. 1. 1. 0. 0. 1. habebimus summam triangularem

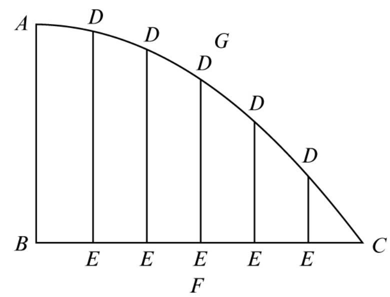
$$\begin{array}{cccc|cccc} & 2. & 0. & 1. & 1. & 0. & 0. & 1. \\ & (2.) & 0. & 1. & 1. & 0. & 0. & 1. \\ y & (2.) & (0.) & 1. & 1. & 0. & 0. & 1. \\ \cline{5-8} & & & & 1. & 0. & 0. & 1. \\ & & & & & 0. & 0. & 1. \\ & & & & x & & 0. & 1. \\ & & & & & & & 1. \end{array}$$

Hinc facile patet non produci summam totius triangularem aliqua summae simplicis multiplicatione, si enim infra x abiciatur[,] y supplendum eius loco ei non est aequale.

Hinc discimus duo alia notatu digna[:] primum aliam fieri summam triangularem, si terminus aliquis resolvatur in suas partes, alterum vero longe memorabilius nempe: Si ineatur summa triangularis seriei totius ab aliquo latere, et ineantur quoque series triangulares duarum partium totum complentium, ab interioribus, seu eodem puncto omittendo in-

1 quomodo *erg. Hrsg.*

cipientes, tunc eae duae summae triangulares partium inter se aequales a tota summa triangulari detractae relinquunt rectangulum factum ex numero punctorum terminorum eius partis unde coeptum est, et summa terminorum partis alterius 1. 0. 0. 1. ⌢ 3. quod applicari potest geometriae hoc modo.



[*Fig. 13*]

Esto spatium quodcunque divisum in partes quotcunque per ordinatas quasdam vel sinus, rectas scilicet (vel si solidum plana), applicabiles alicui in partes aequales diviso, sive rectae sive curvae, horum partium summae sunt figurae DEC. et omnium partium summa totum spatium, si rectae DE. sunt ordinatae seu si recta BC. punctis E. divisa est in partes aequales; sin minus et si curva ADC. punctis D. aequidivisa est, summa erit spatium curvae applicatum, ut constat. Iam considerandae sunt summae summarum, seu summae ipsarum figurarum DEC. mensurae applicatarum, seu summae ipsarum rectarum DE. triangulares. Ponatur summam triangularem omnium DE. esse inventam, ponatur et punctum aequilibrii notum esse F. ita ut ipsis DE. fulcro FD. impositis (si prius mensurae sint applicatae) fiat aequilibrium (futurum scilicet tunc punctum aequilibrii est revera in F. si DE. sint ordinatae, sin sint sinus verum punctum aequilibrii erit punctum curvae cuius sinus est FD. nempe G. sive curva in rectam extensa applicentur ipsae DE. sive ea curva manente ei impositae forment superficiem cylindricam

6 *Über* quotcunque: infinitas

15–132,1 Die Aussage in der Klammer trifft nur im linearen Fall zu.

truncatam), notae ergo sunt summae triangulares ipsarum FG. DE. etc. incipiendo a C. similiter nota summa triangularis ipsarum FD. DE. AB. incipiendo a AB.
Ratio est, quia data summa triangulari totius et centro gravitatis datur et partium, imo sine centro, data quoque summa simplici (ℑ). Ergo et summae triangulares earundem partium retro sumtae seu inde ab F. At si a summa triangulari omnium inde ab AB. detrahantur summae triangulares partiales inde ab F. residuum erit factum ex parte regulae, applicanda ad ABF, in summam simplicem alterius partis FDC.

Summa triangularis differt a summa rectangulari, summa opposita triangulari, ablato quodam in finito praecise in infinito.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \\ a & b & c & d \end{array}$$

Nam in finito assumenda summa triangularis inversa seriei termino ultimo differentis a data, at illa differentia in infinito nullius momenti.

Si summae istae triangulares FAD. fig. praeced. vel FGC. assumantur ab extremis, tunc duae triangulares istae partium sunt aequales, et una earum addita toti dabit summam simplicem multiplicatam in numerum partium brachii (seu partem regulae illis partibus applicandam) a quo coeptum, ut supra ostensum vid. fig. ᗡ.

Nunc cum Pascalio pergamus, ille ergo methodum ex his deducit universalem puncta aequilibrii (ipse vocat c e n t r a g r a v i t a t i s, cum sint tantum puncta aequilibrii certa quadam libra sumta) definiendi quae talis est, secetur figura infinitis planis inter

19 *Am Rande nochmals*: vid. fig. ᗡ

1 f. C. *(1)* omittendo ergo *(2)* similiter *L* 19 f. ostensum | vid. fig. ᗡ *erg.* Contra si a tota auferatur una triangularium (sunt enim ambae rectangulo isto auferatur brachii *(1)* oppositi *(2)* summa triangularis opposito modo, seu a medio assumta eiusdem brachii a quo coeptum est omitti *gestr.* | Nunc *L* 21 aequilibrii | cuiuscunque lineae superficiei *gestr.* | (ipse *L*

4 (ℑ): vgl. dazu PASCAL, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 5 (*PO* VIII, S. 341 f.) sowie unten S. 133 Z. 12 f.
20 cum Pascalio pergamus: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 7 (*PO* VIII, S. 346).

se parallelis (perpendicularibus ad libram figurae datam[,] hoc enim addendum est, sin data non est, assumi potest quaelibet maxima, seu inter duo plana parallela extrema figuram secantia intercepta, planis secantibus perpendicularis)[,] ut est summa triangularis omnium partium figurae inter plana interceptarum, incipiendo ab uno latere librae ad summam triangularem omnium illarum partium incipiendo ab altero latere librae, ita est brachium illud ad hoc, seu distantia unius plani a centro, ut distantia alterius ab eodem. Idem aliter: summa triangularis sumta ab aliquo librae latere est ad summam simplicem toties quot sunt puncta in libra, seu summae in summam summarum seu triangularem ingredientes, sumtam, seu in libram ductam; uti brachium a quo coeptum est ad libram integram.
(Non annotavit Pascalius ad verum centrum gravitatis figurae inveniendum opus esse pluribus eiusmodi punctis aequilibrii, et minimum duobus in figuris planis.) Hinc data summa simplici, triangulari, libraque, dantur duo brachia, seu centrum aequilibrii. Hac methodo etiam arcuum summa triangularis inveniri potest non minus ac trilineorum, dato puncto aequilibrii, et data magnitudine simplici arcus etc.

Rationem cur summae istae vel numeri vocentur triangulares, pyramidales etc. hanc intelligo, quia si partes sint aequales, qui simplicissimus est casus formant triangulum, pyramidem etc. et semper crescunt eorum dimensiones, si figuris applicentur, ut in potestatibus.

---

13 f. Brevissime: Summa triangularis divisa per summam simplicem, dat brachium ab eo latere unde summa triangularis coepta est. Summa ergo $\bigtriangledown^{\text{laris}}$ aliunde invenienda, vel si ignoratur brachium aliunde inveniendum. Summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$ videtur inveniri posse multiplicando terminos per numeros naturales 1. 2. 3. etc.

Iam ad summas pyramidales: Sint quantitates [$a.\ b.\ c.$] earum summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$

$$\begin{array}{ccc} a. & b. & c. \\ & b. & c. \\ & & c. \end{array}$$

summa pyramidalis A. sumatur bis, et ab ea abscindatur semel summa triangularis B.

$$\begin{array}{c} B \end{array}\quad \left.\begin{array}{ccc} a. & b. & c. \\ & b. & c. \\ & & c. \\ \hline\hline & b. & c. \\ & & c. \\ \hline & & c. \end{array}\right\} A$$

$$\left.\begin{array}{ccc} \hline a. & b. & c. \\ & b. & c. \\ & & c. \\ \hline & b. & c. \\ & & c. \\ \hline & & c. \end{array}\right\} A$$

$$\begin{array}{ccc} \hline 1. & 4. & 9. \end{array}$$

summa residui aequabitur termino primo semel, 2^{do} quater, tertio novies, etc. ordine scilicet numerorum quadratorum deinceps ab unitate. Nam in omni summa pyramidali primus terminus assumitur semel, 2^{dus} 3. tertius 6. vicibus etc. per numeros quos vocant triangulares. NB. (Ergo numeri naturales deberent appellari triangulares, numeri triangulares deberent appellari pyramidales, etc.). At numeri isti triangulares, hoc habent ut duplicati diminutique exponente relinquant $\square^{\text{tum}}$ exponentis, hoc loco autem omnes triangulares, minuuntur suis exponentibus, quia a summa pyramidali seu triangularibus

22 *Zu* NB. *s. Anhang*.

1 A. B. C. *L ändert Hrsg.*

1 summas pyramidales: s. Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 15 (*PO* VIII, S. 362).

numeris omnibus, abicitur summa exponentium, seu numeri naturales (summa nimirum $\bigtriangledown^{\text{laris}}$ B.).

Nota bene. Numeri naturales ipsi non faciunt triangula, sed eorum summa facit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$, ita summa triangularium facit pyramidem. Et puto rem a summa non a numeris ipsis aestimandam, non enim 6. facit triangulum. Imo facit NB. Et ideo recte appellati sunt hi numeri communi more.

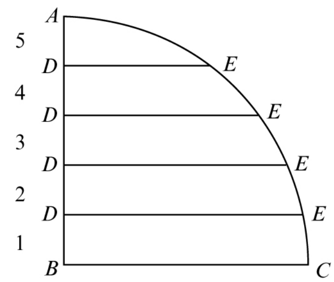
Nota quemadmodum in aequationibus Geometriae quando comparantur lineae cum superficiebus, vel superficies cum solidis, vel lineae cum solidis, necesse est dari unitatem (unde in numeris aequationes inter dimensiones diversorum graduum libere admittuntur), ita in Geometria indivisibilium, cum dicitur summam linearum aequari cuidam superficiei, vel summam superficierum cuidam solido, necesse est dari unitatem, dari scilicet lineam quandam cui applicatae intelligantur, seu in cuius partium infinitarum aequalium, unam, quae u n i t a t e m exhibet, ducantur, ut infinitae inde fiant superficies, etsi qualibet data minores. Ex infinitis autem superficiebus qualibet data minus latis, unam finitam fieri necesse est, ut ex lineis fiat solidum, infinities infinitis opus est lineis, quarum quaelibet in quadratum unitatis ducatur. Et ad quadrato-quadratum opus est lineis infinities $\frown$ infinities infinitis in cubum unitatis ductis et ita porro, vel superficiebus infinities infinitis ductis in quadratum unitatis. Res est consideratu digna infinities infinitum, tam in Arithmetica quam [in Geometria].

---

5 *Am Rande, gestrichen:* NB.

10 *Daneben am Rande, hervorgehoben*: NB.

14 f. latis | latis *streicht Hrsg.* |, unam L 19 Arithmetica L *ändert Hrsg.*

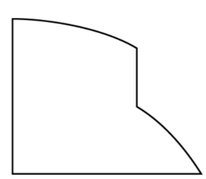


[*Fig. 14*]

In trilineo rectangulo ABC. axe AB. divisa in partes aequales indefinitas ductisque ex punctis divisionis, ordinatis AE. seu basi parallelis, summa ordinatarum est figura, summa summarum seu spatiorum BCA. DEA. etc. est summa ordinatarum triangularis. Ea sic inibitur, si quaelibet DE. per suam DB. seu distantiam a puncto unde incipitur multiplicetur summa omnium rectangulorum erit summa triangularis ordinatarum, quia ita prima per 1. altera per 2. tertia per 3. quarta per 4. etc. multiplicatur, at hoc modo producitur summa triangularis. Ergo summa omnium istorum rectangulorum est aequalis triangulari. Summa solidorum ex rectis DE. in $\square^{\text{ta}}$ suorum cuiusque DB. ductis est

---

2 *Zu* trilineo rectangulo:
NB. generali nomine trilinea ista appellanda rectangula.
NB. si figura habeat duo maxima latera recta angulum rectum facientia potest censeri trilineum ut[:]



6 *Zu* summa triangularis ordinatarum: ea est solidum.

2 rectangulo *erg. L* 12 habeat *(1)* duas maximas lineas rectas in ea divisibiles *(2)* duo maxima latera *(a)* rectilinea *(b)* recta *L*

aequalis summae pyramidali incipientis a B. dimidiatae. Nam summa pyramidalis duplicata aequatur terminis multiplicatis primo per 1. secundo per 4. tertio per 9. addita tantum semel summa triangulari, ut ostensum, at ea in infinito negligi potest, cum faciat planum, hic autem de solido quaestio sit, ergo absolute summa pyramidalis fit ex terminis multiplicatis ordine per numeros quadratos ordine. At 1. hoc loco est ipsa DB. minima vel ipsa AD. ergo quadrata horum DB. sunt 1. 4. 9. etc. per haec ergo multiplicandae ordinatae. Summa omnium horum solidorum facit plano-planum.

Utilis est annotatio Pascaliana neminem turbari debere plano-planis istis seu quartis dimensionibus, et altioribus, quia sumi possunt plana vel etiam rectae loco solidorum, quae sint inter se, ut ea solida, ita assumtis rectis quae sint invicem ut summae triangulares formantes summam pyramidalem, summa earum r e p r a e s e n t a b i t summam pyramidalem.

His ita suppositis venit Pascalius ad problemata de cycloeide: ea erant, si ADE. ponatur esse cycloeidis ABC. pars ordinata quadam DE. abscissa, invenire eius spatii dimensionem et centrum gravitatis; dimensionem et centrum gravitatis semisolidi circumductione per axem AD. geniti item circa basin DE. Item alia tria in Historia cycloeidis proposita: centrum gravitatis curvae AE. (potius eius punctum aequilibrii in AD. hoc enim puto intelligit, fortasse verum intelligit, scilicet punctum aequilibrii tam in AD.

---

8 *Zu* annotatio Pascaliana *s. Anhang.*

12 NB. Nota adhibenda talis methodus: Summa summarum sumatur pro summa terminorum simplicium, summa pyramidalis fiet triangularis et ita porro, et ea methodo nullis opus erit regulis separatis pro altioribus potestatibus, sufficiet regula $\bigtriangledown^{\text{larium}}$.

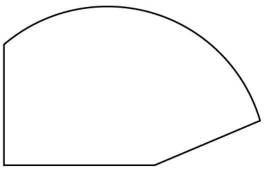
1 dimidiatae *erg. L* 1 f. duplicata *erg. L*

---

1 summa pyramidalis: s. Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 16 f. (*PO* VIII, S. 364–367). 8 annotatio Pascaliana: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 17 (*PO* VIII, S. 366 f.). 13 problemata de cycloeide: Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 18 (*PO* VIII, S. 367 f.). Von dort hat Leibniz den Hinweis in Z. 16 auf die *Histoire de la roulette* (*PO* VIII S. 195–209) übernommen. — Die Punktbezeichnungen beziehen sich auf [*Fig. 14*].

quam in DE.) quantitas, item centrum gravitatis superficiei semisolidi tam rotatione super axem, quam supra basin, generati.

Haec problemata ut solveret, accedit ad ungulas suas. Proponitque eiusmodi definitiones quas cum sint confusae ita distinguo. Trilineum rectangulum (malim dicere f i g u r a r e c t a n g u l a) est figura plana cuius duo sunt latera angulum rectum facientia.
(Adde, quod ab eo non observatum, eius magnitudinis, ut figura cadat in rectangulum sub ipsis, seu ut rectangulum sub ipsis sit figurae circumscriptum, alioquin enim si figura esset talis



[*Fig. 15*]

non foret rectangula, an malumus figuram talem appellare o r t h o g o n i a m , ne latina rectanguli vox nos confundat. — Idem ad solida transferri potest, quod factum a Pascalio non est [nisi fallor, videbo tamen in progressu], ut scilicet sit solidum trilineum constans duobus planis eiusmodi quorum parallelepipedo figura inscribitur. Nota idem intelligi potest, si istae rectae sint arcus circuli angulum rectum facientes, ut in sphaericis omnia enim quodammodo proportionaliter eodem modo produci possent. Nec sunt ista penitus negligenda.)
Ut resumamus ergo. Figura orthogonia est planum (vel solidum) cuius duo sunt latera (hedrae) angulum rectum facientia (quorum rectangulo inscripta est figura), et recta quaecunque ex uno latere ducta, alteri lateri parallela seu lateri ex quo ducitur perpendicularis, reliquam figurae circumferentiam non nisi in uno puncto attingit (ita tamen ut nullum sit punctum circumferentiae reliquae quod non a duabus rectis intra figuram

4 f. (malim ... r e c t a n g u l a) *erg. L* 13 *Eckige Klammern von Leibniz selbst gesetzt.*
21 circumferentiam | (quam mox vocabimus hypotenusam) *erg. u. gestr.* | non *L*

3 f. Proponitque ... definitiones: Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 18 f. (*PO* VIII, S. 368 f.).

cadentibus, una ab uno altera ab altero latere perpendiculariter eductis, attingatur. Hac postrema conditione, seu quod huic ultimae parenthesi inscriptum est, adiecta, potest negligi altera de circumscriptione intra rectangulum et vicissim. Pro solido rectae substitue planum.) Hoc modo accurata habetur figurae huius definitio. Nam circumscriptio rem non bene exprimit, nam si reliqua circumferentia constet multis lateribus, videri posset quodlibet tangi debere a circumscripto, potest ergo dici includi potius rectangulo, possum tamen et dicere inscribi, sed ipsa definitio inscriptionis ultra resolvatur, res huc denique redit.

Unam horum laterum rectilineorum vocat Pascalius axem, alterum basin, non satis congruum nomen axis, quia ad solidum, ubi plano opus est applicari non potest, planum enim non potest dici axis. Malim ergo altitudinem dicere, sed hoc quoque videtur exprimere lineam tantum. Posset ergo dici latus e r e c t u m vel e r e c t a , altera b a s i s . Nota discrimen in eo quoque est solidorum a planis, quod latus in planis ubique est aequalis latitudinis, est enim nullius, at in solidis fieri potest ut planum aliquod sit v.g. semicirculus, aut alia quaelibet curvilinea figura plana, cuius aliqua est basis rectilinea, qua alteri plano scilicet iungitur.

Nunc autem intelligendum est orthogonium solidum comprehendi debere non tantum parallelepipedo, quod dixi, sed potius portioni communi duorum prismatum se secantium, quorum alterius basis est latus erectum, alterius, latus horizontale seu basis orthogoniae datae. Hinc v.g. potest esse trilineum solidum, cuius latus erectum est semicirculus, vel segmentum circuli, aut semisegmentum, latus horizontale hyperbola, basi utriusque lateris existente eadem. Tales autem figuras credo a nemine hactenus consideratas, ne a Pascalio quidem, qui solida tantum ea consideravit (si ungulas demas), quae ex circumgyratione trilineorum planorum nascuntur.

Quod si iam ad figuras quoque orthogonias solidas extendatur contemplatio, absolutum est quicquid pene de dimetiendis figuris dici potest, si modo iis quae hactenus dicta sunt, de perpendicularibus ad latera, accedat tractatio de perpendicularibus ad tangentes reliquae circumferentiae productas, iisque vel ex uno puncto, vel una recta, etc. prodeuntibus. Id sic scilicet intelligendum est, considerationi sinuum, axium, basium,

---

26 Inquirendum est an haberi possit methodus bisecandi omnis generis curvas.

---

9 vocat Pascalius: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 18 (*PO* VIII, S. 368).

ordinatarum, applicatarum, addendam etiam sinuum versorum, nam ii habent aliquid affinitatis cum intervallis tangentium productarum.

Nota in omni figura quaerendum est per analysin, an assignari possit punctum, vel linea, vel alius locus, ex quo ductae rectae ad intervalla tangentium, aliarum atque aliarum, aliis atque aliis continue quoque in loco, punctis assumtis, sint aequales, hoc facto enim spatium compositum ex omnibus rectis ex loco ad curvam ductis erit aequale curvae in intervallum tangentium ductae, producto dimidiato in plano, tertia producti parte sumta in solido. Talis locus aliquando ut dixi est punctum, ut in circulo centrum. Puto autem analysi perfectiore determinari posse, quando in aliqua curva possibile sit locum esse punctum, vel lineam, etc.

Nota aliter nonnihil eloquendum, dicendum potius chordas esse producendas, et ex puncto illo a quo intervallum chordae productae quaeritur duas esse rectas ducendas ad chordae extremitatem, quae faciunt triangulum, horum triangulorum summa hoc pacto invenietur. Porro quando chordae figurae sunt assumtae inaequales, tunc necesse est intervalla chordarum productarum a loco, esse aequalia (nisi paucis casibus, quando chordarum illarum scilicet progressio quodammodo nota est, et progressio intervallorum quoque et potest ex Arithmetica infinitorum iniri summa rectangulorum, nequicquam obstante inaequalitate[)]. Sed quando chordae (seu arcus) assumtae sunt aequales, tunc omnia sunt faciliora, ibi enim nihil opus est, nisi curvae toti, seu summae chordarum in rectum extensae, applicari omnia illa intervalla[,] figura producta erit aequalis illi figurae, quae rectis inter extrema loci et arcus iungentibus comprehenditur.

Quod si iam istae figurae sint geometricae, seu per aequationes invenibiles, tunc ingentem ex ista inquisitione fructum capiemus, habebimus enim semper figuram quandam mixtilineam scilicet loco intervallorum, et curva data comprehensam, aequalem alteri cuidam figurae, ex recta (arcui figurae datae aequali), et applicatis ei intervallis, constanti. Hinc patebit quid Algebra iuncta Geometriae indivisibilium et Arithmeticae infinitorum possit. Cum habituri simus aequationes infinitarum figurarum geometricarum, heterogenearum inter se invicem, et ita simul, ut semper curvarum quantitas in aequationem ingrediatur. Unde saepe per alias accedentes aequationes poterit ipsarum curvarum comparatio reperiri vicissim inverso modo argumentandum. Exempli causa dato loco quodam intervallorum, v.g. puncto, recta, curva, etc. invenire locum chordarum, seu lineam, superficiem, etc. ubi intervallis positis aequalibus, vel talis naturae aut aequationis, chordae quoque sint talis naturae aut aequationis vel progressionis qualis postulatur. V.g. posito locum datum esse punctum, intervalla esse aequalia, erit ecce sector circuli summa intervallorum loco ascriptorum.

Iam quaeritur locus, cuius chordae scilicet productae, perpendiculariter incidant in sectorem datum seu ut rectae eaedem sint tangentes loci utriusque, sive eae chordae assumantur aequales, sive inaequaliter decrescere certo modo an fortasse nihil refert, imo certe. Tunc ex puncto illo sectoris ductae rectae ad arcus extrema dabunt figuram aequalem sectori ad arcum illum applicato duplicato.

Doctrina de evolutionibus qua curvis quibusdam geometricis inventae aequales rectae, in eo imperfecta est, quod non potest id fieri in figuris quibusdam datis, sed in inventis tantum. Et ideo illae figurae pleraeque sunt artificiales, seu quae non nisi per puncta describi possunt, ac proinde vix reperiuntur utiles in natura rerum. Illud ergo restabat quaerere, an data curva geometrica dari possit alia geometrica, quae datae evolutione describatur, seu, quae ita comparata sit, ut curvae datae tangentes sint quaesitae perpendiculares[,] ut si evoluta circuli describi posset geometrice per aequationes licet altioris gradus haberemus quadraturam; licet ea problema altioris gradus futura sit, ut in mesolabo. An forte malum in eo est, quod in quolibet puncto opus foret aequatione nova, ut patet in circulo. Nam si haberetur figura cuius puncta geometrice determinarentur aequatione quadam, quae evolutione circuli describeretur, haberetur cuilibet arcui circuli aequalis recta, quae describeretur scilicet illa evolutione, et cum illa recta data futura sit, daretur et ratio eius ad aliam rectam toti circumferentiae aequalem, ergo et arcus in quo circulum tangit, ita haberetur sectio angulorum universalis. At ea haberi non potest, nisi per aequationes alias atque alias continuo altioris gradus. Ergo pro initio aequationis opus foret aequatione graduum infinitorum, et ita semper regrediendo. Quod est impossibile. Res tum accuratius consideranda.

[*Anhang*]

[*Zu S. 134 Z. 22:*]

NB. ipsa summa summarum, seu summa triangularis, assumatur pro simplici et videamus, quid sit futurum.

---

8 *Zu* Doctrina de evolutionibus *s. Anhang.*

10 Manifesta ratio est cur evolutio figurarum datarum non procederet, nam ad aequationem habendam praesupponerentur earum curvis aequales rectae.

$$a.\ b.\ c.\quad \text{est summa simplex,}\quad \begin{array}{r} a.\ b.\ c. \\ b.\ c. \\ c. \end{array}\quad \text{est } \bigtriangledown^{\text{laris}},$$

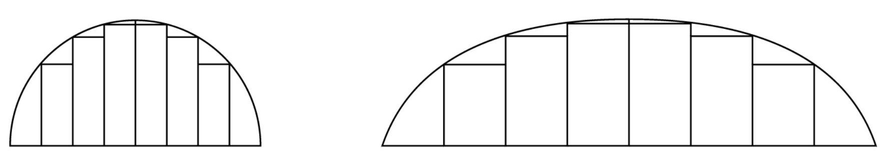
scripta in textu pyramidalis, nunc ipsam $\bigtriangledown^{\text{larem}}$ sumamus pro simplici, sumendo $a.\ b.\ c.$ pro termino uno, $b.\ c.$ iterum pro uno, $c.$ iterum pro uno, fiet:

$$\begin{array}{llllll} & a.\ b.\ c. & b.\ c. & c. & = & \text{summa simplex} \\ \hline & a.\ b.\ c. & b.\ c. & \left.\begin{array}{l} c. \\ c. \\ c. \end{array}\right\} & = & \text{triangularis ab eodem latere quo simplex} \\ & & b.\ c. & & & \\ \text{vel :} & c. & b.\ c. & a.\ b.\ c. & & \\ & & b.\ c. & a.\ b.\ c. & & \\ & & & a.\ b.\ c. & & \end{array}$$

Manifestum est priorem quippe eodem modo assumtam, quo assumta summa triangularis simplex coincidere summae pyramidali. At si triangularis simplex inversa sit replicatae, separatam res inquisitionem meretur. Scilicet cum cuiuslibet summae simplicis dentur duae triangulares simplices, dabuntur quatuor triangulares, ex quibus duae sunt directae duabus pyramidalibus respondentibus aequales, inquirendum restaret, cuinam inversae quae scilicet contra naturam suae triangularis simplicis assumtae sunt aequentur. Sed non opus ei rei insistere, sufficit monstrasse.

[*Zu S. 137 Z. 8:*]

Notat Pascalius si summa ordinatarum alicuius semicirculi intelligatur applicata non diametro sed duplo diametri fieri inde semiellipsin duplicatam semicirculi. Videndum an hoc lucem aliquam afferre possit comparationi curvae ellipticae et circularis.



[*Fig. 16*]

21 Notat Pascalius: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 10 f. sowie Fig. 2 u. 3. (*PO* VIII S. 352–354.). Leibniz' anschließender Versuch, daraus etwas für die Ellipsenrektifikation abzuleiten, ist verfehlt.

Manifestum est si retenta altitudine, et duplicata basi semper et chordae constanti ratione multiplicarentur datae iniri rationem circularis curvae ad curvam ellipticam maxime cum eadem semper hic sit basis, et eaedam altitudines utrobique.
Sit basis semper eadem a. altitudines continue decrescentes $b. c. d.$ etc. erunt chordae

$Rq\ \ a^2 + b^2.\ \ Rq\ \ a^2 + c^2.\ \ Rq\ \ a^2 + d^2.$ etc.

Duplicetur basis caeteris retentis, fient chordae:

$Rq\, 4a^2 + b^2.\ \ Rq\, 4a^2 + c^2.\ \ Rq\, 4a^2 + d^2.$

Regula ergo haec fieri potest: divisa diametro semicirculi et maxima diametro ellipsis earundem ordinatarum in partes infinitas aequales, quadratum arcus cuiuslibet circuli, differt a quadrato arcus cuiuslibet ellipsis (seu quadrato chordae) tribus quadratis, unius ex partibus aequalibus diametri circuli. Ergo differentia totorum, seu summarum omnium quadratorum est quadratum partis triplicatum, toties sumtum quot sunt partes totius diametri circuli seu quod idem est rectangulum sub diametro circuli et minima partium triplicata. Et haec quidem semper comparatio summae chordarum haberi potest utilis ad ambitus ellipsium dimetiendos. Si chordae sint licet finitae multae tamen, est approximatio satis utilis. Videndum quae sit comparatio sinuum, si utrobique arcus in partes aequales divisus.

[*Zu S. 141 Z. 8*]

Materia est elegantis adhuc et intactae speculationis, considerare figuras, quae figurarum datarum evolutionibus describuntur, eae enim figurae sunt in rerum natura, et saepe occurrere possunt, et habent quoddam affine cum cycloeidibus, ut evoluta parabolae, circuli, etc. Pro evoluta circuli sumatur semiquadratum basis cycloeidis, seu arcus circuli, eiusque applicatae omnes ascribantur circulo ad tangentes, arcui scilicet illi cui aequales sunt, seu qui id cycloeidis punctum a t t i n g i t , figura quam describent, curvaque consideratione digna est. Hae figurae sunt inversae trochoeidum, ut enim in trochoeide curva applicatur plano immobili, ita contra in evoluta curvae immobili applicatur planum. Utroque modo extremum moti considerandum est, extremum circumferentiae motae, assumtum ubivis, seu punctum contactus cum circulo, cum incipit volvi, describit cycloeidem; punctum extremum plani cum incipit applicari, seu a quo aperiri seu evolvi incipit, describit evolutam.

24 *Rechts neben* a t t i n g i t : NB.

Nota, nomen cycloeidis debet esse species trochoeidis, nam potest et dari trochoeis parabolica, etc. continua eiusmodi applicatione, ad planum, et ita in aliis omnibus. Investiganda relatio inter trochoeides et evolutas. Omnes figurae curvae demto circulo possunt intelligi evolutae. Malim aliter appellare, nec invenio vocem significantiorem, quam e v o l u t i o n a l e s , id est evolutione descriptae.

Quod alibi dixi in curvis quibusdam assumendas semper tangentes inaequales, falsum, possunt assumi variis modis pro ratione descriptionis, aut resolutionis. Omnes curvae evolutione descriptae constant ex arcubus circularibus infinitis, continue variantibus. Operae pretium est considerare eandem curvam evolutam, eandem producere evolutionalem, quomodocunque dividatur, in partes aequales an inaequales, eius rei ratio quaerenda ex Arithmetica infinitorum.

10_2. PLAGULA TERTIA

Definivi paulo ante o r t h o g o n i a m f i g u r a m , eius latera duo, quorum rectangula figuram comprehendunt, erectum a x i s (in plano), horizontale b a s i s . Applicatae sunt rectae intra figuram ab uno extremo ad alterum productae, l a t e r i o r t h o g o n i o (sic enim generali nomine tam basin quam axin appellare lubet) parallelae alteri perpendiculares. A p p l i c a t a e ei lateri orthogonio ducuntur ad quod sunt perpendiculares. O r d i n a t a e sunt quae latus orthogonium cui applicatae sunt in partes aequales dividunt. Hypotenusa orthogonii, vel i n c l i n a t a est residuum peripheriae orthogonii demto latere erecto et iacente. S i n u s r e c t i sunt applicatae lateri cuidam orthogonio, inclinatam dividentes in partes aequales, suntque vel sinus ad axem vel sinus ad basin. S i n u s v e r s i sunt rectae inde a vertice aliquo sumtae per rectas a latere orthogonio ad quod applicatae sunt abscissae. Sinus versi ad latus orthogonium unum, sunt semper sinuum rectorum ad alterum complementum ad applicatam rectanguli circumscripti, seu rectam lateri orthogonio a quo abscissi sunt sinus versi, parallelam et aequalem. Seu s i n u s v e r s u s c o n s t i t u i t s u u m l a t u s o r t h o g o n i u m ,

13 f. quorum ... comprehendunt *erg. L*

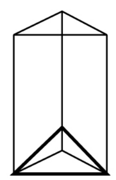
6 alibi dixi: vgl. N. 7 S. 74 Z. 18 f. 13 paulo ante: s. o. S. 138 Z. 11.

s i s i n u i r e c t o a d a l t e r u m l a t u s o r t h o g o n i u m , s i b i o r d i n e r e s p o n d e n t i , a d d a t u r.

Iam perpendiculares ex quolibet plani orthogonii puncto eleventur indefinite prisma inde ortum secari intelligatur plano quodam ad planum orthogonii inclinato per latus aliquod orthogonium transeunte, pars inter sectionem et basin, prismatis seu planum orthogonium datum intercepta, appelletur u n g u l a , et si idem inferius fieri intelligatur, erit ungula duplex quod scilicet inter duas sectiones interceptum est. Huius ungulae superficies curva, est quasi cylindracea, si inclinatae sit curvae, cuius basis scilicet curva dicta, sed supra truncata. Est autem ungula aut ungula basis, aut ungula axis. Nota Hugenius in tract. de *Horologio* oscillationis, ubi de centro oscillationis, eadem ungula utitur post Pascalium, sed alio vocat nomine. Cuneum scilicet super figuram abscissum, et perfectiorem nonnihil reddit seu generaliorem Pascalii demonstrationem. Assumit enim etiam quae trilinea non sunt, modo planum transeat per eorum tangentem. Pascalius ait requirere se ut planum secans angulum faciat 45 graduum ad planum figurae, idem requirit Hugenius: aequari abscissum eiusmodi cuneum basi, in distantiam centri gravitatis a puncto contactus ductae. Demonstratio est facilis tangens in eodem cum figura plano haberi potest pro f u l c r o , quaelibet puncta figurae seu exigua rectangula pro ponderibus. Iam idem est productum, sive summa omnium ponderum, ducatur in dis-

---

3 *Daneben Merkfigur:*



6 *Zu* u n g u l a *s. Anhang.*

4 f. per ... transeunte *erg. L*

---

6 u n g u l a : zur Definition der ungula s. Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 19 (*PO* VIII, S. 370 f.). 9 Nota: Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, pars quarta. *De centro oscillationis*, insbesondere S. 103, Def. XIV und S. 105, Prop. VIII, (*HO* XVIII, S. 264–269).

tantiam centri gravitatis a fulcro, sive singula pondera in suas distantias, summaque omnium colligatur. At iam singula puncta ducta intelligantur in distantias suas, erigentur prismata super illis, altitudine distantiarum. Haec prismata omnia simul praecise complebunt cuneum istum, quia enim angulus inclinationis plani secantis est 45 graduum. Ideo punctum unumquodlibet aequidistat a plano secante per horizontalem, et per perpendicularem, horizontales autem sunt rectae, quae erectae constituunt prismata illa infinita haec autem cuneum, ergo omnes illae horizontales seu distantiae a fulcro constituunt cuneum. Caeterum Pascalius ungula sua ita utitur: fiat ungula ad axem, semirotetur et planum orthogonium circa axem, secari intelligatur planum orthogonium datum tam quod d u p l a e u n g u l a e basis est quam quod semisolidi planis per axis ordinatas transeuntibus ad planum figurae perpendicularibus. Sectiones in ungula erunt triangula, nempe semiquadrata ordinatae. Ratio, quia duo plana duplae ungulae faciunt angulum rectum cum quodlibet faciat 45 grad. ad planum orthogonii datum intermedium, et rectae utrinque aequales, hinc ista semiquadrata. Semisolidi sectiones erunt semicirculi ordinatae, at semicirculus ad semiquadratum radii est ut arcus quadrantis ad radium. Semper ergo omnium sectionum semisolidi geniti, ad quamlibet sectionem ungulae erit ratio eadem, ergo eadem ratio totorum, nempe quae radii ad arcum quadrantis, eadem et superficierum curvarum, et distantiarum centrorum gravitatis utriusque solidi. Ostendit autem quod notabile est, inverso modo haec esse, nimirum dimensiones solidorum et superficierum ungulae ad geniti, esse ut radium ad arcum quadrantis; at vero distantiam centri gravitatis ungulae item superficiei ungulae ab axe esse ad distantiam centri gravitatis geniti item superficiei geniti, ab eodem axe, ut arcus quadrantis est ad radium, ergo sunt in inversa ratione figurarum. Hoc ipse non annotat, nec reflexione aliqua signat, cum mereatur. Eadem autem centra gravitatis ostendit esse in ipso plano trilinei, et aequidistare a basi, ita uno habito alterum habetur.

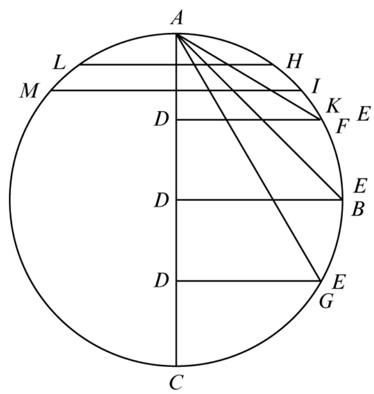
Methodus unica quae restat, perficiendi supplendique Arithmeticam infinitorum, mihi videtur haec esse, ut quando radices surdae intercurrunt, quo solo casu cessat calculus, eius loco numeri quadrati eiusdem naturae substituantur; v.g. quaeritur summa

12–14 Ratio ... semiquadrata. *erg. L*

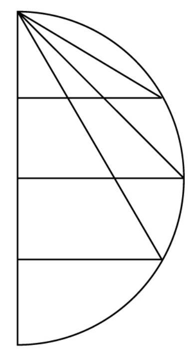
---

14 Semisolidi sectiones: im Folgenden vernachlässigt Leibniz den Faktor 2. Dies wirkt sich einschließlich der angezogenen Stellen aus Pascal bis Z. 25 aus. 18 f. Ostendit: PASCAL, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 21 f. (*PO* VIII, S. 375–377).

linearum ita crescentium, ut radices numerorum arithmeticae progressionis, si hoc quaerendum sit per Arithmeticam infinitorum, sine consideratione ipsius figurae inde ortae, fieri posset hoc modo: Quaerendi essent numeri quadrati aliquot, tres quatuor pluresque progressionis arithmeticae, quorum radices in numeris habentur, hae radices summari possunt, idque fieri potest pluribus exemplis, unde apparebit an aliqua summae ineundae ratio possit haberi; qua inventa per haec experimenta facilius invenietur demonstratio. Ecce quomodo experimenta usui possint esse in Geometria, cum enim sint in omni Arithmetica, erunt et in doctrina serierum, ergo et in Arithmetica infinitorum, ergo et in Geometria.



[*Fig. 1a, Blindzeichnung*]



[*Fig. 1b*]

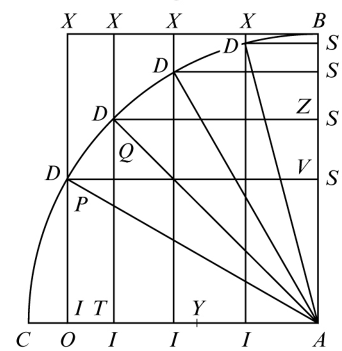
Si in semicirculo diameter ductis ordinatis dividatur in partes aequales quotcunque et ex una aliqua diametri extremitate ad quodlibet punctum, quo ordinata aliqua circumferentiam attingit, rectae seu chordae, ducantur quas appellabimus chordas ad ordinatas, sic enim appellare licet, aio differentias inter duarum quarumque chordarum proximarum (aut quomodocunque distantium) quadrata esse aequales differentiis inter quadrata quarumcunque aliarum proximarum (aut eodem in serie numero distantium), seu seriem ex quadratis chordarum ad ordinatas, eo ordine quo sunt in figura, esse arithmeticae progressionis. Hinc sequitur: Summam omnium chordarum ad ordina-

8 in doctrina ... et in *erg.* *L* 11 partes *(1)* infinitas *(2)* aequales quotcunque *L*

18 Summam: vgl. dazu PASCAL, *Traité général*, 1658, S. 5f. (*PO* IX S. 123 f.).

tas, aequari semiparabolae, cuius basis chorda maxima, altitudo ordinatae ad chordam maximam, sinus versus seu ad verticem a diametro abscissa. At omnes chordae sunt duplae applicatarum, videndum ergo an ex summa chordarum ad ordinatas inveniri possit summa ipsarum ordinatarum. Sed hoc fieri non posse, facile demonstratur fig. 1. ubi semicirculus AB. diameter divisa in punctis D. ordinatae DE. chordae AE. Quaestio est an hae chordae possint esse ordinatae. Arcus AF. AB. AG. AC. bisecentur in punctis, et arcus transponi intelligantur, ita ut puncta eorum media cadant in summitatem A. seu ipsi HE. sumatur aequalis AL. et ipsi IB. aequalis IM. Sed ipsi KE. aequalis potest sumi nulla, cum sit maior semicirculo. Ergo non ultra procedendum ad chordam $\langle$— ...$\rangle$

Fig 16.



[*Fig. 2*]

Fig. 16. Pascal. ($2a$) diameter. (a) radius AB. ($4a^2$) quadratum diametri. ($2a^2$) quad. inscriptum. ($Rq\,2,\frown a$) radix $\square^{\text{ti}}$ inscr. eius dimidium QT. vel AZ. $\dfrac{Rq\,2,\frown a}{2} =$ $Rq\,\dfrac{1}{2},\frown a$. $ZB. = a - Rq\,\dfrac{1}{2},\frown a$.

Ducatur ZB. in arcum QB. peripheriae octantem. Erit portio superficiei cylindricae, cuius basis circulus AB. altitudo ipsa ZB. Ponatur ZB. duci in totam peripheriam, manifestum est cylindrum, cuius est ea superficies fieri ex ductu circuli baseos in altitudinem cylindri.

11 Fig. 16. Pascal.: Die Figur gehört zum *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658 und fehlt in der Handschrift; sie ist nach dem Original (*Lettres de A. Dettonville*, 1659, Tafel II = *PO* IX, S. 67) ergänzt worden.

Radius est a. Esto peripheria x. erit circulus: $\frac{ax}{2}$. et cylinder erit

$$\frac{ax}{2}\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown a - \llcorner\llcorner Rq\,\frac{1}{2}\lrcorner \frown a\lrcorner = \frac{a^2x}{2} - \llcorner\frac{a^2x}{2} \frown Rq\,\frac{1}{2}\lrcorner = \frac{a^2x}{2} - Rq\,\frac{a^4x^2}{8} = \frac{a^2x}{2} - \frac{a^2x}{Rq\,8}.$$

[Volumen cylindri divisum] per radium baseos $AB = a$. producto duplicato dabit superficiem cylindri, totam, cuius octava pars est portio quaesita[,] ergo dividatur per radium, productique sumatur pars quarta $\frac{ax}{8} - \frac{ax}{Rq\,128}$. Ab hac si auferatur summa sinuum versorum XQ. XD. seu segmentum QB. duplicatum, restabit summa sinuum rectorum [QT. DI.].

Iam quia segmentum circuli maioris non potest commode auferri a minori, auferatur a maiori, et a residuo auferatur differentia inter maiorem et minorem. Nam si auferre debeam b. ab a. idem est ac si auferam b. a c. quod esse suppono maius quam a. et a residuo auferam differentiam inter c. et a.

---

5 $a - Rq\,\frac{1}{2} \frown a,, \frown \frac{x}{8} = \frac{ax}{8} - \frac{Rq\,1}{Rq\,2 -} \frown \frac{ax}{8} = \frac{ax}{8} - \frac{ax}{Rq\,128}$.

5–7 Segmentum est $\frac{ax}{2 \frown 8} = \frac{ax}{16} - \frac{a^2}{Rq\;32}$. duplicatum est $\frac{ax}{8} - \frac{a^2}{Rq\;8}$, auferatur ab $\frac{ax}{8} - \frac{ax}{Rq\;128}$. restabit: $\cancel{\frac{ax}{8}} - \frac{ax}{Rq\;128} + \frac{a^2}{Rq\;8} - \cancel{\frac{ax}{8}}$. Idem producitur, si a summa sinuum $\left(a^2 \frown Rq\;\frac{1}{2} \quad \frac{a^2}{1} \frac{- Rq\;1}{- Rq\;2}\right)\ \frac{a^2}{Rq\;2}$. auferatur $\frac{a}{Rq\;2} \frac{-x}{-8} - \frac{ax}{Rq\;128}$. Ergo $\frac{a^2}{Rq\;8} - \frac{ax}{Rq\;128} = \frac{a^2}{Rq\;8} - \frac{ax}{Rq\;128}$. error alicubi in calculo, apparet enim haec se mutuo tollere.

3 Area cylindri divisa *L ändert Hrsg.* 6 f. DQ. BQ. *L ändert Hrsg.*

3–151,3 In diesem Abschnitt versucht Leibniz, Satz I und das Korollar aus Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 1 u. 4 (*PO* IX S. 61 f. u. 67) miteinander zu verbinden. Leibniz gelangt aber, wie er schließlich zweimal selbst feststellt, nicht zum erstrebten Ziel und erreicht nur ein Teilergebnis: die Berechnung des zum Kreisoktanten gehörenden Dreiecks. (Der Wert des Haupttextes ist zwar um den Faktor 2 zu klein, jedoch steht der richtige Wert in der zugehörigen Anmerkung.)

$$a - b = \not{c} - b, -\not{c} + a.$$

Porro segmento duplicato PB. ablato a circulo AB. restabit semicirculus $\dfrac{ax}{4}+$ duo triangula octantis AB. circuli fulcra. Ab hoc residuo auferenda est differentia inter $\dfrac{ax}{2}$ et $\dfrac{ax}{8} - \dfrac{ax}{Rq\,128}$. seu $\dfrac{ax}{2} + \dfrac{ax}{Rq\,128} - \dfrac{ax}{8}$. seu $\dfrac{3ax}{8} + \dfrac{ax}{Rq\,128}$. Hoc auferatur a $\dfrac{ax}{4} + 2\bigtriangledown^{\text{la}}$ octantis AB. Iam $\dfrac{ax}{4} = \dfrac{2ax}{8}$. Restabit: $2\bigtriangledown^{\text{la}}$ octantis $AB. - \dfrac{ax}{8} - \dfrac{ax}{Rq\,128}$. Ut autem investigemus $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ octantis, habemus rectam $QZ. =$ vel $QT. = Rq\,\dfrac{1}{2} \frown a$. eius quadrato $\dfrac{1}{2}a^2$. addatur $\square^{\text{tum}}$ de ZB. $a^2 + \dfrac{1}{2}a^2 - 2a^2 \frown Rq\,\dfrac{1}{2}$. habemus $2a^2 - \llcorner 2a^2 \frown Rq\,\dfrac{1}{2}\lrcorner$ huius Rq. est recta (QB). $\square\dfrac{\sqrt{2a^2 - \llcorner 2a^2 \frown Rq\,\frac{1}{2}\lrcorner}}{2}$ erit $\dfrac{2a^2 - \llcorner 2a^2 \frown Rq\,\frac{1}{2}\lrcorner}{4}$. auferatur a quad. radii a^2. restabit $\square^{\text{tum}}$ fulcri quod erit $a^2 - \dfrac{2a^2 - 2a^2 \frown Rq\,\frac{1}{2}}{4} = \dfrac{2a^2 + 2a^2 \frown Rq\,\frac{1}{2}}{4}$. Et fulcrum erit $\dfrac{\sqrt{2a^2 + 2a^2 \frown Rq\,\frac{1}{2}}}{2}$. ducatur in QB. producto dimidiato productum erit $\dfrac{Rq\,\llcorner 4a^4 - \frac{4a^4}{2}\lrcorner}{4 \frown 2}$ seu $Rq\,\dfrac{4a^4 - 4\frac{a^4}{2}}{64} = Rq\,\dfrac{a^4 - \frac{a^4}{2}}{16} = Rq\,\dfrac{a^4}{32} = \left(\dfrac{a^2}{Rq\,32}\right)$. Triangulum octantis

Iam omnes sinus DI. aequantur radio a. ducto in DT. vel $QZ. = Rq\,\dfrac{1}{2} \frown a$ fiet $\left(Rq\,\dfrac{1}{2} \frown a^2\right)$. summa sinuum a qua auferatur recta ZA. (vel QZ.) ducta in arcum QB.

---

12 $Rq\,\dfrac{4a^4 - 4\frac{a^4}{2}}{16} = Rq\,\dfrac{a^4 - \frac{a^4}{2}}{4}$ seu $Rq\,\dfrac{\frac{a^4}{2}}{4} = Rq\,\dfrac{a^4}{8}\quad \dfrac{a^2}{Rq\,8}$.

10 f. producto dimidiato *erg. L*

vel $\frac{x}{8}$. fiet $Rq\,\frac{1}{2} \frown \llcorner\frac{ax}{8}\lrcorner$ restabit: $Rq\,\frac{1}{2} \frown a^2, -Rq\,\frac{1}{2} \frown \frac{ax}{8} = \frac{2a^2}{Rq\,32} - \frac{ax}{8} - \frac{ax}{Rq\,128}$. Ergo $\left(\text{quia } Rq\,\frac{1}{2} \frown \frac{ax}{8} = \frac{ax}{Rq\,128}\right)$ erit $\frac{a^2}{Rq\,2} = \frac{2a^2}{Rq\,32} - \frac{ax}{8}$. necesse est errorem esse in calculo, quia $\frac{a^2}{Rq\,2} \sqcap \frac{2a^2}{Rq\,32}$.

Fortasse datur methodus in Arithmetica infinitorum, summandi aliquam surdorum progressionem, quoniam etsi praecise integris exprimi non possint, aliquando tamen id quod deest, erit minus quolibet dato. V.g. quoties res reduci potest ad eum statum, ut radices quadratae differentiarum, aut aliquid ab illis pendens desit supersitque, id enim tuto negligi potest.

$$\begin{array}{lcl}
Rq\ a^2. + Rq\ b^2. & & Rq\ a^2 + b^2. + 2ab. \\
Rq\ ab. + Rq\ bc. & = & Rq\llcorner ab + bc + 2Rq\ ab^2c \\
\end{array}$$
$$Rq\ a^2 + bc \quad + \quad Rq\ d^2 + bc = Rq\ \llcorner a^2 + bc + d^2 + bc + Rq\ b^2c^2 + bca^2 + d^2bc + d^2a^2.$$

Quoties multiplicatione duarum surdarum in se invicem aliquis terminus produci potest, ex quo possit extrahi radix, sive quadrata sive cubica etc. toties ex duabus surdis fieri potest una.

Nota si velis inire summam duarum radicum, sic procedendum est, ineatur summa quadratorum, eaque duplicetur, a producto auferatur quadratum differentiarum inter radices, residui radix erit summa radicum. Iam si tres radices summare velis,

---

3 $\frac{2a^2}{Rq\,32} \sqcap \frac{2a}{5}$. $\frac{a^2}{Rq\,2} \sqcap \frac{1}{2}$.

15 | Differentia inter duas radices quadratas semper exprimi potest una radice quadrata, v.g.

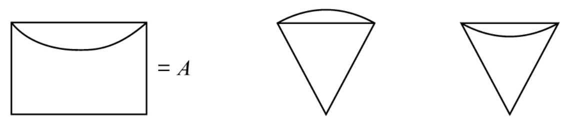
$$\begin{array}{lll}
\mathrm{Rq\ ab - Rq\ bc = Nam} & & \mathrm{Rq\ ab - Rq\ bc} \ \textit{gestr.} \mid \text{Nota } L \\
\mathrm{ab - \quad bc} & & \underline{\mathrm{Rq\ ab - Rq\ bc}} \\
 & \mathrm{-Rq\,abbc} & + \quad \mathrm{bc}
\end{array}$$

---

15 Nota: Die Formel für die Addition zweier Wurzeln ist korrekt. Hingegen glückt die Erweiterung auf drei Summanden nicht, Leibniz bricht die Rechnung daher ab.

$Rq\,a^2 + Rq\,b^2 + Rq\,c^2$. primae duae $Rq\,\llcorner 2a^2 + 2b^2 - \square\llcorner Rq\,a^2 - Rq\,b^2 \lrcorner\lrcorner + Rq\,c^2 = Rq\llcorner 4a^2 + 4b^2 - 2\square\llcorner Rq\,a^2 - Rq\,b^2\lrcorner\lrcorner + 2c^2$ [*Rechnung bricht ab*]

$$\begin{array}{ll} xa - 2y^2 = A^2 & B - x = A \\ xa - y^2 = A + y^2 & B - A - x = 0 \\ B = A + y & B - A = x \\ B - A = y & \end{array}$$



[*Fig. 3*]

Quadrata sinuum versorum quadrantis sunt differentia inter quadrata sinuum rectorum quadrantis, et $\square^{\text{ta}}$ chordarum quadrantis ad sinus.

Iam $\square^{\text{ta}}$ sinuum rectorum quadrantis, aequantur cylindro, cuius basis quadrans, altitudo radius. Quadrata chordarum, ita investigabimus: chordae ad sinus quadrantis, sunt dupli sinus octantis, seu semichordae ad sinus quadrantis, sunt sinus octantis, QB, nempe DZ. DS.

Eorum summa sic facile initur, si a sinubus quadrantis, nempe quadrato radii, auferatur summa sinuum alterius octantis CQ. (in radio terminati, ubi scilicet sinuum maximus est), nempe radius in semilatus $\square^{\text{ti}}$ inscripti ductus $a \frown \dfrac{Rq\,2a^2}{2} = \dfrac{Rq\,2a^4}{2}$. fiet summa sinuum octantis sinu maximo ad radii extremitatem non terminati $a^2 - \dfrac{Rq\,2a^4}{2}$.

Iam et $\square^{\text{ta}}$ horum sinuum quaeremus. Dantur $\square^{\text{ta}}$ omnium quadrantis sinuum CA. PV. DS. B. nempe cylinder quadrantis basi, altitudine radio, ab his auferemus cylindrum ipsius $CQZA$. restabit utique cylinder basi QBZ. seu semisegmento octantis altitudine

---

2 $\dfrac{4a^2 + 4b^2 - 2\square\overline{Rq\,a^2 - Rq\,b^2}\qquad c^2}{4a^2c^2 + 4b^2c^2 + 2c^2\square\overline{\qquad\qquad}}$

---

21 semisegmento octantis: es müsste semisegmento quadrantis heißen. Dieser Fehler wird zwar in S. 155 Z. 23 korrigiert, er beeinträchtigt aber alle folgenden Überlegungen bis hin zu S. 156 Z. 9.

radio. Huius quadruplum est summa quatuor cylindrorum, quorum basis semisegmentum octantis, altitudo radius, vel cylinder cuius basis semisegmentum octantis, altitudo diametri duplum. Atque hanc necesse est esse summam quadratorum omnium chordarum ad sinus, quadrantis.

Ab hoc auferatur summa omnium quadratorum sinuum quadrantis, seu quadrantis cylinder. Ac primum auferatur portio cylindri quadrantis cuius basis QBZ. seu reiciatur unus ex cylindris $QBZ \frown a$ restabunt tres eiusmodi cylindri. Similis portio CQT. rursus auferatur, restabunt duo cylindri $QBZ \frown a$. a quibus auferri debet parallelepipedum basi quadrato quartam partem faciente $\Box^{\text{ti}}$ inscripti, altitudine ratio. Addendi scilicet adhuc quatuor cylindri $QBZ \frown a$. quia chordarum summa ut habeatur duci debebat in arcum $[BC.]$ at in octante ducta est in eius dimidium, ideo duplicanda. Igitur a sex istis cylindris parallelepipedum quod dixi auferendum est.

Videamus quomodo sit rectangulum DZB. ad $\Box DZ$. $\Box DZ$. est $\dfrac{a^2}{2}$ rectang. DZ. est $\dfrac{Rq\ 2a^2}{2} \frown a - \dfrac{Rq\ 2a^2}{2}$. fiet $\dfrac{Rq\ 2a^4}{2} - \dfrac{a^2}{2}$. Ab hoc sextuplicato $3Rq\ 2a^4 - 3a^2$. auferatur $\dfrac{a^2}{2}$. fiet $3Rq\ 2a^4 - \dfrac{7a^2}{2}$. Huius baseos in radium ductae cylinder, seu $3Rq\ 2a^6 - \dfrac{7a^3}{2}$. additis sex segmentis QBZ. in radium ductis, seu sexies sectorem octantis, demto sexies eius fulcro, residuo in radium ducto, dabit summam quadratorum sinuum versorum quadrantis.

Eadem quadrata sinuum versorum aliter, et sic quidem inveniri possunt: cum sinus versus sit quadratum chordae per diametrum divisum: $\dfrac{\text{quad. chord.}}{\text{diameter}}$. quadratum sinus versi erit $\dfrac{\text{quad. quad. chord.}}{\text{quad. diam.}}$. Est autem summa chordarum: summa sinuum rectorum arcus dimidii quadruplicata, seu quaelibet semichorda arcus dati ut CB. arcus quadrantis in partes aliquotas ut DQ. divisi, est sinus arcus dimidi QB. in aliquotas dimidio minores divisi. At sinuum QZ. DS. segmenti QBZ. quadrato-quadratorum summa ae-

11 PQ. *L ändert Hrsg.*

---

3 summam quadratorum omnium chordarum: Die Summe der Sehnenquadrate ist um den Faktor 2 zu klein. Das Versehen bereinigt Leibniz in Z. 11 13–17 Dieses erste Endergebnis ist fehlerhaft. Bei dem von Leibniz gewählten Zerlegungsansatz müsste es richtig $6 \bigtriangledown DZB. - \Box DZ. + 6$segm.oct. lauten. 23 sinuum ... quadrato-quadratorum summa: Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. IV, S. 1 u. 4 (*PO* IX, S. 62 u. 67).

quatur cuborum ordinatarum ad BZ. applicatarum, per radium multiplicatorum. Porro haec summa $\square\square^{\text{torum}}$ dividenda est per $\square^{\text{tum}}$ diametri. Quoniam autem dupli sinuum horum sunt chordae, ideo hoc multipl. per 16. et adhuc per 2. ob aliquotam arcus prioris dimidiam, ergo habebimus

$$\frac{\text{cubi ordinatarum semisegmenti octantis} \frown \text{per } \cancel{\text{rad.}} \frown 16 \frown 2}{\text{quadrat. diam.}} =$$

$$\underbrace{3 \llcorner Rq\ 2a^4 - \frac{7a^2}{2}}_{A} + 6 \text{ segm. } QBZ \lrcorner \frown \cancel{\text{rad.}}$$

Quadrari possunt quadrata ordinatarum in unam summam collecta at non cubi, hactenus, utile foret saltem earum cuborum summae relationem ad circulum vel segmentum etc. inveniri.

Tertia methodus qua quadrata sinuum versorum quaeri possunt, haec est: Sinum totum nominemus a. rectum b. erit versus $a-b$. cuius $\square$. a^2+b^2-2ab. Habemus autem quadrata sinuum totorum applicata arcui quadrantis, seu quadratum sinus totius in arcum quadrantis ductum $\frac{xa^2}{4}$. seu cylinder cuius basis est semicirculus, altitudo radius (circulus enim est $\frac{xa}{2}$). Summa quadratorum sinuum rectorum quadrantis est $\frac{xa^2}{8}$. seu

---

5 f. Utrobique tam ad $\frac{3xa}{8} - a^2$. quam ad 6 segm. QBZ. etc. addantur fulcra horum segmentorum quae vocabo B, erit talis aequatio: $A + 6 \frown$ sect. $QBZ. = \frac{3xa}{8} - a^2 + B$. At sexies sector octantis aequatur ter sectori quadrantis, ergo nulla ex his nova aequatio. Nisi ea inveniatur per cubos ordinatarum.

2 diametri. *(1)* Ergo *(2)* Porro cubi ordinatarum | semisegmenti octantis *erg.* | per radium multiplicati, idem sunt quot *(3)* Cubi *(4)* Quoniam *L* 3 f. ideo ... dimidiam *erg.* *L*

---

4 ergo habebimus: Bis auf die Verwechslung: Oktant statt Quadrant ist die erste Hälfte der Formel korrekt. Die Gleichsetzung mit dem früheren Ergebnis ist nicht berechtigt. 10–155,11 Die 3. Bestimmung der Summe der Quadrate des sinus versus leidet vor allem darunter, dass Leibniz in S. 155 Z. 2 f. sinus versus und sinus totus verwechselt. Außerdem kommt noch ein Rechenfehler hinzu.

cylinder cuius basis quadrans, altitudo radius. (Unde obiter apparet hanc summam prioris esse dimidiam.) Horum summa est $\frac{3xa^2}{8}$. Ab hac summa auferatur summa duplicata rectangulorum sub sinubus versis et rectis [sinum totum] complentibus ut $BS \frown SA$. Hanc summam sic inveniemus[:] Ipsa DS. semper est media proportionalis inter BS. et $SA + AB$. Ergo $DS \frown DS = BS \frown SA. + BS \frown AB$. Ergo $DS \frown DS$. summa quadratorum sinuum rectorum quadrantis, seu quadrantis cylinder sub radio; $-BS \frown AB$. radius in summam sinuum versorum, seu cylinder cuius basis segmentum quadrantis duplicatum, altitudo radius, aequabitur rectangulis sinuum rectorum et versorum sinum totum complentium. Hoc auferatur bis a priore $\frac{3xa^2}{8}$, restabit $\frac{xa^2}{8}+$ bis, cylinder cuius basis segmentum quadrantis, altitudo radius, seu

$$\frac{3xa^2}{8} - a^3. \quad \text{summa quadratorum sinuum versorum.}$$

Ostendimus hoc loco summam rectangulorum sub sinubus rectis et versis sinum totum complentibus, aequari cylindro quadrantis, demto bis cylindro segmenti quadrantis; posito radio utriusque cylindri altitudine communi. Nunc eadem aliter inveniemus: Ducatur radius $BA = (\genfrac{}{}{0pt}{}{SA}{ID}+SB)$ in sinum rectum ID. vel [SA.] summa est cubus radii. A cubo radii subtrahatur $ID \frown ID$. seu quadratum sinus recti, quorum summa, cylinder quadrantis, residuum erit $SB \frown ID$. vel $SB \frown AS$. Ergo:

cylind. quadrant. -2 cylind. segm. quadrant. $=$ cub. rad. $-$ cylind. quadrant.

2 cyl. quadrant. -2 cyl. segm. quadrant. $=$ cub. rad.

Si subtrahatur utrobique, seu subtrahenti addatur utrobique bis cylinder cuius basis fulcrum quadrantis, id est simul cubus radii, fiet:

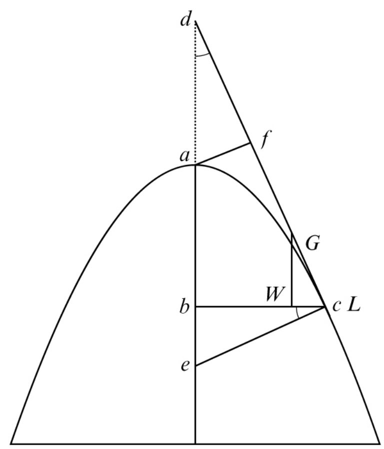
2 cyl. quadrant. -2 cyl. quadrant. $=$ cub. rad. $-$ cub. rad.

Restat ut summam cuborum ordinatarum semisegmenti quadrantis ad axem inveniamus ad 2[dam] methodum absolvendam. Summa cuborum ordinatarum ad axem, aequatur

3 arcum *L ändert Hrsg. nach Z. 8 f.* 12 f. versis *(1)* arcum *(2)* sinum totum *L* 15 SA. *erg. Hrsg.* 22 $-$ cub. rad. | Ergo 4 cyl. quadr. $=$ 2 cub. rad. Ergo 2 quad. $=$ 2 quad. rad. ἄτοπον *gestr.* | *L* 23 ordinatarum *(1)* quadrantis *(2)* octantis *(3)* semisegmenti *L* 24 ad *(1)* basin *(2)* axem *L*

24 Summa cuborum: PASCAL, *Traité des trilignes*, 1658, S. 4 (*PO* IX, S. 8 f.). Leibniz überträgt den Satz zunächst wörtlich, sieht dann aber, dass er Achse und Basis vertauschen muss.

sexies summae pyramidali ordinatarum ad basin, incipiendo ab axe. Summa pyramidalis ordinatarum ad basin incipiendo ab axe aequatur summae solidorum, factorum ex qualibet ordinata, in quadratum suae distantiae ab axe ducta, seu maxima ordinata ducta in 1. 2^{da} in 4. 3^{tia} in 9. quarta in 16. quod ita investigari potest. Ponatur in quamlibet ordinatam, ducta eius distantia a basi perpendiculariter erecta; distantia centri gravitatis ab axe omnium horum rectangulorum, ducta in omnia ista rectangula, aequatur omnibus istis rectangulis cuilibet in suam a basi distantiam ductis. Cum vero hoc invenire difficile, inveniemus si iam aliter prima aut tertia methodo summa quadratorum sinuum versorum inventa intelligatur.



[*Fig. 4*]

1 ad *(1)* axem *(2)* basin *L* 1 incipiendo *(1)* a basi *(2)* ab axe. *(a)* Iam in quadrante ordinatae ad basin, et ad axem sunt eaedem, ergo | in quadrante *gestr.* | summa *(b)* Summa *L*

1 Summa pyramidalis: PASCAL, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 16 f. (*PO* VIII, S. 365, s. a. oben S. 136 Z. 9 – S. 137 Z. 7). Hier unterdrückt Leibniz den Faktor 2. 10–158,7 In [*Fig. 4*] benutzt Leibniz zur Bezeichnung der gewöhnlichen Punkte kleine Buchstaben, für das in Zusammenhang mit der dritten Betrachtung ergänzte infinitesimale Dreieck große, im Text werden fast durchweg Großbuchstaben verwendet. Ausgehend von [*Fig. 4*] hat Leibniz insgesamt drei Überlegungen angestellt. Die ersten beiden sind vor allem im numerischen Bereich fehlerhaft, zudem leiden sie unter unklarer Bezeichnungsweise. Leibniz hat später die erste Betrachtung insgesamt gestrichen, die zweite nicht weiter fortgeführt. In der dritten Betrachtung, die den Anfang der ersten mitverwendet, hört er – auch wegen Platzmangel – nach einem ersten Teilergebnis auf. Dennoch erhält Leibniz in diesen Betrachtungen wesentliche Elemente des Transmutationssatzes.

[*Erste Betrachtung, gestrichen*]

De intervallis tangentium parabolae, a puncto verticis inveniendis.

Esto altitudo parabolae AB. a. applicata $BC = b$. $BD = 2a$. $CD = Rq\,\overline{4a^2 + b^2}$. Patet $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ DEC. esse simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DBC. habent enim duos angulos (ergo et tres) aequales, habent enim angulum D. communem, et praeterea unum quodlibet, unum rectum, ergo ut est cathetus minoris DC. ad cathetum maioris BD. ita erit hypotenusa minoris DC. ad hypotenusam maioris DE. Est ergo BD. media proportionalis inter DE. et CD. ergo $BD \frown BD = DE \frown CD$. Ergo $\dfrac{BD \frown BD}{CD} = ED$. Ergo $\dfrac{4a^2}{Rq\,4a^2 + b^2} = DE$. Eius $\square$. $\dfrac{16a^4}{4a^2 + b^2}$. auferatur a $\square BD$ seu $4a^2$. restabit, $Rq_\llcorner 4a^2 - \dfrac{16a^4}{4a^2 + b^2} = BE$. cuius dimidium AF. ergo intervallum tangentis est $\dfrac{Rq_\llcorner 4a^2 - \dfrac{16a^4}{4a^2 + b^2}\lrcorner}{2}$. seu $Rq\dfrac{\cancel{4}a^2 - \dfrac{\overset{4}{\cancel{16}}a^4}{4a^2 + b^2}}{\cancel{4}}$. seu $Rq\,a^2 - \dfrac{a^4}{4a^2 + b^2}$.

[*Zweite Betrachtung, am Rande*]

$Rq\,1 - Rq\,2$. eius $\square$. $1 + 2 - 2Rq\,2.\ + 1$. fit $\square$. $2 + 2. - 2Rq\,2$. Hinc parabolae axe in aequales partes diviso cui applicatae different hoc modo: $Rq\,1 - Rq\,2$. $Rq\,2 - Rq\,3$. etc. erunt semper chordarum $\square^{\text{ta}}$ duplum quadrati maioris, hoc loco 6 $(3+3)+$ duplum radicis rectanguli $2Rq\,2 \frown 3$.

Ut res rectius exprimatur: $aRq\,2 - aRq\,3$. ducantur in se fiet: $a^2 2 + a^2 3 - a^2 Rq\,6$. $(2 \frown 3)$ cui addatur a^2. fiet $6a^2 - 2a^2 Rq\,6$. quod si per Arithmeticam infinitorum istud $2 \frown 3$. posset supponi: $3 \frown 3$. fieret $6a^2 - a^2 Rq\,6 = 3a^2$.

---

11 $\dfrac{a^2}{1} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{3a^2}{4}\,Rq$.

6 minoris *(1)* BD. *(2)* DC. *L* 18 $6a^2-$ *(1)* a^2Rq 6. *(2)* $2a^2$Rq 6. *L*

$aRq\ 10 - aRq\ 9.\square = a^2 10 + a^2 9 - 2a^2 Rq\ 90.\ + a^2.$ fiet $20a^2 - 2a^2 Rq\ 90, Rq.$ multiplicetur per $aRq\ \dfrac{300}{41}$ fiet $a^2 Rq.\dfrac{300}{41} - \dfrac{2700}{41} Rq.,\frown Rq\ a^2.$

[*Dritte Betrachtung, interlinear*]

De intervallis tangentium parabolae, a puncto verticis inveniendis.

Esto altitudo parabolae $AB.\ x.$ latus rectum $a.$ applicata $BC = \sqrt{ax}.\quad BD = 2x.$ $CD = Rq\ \overline{4x^2 + ax}$ applicata hyperbolae eritque $DC.$ in $GW.$ summa applicatarum hyperbolae, aequalis: $DB.$ in $GL.$ seu momento curvae ex $a.$ duplicato.

Hugenius invenit primus figuram curvilineam cuius ambitus pariter et area cognita sit. Nimirum portionem cycloidis abscissam recta basi parallela ex puncto verticis, ab ipso vertice, quarta altitudinis parte distante.

---

2 $Rq_\llcorner a^2 100 - \dfrac{10000a^4}{400a^2 + 10a^2} = \dfrac{1000|0}{41\ |0}\ \not\!f \qquad 100 - \dfrac{1000}{41}$ [=] $\dfrac{4100-1000}{41} = \dfrac{1100}{41}.$
$4100 - 1100 \qquad aRq\ \dfrac{300}{41}.$ [*sic!*]

6 *Am Rande, gestrichen*: $\sqrt{ax} \frown \sqrt{ax + \dfrac{a^2}{4}} = \sqrt{a^2x^2 + \dfrac{a^3x}{4}}.$

8 f. Male imo Heuratius paraboloeidem.

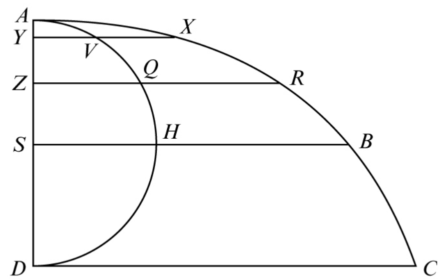
8 *Über* primus: male

2 $\frown$ Rq a^2. | Hac methodo videtur fortasse *gestr.* | *L* 8 Hugenius *gestr. u. wieder gültig gemacht L*

---

8 Hugenius: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 u. 71 f. (*HO* XVIII, S. 204–211). Bei der Anwendung des Satzes in S. 159 Z. 3 übersieht Leibniz jedoch, dass Huygens die ganze Zykloide betrachtet. AZR. ist nicht dem halben, sondern dem vierten Teil des eingeschriebenen Sechsecks gleich. Dieser Fehler beeinflusst die folgenden Überlegungen bis S. 161 Z. 10.

Inspice fig. Hugenii pag. 66.



[*Fig. 5*]

Nimirum AZR. aequari semihexagono circulo genitori AD. inscripto. Ab hoc auferatur semisegmentum AZQ. restabit AQR. quod est summa triangularis arcuum in AQ. ipsa AZ. per ordinatas divisa resultantium incipiendo ab R. Ergo ista summa triangularis aequatur semihexagono demto isto semisegmento. Seu si semisegmento addatur eius fulcrum, quod cum sit rectilineum appellabimus A. ergo

semihexagonum $+A-$ semisector = summ. triang. horum arcuum.

---

1 *Schräg über* pag. 66: Imo Heuratius paraboloeidem.

3 *Zu Z. 3 – S. 160 Z. 4 s. Anhang.*

8 Summam triangularem horum arcuum, circulo per ordinatas diviso, incipiendo a maiore etiam aliter inveniemus, est summa triangularis arcuum minimorum, sed simplex arcuum, ut eos considerat. Haec summa arcuum[,] axe in aequales partes diviso[,] ut praeclare monstratum a Pascalio, eadem est summa sinuum ad basin, arcu in aequales partes diviso, quam summam constat esse rectilineum, demto circulo seu superficie cylindrica.

---

2 [*Fig. 5*]: Die Figur fehlt in der Handschrift; sie ist nach dem Text und der Originalfigur des Leibnizschen Handexemplars vom Hrsg. ergänzt worden. Zur Originalfigur s. N. 2. 8+160,4 Beide Formeln sind bis auf die falsche Anwendung des Huygensschen Satzes richtig. In der ersten Formel ist semisector auf das dem Kreis einbeschriebene gleichseitige Dreieck bezogen, in der zweiten bezeichnet sector den zum regelmäßigen einbeschriebenen Sechseck gehörenden Sektor. a. ist hier zunächst noch $= A = \frac{\pi}{6}$ zu setzen. In der Formel der zugehörigen Anmerkung bezeichnet a. jedoch den Radius. Diese Formel ist wegen der darin mitenthaltenen Setzung formal bis auf den fehlenden Faktor $\frac{1}{2}$ im 2. Glied des Zählers richtig. 13 f. praeclare monstratum: PASCAL, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, Prop. VII, S. 5 f. (PO IX S. 70 f.).

Quaeritur iam ZY. quod est distantia centri gravitatis curvae AQ. a basi ZQ. quod ita inveniemus[:] constat summam simplicem seu curvam AQ. ductam in totam bilancem seu rectam AZ. esse ad summam triangularem incipiendo ab Q. ut est AZ. ad YZ. Ergo

$$\frac{\text{semihexagon.} + a - \cancel{\text{sem}}\text{isect.}}{\cancel{AZ} \frown AQ} = \frac{YZ}{\cancel{ZA}}.$$

Unde ipsa AQR. est figura centrobaryca ipsius curvae AQ. et recta YX. ipsam figuram AQR. bisecabit.

Hinc possum bisecare cycloeidem, recta circulum generatorem bisecante. Imo error, possum determinare cycloeide secta per medium axem, recta basi parallela, quam rationem habeant ad se invicem duo segmenta. Ponatur illa secans per medium esse HB. Constat quae sit summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$ curvae AH. incipiendo ab A. uti scilicet ab ordinatis dividitur, investiganda ergo inversa ab H. etc. Dubito.

Sed redeamus ad priora, quaestio est an YZ. aliter inveniri possit, eam sic invenio[:] ostendit Guldinus superficiem a curva rotata descriptam, aequari curvae in viam centri gravitatis ductae. Porro superficiei isti curvae aequalis haberi potest circulus. Is ponatur esse $\frac{ax}{\delta}$. dividatur per ipsam curvam $\frac{x}{\gamma}$. fiet $\frac{ax}{\delta} \times \frac{x}{\gamma} = \frac{a\gamma}{\delta}$. Huius $\frac{a\gamma}{\delta}$ velut peripheriae

---

4 $\dfrac{\dfrac{a^2}{\beta} - \dfrac{ax}{\gamma}}{\dfrac{x}{\gamma}} = YZ.$

13 Idem inveniemus sine principio Guldini per superficies ungulae.

15 $\frac{a\gamma}{\delta}$ est recta aequalis peripheriae, quam describit centrum gravitatis lineae curvae. Unde apparet hanc rectificationem esse velut illam cycloeidis, ubi supponitur scilicet iam aliquid inventum.

159,8–160,1 arcuum. *(1)* Haec summa triangularis dividatur per summam simplicem seu arcum QA. productum erit YZ. seu distantia centri gravitatis *(2)* Quaeritur *L* 7 f. error, *(1)* alia id ratione fieri potest, si scilicet ab A. incipiat triangularis versus V. *(2)* possum *L*

---

5 f. Diese Aussage ist unzutreffend, s. dazu auch die Erl. zu S. 161 Z. 2. 13 Guldinus: *Centrobaryca*, 1635–41, Bd II S. 147.

inveniatur radius, id est multiplicetur per radium a. dividaturque per peripheriam x. fiet $\frac{a^2\gamma}{x\delta} = YV$. Data autem YV. facile habetur YZ. quadrato enim eius a quadrato radii SV. subtracto, habetur quadratum SY. ergo et ipsa SY. a qua si subtrahatur SZ. data, restabit ZY. quare ne nunc calculo impediamur vocabo $YZ = \frac{a^2\gamma}{x\delta\epsilon}$. Habemus ergo:

$$\frac{\frac{a^2}{\beta} - \frac{ax}{\gamma}}{\frac{\cancel{x}}{\gamma}} = \frac{a^2\gamma}{\cancel{x}\delta\epsilon}.$$

Malim omisso ϵ accuratius sic excutere. Habemus YV. $\frac{a^2\gamma}{x\delta}$. ergo et eius quadratum $\frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2}$. auferatur ab a^2. fiet $a^2 - \frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2}$. ab huius Rq. auferatur SZ. quam pono esse $\frac{a}{\vartheta}$. fiet:

$$\llcorner Rq \llcorner a^2 - \frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2} \lrcorner\lrcorner - \frac{a}{\vartheta} = \frac{\frac{a^2}{\beta} - \frac{ax}{\gamma}}{\frac{x}{\gamma}}.$$

$$Rq \llcorner a^2 - \frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2} \lrcorner = \frac{\frac{a^2}{\beta} - \frac{ax}{\gamma}}{\frac{x}{\gamma}} + \frac{a}{\vartheta}. \quad \text{Ergo} \quad a^2 - \frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2} = \square\colon \frac{\frac{a^2}{\beta} - \frac{ax}{\gamma}}{\frac{x}{\gamma}} + \frac{a}{\vartheta}. \text{ seu}$$

$$\frac{\langle \frac{a^4}{\beta^2} + \rangle \frac{a^2x^2}{\gamma^2} - \frac{2a^3x}{\beta\gamma}}{\frac{x^2}{\gamma^2}} + \frac{a^2}{\vartheta^2} \;[+]\; \frac{\frac{2a^3}{\beta} - \frac{2a^2x}{\gamma}}{\frac{x\vartheta}{\gamma}} = \frac{a^2}{1} - \frac{a^4\gamma^2}{x^2\delta^2}.$$

---

2 Quando ex uno dato aliud haberi potest, non licet pro quaesito supponere datum certo modo multiplicatum vel divisum, quando incognitae quaedam intermiscentur, ut hoc loco x.

10 $\frac{a^4}{\beta^2} +$ *Papierverlust, erg. Hrsg.* 10 $-$ *L ändert Hrsg.*

---

2 habetur YZ.: In der folgenden Ableitung identifiziert Leibniz den Schwerpunkt des Kreisbogens irrtümlich mit seinem Mittelpunkt.

Restat iam invenire rationem arcus AQ. ad peripheriam. Hoc suppono cognitum (sin minus videndum an haberi queat per conicas. (♃)), suppono etiam Guldini, Hugenii, Pascalii demonstrata esse.

[*Anhang*]

[*Zu S. 145 Z. 6:*]

De ungulis iam Greg. a S. Vincentio.

Figurae centrobarycae sunt, in quibus pondera punctorum lineis distantiarum a fulcro super ipsa puncta erectis repraesentantur, quales sunt ungula Pascaliana, cuneus Hugenianus, scutella nostra. Ungula Pascaliana est species cunei Hugeniani. Ungula Pascaliana et cuneus Hugenianus bisecantur plano per punctum aequilibrii transeunte ad fulcrum perpendiculare. Scutella nostra habet hoc longe amplius, ut ab omnibus planis per punctum aequilibrii transeuntibus bisecetur. Hinc facile videtur quadratura eius figurae haberi posse; cum semper secetur in partes dissimiles inquirendum ex centrobarycis quam cognationem habeat sc⟨utella⟩ cum aliis figuris, v. g. ex revolutione ortis.

---

6 De ungulis: s. Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, Buch IX.

[*Zu S. 159 Z. 3 – S. 160 Z. 4:*]

1	2	3	4	5	6
$\frac{1}{21}$	$\frac{2}{21}$	$\frac{3}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{5}{21}$	$\frac{6}{21}$
$\frac{21}{6}$	$\frac{42}{6}$	$\frac{63}{6}$	$\frac{84}{6}$	$\frac{105}{6}$	21
$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{9}{6}$	$\frac{16}{6}$	$\frac{25}{6}$	$\frac{36}{6}$

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$$

$$6 \;—\; 5 \;—\; 21 \qquad \frac{105}{6} = 5 \frown 21$$

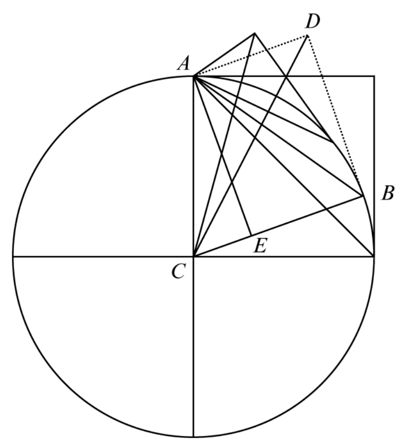
(*1*)	a	b	c	d	(*2*)	1	*L*	
	a	2a	3a	4a				
$\frac{6}{21}$	$\frac{21}{6}$	$\frac{42}{6}$	$\frac{63}{6}$	$\frac{84}{6}$	$\frac{105}{6}$	21	*erg.*	$\frac{1}{6}$ *L*
		7	9	12	16	21	*erg. u. gestr.*	
	$\frac{1}{21}$	$\frac{4}{21}$	$\frac{9}{21}$	$\frac{16}{21}$	$\frac{25}{21}$	$\frac{36}{21}$	*gestr.*	

11. DE CHORDIS IN CIRCULO. DE HEMISPHAERII ET SPHAEROEIDUM SUPERFICIEBUS

[Frühjahr 1673]

Überlieferung: L Konzept: LH 35 XIV 2 Bl. 70–71. 1 Bog. 2°. 4 S. Brieffaltung. Beginn in blasserer, Fortsetzung (ab S. 171 Z. 8) sowie Ergänzung zu S. 165 Z. 3–6 in kräftigerer Tinte.
Cc 2, Nr. 619

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück stellt eine Vorstufe von N. 12 dar.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Si chorda AB cognitae quantitatis ducatur intra circuli quadrantem et ex centro C iungantur radii AC. BC, tangensque BD ex B ducatur in partes A. cui ducta ex A occurrat ad angulos rectos quaeritur quantitas ipsius AD vel DB.
Datae sunt AC vel $BC = (a)$. et $AB = (b)$. quaesita est AD vel $BE = (x)$.
Ergo DB vel AE est $= (Rq\, b^2 - x^2)$. EC est $a - x$. Eius quadratum est $a^2 + x^2 - 2ax$.

9 [*Fig. 1*]: Leibniz hat in der Figur sowie anfänglich im Text kleine Buchstaben verwendet; dann hat er im Text, nicht aber in der Figur zu Großbuchstaben korrigiert. Der erst im Laufe der Rechnung eingeführte Punkt E ist bereits in der Figur groß geschrieben.

addatur quadrato $AE = b^2 - x^2$. fiet $a^2 + b^2 - 2ax = \square$ de AC seu a^2. Ergo $b^2 - 2ax = 0$. Ergo $b^2 = 2ax$. Ergo $\dfrac{b^2}{2a} = x$.

Componantur chordis in semicirculo ductis quadrata chordae cuiusque ad angulos rectos, fiet figura solida ungulae cuiusdam specie, quam appellare possis u n g u l a m c h o r d a r u m aequalis quartae parti cylindri cuius rectangulum generans est quadratum diametri.

Quaestio circa transmutationes figurarum, ponantur omnes chordae concurrentes in uno puncto A. ita inflecti ut fiant parallelae, quaeritur an altitudo figurae productae futura sit eadem cum arcu semicirculi, seu an is transiturus sit in rectam. Ita vicissim si arcus semicirculi ABC in rectam deflectatur et chordae intelligantur fixae in arcu, mobiles ab altero latere, quaestio an reventurae sint parallelae.

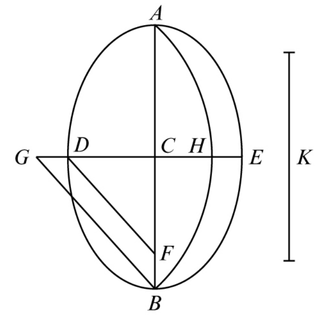
P r o b l e m a H u g e n i i *Horol. oscill.* part. 3 prop. 9.: Sphaeroeidis oblongi superficiei curvae circulum aequalem invenire.

3–6 *Ergänzung:*

Ergo ad arcum semicirculi in rectam extensum applicentur omnia quadrata b^2. seu chordarum, et earum loco, cum duo quaelibet quadrata chordarum quadrato diametri aequentur, eorum in quam loco, quadrata diametri applicentur dimidio arcui, seu arcui quadrantis, vel arcui semicirculi applicetur rectangulum cuius unum latus est diameter, alterum semidiameter. Solidum inde productum dividatur per diametrum, relinquetur rectangulum sub semidiametro et arcu semicirculi, quod si dimidietur, quia triangula dimensi sumus: habebitur rectangulum sub radio et arcu quadrantis circuli aequale semicirculo, quod convenit demonstrationi Archimedeae, certum nota veritatis.

---

12 P r o b l e m a : HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 74 (*HO* XVIII S. 212–215), Leibniz reproduziert Huygens' Figur und Text; s. dazu auch N. 2 S. 43.



[*Fig. 2*]

Esto sphaeroeides oblongum, cuius axis AB. centrum C. sectio per axem ellipsis $ADBE$, cuius minor diameter DE. Ponatur DF aequalis CB. seu ponatur F alter focorum ellipseos $ADBE$. rectaeque FD parallela ducatur BG. occurrens productae ED in G. centroque G. radioque GB describatur super axe AB. arcus circumferentiae BHA. Interque semidiametrum CD et rectam utrisque aequalem arcui AHB. et diametro DE. media proportionalis sit recta K. Erit haec radius circuli qui superficiei sphaeroeidis $ADBE$ aequalis sit.

Haec ille sine demonstratione. Nunc opus est ut rectam GB per calculum inveniamus. Suppono dari rectam BC maximam ellipseos semidiametrum (a). et DC minimam (b). Porro DF est $= a$. ergo $CF = Rq\, a^2 - b^2$. Iam ut est CF $Rq\, a^2 - b^2$ ad CB a. ita est DF a (aequalis CB) ad GB quaesitam. Ergo GB vel GA vel GH erit $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - b^2}$. ac proinde DF vel CB est media proportionalis inter CF et GB.

Ergo regula ita fieri poterit: Si sint tres proportionales, distantia foci a centro ellipseos, [semidiameter] ellipseos maior, et tertia quaedam recta, ea recta radius est quo describitur arcus [AHB].

Illud tantum restaret indagandum, quota circumferentiae sui circuli portio sit, arcus AHB. Sed hoc non sciemus, nisi in iis ellipsibus, ubi notus est nobis angulus pariter CGB et eius chorda CF quales pro lubitu fingi possunt multae ex iis polygonis regularibus quae geometrice haberi possunt.

15 diameter *L ändert Hrsg.* 16 f. arcus | AHD *ändert Hrsg.* |. | Possum et compendiosius dicere: Si a quadrato maioris diametri detrahatur quadratum minoris residui *(1)* latus erit *(2)* erit recta G *gestr.* | Illud *L*

Superficies sphaeroeidos, est ad superficiem sphaerae cuius circulus maior seu basis hemisphaerii est aequalis basi hemisphaeroeidos, ut peripheria ellipseos ad peripheriam circuli. Fabri.

Regnauld. Superficies sphaeroeidis est aequalis superficiei cylindri cuius basis ellipsis genitrix, altitudo axis alter, sub quo revolutio facta non est, seu rectangulo sub peripheria ellipseos et diametro qui axis non fuit.
Ideo superficies sphaeroeidis lati ad superficiem sphaeroeidis longi eiusdem ellipseos, est ut axes revolutionis reciproce, seu ut diameter minor ad maiorem.

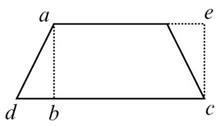
Nota si semicirculum cogitemus esse polygonum, componetur hemisphaerium ex multis frustis conicis, et superficies eius ex multis superficiebus conicis. Non potest intelligi sphaera corpus polygonum; uti circulus, planum; quia in solidis non dantur plura quam 5 corpora regularia. Ergo circuli tantum omnes in hemisphaerae in polygona resolvendi sunt, ut generator semicirculus, cum omnibus quos percurrit, et circuli qui a sinubus describuntur.

Ponantur omnia haec facta hexagona, ita ut hexagonum generans transeat semper per angulos hexagonorum basi parallelorum. Inter duo ergo semihexagona generantia intercipientur 5 hedrae planae, inaequales, ex quibus summa et ima, penesumma et peneima aequales et similes; media est rectangulum erectum, cuius altitudo seu duo latera opposita erecta, horizonti perpendicularia, si axis sphaerae horizonti parallelus cogitetur, sunt duo quaedam latera hexagoni generantis; reliqua duo horizonti parallela, sunt latera duo hexagonorum, quorum diameter seu ex centro in angulum ducta, est sinus seu recta basi parallela ducta ex axe in angulum quem medium latus semihexagoni generantis facit cum reliquis duobus lateribus.

10 conicis *(1)* . Ut *(2)* , ergo tota superficies hemisphaerii in conum explicetur. *(3)* . Non *L*
17 intercipientur *(1)* sex *(a)* figurae pla *(b)* hedrae planae *(2)* 5 *L*

---

3 Fabri: *Synopsis geometrica*, 1669, S. 284 f. 4 Regnauld: Die (falsche) Berechnung des Drehellipsoids durch F. Regnauld ist abgedruckt in: B. Monconys, *Journal des Voyages* Tl 3, 1666, Lettres S. 15–24. Hier sowie S. 171 Z. 8 u. 15 bezieht sich Leibniz auf den Hauptsatz sowie Korollar IV u. V.



[*Fig. 3*]

Mediae duae hedrae sunt quadrata semiparallelogramma, quorum duo latera summum et imum sunt parallela inter se et horizontem sed inaequalia, latera vero dextrum et sinistrum aequalia sed ad se invicem et horizontem inclinata. Basis maior hedrae praecedentis semper est minor, nisi cum duae bases seu horizonti parallelae aequales sunt, antecedentis, at latera aequalia, portiones sunt semihexagoni generantis, latera nempe, ac proinde semper aequalia.

Hinc intelligitur bases continue decrescere ut sinus, at non ut sinus divisa diametro in partes aequales, sed diviso arcu in partes aequales.

Omisi addere duas hedras extremas summam et imam esse triangula quorum basis superior evanescat in punctum.

Sed resumam quod dixi: altitudines semper sunt aequales, porro eiusmodi semiparallelogramma, sicut *adce*. fiunt ex altitudine seu distantia parallelarum, in latus minus ut *ab* in *bc* vel *ae*. Ergo, et hedrae illae crescent continue ut sinus arcuum aequalium ex axe ducti. Hedrae iam illae ad se invicem inclinatae in unum planum explicentur. Erunt infinita rectangula sibi imposita eiusdem altitudinis, quae erit recta arcui semicirculi aequalis, sed quorum bases continue decrescunt, ut sinus aequalium arcuum infinitorum, quae evanescent tandem in punctum.

[*Fig. 4*]

Abscindi potest superior aequalis inferiori, et ita generabitur tantum hemisphaerii superficies, *ab* aequalis arcui quadrantis.

Porro totum, hoc *abcd.* ducendum in peripheriam, cum in singulis eius chordis infinitis idem eveniat[;] orietur plano isto *abcd* in rectam peripheriae aequalem ducto, solidum prisma cuius basis rectangulum sub arcu quadrantis et peripheria, altitudo seu crassities ipsum planum *abcd.* Sed cum istud planum crassitiei sit infinite parvae ea negligi poterit. Unde sequeretur rectangulum sub peripheria et arcu quadrantis aequari superficiei hemisphaericae. Quod absurdum est, ideo non ita fieri debet applicatio, ut negligatur latitudo, sed potius ista infinita plana exigua disponenda in eandem rectam, in quam peripheria extensa est. Ibi nihil falsi quidem oritur, sed apparet plana ista latitudinis infinite parvae, a se invicem distare, neque complere spatium quod si iam circa punctum *b.* in quo omnia concurrunt in circulum disponi intelligantur. Itidem ob nimiam longitudinem complebunt spatium, seu magis eicientur, ut expandant sese, arcus enim quadrantis non est tantus, quantus est diameter circuli generalis. Is autem diameter est radius circuli superficiei hemisphaerii aequalis, ut aliunde constat. Quare nota[:] si eiusmodi plana super peripheriam in recta extensa constituta intelligantur; aequatur rectangulum, si basis ducatur in eam altitudinis partem quae est ad totam, ut altitudo hemisphaerii, seu radius circuli generatoris ad arcum quadrantis.

An potius erratum a me in eo est, quod altitudines semper dixi aequales, imo potius, fit altitudo quadrato differentiae inter duas parallelas, seu $\square^{\text{to}}$ *db* subtracto a quad. *ad* resid. rad. q. erit altitudo. Differentia omnium sinuum est sinus maximus nempe radius. Sed hic non scimus omnia quadrata differentiarum.

Res profundissimae speculationis[:] Quae ex quibus compressione oriantur, ut ex hemisphaerio super basin posito ictu plani paralleli ad basin eius, fiet circulus, et ita ex quadrante hemisphaerii, fiet quadrans circuli. Sed si quadrans hemisphaerii stet solus, plane alia producetur figura, quam determinare artis summae foret, adde si planum comprimens non sit parallelum basi, sunt infiniti casus.

6–8 *Daneben großes NB*

3 prisma *erg. L* 10 f. longitudinem | non *gestr.* | complebunt spatium, *(1)* sed a se invicem divariantur nimis, *(2)* seu *L*

Caeterum displicet mihi methodus P. Fabri, qui planum superficiei hemisphaerii aequale ita producere conatur. Deflectit aream quadrantis in rectam, eique ad angulos rectos adiungit peripherias itidem deflexas in rectam, hoc putat esse aequale superficiei, sed cum altitudo hic et basis sint idem, arcus scilicet quadrantis, in rectam inflexus (posito nos quaerere superficiem quadrantis hemisphaerii), et applicatae crescant ut sinus, figura ista foret quadrans circuli, et foret proinde superficies hemisphaerii aequalis quadranti circuli cuius radius est arcus quadrantis. Idem foret circulus cuius radius est arcus quadrantis, et circulus cuius radius est quadruplus radii. Ergo arcus quadrantis foret quadruplus radii. Quod est absurdum. Ideo quod dixit Fabri de superficiei sphaeroeidis ratione ad superficiem hemisphaerii est paralogismis nixum.

Iam Hugenii ac Regnaldi dimensiones comparemus.

Iuxta Hugenium[:] Semidiametrum minorem ellipsis dixi (b). maiorem (a). Radium GA ostendi esse $\dfrac{a^2}{Rq\,a^2-b^2}$. Ratio arcus ad hunc radium, AHB ad hunc radium esto β. eritque arcus: $\dfrac{a^2\beta}{Rq\,a^2-b^2}$ cui arcui addatur diameter minor DE. qui est $2b$. fiet

$$\frac{a^2\beta}{Rq\,a^2-b^2}+2b=\frac{a^2\beta+Rq\,4b^2a^2-4b^4}{Rq\,a^2-b^2}.$$

Iam media proportionalis inter hanc quantitatem, et semidiametrum $CD=b$. est

$$Rq\colon \frac{a^2b\beta+Rq\,4b^4a^2-4b^6}{Rq\,a^2-b^2}$$

aequalis radio circuli, qui superficiei sphaeroeidis futurus est aequalis. Huius radii quadratum est:

15

$$\textit{Nebenrechnung}: \qquad \begin{array}{l} Rq\,4b^2 \\ \underline{Rq\,a^2-b^2} \\ Rq\,4b^2a^2-4b^4 \end{array}$$

---

1 displicet: zu dem Folgenden vgl. H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 75–77 u. S. 285 f. sowie N. 1 S. 14 f., 18 u. 21. Eine Würdigung des Vorgehens von Fabri gibt E. A. Fellmann, *Die mathematischen Werke von H. Fabry*, 1959, S. 14 f. u. 18. 12 f. dixi, ostendi: s. o. S. 166 Z. 10 u. 12.

$$\frac{a^2b\beta + Rq\,4b^4a^2 - 4b^6}{Rq\,a^2 - b^2}.$$

Unde fieri poterit circulus, si per β rationem [arcus ad radium], et aliquid aliud praeterea notum nobis, modo ratio arcus AHB ad peripheriam sui circuli nota sit, quod vocemus α. Ac proinde per $\dfrac{\beta\alpha}{\cancel{\alpha}}$ id quadratum multiplicetur, fiet:

$$\frac{a^2b\beta^2\alpha + \beta\alpha Rq\,b^4a^2 - 4b^6}{\cancel{\alpha}Rq\,a^2 - b^2}.$$

Quod aequatur superficiei sphaeroeidis, secundum Hugenium.

[*Fortsetzung*]

Videamus iam et secundum Regnaldum. Ait Regnaldus: superficies sphaeroeidis est ad aream ellipseos genitricis ut peripheria ellipsis ad arcum quadrantis circuli cuius radius est semidiameter ille ellipsis qui axis circumvolutionis fuit, hoc loco AC vel CB.

Ellipsi circulum aequalem ita inveniemus. Rectangulo sub duobus diametris $4ab$ fiat aequale quadratum, erit $Rq\,4ab$ diameter circuli ellipsi aequalis, et quadratum ab erit quadratum radii. Unde fiet circulus, si per rationem quadrati radii ad circulum quae est $\beta\alpha$. multiplicetur, fiet $ab\beta\alpha$ circulus ellipsi aequalis.

Proportio stabit sic: Ut est arcus quadrantis ad peripheriam ellipsis, ita est area ellipsis ad sphaeroeidis superficiem. Ergo ut est [area circuli ellipsi aequalis ad arcum quadrantis], ita superficies sphaeroeidos ad peripheriam ellipsis.

2 radii ad arcum *L ändert Hrsg.* 4–6 per *(1)* $\alpha\beta$ *(2)* $\dfrac{\beta}{\alpha}$ id quadratum multiplicetur, fiet: $\dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}\beta^2 + \beta\mathrm{Rq\,b}^4\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{b}^6}{\alpha\mathrm{Rq\,a}^2 - \mathrm{b}^2.}$. *(3)* $\dfrac{\beta\alpha}{\cancel{\alpha}}$ ... $\dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}\beta^2\alpha + \beta\alpha\mathrm{Rq\,b}^4\mathrm{a}^2 - 4\mathrm{b}^6}{\cancel{\alpha}\mathrm{Rq\,a}^2 - \mathrm{b}^2}$. *Diese Korrektur in kräftigerer Tinte.* Quod *L* 8 Regnaldum. *(1)* Ellipsis genitrix recte revocetur ad circulum. Quaeratur media proportionalis inter duas semidiametros a. et b. erit Rq ab. cuius □ est ab. inscriptum circuli ellipsi aequalis. Ratio autem quadrati inscripti ad circulum est $\dfrac{\beta}{\alpha}$. Ergo circulus ellipsi genitrici aequalis est $\dfrac{\mathrm{ab}\beta}{\alpha}$. *(2)* Ait Regnaldus: superficies | curva *gestr.* | sphaeroeidis genita ex revolutione ellipseos circa axem est ad aream ellipseos ge *(3)* Ait *L* 16 f. arcus ad quadrantis ad aream circuli ellipsi aequalis *L ändert Hrsg.*

---

4 fiet: an Stelle von $\alpha\beta$ hätte Leibniz mit $\dfrac{\beta}{2\alpha}$ multiplizieren müssen, zudem fehlt in dem folgenden Ausdruck im ersten Glied unter der Wurzel des Zählers der Faktor 4; beide Versehen vererben sich fort. Ein weiteres Versehen geschieht beim Übergang zur Schlussgleichung in S. 172 Z. 5.

$$\text{Ergo}\quad \frac{\text{circ.} = \text{ell.}}{\text{arc. quadr.}} = \frac{\text{sphaer. sup.}}{\text{periph. ellips.}}.$$

$$\text{Ergo}\quad \frac{\text{circ.} = \text{ell.} \frown \text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr. semiax. } AC} = \text{sphaer. sup.}$$

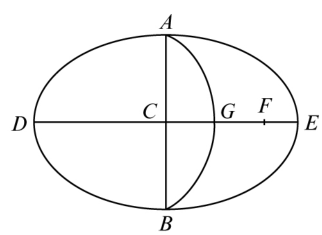
$$\text{Ergo}\quad \frac{ab\beta\alpha \frown \text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr.}} = \frac{\beta^2\alpha a^2 b + \beta\alpha Rq\, b^4 a^2 - 4b^6}{Rq\, a^2 - b^2}.$$

$$\text{Ergo}\quad ab \frown \frac{\text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr.}} = \frac{\beta a^2 b + Rq\, b^4 a^2 - 4b^6}{Rq\, a^2 - b^2}.$$

$$\frac{\text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr.}} = \frac{\beta a^2 \cancel{b} + Rq\, b^{\cancel{4}3} a^2 - 4b^{\cancel{6}5}}{Rq\, a^4 b^{\cancel{2}} - b^{\cancel{4}3} a^2}.$$

Hinc apparet inventa ratione peripheriae ellipticae ad peripheriam circuli inveniri quadraturam circuli, imo curvae parabolicae, et quadraturam hyperbolae, ac per consequens omnium sectionum conicarum. — Inventa quoque curva parabolica vel quadratura parabolae de his quoque constabit.

Nam quod ad sphaeroeidis lati superficiem[:]



[*Fig. 5*]

Sit rursus focorum alteruter F. divisaque bifariam FC in G. intelligatur parabola AGB cuius basis AB. vertex G. aio inter DE et curvam parabolicam mediam proportionalem esse radium circuli superficiei sphaeroeidi aequalis.

DE est $2a$. Curva parabolica esto x. Erit $Rq\, 2ax, \frown \alpha\beta = \dfrac{\text{circ.} = \text{ell.} \frown \text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr. ax. } CE}$.

---

10 ad sphaeroeidis lati superficiem: Leibniz reproduziert Figur (ohne die Hilfsgröße H) und Text aus Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 75 (*HO* XVIII S. 214 f.); s. dazu auch N. 2 S. 43. Der anschließende Vergleich mit dem Wert von Regnauld ist fehlerhaft. Im Folgenden erkennt Leibniz die Fehlerhaftigkeit der Regnauld'schen Argumentation.

seu $Rq\,2ax, \frown \alpha\beta = \dfrac{\text{circ.} \;=\; \text{ell.} \;\frown\; \text{periph. ell.}}{b \frown \alpha\beta\gamma}$. seu

$$Rq\,2ax \frown \cancel{\alpha}\cancel{\beta} = \frac{ab\cancel{\beta}\cancel{\alpha} \frown \text{periph. ell.}}{\text{arc. quadr.}(b \frown \alpha\beta\gamma)}$$

Haec posita veritate Regnaldinae ratiocinationis, sed vereor ne ei insit paralogismus. Nam eodem argumento, quo ille conclusit superficiem sphaeroeidis cylindricae aequalem, concluderes etiam peripheriam ellipsis peripheriae circuli aequalis ellipsi aequalem, quod scilicet similes peripheriae ellipticae totam ellipsin componant, ut similes sphaericae sphaeram. Ergo fore ellipticam ad circularem, ut sphaeram ad sphaeroeidem, cum tamen aequalis esse non possit. Circulus enim non foret isoperimetrarum maxima figura.

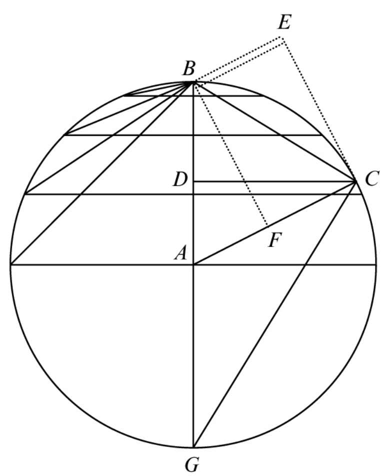
12. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE ℷ
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 285–290. 3 Bog. 2°. 12 S. Bogenzählung 1–3, zusätzlich Bogenmarkierung ℷ. Mehrheitlich 3,5–4,5 cm breite Randstreifen für Nebenbetrachtungen und weitere Zusätze. Auf Bl. 286 r° oben, mittels Trennstrich und Zwischenraum abgesetzt, isolierte Textstelle = S. 179 Z. 22–24; weitere isolierte Stellen auf Bl. 289 r° = S. 196 Z. 18 sowie Bl. 290 r° = S. 199 Z. 22–24. — Auf Bl. 290 v° unten, mit dem Schluss von N. 12_3 überschrieben, gegenläufig N. 13.
Cc 2, Nr. 617

Datierungsgründe: s. N. 9.

12_1. PLAGULA PRIMA

[*Teil 1*]



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Esto EC. tangens in puncto C. circuli AB. quaeritur intervallum eius tangentis a puncto B. seu recta BE.

AB. radius esto (a). BC. chorda arcus dati esto $BC = (b)$. et BE. quae quaeritur esto $= (x)$.
Erit $EC = (\sqrt{b^2 - x^2})$. Erit $AF = a - x$. eius $\square$ $a^2 + x^2 - 2ax$. addatur ad $\square$ BF vel $EC = b^2 - x^2$. productum $a^2 + \cancel{x^2} - 2ax + b^2 - \cancel{x^2} = a^2$. Ergo $-2ax + b^2 = 0$. Ergo $b^2 = 2ax$. Ergo $\dfrac{b^2}{2a} = x$. Ergo theorema:
Rectangulum sub diametro et intervallo tangentis, a puncto in circuli circumferentia sumto aequale est quadrato chordae arcus intercepti inter punctum contactus et assumtum.

Sed videamus an ipsum x. exprimi possit aliter, et simplicius, b^2. scilicet resoluto per aequationes eius.
Manifestum est CG. esse $Rq\ 4a^2 - b^2$. Hanc ductam in $BC = b$. dare triangulum $BCG = \dfrac{Rq\ 4a^2b^2 - b^4}{2} = \dfrac{2a \frown DC}{2} = a \frown DC$. Ergo $DC = \dfrac{Rq\ 4a^2b^2 - b^4}{2a}$. Hinc intelligi quoque ut obiter dicam potest quomodo sit sinus rectus ad intervallum tangentis, scilicet ratio eorum erit $Rq\ \dfrac{b^4}{4a^2b^2 - b^4}$. seu $Rq\ \dfrac{b^2}{4a^2 - b^2}$. vel inverso modo $Rq\ \dfrac{4a^2 - b^2}{b^2}$. vel $Rq \llcorner \dfrac{4a^2}{b^2} - 1 \lrcorner$. Sed haec ratio continue mutatur, quia manente a. semper mutatur b. Quodsi ex progressu rationis liceret ratiocinari summae intervallorum, seu areae segmenti, ratio ad summam sinuum rectorum seu aream cognati cuiusdam quadrati haberi posset, et per consequens non quadratura tantum, sed et sectio angulorum universalis.

Sed pergamus. Habito DC. habebitur iam et DB. Primum auferatur quadr. DC. a $\square$.BC. residui Rq erit DB. ergo $DB = Rq : \overline{b^2 - \dfrac{4a^2b^2 - b^4}{4a^2}}$. ergo $\square\ DB = b^2 - \dfrac{4a^2b^2}{4a^2} + \dfrac{b^4}{4a^2}$. seu $b^2 - b^2 + \dfrac{b^4}{4a^2}$. seu $\dfrac{b^4}{4a^2}$. Ergo $DB = \dfrac{b^2}{2a}$.

17 aream *(1)* dati *(2)* cognati *L* 19 et DB. *(1)* idque *(a)* duobus modis, quorum utrumque sequamur *(b)* pluribus modis, quos sequemur singulos, ut ex eorum comparatione aliquid usus *(aa)* ducamus *(bb)* hauriamus. *(2)* Primum *L*

At supra ostensum est $\frac{b^2}{2a}$ esse intervallum tangentis a puncto dato. Ergo demonstratum habemus intervallum puncti in circumferentia assumti, a tangente alterius puncti in eadem circumferentia sumti esse sinum versum arcus inter utrumque punctum intercepti. Et hinc iam confectum habemus: summam omnium sinuum versorum, seu figuram sinuum versorum aequari duplo segmento arcus, maximi sinuum versorum.
Et hanc summam sinuum versorum finitorum ductam in latus polygoni, aequari duplo segmento polygoni, eandem cum arcu supradicto basin habenti.
Hinc cum sinus versi iam calculati habeantur, facile poterimus quodcunque segmentum polygoni metiri circumferentia divisa v.g. in 100,000 partes. Et ita facillime metiri possumus omnia circuli segmenta quanta volumus approximatione. Facile autem habentur sinus versi ex tabula sinuum, sunt enim chordarum, id est duplorum sinuum rectorum arcuum sequentium quadrata per diametrum divisa.

Hinc res emergit observatione digna: Summa omnium sinuum rectorum est radii quadratum. Summa quadratorum duplorum sinuum rectorum, divisa per radium dabit aream segmenti quadrantis. Enuntiemus sic potius: Summa omnium sinuum rectorum semicirculi est duplum quadratum radii, vel dimidium quadratum diametri. Summa omnium sinuum versorum semicirculi duplicata est aequalis semicirculo, seu summa omnium sinuum versorum semicirculi est aequalis quadranti. Ergo summa omnium sinuum versorum totius semicirculi quadruplicata aequalis est circulo. Et proinde cuilibet sectori

---

10 Nota[:] metiri possumus segmenta circuli, seu potius polygoni circularis, summa sinuum versorum ducta in latus polygoni. Idem et caeteris curvis proportione quadam.

11 *In anderem Duktus ergänzt:* Imo iam extat tabula sinuum versorum apud Maginum.

4 habemus *(1)* duplum summae *(a)* sinus versi *(b)* omnium sinuum versorum, seu duplum *(aa)* lineae *(bb)* figurae sinuum versorum aequari segmento *(2)* summam *L* 6 finitorum *erg. L* 6 f. polygoni | duplicatum *erg. u. gestr.* | , aequari | duplo *erg.* | segmento *L*

---

1 ostensum est: Damit hat Leibniz im Wesentlichen die Beziehung $2sin^2\frac{\alpha}{2} = 1 - cos\,\alpha$ gewonnen. 4 confectum habemus: Zunächst erhält Leibniz ein unrichtiges Ergebnis (s. die zugehörige Lesart). Im Zuge der Überarbeitung berichtigt Leibniz, jedoch nur an dieser einen Stelle. 22 extat tabula: G. A. Magini, *Primum mobile duodecim libris contentum … ac praeterea magnus trigonometricus Canon … ac magna primi mobilis Tabula*, Bologna 1609.

aequalis est portio eius pro ratione sectoris ad circulum. Hinc differentia inter certam portionem summae sinuum versorum totius semicirculi pro ratione sectoris, et summam sinuum versorum, arcus sectoris, est aequalis triangulo sectoris. Hinc cum summa sinuum [versorum] quadrantis aequetur duplicato segmento quadrantis et semicirculi aequetur quadranti, ergo differentia inter utrasque aequabitur dimidio quadrato radii seu triangulo quadrantis. Hinc exhiberi potest summa quaedam sinuum versorum, aequalis summae cuidam sinuum rectorum.

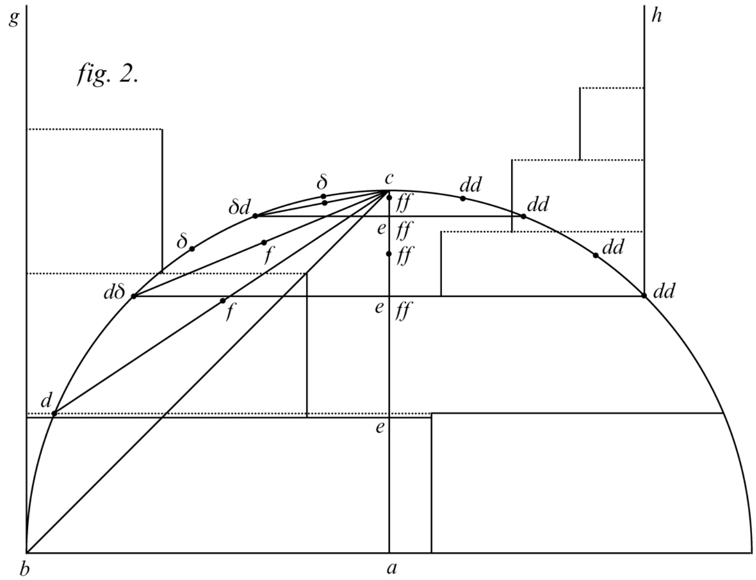
Porro cum constet ex chordis ut BC. fieri sinus versos, si scilicet quadrata chordarum per diametrum [dividantur], videndum an non istae chordae sint sinus recti, aut potius sinuum rectorum dupli. Nam cum summa haberi possit sinuum rectorum, si quadratorum quoque sinuum rectorum summa haberi posset absolute, et si possit haberi quoque harum chordarum summa, haberemus summam sinuum versorum, et proinde quadraturam circuli.

1+3+6 *Jeweils am Rande (als Zeichen für* error*):* e

11 NB. Sed summa quadratorum sinuum rectorum non potest haberi absolute. Est enim aequalis cylindro, cuius basis est figura, altitudo radius. Eiusdem sedecuplicata (puto) est summa quadratorum chordarum arcus dupli. Haec divisa per radium dat figuram sedecuplicatam, quae videtur debere aequalis esse segmento, quia id fit ex summis chordarum per radium divisis.

12 Ostendam autem haberi chordarum summam, nec nisi summam quadratorum deesse.

3 cum *(1)* summae sinuum | versorum *gestr.* | *(a)* totius semicirculi *(b)* quadrantis aequentur quadranti et semicirculi aequentur segmento *(2)* summa *L* 4 versorum *erg. Hrsg.* 4 duplicato *erg. L* 9 multiplicentur *L ändert Hrsg.*



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

Esto in fig. 2. arcus quadrantis abc. divisus in partes aequales quotcunque in punctis d. chordae erunt rectae cd. sinus recti erunt rectae ed. sinus versi rectae ce. Aio si chordae dc. dimidiatae df. applicentur radio ca. eas non fore sinus rectos quadrantis. Ponantur enim per eam applicationem puncta f. incidere in rectam ca. ibique exprimi punctis ff. (quae mox determinabimus), arcus autem dc. ita constitui, ut eorum media puncta δ. incidant semper in c. extrema autem c. in puncta dd. Manifestum est arcus $dd-dd$. esse aequales inter se, et dimidios singulos singulorum arcuum $d-d$. Ideo totum arcum $c-dd$ esse dimidium totius cb. et rectam ce. dividi a punctis ff. in sinus versos et chordarum cd. dimidias esse sinus rectos arcus dimidii, et coincidere alternis sinubus rectis arcus praecedentis atque ideo summam semichordarum ad summam sinuum rectorum esse ut summa dimidiata sinuum rectorum arcus dimidii ad summam sinuum rectorum arcus dati.

Summa inquam dimidiata, sunt enim summae dimidii quidem arcus, sed eius divisi in partes aequales dimidias partium aequalium arcus dati. Cumque summa sinuum rec-

11 f. sinuum *(1)* versorum *(2)* rectorum *L*

torum (vel versorum) semper intelligenda sit ducta in aliquam partium arcus aequalium, ergo si arcus eiusdem partes sunt in ratione dupla, etiam summae sinuum erunt in ratione dupla. Ergo si quaerimus summas semichordarum sufficit sumere summam sinuum rectorum arcus dimidii dimidiatam. Semper enim eadem est summa sinuum, utcunque dividatur arcus in partes aequales minores assignabilibus, quia semper ea summa fit ex radio in radium abscisso sinu verso arcus supplementi ( ) ducto (vid. Pascal.), qui semper idem, utcunque dividatur arcus. Ergo summae erunt ut partes arcus. Cum autem summa semichordarum sit dimidiata sinuum rectorum arcus dimidiati, erit summa chordarum totius arcus aequalis summae sinuum rectorum arcus dimidii. Quod non debet mirum videri, etsi quaelibet chorda maior sit quolibet sinu arcus dati, summam tamen omnium esse minorem, quia chorda est reapse triangulum vel rectilineum $\underline{cdb}$. etsi minus (altitudine) quolibet dato, cuius basis arcus ut $\underline{db}$. latera duae chordae $\underline{dc}$. et $\underline{bc}$. arcum comprehendentes (etsi arcus esse intelligatur quolibet assignando minor), trilineum autem istud, vel si arcus loco substituatur tangens, triangulum non fit ducta basi tangente in latus, sed in altitudinem, quae longe minor.

Rectius ita, ut chordae summentur, necesse est eas inter se esse parallelas, necesse est etiam eas ductas intelligi in id quod solum determinatum et in aequales partes sectum est, id est in arcum[;] tunc autem sibi longe propius accedent, ut nunc, ubi ad se invicem angulum faciunt, et in spatium exiguum coibunt. Breviter idem est ac si curva $\underline{bc}$. in rectam extendatur parallelam ipsi $\underline{ca}$. manente puncto b. et chordae $\underline{cd}$. affixae maneant punctis d. tantum perpendiculares reddantur rectae $\underline{bg}$. Manifestum est, si dimidiae earum

10 f. *Darüber isoliert:* Nota[:] omnes figurae planae quae bis secari possunt in duas partes similes et aequales ab omnibus rectis per centrum gravitatis transeuntibus ita secabuntur, et omnes solidae quae planis [*Text bricht ab*]

1 f. aequalium *(1)* necesse est summam illic et *(2)* , ergo *L* 4 dimidiatam. *(1)* Ergo ipsa summa chordarum erit *(2)* Semper *L* 6 in *(1)* sinum versum maximi arcus ducto *(2)* radium *L* 15 f. minor. *(1)* At haec mihi iniciunt suspicionem paralogismi in praesentibus, apparet enim summam chordarum aequari ipsi *(2)* Rectius *L*

6 (vid. Pascal.): Leibniz bezieht sich bei seiner Vermutung auf Satz 1 und sein Korollar aus Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 1 u. 4 (*PO* IX S. 61 f. u. 67).

$ff-dd$. arcui $c-dd$ (dimidio arcus $\underline{bc}$.) in rectam $dd-h$. extenso applicentur, productum in $dd-h$. fore producti in $\underline{bg}$. subquadruplum, tum quia dimidiae tantum chordae applicatae sunt, tum quia dimidio tantum arcui. Hinc si chordae integrae applicatae intelligantur arcui $dd-c$. erit adhuc dimidium summae chordarum, applicatarum scilicet arcui cuius est chorda maxima.

Si quis dubitat sumat duas rectas utramque dividat in aequalem numerum partium aequalium. Utrique applicet eodem modo alias rectas tot quot sunt partes aequales, ita ut primam rectam uni parti unius, item uni parti alterius applicet, patet producta fore rectangula tot quot sunt partes aequales vel rectae, et singula rectangula (earundem rectarum applicatarum) ad singula esse, ut sunt duae rectae datae seu axes ad axes, ergo et producta fore ut rectae. Idem ergo hoc quoque loco intelligendum. Concludo ergo et theorema correctum ita enuntio:

Summa chordarum arcus dati est ut summa sinuum rectorum arcus dimidii quadruplicata.

Imo duplicata tantum, quia summam sinuum rectorum arcus dimidii non assumsimus, ut summam sinuum rectorum arcus dati, sed arcus dimidio minoris. Ideo ut pronunciemus de summis sinuum rectorum arcus dimidii simpliciter, id est ita divisi ut arcus datus, dicendum est summam chordarum arcus dati esse summam sinuum rectorum arcus dimidii duplicatam. Breviter[:] semichordae sunt applicatae sinus arcus dimidii in partes easdem numero, sed dimidio minores secti. Haec summa applicatarum ut aequetur summae chordarum arcui dato in partes duplo maiores diviso applicatarum, quadruplicanda est, primum quia erant semichordae tantum, deinde quia applicatae dimidio tantum. Verum haec summa applicatarum non nisi dimidia est summae applicatarum arcus dimidii in partes in quas debet secti.

Imo falsum, demonstrata enim eandem esse summam sinuum rectorum arcus alicuius in partes infinitas divisi sive semel eae partes sint datae, sive alibi, partes sint dimidiae

---

15 f. *Dahinter interlinear:* iusto

19 duplicatam. *(1)* Hinc paradoxum obiectum facile evanescit *(a)* est enim su *(b)* . Imo *(aa)* sic dicendum *(bb)* non est *(cc)* summa applica *(2)* Breviter *L* 20 easdem numero, sed *erg. L* 20 secti. *(1)* Ergo summa earum | est summa harum applicatarum. *nicht gestr.* | *(2)* Haec *L* 24 f. secti. *(1)* Ergo summa *(a)* sem *(b)* chordarum dupla futura summa *(2)* Imo *L* 25 summam *(1)* applicatarum *(2)* sinuum *L* 26 infinitas *(1)* maiores minoresque *(2)* divisi *L*

vel tertiae vel quartae priorum. Nam si partes sunt duplo maiores, sunt etiam duplo pauciores, ergo et applicatae duplo pauciores, omittuntur enim alternis, seu totidem intermediae, quot retinentur; omissa autem quaelibet, a retenta qualibet differt differentia minore qualibet data. Ergo haberi potest pro eadem, ergo etsi applicatae quaelibet ducantur in portionem duplo maiorem priore, tamen id compensatur [si] alia applicata ipsi aequali omissa est. Eadem est demonstratio, licet tertia pars, vel quarta, etc. partis datae assumantur. Idem est etsi partes sint inaequales (modo infinitae), et quaelibet earum duplicetur, vel triplicetur, vel eius $\dfrac{2}{3}$, etc. assumantur. Idem breviter de aequalibus sic conficitur, quia summa sinuum semper est rectangulum ex radio in sinum versum (producto ducto in portionem arcus). Sed iste ductus est nullius momenti, neque enim facit ex plano solidum cum portio illa sit infinite parva, ideo negligetur, ex aequo, sive duplicata, sive simpla, sive dimidia intelligatur. Ergo post tot ventilationes ita concludendum est: Summam chordarum esse quadruplam summae sinuum rectorum arcus dimidii.

NB. Si inventa sit summa quadratorum chordarum, et summa quadratorum sinuum rectorum, differentia eorum erit summa quadratorum sinuum versorum. Nam $\square CE$ est $\square CD - \square DE$. fig. 2. Ergo residuum summae quadratorum sinuum rectorum arcus dati a summa quadratorum sinuum rectorum arcus dimidii, quadruplicata, subtractorum aequabitur summae quadratorum sinuum versorum. Iam summa quadratorum est cylindri quaedam portio; ergo differentia inter illas duas portiones cylindricas, quae aliquando haberi potest, erit summa quadratorum sinuum versorum: eae autem erunt ut differentiae ipsorum segmentorum, multiplicatae per radium (intellige quadruplicationem).

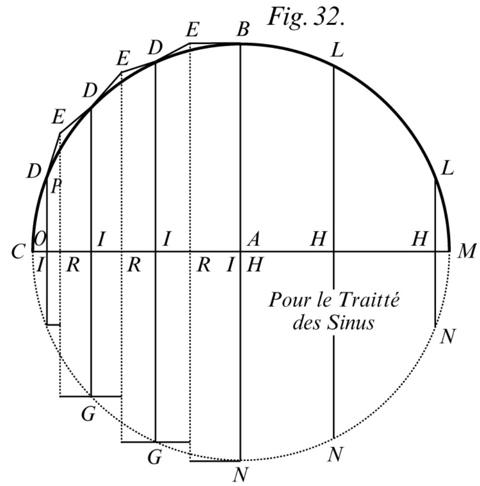
---

13 *Dazu am oberen Rande:* Imo sic[:] summa chordarum est dupla, summa quadratorum chordarum quadrupla sinuum arcus dimidii.

Zusätzlich auf der Gegenseite: Patet hanc demonstrationem esse universalem, etiamsi arcus sit maior quadrante.

1 Nam *(1)* imminuto numero *(2)* si *L* 5 priore, | sunt tamen ae *streicht Hrsg.* | tamen *L* 5 si *erg. Hrsg.* 15 f. versorum. | Nam ... fig. 2. *erg.* | Ergo *(1)* | summa quadratorum sinuum versorum erit *nicht gestr.* | differentia: summarum quadratorum sinuum rectorum arcus dati et quadratorum | sinuum rectorum *erg.* | arcus dimidii *(2)* residuum *L*

Nota[:] sinuum super basin semisegmenti non minus inveniri potest summa quam sinuum super axem, ut in fig. Pascalii 32 ex recta OP. erigantur perpendiculares ipsi OP.



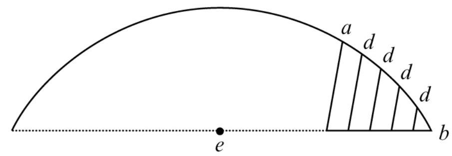
[*Fig. 3*]

Sunt eae sinuum ex CD. in BA. portiones, et a summa sinuum omnium arcus CD. auferatur rectangulum POA. residuum erit summa istorum sinuum in basin semisegmenti.

Hinc (ex hypothesi rectae arcui semisegmenti aequalis) centrum gravitatis omnis arcus circuli haberi potest, distantia scilicet tam a basi quam axe. Imo sufficit ab uno haberi, cadit enim id punctum necessario in rectam ex centro arcum bisecantem. Et hinc patet, data una summa sinuum alteram quoque dari.

Hinc generaliter[:] si sit arcus circuli, et quomodocunque ex eo parallelae ad aliquam rectam demittantur ex punctis infinitis arcum in partes aequales secantibus; semper haberi poterit eorum summa.

2 fig. Pascalii 32: Die Figur fehlt in der vorliegenden Handschrift; sie wurde vom Hrsg. nach dem Pascalschen Original ergänzt. 6 residuum: Die Aussage zur Summe der Sinus wird nur dann richtig, wenn statt des Sinus dessen Quadrat genommen wird. — Der Fehler setzt sich weiter fort.



[*Fig. 4, tlw. Blindzeichnung*]

Ut si arcus sit datus *ab*. et recta quaelibet *be*. in quam ex punctis *d.d.d.* arcum aequaliter secantibus dimittantur sinus, semper summa horum sinuum habebitur. Nota[:] P. Fabri cognovit tantum de arcu quadrantis in rectam deflexo; non, opinor, norat alias portiones etc. videndum tamen.

Nota[:] datur nobis summa quadratorum sinuum versorum, datur et summa sinuum versorum, utraque est summa quadratorum sinuum rectorum certo modo divisa, eo tantum discrimine quod summa [quadratorum] sinuum versorum fit ex summa quadrato-quadratorum sinuum rectorum per radium divisa. Hinc apparet summam sinuum versorum et quadratorum sinuum versorum esse symbolas, seu cognosci eorum rationem inter se (ut v.g. sunt circulus et sphaera), quod usum fortasse habere potest ad summas indagandas altiorum potestatum; aliave.

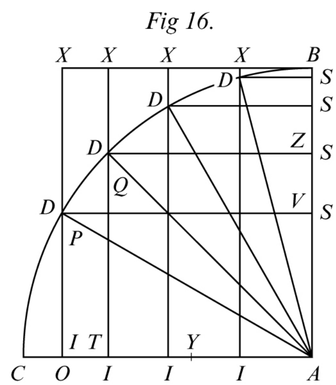
Summa sinuum versorum est quidam circulus vel sector aut segmentum circuli, ut dupliciter demonstrare possum, partim ex generali methodo de intervallo tangentium, partim etiam quia est summa quadratorum chordarum seu cylinder aliquis (cuius basis circulus aut segmentum) divisus per radium. Hinc si ista vera sunt, et verum est quod ait Pascalius de sin. prop. 4. quod summa sinuum versorum arcus aequatur differentiae inter arcum et [basin] ad quam sunt demissi sinus recti, seu distantiam sinuum extremorum; per radium multiplicatae. Quod vereor ut verum sit, daret enim quadraturam.

8 quadratorum *erg. Hrsg.* 18 basin seu eam *gestr. L ändert Hrsg.*

1 [*Fig. 4*]: Die Leibnizsche Figur ist nicht textkonform. Da dies aber keine wesentliche Einschränkung beinhaltet, ist sie vom Hrsg. beibehalten worden. 3 f. P. Fabri cognovit: *Opusculum geometricum*, 1659, prop. V, S. 14 = *Synopsis geometrica*, 1669, S. 336 f. 16 f. ait Pascalius: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 4 (*PO* IX S. 67). Es handelt sich nicht um Satz 4, sondern um das Korollar zu Satz 1. Es lautet im Original: „De la premiere proposition, il s'ensuit que la somme des sinus verses d'vn arc, est egale à l'exez dont l'arc surpasse la distance d'entre les sinus extremes, multipliez par le rayon.“ — Leibniz zitiert in unrichtiger Form. Von daher rühren seine Zweifel und seine Verbesserungsversuche.

Ego aliud theorema formo[:] Summa sinuum rectorum et sinuum versorum constituit quadratum portioni circulari (duo latera recta habentique) circumscriptum seu rectangulo duorum illorum laterum rectorum. Imo id falsum. Nam sic potius? Summa sinuum rectorum ductorum in basin quadrantis (sive arcus sit integer arcus quadrantis sive eius portio inde a termino sumta) et sinuum versorum ductorum in eandem aequatur parti illi basis in quam factus est ductus ductae in radium. Hinc summa sinuum rectorum applicatorum ad arcum quadrantis aequatur summae sinuum rectorum pariter et versorum applicatarum ad radium, seu quadrato radii.

Satis apparet ex comparatis nostris et Pascalianis dimensionibus nihil detegi novum. Sector circuli est ad rectangulum sub radio et distantia sinuum extremorum (vid. fig. Pascal. 16) ut dimidius arcus ad illam distantiam.



[*Fig. 5*]

Possum et invenire summam rectangulorum sinuum versorum et rectorum. Habeo enim summam quadratorum compositorum ex sinubus rectis et versis, quae semper est sinus totus. Nimirum quadratum radii ductum in distantiam sinuum rectorum extre-

6 sinuum *(1)* versorum ductorum in arcum *(2)* rectorum *L* 11 ut *(1)* superficies cylindrica sub arcu et radio *(2)* distantia *(3)* dimidius *L*

10 f. (vid. fig. Pascal. 16): Auch diese Figur fehlt in der vorliegenden Handschrift; sie wurde vom Hrsg. nach dem Pascalschen Original ergänzt. Die Figur wird von Leibniz im weiteren Verlauf des Stückes noch mehrmals herangezogen.

morum. Habeo et summam quadratorum sinuum rectorum et sinuum versorum. Hae duae postremae summae si auferantur a summa quadratorum compositorum, seu radiorum, residuum erit summa rectangulorum duplicata. Nam si a quadrato totius auferantur quadrata partium, restabit summa rectangulorum duplicata.

Nota[:] cum summa sinuum versorum pendeat a summa quadratorum chordarum seu sinuum rectorum, ergo horum data summa summarum seu triangulari, dabitur et summa summarum [sinuum] versorum, seu summa segmentorum sibi superimpositorum donec evanescant. Unde per prop. 11. Pascalii summa segmentorum erit = quadrato arcus + quadrato distantiae sinuum, ductae in radium. Consideranda illa conditio quod incipiendum a sinu minore, puto eius curam cessare, cum totus arcus quadrantis sumitur.

[*Zusatz zu S. 184 Z. 14*]

NB. Pascalius non exhibet summam rectangulorum sinuum rectorum et versorum, exhibet tamen prop. 9. sinuum summam simplicem et pyramidalem aliorum spatiorum, quae sunt summae horum.

$$\begin{array}{cccc} a & b & c & d \\ & b & c & d \\ & & c & d \\ & & & d \end{array}$$

Horum ergo spatiorum summam triangularem et pyramidalem exhibuit nesciens. Habemus ergo horum spatiorum summam simplicem, triangularem, pyramidalem. Ergo et si retro sumantur, habebimus secundum proprietates harum summarum Pascalianas.

---

5 *Zu* Nota *in anderem Duktus*: Annotavit Hugenius dari utramque summam.

7 arcuum *L ändert Hrsg.*

---

8 prop. 11. Pascalii: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 8 f. (*PO* IX S. 75 f.). 13 prop. 9.: Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 7 (*PO* IX S. 72 f.). 22 Annotavit Hugenius: Dies ist eine Verschreibung; vgl. N. 29 S. 534 Z. 8 Variante.

Imo error, haec summa Pascaliana est illorum ipsorum rectangulorum, etsi haec rectangula, ut summa triangularis spatiorum curvilineum circulare complentium $DDII$ (fig. 16) considerari possint. Datur ergo horum $DDII$ partem circuli complentium summa simplex ipsa circularis portio, triangularis, pyramidalis. Hinc earum partium summae et reperiri quoque poterunt, si ab alia quoque parte incipiatur.

Imo rectangula mea sunt sinuum versorum et rectorum, Pascaliana sunt sinuum rectorum et sinuum rectorum sed inverso modo, seu sinuum rectorum et differentiarum sinuum versorum a radio.

Rectangula ista sunto:

$$\begin{array}{llll} ab. & cd. & ef. & gh. \\ ax = b^2. & cx = d^2. & ex = f^2. & gx = h^2. \end{array}$$

id est rectangulorum istorum, sinus [*Text bricht ab*]

12_2. PLAGULA SECUNDA

Mira res[,] detexi, ut sinuum rectorum summa habet rationem ad quadratum diametri ita sinuum versorum ad $\square^{\text{tum}}$ ipsius circumferentiae circuli. Ut illa dat triangulum circulare, ita haec segmentum circulare. Segmenta circuli sunt purae proles lineae curvae, ut triangula, lineae rectae; sectores et ipse circulus sunt proles utriusque. Area segmentorum fit ex arcu in seipsum ex toto vel parte ducto; triangulorum ex recta. Segmentum haberi potest cognito solo arcu; triangulum cognita una quadam recta.

Magni est usus theorema meum quod $\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ e & d & c & b & a \end{array}$ $ae+bd+cc+db+ea$, si partes sunt infinitae, ipsi $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2.$ aequatur.

Idque tam in sinubus, quam applicatis seu ordinatis quadrantis usum habet. Hinc summa rectangulorum illorum seu spatiorum de quibus Pascal. tract. de sin. prop. 9. est aequalis

20 f. *Daneben in anderem Duktus:* falsum est.

14 detexi: vgl. N. 12_1 S. 176 Z. 13–19; die obige Folgerung ist in dieser Form nicht berechtigt.
23 prop. 9.: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 7 (*PO* IX S. 72 f.).

summae quadratorum sinuum rectorum; idem est, si pro sinubus ordinatae. Hinc summa omnium ellipsium rectangulis inscriptorum, vel circumscriptorum aequalis summae omnium circulorum, quadratis in- vel circumscriptorum; et si sint ordinatae, summa omnium illarum ellipsium est aequalis hemisphaerio eius quadrantis revolutione geniti, quia omnes circuli eorum quadratorum hemisphaerium constituunt.

Videndum an data summa triangularium et pyramidalium, ab utroque latere, dari posset summa simplex. Quoniam data summa simplici, et triangularium, et pyramidalium ab uno latere, datur et triangularium ac pyramidalium ab altero latere. Si hoc posset, haberetur quadratura circuli. Possumus enim exhibere figuras rectilineas, quae sint aequales summis triangularibus et pyramidalibus etc. quantitatum, quarundam, quarum summa sit circulus, vel quadrans circuli. Quod magni momenti esse nemo negabit.

Adde aliam proprietatem ad adiuvandam contemplationem, omnes istas summas simplices triangularem constituentes seu quantitates esse rectangula, quorum latera habeant semper tertiam proportionalem talem, ut uni earum adiecta faciat idem, nempe radium.

Sunto ordinatae quadrantis $\begin{matrix} a & b & c & d & e \\ e & d & c & b & a \end{matrix}$.

Rectangula ae. bd. cc. db. ea. quorum summa $= a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$. et summa quadratorum nempe $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2$. cognita iam est aliunde.

Sunt ergo tres proportionales. a. e. $x - a$. item b. d. $x - b$. . item c. c. $+x - c (= c)$. etc.

Ergo aequalia sunt $\begin{cases} e^2 & d^2 & c^2 & b^2 & a^2 \\ ax - a^2 & bx - b^2 & cx - c^2 & dx - d^2 & ex - e^2. \end{cases}$

---

3 Error, non debent esse ordinatae sed sinus, eoque casu cessat hemisphaerii consideratio.

12 f. istas | summas ... quantitates *erg.*; quantitates *streicht Hrsg.* | esse *L* 14 proportionalem *(1)* eandem, radium scilicet circuli, ac proinde quadrata omnium aequari summae omnium ordinatarum (id est toti figurae) in radium ductae. Quod si verum esset *(2)* talem *L*

---

7 Quoniam: PASCAL, *Propriétez des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*, 1658, S. 1 f. (*PO* IX S. 46 f.).

Addantur utrique aequationis parti $a^2+b^2+c^2+d^2+e^2$. fient aequalia:

$$\left\{\begin{array}{lllllllll} 2e^2 & & 2d^2 & & 2c^2 & & 2b^2 & & 2a^2 \\ ax & & bx & & cx & & dx & & ex \\ a & + & b & + & c & + & d & + & e,, \frown x. \end{array}\right.$$

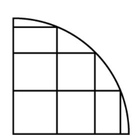
Ergo summa ordinatarum id est ipsa figura, nempe quadrans circuli, ducta in x. radium, aequabitur summae quadratorum ordinatarum duplicatae. Unde sequeretur quadrantem aequari $x \frown \frac{2}{3}x \frown 2$. seu $\frac{4x^2}{3}$. Si x. sit radius et circulus foret $\frac{16x^2}{3}$. Circulus autem fit ex radio et semicircumferentia, ergo $\frac{16x}{3}$. foret semicircumferentia radio posito x. quod est absurdum.

In eo ergo error quod assumtum est ordinatim applicatas reciproce sibi iungi quod falsum est, nec fit nisi in sinubus arcuum aequaliter divisorum. Hinc ergo sequetur summam sinuum rectorum id est radii quadratum, ductam in radium seu cubum radii, aequari summae quadratorum sinuum rectorum duplicatae seu cylindro cuius basis quadrans altitudo radius quod rursus est absurdum.

Error in eo est, quod summam sinuum, in radium ducendorum assumsi quasi iam ductam in arcum. Imo recte id quidem. Alius ergo error, falsa scilicet proprietas, quod a. e. $x-a$. mediae proportionales, nimirum a. non attingit, est tantum radii residuum, non totius diametri, sic ergo[:] $x+a$. e. $x-a$.

---

10 f. *Daneben in Blindtechnik:*



18

$$\begin{array}{rcr} & x + & a \\ & x - & a \\ \hline & -\cancel{ax} - & a^2 \\ x^2 + \cancel{ax} & & \end{array}$$

$$\text{Erit ergo sic} \quad = \left\{ \begin{array}{lllll} e^2 & d^2 & c^2 & b^2 & a^2 \\ x^2 - a^2 & x^2 - b^2 & x^2 - c^2 & x^2 - d^2 & x^2 - e^2 \end{array} \right.$$

$$\text{Ergo} \quad = \left\{ \begin{array}{lllll} 2e^2 & 2d^2 & 2c^2 & 2b^2 & x^2 \\ x^2 & x^2 & x^2 & x^2 & x^2 \end{array} \right.$$

Hinc theorema memorabile, si arcus dividatur in partes aequales quotcunque, finitas vel infinitas, dupla summa quadratorum sinuum aequabitur; quadrato [radii] per numerum partium in quas arcus divisus est, multiplicato; vel etiam, si utraque summa arcui applicetur, seu si quaevis multiplicetur per partem arcus, in quas divisus est, unam. Ergo si arcus dividatur in partes aequales infinitas, dupla summa quadratorum sinuum arcui scilicet applicatorum, aequatur quadrato radii in arcum ducto seu quod idem est parallelepipedo cuius basis est quadratum radii, altitudo arcus. At secundum Pascalium id aequatur solido (duplicato) cuius basis figura, altitudo radius. Dividatur utrumque aequalium per radium, restabit hic figura, duplicata seu semicirculus, illic factum ex radio et arcu, quae iam ex Archimede constat aequalia esse, et si id nondum haberemus hic denuo demonstraretur. Quae est elegans methodi huius confirmatio, contra eos qui erroribus expositam putant, et in specie confirmatur theorema meum, de quadratorum summa $=$ [li] summae rectangulorum.
In prioribus corrigenda est applicatio horum ad ordinatas, vera tamen applicatio earum ad sinus rectos.

S u m m a q u a d r a t o r u m sinuum rectorum aequalis est summae triangulari eorundem sinuum rectorum.

Vid. fig. 16. Pascal. Ibi spatia $DIBA$ vel eorum loco (nihil enim refert) rectangula $DSAI$ sunt summae triangulares ipsorum $DDII$, ita ut primo sint omnia $DDII$, deinde omnia demto minimo $DDOI$ et ita porro, at ista rectangula $DSAI$ omnia simul aequantur

---

14–16 *Dazu am Rande:* Error

19 f. *Dazu am Rande:* falsum

5 arcus *L ändert Hrsg.*

---

10 secundum Pascalium: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. II, S. 1 u. 3 (*PO* IX, S. 61 f. u. 65 f.). 13 ex Archimede: *Dimensio circuli*, prop. I. 21 fig. 16.: s. o. S. 184, [*Fig. 5*].

quadratis omnium sinuum. Ergo summae triangulares sinuum, aequantur summae quadratorum sinuum. Idem eodem modo demonstratur in sinubus versis, in trilineo DXB ductis summam triangularem sinuum versorum, et quod idem est summam segmentorum aequari summae quadratorum sinuum versorum.

Porro summam quadratorum sinuum versorum eodem modo inveniemus quo summam sinuum versorum invenimus; partim per intervalla tangentium, dum nimirum quodlibet segmentum cogitatur super quolibet triangulo illo comprehenso inter duas chordas ex eodem puncto et tangente intervallum eius puncti a tangente erectum, seu in id triangulum ductum; partim per illam methodum, qua summa quadratorum sinuum rectorum, detrahitur a summa quadratorum sinuum, totorum BA. [XI.] in arcum DB. ductorum, residuum erit summa quadratorum versorum, et etiam summa triangularium eorundem. Ita qualibet summa sinuum rectorum inventa invenietur quaelibet summa similis sinuum versorum, modo inveniatur quaelibet summa similis sinuum totorum. At quaelibet summa sinuum totorum scilicet in arcum ductorum, invenietur inventa qualibet summa sinuum totorum in distantiam sinuum extremorum [AO.] nam eae erunt inter se semper ut arcus DB. ad illam rectam AO. At vero summae illae simplices, triangulares, pyramidales, tum ipsorum sinuum totorum seu radiorum, tum ipsorum quadratorum, cuborum applicatorum ad AO. semper inveniri possunt, in infinitum et coincidunt cum sinuum rectorum summis, quae proinde etiam inveniri possunt in infinitum. Ergo nihil aliud opus est ad summas sinuum versorum indagandas, quam summas istas sinuum rectorum multiplicare per rationem arcus DB. ad rectam AO. et a producto auferre sinuum rectorum summam similem.

Hinc intelligi potest summas sinuum rectorum in [arcum] ductas vel totorum in rectam dare figuras quadrato diametri vel radii seu producto ex recta in se commensurabiles; summas sinuum totorum in arcum ductas, dare figuras circulo, id est producto ex recto et arcu commensurabiles[;] summas sinuum versorum in arcum ductas, dare figuras

---

5 *Über* Porro: verum

12 f. *Daneben in anderem Duktus:* Non ita de summa quadratorum, cuborum, bene tamen de summa $\bigtriangledown^{\text{larium}}$, pyramidalium etc.

10 XA *L ändert Hrsg.* 15 AA. *L ändert Hrsg.* 23 f. in |radium *ändert Hrsg.*| ductas … rectam *erg. L* 24 radii *(1)* symbolas *(2)* seu *L*

segmentis commensurabiles, seu dare figuras productis ex arcu in seipsum commensurabiles. Unde intelligi potest: circulos eorumque sectores esse figuras productis ex recta et arcu commensurabiles[;] figuras rectilineas inscriptas vel circumscriptas esse quantitates soli rectae, aut productis ex recta in seipsam ducta commensurabiles; tandem segmenta circuli esse figuras soli arcui, seu productis ex arcu in seipsum ducto commensurabiles. Quod hactenus ostendit nemo.

Nemo enim dedit rationem segmenti ad suam rectam, ut admirari libeat consilium naturae, in obstruendis omnibus aditibus ad tetragonismum.

Si enim recta ponatur a. et curva x. circulus erit commensurabilis ax. rectilinea figura inscripta vel circumscripta commensurabilis a^2. segmentum commensurabile x^2. Iam segmentum additum figurae rectilineae facit circulum vel eius sectorem ergo aequatio talis oritur $a^2 + x^2 = ax$.

Nam Euclidis *Elementa* nobis ostendunt quomodo quaedam figurae rectilineae circulo inscriptae; [quae] scilicet geometrice construi possunt, seu cum angulus geometrice haberi potest sint diametro quem dicamus a. in se ducto, commensurabiles. Archimedes ostendit, quomodo circulus et sectores sint commensurabiles arcui suo (et quidem quoties arcus geometrice haberi potest circumferentiae, quam ponamus dici x), sed ducto in radium. Ego vero hoc loco ostendi, quomodo segmentum quodlibet sit commensurabile arcui suo [quod incredibile videri poterat, nisi demonstrationem haberemus, figuram scilicet mixtilineam ex sola sua curva produci posse (quemadmodum lunula producitur ex sola quadam rectilinea)], et quoties is angulus geometrice habetur circumferentiae. Hinc patet dimensiones figurarum in circulo uno eodemque ad tria summa capita reduci; dimensionem figurarum rectilinearum circuli Euclideam, per radium solum in se partesque suas ductum; dimensionem Archimedeam sectorum, per radium et arcum; in se invicem partesve unum alterius ductos; ac denique dimensionem nostram segmentorum per arcum solum in se partesque suas ductum. Sunt enim primariae figurae circulares: sector (quorum maximus est ipse circulus), triangulum sectoris (ex quorum pluribus fit polygonum inscriptum regulare aut irregulare), ac denique segmentum. Triangulorum dimensionem ex dato radio debemus Euclidi; sectorum, et dato radio et arcu, Archimedi; segmentorum ex dato solo arcu, ausim vendicare mihi.

13 quomodo *(1)* omnes *(2)* quaedam *L* 14 quarum *L ändert Hrsg.* 14 cum *(1)* circulus in talem angulum geom *(2)* angulus *L* 19–21 *eckige Klammern von Leibniz* 22 patet *(1)* omnia *(a)* ad d *(b)* cyclometrica *(aa)* ad tria su *(bb)* demtis quibusdam generalibus *(2)* dimensiones *L*

Cum autem sector fiat ex triangulo et segmento iunctis, hinc aequatio ita $a^2+x^2 = ax$. Sed illa aequatio dare non potest, rationem ipsius a. ad ipsum x. ut cuivis patet. Hinc ad rationem a. ad x. inveniendam opus est adhuc alia quadam aequatione, ut si quemadmodum nos reperimus segmentum gigni ex solo arcu, et Archimedes sectorem ex arcu et radio, alius quispiam inveniat modum producendi segmentum ex arcu et recta, vel sectorem ex arcu solo, vel triangulum ex arcu solo, vel segmentum ex recta sola, quodlibet horum, dabit quadraturam circuli.
Porro cum sit $a^2 + x^2 = ax$. erit $x^2 = ax - a^2$. Patet locum huius aequationis esse parabolicum, nam aequatio talis $y^2 = ax - a^2$. est parabolica, ut patet. Iam si ponatur $y^2 = x^2$. non ideo minus aequatio parabolica erit, seu cuius locus est parabola. Id ergo videmur obtinuisse, ut hoc pacto quadratura circuli devenerit problema solidum solubile, et construi possit, quemadmodum problemata solida omnia. Sed in eo malum est, quod una tantum est cognita a^2. Si quaedam b. aequationem ingrederetur, tunc solvi posset problema ope parabolae, deberet nimirum fieri aequatio talis posito $y = x$.

$$y^2 = ax - b^2. \text{ vel } x^2 = [ay] - b^2.$$

haberemus solutionem saltem per parabolam, seu locum solidum. Quare si quis exhibere posset segmentum circuli aequale cuidam sectori cuius arcus est radix segmenti demto quodam quadrato cuius radix est alia a radio. Sed his non opus, sufficit prior illa aequatio:

$$\frac{x^2}{\alpha} = \frac{bx}{\beta} - b^2.$$

1

$$\begin{array}{ccccc} \bigtriangledown & & \frown & & \\ a^2 & + & x^2 & = & ax \\ & & x & & a \\ & & \frown & & - \end{array}$$

4 f. et Archimedes ... radio, *erg. L* 15 ax *L ändert Hrsg.*

Nam ponatur $\dfrac{x^2}{a} = y^2$. et $\dfrac{b}{\beta} = a$. Ergo pro $\dfrac{x^2}{a} = \dfrac{bx}{\beta} - b^2$. dici substitui potest: $y^2 = ax - b^2$. Sunt autem α. et β. cognitae, est enim α. ratio arcus qui radix est segmenti, ad circumferentiam circuli.

Hinc sequitur, si ista quae diximus vera sunt posse describi parabolam, cuius aliqua applicatarum sit circumferentiae circuli aequalis. Tantoque faciliora sunt omnia, quia ratio y. ad x. cognita est, et ratio a. ad b.

Ponamus iam diversa assumi segmenta eiusdem circuli in quibus ratio arcus ad circumferentiam et sinus ad radium cognita sit, et unam esse quam diximus $\dfrac{x^2}{\alpha} = \dfrac{bx}{\beta} - b^2$. alteram $\dfrac{x^2}{\delta} = \dfrac{bx}{\epsilon} - b^2$. cum $\dfrac{x^2}{\delta}$ sit $= \dfrac{bx}{\epsilon} - b^2$. erit $x^2 = \dfrac{bx\delta}{\epsilon} - b^2\delta$. Ergo quia $\dfrac{x^2}{\alpha} = \dfrac{bx}{\beta} - b^2$. erit $\dfrac{bx\delta - b^2\delta\epsilon}{\epsilon\alpha} = \dfrac{bx}{\beta} - b^2$. Ergo $\dfrac{bx}{\beta} - \dfrac{bx\delta}{\epsilon\alpha} + \dfrac{b^2\delta}{\alpha} = b^2$. Ergo $\dfrac{bx}{\beta} - \dfrac{bx\delta}{\epsilon\alpha} = b^2 - \dfrac{b^2\delta}{\alpha}$. Ergo $\dfrac{x}{\beta} - \dfrac{x\delta}{\epsilon\alpha} = b - \dfrac{b\delta}{\alpha}$.

Ergo $$x = \frac{b - \dfrac{b\delta}{\alpha}}{\cancel{\beta - \dfrac{\delta}{\epsilon\alpha}}} = \frac{\epsilon b\alpha - b\delta\epsilon}{\beta\epsilon\cancel{\alpha} - \delta\cancel{\alpha}}.$$

Imo error facile tamen reparabilis, b. in una aequatione differt a b. in altera, sed ratio tamen cognita est, ea ponatur esse γ. ergo ita stabit aequatio: $\dfrac{b\gamma x\delta}{\epsilon\alpha} - \dfrac{b^2\gamma^2\delta}{\alpha} = \dfrac{bx}{\beta} - b^2$. erit $\dfrac{\cancel{b}x}{\beta} - \dfrac{\cancel{b}\gamma x\delta}{\epsilon\alpha} = b^{\cancel{2}} - \dfrac{b^{\cancel{2}}\gamma^2\delta}{\alpha}$.

1 f. ponatur *u.* Ergo ... $=$ ax $-$ b^2. *erg. L* 9 $-$b^2. *(1)* | Iungantur inter se aequationes, *nicht gestr.* | erunt $\dfrac{\cancel{2}x^2}{\alpha + \delta} = \dfrac{\cancel{2}bx}{\beta + \epsilon} - \cancel{2}b$ *(2)* vel | sic *nicht gestr.* | *(3)* cum *L* 13 *(1)* Iam datur ipsius *(2)* Imo *L*

12 Im ersten Ausdruck streicht Leibniz den Nenner, um die folgende Reduktion anzuzeigen. Im zweiten sollte es genauer $\beta\epsilon\alpha$ anstelle von $\beta\epsilon\cancel{\alpha}$ heißen.

sive erit
$$x = \frac{b - \dfrac{b\gamma^2\delta}{\alpha}}{\dfrac{1}{\beta} - \dfrac{\gamma\delta}{\epsilon\alpha}}.$$

Cumque omnes termini praeter x. sint cogniti, x. incognitus ab uno tantum, cogniti tantum ab altero [latere], habebitur x. ratio ad b. Cumque ratio habeatur b. ad diametrum, habebitur quoque ratio ipsius x. circumferentiae ad diametrum. Et haec quidem vera sunt, modo verum sit rationem segmenti ad quadratum sui arcus semper haberi posse. Si aequatio talis fieri non potuisset datis tamen duabus aequationibus, et ideo descriptis duabus parabolis, applicata duarum istarum parabolarum communis, fuisset x.

12_3. PLAGULA TERTIA

[*Teil 1*]

Sunt quaedam de integro reassumenda, inspice fig. 16. Pascal. Pascalius dat summam spatiorum omnium $\overset{(1)}{DOBA}$. $\overset{(2)}{DIBA}$. $\overset{(3)}{DIBA}$. etc. eamque ostendit quater sumtam aequari arcui DB $\square^{\text{to}}$, + quadrato AO. distantiae inter sinus postremos AO. toto multiplicato per radium AB.

Ego aio eandem summam istorum spatiorum aliter, et sic quidem, iniri posse, si ineatur summa omnium rectangulorum $DIAS$. eique addatur summa omnium semisegmentorum DBS. Iam summam omnium rectangulorum $DIAS$ aequatur summae omnium quadratorum DI. posito scilicet de toto quadrante CBA, non de parte tantum $ODBA$. esse quaestionem, et quaerenda est methodus, an non et inveniri possit pro parte.

16–18 *Daneben:* falsum

3 latere *erg. Hrsg.*

1 Bei konsequenter Rechnung hätte sich $x = \dfrac{b(\alpha\beta\epsilon - \gamma^2\beta\delta\epsilon)}{\alpha\epsilon - \gamma\beta\delta}$ ergeben. 10 fig. 16.: s. o. S. 184, [*Fig. 5*]. 10 Pascalius dat: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. IX, S. 7 (*PO* IX S. 72 f.).

Sunto v.g. DI.	a		b		c		d		e		f
	f		e		d		c		b		a
Si infinitae sint DI.											
erunt rectangula	af	$+$	be	$+$	cd	$+$	dc	$+$	eb	$+$	fa
aequalia quadratis	a^2	$+$	b^2	$+$	c^2	$+$	d^2	$+$	e^2	$+$	f^2

Si quaedam sint tantum, tunc rursus poterit determinari summa modo procedatur usque ad medium, ut

$$af + be + cd = \frac{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2}{2}.$$

Ideo si medius arcus quadrantis sumatur QB. summa spatiorum $QTBA + DIBA$ etc. poterit itidem definiri.
Sin aliter assumantur minime, nisi aliud quoddam theorema, quo natura seriei $a.$ $b.$ $c.$ $d.$ $e.$ $f.$ explicetur, accedat, quale est hoc loco, quod semper unum laterum DS. est media proportionalis inter alterum latus DI. radio AB. auctum, et BS. seu radium AB. eodem latere DI. minutum.
Esto radius x. et latera DS. sunto $a.$ $b.$ $c.$ etc. latera DI. sunto retro $f.$ $e.$ $d.$ etc. Patet a. esse mediam proportionalem inter $x+f$. et $x-f$. Ergo $a^2 = x^2 - f^2$. et $a = \dfrac{x^2 - f^2}{a}$. vel $f^2 = x^2 - a^2$. et $f = \dfrac{x^2 - a^2}{f}$. et $x^2 = a^2 + f^2$. et $x = \dfrac{a^2 + f^2}{x}$. Ergo $af = \dfrac{ax^2 - a^3}{f} = \dfrac{x^2 f - f^3}{a}$. vel $af = \dfrac{x^2 - f^2}{a} \frown \dfrac{x^2 - a^2}{f} = \dfrac{x^4 + a^2 f^2 - x^2 f^2 - x^2 a^2}{af}$. Pro x^2. substituatur eius aequivalens $a^2 + f^2$. habebimus x. penitus eliminatum, et prodibit talis quantitas: $\dfrac{2a^4 + 2f^4 + 4a^2 f^2}{af} = af$. Ergo $2a^4 + 2f^4 + 4a^2 f^2 = a^2 f^2$.

16, 18, 20 *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} x + f \\ x - f \\ \hline x^2 + \cancel{xf} - \cancel{fx} - f^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} x^2 - f^2 \\ x^2 - a^2 \\ \hline x^4 - x^2 f^2 - a^2 x^2 + a^2 f^2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} a^2 + f^2 \\ a^2 + f^2 \\ \hline a^4 + 2f^2 a^2 + f^4 \\ a^2 f^2 + f^2 f^2 \\ a^2 a^2 + f^2 a^2 \end{array}$$

Error haud dubie in calculo, corrigendus: Ut fiat af. in se invicem ducenda sunt $\dfrac{x^2 - f^2}{a} \frown \dfrac{x^2 - a^2}{f}$. vel substituendo pro x^2. eius aequipollens $a^2 + f^2$. fiet: $\dfrac{a^{\cancel{2}} + \cancel{f^2} - \cancel{f^2}}{\cancel{a}} \frown \dfrac{\cancel{a^2} + f^{\cancel{2}} - \cancel{a^2}}{\cancel{f}} = af$. Nullo sane lucro.

Retinendum ergo x. fiet quod supra $x^4 + a^2f^2 - x^2f^2 - x^2a^2 = a^2f^2$. ergo $x^4 = x^2f^2$ [+] x^2a^2. seu $x^2 = f^2$ [+] a^2. nullo lucro.

Sufficit ergo pro af. sumi $\dfrac{ax^2 - a^3}{f}$. pro $be = \dfrac{bx^2 - b^3}{e}$. Unde intelligi potest non sufficere hanc proprietatem ad habendam partium aliarum, quam cum arcus quadrantis in medium sectus est, summam.

Sed pergamus. Dictum est praeter summam rectangulorum $DISA$. opus esse summa semisegmentorum DBS. Horum summa vel investiganda est recta methodo; quam post dicam per summam triangularem sinuum versorum, vel ea semisegmenta rursus partiendo ductis enim rectis PB. QB. DB. etc. quodlibet semisegmentum dabit aliud segmentum, qualia sunt PB. QB. DB. segmenta, et triangulum rectangulum, qualia sunt PBS. QBS. DBS. Ista autem triangula, dimidia sunt rectangulorum sub sinubus rectis et versis. Summam autem rectangulorum duplicatam supra inveni, huius ergo quarta pars est summa triangulorum istorum[,] inveni autem ita, ut futura sit symbola seu commensurabilis cylindro, et per consequens circulo et radio, seu radio et arcui iunctis. Restat

---

3 *Daneben isoliert:* $\dfrac{6+2}{8} \frown 4+3 \qquad \dfrac{24+6}{8}$

9 *Zusatz auf der Gegenseite, s. S. 204 Z. 12.*

5 *Vorzeichen ändert Hrsg. zweimal.*

---

15 supra inveni: S. 184 Z. 14 – S. 185 Z. 4.

invenire summam segmentorum PB. QB. DB. etc. at ea nihil aliud est quam summa triangularis sinuum versorum.

Summam autem triangularem sinuum versorum, ut et pyramidalem, etc. invenimus duobus modis: inventa summa triangulari quadratorum chordarum (per summam triangularem quadratorum sinuum rectorum arcus praecedentis), eaque divisa per radium (vel diametrum, videndum in superioribus), ita enim habebitur summa triangularis sinuum versorum; et sic quoque inventa summa triangulari sinuum totorum ab eaque subtracta summa triangulari sinuum rectorum, quia semper sinus versus additus recto facit totum $ID + SB = AB$. Sed quia fieri potest, ut tota DI. non utamur, sed recta tantum ex punctis D. demissa in aliquam DS. tunc loco sinus totius adhiberi debet sinus versus maximus ut BZ. si arcus sit BD. Patet enim omnes sinus rectos arcus, seu rectas demissas ex D. in QZ. (nam et has appello sinus rectos) additis sinubus versis respondentibus constituere aequales rectas ZB. Summa autem horum sinuum, non datur quidem apud Pascalium, ast ego ita invenio.

Inventis methodo Pascaliana QT. DI. etc. arcui applicatis (hoc semper intelligitur), ab ea subtrahatur rectangulum $QZAT$. eidem arcui applicatum, id est recta ZA. in arcum eundem ducta. Hinc intelligi potest aliquid memorabile, nempe summam sinuum DI. truncatorum per aliquam basi parallelam ut QZ. relictis tantum partibus supra DZ. ex methodo Pascaliana non esse commensurabilem summae integrorum. Summa enim integrorum est figura rectilinea a qua detrahitur recta ZA. in arcum QB. ducta seu

---

1 f. *Am Rande in anderem Duktus:* At summa triangularis $\square^{\text{torum}}$ sin. = $\square$arc. $\frown$ $\square$rad. etc., auferatur a sum. triang. sin. tot. quae itidem = $\square$arc. Videndum an restet $\square$arc.[,] restabit apparenti.

4 f. *Daneben hervorgehoben:* NB.

17 *Daneben hervorgehoben:* NB.

7 totorum | vel saltem maximi sinus versi arcus dati in *(1)* radium *(2)* arcum ducti quia semper sinus versus *erg. u. gestr.* | *(1)* eaque *(2)* ab *L*

---

3 f. invenimus duobus modis: S. 190 Z. 5 – S. 191 Z. 6.

superficies cylindrica seu circulus. Resid. est summa ipsarum DS. haec detracta a circulo quodam seu arcu [QB.] in rectam SB. productum erit aequale segmento seu summae sinuum versorum. Residuum est segmentis circuli commensurabile. Hinc sequitur sinus versos XD. et istos DI. truncatos esse commensurabiles inter se, et circuli segmentis. At summa eorum est recta BZ. arcui applicata quae dat superficiem cylindricam seu circulum. Unde sequeretur ratio quorundam segmentorum ad circulum, seu circulum componi posse ex segmentis, quod durum creditu. Daret enim tetragonismum.

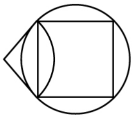
Observo hoc loco etsi in segmento PBS. demissorum ad basin, seu sinuum truncatorum summa rectilineae figurae commensurabilis haberi non possit, haberi tamen potest absolute summa sinuum eius DS. usque ad DZ. Conversa enim intelligatur figura, ut AS. fiat basis CA. altitudo, patet inde a CA. omnes DS. quadrantis haberi item omnes DS. inde a CA. (prima) usque ad QZ. detracta una summa ab altera, cum utraque sit rectilinea, differentia seu summa omnium DS. a QZ. usque ad B. haberi.

[*Teil 2*]

Annotavi ni fallor supra sed quia non satis memini repetam. Summam quadratorum sinuum versorum totius quadrantis methodo quadam particulari sic haberi[:] v.g. quae-

---

1–3 *Über der Textergänzung:*



3 *Daneben und auf der Gegenseite Zusatz, s. S. 205 Z. 1.*

6 f. *Insgesamt 3 Zusätze, s. S. 205 Z. 8.*

1–3 Resid. ... arcu | BP. *ändert Hrsg.* | in ... versorum. *auf der Gegenseite erg. L* 4 versos *(1)* et rectos *(2)* ita sumtos esse commensurabiles segmentis, | at summa eorum *streicht Hrsg.* | *(3)* XD *L*

---

15 Annotavi ... supra: S. 181 Z. 14–21 bzw. S. 190 Z. 5–9.

renda est summa quadratorum sinuum AV. AZ. AS. etc. (posito arcum CD. = arcui BQ.). Datur summa $\square^{\text{torum}}$ ipsorum DS. quae est cylinder et quadratum radii ductum in arcum, quod est etiam cylinder (aut cylindro commensurabilis), nam radii quadratum duci in arcum idem est quod radium duci in arcum, quo facto fieri potest circulus (aut circulo commensurabile) et et productum circulum in radium, quo facto fit cylinder. Residuum ergo summa sinuum rectorum a summa arcuum subtracta erit etiam cylinder, summa ergo quadratorum sinuum versorum radii est cylinder. Eodem modo portionum quarumlibet, ut inter [QZ. et PV.] summam quadratorum sinuum versorum inveniemus.

Erravi[,] hoc loco SA. non sunt sinus versi, sed recti aequales DI. Alia mihi supra methodus quadrata verorum sinuum versorum inveniendi. Hoc loco autem apparet, ne frustra id persecuti videamur semper quadrata extremorum sinuum rectorum simul sumta aequari quadrato radii ut $\square OA + \square PO = \square AD$. quod PO. aequatur cuidam DS. penultimae scilicet si PV. est secunda.

Sed ut ad priora redeamus. Nota summa simplex, triangularis, pyramidalis etc. sinuum rectorum, sinuum totorum, sinuum versorum semper conspirant, hae enim sunt differentiae duorum praecedentium. Hinc summa triangularis sinuum versorum seu summa segmentorum certissime haberi potest, simpliciter manent enim semper differentiae, summarum similium. Hinc dari potest cylinder cuius basis segmentum commensurabilis segmentis omnibus sibi super impositis, quod est mirabile. Daturque ratio huius coniformis seu turbinati corporis ad suam isoparallelam. Ista in figura bene exprimenda, et addenda est in ipsa figura aliquid quod exhibeat aequationem vel theoremata intus demonstrata.

1–7 *Isoliert daneben (in der Handschrift einspaltig):*

$$\begin{array}{ccccc} 10 \frown 1 & 8 \frown 1 & 6 \frown 1 & 4 \frown 1 & 2 \frown 1 \\ 9 \frown 1 & 7 \frown 1 & 5 \frown 1 & 3 \frown 1 & 1 \frown 1 \end{array}$$

20 *Zu* figura: Fig. 16 Pascal.

2 cylinder *(1)* et quadratum radii ductum in arcum *(2)* seu radius ductus in arcum *(3)* et *L* 3 f. quadratum *(1)* duci in arcum *(2)* applicare arcui *(3)* duci *L* 6 ergo *(1)* quadratum scilicet *(2)* summa *L* 8 QV. et PZ. *L ändert Hrsg.* 17 potest, *(1)* sed nota si ad qua *(2)* simpliciter *L*

---

9 f. Alia mihi supra: S. 183 Z. 6–12 bzw. S. 190 Z. 9–11.

Imo rectius sic[:] ea figura aequatur cylindro communi, quia summa triangularis sinuum totorum est quidam cylinder, triangularis est quaedam figura rectilinea seu parallelepipedum, ergo eorum differentia est cylinder cuius basis est segmentum. Hinc summae omnium segmentorum duci potest cylinder aequalis cuius basis esse potest quod vis, segmentum, eorum quae geometrice habentur.

Caepi dicere[:] Quaerendum quomodo ex summa quadratorum sinuum rectorum et sinuum totorum haberi possit summa quadratorum sinuum versorum. Esto sinus rectus a. totus b. versus $b - a$. quadratum versi erit $a^2 + b^2 - 2ba$. Hinc apparet dato aliunde quadrato sinus versi, uti ostendi datum esse, dari summam rectangulorum sub sinu recto et radio. Sed haec summa rectangulorum sub sinu verso et radio datur aliunde, nam per se est facilis[,] summa tantum sinuum versorum in radium ducta. Hinc ecce alium modum inveniendi summam quadratorum sinuum versorum (et per consequens summam rectangulorum sinuum rectorum et versorum[)]. Si sinus versi quadratum ponatur notum c^2. et quadr. sinus recti a^2. erit $\square$ sinus totius $a^2 + c^2 + 2ac$. Iam id datur aliunde, ergo

---

3 f. *Dazu am Rande:*

$$\begin{aligned}
\text{sum. segment.}\quad [=]\quad & \llcorner\text{semiquad. arc.} \frown \text{rad.}\lrcorner - \text{cub. rad.}\\
& + \text{summa sin. per rad. (cub. rad.)}\\
& - \text{sum. rectang.}\ (DS \frown SA)\ \text{seu} + \frac{\text{cub. rad.}}{2}\\
\text{seu}\quad & \text{semiquad. arc.} - \frac{\text{cub. rad.}}{2}.\\
= \quad & \frac{\text{cub. rad.}}{2} + \square\ \text{arc.}\ [\textit{sic!}]
\end{aligned}$$

Nihil hinc duci potest.

7 *Zusatz, s. S. 206 Z. 5.*

14 *Daneben hervorgehoben:* NB.

1 Imo *(1)* aliter *(2)* rectius *L* 7 versorum. *(1)* | Summae *streicht Hrsg.* | scilicet quadratorum *(a)* addenda *(b)* demenda est *(2)* Esto *L* 9 sinu *(1)* verso *(2)* recto *L*

---

9 ostendi: S. 190 Z. 5 – S. 191 Z. 6. 9 Leibniz hat hier (s. die Variante) sinus versus in sinus rectus verbessert, im Folgenden aber sinus versus stehen gelassen.

hinc dabitur $2ac$. seu summa rectangulorum, hinc datur et summa rectangulorum sub sinu verso et radio. Sed haec facile aliunde datur.

Veniamus ad cubum $b-a$. cubus $b-a$ est

$$\begin{array}{rrrrr} & b^2 & + \quad a^2 & -\ 2ba & \\ & & & +\quad b & -\ a \\ \hline - & ab^2 & - \quad a^3 & +\ 2ba^2 & \\ - & 2ab^2 & + \quad b^3 & +\quad ba^2 & \\ \hline & b^3 & +\ 3ba^2 & -\ 3ab^2 & -\ a^3\ . \end{array}$$

Hinc patet cubum hoc modo facile inveniri posse, cum summa b vel b^2 semper detur, et quia uniformis nullo negotio in a vel a^2 summam duci queat; hinc si cubus quaeratur de $a+c$. seu

$$\begin{array}{rrrr} a^2 & + \quad c^2 & +\ 2ac & \\ & & a & +\ c \\ \hline c^3 & +\ 3ca^2 & +\ 3ac^2 & +\ a^3 \end{array}$$

ubi c est sinus versus patet cum notus sit cubus sinus versi, seu c^3 aliunde, item a^3 aliunde, et totum $c^3+3ca^2+3ac^2+a^3$ seu cubum sinus totius dari etiam differentiam inter cubum sinus totius et a^3+c^3 seu summam $3ca^2+3ac^2$, etsi hinc $3ca^2$ separatim vel $3ac^2$ separatim summa non habeatur. Sed nec ea opus habemus.

NB. summa triangularis re in aequales partes divisa est dimidium quadratum. Hinc summa triangularis sectorum arcuum aequalium infinitorum in quos divisus est arcus datus, est dimidium quadratum arcus per radium multiplicatum.

Hactenus duos exposui modos quibus ad summam spatiorum (posito arcum $CP = PQ$)

$$CBA + POBA + QTBA + DIBA \text{ etc.}$$

perveniri potest[:] Una per prop. 9. Pascalii tract. de sin. scilicet si quadratum arcus

---

3 *Daneben:* NB.

22 f. (posito arcum CP = PQ) *erg. L*

---

22 duos exposui modos: S. 186 Z. 20 ff. bzw. S. 194 Z. 10 ff.

$CB+$ quadratum radii AC multiplicetur per radium, et producti pars quarta sumatur. Altera mea per summam rectangulorum sub sinubus rectis in se invicem reciproce ductis

$$POVA + QTZA + DISA \text{ etc.}$$

quae est cylinder[,] summam dimidiorum rectangulorum sub sinubus rectis et versis

$$DV \text{ in } VB + DZ \text{ in } ZB + DS \text{ in } SB \quad \text{etc.}$$

haec autem est cylindrica quod ita ostendo.

Sit a sinus rectus. c versus. erit $a^2 + c^2 + 2ac$ sinus totius quadratum. Horum summa est cylinder, summa a^2 est cylinder segmentalis, per Pascaliana, summa quoque c^2 est cylinder segmentalis, nam quadrata sinuum versorum ostendi esse differentias quadratorum sinuum rectorum et aliorum quorundam sinuum rectorum seu sinuum rectorum et chordarum; ergo summa c^2 est cylinder segmentalis[;] cum ergo a^2+c^2 item a^2+c^2+2ac sit cylinder, etiam $2ac$ erit cylinder imo rectilinea. At vero si a maneat sinus rectus, b sit sinus totus, ostensum est quadratum sinus versi $b - a$ esse $b^2 + a^2 - 2ab$. Iam quadratorum b^2 seu sinuum totorum summa est cylinder, et summa a^2 itidem est cylinder at $2ab$ summa est parallelepipedum seu cubus. Summa enim omnium a est quadratum, ea ducta in b, quae ubique eadem, facit cubum seu parallelepipedum. At parallelepipe-

---

2 *Zu* Altera mea *hervorgehoben:* NB.

6 *Über:* cylindrica: male

Dazu am Rande: Summa rectangulorum DV in VB aliter invenietur[:] cum iam inventa sit DV in VA rectilinea, detrahatur a DV in AB rectilinea, restabit DV in VB. est ergo r e c t i l i n e a .

7 *Zusatz, s. S. 207 Z. 1 f.*

15 *Dazu am Rande:* NB.

4 quae est cylinder *erg. L* 8 f. segmentalis *zweimal erg. L* 10 rectorum *(1)* reciproce sumtorum, ergo differentia *(2)* et *L* 11 segmentalis *erg. L* 12 imo rectilinea *erg. L* 20 rectilinea *zweimal erg. L*

---

9 ostendi: S. 181 Z. 14–21 bzw. S. 190 Z. 9–11.

dum detractum a cylindro circuli relinquit cylindrum segmentorum, ergo rectangulorum sinuum rectorum et versorum summa simul segmenti et circuli cylindro erit commensurabilis, ergo hi duo cylindri, ergo circulus et segmentum inter se. Quod creditu durum, sequitur enim tetragonismus.

Post haec triangula seu dimidia rectangulorum, addenda summa segmentorum

$$PB + QB + DB \quad \text{[etc.]}$$

at hanc ostendi esse commensurabilem cylindro segmenti. Ergo iunctis inter se cylindris circuli et segmenti, habebitur parallelepipedum + cylinder cuius basis □ arcus circuli[;] auferatur hoc parallelepipedum a superioribus cylindris circuli, restabunt cylindri segmentorum, ergo cylinder segmentorum et cylinder cuius basis est quadratum arcus, erunt commensurabiles. Ergo segmentum circuli, et quadratum arcus circuli seu circumferentiae sunt commensurabilia, unde rursus ut supra dictum est sequeretur quadratura, ideo id nondum credere audeo.

At superest tertius modus summam spatiorum

$$CBA + POBA \quad \text{etc.}$$

reperiendi, aio enim nihil aliud esse quam summam triangularem sinuum rectorum, quod miror a Pascalio non observatum. At summam istam triangularem Pascalius monstrat prop. 8. esse quadratum radii in basin seu distantiam sinuum extremorum arcus, ergo in quadrante erit cubus radii, erit ergo cubus radii his omnibus aequalis. *Si credere fas est.*

Tandem annoto. Pascalius monstrat semirectangula sinus recti et versi, seu $\bigtriangledown^{\text{la}}$

$$POA + QIA + DIA \quad \text{[etc.]}$$

---

1 *Zu* cylindrum segmentorum *am Rande:* Ergo cylinder segmentalis aequabitur $\Box^{\text{tis}}$ sinuum versorum. Quos tamen supra ostensum est aequari cylindris circularibus, quia si a $\Box^{\text{tis}}$ chordarum auferantur $\Box^{\text{ta}}$ sinuum rectorum relinquuntur $\Box^{\text{ta}}$ sinuum versorum. Imo falsum.

15 *Rechts daneben auf der Gegenseite hervorgehoben:* NB.

6+21 etc. *erg. Hrsg. zweimal*

---

18 prop. 8.: Es handelt sich genauer um prop. VII, s. PASCAL, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 5 f. (*PO* IX S. 70 f.) 19 Vgl. STATIUS, *Thebais* 2, 595. 20 Pascalius monstrat: *a. a. O.*, prop. VI, S. 5 (*PO* IX S. 69 f.). 23 supra: s. S. 199 Z. 7, s. a. S. 181 Z. 19 f.

aequari cuidam parallelepipedo, quadrato scilicet distantiae sinuum extremorum in radium, quartae (puto) parti, et per consequens si arcus sit quadrans quartae parti cubi radii. At ego ostendo eadem duplicata, ipsa nempe rectangula aequari quadratis sinuum rectorum seu cylindro cuius altitudo radius, basis ipsa figura seu quadrans. At haec aequari est impossibile. Ergo ista penitius discutienda. Necesse est aut propositionem 2^{dam} aut 6^{tam} Pascal. tract. de sin. esse falsam, quia iuncta utraque et addito principio meo certo, quod sinus recti reciproce in se invicem ducti aequantur summae quadratorum, sequitur impossibile. Alterutram earum esse veram modo caetera Pascaliana vera essent, sufficeret ad tetragonismum. Veritatem 2^{dae} consequentia quadem comprobavi, dubito ergo de veritate sextae. Sed haec exacte discutienda.

[*Zusätze*]

[*Zu S. 196 Z. 9*]

DI in DS vel IA. sinus rectus in versum non complentem, praeter methodum Pascalii per centrum gravitatis etiam sic invenietur. $DI \frown DI = CI \frown IA + AB$. $DI \frown DI = CI \frown IA + CI \frown AB$. Porro $\square^{\text{la}}$ de CI in AB habemus, est enim segmentum in radium. (Quod tum infra et bis inveniemus.) Auferatur a $\square^{\text{tis}}$ $DI \frown DI$ seu cylindro, residuum parallelepipedum erit $CI \frown IA$. At et id parallelepipedum iam ostendit Pascal.
Idem aliter, ducatur radius CA in summam sinuum rectorum DI. fit parallelepip. A producto auferatur CI in DI. residuum erit IA in DI. Sed hoc frustra, quia potius hoc posterius invenitur per prius.

13 DS | vel IA. *erg.*; etiam *streicht Hrsg.* | sinus *L*

---

3 ego ostendo: S. 184 Z. 14 – S. 185 Z. 4 u. S. 196 Z. 15 – S. 197 Z. 2. 5–7 prop. 2^{dam} aut 6^{tam}; principio meo certo: Zur Rolle der prop. II s. o. S. 189 Z. 10 f.; zum principium certum S. 186 Z. 20 f. bzw. S. 194 Z. 16–18.

[*Zu S. 198 Z. 3*]

Imo error, falsum est circulari a rectilinea subtracta, residuum esse segmento commensurabile. Hoc tamen certum est si sibi iungantur segmenta seu trilinea circularia convexa et trilinea circularia concava, summam (modo sint commensurabilium segmentorum) aequari rectae. Hoc loco autem ostenditur, haec duo simul aequari circulo.

Videndum an hoc lumen quoddam afferat, est enim extraordinarium. Non tamen certum est id dare tetragonismum.

[*Zu S. 198 Z. 6 f.*]

[*Zusatz 1, später gestr.*]

$$\frac{xa}{\text{circ.}} + \frac{ya}{\text{circ.}} = \frac{a^2}{\text{rectilin.}} + \frac{\aleph^2}{\text{segm.}} \quad \text{circ.} + \text{circ.} - \text{circ.} = \frac{\text{rectilin.} + \text{segm.}}{\alpha}.$$

circ. $xa + a^2 + \aleph^2 =$ circ.

[*Zusatz 2*]

Esto circulus xa. segmentum x^2. rectilinea a^2. $a^2 + \dfrac{x^2}{\beta} = xa$. $a^2 - xa + \dfrac{x^2}{\beta} = 0$. $a^2 - xa = 0 - \dfrac{x^2}{\beta}$. $2a^2 - xa = a^2 - \dfrac{x^2}{\beta}$.

---

3 f. *Nebenrechnung:*
$PBAO$. ad arcum = fig. rectilin. $OPVA$. ad arcum = circ. $PBAO - OPVA$ = trilin. [convex.] = sinubus inter PBS. truncatis.
$PXBS$. ad arcum = circ. DX. ad arcum segmentum. Ergo circ. − segment. = fig. rectilin. = trilin. concav.

17 concav. *L ändert Hrsg.*

---

8 Zu S. 198 Z. 6 f.: Die 3 Zusätze befinden sich auf 3 verschiedenen Seiten der Handschrift. Zusatz 1 steht auf der Gegenseite, Zusatz 2 schräg darunter auf der Textseite, Zusatz 3 auf der übernächsten Seite.

[*Zusatz 3*]

Fig. 16. Pascal. a^2. rectilin. y. est PB arcus circ.

$y \frown SA + y \frown SB = y \frown SA + SB$. $AB, \square . + \underset{.}{D}\underset{.}{X} \frown z = y \frown SA + SB$. $y \frown SA$ [*Rechnung bricht ab*]

[*Zu S. 200 Z. 7*]

Alia adhuc methodus suppetit summandi quadrata sinuum versorum, nimirum quadrata chordarum divisa per [radium] in se ducta, quae sunt quadrato-quadrata sinuum rectorum (arcus duplo minoris, in partes duplo minores divisi) divisa per quadratum radii. At quadrato-quadrata sinuum rectorum, ostendit Pascalius, esse cubos ordinatarum multiplicatos per radium. Ergo summa quadratorum sinuum versorum, [est summa cuborum] ordinatarum [multiplicatorum] per radium, [divisorum] per $\square^{\text{tum}}$ radii, seu summa cuborum ordinatarum divisa per radium, vel quod idem est, summa $\square^{\text{torum}}$ ordinatarum per radium divisa (quod quadrari seu haberi potest, quia quadrata ordinatarum haberi possunt) ducta in figuram. Quod producit haud dubie cylindrum segmentalem. At alio modo producetur differentia inter duos cylindros segmentales vel etiam inter cylindrum segmentalem et circularem.

---

12 *Über* idem est:

2 Pascal. *(1)* xa = circ. SA. ya = circ. SB. *(2)* a^2 *L* 7 arcum *L ändert Hrsg.* 10 Ergo *(1)* quadrata sinuum versorum, sunt cubi ordinatarum multiplicati per radium, divisi per $\square^{\text{tum}}$ radii, seu cubi ordinatarum divisi *(2)* summa *L* 10 f. sunt cubi ... multiplicati ... divisi *L ändert Hrsg.*

---

5 Zu S. 200 Z. 7: Die Bezugszeile steht in der Handschrift auf Bl. 290 r°, der Zusatz auf Bl. 289 r°. 9 ostendit Pascalius: *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. IV, S. 1 u. 4 (*PO* IX S. 62 u. 67).

[*Zu S.* *202* *Z.* *7*]

Sed hoc modo supponitur sinus rectus + versus = toti non ergo sunt rectangula sic DV in VB. sed VB in PO vel VA. At haec rectangula facile possunt comparari quadratis sinuum, cum $\square$sin. PV sit = rectang. VB in $SA + AB$. Ergo si a sinuum rectorum $\square^{\text{tis}}$ auferatur summa sinuum rectorum in radium, habebitur summa rectangulorum sin. vers. in sinus rectos supplentes. Illa summa est cylindrica, a qua si auferatur cylinder segmentorum, orietur summa rectilinea, horum rectangulorum.

Aliter si a radio BA. in omnes sinus rectos PO. QT. vel VA. ZA. etc. ducto, seu parallelepipedo auferantur $\square^{\text{ta}}$ ipsorum sinuum seu cylinder PI in VA etc., residuum erit cylinder cuius basis residuum in quadrato circulo exemto etc. En ergo rursus differentiam inter $\square$ et circ. = rectilineo.

3 rectangula *(1)* patet aequari quadratis sinuum, *(2)* facile *L* 8 f. ducto, seu parallelepipedo *erg. L*

13. FRAGMENTUM AD CYCLOEIDIS HISTORIAM PERTINENS
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: Fragment von fremder Hand: LH 35 II 1 Bl. 289–290. 1 Bog. 2°. 5 $\frac{1}{2}$ Z. auf Bl. 290 v° gegenläufig u. vom Ende von N. 12_3 überschrieben. (Abdruck erfolgt zeilenkonform.) — Auf dem übrigen Bogen N. 12_3.
Cc 2, Nr. 618

Datierungsgründe: Das Fragment stand als erstes auf dem Bogen. Es dürfte nicht lange vor dessen Weiterverwendung für die Niederschrift von N. 12_3 entstanden sein.

[*Von fremder Hand*]

reverendo patri mersennae minimo parisiensi
primo innotuit; quam ex italia anno millesimo
sexagesimo *(!)* quadragesimo quarto ad eum scripserunt.
cuius beneficio promulgatam atque commendatam
per totam galliam omnibus doctoribus[,] in admirationem
raptis dominis petit vallium

10–15 Das Fragment bezieht sich offenbar auf den im Jahre 1644 durch M. Mersenne vermittelten Austausch von französischen und italienischen Ergebnissen zur Zykloide; s. insbesondere den Brief von E. Torricelli an M. Mersenne von Ende Juli 1644 (*MCW* XIII, S. 184–186 = *TO* III, S. 202 f.). Mit „vallium“ ist — wohl auf Grund eines Hör- bzw. Schreibfehlers — G. P. de Roberval gemeint.

14. MATHEMATICAE COLLECTIONIS SCHEDA ⌝
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 314. 1 Bl. 2°. 2 S. — [*Fig. 5b*] isoliert auf Bl. LH 35 XII 2 Bl. 125 r°, innerhalb N. 7.
Cc 2, Nr. 545 A

Datierungsgründe: s. N. 9.

Ostendit Pascalius. Ungulam duplam plano inclinato ad planum figurae angulo semirecto, per axem transeunte esse ad semisolidum figurae revolutione circa axem factum, ut radius ad quadrantem circumferentiae. Eodem modo esse superficies eorum. Horum centra gravitatis semper aequidistant a basi. At distantia centri gravitatis duplae ungulae ab axe, item superficiei duplae ungulae, est ad distantiam centri gravitatis semisolidi, item superficiei, ut quadrans circumferentiae ad radium, inverso modo.

Porro ex Hugenio distantia centri gravitatis simplicis ungulae vel cunei abscissi super figura, ut vocat, ab ipsa figura seu trilineo, quam distantiam vocat subcentricam, aliter investigatur, hac propositione adhibita (prop. 8. Hugen. *de cent. oscill.*): *Si figuram planam recta tangat, divisaque intelligatur figura in particulas minimas aequales, atque a singulis ad rectam illam perpendiculares ductae*, erunt omnia earum perpendicularium quadrata (seu quadrata omnium applicatarum cunei vel ungulae simplae), aequalia rectangulo toties sumto, in quot partes divisa est figura. Rectangulum autem fit ex distantia centri gravitatis figurae, a recta; et subcentrica cunei.

Porro aio methodum dari inveniendi centra gravitatis figurarum, et quidem linearum curvarum, hoc modo. Sumamus semicircumferentiam, eius superficies centrobaryca seu cylindracea truncata, seu superficies ungulae semicirculi, est ad superficiem hemi-

7 f. plano inclinato ... transeunte *erg. L* 9 ad *(1)* circumferentiam *(2)* quadrantem *L*
12 f. modo. | Intellige scilicet distantiam centri gravitatis a plano qu *gestr.* | Porro *L*

---

7 Ostendit Pascalius: *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 19–23 (*PO* VIII S. 371–378). 13 Porro ex Hugenio: *Horologium oscillatorium*, 1673, Tl IV *De centro oscillationis* Def. XIV, XV und Prop. VIII, S. 103–106 (*HO* XVIII S. 265–269). Leibniz zitiert Satz VIII nur teilweise wörtlich.

sphaerii (semirevolutione figurae factam), ut semiradius ad quadrantem circumferentiae, seu ut radius ad semicircumferentiam. Iam superficies hemisphaerii est circulus maior duplicatus. Esto radius a. peripheria x. erit circulus $\frac{ax}{2}$. duplicatus ax. superficies hemisphaerii multiplicetur per radium dividaturque per semicircumferentiam fiet $\frac{a^2x}{1} \times \frac{x}{2}$ fiet $2a^2$. superficies cylindracea, duplum summae sinuum. Haec iam dividatur per curvam, habebimus centrum gravitatis curvae, ergo $\frac{2a^2}{\frac{x}{2}} = \frac{4a^2}{x}$. est distantia centri gravitatis semicircumferentiae a centro.

Hinc apparet data curva et summa sinuum dari distantiam centri gravitatis curvae, et vicissim.

Mons. Pascal. *Si un triligne est tourné premierement sur la base, et ensuite sur l'axe, et qu'il forme ainsi deux solides*, [*l'un au tour de la base et l'autre au tour de l'axe*:] *je dis que la distance entre l'axe et le centre de gravité du solide au tour de la base est à la distance entre la base et le centre de gravité du solide au tour de l'axe, comme le bras du triligne sur l'axe, au bras du triligne sur la base*. Unde si cognitum sit centrum gravitatis trilinei et unum solidum, etiam alterum erit.

Hoc usui esse potest fuso parabolico cum conoeide comparando. Nam c o n s t a t , inquit, solidum circa axem esse ad solidum circa basin ut brachium trilinei super axe

---

8 f. Quod de sinuum rectorum summa a Pascalio ope sui lemmatis ostensum, etiam aliter ostendi potest per centrobarycam, quia summae sinuum aequalis superficies ungulae, huic autem curva in centri gravitatis distantiam a basi, seu recta super quam sunt sinus, ducta.

11 l'un . . . l'axe: *erg. Hrsg. nach Pascal*

---

10 Mons. Pascal.: *Traité des trilignes*, 1658, S. 19 (*PO* IX S. 35). Beide Sätze folgen im Pascalschen Text unmittelbar aufeinander. 18 sinuum rectorum summa: Bl. Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 1 f. (*PO* IX S. 60–64).

(id est distantia centri a basi) ad brachium trilinei super basi (seu ut distantia centri ab axe).

Credo porro ex eodem principio ostendi posse, idem quod de centro ipsius trilinei et solido, vel solidi centro dixit, posse et de centro curvae, et superficiei eius circumactae eiusque centro intelligi. Hinc si daretur centrum arcus quadrantis elliptici, saltem supposita quadratura, daretur ratio superficiei hemisphaeroeidis lati ad hemisphaeroeidem compressum, et per consequens per Hugenianas demonstrationes, daretur ratio curvae circularis ad curvam parabolicam, et circuli ad hyperbolam.

Dimensio retortarum cycloeidalium[,] datur et mensura retortarum truncatarum.

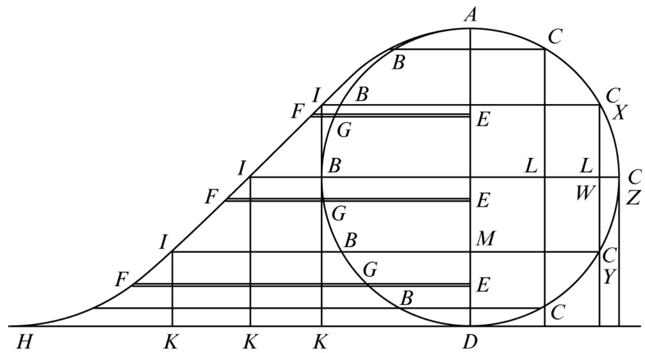
R e t o r t a est residuum curvilinei exemto curvilineo in eandem partem convexo, convexitate ab axe aversa, si duo scilicet curvilinea sint eiusdem axis communis, basis pro parte. Retorta cycloeidalis est residuum semicycloeidis, vel segmenti semicycloeidis exemto segmento circuli genitoris, pro caeteris scilicet retortae conditionibus. Retorta cycloeidalis aequatur summae sinuum rectorum ad basin, semisegmenti exemti. Ergo retorta cycloeidalis ex axe bisecta, cuius basis aequatur arcui quadrantis, altitudo radio, arcus circularis est quadrans, arcus cycloeidalis aequatur duplo lateris quadrati inscripti, ea inquam retorta aequatur quadrato radii.

Haec porro demonstrare facile est Pascalianis *de Trilineis*, ubi ostendit summam arcuum symbolisare summae sinuum, redditis universalioribus.

5 f. saltem supposita quadratura *erg. L* 9 datur ... truncatarum *erg. L* 11 axis | communis *erg.* |, *(1)* basi totius, *(2)* basis *L*

---

7 per Hugenianas demonstrationes: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 74–79 (*HO* XVIII S. 213 bis 221). — Leibniz hat sich die Stellen nicht gründlich genug angesehen: Huygens unterscheidet ein sphaeroeides oblongum einerseits und ein sphaeroeides latum sive compressum andrerseits; vgl. dazu auch N. 9 S. 106 Z. 7 f. 18 Pascalianis: *Traité des trilignes*, 1658, Prop. VI, S. 7 u. 9 (*PO* IX S. 15 u. 19).



[*Fig. 1, Blindzeichnung*]

Ostendo si arcus ABD. dividatur in partes aequales quotlibet in B. item arcus ACD. eodem modo in C. Et recta AD. prioribus aequales in E. ita ut $AB = [AE]$. hinc autem patet numerum partium $[AE]$. esse minorem quam $[AB]$. Ad rectam AD. applicentur rectae EF. secantes curvam in G. arcubus GA. quos abscindunt aequales[,] patet autem numerum ipsorum GA. minorem esse itidem quam BA. Summa omnium GA. aequatur summae omnium EF. id est figurae $ADHF$. cuius scilicet ordinatae sunt EF. ad axem, ergo et summae omnium ordinatarum ad basin IK. cum eadem sit unitas KK. et EE. aequalis arcui BB. vel CC. ergo et summae omnium CL. seu sinuum rectorum ad basin segmenti si AC. sit minor quadrante quos ostendi esse residuum figurae rectilineae demto circulo, nisi AC. sit quadrans, quo casu aequatur quadrato radii. Sin sit maior, tunc sinus recti CL. producuntur usque ad basin, ut CM. seu sinubus rectis quadrantis adduntur sinus recti ipsius segmenti YZW. super altitudinem et rectangulum ex recta LY. ducta in arcum AX. Sin basis evanescat in punctum D. seu quaeratur summa arcuum totius circuli, tunc duplicantur sinus recti quadrantis.

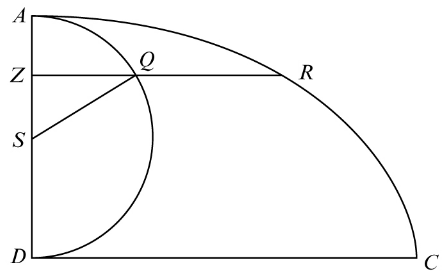
Caeterum semper adiciuntur sinus versi arcus recurvati ut CG. vel ZD. duplicati.

Hinc facile demonstratur semicycloeidem esse tres semicirculos generatores. Nam praeter semicirculum unum, retorta continet duos. Bis nimirum quadratum radii, et

3 f. ED. AC. AE. *L ändert Hrsg.* 9 rectorum *erg. L*

10 ostendi: vgl. N. 10_2 S. 159 Z. 13–15.

quatuor segmenta quadrantis (sinus enim versi semel sunt duo segmenta). Id est quatuor fulcra segmentorum, et quatuor segmenta, id est 4 sectores seu quadrantes, id est cir⟨culum⟩.



[*Fig. 2*]

Hinc cum Hugenius invenerit (vid. eius pag. 66. ubi notas figurae appinxi) ZAR. aequale rectilineo, quod vocemus A. ab eo auferamus AQR. restabit semisegmentum AZQ. Iam AQR. est summa sinuum semisegmenti super basin, id est rectangulum quod vocabo B. demto circulo. Sitque circulus $\frac{ax}{2\gamma}$. esto $\frac{a^2}{\alpha} = A$. $\frac{a^2}{\beta} = B$. erit portio cycloeidis quadrata $\frac{a^2}{\alpha}$. retorta eius $\frac{a^2}{\beta} - \frac{ax}{2\gamma}$. Ergo segmentum circuli erit $\frac{a^2}{\alpha} - \frac{a^2}{\beta} + \frac{ax}{2\gamma} = \frac{ax}{2\delta} - \frac{a^2}{\epsilon}$ (si $\frac{ax}{2\delta}$ ponatur esse sector, semisegmenti huius, et $\frac{a^2}{\epsilon}$ eius fulcrum). Ergo $\frac{a^2}{\alpha} + \frac{a^2}{\epsilon} - \frac{a^2}{\beta} = \frac{ax}{2\delta} - \frac{ax}{2\gamma}$ sectoris, qui eorum differentia est, dabitur quadratura.

---

7 f. Ista summa sinuum super basin semisegmenti etiam aliter inveniri potest, si scilicet ab altitudine segmenti in arcum ducta, auferatur sinus versus seu segmentum duplicatum. Porro modo ratio arcus AQ. ad circumferentiam detur, habebitur quadratura, sin minus saltem certi sectoris, arcusque, eiusque multiplicum, et bisectionum, quadratura habebitur.

---

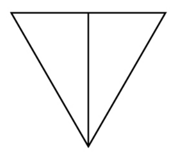
4 [*Fig. 2*]: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 66 (*HO* XVIII S. 199). Die Figur fehlt in der Handschrift; sie ist nach dem Text und der Originalfigur des Leibnizschen Handexemplars vom Hrsg. ergänzt worden. — Zur Originalfigur s. N. 2.

Idem aliter,

$$\frac{a^2}{\alpha} - \frac{ax}{2\vartheta} + \frac{2ax}{2\lambda} - \frac{2a^2}{\mu} = \frac{ax}{2\delta} - \frac{a^2}{\epsilon}.$$

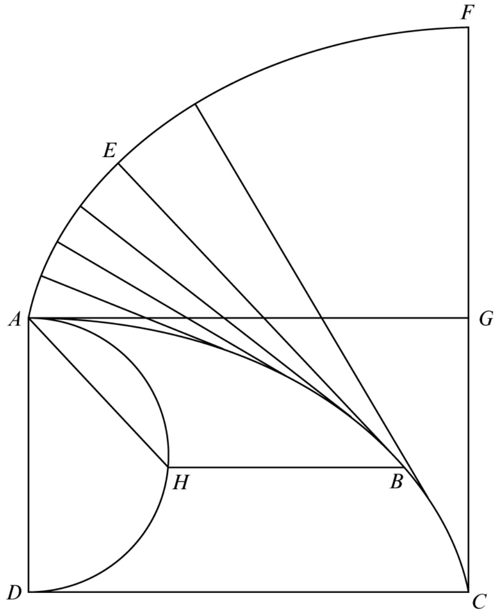
$\dfrac{ax}{2\vartheta}$ est circulus factus ex ductu AZ. in AQ. a quo si subtrahatur segmentum AQ. bis, relinquitur sinuum rectorum ad basin summa.

Videndum tantum an forte $\dfrac{a^2}{\alpha} + \dfrac{a^2}{\epsilon}$ aequentur $\dfrac{2a^2}{\mu}$. vel $\dfrac{a^2}{\beta}$. quo casu necesse foret ipsa $\dfrac{2a^2}{\mu}$ et $\dfrac{a^2}{\beta}$. inter se aequari, et aequantur certe. Ergo et $+\dfrac{ax}{2\vartheta} - \dfrac{2ax}{2\lambda}$ aequatur $-\dfrac{ax}{2\gamma}$. Restat videndum, an aequentur $\dfrac{a^2}{\alpha} + \dfrac{a^2}{\epsilon} = \dfrac{a^2}{\beta}$. vel si $\dfrac{a^2}{\alpha} = \dfrac{3a^2}{\epsilon}$. Ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ aequilaterum radii aequaretur uni $\dfrac{a^2}{\epsilon}$.

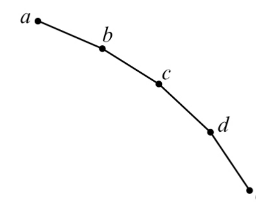


[*Fig. 3*]

Posito radio a. erit altitudo huius $\bigtriangledown^{\text{li}}$ aequilateri $a^2 - \dfrac{a^2}{4}$, Rq. ducatur in $\dfrac{a}{2}$ seu in $\dfrac{a^2}{4}$ Rq. fiet $\dfrac{a^4}{4} - \dfrac{a^4}{16}$, Rq. ut autem producatur unum SZQ. multiplicetur semiradius in ZQ. producto dimidiato, at ZQ. est etiam $a^2 - \dfrac{a^2}{4}$, Rq. Ergo omnia redeunt ad aequalitatem.



[*Fig. 4a*]



[*Fig. 4b*]

In fig. Hugenii pag. 66. cogitetur cycloeidalis AC. divisa in partes aequales infinitas, necesse est fila BE. inter evolvendum continue crescere uniformiter, atque ideo summam filorum omnium, scilicet unitati (portioni scilicet minimae AC. ac proinde, omnium toti AC.), applicatorum aequari necesse est semiquadrato CF. cum CF. aequetur ipsi ABC. vel AEF. in rectam extensae. Porro eadem fila inter evolvendum, describunt tot gyros quot sunt actus evolutionis, vel centra evolutionis, fit autem semper apertura eousque donec filum fiat continuum, seu recta producta chordae sequentis. Sed hic determinandum ante omnia est, an semper aequalem ad se angulum faciant chordae istae aequales *ab*. *bc*. *cd*. *de*. [filum] componentes.
Quod si enim aequalem non faciunt, tunc crescent vel decrescent chordae minimae, cur-

2 | A——B. Esto recta quaedam AB. *gestr.* | In *L* 9 aequales *erg. L* 10 chordam *L ändert Hrsg.*

1 [*Fig. 4a*]: s. Erl. zu [*Fig. 2*]. 1 [*Fig. 4b*]: zunächst hat Leibniz nur drei Elemente *ab*, *bc*, *cd* gezeichnet; dann hat er auf vier Elemente erweitert.

vae evolutione descriptae, ut anguli, et praeterea ut circumferentiae, seu ipsa fila, et per consequens in composita ratione filorum et angulorum. Quod si anguli sint aequales, crescent tantum in ratione filorum. Porro rationem angulorum, seu declivitatem difficile et operosum definire. Quod si fuissent aequales anguli, ita processissem. Ex omnibus filis iunctis fecissem triangulum seu semiquadratum fili maximi. Porro in quot partes dividitur istud semiquadratum, in totidem partes (etsi partem necesse sit parte semiquadrati infinities esse minorem, et tanto quidem, quanto ipsa linea minor est quadrato) divido lineam ipsam AF. Hoc facto ex partibus istis lineae minimies minimis, conflo partes minimas, continue crescentes in ratione applicatarum trianguli, quae sunt chordae lineae AEF.

Ergo ponamus triangulum esse seu partium minimarum 21.	1.	2.	3.	4.	5.	6.
erunt applicatae triangulum partium minimies minimarum,	21.	42.	63.	84.	105.	126.
et chordae ipsius curvae evolutione descriptae, erunt ergo ductis	1.	2.	3.	4.	5.	6.

chordis in applicatas, seu fila producto dimidiato $\dfrac{1+4+9+16+25+36, \frown 21}{2}$

habebimus summam spatii evolutione percursi, ita tamen ut non nisi ex partibus minimies minimis componatur. Sed si dividatur per 21. prodibunt partes minimae, ordinariae, ex quibus infinitis, aequalibus constitit recta AC. evoluta, vel filum ei aequale CF. Ergo spatium huius helicis aequabitur dimidio trilineo parabolico cuidam, cuius altitudo est ipsa curva AC. in rectam extensa applicata maxima, ultimum horum triangulorum sub chorda et filo maximo, id est filum maximum. Intercepta autem spatia incommensurabilia, inter triangula ex quibus spatium totum helicis composuimus interiecta, sunt quolibet dato minora, si in infinitum dividas, ut alibi ostendi, et ideo negligi possunt.

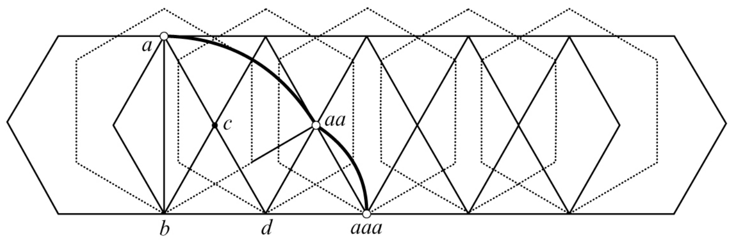
8 AF. *(1)* et primae parti versus A. tantum tribuo quantum partium minimies minimarum, quot partes minimas habet *(2)* Hoc *L*   13 f. partium minimies minimarum *erg. L*

---

4 ita processissem: zum folgenden Quadraturversuch s. N. 7, Teil 1. Hierauf verweist Leibniz in Z. 26 mit „alibi ostendi“ selbst.

Quando autem tangentes sunt aequales, et angulos faciunt aequales, manifestum est, figuram esse circulum. Ergo helix ista est circularis quam eodem modo quadravit Archimedes. Et hinc apparet helices istas describi vel filis evolutis, vel punctis recta procedentibus, dum interim basis eorum gyratur. Unde varia alia genera comminisci licet, quorum facilis reductio. At spatium helice cycloeidali contentum aequatur circulo. Nimirum ipsa cycloeidalis evolvenda componitur ex lateribus similibus, seu similium arcuum, sed continue decrescentium, ut decrescunt chordae in circulo ex diametri termino ad arcuum terminos, in quos circulus aequaliter divisus est ductae.

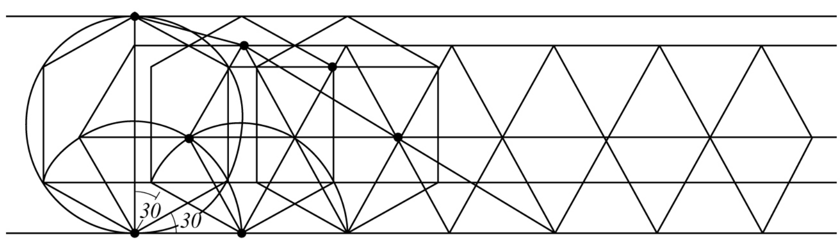
Fig.1.



[*Fig. 5a, tlw. Blindzeichnung*]

---

9 *Vorstufe zu Fig. 5a:*



[*Fig. 5b, Blindzeichnung*]

3 punctis | motis, *gestr.* | recta *L*

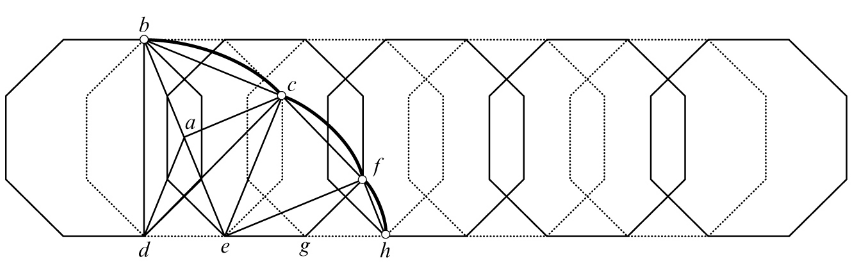
---

2 f. quadravit Archimedes: *De lineis spiralibus*, Prop. XXIV. 5 aequatur circulo: genauer müsste es heißen: aequatur circulo genitori duplo. Der Irrtum wird S. 218 Z. 19 berichtigt. 11 [*Fig. 5b*]: Die Figur steht isoliert auf Bl. LH 35 XII 2 Bl. 125 r° und wird vom Text der N. 7 umschlossen. Sie ist völlig in Blindtechnik ausgeführt, lediglich 7 Punkte sind markiert, die beiden Winkelbezeichnungen hat Leibniz später hinzugefügt. Die dabei verwendete Tinte ist von der des Umfelds deutlich verschieden; sie ist aber sehr ähnlich zu der des vorliegenden Stückes.

Ut fig. 1. clavus a. gyratur super centro b. donec terminus lateris sequentis post b. nempe c. veniat in d. manifestum ergo a. venire in aa. Centrum autem repetendae [gyrationis] erit d. patet autem repetita gyratione super d. tunc aa. radii $d-aa$ venire in aaa. Radius autem <u>daa</u> minor est quam ba. ductus enim est ex aliquo polygoni termino, ad latus uno quam ante propius. Idem est ergo utcunque infinita forent polygona, ac proinde arcus vel latus eius $a-aa$. est ad arcum vel latus eius $aa-aaa$. ut chorda ba. ad chordam bc (vel $d-aa$). seu latera cycloeidis ita descriptae, ut anguli laterum minimorum sunt inaequales, decrescunt, ut chordae in circulo ab aliquo diametri puncto, ad terminos arcuum aequalium infinitorum, semicirculi divisione productorum, ductae. Q.E.D. Angulos autem laterum hoc modo etiam esse aequales, demonstratum est.

Angulus enim $ab(aa)$ aequatur angulo $aadaaa$. et angulus $baad$. aequaretur alteri cuicunque ex loco clavi, ad duo motus centra ducto. Quia duo motus centra b. et d. non nisi latere polygoni distant, locus clavi autem semper in polygoni angulum cadit. Cadit ergo locus clavi in circulum polygono circumscriptum, et circumferentiam, et eidem semper lateri polygono, ergo eidem semper circuli eiusdem arcui insisit. Ergo angulus semper idem est.

His ita positis evolutionem semicycloeidis filaque continue crescentia, arcusque vel latera descriptae curvae cycloeidalis, et triangula ex ductu laterum in fila, ac proinde spatium helicis semicycloeidalis, circulo genitori duplo aequale, persequimur.



[Fig. 6, tlw. Blindzeichnung]

1 fig. 1 *(1)* punctum *(2)* clavus *L* 2 repetitionis *L ändert Hrsg.* 10 autem *(1)* tangentium *(2)* laterum *L* 17 f. vel latera *erg. L* 19 genitori duplo *erg. L*

1–219,6 Leibniz wechselt hier wiederholt die Bezeichnungsweise für Strecken und Winkel, von einer Vereinheitlichung ist daher vom Hrsg. abgesehen worden.

NB. Angulus bdc = ang. cef (= ang. $\underline{fgh}$). Ergo et anguli dbc. dcb. ecf. efc. gfh. ghf. $=^{\text{les}}$. Quaeritur tantum an anguli $\underline{dce}$. et [$\underline{efg}$]. sint aequales et aio esse, quia uterque ad eiusdem vel aequalis circuli circumferentiam est in c. vel f.: et eidem chordae (seu arcui) vel aequali $\underline{de}$. $\underline{eg}$. insistit[,] semper enim ⟨unius⟩ tantum lateris intervallum est inter centra d et e. vel e et g. Ergo cum omnia sint paria, quoad ⟨angulos⟩, erunt et anguli bcf. et cfh. aequales. Quod erat demonstrandum.

1 *(1)* Ang. bac. 90. Ergo $\underline{\text{bdc}}$. 45. Ergo dbc = dcb = 67 $\frac{1}{2}$ $\underline{\text{bde}}$. 90. Ergo $\underline{\text{cde}}$. 45. Porro cef. 45 ergo ecf = efc. 67 $\frac{1}{2}$. ut ante cae. fit detracto bac. ab 180. ergo = 90. Nota investigandum erat ab initio $\underline{\text{dbe}}$. qui est dimidium $\underline{\text{dae}}$ = 45 ergo $\frac{45}{2}$. Idem bd. describens translatum in $\underline{\text{dc}}$. eundem iterum angulum facit $\frac{45}{2}$. dce. Ergo dec. 90. absurdum. *(2)* NB. *L* 2 $\underline{\text{deg}}$ *L ändert Hrsg.*

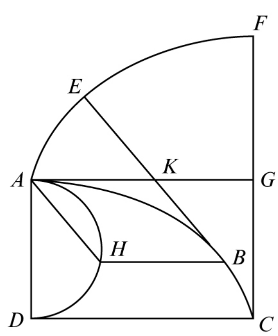
15. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE ח
[Frühjahr 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept mit Ergänzungen: LH 35 II 1 Bl. 293–296. 2 Bog. 2°. 8 S. Bogenzählung 1 und 2; zusätzliche Bogenmarkierung ח.
Cc 2, Nr. 547 tlw.

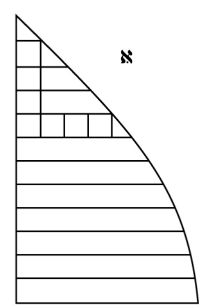
Datierungsgründe: s. N. 9.

15_1. PLAGULA PRIMA

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Inspice fig. Hugenii de *Horol. oscill.* pag. 66. Ibi curva cycloeidalis ABC. intelligatur divisa in partes infinitas, laterave minima, sed ea inaequalia, atque ab A. versus C. ita crescentia uti semiperipheria AHD. in arcus infinitos aequales divisa, chordae a puncto A. ad puncta divisionis ductae crescunt. Chordae istae omnes applicentur arcui AHD. vel curvo manenti, si ei ad superficiem cylindraceam formandam perpendiculariter

---

10 fig. Hugenii = [*Fig. 1*]: Die Figur fehlt in der Handschrift; sie ist aufgrund des vorliegenden Textes und der Originalfigur des Leibnizschen Handexemplars vom Hrsg. ergänzt — zur Originalfigur s. N. 2.

superponantur, vel si ei in rectam extenso applicentur, ea figura chordarum $\aleph$, vel superficies cylindracea, aequabitur quadruplo quadrato radii seu quadrato diametri, ut alibi demonstravi. Sed ut omnia ad elementa tandem aequalia reducantur. Ideo minimae istae partes curvae, divisae intelligantur, in finities minimas; tot scilicet in quot partes divisa est figura chordarum $\aleph$, ut scilicet proportionalis earum numerus ut applicatas figurae chordarum, ita et latera minima curvae constituere intelligatur. Eo tantum discrimine, quod una quaelibet minimies minima curvae, erit ad minimam figurae chordarum, et quodlibet latus curvae, ad quamlibet applicatam figurae chordarum, ut tota curva est ad totam figuram chordarum. Nec proportiones heterogeneorum timere debemus, sunt enim verissimae, et cum constet figuras per lineas dividi posse. Nil aliud autem ratio quam divisio est. Et vero verissimam istam methodum esse, proportiones instituendi linearum ad figuras, ostendi exemplo helicis circularis, quam cum hac methodo resolverem, idem plane reperi, quod Archimedes alia longe ratione. Porro datur ratio figurae chordarum ad curvam cycloeidalem, quia illi potest dari aequalis figura rectilinea, huic aequalis linea recta.

Porro partes minimae in quas figura $\aleph$ divisa intelligatur, sunto quadrata unitatum eius, seu minimarum partium arcus. Figura autem chordarum r e p r a e s e n t a b i t nobis exacte curvae cycloeidalis naturam. Iamque evolutio curvae ABC. fieri intelligatur. Filum ergo primum erit latus minimum seu primum (una minimies minima), secundum erit latus primum et 2^{dum}, tertium latus primum secundum et tertium, et ita porro erit ergo summa omnium si scilicet ista fila, applicata intelligerentur diametro AD. in aequales partes, aequalis summae triangulari chordarum (id est sinuum arcus duplo minoris, hoc loco quadrantis quadruplicatorum) divisa tamen, per rationem figurae chordarum ad curvam cycloeidalem, et prodibit circulus quidam, ut praedixi.

At vero ut spatium ACF. compleant intelligenda sunt duci in latera semicycloeidis, quam evolutione describunt. Horum laterum ea est natura ut crescant (contra quam ante,

7 quaelibet *(1)* minima alia *(2)* minimies *L* 7 f. ad *(1)* minimies *(2)* minimam figurae *(a)* semichordis, et *(b)* chordarum, et *(aa)* quaelibet applicata *(bb)* quodlibet *L* 19 erit *(1)* minima, quam *(2)* latus *L* 23 rationem *(1)* curvae ad figuram, cycloeidalis *(2)* figurae *L* 24 et prodibit circulus quidam, *später erg. L*

2 f. alibi demonstravi: s. N. 12₁ S. 177 Z. 6 f. 12 ostendi: s. N. 14 S. 217 Z. 2–8. 13 Archimedes: *De lineis spiralibus*, prop. 24.

ubi crescebant deorsum ab A. versus C.) sursum ab A. versus F. crescent autem ut fila. Quia fila evolvendo circa quodlibet evolutionis centrum, seu polygoniae cycloeidis peripheriae punctum semper aequalem aperturae angulum faciunt, et ideo arcus evolvendo descripti semper sunt similes, ac proinde ipsi, vel latera radiis, id est filis, proportionales. Porro quodlibet latus in filum suum ducitur summa omnium bisecatur, productum erit area evolutione descripta circulo aequalis. Porro sciendum unumquodque horum filorum repraesentari posse per proportionem figurae chordarum a vertice abscissam uti maximum summa omnium; haec autem semper cognosci potest, eo prorsus modo quo initur summa sinuum rectorum, scilicet recta inter duos ultimos sinus in radium ducta productum tantum dividetur per rationem figurae chordarum ad curvam cycloeidis, et habebitur semper quantitas fili. Sed haec iamdum nota est, per ab aliis demonstrata.

Supposuimus ad generationem cycloeidis peripheriam generantem divisam in partes aequales atque ita curvam cycloeidalem divisimus in partes hoc quo diximus modo crescentes, ergo et fila hoc modo crescent evolvendo; quando arcus circuli aequidivisus est. Iam arcu circuli aequidiviso fila crescunt ut duplae chordarum, ergo relictis iam figuris repraesentantibus, summisque triangularibus etc. poterimus nunc solis duplis chordarum, ad sinus scilicet, (neque enim hoc loco chordas ad ordinatas adhibemus) uti. Ergo et latera cycloeidis evolutione descriptae crescent eodem modo. Cum ergo fila duci intelligantur in suum quodque latus, cum ipsius latus ductum in ipsum filum, intelligi possit, esse ipsummet filum in exiguo, tota enim curva summam omnium filorum in exiguo repraesentat, ideo perinde est, ac si omnia fila ducantur in se ipsa, seu ac si sumantur filorum quadrata, summaque eorum (quae est cylindr.) multiplicata per curvam (quae aequatur rectae), dividatur per summam filorum quae aequatur rectilineae, non mirum est productum esse circulum.

Caeterum ex his methodus apparet generalis metiendi quamcunque portionem spatii helicis cycloeidalis filo percursi ut ABE. Summa quadratorum, chordarum, dividatur per id quod prodit summa chordarum per curvam evolutione descriptam divisa. Imo haec

10 rationem *(1)* cycloeidis *(2)* figurae *L* 18 ergo *(1)* chordae *(2)* fila *L* 22 (quae est cylindr.) *erg. L* 22 f. (quae aequatur rectae) *erg. L* 27 chordarum *(1)* per *(2)* in curvam decursam ducta *(3)* per *L*

11 ab aliis demonstrata: u. a. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 286–288 bzw. *Opusculum geometricum*, 1659, S. 14 (= *Syn. geom.* S. 336 f.); Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, S. 1 u. 3 (*PO* IX S. 61 f. u. 64); Wallis, *Mechanica*, 1670/71, S. 210 f. (*WO* I, S. 707).

est methodus generalis inveniendi omne spatium helicoeidale, si scilicet linea evoluta intelligatur constare ex lateribus eundem ad se invicem angulum habentibus. Et pertinet ad analysin invenire modum describendi curvas, vel in elementa resolvendi, ut earum latera intelligi possint eorundem angulorum. Et vicissim, ut intelligi possint aequalia, utcunque varient anguli.

Porro hinc et facile separatim portionis BKA. seu trilinei concavi cycloeidalis, duabus tangentibus (quarum altera est basi parallela) contenti, item portionis AEK. quoniam abscinditur semper trianguli sub filo et latere, pars imo haberi non potest, per hoc, quia pars abscissa non est proportionalis semper eodem modo. Quod si linea AG. fila semper bisecaret, aut semper trisecaret etc. ea abscinderet in partes proportionales, atque ideo haberi posset spatium illa curva et cycloeide contentum. Investiganda est huius curvae natura. Hoc fieri potest in omnibus helicibus etiam circularibus. Vastissimus hic aperitur campus dicendi de figuris succenturiatis. Nimirum inter evolvendum, suppone aliquid medium semper fili locum tenere, vel tertiam partem etc., eius vestigia signabunt quandam succenturiatam evolutionalis. Aliter NB. si filum non toti circumvolutum, quae

---

12–224,2 *Dazu drei separate Ergänzungen am Rande:*
Ut aliquid semper in medio fili sit, imaginare chordas tensas semper in medio nonnihil in parabolam curvari, ita habebis aliquam succenturiatam figurae cuiuscunque evolutione descriptae.

Si curva evolutione descripta sit cycloeis, eius succenturiatae pleraeque poterunt, puto quadrari. Suppone denique alium casum, aliquid in filo, dum evolvitur certa quadam celeritate, moveri.

Ex prop. 3. Hugenii de linearum curvarum evolutione, ostendi potest, quod lineae succenturiatae non habeant tangentes parallelas evolutione descriptae, aut secantes perpendiculariter easdem, quia omnes succenturiatae ex eodem puncto egrediuntur cum data evolutione descripta.

15 si *(1)* aliquod aliud punctum, a ver *(2)* filum *L* 20 *(1)* Harum curvarum evolutionalis *(2)* Si *L*

---

23 prop. 3. Hugenii: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 63 (*HO* XVIII S. 194–197).

tunc figura, seu si filum sit brevius curva. Item alia: si semper eadem seu determinata, ab aliquo extremorum distantia servetur.

Methodus generalis est spatia evolutionibus descripta inveniendi, cum scilicet anguli laterum evolutae sunt, aequales, cum scilicet summa quadratorum, filorum iniri potest, productum producitur per quotientem summae filorum per curvam divisae.

[*Isoliert zwischen Teil 1 u. Teil 2*]

$$1 \frown 1. \quad Rq\ 2. \qquad\qquad 2 \frown 2. \quad Rq\ 4. \qquad\qquad 3 \frown 3. \quad Rq\ 6.$$

$$\begin{array}{cccc} \dfrac{Rq\ 2}{1} & \dfrac{Rq\ 4}{2} & \dfrac{Rq\ 6}{3} & \dfrac{Rq\ 12}{6} \\ Rq\ 2. & Rq\ 16. & Rq 54. & Rq\ 432. \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccc} \dfrac{Rq\ \dfrac{2}{4}}{\dfrac{1}{4}} & \dfrac{Rq\ 1}{\dfrac{1}{2}} & \dfrac{Rq\ 2}{1} & \dfrac{Rq\ 4}{2} & \dfrac{Rq\ 8}{4} & \dfrac{Rq\ 16}{8} & \dfrac{Rq\ 32}{16} & \dfrac{Rq\ 64}{32} \\ & [2] & & 1 & & \dfrac{1}{2} & & \dfrac{1}{4} \end{array}$$

Manifestum est illas rationes decrescere quando termini crescunt.

---

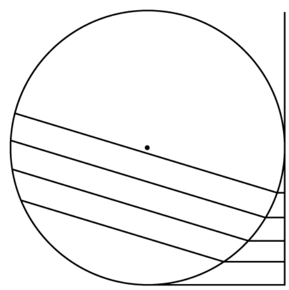
9 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{r} 12 \\ 36 \\ \hline 72 \\ 36 \\ \hline 432 \end{array} \qquad \frac{Rq\ 2}{4}\ \textit{(!)} \times \frac{1}{4} = \frac{Rq\ 32}{4}$$

11 $\frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.*

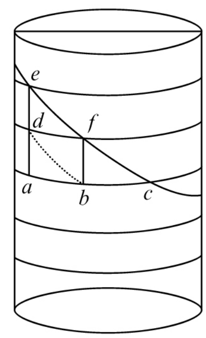
[*Teil 2, verworfen*]

Ad curvae ellipticae naturam indagandam ita processi, descripsi plures circulos basi parallelos in cylindros, atque hos circulos ut polygona concepi. Elliptica est linea ducta a termino quodam lateris polygoni superioris, ad terminum lateris proxime sequentis polygoni inferioris. Et supposito cylindri basin esse polygonum rectarum transversarum summa, erit aequalis curvae ellipticae, velut sumendo istas transversas pro arcuum aequalium, aequalibus subtensis.



[*Fig. 3*]

fig. 1.



[*Fig. 4*]

Hac resolutione ellipsis dividitur in infinitos arcus aequales. Supponatur altitudo ex qua fit sectio, aequari semicircumferentiae baseos, tunc divisa basi in latera infinita aequalia,

---

2 *Darüber:* Male.

10–226,1 *bzw.* S. 227 Z. 6 *Zusätzliche Betrachtung:*

Rectangulum sub curva, et eius distantia ab axe, aequatur dimidio quadrato radii circuli superficiei ex curva circa axem voluta genitae aequalis. Rectangulum hoc aequatur applicatarum axis ad curvam translatarum summae. Ex his demonstrari potest utcunque dividatur axis sive in partes infinitas aequales sive inaequales, summam applicatarum axis ad curvam translatarum semper esse eandem. Semper enim rectangulo illi aequalis, ergo et inter se. Eodem modo p u t o et summa arcuum ad axem translatorum.

10 in *(1)* polygona infinita *(2)* latera *L*

---

1 Die folgenden Abschnitte hat Leibniz später verworfen, indem er sie, ohne sie zu streichen, zwischen zwei „Male“ eingeschlossen hat. 2 processi: s. N. 9_1 S. 99 Z. 15 ff.

altitudine recta, in partes totidem, singulas prioribus aequales et inter se, latus ellipseos semper aequabitur radici quadrati lateris polygoni duplicati. Sin latus polygoni, et portio altitudinis sint inaequalia, quaelibet subtensa ellipseos aequabitur radici summae quadratorum lateris polygoni et portionis minimae assignatae altitudinis. Cumque omnes subtensae ellipseos sint aequales, et omnia latera polygoni, et portiones altitudinis aequales, hinc posito quod altitudo cylindri secti et semiperipheria baseos sint aequales inter se erit peripheria semipolygoni elliptici ad semiperipheriam baseos seu polygoni circularis ut est radix duplicati quadrati, sub latere polygoni circularis, ad ipsum latus polygoni circularis.

Esto latus polygoni circularis a. et eius semiperipheria $a\beta$. β. numero laterum posito erit summa peripheriae polygoni elliptici $\beta Rq2a^2$. Esto latus polygoni circularis $\frac{1}{2}a$. vel $\frac{a}{2}$. subtensa elliptica: $Rq\frac{2a^2}{4} = Rq\ \frac{a^2}{2}$. Erit numerus laterum 2β. Erit summa semiperipheriae polygoni $\frac{1}{2}a2\beta$. seu $a\beta$. eadem quae ante, at peripheria polygoni elliptici non erit eadem quae ante, cum enim quadratum lateris polygoni circularis $\frac{a^2}{4}$, duplicatum $\frac{a^2}{2}$. et subtensa elliptica erit $Rq\frac{a^2}{2}$, eritque semiperipheria polygoni elliptici: $2\beta Rq\ \frac{a^2}{2}$. Quod si latus sit $\frac{a}{3}$. erit quadratum duplicatum $\frac{2a^2}{9}$. et subtensa elliptica $Rq\frac{2a^2}{9}$. Tabula haec erit:

latus circulare	a	$\frac{a}{\cancel{2}}$	$\frac{a}{\cancel{3}}$	$\frac{a}{\cancel{4}}$
latus ellipticum	$\frac{Rq\ 2a^2}{\cancel{1}}$	$\frac{Rq\ 2a^2}{\cancel{2}}$	$\frac{Rq\ 2a^2}{\cancel{3}}$	$\frac{Rq\ 2a^2}{\cancel{4}}$

7 erit *(1)* elliptica *(2)* ellipsis *(3)* semiellipsis *(4)* peripheria *L* 8 radix *(1)* quadrata *(2)* quadrati dimidii lateris polygoni dupli *(3)* duplicati *L* 12 subtensa ... $= \mathrm{Rq}\ \frac{\mathrm{a}^2}{2}$. *erg. L* 12 f. summa *(1)* peripheriae *(2)* semiperipheriae *L* 15 $2\beta\mathrm{Rq}\ \frac{\mathrm{a}^2}{2}$. *(1)* quae erit ad priorem *(2)* Quod *L* 16 et *(1)* summa *(2)* peri *(3)* semiperipheria elliptica: *(4)* subtensa *L* 18 latus *(1)* polygoni *(2)* circulare *L*

Hinc apparet eandem semper manere rationem lateris polygoni elliptici, ad latus polygoni circularis ac proinde peripheriae polygoni elliptici ad peripheriam polygoni circularis, quantuscunque sit numerus laterum polygoni aut quantuluscunque.

Brevius rectiusque ista sic complectar. Inspice fig. 1. Pone basin circularem divisam in arcus aequales infinitos: $\underline{ab}$. $\underline{bc}$. ductaeque intelligantur eorum chordae, vel latera $\underline{ab}$. $\underline{bc}$. Et $\underline{ea}$. altitudo coni secti, dividatur in partes totidem aequales quot sunt in $\underline{abc}$. seu quot sunt latera arcui circulari inscripto. Ductisque per puncta divisionis in altitudine designata peripheriis, ipsi $\underline{abc}$. aequalibus et parallelis, ut per d. manifestum est curvam ellipticam $\underline{ec}$. in totidem aequales partes dividi ut in f. ex quibus punctis divisionis curvae ellipticae, dimittantur rectae in basin cylindri ut $\underline{fb}$. et arcuum ellipticorum $\underline{ef}$. $\underline{fc}$. subtensae ductae intelligantur. Iamque omissis arcubus non nisi de subtensis loquamur, cum constet summam subtensarum arcuum exiguorum infinitorum, in quos arcus datus divisus est, toti arcui dato aequari. Intelligantur etiam subtensae arcus circularis $\underline{abc}$. et elliptici $\underline{efc}$. explicari in unam rectam continuam, arcui cuiusque, nempe $\underline{abc}$. et $\underline{efc}$. aequalem. Manifestum est infinitis illis triangulis orthogoniis aequalibus $\underline{edf}$. $\underline{dab}$. $\underline{dfb}$. $\underline{fbc}$. qui scilicet altitudinis parte minima, et subtensis arcuum minorum continentur, in unum planum iunctis fieri triangulum orthogonium integrum $\underline{eac}$. Constat enim omne triangulum, divisione cuiusque lateris in eundem numerum partium aequalium, in eundem numerum triangulorum aequalium resolvi, atque ideo etiam ex iis componi. Cum autem in isto triangulo orthogonio integro altitudo sit eadem quae cylindri secti, basis sit arcus circularis explicatus, hypotenusa, arcus ellipticus explicatus, summa scilicet subtensarum cuiusque manifestum est hoc theorema:

---

8 Hoc ego falsum esse arbitror, alioquin haberetur sectio angulorum universalis, et ellipseos quoque et centra gravitatis curvarum circuli et ellipseos etc. Imo et tetragonismus, necesse est ergo lineam eiusmodi non esse geometricam.

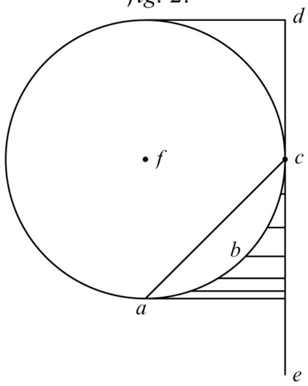
3 f. quantuluscunque. *(1)* Ergo | posita altitudine cylindri aequali semiperipheriae baseos *erg. u. gestr.* | tota peripheria *(a)* elliptica *(b)* circularis est ad peripheriam *(aa)* circularem, *(bb)* ellipticam, ut *(aaa)* latus pol *(bbb)* dupli *(ccc)* radix polygoni *(aaaa)* dupli quadrati *(bbbb)* quadrati duplicati sub latere *(ddd)* latus | quantum maximum latus assumi putes *erg.* | polygoni, quod minimum p o s s i b i l e m laterum numerum habet; ad eius radicem quadrati duplicati eius lateris. Iam maximum latus *(2)* Brevius *L* 7 latera *(1)* semiperipheriae *(2)* arcui *L* 17 f. triangulum | rectilineum *gestr.* |, divisione *L* 19 triangulorum *(1)* proportionalium *(2)* aequalium *L* 20 sit *(1)* semiperipheria *(2)* arcus *L* 23 sectio *(1)* circuli *(2)* angulorum *L*

Dato triangulo orthogonio, in quo cathetus sit altitudo cylindrici oblique secti; basis, trianguli, sit ea portio peripheriae basis cylindrici quae inter perpendicularem ex initio sectionis, in basin demissam, et finem sectionis intercipitur, erit hypotenusa curva sectionis.

Hoc theorema manifestum est esse universalissimum. Continet enim dimensionem curvarum infinitarum, quae ex omnis generis cylindricis oblique sectis oriuntur. Continet item dimensionem cuiuslibet portionis, curvae sectionis. Habemus ergo non dimensionem tantum curvae ellipticae, sed et cuiusque eius portionis, modo ellipsis cylindro suo cogitatione applicetur. Hinc illud quoque animadversione dignum oritur, in hoc negotio praeferendam considerationem ellipseos in solido, cogitationi eius in plano.

Nota si planum ellipseos sit ad planum basis ad angulos semirectos, semper definiri potest superficies curva cunei abscissi, basi arcus scilicet, ellipsi, et superficie cylindracea truncata contenti. Pone v. g. altitudinem cylindri eandem esse cum diametro baseos sermonem esse de tota cunei superficie aliunde constat hanc superficiem esse quartam partem totius superficiei cylindricae; at nos id aliter ostendemus, aequatur scilicet summae omnium sinuum rectorum et versorum circuli; summa sinuum rectorum circuli, est quater quadratum radii, seu octies, fulcrum quadrantis. Summa sinuum versorum est octies segmentum quadrantis, habemus ergo his inter se iunctis, octies, quadrantem, seu bis circulum baseos.

fig. 2.



[*Fig. 5*]

1 oblique *erg. L* 2 peripheriae *erg. L*

Si portiones tantum inquiras ut fig. 1. superficiem <u>*eac*</u>. erit summa omnium sinuum versorum arcus <u>*abc*</u>. seu bis segmentum <u>*ac*</u>. fig. 2. Porro constat semper portionem istam cylindraceam esse superficiei cylindri totius quartam. Si scilicet cylindri altitudo sit eadem quae diameter baseos, seu maxima linea distantiae a fulcro <u>*de*</u>. Ergo etsi maior sit cylinder, eius ratio semper ad totam superficiem cylindraceam dabitur. Est autem haec superficies cylindracea eadem cum superficie ungulae. Porro superficies ungulae duplicatae est ad superficiem conoeidis figurae ut radius ad circumferentiam. Cum cognita sit superficies conoeidis parabolici inventa ab Hugenio, cognita erit etiam (supposita ratione radii ad circumferentiam) superficies ungulae duplae parabolicae, ergo et superficies cylindri parabolici. At superficies cylindri parabolici fit ex curva parabolica in altitudinem cylindri ducta. Ergo habebimus et curvam parabolicam. Inventa autem hoc modo curva

---

1 f. *Auf der Gegenseite:*

Tabula sinuum versorum naturalium et logarithmicorum illa apud Maginum haec apud Cavalerium in *Directorio Uranometrico*. Tabula segmentorum in Sebrand Hans Centuriae Problem. Geom. Batavice. Eius usus multiplex vid. Collins *Trans.* p. 643.

6 Gregorius a S. Vincentio ungulam quadravit ego ungulae superficiem. P. Leotaudus Archimedaeam vocat inventionem Vincentii. Apparet, meam a sua independentem quadratura superficierum cylindricarum centrobaryce truncatarum, in iis scil. curvis, quarum superficies curvae, in planum exporrigi possunt.

7 circumferentiam. *(1)* Hinc si sit superficies cylin *(2)* Cum *L*

---

8 inventa ab Hugenio: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 73 f. (*HO* XVIII S. 212–215).
13–15 Sämtliche Angaben hat Leibniz Collins' Besprechung von J. Gregory, *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1667, in den *Philosophical Transactions*, Bd III Nr. 33 vom 16./26. März 1667/68, S. 640–644 entnommen. Gemeint sind: G. A. Magini, *Primum mobile duodecim libris contentum ... ac praeterea magnus trigonometricus Canon ... ac magna primi mobilis Tabula*, 1609; B. Cavalieri, *Directorium generale uranometricum*, 1632; Sybrant Hansz. van Harlinghen [Cardinael], *Hondert geometrische questien met hare solutien*, [1612], u. ö. (Collins bezieht sich vermutlich auf die 1. Aufl. von 1612; in späteren Ausgaben fehlt die Tafel.) 17 vocat: s. V. Leotaud, *Examen circuli quadraturae*, 1654, S. 137. Leotaud bezieht sich auf Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, Buch 9, Satz 99, S. 1033 f.

parabolica, cum detur et superficies conoeidis eius, dabitur et centrum gravitatis curvae parabolicae. Caeterum rem ad calculos revocemus.

Esto conoeis parabolica $\frac{ax}{2}$ cum aequetur circulo cuidam, cuius peripheria x. radius a. ea est ad ungulam duplam parabolicam ut quarta pars arcus circuli, ad radium.

$$\text{Ergo } \frac{\frac{ax}{2}}{\text{sup. ung. dup.}} = \frac{\frac{x}{4}}{a} \quad \text{Ergo } \frac{\frac{ax}{2}}{1} = \frac{\frac{x}{4}}{a} \frown \frac{\text{superfic.}}{\text{ung. dupl.}} \quad \text{Ergo } \frac{\frac{a^2\cancel{x}}{2}}{\frac{\cancel{x}}{4}} =$$

superfic. ung. dupl. Ergo $2a^2$ = superfic. ung. dupl. Ergo $2a^2\beta$ erit superficies cylindri parabolici, quo diviso per altitudinem eius cognitam $a\delta$ habebitur $\frac{2a\beta}{\gamma}$ curvae parabolica aequalis. Sed hoc falsum est, nam eodem modo haberetur etiam aliqua curvae circulari aequalis. Falsum ergo quod assumsimus, superficiem cylindraceam duplae ungulae, esse aequalem superficiei cylindri totius, cuius altitudo aequalis distantiae fulcri ab extremo e. At nonne hoc in circulo verum est? Est utique. Sed hoc casu cessat relatio illa, quae est in trilineis tantum inter semisolida revolutione genita et ungulam duplam. Puto tamen eandem relationem, si loco solidi ex circuli vel semicirculi circa axem revolutione geniti, substituta fuisset eiusdem semirevolutio circa fulcrum seu tangentem. Eius haberetur relatio ad superficiem duplae ungulae ut radii ad quartam circumferentiae partem. Ungulae duplae circuli superficies habetur, est enim circulo cuidam aequalis $\frac{ax}{2}$. Iam

$$\frac{\frac{ax}{2}}{\begin{array}{l}\text{superfic. semisolid. revol.}\\ \text{circ. circa tangentem}\end{array}} = \frac{a}{x}.\ \text{Ergo } \begin{array}{l}\text{superfic. semisolid.}\\ \text{revol. circ. circa}\\ \text{tangentem}\end{array} = \frac{x^2}{2}.$$

Eodem modo ipsius solidi area invenietur, et eodem modo haberi possunt areae solidorum ex revolutione ellipsis circa tangentem, nam et ibi superficies ungulae duplae seu cunei coni abscissi haberi potest, fit enim ex ellipsi in altitudinem ducta. Videndum verum sit absolute superficiem revolutione productam fieri ex curva in viam centri gravitatis ducta. Imo verissime, hoc ita prodit. Curva enim est tota peripheria circuli, via

13 circa axem *erg. L* 14 eiusdem *(1)* revolutio *(2)* semirevolutio *L* 14 seu tangentem *erg. L* 20 seu cunei *erg. L*

centri gravitatis f. per revolutionem est peripheriae eius dimidia. Ergo habemus peripheriam ductam in dimidium quadrati sui etc.

Idem alio modo facilius ostenderetur, si semiparabolae centri gravitatis distantia ab axe daretur, daretur ratio coni ad conoeidem parabolicum, seu circuli ad rectilineum. Consequentia inde patet, quia si duae figurae circa eundem axem librentur sunt eorum solida circa eum axem ut momenta seu in composita ratione figurarum et distantiarum centrorum gravitatis. Iam datur ratio semiparabolae ad triangulum vel rectangulum, restat ergo tantum, ut ratio distantiarum centrorum ab axe detur, ut detur ratio conoeidis parabolici ad conum vel cylindrum.

Nunc ad aliud veniamus. Habemus aream conoeidis parabolici, habemus, et circulum seu planum eius superficiei aequale. Habemus et rectilineam aequalem figurae parabolicae, habemus et centrum gravitatis parabolae. Cuneus super semiparabola abscissus plano per axem transeunte angulo semirecto ad planum parabolae aequatur cylindro parabolico, cuius basis parabola data, altitudo distantia centri gravitatis parabolae ab axe. Porro cylindri parabolici huius area rectilinea haberi potest. Ergo et dupli eius seu ungulae duplae. Porro ungula ista dupla, est ad conoeidem parabolicum, ut radius ad quadrantem circumferentiae. Ergo si datur centrum gravitatis s e m i parabolae, vel saltem distantia eius ab axe; positaque eorum veritate, quae a Guldino, Pascalio, Hugenio, aliisque posita sunt, dabitur tetragonismus. Hugenius dedit nobis conoeidis parabolici superficiem, in circulum reductam. Esto ergo $\frac{ax}{2}$. ea autem fieri intelligi potest, ex duabus curvis in se invicem ductis, peripheria circuli, qui est via centri gravitatis curvae parabolicae quae peripheria esto $\frac{x}{\xi}$. et curva parabolica, quae esto y. erit ergo $\frac{ax}{2} = \frac{xy}{\xi}$. Ergo $\frac{a}{2} = \frac{y}{\xi}$. Ergo ad quadraturam hyperbolae vel rectam curvae parabolicae aequalem, opus est tantum centro gravitatis curvae parabolicae, seu ξ. id est ratione distantiae centri gravitatis curvae parabolicae ab axe, ad radium circuli, superficiei conoeidis parabolicae aequalis.

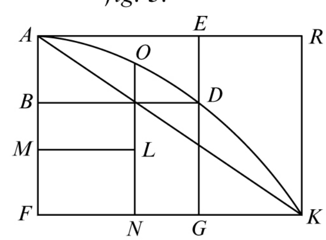
3–9 Idem alio ... vel cylindrum. *erg.* *L* 3 si *(1)* parabolae *(2)* semiparabolae *L* 9 cylindrum. | Quae esto $\frac{x}{\xi}$ *gestr.* | *L* 13 angulo ... parabolae *erg.* *L* 20 f. duabus *(1)* peripheriis *(2)* curvis *L*

19 Hugenius dedit: s. o. S. 229 Z. 8.

Si detur centrum gravitatis curvae quadrantis elliptici dabitur ratio curvae ellipseos tam ad curvam circularem, quam ad curvam parabolicam. Ostendeturque inventa quadratura circuli inventum iri quadraturam hyperbolae. Inventa curva parabolica, invenietur et curva hyperbolica, modo huius centrum gravitatis detur. Ostendi supra, data ratione circuli ad circumferentiam dari rationem curvae ellipticae ad circularem.

[*Teil 3, gültig*]

fig. 3.

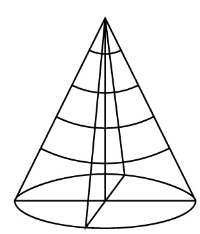


[*Fig. 6*]

---

5 *Darunter:* Male.

7 *Neben fig. 3 isoliert:*



---

9 Die Figur befindet sich zusammen mit einer gestrichenen Vorstufe in der linken oberen Ecke von Bl. 294 v°; sie hat als erstes auf der Seite gestanden.

Dixi ad t e t r a g o n i s m u m nihil aliud requiri quam centrum gravitatis semiparabolae fig. 3. AFK, vel saltem ML. eius distantia ab axe AF. id est ut inveniatur recta NLO. parallela axi ita secans figuram, ut partium utrinque summae triangulares, seu solida centrobaryca sint aequalia, seu ut si applicata quaelibet, ut DG. ducatur in distantiam suam, a fulcro ON. solida producta utrinque sint aequalia (+ datur centri gravitatis semiconoeidis parabolici ab basi (eadem scilicet ac trianguli) +). Porro constat applicatas trilinei parabolici esse in duplicata ratione altitudinum seu ED. esse ad RK. ut $\square AE$. ad $\square AR$. ergo applicatae parabolae ad basin, erunt ut horum complementa ad rectam AF. Intelligatur recta AR. divisa in partes aequales infinitas, erit applicata trilinei ad primam applicatam[,] ad secundam [etc.] ut partium a vertice abscissarum quadrata seu ut

$$\begin{array}{llllll} a. & 2a. & 3a. & 4a. & 5a. & 6a. \\ x. & 4x. & 9x. & 16x. & 25x. & 36x. \\ a\alpha - x. & a\alpha - 4x. & a\alpha - 9x. & a\alpha - 16x. & a\alpha - 25x. & a\alpha - 36x. \end{array}$$

Ergo parabolae applicatae erunt supplementa ipsius $a\alpha$. seu a. ex infinitis partibus constantis.

Sed ut ista constituantur accuratius, omnia resolvenda sunt in partes minimas, aequales, ut habeatur ratio ipsius a. ad ipsum x. Dividatur AR. in partes aequales infinitas, et RK. in partes aequales infinitas, quarum quaelibet parti prioris aequalis, manifestum totam figuram in infinities infinita quadrata a^2 divisum iri. Porro horum a^2. vel a. applicata trilinei prima habebit 1. secunda 4. tertia 9. etc. et tot erunt applicatae quot sunt in AR. quarum numerum exprimam numero β. et maxima applicata tot habebit a. quot sunt in RK. quem numerum exprimam γ. Erunt ergo applicatae

trilinei:

$$\begin{array}{lllllllll} 0. & a. & 4a. & 9a. & 16a. & 25a. & 36a. & \text{etc.} & \gamma a. \end{array}$$

parabolae ad basin:

$$\begin{array}{lllllllll} \gamma a. & \gamma-1,^\frown a. & \gamma-4,^\frown a. & \gamma-9,^\frown a. & \gamma-16,^\frown a. & \gamma-25,^\frown a. & \gamma-36,^\frown a. & \text{etc.} & 0. \end{array}$$

Porro, ut omnia sint faciliora cogitetur $K = R$. seu $\beta = \gamma$. Sed hinc sequitur absurdum, nam ultima γa. deberet esse ad βa. ut eius quadratum, et ideo non potest eadem

1 ad *(1)* quadraturam circuli *(2)* t e t r a g o n i s m u m *L* 7 parabolici *(1)* crescere *(2)* esse *L* 9 infinitas, *(1)* 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. *(2)* erit *L* 10 primam | ad *streicht Hrsg.* | applicatam *L* 10 etc. *erg. Hrsg.* 20 in *(1)* infinitum *(2)* infinita *(3)* infinities *L* 22 sunt | unitates *gestr.* | in AR. *L* 22 f. habebit *(1)* unitates, *(2)* a. quot sunt | unitates *gestr.* | in RK. *L* 23–27 Erunt ergo ... etc. 0. *erg. L*

assumi mensura communis a. cum portiones quibus constat applicata debeant esse ad portiones, aequales eius ad quas applicatur seu basis, ut quadratum cuiuscunque numeri est ad suum numerum. Adde et hoc, incipiendo ab applicata ultima, quae esto γa. applicata ad β. erit secunda, applicata ad $\beta - 1$. ut est β^2 ad $\beta^2 + 1 - 2\beta$. Posita ergo prima γa. erit haec ratio

$$\frac{\gamma a}{\text{secunda}} = \frac{\beta^2}{\beta^2 + 1 - 2\beta}.\ \text{Ergo}\ \frac{\text{secunda}}{1} = \gamma a \frown \frac{\beta^2 + 1 - 2\beta}{\beta^2}.$$

$$\text{Tertia}\ \gamma a \frown \frac{\beta^2 + 4 - 4\beta}{\beta^2}.\ \text{Quarta}\ \gamma a \frown \frac{\beta^2 + 9 - 6\beta}{\beta^2}\ \text{etc.}$$

Porro, ut analysis sit clarior pro $\dfrac{\beta^2 + 1 - 2\beta}{\beta^2}$ et similibus substituemus: $1 + \dfrac{1}{\beta^2} - \dfrac{2}{\beta}$. Ita habebimus:

$$\begin{array}{cccc} \gamma a & \gamma a + \dfrac{\gamma a}{\beta^2} - \dfrac{2\gamma a}{\beta} & \gamma a + \dfrac{4\gamma a}{\beta^2} - \dfrac{4\gamma a}{\beta} & \gamma a + \dfrac{9\gamma a}{\beta^2} - \dfrac{6\gamma a}{\beta} \\ & & \text{applicata} & \\ \text{prima} & \text{secunda} & \text{tertia} & \text{quarta} \end{array}$$

Ex his apparet primum esse toties γa. quot sunt applicatae, seu sumendum esse rectangulum $\boxed{\gamma\beta a}$. Huic rectangulo addendum est:

$$\begin{array}{ccc} & 3 & 5 \\ \dfrac{\gamma a}{\beta^2} + & \dfrac{4\gamma a}{\beta^2} + & \dfrac{9\gamma a}{\beta^2}\ \text{etc.} \end{array}$$

14; S. 236 Z. 13 u. 18 Die umrahmten Werte sind je durch Verbindungsstriche mit den entsprechenden Gliedern der Hauptformel verbunden.

$$
\begin{array}{lllllll}
0 & & & & & & \\
 & 1 & \frown 5 & 5 & 1 & & \left[\begin{array}{r|rr} 15 \frown 1 & 1 \frown & 5 \\ & & \\ 10 \frown 2 & 3 & 4 \\ & & \\ 6 \frown 2 & 5 & 3 \\ & & \\ 3 \frown 2 & 7 & 2 \\ & & \\ 1 \frown 2 & 9 & 1 \end{array}\right] \\
1 & 2 & & & & & \\
 & 3 & 4 & 12 & 1+2 & & \\
4 & 2 & & & & & \\
 & 5 & 3 & 15 & 1+2+2 & & \\
9 & 2 & & & & & \\
 & 7 & 2 & 14 & 1+2+2+2 & & \\
16 & 2 & & & & & \\
 & 9 & 1 & 9 & 1+2+2+2+2 & & \\
\underline{25} & & & & & & \\
55 & & & & & &
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{ccccccccccccc}
1. & & 2. & & 3. & & 4. & & 5. & & 6. & & \\
1 & & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & \\
1 & \smile & 3 & \smile & 6 & \smile & 10 & \smile & 15 & \smile & 21 & \smile & 28 \\
 & 4 & & 9 & & 16 & & 25 & & 36 & & &
\end{array}
$$

Summa quadratorum est summa numerorum triangularium duplicata, demto ultimo numero triangulari.

---

12 *Darüber, eingeschoben (mit zusätzlicher numerischer Berechnung von* 7^3*):* $A+1$. 1. 3. 3. 1. $1A^3$ $3A^2$ $3A$ $1 \frown 1$. 7.

14 *Gültige Nebenrechnung zur Lesart (im Text fortlaufend gerechnet):*

$$
\begin{array}{rl}
28 & \quad 1 \\
6 & \quad \cancel{1}\cancel{6}8 \; \cancel{f} \;\; 56 \\
\overline{168} & \quad \cancel{3}3
\end{array}
$$

2–10

5	*(1)*	$2 \frown 20$	*(a)*	10	*(b)*	40	*(2)*	$5 \frown 1$	*(3)*	1	$5 \frown 1$	$1 \frown 5$	
12		$2 \frown 12$		6		24		$4 \frown 2$		$1+2$	$16 \frown 2$	3	
15		$2 \frown 6$		3		12				...	$9 \frown 2$	5 *ändert Hrsg.*	*L*
14		$\underline{2 \frown 1}$		1		4				...	$4 \frown 2$	7	
9										...		9	

14+16 $\smile$ 28 *(1)* Iam $6 \frown 28$ *(2)* Summa *L*

Optima methodus summandi quadratos apta ad geometriam haec est: certum est numero ducto in proxime maiorem fieri duplum triangularis. Porro eodem numero ducto in productam maioris triangularem fieri triplum pyramidalis maioris, seu summae triangularium. Denique si summa triangularium duplicetur, a producto detrahatur ultima triangularium, habetur summa quadratorum.

Hoc ut ad nostram ratiocinationem applicemus, numerus maximus naturalium seu ultimus, in ista serie 1. 2. 3. 4. etc. β. nempe β. ducatur in proxime maiorem (id est per regulas infinitorum,) in se ipsum producti dimidium erit summa triangularis. In hanc triangularem (triangulum scilicet semiquadratum) ducatur rursus, fiet prisma cuius basis triangulum, eius prismatis, quod est cubi dimidium tertia pars, id est sexta cubi, duplicata, id est tertia pars cubi, seu pyramis erit summa quadratorum quaesita. Haec summa ergo:

$$\frac{\gamma a}{\beta^2} + \frac{4\gamma a}{\beta^2} + \frac{9\gamma a}{\beta^2} \text{ etc. dabit } \frac{\frac{\beta^3}{3}\gamma a}{\beta^2} = \boxed{\frac{\beta\gamma a}{3}}$$

Hactenus feliciter. Restat iam invenire: summam horum, quae a prioribus auferenda:

$$\frac{2\gamma a}{\beta} + \frac{4\gamma a}{\beta} + \frac{6\gamma a}{\beta}$$

Horum summa inventa facilis. Nam $2+4+6$ etc. est duplum huius $1+2+3$ etc. sufficit ergo ut hoc inveniamus. Iam dictum est 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. β. aequari $\frac{\beta^2}{2}$. Ergo 2. 4. 6. 10. 12. etc. $= \beta^2$. Ergo $\frac{2\gamma a}{\beta} + \frac{4\gamma a}{\beta} + \frac{6\gamma a}{\beta}$ etc. $= \frac{\beta^2\gamma a}{\beta} = \boxed{\beta\gamma a.}$

Colligamus in unum tres summas inventas, habebimus

$$\gamma\beta a + \frac{\beta\gamma a}{3} - \beta\gamma a = \frac{\beta\gamma a}{3}.$$

9 hanc *(1)* pyramidalem *(2)* triangularem *(a)* ducatur idem, fiet *(b)* triangulum scilicet *(c)* (triangulum scilicet | semiquadratum *erg.* |) ducatur *L*

En perfectam absolutamque demonstrationem ex arithmetica infinitorum, qua quadratura parabolae evincitur; seu trilineum parabolicum esse tertiam rectanguli partem. Eadem methodo procedi potest ad gradus altiores.

applicatae tri– linei parabolici.	$\frac{36}{6}$		$\frac{25}{6}$		$\frac{16}{6}$		$\frac{9}{6}$		$\frac{4}{6}$		$\frac{1}{6}$		$\frac{0}{6}$
		$\overset{\frown}{11}$		$\overset{\frown}{9}$		$\overset{\frown}{7}$		$\overset{\frown}{5}$		$\overset{\frown}{3}$		$\overset{\frown}{1}$	
applicatae parabolae ad basin	0		$\frac{11}{6}$		$\frac{20}{6}$		$\frac{27}{6}$		$\frac{32}{6}$		$\frac{35}{6}$		$\frac{36}{6}$

---

4 *Darüber zugehörige Rechnungen:*

6. $6+\frac{6}{36}-\frac{2\frown 6}{6}=4\frac{6}{36}\,|\,\frac{1}{6}$. $6+\frac{4\frown 6}{36}-\frac{4\frown 6}{6}=2\frac{24}{36}\,|\,\frac{4}{6}\,|\,\frac{2}{3}$. $6+\frac{9\frown 6}{36}-\frac{6\frown 6}{6}$. $6+\frac{16\frown 6}{36}-\frac{8\frown 6}{6}$.

15_2. PLAGULA SECUNDA

[*Teil 1*]

Invenimus paulo ante si axis sit aequalis basi, progressionem applicatarum ad basin seu axi parallelarum trilinei parabolici hanc intelligi posse, supponendo 6. esse basin vel axem:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 11 & & 9 & & 7 & & 5 & & 3 & & 1 & \\
\frac{36}{6} & & \frac{25}{6} & & \frac{16}{6} & & \frac{9}{6} & & \frac{4}{6} & & \frac{1}{6} & & \frac{0}{6}
\end{array}$$

et applicatarum parabolae seu ordinatarum ad basin, complementum eorum ad $\frac{36}{6}$ seu 6. seu maximum, sic:

$$\begin{array}{ccccccccccccccccc}
 & & & & C & & D & & E & & F & & G & & & & \\
 & & & 11 & & 9 & & 7 & & 5 & & 3 & & 1 & & & \\
A & 0 & — & & \frac{11}{6} & — & \frac{20}{6} & — & \frac{27}{6} & — & \frac{32}{6} & — & \frac{35}{6} & — & \frac{36}{6} & & B.
\end{array}$$

Iam quaestio haec est: Si sit libra AB, divisa in partes aequales, quotcunque, ex quibus suspensa intelligantur pondera, quae sint ut ordinatae semiparabolae ad basin, seu ut numeri a quadrato quodam dato decrescentes, differentiis continue crescentibus, ut numeri impares deinceps ab unitate, invenire punctum aequilibrii, proxime. Seu ut vicinissimo ad punctum aequilibrii inventum per 1. proximo per 2. tertio per 3. quarto per 4. multiplicato, utrinque producta sint aequalia, proxime. Proxime inquam, ut etsi aliud punctum aequilibrii assumatur, proximiora futura non sint. Praecise autem haberi semper non poterit, modo punctum aequilibrii aliquod ex ipsis divisionis punctis esse, nec intra ipsa cadere debeat – v. g. assumamus id punctum esse F. stabunt hoc modo:

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
A & & C & & D & & E & & F & & G & & B \\
0 & — & 11 & — & 20 & — & 27 & — & 32 & — & 35 & — & 36 \\
 & & 3 & & 2 & & 1 & & & & 1 & & 2 \\
 & & \multicolumn{5}{c}{\underbrace{33 \quad + \quad 40 \quad + \quad 27}_{100}} & & & & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{35 \quad + \quad 72}_{107}}
\end{array}$$

3 applicatarum *(1)* parabolae *(2)* ad *L* 14 quae *(1)* sunt ut applicatae parabolae *(2)* sint *L*

Si alio modo assumas, maior erit inaequalitas, erit ergo F. punctum aequilibrii proxime.

Sed magni momenti foret methodum habere id punctum aequilibrii quam proxime, universaliter determinandi, quamquam putem vix punctum istud aequilibrii determinari posse quam proxime, nisi et methodus reperiatur, id determinandi praecise. Videamus tamen:

	11	9	7	5	3	1		
0	11	20	27	32	35	36	=	161
	11	9	7	5	3	1		
	6	5	4	3	2	1		
	66	45	28	15	6	1	=	161

11	20	27	32	35	36
11	11.9	11.9.7	11.9.7.5	11.9.7.5.3	11.9.7.5.3.1

11	11.9	11.9.7	11.9.7.5	11.9.7.5.3	11.9.7.5.3.1
2	2.2	2.2.2.	2.2.2.2	2.2.2.2.2	2.2.2.2.2.1
2	2.2	2.2.2.	2.2.2.2	2.2.2.2.1	2.2.2.2.1
2	2.2	2.2.2.	2.2.2.1	2.2.2.1	2.2.2.1
2	2.2	2.2.1	2.2.1	2.2.1	2.2.1
2	2.1	2.1	2.1	2.1	2.1
1	1 (2)	1 (2)	1 (2)(2)	1 (2)[2]	1 (2.2.2)

$5 \frown 2+1$	$9 \frown 2+1$	$12 \frown 2+3$	$14 \frown 2+4$	$15 \frown 2+5$	$15 \frown 2+6$
$5 \frown 2+1$	$10 \frown 2+0$	$13 \frown 2+1$	$16 \frown 2+0$	$17 \frown 2+1$	$18 \frown 2+0$

19 [2] *erg. Hrsg.*

19 Die geklammerten Zweien sind in der Handschrift parallel zur Klammerung schräg geschrieben.

$$\begin{array}{lllllllllllll}
 & \overset{\frown}{5} & & \overset{\frown}{4} & & \overset{\frown}{3} & & \overset{\frown}{2} & & \overset{\frown}{1} & & \overset{\frown}{0} & \\
0 & & 5 & & 9 & & 12 & & 14 & & 15 & & 15 \\
 & & 5 & & 5.4 & & 5.4.3 & & 5.4.3.2. & & 5.4.3.2.1 & & 5.4.3.2.1.0 \\
 & & 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1\ 1 \\
 & & 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1\ 1 \\
 & & 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 & & 1\ 1\ 1 \\
 & & 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1 & & 1\ 1 \\
 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & 1
\end{array}$$

Habemus ergo simplicissimam progressionem ordinatarum parabolae ad basin. Nam pro

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
 & 11 & & 9 & & 7 & & 5 & & 3 & & 1 & \\
0 & & \frac{11}{6} & & \frac{20}{6} & & \frac{27}{6} & & \frac{32}{6} & & \frac{35}{6} & & \frac{36}{6}
\end{array}$$

habemus

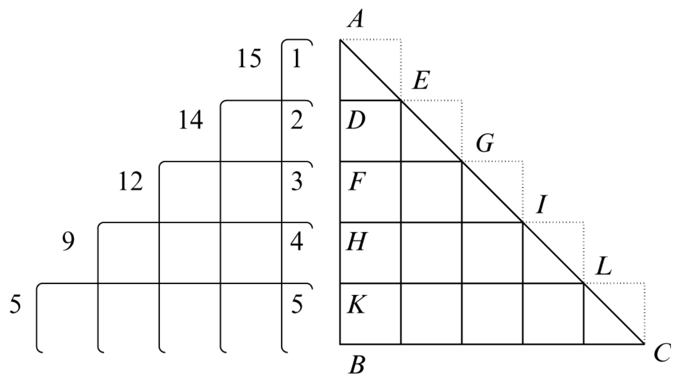
$$\begin{array}{cccccccccccccc}
 & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 & & 0 & & \\
0 & & \frac{5}{5} & & \frac{9}{5} & & \frac{12}{5} & & \frac{14}{5} & & \frac{15}{5} & & \frac{15}{5} & \\
 & & \frac{10}{5} & & \frac{18}{5} & & \frac{24}{5} & & \frac{28}{5} & & 6 & & & \text{duplicata}
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
10 \overset{9}{—} & 19 \overset{8}{—} & 27 \overset{7}{—} & 34 \overset{6}{—} & 40 \overset{5}{—} & 45 \overset{4}{—} & 49 \overset{3}{—} & 52 \overset{2}{—} & 54 \overset{1}{—} & 55 \\
\overset{5}{50} & \overset{4}{76} & \overset{3}{81} & \overset{2}{68} & \overset{1}{40} & & \overset{1}{49} & \overset{2}{104} & \overset{3}{162} & \overset{4}{220} \\
\hline
\overset{4}{40} & \overset{3}{57} & \overset{2}{54} & \overset{1}{34} & & & & & & \\
\hline
\overset{3}{30} & \overset{2}{38} & \overset{1}{27} & & & & & & & \\
\hline
\overset{2}{20} & \overset{1}{19} & & & & & & & &
\end{array}$$

Ex his schematibus apparet, resolutione facta usque ad unitates, ultra quas resolutio nulla est, apparet, inquam, esse duplicatas portiones trianguli cuiusdam, abscisso semper

9 ergo *(1)* veram rationem *(2)* simplicissimam *L*   27 duplicatas *erg. L*

triangulo maiore, atque maiore, progrediendo per aequales altitudinis partes,



maximum	[36	=	$\bigtriangledown^{\text{lo}}ABC.$]	
	35	=	$\bigtriangledown^{\text{lo}}ABC.$	
	32	=	portioni	$DEBC.$
	27	=		$FGBC.$
	20	=		$HIBC.$
	11	=		$KLBC.$
			duplicatis	

additisque illis 6.5.4.3.2.1. quae scilicet ubique omissa sunt, quia cum dent dimensionem inferiorem, in arithmetica infinitorum negligenda sunt. Negligi etiam potest ultimus seu maximus terminus 36. Nam et is lineam tantum facit. Item in triangulo res ita concipi potest ac si exigua illa triangula punctis notata accessissent, sive enim accedant sive decedant, cum omnia simul habeant rationem ad triangulum data quavis minorem, nihil mutant.

Duplicata: Quorum ex aequalibus librae partibus suspensorum, punctum aequilibrii quaeritur. Lex progressionis haec est: ut maxima ordinatarum demta unitate hoc loco $6 - 1 = 5$. ab initio statuatur velut minima, et huic numeri naturales inde decrescentes continue addantur, productum duplicetur, dividanturque omnia per illam ipsam 5. Patet autem in arithmetica infinitorum 5. pro 6. substitui posse vel contra.

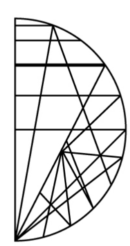
2 maximum | $36 = \bigtriangledown^{\text{lo}}$ ABC. *gestr., erg. Hrsg.* | 35 *L* 15 Duplicata: *erg. L*

Porro pro	11	20	27	32	35	posse tuto
substitui	10	18	24	28	30	ita demonstro :

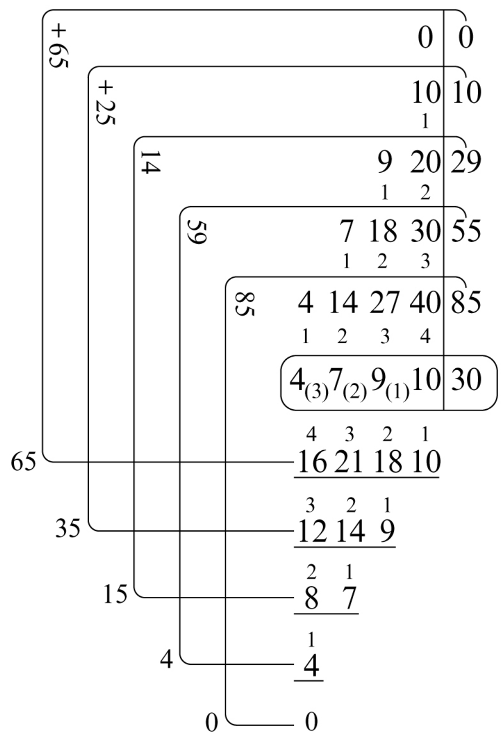
Cum applicatae sint infinitae, in una quaque tamen non nisi finitus omittitur numerus punctorum seu quadratillorum, in prima 1. in secunda 2. in tertia 3. in quarta 4. Manifestum est autem hoc loco numerum punctorum quae omittuntur non facere nisi lineam, minime vero superficiem, quia cum semper numerus punctorum quae omittuntur sit ad suam lineam, ut finitum ad infinitum. Ergo summa omnium punctorum omissorum, ad summam omnium linearum, erit ut finitum ad infinitum, ergo poterit tuto omitti.

Eamus per exempla, ac per simplicissima ascendamus tentaturi an aliqua se lux aperiat.

4–7 NB. demonstratione dignum est hoc theorema.



8 linearum, | quae superficies e *gestr.* | erit *L*



+65
+25
14
59
85
0 | 0
10 | 10
1
9 20 | 29
1 2
7 18 30 | 55
1 2 3
4 14 27 40 | 85
1 2 3 4
4(3) 7(2) 9(1) 10 | 30
4 3 2 1
65 16 21 18 10
3 2 1
35 12 14 9
2 1
15 8 7
1
4 4
0 0

$10 = 10$	65					
$19 = 10 + 9$		30	——	10,	$+ 4.7.9$	$= 10.9.7.4$
$26 = 10 + 9 + 7$	35		10			
$30 = 10 + 9 + 7 + 4$		20	——	9	$+ 4.7$	$= 9.7.4$
	15		[9]			
		[11]	——	7	$+ 4$	$= 7.4$
	4		[7]			
		4	——	4		$= 4$
	0					

0	$65 =$	$4 \frown 4.$	$3 \frown 7.$	$2 \frown 9.\ 10$
$10 = 10$	$35 =$	$3 \frown 4.$	$2 \frown 7.$	9
$29 = 2 \frown 10.9$	$15 =$	$2 \frown 4.$	7	
$55 = 3 \frown 10.\ 2 \frown 9.7$	$4 =$	4		
$85 = 4 \frown 10.\ 3 \frown 9.\ \ 2 \frown 7.4$	0			

Quaeramus nunc rationem puncti aequilibrii inveniendi. Quae hac utique regula celebri continetur: si sit libra divisa in partes aequales quotcunque, et ex punctis divisionis pondera data, ea, quae data est, serie, suspensa intelligantur, erit numerus punctorum librae totius, ad numerum punctorum unius brachii, ut est summa ponderum omnium multiplicata per numerum omnium punctorum, ad eam summam ponderum triangularem, in qua omissio ab eo ipso brachio inchoatur.

1–14 *Dazu am Rande:* In omni producto triangulari contra seriem terminorum (si satis longa sit) producta series utrinque ab extremis crescit, usque in medium, ab altera parte rursus decrescit.

5 11 *L ändert Hrsg.* 6 9 *L ändert Hrsg.* 7 5 *L ändert Hrsg.* 15 f. celebri *erg. L* 17 serie, *(1)* suspensa intelligantur, summa omnium ponderum multiplicata per *(a)* omnia librae *(b)* numerum punctorum librae *(2)* suspensa *L*

$4 — 7 — 9 — 10 \frown 4 = 30 \frown 4 = 120.$ Summa ponderum ducta in numerum punctorum totius librae.

$$\begin{array}{ccccccc}
16 & & 21 & & 18 & & 10 \\
\hline
4 & \cdot & 7 & \cdot & 9 & \cdot & 10 \\
4 & \cdot & 7 & \cdot & 9 & & \\
4 & \cdot & 7 & & & & \\
4 & & & & & &
\end{array}
= 65.$$

Summa triangularis incipiendo a latere 10.

Ergo $\dfrac{30 \frown \cancel{4} = \cancel{120}}{65} = \dfrac{\cancel{4}}{\text{numerus punctorum brachii quaesiti a latere 10.}}.$

Ergo $\dfrac{65}{30}$ = numerus punctorum brachii librae quaesiti a latere 10.

Ergo regula haec formari potest universalis, et quod sciam nondum ita tradita. Summa triangularis (quae est solidum) divisa per summam ponderum (quae est superficies) dat brachium (quod est linea) a cuius extremitate summa triangularis omittendo coepit.

Cum autem habeamus dudum summam simplicem ordinatarum semiparabolae ad basin, habita, et praecedente demonstratione confirmata, parabolae quadratura; restat tantum, ut summam triangularem ordinatarum parabolae ad basin, ab alterutro latere reperiamus.

Pro applicatis autem parabolae ad basin ordinatis, ostendi substitui posse series eiusmodi:

ut : vel : vel : vel :

$$2 \frown \frac{2.\overset{1}{3}}{2} \qquad 2 \frown \frac{3.\overset{2}{5}.\overset{1}{6}}{3} \qquad 2 \frown \frac{4.\overset{3}{7}.\overset{2}{9}.\overset{1}{10}}{4} \qquad 2 \frown \frac{5.\overset{4}{9}.\overset{3}{12}.\overset{2}{14}.\overset{1}{15}}{5}$$

quae parabolam eiusque applicatas repraesentant modo minimus numeratoris terminus, ut 2. vel 3. vel 4. vel 5. ut hoc intelligentiae gratia posuimus, sit numerus infinitus, et nominator ut 2. vel 3. etc. intelligatur etiam esse numerus infinitus, etsi alius a priore ut

---

10–12 Dubito an haec recte enuntiata. Nam haec regula non exprimit differentiam quando zero inmixta. Imo exprimit, tunc enim alia fit summa triangularis. Recte ergo.

12 cuius *(1)* latere *(2)* extremitate *L* 22 numeratoris *erg. L* 23 f. et *(1)* minimus terminus *(2)* nominator *L*

si sic sit:

$$2 \frown \frac{\gamma.\ \ \gamma, +\gamma - 1.\ \ \gamma + \gamma - 1, +\gamma - 2.\ \ \gamma + \gamma - 1 + \gamma - 2, +\gamma - 3.\ \ \gamma + \gamma - 1 + \gamma - 2 + \gamma - 3, +\gamma - 4.}{\beta}$$

seu

$$2 \frown \frac{\gamma.\ \ 2\gamma - 1.\ \ 3\gamma - 3.\ \ 4\gamma - 6.\ \ 5\gamma - 10.}{\beta}.$$

Manifestum est summam horum γ. 2γ. 3γ. 4γ. etc. duplicatam esse cubum γ.[;] 1. 3. 6. 10. etc. sunt numeri triangulares. Summa triangularium est summa quadratorum dimidiata seu ut supra ostensum est dimidium pyramidis, est autem, ut constat parabola ad rectangulum, ut residuum detracta pyramide, ad cubum. Hinc concordat calculus. Nec turbari debemus, quod finitum ut 1. 3. 6. 10. subtrahitur ab infinito, ut γ. 2γ. 3γ. quod videri poterat nullius considerationis, quia istius finiti incrementi continui 1. 3. 6. 10. summa = est ad alterius incrementi continui 1. 2. 3. 4. summam, ut finitum ad infinitum (infinito scilicet spatio decurso) seu ut semipyramis ad triangulum. Nimirum:

$$\cancel{2} \frown \gamma + 2\gamma + 3\gamma + 4\gamma \ \text{ etc. } = \frac{\beta^2\gamma}{\cancel{2}} \quad \text{et}$$

$$\cancel{2} \frown 1 + 3 + 6 + 10 + 15 \ \text{ etc.} = \frac{\beta^3}{\cancel{2} \frown 3}.$$

Ergo totum $\dfrac{\beta^2\gamma - \dfrac{\beta^3}{3}}{\beta} = \beta\gamma - \dfrac{\beta^2}{3}$. Hinc intelligi potest, istam methodum tum demum valere, quando ipsum $\beta = \gamma$. seu quando basis et altitudo parabolae aequales, tunc enim

$$\beta\gamma - \frac{\beta^2}{3} = \frac{2\beta^2}{3}.$$

Sin minus, ei quam supra attuli, methodo insistendum, quae est generalis.

2+4 *Zuerst hat Leibniz durchgängig a anstelle von γ geschrieben.* 5 f. esse *(1)* rectangulum *(2)* cubum γ. *(a)* Sed | reliqua *streicht Hrsg.* | cohaerent, corrigendum ergo aliquid, nimirum falsum ipsum γ. esse lineam, nisi minorem qualibet data, cum sit *(aa)* prima *(bb)* minima ordinatarum manifestum enim est, ista omnia γ *(b)* 1. 3. 6. 10. *L* 6 f. quadratorum *(1)* duplicata *(2)* dimidiata seu *(a)* duplicata pyramis *(b)* ut supra ostensum est *(aa)* pyramis *(bb)* dimidium pyramidis, est *(aaa)* ergo s *(bbb)* autem *L* 12 seu ut *(1)* pyramis *(2)* semipyramis *L* 16 f. tunc ... = $\dfrac{2\beta^2}{3}$. *erg. L*

[*Teil 2*]

Unum ergo nunc restat, ut summam triangularem huius seriei:

$$\gamma.\ \ 2\gamma-1.\ \ 3\gamma-3.\ \ 4\gamma-6.\ \ 5\gamma-10.\quad \text{etc.}$$

inveniamus, vel multiplicando primum per 1. secundum per 2. tertium per 3. vel inverso modo multiplicando ultimum per 1. penultimum per 2. antepenultimum per 3. etc. colligendoque summam. Si primum multiplicatur per [1]. 2^{dum} per 2. etc. tunc incipit summa triangularis a minimo seu primo. Sin ultimum, tunc incipit ab ultimo vel maximo. Utrumque excutiamus.

$$\begin{array}{cccccc} \gamma & 2\gamma-1 & 3\gamma-3 & 4\gamma-\ \ 6 & 5\gamma-10 & \text{etc.} \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \\ \hline \gamma & 4\gamma-2 & 9\gamma-9 & 16\gamma-24 & 25\gamma-50 & \end{array}$$

Ut autem huius seriei summam ineamus commodius summemus separatim:

$$\gamma\ \ 4\gamma\ \ 9\gamma\ \ 16\gamma\ \ 25\gamma\ \ \text{etc.}$$

horum summam invenire non difficile est, constat enim 1.4.9.16 esse in infinito dimidium huius 1.3.6.10. etc. Hoc autem numero infinitarum unitatum seu 1.1.1.1.1. etc. determinato β. facit $\frac{\beta^3}{3}$. Ergo summa $\frac{\gamma.\ 4\gamma.\ 9\gamma \text{ etc.}}{\beta}$ facit $\frac{\beta^3\gamma}{6\beta}$. seu $\frac{\beta^2\gamma}{6}$ seu si $\beta=\gamma$. ut hoc loco $\frac{\beta^3}{6}=\frac{\gamma^3}{6}$.

Restat ut summam ineamus numerorum triangularium in naturales ductorum, ut

$$\begin{array}{cccccl} 0 & 1 & 3 & 6 & 10 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \quad\text{etc.} \\ \hline 0 & 2 & 9 & 24 & 50 & \end{array}$$

vel potius, cum in arithmetica infinitorum idem sit proventus:

$$\begin{array}{cccccl} 1 & 3 & 6 & 10 & 15 & \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & \quad\text{etc.} \\ \hline 1 & 6 & 18 & 40 & 75 & \end{array}$$

Eundem esse proventum ostendo, quia differentia erit 1. 3. 6. 10. etc. $\frown$ 1. quod facit solidum, cuius ablatio aut additio in altiorem gradum non consideratur. Huius summae

6 1 *erg. Hrsg.* 15 autem *(1)* maximo det *(2)* numero *(a)* unitatum determinato β. facit *(b)* infinitarum *L* 26 f. facit *(1)* planum *(2)* solidum, cuius *(a)* ratio ad solidum *(b)* ablatio *L*

triangularium in naturales ductorum rationem ita inibimus:

	2	3	4	5	
1	3	6	10	15	
1	1.2	1.2.3	1.2.3.4	1.2.3.4.5	1. 2. 3. 4. 5. 6
1	2	3	4	5	6
					6.12.18.24.30.36

Summa haec coincidit cum summa omnium quadratorum, seu factorum ex numeris in se, + summa omnium factorum ex numeris differentibus unitate, + ex differentibus binario, + etc. ternario + etc. quaternario, etc. etc. Summa summarum horum rectangulorum est summa quaesita.

Summa omnium						
quadratorum	1	4	9	16	25	$36 = \frac{\beta^3}{6}$
		2	3	4	5	
Summa rectangulorum						
ex unitate differentibus	2	6	12	20	30	$42 = \frac{\beta^2}{2}$
differentiae a $\square^{\text{tis}}$	1	2	3	4	5	6
		6	8	10		
Summa rectangulorum						
ex binario differentibus	3	8	15	24	35	48 etc.
differentiae a $\square^{\text{tis}}$	2	4	6	8	10	12 ....
		12	15			
Summa rectangulorum						
ex ternario differentibus	4	10	18	28	40	54
differentiae a $\square^{\text{tis}}$	3	6	9	12	15	18 ....
			etc.			

1 triangularium in naturales ductorum *erg. L*

16–24 Der Text in Z. 16, 20 u. 24 steht in der Handschrift rechts vom Schema.

Ope huius resolutionis, habemus calculum in potestate. Sumatur summa quadratorum 1.1.1.1. etc. vicibus, seu multiplicetur per β. fiet $\dfrac{\beta^4}{6}$. Producto addatur id quod nunc dicam. Summa nimirum excessuum, quibus alii facti excedunt quadrata. Excessus autem primus est: 1. 2. 3. 4. 5. 6 etc. $= \dfrac{\beta^2}{2}$. secundus eius duplum, tertius eius triplum, etc. Summa ergo horum excessuum erit summa huius seriei: $\dfrac{\beta^2}{2} + 2 \frown \dfrac{\beta^2}{2} + 3 \frown \dfrac{\beta^2}{2} + 4 \frown \dfrac{\beta^2}{2}$ etc. Summa autem horum 1. 2. 3. 4 etc. est $\dfrac{\beta^2}{2}$. ergo summa huius seriei: $\dfrac{\beta^2}{2} \cdot 2 \frown \dfrac{\beta^2}{2} \cdot 3 \frown \dfrac{\beta^2}{2} \cdot 4 \frown \dfrac{\beta^2}{2}$ etc. est $= \dfrac{\beta^4}{4}$. Hoc additum ad $\dfrac{\beta^4}{6}$ dabit: $\dfrac{\beta^4}{6} + \dfrac{\beta^4}{4} = \dfrac{10\beta^4}{24} = \dfrac{5\beta^4}{12}$ quae est summa numerorum triangularium ductorum in naturales. Haec summa deberet subtrahi a superiore $\dfrac{\beta^3\gamma}{6}$ vel $\dfrac{\beta^4}{6}$ sed est maior, errorem ergo in calculo esse necesse est. Erroris causa est transpositio, nimirum subscribenda sibi erant oblique, ut lineas duxi, ut scilicet series postulabat. Hoc modo apparebit non addendum sed subtrahendum. Unde apparet hoc quoque peculiare esse arithmeticae infinitorum, ut in ea transponere non liceat, cuius rei rationem ex natura infiniti pendere manifestum est.

2 per β. | fiet $\dfrac{\beta^4}{6}$. *erg.* | *(1)* A producto detrahatur *(2)* Producto *L* 11 postulabat *(1)* , obliqua transpositione *(2)* . Hoc *L*

91	1	4	9	16	25	36
70		2 $\overset{2}{(4)}$	6 $\overset{3}{(9)}$	12 $\overset{4}{(16)}$	20 $\overset{5}{(25)}$	30 ^{6}
50			3 $\overset{6}{(9)}$	8 $\overset{8}{(16)}$	15 $\overset{10}{(25)}$	24 ^{12}
32				4 $\overset{12}{(16)}$	10 $\overset{15}{(25)}$	18 ^{18}
17					5 $\overset{20}{(25)}$	12 ^{24}
6						6 ^{30}

1	$2 \frown 2$	$3 \frown 3$	$4 \frown 4$	$5 \frown 5$	$6 \frown 6$
	$2 \frown 1$	2	3	4	5
		1	2	3	4
			1	2	3
				1	2
					1

Patet iam hoc modo 42.35.28. item 48.40. item 54. etc. quae antea delineationi accesserant, nunc elidi, ob rectificatam transpositionem, nimirum quae quolibet casu in finito elidi apparet cavenda sunt etiam in infinito.

Breviter: ita cum infinito agendum est, ut cum finito agi posset, nisi sit ratio in contrarium.

Ex hac dispositione vera quaedam ac praeclara summae inveniendae ratio apparet. Patet 1. esse 1. et 4.2 esse $4 \frown 2 - 2$. et 9.6.3. esse $9 \frown 3 - 3 - 6$. et 16.12.8.4. esse $16 \frown 4 - 4 - 8 - 12$. etc. Ergo summam omnium serierum esse s u m m a m c u b o r u m demtis his:

	2	3.6	4.8.12	5.10.15.20	6.12.18.24.30
seu	$2 \frown 1$	$3 \frown 1.2$	$4 \frown 1.2.3$	$5 \frown 1.2.3.4$	$6 \frown 1.2.3.4.5$
seu	$2 \frown 1$	$3 \frown 3$	$4 \frown 6$	$5 \frown 10$	$6 \frown 15$

Hinc apparet summam numerorum triangularium in naturales ductorum aequari summae cuborum, summa triangularium in naturales ductorum minutam. Eritque aequatio haec:

Sum. num. nat. duct. in $\bigtriangledown$. = sum. cub. − sum. num. nat. duct. in $\bigtriangledown$.

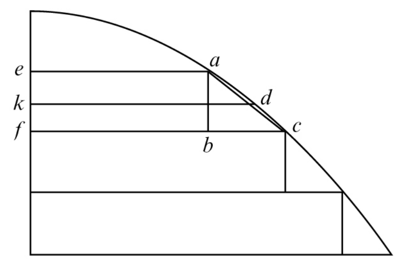
Ergo: $2 \cdot$ summa numerorum naturalium in $\bigtriangledown^{\text{lares}}$ ductorum = summae cuborum.

Seu: summa numerorum naturalium in triangulares ductorum, dimidia est summae cuborum, si scilicet prius summa quadratorum, in finitis, a summa cuborum adimatur. Semper enim, naturalis in suum triangularem, dat cubi quadrato minuti, dimidium. At in infinito summa quadratorum summae cuborum frustra adimitur.

Haberemus ergo centrum gravitatis semiparabolae hoc modo inventum, nisi dudum haberetur. Sed cum detur ratio cylindri ad conoeides, et rectanguli ad parabolam, necesse est et centrorum gravitatis rationem dari dudum. Neque ista quicquam ad tetragonismum.

[*Teil 3*]

Generatio superficiei conoeidis parabolici ita investigari potest:



[*Fig. 1*]

Dividatur axis parabolae in partes aequales qualibet recta data minores, unde ducantur ordinatae, manifestum est chordas parabolae esse radices summae, quadratorum, aliquotae axis, et differentiae ordinatarum, ut posita ordinata *ea*. et *fc*. differentia est *bc*. basis trianguli rectanguli *abc*. at *ab*. aliquota parabolae (aequalis *ef*.) est altitudo, et chorda parabolae, hypotenusa. Iam ex centro seu medio chordae *ac*. nempe ducatur applicata ad axem *dh*. eius velut radii peripheria ducta in *ac*. dabit superficiei conicae portionem, quam *ac*. parabola circa suum axem gyrata describit et summa harum portionum conicarum dabit superficiem conoeidis parabolici. Iam *hd*. censeri potest eadem cum *fc*. Ergo ductae chordae parabolae in peripherias suarum ordinatarum, dant superficies quas describunt revolutione, quarum omnium summa est $\dfrac{xa}{2}$.

Porro ratio peripheriae ad ordinatas seu radios est semper $\frac{x}{a}$. Ergo potest intelligi superficiem conoeidicam cuiuslibet chordae fieri ex chorda ducta in ordinatam quae esto b. multiplicatam per x. divisam per a. seu ex chorda quae esto δ. ducta in $\frac{bx}{a}$. seu summa omnium $\frac{\delta bx}{a}$ erit $= \frac{xa}{2}$. Ergo summa omnium $\frac{\delta b}{a}$ erit $= \frac{a}{2}$. seu summa omnium δb erit $= \frac{a^2}{2}$. Habemus ergo si ordinatae ipsi curvae parabolicae ita applicentur, uti sitae sunt, summam earum fore $\frac{a^2}{2}$. Ergo $\frac{a^2}{2}$ aequatur rectangulo sub curva parabolica, et curvae parabolicae centri gravitatis distantia ab axe, quae si daretur haberemus et curvam parabolicam. Regula generalis haec est, cuiuscunque conoeidis superficies in planum extendi potest geometrice, eius curvae datur dimensio, posita eiusdem curvae centri gravitatis distantia ab axe.

---

5 f. Si summa ordinatarum in ellipsi arcui applicatarum, inveniri posset, seu ratio huius summae, ad summam ordinatarum circulo applicatarum, haberemus quadraturam circuli et hyperbolae. Et curvae circuli et parabolae aequalem rectam.
Nimirum cum chordae circuli sint $Rq\ a^2 + b^2$. $Rq\ a^2 + c^2$. $Rq\ a^2 + d^2$. etc. ellipticae sunt: $Rq\ 2a^2 + b^2$. $Rq\ 2a^2 + c^2$. $Rq\ 2a^2 + d^2$. etc. De caetero eaedem sunt ordinatae quae in has chordas ducantur, tantum multiplicata est vel minuta aliquota axis ad quem fit applicatio. Datur autem summa omnium a. et omnium b, item summa omnium $2a$. per consequens, idque undecunque incipere volueris.

1 semper $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}}$. *(1)* Ergo divisis omnibus per x. erit summa chordarum divisa per a. *(2)* Ergo *L*
2 ex *(1)* ordinata *(2)* chorda *L* 10–253,1 axe. *(1)* Porro *(2)* Ostensum est omnes $\delta\mathrm{b} = \frac{\mathrm{a}^2}{2}$. *(3)* Iisdem *L* 16 ducantur, *(1)* duplicata est *(2)* tantum *L*

Iisdem positis semper haberi potest summa ordinatarum ad axem curvae uti iacent applicatarum. Hinc et haberi potest summa ordinatarum circuli circumferentiae applicatarum. Habetur et summa a vertice abscissarum quacunque divisione radii in partes infinitas circumferentiae applicatarum, quae aequantur segmento.

$1 \frown z + 2 \frown y + 3 \frown x + 4 \frown u$ etc. = segmento circuli.

$Rq\ \gamma \frown z + Rq \llcorner 2\gamma - 1 \lrcorner \frown y + Rq \llcorner 3\gamma - 3 \lrcorner \frown x$ etc. = rectilineo.

Istae autem z. sunt: $\left[Rq\ \gamma - Rq\ 2\gamma - 1, \square = \overset{Rq}{\overline{\gamma + 2\gamma - 1. - 2Rq\ 2\gamma^2 - \gamma}} \right]$ et similes.

Hinc in semicirculo necesse est, ut est radius ductus in arcum quadrantis ad segmentum quadrantis, seu ut semicirculus est ad segmentum quadrantis, ita esse distantiam centri gravitatis arcus quadrantis a vertice ad axem. Credo, etiamsi non sinus sed ordinatae applicentur ipsi arcui circuli, vel qualiscunque etiam sit divisio axis, semper tamen summam haberi posse radio in axem ducto.

Quotiescunque summa ordinatarum curvae applicatarum haberi potest, etiam superficies conoeidica haberi potest et vicissim.

$Rq \llcorner a^2 + b^2 \lrcorner \qquad \dfrac{Rq\ a^2 + 2b^2}{Rq\ a^2 + \ \ b^2}$

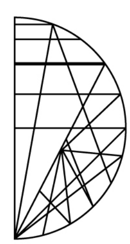
$Rq\ a^2 + 2b^2 \quad - \quad Rq\ a^2 + b^2 = x$

$Rq\ a^2 + 2b^2 \quad + \quad a^2 + b^2 \quad - \quad [2Rq\ a^4 + 3a^2b^2 + 2b^4 = x]$

Ad inveniendam radicum curvarum summam in arithmetica infinitorum, hoc unum

---

1–4 *Daneben mehrfach gestrichen:*



7 $\mathrm{Rq}\,\gamma \sqcap \mathrm{Rq}\ 2\gamma{-}1, \square = \overset{\mathrm{Rq}}{\overline{\gamma + 2\gamma - 1. - 2\mathrm{Rq}\ 2\gamma^2 - \gamma - 1}}$ *L ändert Hrsg.* 10 quadrantis *(1)* ab axe *(2)* a basi ad axem *(3)* a vertice *L* 12 in *(1)* axis partem *(2)* axem *L* 17 $-\mathrm{Rq}\ \mathrm{a}^4 + 3\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 + 2\mathrm{b}^4 = \mathrm{x}^2$ *L ändert Hrsg.*

arbitror superesse, ut inquiratur methodus in finitis inveniendi summam earum prope veram, ita comparatam, ut error in infinito nullius sit momenti.

Rq 1. *Rq* 2. *Rq* 3. *Rq* 4.

$Rq\ 1 + Rq\ 2 = Rq\ \llcorner 3 - \Box Rq\ 2 - Rq\ 1.$

Addatur *Rq* 3. fiet:

$6 - \Box\llcorner Rq\ 2 - Rq\ 1 - \Box\llcorner Rq\ 3 -$ [*Formel bricht ab*].

$$
\begin{array}{cccccc}
 & & & & 2 & \\
 & & & & \cancel{3} & \cancel{1} \\
 & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1}3 & \cancel{5}3 & \cancel{4}7 \\
\cancel{1}4 & \cancel{5}75 & \cancel{5}84 & \cancel{4}\cancel{4} & \cancel{1}\cancel{4}\cancel{2}9 & \cancel{1}\ \cancel{1}\cancel{2}1 \\
\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}0 & \cancel{2}0\cancel{0}\cancel{0} & \cancel{3}00\cancel{0} & \cancel{4}\cancel{0}\cancel{0}0 & \cancel{5}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & \cancel{6}\ \cancel{0}\cancel{0}0 \\
\cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot \\
\hline
3\ \ 1 & 4\ \ 5 & 5\ \ 4 & 6\ \ 3 & 6\ \ 9 & 7\ \ 7 \\
\hline
\cancel{3}\cancel{6}1 & \cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{5} & \cancel{2}5\cancel{0}\cancel{4} & \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{3} & \cancel{3}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{9} & \cancel{4}\ \cancel{9}\cancel{4}\cancel{7} \\
 & & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1} & \cancel{1}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{r}
31 \\ 45 \\ 54 \\ 63 \\ 69 \\ \hline 262
\end{array}
\qquad
\begin{array}{r}
6000 \\ 5000 \\ 4000 \\ 3000 \\ 2000 \\ 1000 \\ \hline 21000
\end{array}
\qquad
\begin{array}{c}
2 \\ \cancel{1}\cancel{6}4 \\ \cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{8} \\ \cancel{2}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}0 \\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\ \hline 1\ \ 4\ \ 4 \\ \hline \cancel{1}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{5} \\ \cancel{2}
\end{array}
$$

[*Kontrollrechnung* :]

$$
\begin{array}{r}
31 \\ 31 \\ \hline 33 \\ 93 \\ \hline 963
\end{array}
\qquad (!)
$$

3–6 Die Summationen müssten lauten: $Rq\ 1 + Rq\ 2 = Rq\ \llcorner 3 + 2Rq\ 1 \cdot Rq\ 2\lrcorner$ und $Rq\ 1 + Rq\ 2 + Rq\ 3 = Rq\ \llcorner 6 + 2Rq\ 1 \cdot Rq\ 2 + 2Rq\ \llcorner 9 + 6Rq\ 1 \cdot Rq\ 2\lrcorner\lrcorner$. 7–23 Die Quadratwurzeln sind trotz einiger Flüchtigkeiten und unvollständig durchgeführter Korrekturen für die angestrebte Stellenzahl richtig berechnet. Ausnahmen sind 2000, 5000, 21000; diese lauten:

$$
\begin{array}{ccc}
 & & 2 \\
6 & & \cancel{1}\cancel{6}6 \\
\cancel{4}\cancel{8}4 & 1 & \cancel{1}\cancel{3}\cancel{4}\cancel{8}4 \\
\cancel{2}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} & \cancel{5}\cancel{0}00 & \cancel{2}\cancel{1}\cancel{0}\cancel{0}\cancel{0} \\
\cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot & \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot \\
\hline
4\ \ 4 & 7\ \ 0 & 1\ \ 4\ \ 4 \\
\hline
\cancel{1}\cancel{6}\cancel{8}\cancel{4} & \cancel{4}\cancel{9}\cancel{4}\cancel{0} & \cancel{1}\cancel{2}\cancel{4}\cancel{8}\cancel{4} \\
 & \cancel{1} & \cancel{2}
\end{array}
$$

Quaerendum a Domino Freniclo, si talis sit series:

$$Rq\ \gamma.\quad Rq\ \llcorner 2\gamma - 1\lrcorner\quad Rq\ \llcorner 3\gamma - 6\lrcorner\quad Rq\ \llcorner 4\gamma - 10\lrcorner\ \text{ etc.}$$

an methodum reperire speret approximationis expeditae, quotcunque tandem unitatum esse supponatur γ. vel sic potius

$$Rq\ \frac{\gamma}{\gamma}.\quad Rq\ \llcorner \frac{2}{\gamma}\gamma - \frac{1}{\gamma}\lrcorner\ \text{ etc.}$$

videtur enim semper omni numero subscribi debere γ. etsi negligi possit cum semper intelligatur: 1 esse $\frac{1}{\gamma}$, imo omittendum istud γ subscriptum.

2 Rq $\llcorner 2\gamma - 1\lrcorner$ | Rq $\llcorner 3\gamma - 3\lrcorner$ *streicht Hrsg.* | Rq $\llcorner 3\gamma - 6\lrcorner$ *L*

1 Quaerendum: Ob Leibniz das Problem mit Frenicle durchgesprochen hat, ist unbekannt.
2 Leibniz korreliert (s. o. S. 247 Z. 18–25) die Folge γ, 2γ, 3γ, 4γ ... je mit den Folgen 0, 1, 3, 6 ... bzw. 1, 3, 6, 10 ... ; hier werden beide Korrelationen vermengt. — Die Betrachtungen werden in N. 16_1 fortgesetzt.

16. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE ו

[Spätes Frühjahr 1673]

Datierungsgründe: s. N. 9.

16_1. PLAGULA ו(1)

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 252–253. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge: Teil 1 auf Bl. 253 v° oben innerhalb von Teil 3; Teil 2 auf Bl. 252 r° oben (durch Trennstrich von Teil 3 abgesetzt); Teil 3 auf Bl. 252 r° unten bis Bl. 253 v° oben; Teil 4 auf Bl. 253 v° unten sowie auf Bl. 252 r° am unteren Rand (zusätzlich Trennstrich zu Teil 3). Kustoden auf Bl. 252 r° und v°. — Teildruck von Teil 3: E. Pasini, *La nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*. Diss. Turin 1985/86. App. 9–14 = S. 262 Z. 1 – S. 265 Z. 26

Cc 2, Nr. 546

[*Teil 1*]

Methodus inveniendi tangentes videtur haec esse[:] Dato quodam puncto (in curva) per illud rectam ducere talem, ut ex alia recta data ductae ex singulis punctis perpendiculares certae cuiusdam naturae (qualem curvae geometricae aequatio praescribit, quod et ad mechanicas transferri potest), omnes sint minores perpendicularibus ex iisdem punctis ad rectam quaesitam usque ductis, demta ea perpendiculari, quae ex recta data ducta ad punctum datum, eadem est cum perpendiculari ducta ex eodem puncto rectae datae ad rectam quaesitam.

[*Teil 2*]

Applicatae quadrantis: $Rq\gamma$. $Rq\llcorner 2\gamma - 1$. $\genfrac{}{}{0pt}{}{Rq}{3\gamma - 6}$. $\genfrac{}{}{0pt}{}{Rq}{4\gamma - 10}$. $\genfrac{}{}{0pt}{}{Rq}{5\gamma - 15}$.

14 (in curva) *erg. L* 15 illud *(1)* lineam *(2)* rectam *L* 15 ductae *(1)* perpendiculares *(a)* ad *(aa)* datam *(bb)* quaesitam *(b)* ex *(aa)* quib *(bb)* singulis punctis *(2)* ex *L* 18 ea *(1)* recta *(2)* perpendiculari *L*

21 *Teil 2*: Dieser Abschnitt stellt eine direkte Fortsetzung von N. 15 dar. Leibniz rechnet hier abgekürzt; er stellt erst am Schluss des jeweiligen Rechengangs die volle Endformel her.

$Rq2\gamma. = \underline{\cancel{1}+1}$ $\quad x^2+2x=1.$ $\quad$ Ergo $x=\dfrac{1-x^2}{2}.$

$\underline{1+x}$

$\cancel{1}\quad 2$ $\quad 1Rq\gamma.+xRq\gamma. \frown 2 = -\llcorner 2Rq\gamma+2xRq\gamma\lrcorner \frown y+y^2=[-]1.$

Et his positis: $2\overset{Rq}{\gamma}-1=\underline{1+x\frown Rq\gamma.-y.}$

$$\begin{array}{cc} A & B \\ 3 & \\ \cancel{1}\cancel{2} & -3 \\ \hline 3 & +0 \\ \hline \cancel{9} & 6 \end{array}$$

A $\quad B$

Quia 3 residuum -3 est 0. Hoc ut istam procedendi methodum iustificem.

$\cancel{1}+2$

$\underline{\cdot\quad\cdot}$

$\underline{1\bullet\ u}$

$\cancel{1}\quad 2$

$2u+u^2=2.$ Ergo $2u=2-u^2.$

Ergo $u=1-\dfrac{u^2}{2}=\dfrac{[2]-u^2}{2}.$

$3\overset{Rq}{\gamma}-6.\ [=]\ \underline{1+u\frown Rq\gamma-t}$

$t^2-2\frown Rq\gamma\frown \llcorner 1+u\lrcorner[\frown t]=[-]6.$

Vel aliter incipiendo a 6.

$-6+3\overset{Rq}{\gamma}.$ $\quad$ Iam $\quad \begin{array}{c} \underline{\cancel{4}+2} \\ \underline{2\bullet\ s} \\ \cancel{4}\quad 2 \end{array}$ $\quad s^2+[4]\frown s=2.$ habemus $+2+s.$

1 γ *und* $x^2+\ldots\dfrac{1-x^2}{2}.$ *erg. L* 3 *Halbklammern u. Vorzeichen erg. Hrsg.* 10+12 Ergo $2u\ldots=\dfrac{|\,1\textit{ändert Hrsg.}\,|-u^2}{2}$ *erg. L* 14 = *erg. Hrsg.* 15 *Halbklammern, Faktor, Vorzeichen erg. Hrsg.* 17 2 *ändert Hrsg.*

Restat: $$\begin{array}{l} -4-2+3\gamma \\ \underline{\;\;\cdot\;\;\;\;\cdot\;\;\;\;\cdot\;\;} \\ \underline{-2-s\quad r} \\ \llcorner -2r-sr \frown 2\lrcorner + r^2 = 3\gamma. \end{array}$$

Habemus: $1+u \frown Rq\gamma - t = 2\bullet\, s\bullet\, r.$

Imo hoc posterius non procedit, et ut ex exemplis numerorum patet, non licet, hac quidem methodo, incipere a subtrahendo, et operae pretium foret determinare, qua methodo opus sit, ad incipiendum a subtrahendo.

Ita pergendo habebimus: $2Rq\gamma - p = Rq\llcorner 4\gamma - 10\lrcorner$
et $2Rq\gamma + o - n. = Rq\llcorner 5\gamma - 10\lrcorner$ etc.

Ex his apparet si ista tantum essent $Rq\gamma$. $Rq2\gamma$. $Rq3\gamma$. etc. videri posse summam iniri. Nam fient radices

$Rq1$	$Rq2$	$Rq3$	$Rq4$	$Rq5$	$Rq6$	$Rq7$	$Rq8$
1	$1+x$	$1+u$	$2+m$	$2+l$	$2+k$	$2+i$	$2+h$
$Rq9$	$Rq10$	$Rq11$	$Rq12$	$Rq13$	$Rq14$	$Rq15$	$Rq16$
3	$3+g$	$3+f$	$3+e$	$3+d$	$3+c$	$3+b$	4

Hinc apparet summam omnium istarum radicum esse:

---

6 *Dazu am Rande* [*sic!*]:

$$\begin{array}{llllll} \underline{-\cancel{4}+20} & & \underline{-\cancel{9}+34} & & & \underline{-4+13} \\ \underline{+\;2+\;\;2} & & \underline{\;\;3\quad\;3} & & & \underline{\;\;2+\;\;1} \\ \;\;\cancel{4} & 8+2\frown 2 & \;\;\cancel{9} & 6+3,\frown & 18+\;\;9=27 & \cancel{4}\quad 4+1\frown 2=10 \\ & & & & 34-27\;:\;\;7 & \\ \underline{-16+65} & & \underline{\cancel{-16}+52} & & & \underline{\cancel{4}+13} \\ \underline{\;\;4\quad\;4} & & \underline{\;\;4\quad\;4} & & & \underline{2\qquad\;} \\ \cancel{16} & 32+16= & \;\;\cancel{4} & 8+4\frown & =32+16=48 & \cancel{2}\quad 4 \\ & & & & 52-48-\;\;4 & \end{array}$$

11 Rqγ ... etc. *erg. L*

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \underline{3} & \underline{5} & \underline{7} & \underline{9} & \underline{11} \\ 3 & 10 & 21 & 36 & 55 \end{array} \quad \text{etc.}$$

seu numeri naturales ducti in binarios, sed eo discrimine, quod summa omnium binariorum quod hoc non potest procedere intelligi in infinitum libere, alioqui summa radicum maior esset summa quadratorum. Difficultas ergo est, ostendere quam hoc deficiat ab eo quod hoc modo libere currit in infinitum. Quo determinato, habebimus modum inveniendi seriem infinitam radicum, quarum quadrata non sunt binomia, neque residua.

Omnia autem ista *x. u. m. l. k. i.* etc. simul sumta tuto negligi possunt; cum cadant in inferiorem dimensionem. Imo puto ego hanc methodum etiam ad binomia et residua traduci posse, v. g.

$$\frac{6}{-2Rq\gamma + uRq\gamma \frown t, +t^2} = t. \quad [sic!]$$

Tentemus dividere per binomia, ea methodo, quae semper aliquid relinquit[;] saltem ut accedentes prope verum, relinquamus semper aliquid, quod tamen in infinito negligi possit.

Et hanc methodum puto et ad quadraturam hyperbolae posse applicari.

[*Teil 3*]

Radius est media proportionalis inter complementum sagittae, vel sinum complementi, et secantem.

Malo vocem s a g i t t a e , quam sinus versi, sagittae enim nomen competit etiam cum arcus aequaliter sectus non est. Ponamus iam sagittam arcus divisam in partes aequales infinitas, ac ductis applicatis arcum dividi in partes totidem etsi inaequales. Summa sagittarum arcui impositarum, facit duplum segmentum arcus per nostram dem., summa radiorum arcui impositorum facit sectorem arcus duplicatum; summa secantium arcui impositarum facit sectorem hyperbolicum, per ea quae partim ex Gregorii a S. Vicentii inventis partim suis ostendit Iac. Gregorius Scotus. Complementa sagittae seu applicatas

7 ab *(1)* vero *(2)* eo *L* 18 f. inter *(1)* radium *(2)* complementum *(a)* sinus versi *(b)* sagittae | vel sinum complementi *erg.* | et *L* 21 iam *(1)* radium divisum *(2)* sagittam *L* 23 arcus per nostram dem. *erg.* *L* 24 sectorem *(1)* circuli dimidiatum *(2)* arcus *L* 26 sagittae *(1)* radio *(2)* seu *L*

26 ostendit Iac. Gregorius Scotus: *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 16 Prop. II. Der Hinweis auf Gregorius a S. Vicentio findet sich bereits dort.

ex arcu ad basin, arcui imposita necesse est aequari duplo fulcro sectoris. Nimirum si segmentum duplicatum duplicato sectori detrahatur.

Porro ponamus arcum esse quadrantem peripheriae; complementa sagittarum continue crescent in ratione arithmetica, ut

1	2	3	4	sagittae	
1	1	1	1	radii	Radius est semper idem.
$\frac{1}{1}$	$\frac{1 \frown 1}{2}$	$\frac{1 \frown 1}{3}$	$\frac{1 \frown 1}{4}$	secantes	

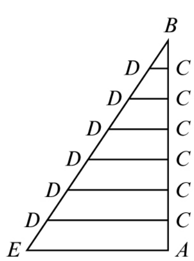
Ergo arcu per ordinatas ex sagitta diviso, summa quadratorum radii per radii dimidium, trientem quadrantem partem, quintam, sextam etc. in infinitum divisorum, arcui applicatorum, aequari sectori eidem hyperbolico.

Ex his apparet ratio quadrandi f i g u r a s , quas h a r m o n i c a s voco, id est quarum applicatae sunt harmonice proportionales. Nota, ut ab Hugenio aliisque doctissimis

---

5–7 2 1 *d.* Ergo $\frac{1 \frown 1}{2} = [d]$.

10 hyperbolico. *(1)* Ex his apparet methodus inveniendi summam horum $\frac{1}{1}\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{3}\,\frac{1}{4}$ etc. in infinitum, si scilicet hoc modo arcus *(a)* ex partibus *(b)* in partes aequales dividi, atque hypotenusa esse intelligatur. In triangulo orthogonio dividatur *(aa)* altitudo *(bb)* recta AB in partes aequales quotcunque | in C. erg. |, atque inde ducantur applicatae ad hypotenusam BE, basi AE parallelae CD. Sint quotcunque *(aaa)* mediae *(bbb)* tertiae proportionales abscissae ad *(aaaa)* verticem *(bbbb)* basin et altitudini, quarum quantitas est $\frac{\square AB}{AC}$. erit primae quantitas $\frac{\square AB}{1}$. secundae $\frac{\square AB}{2}$. tertiae $\frac{\square AB}{3}$. et ita porro, *(2)* Ex *L*



13 2d *L ändert Hrsg.*

---

12 Nota: Leibniz kennt den Satz durch die Auseinandersetzung zwischen Chr. Huygens und J. Gregory um dessen *Vera circuli et hyperbolae quadratura*, 1668. (Vgl. dazu LSB III, 1 S. LV, wo alle relevanten Stellen genannt sind.) Die Aussage selbst geht auf J. Gregory zurück (*Exercitationes geometricae*, 1668, S. 5 = *HO* VI S. 318).

viris observatum est, si sit aliquod polygonum regulare circulo ^{A} circumscriptum, et aliud circumscriptum ^{B} duplum habens laterum numerum, aliud ^{C} denique priori simile, eidem circulo inscriptum, erunt quantitates harmonice proportionales. Quod si iam postremum hoc rursus alii circulo, scilicet duplo minori circumscriptum intelligatur, continu abitur haec series harmonica in infinitum. Quod si iam communis numerator inveniatur, poterit inveniri huius seriei summa. Iam summa omnium circulorum quibus haec polygona circumscripta intelliguntur, non ascendit ad solidum, quia circuli sunt progressionis arithmeticae, quare hanc quoque summam polygonorum necesse est non ascendere ad solidum. Quid ergo? erit dimensio quaedam media inter solidum et planum. At nec hoc esse potest, cum ducto numeratore in aliam quantitatem, perpetuo, seu si per lineam quandam multiplicetur tota summa, seu quilibet terminus, ascendat ad solidum. Haec ergo accuratius excutienda. Forte utrumque planum. Sed hic rursus malum, cum alioquin fractiones geometrice proportionales summari possint, harmonice non possint. Haec ergo accuratius excutienda cum constet illos circulos summari posse, si possit etiam summari progressio illa harmonica polygonorum, (invento scilicet communi numeratore) poterit etiam summari series differentiarum inter circulos et polygona.

Nota si sit polygonum (regulare) ^{A} circulo circumscriptum, aliud $^{\beta}$ duplum habens laterum numerum, inscriptum, tertium inscriptum simile ^{C} priori circumscripto, termini sunt geometrice proportionales. Hinc summa eorum in infinitum facile haberi potest. Hinc inita summa progressionis geometricae separatim, et harmonicae separatim, differentia harum duarum summarum, aequabitur summae differentiarum inter omnia B. et omnia β. seu inter omnia polygona circumscripta, et omnia polygona inscripta, numero laterum in progressione subdupla continue decrescente. Idem est in perimetris. At vero differentiarum istarum inter B. et β. summa aliunde nota est, aequatur nempe summae ipsorum inscriptorum seu β. quia sunt dimidia circumscriptorum. Ergo necesse est haberi harmonicorum terminorum summam, etsi aliter inveniri non potuisset, eodem modo invenietur semper terminorum harmonicorum summa, quando adiungi poterit eiusmodi geometrica, cuius ope harmonica ipsa detegatur.

1 f. aliud *(1)* inscriptum *(2)* circumscriptum *L* 2 $\overset{\text{C}}{\text{denique}}$ *(1)* posterius huic *(2)* posteriori *(3)* priori *L* 9 et *(1)* non solidum *(2)* planum *L* 14 posse *(1)* credibile est, et *(2)* , si *L* 27 semper *erg. L*

In ista serie harmonica

$$\frac{1}{1}\quad \frac{1}{2}\quad \frac{1}{3}\quad \frac{1}{4}\quad \frac{1}{5}\quad \frac{1}{6}\quad \text{etc.}$$

ipse [numerator] communis 1. est numerus. At in hac

$$\frac{a^2}{1\theta}\quad \frac{a^2}{2\theta}\quad \frac{a^2}{3\theta}\quad \frac{a^2}{4\theta}\quad \frac{a^2}{5\theta}\quad \frac{a^2}{6\theta}$$

[numerator] communis seu numerus infinities infinitus est quadratum. Divisores arithmetice crescentes sunt numeri omnes finiti pariter atque infiniti, arithmetice proportionales inter 1. et numerum infinitarum unitatum determinatum quod semper necesse est qui sit v. g. δ. eritque haec progressio revera:

$$\frac{a^2}{\frac{1}{\delta}\theta}\quad \frac{a^2}{\frac{2}{\delta}\theta}\quad \frac{a^2}{\frac{3}{\delta}\theta}\quad \text{etc.}$$

Est autem θ. quadratillum infinite parvum. δ. est numerus horum quadratillorum lineam datam complentium.

Nisi autem linea quaedam data exposita sit, impossibilis est ista inquisitio in arithmetica continuorum.

Hinc apparet

istam seriem $\dfrac{a^2}{\frac{1\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{2\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{3\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{4\theta}{\delta}}$ etc. ab ista: $\dfrac{1}{1}\quad \dfrac{1}{2}\quad \dfrac{1}{3}\quad \dfrac{1}{4}$ etc. penitus natura differre, usque adeo, ut etsi prior $\dfrac{a^2}{\frac{1\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{2\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{3\theta}{\delta}}\quad \dfrac{a^2}{\frac{4\theta}{\delta}}$ dividatur per $\dfrac{a^2}{\frac{\theta}{\delta}}$ non tamen inde fiat posterior, quod tamen necessarium videri posset. Ratio est, quia in posteriore nulla est determinata magnitudo infinitarum unitatum, ac proinde nec numerus ipse infinitarum unitatum, nec ea ipsa unitas, et res ab arithmetica conti-

---

12 f. De admirandis arithmeticae infinitorum paradoxis.

3 nominator *L ändert Hrsg.* 5 nominator *ändert Hrsg.* 5 communis | seu numerus infinities infinitus *erg.* | est *(1)* numerus *(2)* quadratum *L* 12 f. in arithmetica continuorum *erg. L* 18 posteriore | , ubi *streicht Hrsg.* | nulla *L* 18 determinata *(1)* quantitas *(2)* magnitudo *L*

nuorum ad arithmeticam puram revocata est, tum enim vero, apparet in hac posteriore $\frac{1}{1}$ $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{4}$ divisores semper esse finitos, in omne infinitum quod non est in arithmetica infinitorum continuorum.

Rem sic ostendo[:]

Sit recta AB. in partes infinitas aequales punctis C. divisa, sit aliud quoddam spatium $\boxed{D}$ quod divisum intelligatur primum per lineam AB, deinde per quamlibet CB. et summa quaeritur omnium productorum, quae totidem lineae sunt. Divisio enim quadrati per lineam dat lineam. Totidem inquam lineae sunt, quandocunque numerus punctorum (CC) in dividentem incidens, est infinitus. Vides ergo divisores istos omnes a nobis assignabiles esse aggregatum punctorum vel quadratillorum infinitorum. Si tamen cogites te incipere a parte B. et primum lineam unius puncti sumere, deinde duorum punctorum, postea trium punctorum, et ita porro nunquam ab ipso puncto B. abscedes, nisi quantitate quavis data minore, quae quidem portio lineae, et quadratilli latere infinities maior, et tamen adhuc linea assignabili infinities minor.

Iam si quadratillo uno, vel duobus vel tribus velimus dividere quadratum, necesse est id exporrigi in longitudinem infinitam, ut scilicet accipiat latitudinem quadratilli, et tunc auferendo illi hanc latitudinem relicta sola longitudine, divisimus per quadratillum, eodem modo dividemus per duplum quadratilli vel triplum etc. si in longitudinem infinitam quidem, sed dimidiam vel trientem etc. prioris exporrexerimus. Summa omnium linearum latitudinis infinities infinite parvae, longitudinis infinitae usque adeo ut differentiae quoque earum sint longitudinis infinitae, erit summa omnium quotientium per divisores finitos productorum.

Non persequerer ista, quae in nimiam subtilitatem evanescere videntur, nisi necessaria credidissem, ad tollendam quandam difficultatem, quae omnes meas circa arithmeti-

6 aequales *erg.* *L* 11 esse *(1)* infinitos, demtis numeris *(1)* aggregatum *L* 13 nunquam *(1)* egredieris *(2)* ab ipso puncto B. |seu latere quadratilli, eritque summa omnium *gestr.*| abscedes, *L* 15 f. minor. *(1)* Atque *(a)* pro *(b)* summa productorum per omnes divisores finitos, producet quadratum sed cuius crassities infinities minor est latere quadratilli quodli *(2)* Iam *L* 19 vel triplum etc. *erg.* *L* 22–24 erit *(1)* productum *(2)* summa *(a)* huius divisionis *(b)* omni *(c)* summae *(d)* omnium quotientium *(aa)* divisorum finitorum *(bb)* per divisores finitos productorum | , quae non nisi differentia infinite parva aberit ab ipso quadrato *gestr.* |. Non *L*

cam infinitorum rationes aliquando turbavit. Ista enim divisione summae seriei harmonicae in continuis, quae utique planum est et sit $\delta^2\theta$, per $\dfrac{a^2}{\frac{\theta}{\delta}} = \dfrac{a^2\delta}{\theta}$. vel (si $a^2 = \delta^2\theta)\delta^3$. abiecta quadratillorum θ. mentione fiet: $\dfrac{\delta^2}{\delta^3} = \dfrac{1}{\delta}$.

Iam sic procedam: in serie ista $\dfrac{a^2}{\frac{1\theta}{\delta}}$ $\dfrac{a^2}{\frac{2\theta}{\delta}}$ $\dfrac{a^2}{\frac{3\theta}{\delta}}$ ubi θ. est quadratillum δ. numerus 1. 1. 1. 1. 1. etc. seu infinitorum quadratillorum in linea data contentorum, et ideo linea data $\delta\theta$. Summa totius seriei $=$ plano, quod claritatis causa, cum in nostro sit arbitrio, ponamus $=$ $\delta^2\gamma\theta$. Hoc planum dividamus per $\dfrac{a^3}{\frac{\theta}{\delta}} = \dfrac{a^3\delta}{\theta}$. Seu numerum quadratillorum plani, nempe $\gamma\delta^2$, dividamus per $a^3 = \delta^2$. divisum per $\dfrac{1}{\delta}$. id est per δ^3, fiet: $\dfrac{\gamma\delta^2}{\delta^3} = \dfrac{\gamma}{\delta}$. provenit idem, quod sub finem paginae praecedentis. Et si vicissim numerus plani $\delta^2\gamma$ multiplicetur per $\dfrac{1}{\delta}$. prodibit $\delta\gamma$. Verissima ista omnia, sed si omnia δ^2 intellectu fuissent divisa per 1. 2. 3. simpliciter, non per $\dfrac{1}{\delta}$ $\dfrac{2}{\delta}$ etc.

1 turbavit. *(1)* Si *(2)* Sit series $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\frac{1\theta}{\delta}}$ $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\frac{2\theta}{\delta}}$ $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\frac{4\theta}{\delta}}$ $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\frac{8\theta}{\delta}}$ $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\frac{16\theta}{\delta}}$ *(3)* Sit *(a)* series *(b)* linea quaedam recta, eius sumatur primum pars 1. deinde dimidia, post quarta, inde octava, hinc decima sexta prorsus ut paulo ante *(aa)* primum *(bb)* , unam eius infinitesimam, duas infinitesimas, tres infinitesimas, etc. sumseram apparet enim in geometricis enuntiandis incipiendum esse a *(aaa)* pu *(bbb)* linea, in arithmeticis vel inde ortis harmonicis a puncto. Per has partes ponatur dividi spatium quoddam datum *(4)* Ista *L* 2 et sit $\delta^2\theta$ *erg.* *L* 3 $\dfrac{1}{\delta}$. | quod est absurdum *gestr.* | *(1)* Imo *(2)* Iam sic procedam | potius *gestr.* | : in *L* 10 vicissim *(1)* planum *(2)* numerus plani $\delta^2\gamma$ *(a)* dividatur per *(b)* multiplicetur *L*

9 sub finem paginae praecedentis: Leibniz bezieht sich auf Z. 3, die sich in der Handschrift ganz unten auf der Gegenseite Bl. 252 v° befindet.

tunc etiam summa huius seriei $\frac{\delta^2}{1}\ \frac{\delta^2}{2}\ \frac{\delta^2}{3} = \delta\gamma.$ esse debebat, quia ipsi divisores per $\delta.$ non dividebantur, seu ipsa summa per $\delta.$ nunc non ut ante cum esset $\delta^2\gamma$ per $\delta.$ multiplicata. Hinc si planum hoc $\delta^2 = a^2.$ intelligatur dividi per 1. 2. 3. etc. loco $\frac{1}{\delta}\ \frac{2}{\delta}\ \frac{3}{\delta}.$ idem est ac si dicamus $\delta.$ dividi debere per $\frac{1}{\delta}\ \frac{2}{\delta}\ \frac{3}{\delta}$ etc. et productum loco prioris $\delta^2\gamma.$ erit rursus $\delta\gamma.$ Erit ergo productum linea, quae ad radicem ipsius a^2 vel δ^2, nempe $\delta = a.$ habeat rationem quandam finitam $\gamma.$ Est enim $\gamma.$ ex hypothesi quantitas finita.

Si iam istud δ^2 appelletur $1rr$ et $\delta.$ numerus infinitus aequari $1r.$ $\delta = 1r.$ Habebimus

$$\frac{1rr}{1}\ \frac{1rr}{2}\ \frac{1rr}{3}\ \frac{1rr}{4}\ \text{etc.} = 1r\gamma.$$

Ergo dividendo utrumque aequationis terminum per $1rr$ erit

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}\ \text{etc.} = \frac{\gamma}{1r}\ \text{id est} = \frac{\text{fin.}\gamma}{\text{infin.determ.}\delta}$$

seu fractio, cuius numerator finitus ille $\gamma.$ nominator ipse ille infinitus determinatus $1r$ vel $\delta.$

At hoc mihi videbatur penitus absurdum et impossibile. Certum est enim istam summam $\frac{1}{1}\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}$ etc. esse maiorem quolibet numero finito assignabili, quomodo ergo minor quolibet finito. Idem quomodo aequari potest alicui quantitati quam ingrediatur $\gamma.$ et $\delta.$ cum haec sint determinata, at illa indeterminata. Haec me difficultas diu male habuit, donec detexi [:] In arithmetica pura hac serie proposita $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. divisores singulorum terminorum esse finitos. At in arithmetica continuorum, cum ista series ex aliqua affecta continuo, nata est, tunc divisores innumeros infinitos ingredi, eosque per datum infinitarum unitatum numerum $\delta.$ determinari, seu si duo sunt data per $a.$ et $\delta.$ determinari. Unde apparet quam necessaria sit ista profundior contemplatio indivisibilium atque infiniti, sine qua occurrentibus in infiniti atque indivisibilium doctrina difficultatibus occurri non potest. Nota: I n d i v i s i b i l i a definienda sunt infinite parva, seu quorum ratio ad quantitatem sensibilem (vel differentia) infinita est.

26 (vel differentia) *erg. L*

$$\frac{1}{1} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{3} \quad 0 \quad \frac{1}{4} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=\frac{9}{6}+\frac{2}{6}=\frac{44}{24}+\frac{6}{24}=\frac{50}{24}+\frac{1}{5}=\frac{120+24}{120}\ [sic!]=\frac{144}{120}+\frac{1}{6}=\frac{144+20}{120}=\frac{164}{120}.$$

$$\frac{164}{120} \;\Big|\; \frac{41}{30} \qquad \frac{6}{1}\times\frac{41}{30} \qquad \begin{array}{c} 1 \\ \cancel{2}6 \\ \hline \cancel{1}\cancel{8}\cancel{0} \\ \cancel{4}\cancel{1} \end{array} \int 4$$

$$\frac{5}{1}\times\frac{6}{5}=\frac{25}{6}[,] \qquad \frac{10}{1}\ \underline{\overset{+}{\times}}\ \frac{1}{10} \qquad \frac{[101]}{10}[,] \qquad \frac{10}{1} \qquad \frac{9}{2}[,] \qquad \frac{9}{2}\ \underline{\overset{+}{\times}}\ \frac{2}{9} \qquad \frac{81+[4]}{18}.$$

videtur hoc plane posse negligi

$$\begin{array}{cccc|ccccc}
9 & 8 & 7 & 6, & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} \\
\frac{2}{1}\rceil & \frac{2}{2}\rceil & +\frac{2}{3}\rceil & +\frac{2}{4}\rceil & +0 & +\frac{2}{6} & +\frac{4}{7} & +\frac{6}{8} & +\frac{8}{9} \\
11 & 5 & 3 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1
\end{array}$$

progressio dupla demta unitate

$$\begin{array}{cccc}
-\frac{10}{1}\rfloor & -\frac{6}{2}\rfloor[4] & -\frac{4}{3}\rfloor 2 & -\frac{2}{4}\rfloor 1 \\
1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline
\frac{10}{1} & \frac{6}{2} & \frac{4}{3} & \frac{2}{4} \\
-\frac{9}{1} & -\frac{4}{2} & -\frac{1}{3} & +\frac{2}{4}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{cccc}
\frac{5}{1} & \frac{3}{2} & \frac{2}{3} & \frac{1}{4} \\
-\frac{4}{1} & -\frac{1}{2} & +\frac{1}{3} & +\frac{3}{4}
\end{array}$$

4 102 *L ändert Hrsg.* 4 2 *L ändert Hrsg.* 8 $+\frac{2}{4}$ *(1)* $+\frac{4}{5}$ $+\frac{5}{6}$ $+\frac{6}{7}$ $+\frac{7}{8}$ *(2)* $+0$ *L*

11 3 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{ccccc|ccccc} 10 & 9 & 8 & 7 & 6 & 5 & 4 & [3] & 2 & 1\\ \frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{1}{7} & \frac{1}{8} & \frac{1}{9} & \frac{1}{10}\\ -\frac{9}{1} & -\frac{7}{2} & -\frac{5}{3} & -\frac{3}{4} & -\frac{1}{5} & \frac{1}{6} & \frac{3}{7} & \frac{5}{8} & \frac{7}{9} & \frac{9}{10} \end{array}$$

$\frac{81}{10}\quad \frac{49}{18}\quad \frac{25}{[24]}\quad \frac{9}{28}\quad \frac{1}{30}$ auferendum est a toto

$$\frac{3a,\square}{b+1 \frown b+1-3a} \qquad \frac{a^{\square}}{b \frown b-a}$$

Si Collinius mihi rationem summandi haec $1\ \frac{1}{2}\ \frac{1}{3}\ \frac{1}{4}$ etc. miserit, ego illi vicissim mittam hanc summam, quae ex priore pendet: $\frac{4}{1}\ \frac{3}{2}\ \frac{2}{3}\ \frac{1}{4}$ et hanc: $\frac{1}{5\frown 6}\ \frac{9}{4\frown 7}\ \frac{25}{3\frown 8}\ \frac{49}{2\frown 9}$.

$$\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 3 & 4\\ 4 & 3 & 2 & 1\\ \hline \end{array} \qquad \begin{array}{ccccc} a & 2a & 3a & 4a & 5a\\ 5b & 4b & 3b & 2b & 1b\\ \hline & & 9ab & 8ab & 5ab \end{array}$$

[*Es folgt das Schema auf S. 268*]

3–5 NB: $\frac{9}{1} \times \frac{9}{10}$ $\frac{90-9}{[10]}$ $\frac{81}{[10]}$[,] $\frac{7}{2} \times \frac{7}{9}$ $\frac{63-14}{18}$ $\frac{49}{18}$[,] $\frac{5}{3} \times \frac{5}{8}$ $\frac{25}{24}$. Memorabile: Si numerator communis sit differentia inter duos nominatores, differentia rationum est quadratum numeratoris ad rectangulum nominatorum.

1 *(1)* 5 $\frac{9}{2}$ 4 $\frac{7}{2}$ 3 $\frac{5}{2}$ 2 $\frac{3}{2}$ 1 $\frac{1}{2}$ *(2)* 10 *L* 1 $\frac{3}{2}$ *L ändert Hrsg.* 4 27 *L ändert Hrsg.* 13 9 *L ändert Hrsg. zweimal*

---

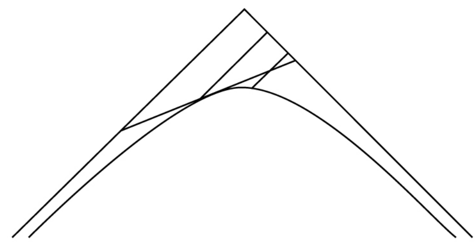
6 Si Collinius ... miserit: s. *LSB* III, 1 N. 13 (Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. IV. 1673) S. 52 f. bzw. 60.

24	23	22	21	20	19	18	17	16	15	14	13
$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{7}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{11}$	$\frac{1}{12}$
$\frac{23}{1}$	$\frac{21}{2}$	$\frac{19}{3}$	$\frac{17}{4}$	$\frac{15}{5}$	$\frac{13}{6}$	$\frac{11}{7}$	$\frac{9}{8}$	$\frac{7}{9}$	$\frac{5}{10}$	$\frac{3}{11}$	$[\frac{1}{12}]$
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$\frac{\frac{1}{2}}{12}$	$\frac{\frac{2}{3}}{8}$	$\frac{\frac{[5]}{4}}{[6]}$	$\frac{0}{4}$	$\frac{\frac{5}{6}}{4}$	$\frac{\frac{3}{7}}{3}$	$\frac{\frac{7}{8}}{3}$	$\frac{\frac{2}{9}}{2}$	$\frac{\frac{5}{10}}{2}$	$\frac{\frac{[8]}{11}}{2}$	$\frac{+\frac{11}{[12]}}{2}$
$\frac{23 \frown 23}{1 \frown 24}$	$\frac{21 \frown 21}{2 \frown 23}$	$\frac{19 \frown 19}{3 \frown 22}$	$\frac{17 \frown 17}{4 \frown 21}$	$\frac{15 \frown 15}{5 \frown 20}$	$\frac{13 \frown 13}{6 \frown 19}$	$\frac{121}{7 \frown 18}$	$\frac{81}{8 \frown 17}$	$\frac{49}{9 \frown 16}$	$\frac{25}{10 \frown 15}$	$\frac{[9]}{11 \frown 14}$	$\frac{[1]}{12 \frown 13}$
$\frac{23}{1}$	$\frac{19}{2}$	$\frac{16}{3}$	$\frac{13}{4}$	$\frac{10}{5}$	$-\frac{7}{6}$	$-\frac{4}{7}$	$-\frac{1}{8}$	$+\frac{2}{9}$	$+\frac{5}{10}$	$+\frac{8}{11}$	$+\frac{11}{12}$
0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
	$-\frac{17}{2}$	$[-\frac{13}{3}$	$-\frac{9}{4}$	$-\frac{5}{5}]$	$-\frac{1}{6}$	$+\frac{3}{7}$	$+\frac{7}{8}$				

[Fortsetzung der Z. 1 − 3]

12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
$\frac{1}{13}$	$\frac{1}{14}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{17}$	$\frac{1}{18}$	$\frac{1}{19}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{21}$	$\frac{1}{22}$	$\frac{1}{23}$	$\frac{1}{24}$
$+\frac{1}{13}$	$+\frac{3}{14}$	$+\frac{5}{15}$	$+\frac{7}{16}$	$+\frac{9}{17}$	$+\frac{11}{18}$	$+\frac{13}{19}$	$+\frac{15}{20}$	$+\frac{17}{21}$	$+\frac{19}{22}$	$+\frac{21}{23}$	$+\frac{23}{24}$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccccc}
1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & & 9 & & 10 \\
10 & & 9 & & 8 & & 7 & & 6 & & 5 & & 4 & & 3 & & 2 & & 1 \\
\hline
10 & & 18 & & 24 & & 28 & & 30 & & 30 & & 28 & & 24 & & 18 & & 10 \\
& 8 & & 6 & & 4 & & 2 & & 0 & & & & & & & & & \\
& & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & & & & & & & & &
\end{array}$$



[*Fig. 1*]

268,3 *Zu* $\frac{3}{11}$ *und* $\frac{5}{10}$ *am oberen Rande:*

$$\frac{3}{11}\overset{+}{\underset{-}{\times}}\frac{11}{14} \qquad \frac{121+42}{154} \qquad \frac{162}{154}\ [sic!] \qquad \begin{array}{c}\dfrac{8}{154}\!\not{)}\,19 \\ \cancel{8} \\ 7\end{array} \qquad \frac{5}{10}\overset{-}{\underset{-}{\times}}\frac{10}{15} \qquad \frac{175}{150} \qquad \frac{25}{150}\,\Big|\,\frac{1}{6}.$$

268,11 *Über* $6\frown 5 \quad 4\frown 3 \quad 2\frown 1$:

$$\frac{11}{20}+\frac{10}{20}=\frac{21}{20}=1[+]\frac{1}{20}{}_{[,]} \qquad \frac{7+6}{22} \qquad \frac{[13]}{22}{}_{[,]} \qquad \frac{3+2}{24} \qquad \frac{5}{24}.$$

268,3 $-\frac{1}{12}$ *L ändert Hrsg.* 268,5 $\frac{3}{\frac{4}{5}}$; $\frac{7}{\frac{11}{2}}$; $\frac{11}{\frac{24}{2}}$ *L ändert Hrsg.* 268,6 -9; -1 *L ändert Hrsg.* 268,9 $-\frac{11}{3}$; $-\frac{7}{4}$; $-\frac{5}{10}$ *L ändert Hrsg.* 12 $-$ sowie 9 *L ändert Hrsg.*

268,1–13 *Zum Schema:* Leibniz hat zunächst in Z. 3+13 negative Vorzeichen eingeführt, diese dann aber in positive umgewandelt. Dabei sind die negativen Vorzeichen der letzten Terme von Z. 3 und 6 stehengeblieben. In Z. 7 hat Leibniz die Vorzeichen nur teilweise hingeschrieben; er hat sie aber in der Rechnung berücksichtigt. Die vordersten Terme der Z. 7 und 8 müssten bei konsequenter Rechnung $-\frac{22}{1}$ bzw. 1 lauten, Leibniz hat diese Terme in Z. 9 nicht mehr berücksichtigt.

$$\begin{array}{lllll}
\frac{a}{b} & & & & \\
 & \frac{a}{b}\times\frac{c}{d} & \frac{ad}{bc} & & \\
\frac{c}{d} & & & \frac{ad}{bc}\times\frac{cf}{de} & \frac{ad^2e}{bc^2f} \\
 & \frac{c}{d}\times\frac{e}{f} & \frac{cf}{de} & & \\
\frac{e}{f} & & & & \\
 & \frac{e}{f}\times\frac{g}{h} & \frac{eh}{fg} & & \\
\frac{g}{h} & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
 & 2 & & \\
\frac{1}{2} & & \frac{4}{3} & \\
 & \frac{3}{2} & & \frac{32}{27} \\
\frac{1}{3} & & \frac{9}{8} & \\
 & \frac{4}{3} & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{16}{15} & \\
 & \frac{5}{4} & & \\
\frac{1}{5} & & &
\end{array}$$

[Zusatz zu Teil 3]

Cum multa de figura hac, quam harmonicam appellare volebam, cuius applicatae harmonice proportionales ratiocinatus essem, et inprimis ungulae aream, seu ducta quavis applicata $\frac{a^2}{1}\ \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{3}$ etc. in suam distantiam ab axe, 1. 2. 3. unde fit $a^2+a^2+a^2$ etc. summa ungulae. His inquam constitutis, quaerere volebam qualisnam

---

1–9 *Nebenrechnung zum rechten Schema:*

$$\frac{1}{1}\times\frac{1}{2}=\frac{2}{1}\qquad \frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{3}{2}\qquad \frac{1}{3}\times\frac{1}{4}=\frac{4}{3}\qquad \frac{5}{4}\qquad \frac{6}{5}$$

$$\frac{2}{1}\times\frac{3}{2}=\frac{4}{3}\qquad \frac{3}{2}\times\frac{4}{3}=\frac{9}{8}\qquad \frac{4}{3}\times\frac{5}{4}=\frac{16}{15}\qquad \frac{4}{3}\times\frac{9}{8}=\frac{32}{27}$$

14 ungulae. *(1)* Reperi *(2)* His *L*

esset curva quae hanc figuram harmonicam terminaret. Cum ecce invenio in *Transact. Phil.* quas alia causa inspexeram, Wallisium observasse hyperbolam conflari ex primanorum, ut vocat reciprocis, seu harmonice proportionalibus, eundemque ungularum doctrinam exposuisse. Ego vero ultra progressus inveni geometricam reductionem, conoeidis hyperbolici axe asymptota infinitae longitudinis, ad cylindrum, seu isoparallelam. Vide *Transact.* dicere quaedam in *Mesolabo* habere Slusium circa conchoeides infinite longas.

[*Teil 4*]

Variae ex rectis circuli figurae fiunt, quarum aliquae sunt quadrabiles; figura applicatarum, a radio ad arcum translatarum (quae quadrari potest), figura abscissarum, itidem arcui impositarum, quam ostendi aequari segmento circuli; figura arcuum radio applicatorum, quam constat esse retortam cycloeidalem ex quibus unam mediam quadrari posse ostendi, quemadmodum extremam constat esse circulo generatori aequalem. Figura tangentium, quam constat esse retortam conchoeidis. Figura chordarum ad ordinatas, quam consideravi opinor primus, et quadrari posse ostendi, imo facere semiparabolam, cuius altitudo pariter et basis diameter.

Regula generalis: intervalla tangentium a puncto arcus extremo arcui applicata aequantur, segmento eiusdem arcus.

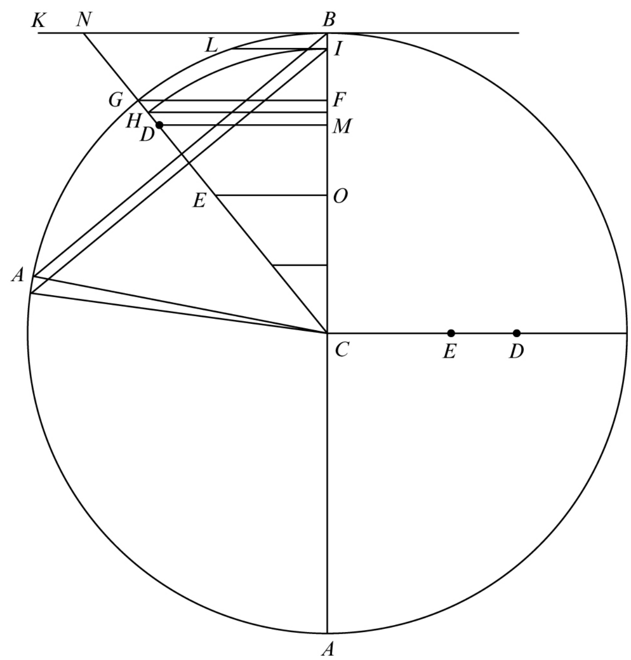
Theorema memorabile: duplum segmentum, aequari momento arcus ex puncti extremi tangente librati.

4 exposuisse | quo posito gestr. | . Ego *L* 9 (quae quadrari potest) *erg. L* 10 circuli; *(1)* figura arcuum, quam *(a)* ostendi *(b)* constat eandem esse cum figura retortarum *(aa)* circ *(bb)* cycloeidalium, quarum una quadrari potest. *(2)* figura *(3)* figura | et *gestr.* | *(a)* ordinatarum pariter arcuumque iunctorum *(b)* arcuum *L* 11 esse *(1)* cycloeidalem circulare *(2)* cycloeidem circulo *(a)* dup *(b)* triplam *(3)* retortam *L* 11 mediam *erg. L.* 12 f. aequalem | esse *streicht Hrsg.* | . Figura *(1)* conchoeidis, *(2)* arcuum *(3)* sinuum et *(4)* tangentium *L* 16 a puncto arcus extremo *erg. L* 18 duplum *erg. L*

---

2 Wallisium observasse: s. *Philosophical Transactions*, Bd III N. 38 vom 17./27. August 1668, S. 753 bis 759. 4 Ego ... inveni: s. N. 17 S. 340 Z. 10 f. 6 quaedam ... habere Slusium: s. die Besprechung von Sluse's *Mesolabum*, 2. Aufl. 1668, in: *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903–909. Die betreffende Stelle befindet sich im *Mesolabum*, 1668, S. 129 f. 12 ostendi: s. N. 17 S. 344–346. 14 ostendi: s. N. 10 S. 147 Z. 18 – S. 148 Z. 2.

Hinc apparet segmenta esse figuras arcuum circuli ex tangentibus libratorum centrobarycas, quibus eorum momenta mensurantur. Contra figuras quasdam rectilineas esse centrobarycas arcuum ex radio libratorum. Hinc sequitur segmenta similia continue crescentia sibi imposita esse momentum sectoris ex tangente suspensi. Porro haec segmenta sibi continue imposita, faciunt cylindrum cuius altitudo semiradius, basis segmentum maximum. Hic ergo cylinder est aequalis momento sectoris. At momentum sectoris ex tangente suspensi, aequatur distantiae centri gravitatis sectoris a tangente, ductae in sectorem. Iam Guldinus ostendit centrum gravitatis sectoris distare a centro $\frac{2}{3}$ distantiae centri arcus a centro.



[*Fig. 2, Blindzeichnung*]

1 circuli ex tangentibus libratorum *erg. L*

8 Guldinus ostendit: *Centrobaryca*, 1635–41, Bd I S. 105–107. 10 [*Fig. 2*]: Hierzu existiert eine gestrichene Vorstufe in Tinte.

Cum radius sit a. esto distantia centri gravitatis arcus a centro $a-z$. erit z. distantia eiusdem centri ab arcu. Esto in fig. arcus AB. centrum C. centrum arcus D. sectoris E. erit $CE = \dfrac{2}{3}\ a - z$. Porro suppono sinum arcus dimidii scilicet BG. nempe GF. esse cognitum, quem possumus supponere = radio a. si arcus AB. intelligatur esse semiperipheria, quod et faciemus, facilioris calculi causa supponemus. Imo adverto errorem, assumto arcu interiori assumenda et interior tangens. Illud tamen interim manifestum est cuneum semiquadrantalem super illa tangente abscissum qui scilicet momento aequatur, aequari cylindro segmenti sub semiradio. Eius cunei superficies aequatur segmento. Unde illud quoque apparet cuneum fieri ex superficiebus continue decrescentibus in ratione numerorum naturalium, seu altitudinum, ut $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$. Imo falso ut dixi non est absolute verum segmenti cylindrum esse momentum sectoris suspensi ex axe BK. Sed ut habeatur momentum arcus concentrici cuiuslibet ut HI. non cogitandum esse suspensum ex tangente sua IL, sed ex ipsa BK. tangente sectoris, et ideo distantiis omnibus punctorum arcus HI, a tangente sua IL. addendam semper distantiam inter KB. et LI. seu IB. ex radio abscissam, et ideo distantiis ab IL. arcui HI. applicatis seu segmento HI. addendam esse superficiem cylindricam sub arcu et abscissa ab extremo radii IB. ad habendum arcus momentum. Iam ut arcus decrescunt, ita abscissae crescunt, in ratione altitudinum, seu numerorum naturalium. Ergo cylindro quem dixi segmenti, addenda est summa talium productorum.

$$\begin{array}{cccccc} x & 2x & 3x & 4x & 5x & \text{etc.} \\ a-1 & a-2 & a-3 & a-4 & a-5 & \end{array}$$

Posito radio a, infinitis arcus partibus x. fiet: $\quad ax + 2ax + 3ax \quad$ seu pro omnibus x. seu arcu sumto $\cancel{X}$ fiet $\dfrac{\cancel{X}^2 a}{2}$.

$$\begin{array}{cccc} x & 2x & 3x & 4x. \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{array}$$

Seu posito a = infinitis b seu = βb fiet $\quad 1xb.\ \ 4xb.\ \ 9xb.\ \ 16xb.\quad$ Erit tertia pars cubi sub media proportionali inter arcum et radium a. Idemque sic probatur: manifestum est ista

3 CE $|= \dfrac{2}{3}$ a − z. *gestr., erg. Hrsg.*| Porro *L* 7 semiquadrantalem *erg. L* 11 suspensi ex axe BK. *erg. L* 22 Posito *(1)* arcu x *(2)* radio a, *(a)* summa erit a^2x- *(b)* infinitis *(aa)* x aequ *(bb)* arcus *L* 22 3ax $|=$ *streicht Hrsg.*| *(1)* seu $\dfrac{x^2}{2}a$ *(2)* seu pro *L* 26 pars *(1)* parallelepipedi seu cylindri sub arcu et radio seu *(2)* cubi *L* 27 radium a. *(1)* Sic potius: *(2)* Si sic esset: *x 2x 3x etc.* habuissemus: $x^2\ 2x^2$ *(3)* Hin *(4)* Idemque *L*

$1xb.\ 2 \frown 2xb.\ 3 \frown 3xb.$ esse nihil aliud quam summam $\bigtriangledown^{\mathrm{lorum}}$ quorum altitudo omnia b. vel ipsa a. basis omnia x. vel ipsa $\mathbb{X}$ eaque continue diminuta. Inde a basi, sibi superposita horum elementa crescunt ut parallelepipeda, quorum latera crescunt in eadem ratione numerorum naturalium seu ut quadrata, quorum radices sunt numeri naturales: nam v. g. parallelepipedum $4xb$. ergo radix $\square^{\mathrm{ta}}$ aequalis: $2\,Rq\,xb$. et pro $Rq_{\llcorner\llcorner}9_{\llcorner}xb_{\lrcorner}$ fiet $3\,Rq\,xb$. et ita porro.

16_2. PLAGULA ɿ(2)

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 297–298. 1 Bog. 2°. 4 S. Cc 2, Nr. 547 tlw.

[*Teil 1*]

Ostensum est ergo in praecedenti plagula duplo cylindro segmenti, sub triente radii addendum esse, arcu positio x. radio a. addendum inquam esse, $\dfrac{x^2a}{2} - \dfrac{\text{cubus de } Rq\,xa}{3}$. At cubus de $Rq\,xa$, potest etiam intelligi $xa \frown Rq\,xa$ seu $x^2a^2 \frown xa,,Rq = Rq\,x^3a^3$. fiet $\dfrac{x^2a}{2} - \dfrac{Rq\,x^3a^3}{3}$ + dupl. cylinder segmenti sub triente radii.

---

14 Momentum sectoris ex tangente librati.

1 $3 \frown 3xb$. |1x 2x 3x| esse *L* 11 plagula *(1)* cylindro segmenti, sub *(a)* semiradio *(b)* radio | seu cylindro segmenti sub radio *erg.* | *(2)* duplo *L* 14 $- \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3} +$ *(1)* cylinder segmenti sub *(a)* semiradio *(b)* radio *(2)* dupl. *L*

10+279,2 [*Teil 1*], [*Teil 3*]: Leibniz überträgt das Ergebnis von N. 16_1 Teil 4 und setzt die Untersuchungen zum Moment des Kreissektors an Hand der dortigen Figur fort. Die eine Hälfte der Ausgangsformel ist (wegen S. 281 Z. 6) nachträglich verbessert. Der Fehler in der anderen Hälfte bleibt jedoch bestehen und vererbt sich insbesondere bis S. 282 Z. 4. Weitere Flüchtigkeiten (vor allem S. 276 Z. 10 – S. 277 Z. 1) kommen im Verlauf der Überlegungen hinzu. Ab S. 282 Z. 5 betrachtet Leibniz den Spezialfall des Halbkreises. Hier gelingt es ihm, die verbliebenen Fehler zu beheben und schließlich ein gültiges Ergebnis (vgl. S. 286 Z. 5) zu ermitteln.

Nunc momentum sectoris alia methodo investigemus, ut appareat, an aliqua inde lux affulgeat nova. Nimirum segmentum sectoris fit ex distantia centri gravitatis [arcus a recta librationis, seu hoc loco a tangente ducta in arcum].

At centrum gravitatis E sectoris CAB, distat a centro circuli C duabus tertiis CE distantiae CD centri gravitatis arcus D. Ergo opus est ut centrum gravitatis ipsius arcus, quantum res patitur investigemus. Constat autem ex centrobarycis linea quadam circa quendam axem voluta, superficiem curvam aequari lineae ipsi in viam centri gravitatis ductae. Sit AB arcus x. via centri gravitatis est etiam arcus quidam vel peripheria circuli, cuius radius, distantia MD centri gravitatis D ab axe BMC. Hanc rectam MD ponamus esse z. erit eius peripheria ad peripheriam circuli CA. ut z ad a. et ut radius unus, ita et alter ad suam peripheriam, ergo ut ex recta z. faciamus peripheriam eius multiplicabimus per peripheriam circuli CA. id est $x\gamma$. et dividemus per radium a. fiet $\frac{zx\gamma}{a}$. haec si ducatur in x. fiet: $\frac{zx^2\gamma}{a}$ quae est superficies curvae revolutione orta, quae cum aequetur circulo, quando curva circularis circa diametrum eiusve portionem revoluta est[,] eum circulum ponamus $\frac{ax\delta}{2}$. Omnis enim circulus potest dici $\frac{ax}{2}$. et variae eorum rationes (sunt enim omnes figurae similes,) possunt simplici quadam litera adiecta, exprimi ut hoc loco δ. quam, ut ante γ. cognitam suppono. Ergo $\frac{zx^2\gamma}{a} = \frac{ax\delta}{2}$. seu $zx\gamma = \frac{a^2\delta}{2}$. seu $zx = \frac{a^2\delta}{2\gamma}$. Modo notemus istas literas Graecas δ. γ. quae mihi non magnitudines vel quanta, sed rationes vel numeros, repraesentare solent posse aliquando esse fractiones unitate minores, atque ideo posse fieri ut multiplicatio per unum fit effectu divisio, et divisio per alterum effectu multiplicatio. His ita positis habemus figuram rectilineam aequalem arcui ducto in distantiam centri gravitatis ab axe, etsi tam distantiae huius, quam arcus quantitatem veram ignoremus. Porro hinc patet ipsam distantiam centri gravitatis arcus, quodammodo, posita recta curvae arcus aequali haberi, in omnibus iis, quorum superficies curvae habentur. Ergo $z = \frac{a^2\delta}{2\gamma x} = MD$. distantiae centri gravitatis curvae AB. a radio

2 sectoris ducta in distantiam a recta librationis, *(1)* seu fulcro *(2)* seu hoc loco a tangente L *ändert Hrsg.* 5 est | ergo *streicht Hrsg.* | ut L 6 centrobarycis *(1)* arcu quodam *(2)* linea L 10 z. ad a. *(1)* ergo *(2)* item ut *(3)* et ut *(a)* peripheria *(b)* arcus unus *(c)* radius L 11 ex *(1)* arcu faciamus x. *(2)* recta L

4 ff.: Leibniz bezieht sich auf N. 16_1 S. 272 [*Fig. 2*].

CB. quo posito facile inveniemus ipsam CD. distantiam centri gravitatis arcus a centro circuli. Dato enim arcu AB. eiusque ratione ad peripheriam quod suppono, datus erit sinus arcus dimidii GB. nempe GF. Hic sinus esto b. erit $\dfrac{b}{MD} = \dfrac{a}{DC}$. Ergo $DC = \dfrac{MD\,a}{b}$. Ergo $DC = \dfrac{a^3\delta}{2\gamma bx}$. Ergo EC distantia centri sectoris a centro circuli $= \dfrac{a^3\delta}{3\gamma bx}$. Cumque data sit secans arcus $CN = d$. erit ut NC ad NE. ita BC [=] a. ad BO. distantiam centri sectoris a tangente, seu recta librationis, $\dfrac{NE}{CN} = \dfrac{BO}{a}$. Ergo $\dfrac{NE \frown a}{CN} = BO$. Iam CN ut dixi est d. NE est $CN - EC$. seu $d - \dfrac{a^3\delta}{3\gamma bx}$. Ergo $a - \dfrac{a^4\delta}{3\gamma bdx} = OB$. distantiae centri gravitatis sectoris E a tangente BN. Haec ducatur in ipsum sectorem, CAB qui est $\dfrac{ax}{2}$. arcu AB posito x. fiet:

$$\frac{a^2x}{2} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} = x^2a + \begin{matrix}\text{duplus cyl.segm.}\\ \text{sub rad. triente}\end{matrix} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}.$$

Porro duplo cylindro segmenti sub radii triente, si ei adiciamus cylindrum seu prisma fulcri, ut inde fiat duplus sector, ponamus autem hoc fulcrum cognitum esse e^2. adiciendo utrobique $\dfrac{2e^2a}{3}$ [habebimus]

---

10 Momentum sectoris.

5 = *erg. Hrsg.* 10 $\mathrm{x^2a}$ + *(1)* cyl. segm. sub *(a)* semirad. *(b)* rad. *(2)* duplus *L* 11 Porro *(1)* | duplum *erg.* | cylindrum segmenti | sub semiradio *erg.* | facile eliminabimus *(2)* duplo *L* 12 sector | qui ductus in semiradium dat simplicem sectorem ductum in radium *erg. und gestr.* |, ponamus *L* 12 hoc *(1)* prisma fulcri cum sit *(2)* fulcrum *L* 12 f. esse $\mathrm{e^2}$. *(1)* habebimus $\dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \mathrm{x^2a} + \dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. seu $-\dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \dfrac{\mathrm{x^2a}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. Ergo $\dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3} - \dfrac{\mathrm{x^2a}}{2}$. seu *(a)* cubus *(b)* triente cubi sub media proportionali arcus et radii, *(aa)* demta medietate *(aaa)* cylindri sectoris *(bbb)* prism *(bb)* demto cylindro, cuius basis sector, altitudo arcus. Sed hoc impossibile est, cum pateat adimendum esse priore maius. Errorem ergo calculo inesse necesse est. Quem mox retexam. *(2)* adiciendo utrobique *(a)* $\mathrm{2e^2a}$ habebimus $\mathrm{2e^2a} + \dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \mathrm{x^2a} + \dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. seu $\mathrm{2e^2a} - \dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \dfrac{\mathrm{x^2a}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. *(b)* $\mathrm{e^2a}$ habebimus $\mathrm{e^2a} + \dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \mathrm{x^2a} + \dfrac{\mathrm{a^2x}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. seu $\mathrm{e^2a} - \dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}} = \dfrac{\mathrm{x^2a}}{2} - \dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. *(c)* $\dfrac{\mathrm{2e^2a}}{3}$ | habebimus *erg. Hrsg.* | $\dfrac{\mathrm{2e^2a}}{3} +$ *L*

$\frac{2e^2a}{3} + \frac{a^2x}{2} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} = x^2a + \frac{2a^2x}{3} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}$. seu $\frac{2e^2a}{3} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} = \frac{x^2a}{2} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}$. Annoto interim, cum omnis figura ducta in distantiam centri gravitatis ab axe aequilibrii aequetur momento suo, necesse est, ut arcus circuli ductus in distantiam centri gravitatis a tangente, aequetur segmento suo duplicato, id est addito utrinque segmenti fulcro, seu complemento ad sectorem, ergo $ax - \frac{a^4\delta}{3\gamma bd} + 2e^2 = ax$. Hinc dubitandum non est quin $2e^2 = \frac{a^4\delta}{3\gamma bd}$. et proinde nihil ex hac ratiocinatione duci potest ad ipsam figurae dimensionem.

[*Teil 2*]

Porro ex speculationibus nostris illud emergit memorabile, si figurae quaedam integrae, seu in duas partes similes bisecabiles, rotentur circa axem quendam, ita ut axis figuram bisecans sit axi rotationis parallelus: solida producta, imo et eorum superficies fore inter se ut figuras, modo scilicet axes figurarum aequidistent ab axe revolutionis. Hinc habetur quadratura annuli parabolici. Adde illud quoque hos annulos proportionaliter secari cum figura, quia portiones sectae, etiam possunt intelligi figurae diversae, quarum axes aequidistant ab axe revolutionis. Hinc ecce aliud memorabile: possum exhibere annulum hyperbolicum, qui sit ad alium quemlibet annulum, ut figura hyperbolica

---

13 NB hoc non de figuris intelligendum sed de curvis.

2–6 *Text mittels Anführungsstrichen je am Zeilenbeginn hervorgehoben.* 5 f. duplicato *(1)* . BO ita conabimur investigare *(a)* rectius *(b)* utilius, ut non sit opus residuo, *(aa)* ut supra *(bb)* quod supra inveneramus $a - \frac{a^4\delta}{3\gamma bdx}$. Ante omnia enim quaeramus CO. Iam patet $\frac{CE}{CD} = \frac{CO}{CM}$. Ergo $\frac{CE \frown CM}{CD} = CO$. Sed ante inveniendum CM. hoc ita: a *(2)* |, id est ... sectorem, *erg.* | ergo *L* 8+10 dimensionem. *(1)* Illud tantum videndum an verum sit quod praecedens aequatio dederat, $\frac{x^2a}{2} = \frac{Rq\,x^3a^3}{3}$. ducto utroque in se ipsum, habebimus: $\frac{x^4a^2}{4} = \frac{x^3a^3}{9}$. Ergo $\frac{xa^2}{4} = \frac{a^3}{9}$. Ergo $\frac{x}{4} = \frac{a}{9}$. Ergo $x = \frac{4a}{9}$. quod est absurdum. Erroris ratio haud dubie est in *(a)* dimensione *(b)* determinatione momenti sectoris. *(2)* Hinc illud etia *(3)* Porro *L* ad figuram illam annuli alterius generatricem. Ostendit nimirum Wallisius modum ducendi rectam quandam, in qua sit centrum portionis cuiusdam hyperbolicae, quae tamen recta non est axis totius figurae, quare altera illa proprietas annularium meorum deest, quod scilicet portiones annuli hic non secantur proportionaliter portionibus figurae, per plana axi revolutionis perpendicularia. Hinc etiam superficiei curvae solidi annularis cycloeidis, aut paraboloeidis Heuratianae, exhiberi possunt aequalia plana rectilinea, quia curvis aequales habentur rectae. Hinc comparari etiam possunt residua eiusmodi annulorum, differentiaeque inter se, et ad cylindrum.

Cum autem datur centrum gravitatis alicuius figurae, tunc innumeri exhiberi possunt annuli figurae dissimiles, et tamen proportionales. Ideo innumeri exhiberi possunt annuli parabolici, et semiparabolici quadrabiles, quemadmodum et eorum residua. Hinc si duarum figurarum inter se comparabilium axes aliqui noti sint, poterunt et solida quaedam per revolutionem genita comparari, et, si figura cuius aliquis axis aequilibrii datus est, quadrari potest, poterit etiam quadrari eius solidum, revolutione axium parallela genitum.

Simplicissima illa annularia nemo fastidire debet, neque putare id statim manifestum esse, quod annuli sint figuris proportionales. Nam in semifiguris, id aeque manifestum videri poterat nec est tamen. Putet aliquis, geometria indivisibilium abutens posse omnia revoluta explicari in prisma, vel rectangulum, quod si verum esset possemus quadrare omnia conoeidea, posita figurarum quadratura quod falsum est. Nota bene proportionalitas annulorum non procedit, aequali distantia figurarum ab axe revolutionis, sed axium aequilibrii in figuris.

11–13 Nota etsi obliquae sint figurae inter circumvolutionem, modo axis earum sit semper parallelus axi revolutionis nil refert.

8 f. cylindrum. | Et quadrari potest *gestr.* | Cum *L* 12 si | unius *streicht Hrsg.* | *(1)* cuiusdam figurae cum alia figura comparabilis axis *(2)* duarum *L* 12 f. quaedam *erg. L*

---

1 Ostendit: J. Wallis, *Nonnulla de centro gravitatis hyperbolae*, in: *Philosophical Transactions* Bd VII Nr. 87 vom 14./24. Okt. 1672, S. 5074 f.; auch in: *WO* I S. 928 f.

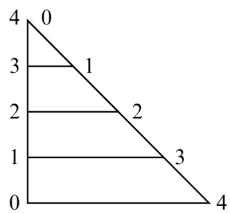
Videndum quae Tacquet et Stephanus de Angelis de annularibus scripsere.

[*Teil 3*]

Nunc resumo quae supra de multiplicatione illa reciproca crescentium abscissarum in arcus descrescentes. Necesse est arcum AB. et radium CB. divisos intelligi in eundem

---

3–280,2 *Daneben am Rande:*



$$\begin{array}{l} 0x \frown 4a \\ 1x \frown 4a - 1a \\ 2x \frown 4a - 2a \\ 3x \frown 4a - 3a \\ \underline{4x \frown 4a - 4a} \\ 10x \frown 4a \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} 0x \frown 4a & 0 \frown 4a = 0 \\ 1x \frown 3a & 3xa \\ 2x \frown 2a & 4xa \\ 3x \frown 1a & 3xa \\ 4x \frown 0a & \underline{0 \frown 4x = 0} \\ & 10xa \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -\quad 1xa \\ 4xa \\ 9xa \\ \underline{16xa} \\ 40xa - 30xa = 10xa \end{array}$$

4 descrescentes. *(1)* Ergo ponendo x. pro arcu, a. pro radio

$$\frac{1}{\beta\,\mathrm{x}} \qquad \frac{2}{\mathrm{x}} \qquad \frac{3}{\mathrm{x}} \qquad \frac{4}{\mathrm{x}} \qquad \frac{5}{\mathrm{x}}$$

$$\mathrm{a} - \frac{1}{\beta\,\mathrm{a}} \qquad \mathrm{a} - \frac{2}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{a} - \frac{3}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{a} - \frac{4}{\mathrm{a}} \qquad \mathrm{a} - \frac{5}{\mathrm{a}}$$

(2) Necesse *L*

---

1 Videndum: Den Hinweis auf St. degli Angeli und A. Tacquet verdankt Leibniz der Besprechung der *Opera mathematica* von A. Tacquet in den *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 43 vom 11./21. Jan. 1668/69, S. 869–876. 3 resumo quae supra: N. 16$_1$ Teil 4. S. 273 Z. 17; zur Figur s. dort S. 272 [*Fig. 2*].

partium aequalium infinitarum numerum, etsi partes ipsae sunt inter se inaequales, proportionales tamen, seu in ratione totorum. Iste partium infinitarum numerus intelligatur esse β. porro partes minimas ipsius arcus vocabimus x. et ipsius radii a. Erit multiplicatio talis:

$$\begin{array}{lllllll}
 & \frac{1x}{\beta} & \frac{2x}{\beta} & \frac{3x}{\beta} & \frac{4x}{\beta} & \frac{5x}{\beta} & \text{etc.} \\[2ex]
\text{per} & a \frown \beta - \frac{1}{\beta} & a \frown \beta - \frac{2}{\beta} & a \frown \beta - \frac{3}{\beta} & a \frown \beta - \frac{4}{\beta} & a \frown \beta - \frac{5}{\beta} & \text{etc.} \\[2ex]
\text{seu per} & \frac{a \frown \beta^2 - 1}{\beta} & \frac{a \frown \beta^2 - 2}{\beta} & \text{etc.} & & & \\[2ex]
\text{vel} & \frac{1xa}{\beta^2} & \frac{2xa}{\beta^2} & & & & \\[2ex]
\text{per} & \beta^2 - 1 & \beta^2 - 2 & & & & \\[2ex]
\text{Ergo primum} & \frac{1xa}{\beta^2} & \frac{2xa}{\beta^2} & & & & \\[2ex]
\text{per} & \beta^2 & \beta^2 & & & &
\end{array}$$

dabit $xa + 2xa + 3xa$ etc. cuius summa $xa \frown \frac{\beta^2}{2}$.

Puto istud β. frustra subscribi, nam cum tollitur postea, quomodo determinabimus hanc summam 1. 2. 3. 4. 5. etc.[?] Ergo sic:

$$\begin{array}{lllll}
x & 2x & 3x & 4x & 5x \\
\beta a - a & \beta a - 2a & \beta a - 3a & \beta a - 4a & \beta a - 5a
\end{array}$$

Ante omnia totum $x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \quad 5x$ etc. $= \frac{\beta^2 x}{2}$, seu dimidio arcus quadrato $\frac{x^2}{2}$, multiplicabimus per βa, seu rectam a habebimus: $\frac{x^2 a}{2}$. Nunc

$$x \quad 2x \quad 3x \quad 4x \quad 5x$$

1 aequalium *erg. L*

---

17 f. Ante omnia ... multiplicabimus: Leibniz bezeichnet mit a. bzw. x. sowohl den ganzen Radius und Bogen als auch deren infinitesimalen Teile. Um den Unterschied deutlich zu machen, benutzt Leibniz hier und an einigen anderen Stellen für den ganzen Radius und Bogen a bzw. x. Dies wird jedoch nicht konsequent durchgehalten. Außerdem sind die Übergänge im Schriftstück fließend.

multiplicemus per	a	$2a$	$3a$	$4a$	$5a$
habemus:	xa	$4xa$	$9xa$	$16xa$	$25xa$

seu $\dfrac{\beta^3}{2}xa$ seu cubi de $Rq\,xa.$ trientem.

[Rectissime] ista, alia ergo causa erroris, quam ego hanc esse animadverto: conum ex segmentis similibus continue decrescentibus, radii altitudine dixeram aequari cylindro segmenti sub semiradio cum aequetur cylindro segmenti sub triente radii, ideo huius duplum aequatur cylindro segmenti sub duabus tertiis radii. Eritque aequatio haec:

$$\frac{a^2x}{2} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} = \frac{x^2a}{2} + \begin{array}{l}\text{cylinder segmenti}\\ \text{sub } \frac{2}{3} \text{ radii}\end{array} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}.$$

seu ut ex segmenti cylindro, fiat sectoris $\dfrac{\cancel{2}a^2x}{3 \frown \cancel{2}}$ cylinder, addito utrobique fulcri cylindro sub $\dfrac{2}{3}$ radii nempe $\dfrac{2ae^2}{3}$.

$$\frac{2ae^2}{3} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} + \frac{a^2x}{2} = \frac{x^2a}{2} + \frac{\cancel{2}a^2x}{3 \frown \cancel{2}} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}.$$

$$\frac{2ae^2}{3} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} + \frac{3a^2x}{6} = \frac{x^2a}{2} + \frac{2a^2x}{6} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}.$$

seu $$\frac{2ae^2}{3} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} + \frac{a^2x}{6} = \frac{x^2a}{2} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3}.$$

Porro ostensum est supra $2e^2 = \dfrac{a^4\delta}{3\gamma bd}$. Ergo $\dfrac{2ae^2}{3} = \dfrac{2a^5\delta}{9\gamma bd}$. Ergo $\dfrac{a^5\delta}{3\gamma bd} - \dfrac{2a^5\delta}{9\gamma bd} = \dfrac{a^5\delta}{3\gamma bd} - \dfrac{2ae^2}{3} = \dfrac{3a^5\delta - 2a^5\delta}{9\gamma bd} = \dfrac{a^5\delta}{9\gamma bd}$. Ergo cum $\dfrac{2ae^2}{3}$ sit minus quam $\dfrac{a^5\delta}{3\gamma bd}$, ideo ista aequatio:

4 [Rectissime] *gestr. L, erg. Hrsg.* 13 f. $\dfrac{\mathrm{Rq\,x^3a^3}}{3}$. *(1)* seu cum $\dfrac{\mathrm{a^5}\delta}{3\gamma\mathrm{bd}}$ sit maius quam $\dfrac{\mathrm{2ae^2}}{3}$, cum aequetur ipsi *(2)* Porro *L*

4 [Rectissime]: Das Wort ist von Leibniz aufgrund von S. 284 Z. 3 f. nachträglich gestrichen worden. 14 supra: s. S. 277 Z. 7

$$\frac{2ae^2}{3} - \frac{a^5\delta}{3\gamma bd} = \frac{x^2a}{2} - \frac{a^2x}{6} - \frac{Rq\,a^3x^3}{3}$$

erit 0. vel minor 0. et sic transponenda:

$$\frac{a^5\delta}{9\gamma bd} = \frac{a^2x}{6} + \frac{Rq\,a^3x^3}{3} - \frac{x^2a}{2}.$$

Sed hoc rursus fieri non potest.

Compendiosi calculi causa, supponatur arcus x. esse semiperipheria, sector erit semicirculus. Momentum sectoris erit segmentum duplicatum, ductum in tertiam radii partem, cum autem segmentum hoc loco etiam sit semicirculus, duplicatum erit circulus, erit ergo circulus ductus in tertiam partem radii, et ita:

$$\frac{x^2a}{2} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3} + \frac{a^2x}{3} = \frac{a^2x}{2}.$$

Momentum enim sectoris etiam habetur sectore hoc loco semicirculo, in distantiam centri gravitatis eius a tangente, quae est ipse radius ducta, neque enim tunc ullo opus calculo, quia axis sectoris huius est tangenti parallelus. Ergo adimendo $\frac{a^2x}{3}$ ab $\frac{a^2x}{2}$ seu $\frac{3a^2x}{6} - \frac{2a^2x}{6} = \frac{a^2x}{6}$. Ergo $\frac{x^2a}{2} - \frac{Rq\,x^3a^3}{3} = \frac{a^2x}{6}$.

Non video quid hic obici possit, nam et alio modo, nimirum per arcum. Arcus momentum diximus esse segmentum eius duplicatum, hoc loco circulum, ducatur idem arcus, semiperipheria nempe, in distantiam centri gravitatis sui, (in axem tangenti parallelum cadentis) a tangente, nempe radium habemus iterum circulum, qui fit ex semiperipheria in radium ducta. Ut adeo sola illius inquisitionis in momentum sectoris per inversas

---

1 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{ccc} 2 & 4 & 8 \\ \underline{2} & \underline{4} & \underline{8} \\ 4 & 16 & 64 \\ \underline{8} & \underline{4} & \\ \frac{32}{6} & \frac{64}{3} & \end{array} \qquad \frac{128+32}{6} = \frac{160}{6} \quad f\ 2 \quad [\textit{Rechnung bricht ab}]$$

6 in *(1)* tertiam radii partem *(2)* radium *(3)* tertiam *L* 8 ductus *(1)* in tertiam partem radii *(2)* radium *(3)* in *L*

multiplicationes, opus sit. Iam:

$$\frac{x^2a}{2} - \frac{Rq\,x^3x^3}{3} = \frac{a^2x}{6}.\ \text{Ergo}\ \frac{Rq\,x^3a^3}{3} = \frac{x^2a}{2} - \frac{a^2x}{6}.$$

$$\text{Ergo}\ \underset{\displaystyle\frac{4x^3a^3}{36}}{\frac{x^3a^3}{9}} = \frac{x^4a^2}{4} + \frac{a^4x^2}{36} - \underset{\displaystyle\frac{6x^3a^3}{36}}{\frac{2x^3a^3}{12}}.$$

Ergo $0 = \frac{x^4a^2}{4} + \frac{a^4x^2}{36} - \frac{2x^3a^3}{36}$. Ergo $\frac{2x^3a^3}{36} = \frac{x^4a^2}{4} + \frac{a^4x^2}{36}$. quod est falsum.

$$\begin{array}{cccccc}
1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\
\underline{6} & \underline{5} & \underline{4} & \underline{3} & \underline{2} & \underline{1} \\
 & & & 12 & 10 & 6 \\
 & & & \quad 2 & \quad 4 & \\
 & & & & 2 &
\end{array}$$

Loco multiplicationis huius

$$\begin{array}{llllll}
 & x & 2x & 3x & 4x & 5x \\
\text{per} & \underline{\beta a - a} & \underline{\beta a - 2a} & \underline{\beta a - 3a} & \underline{\beta a - 4a} & \underline{\beta a - 5a} \\
\text{potest} & \text{institui} & & & & \\
 & a & 2a & 3a & 4a & 5a \\
\text{per} & \beta x - x & \beta x - 2x & \beta x - 3x & \beta x - 4x & \beta x - 5x
\end{array}$$

res enim eodem redit.

Prodibit primum $\frac{a^2x}{2}$. deinde $-$
$$\begin{array}{ccccc}
a & 2a & 3a & 4a & 5a \\
\underline{x} & \underline{2x} & \underline{3x} & \underline{4x} & \underline{5x} \\
xa & 4xa & 9xa & 16xa & 25xa
\end{array}$$

---

5 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{lrrl}
x = 5. & 125 & 125 & [\textit{Rechnung bricht ab}] \\
 & \underline{64} & \underline{5} & \\
a = 4. & 500 & 625 & \\
 & \underline{750} & 16 & \\
 & \underline{8000} & & \\
 & 18 & &
\end{array}$$

Hinc sequeretur

$$\frac{x^2a}{2} - ax - 4ax - 9ax - 16ax \text{ etc.} = \frac{a^2x}{2} - xa - 4xa - 9xa - 16xa \text{ etc.}$$

ac proinde $\dfrac{x^2a}{2} = \dfrac{a^2x}{2}$. Ergo $x = a$. quod est absurdum. Est ergo error aliquis in praecedente calculo infinitorum. Is nimirum, ut patet ex calculo margini tabulae praecedentis adiecto, neque dicendum est $\dfrac{x^2a}{2}$, neque $\dfrac{a^2x}{2}$. Sed ut utroque modo eveniat idem, necesse est, dicere $\dfrac{\beta^3ax}{2}$, utroque enim modo vel ducitur $\dfrac{\beta^2x}{2}$ in βa. vel $\dfrac{\beta^2a}{2}$ in βx. Quare cum multiplicarem

$$\begin{array}{llllllll} & x & 2x & 3x & 4x & 5x & = & \beta^2x. \\ \text{per} & \beta a & \beta a & \beta a & \beta a & \beta a & & \end{array}$$

non debebam dicere me multiplicare $\dfrac{x^2}{2}$ seu $\dfrac{\text{quadratum arcus}}{2}$, per βa. seu radium. Quod ut ostendatur a priori, dicendum est β^2x. non esse quadratum ipsius βx. seu arcus, sed β^2x^2 esse quadratum arcus, infinitae enim rectae ut x. non faciunt planum. Et hic utique fuit fons erroris. At hinc sequeretur x. $2x$. $3x$. $4x$. etc. non facere $\dfrac{x^2}{2}$ quod tamen certum est facere. Sed nec ex $\dfrac{\beta^3ax}{2}$ fieret cubus. Sic ergo potius, semper cum multiplicantur quantitates diverse affectae, inter se coniungendae sunt diversae affectiones, antequam numeri iungantur, ergo cum dicitur x. $2x$. $3x$. $4x$. $5x$. etc. per βa. non dicendum est summa eorum $\dfrac{x^2}{2}$ per βa radium sed iungendo primum a. et x. dicendum:

$$\left.\begin{array}{lllllll} & xa & 2xa & 3xa & 4xa & \text{etc.} & = \dfrac{\beta^2xa}{2} \\ \text{per} & \beta & \beta & \beta & \beta & & \end{array}\right\} \text{ fiet } \frac{\beta^3xa}{2}.$$

Quod non observatum ingentium paralogismorum causa esse potest: Neque enim hoc loco

12 faciunt | quadratum, seu *gestr.* | planum. *L*

4 ex calculo margini: s. o. die Anmerkung zu S. 279 Z. 3 – S. 280 Z. 2. 6 f. cum multiplicarem: s. o. S. 280 Z. 15 – S. 281 Z. 3.

sensus est, nos velle ducere semiquadratum arcus in radium, nec semiquadratum radii in arcum, sed ducimus in se invicem minimas eorum partes, ut inde fiant rectangula xa, numeris 1. 2. 3. 4. etc.$\frown$ $\beta = \dfrac{\beta^3}{2}$. affecta.

Aequatio ergo nunc tandem ita stabit:

$$\frac{a^2x}{3} + \frac{Rq\,xa \text{ cubus}}{2} - \frac{Rq\,xa, \text{ cubus}}{3} = \frac{a^2x}{2}.$$

Ergo $\dfrac{3}{6} \,\Big|\, \dfrac{Rq\,xa \text{ cubus}}{2} - \dfrac{2}{6} \,\Big|\, \dfrac{Rq\,xa \text{ cubus}}{3} = \dfrac{3}{6} \,\Big|\, \dfrac{a^2x}{2} - \dfrac{2}{6} \,\Big|\, \dfrac{a^2x}{3}$. Ergo $\dfrac{Rq\,xa \text{ cubus}}{6} = \dfrac{a^2x}{6}$. Ergo $Rq\,xa$ cubus $= a^2x$. Ergo xa cubus $= a^4x^2$. Ergo $x^3a^3 = a^4x^2$. Ergo $xa^3 = a^4$. Ergo $x = a$ quod est absurdum.

Unde alium errorem abservo: NB
x. 2x. 3x. 4x. etc. hoc loco non est β^2x. sed est ipse sector $\dfrac{ax}{2}$. ut ex figura apparet.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Ergo} & x & 2x & 3x & 4x & \text{etc.} \;=\; \dfrac{a^2x}{2}. \\
\text{per} & \beta a & \beta a & \beta a & \beta a & \text{etc.}
\end{array}$$

Nimirum minima de a. semper est u n i t a s cui et applicantur arcus. Ergo cum dicitur $2x$. $3x$. etc. intellige $2ax$. $3ax$.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Iam ergo} & ax & 2ax & 3ax & 4ax & 5ax \\
\text{per} & -\,a & -\,2a & -\,3a & -\,4a & -\,5a \\
\hline
\text{dabit} & a^2x & 4a^2x & 9a^2x & 16a^2x & 25a^2x.
\end{array}$$

Imo unitas non ascribenda, sed subintelligenda, ascribitur in ipsa multiplicatione.

$$\begin{array}{lllllll}
 & x & 2x & 3x & 4x & 5x & = \\
 & a & 2a & 3a & 4a & 5a & \\
 & ax & 4ax & 9ax & 16ax & 25ax & \\
\text{Atqui} & a & 4a & 9a & 16a & \text{etc.} & = \dfrac{\beta^3 a}{3}. \\
\text{Ergo} & ax & 4ax & 9ax & \text{etc.} & & = \dfrac{\beta^3 ax}{[3]}.
\end{array}$$

24 3 *erg. Hrsg.*

Imo $\dfrac{\beta^3 a^2 x}{3} = \dfrac{a^2 x}{3}$. Imo quia nunc in x. ducendum a. unitas ut β^3 respondeant etiam tria axa. habebimus

$$\frac{\beta^3 a^2 x}{3}, \text{ id est } \frac{\beta a \frown \beta a \frown \beta x}{3}. \text{ seu } \frac{a \frown a \frown x}{3} = \frac{a^2 x}{3}. \quad \text{NB.}$$

Nunc ergo tandem prodit aequatio verissima

$$\cancel{\frac{a^2 x}{3}} + \frac{a^2 x}{2} - \cancel{\frac{a^2 x}{3}} = \frac{a^2 x}{2}$$

infallibilis nota veritatis, etsi novi nihil detegat.

Ut arcus in dimidiam distantiam tangentis a centro circuli ductus producit sectorem, ita ductus in dimidiam distantiam tangentis a centro suo producit segmentum. Esto arcus x. distantia tangentis seu radius a. distantia centri arcus a tangente z. erit sector $\dfrac{ax}{2}$ segmentum $\dfrac{xz}{2}$. Ergo ratio sectoris ad segmentum:

$$\frac{\;\dfrac{ax}{2}\;}{\;\dfrac{xz}{2}\;} = \frac{a}{z}.$$

Ergo theorema elegans, ut est distantia centri arcus a tangente, ad radium (seu distantiam centri circuli a tangente), ita est segmentum arcus eiusdem ad suum sectorem.

Hinc illud etiam patet si duae series arithmetice proportionales in se inverse ducantur, productum esse numeri terminorum cubum dimidium demto eorundem tertia parte, seu cubi numerorum partem sextam.

7 in *(1)* distantiam a centro circuli ductus producit duplum sectorem, ita ductus in distantiam tangentis a centro suo producit duplum segmentum *(2)* dimidiam *L* 9 distantia *(1)* tangentis *(2)* centri *L*

At quid si arithmetice proportionales inverse ducantur ut harmonice proportionales:

$$\begin{array}{llllll}
\frac{1}{1} & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
6 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ \hline
\end{array}$$

vel

$$\begin{array}{llllll}
1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{1}{6} \\
6-1 & 6-2 & 6-3 & 6-4 & 6-5 & 6-6 \\ \hline
\frac{6}{1}-1 & \frac{6}{2}-1 & \frac{6}{3}-1 & \frac{6}{4}-1 & \frac{6}{5}-1 & \frac{6}{6}-1 \\
\frac{5}{1} & \frac{4}{2} & \frac{3}{3} & \frac{2}{4} & \frac{1}{5} & 0
\end{array}$$

Hinc apparet summae harmonicae summam $\bigtriangledown^{\text{larem}}$ ab una parte, esse numerum terminorum ductum in planum, quod est numerator communis, ab altera parte esse summam harmonicam ductam in numerum terminorum, demto supra dicto numero terminorum ducto in planum.

Duarum summarum $\bigtriangledown^{\text{larium}}$, ratio haec:

$$\frac{\text{summ.harm.} \frown \text{num.term.} - \text{num.term.} \frown \text{plan.com.}}{\text{num.term.} \frown \text{plan.com.}} = \frac{\text{summ.harm.} - \text{plan.com.}}{\text{plan.com.}}$$

summa triang. = sum. simpl. $\frown$ brach. sum. $\bigtriangledown^{\text{laris}}$.

10–13 *Dazu am Rande* [*sic*]:

$$\begin{array}{lllll}
\frac{10}{1} & \frac{1}{10} & \frac{101}{10} & & \\
\frac{9}{2} \underset{\times}{+} \frac{2}{9} & & \frac{81+2}{9 \frown 2} & \frac{9}{2} & \\
\frac{8}{3} \underset{\times}{+} \frac{3}{8} & & \frac{64+3}{8 \frown 3} & \frac{8}{3} &
\end{array}
\qquad
\begin{array}{llll}
\frac{7}{4} & \frac{4}{7} & \frac{49+4}{4 \frown 7} & \frac{7}{4} \\
\frac{6}{5} & \frac{5}{6} & \frac{36+5}{5 \frown 6} & \frac{6}{5}
\end{array}$$

9 Hinter $\frac{2}{4}$: $-\ 1$ *gestr.* *L* ; unter $\frac{1}{5}$: $1\frac{1}{5} - 1$ *L streicht Hrsg.*; unter $0 : 1 - 1$ *L streicht Hrsg.*
10 f. terminorum *(1)* ductum in se ipsum, *(2)* ductum *L*

---

16 Vgl. dazu Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 2 (*PO* VIII S. 337 f.).

$$\frac{1}{1}+\frac{1}{2}=(\frac{3}{2})+\frac{1}{3}=(\frac{11}{6})+\frac{1}{4}=(\frac{50}{24})+\frac{1}{5}=\frac{274}{120}$$

120		60		40		30		24
	60		20		10		6	
		40		10		4		
			30		6			
				24				

720 360 240 180 124 120

16_3. PLAGULA ו(3)

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 299–300. 1 Bog. 2°. 4 S. — Druck von Teil 2: *LSB* VII,1 N. 35 S. 213–216.
Cc 2, Nr. 547 tlw.

[*Teil 1*]

$$
\begin{array}{cccccc}
A & 1 & & & & \\
B & 1 & & & & \\
 & & \frac{2}{1} & & & \\
C & 1 & & \frac{4}{3} & & \\
D & 2 & & & & \\
 & & \frac{3}{2} & & \frac{32}{27} & \\
 & \frac{1}{3} & & \frac{9}{8} & & \\
 & & \frac{4}{3} & & \frac{135}{128} & \\
 & \frac{1}{4} & & \frac{16}{15} & & \\
 & & \frac{5}{4} & & & \\
 & \frac{1}{5} & & & &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{cccc}
1 & & & \\
 & \frac{1}{2} & & \\
2 & & \frac{3}{4} & \\
 & \frac{2}{3} & & \frac{27}{32} \\
3 & & \frac{8}{9} & \\
 & \frac{3}{4} & & \\
4 & & \frac{15}{16} & \\
 & \frac{4}{5} & & \\
5 & & \frac{24}{25} & \\
 & \frac{5}{6} & & \\
6 & & \frac{35}{36} & \\
 & \frac{6}{7} & & \\
7 & & &
\end{array}
$$

Semper ducitur A in D pro numeratore et B in C pro nominatore. Hinc apparet in serie transversa descendente, numeratores esse continue numeros progressionis alicuius geometricae. Imo non sunt. Manifestum enim est inferiores series transversas descendentes omnes tandem effectus suos miscere primae per consequentiam.

At si sumantur series perpendiculares descendentes patet in prima serie numeratores esse unitates, nominatores, numeros naturales; in secunda numeratores esse naturales, nominatores esse itidem naturales sed unitate minores[;] in tertia numeratores esse quadratos, tam numeratores quam nominatores differre inter se, nominatores a nominatoribus, numeratores a numeratoribus, numeris imparibus deinceps ab unitate[;] in quarta nominatores differunt inter se, ita ut differentia numeratorum differat a differentia nominatorum binario.

Cartesius plus Apollonii mihi habere videtur quam Archimedis, in geometria; et in natura plus Aristotelis quam Democriti.

Ut quod dixi momentum figurae ex distantia minima suspensum, aequari figurae ex distantia sui centri gravitatis suspensae, id ne quis velut somnium repudiet, cum ex puncto nil possit suspendi, et non dentur plana sine crassitie, et lineae sine latitudine, id experimento confirmandi rationem dabo: Esto linea, v. g. ut arcus circuli, cui ostendere volumus aequiponderare segmentum. Suspendatur linea ex centro gravitatis, sed quia segmentum non potest suspendi ex puncto, et contra linea non esse sine crassitie, ideo quanta datur segmento distantia a centro, tanta datur crassities annulo. Sed quia segmentum habet crassitiem et id in linea reparare iam non possumus, sumamus planum v. g. parabolam, et eius momentum, v. g. parallelepipedum ungulae parabolicae aequale. Sed quia momentum non potest suspendi nisi ex linea quadam, detur parabolae ex centro

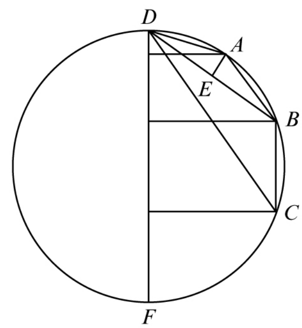
289,6–18 *Nebenrechnungen:*

$\frac{1}{1} \times \frac{1}{2} \quad 2\,[;] \qquad \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \quad \frac{3}{2}\,[;] \qquad \frac{2}{1} \times \frac{3}{2} \quad \frac{4}{3}\,[;] \qquad \frac{3}{2} \times \frac{4}{3} \quad \frac{9}{8}\,[;]$

$$\begin{array}{r} 16 \\ \underline{8} \\ 128 \end{array} \quad \begin{array}{r} 135 \\ \underline{32} \\ 103 \end{array} \quad \begin{array}{r} 128 \\ \underline{27} \\ 101 \end{array}$$

14 dixi: vgl. N. 16_2 S. 277 Z. 2 f.

gravitatis suspensae, tanta crassities, quanta est momenti distantia a centro aequilibrii, et habebitur aequilibrium.



[*Fig. 1*]

Divisa intelligatur peripheria circuli in rectas quotcunque aequales, indefinitas, fient totidem chordae AB. BC. arcubus subtensae, et $\bigtriangledown^{\text{la}}$ sub chorda arcus AB. vel BC. et rectis ex extremo diametri ductis, seu chordis segmentorum DA. DB. vel DB. DC. comprehensa.

Examinemus $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ $\underline{DAB}$. chorda DA. esto a. chorda AB. esto β. chorda DB. esto c. perpendicularis AE. erit: $Rq\, a^2 - \square\, \dfrac{c^2 + a^2 - \beta^2}{2c}$.

Ergo area $\bigtriangledown^{\text{li}}$ erit $Rq \llcorner a^2 - \square\, \dfrac{c^2 + a^2 - \beta^2}{2c} \lrcorner \frown c$. $\square c^2 + a^2 = c^4 + a^4 + 2a^2c^2$.

Iam $\square \llcorner c^2 + a^2, -\beta^2.\ =\ Rq\, \dfrac{c^4 + a^4 + \overset{6}{\cancel{2}}a^2c^2 + \beta^4 - 2c^2\beta^2 - 2a^2\beta^2 + \cancel{4a^2c^2}}{4\cancel{c}^2}$. per c vel $Rq\, c^2$ deleatur c^2 habemus: aream $\bigtriangledown^{\text{li}}$

$$\frac{Rq\, c^4 + a^4 + 6a^2c^2 + \beta^4 - 2c^2\beta^2 - 2a^2\beta^2}{2}.$$

3 [*Fig. 1*] *sowie* Z. 5–8 *Kleinbuchstaben L, vereinheitlicht Hrsg. wegen Folgetext* 5 totidem *(1)* chordae *(2)* latera *(3)* chordae *L*

4–293,13 Im Folgenden versucht Leibniz vergeblich, die Fläche eines Kreissehnendreiecks zu bestimmen. Auch die Berechnung der Sehnen unter Zuhilfenahme eines Satzes aus Fabri (*Synopsis geometrica*, 1669, S. 73; s. a. N. 1 S. 14 f.) schlägt fehl.

Eandem aream habebimus, si multiplicemus β. per intervallum tangentis, a puncto D. quod est $\dfrac{DB\square}{DF}$. seu $\dfrac{c^2}{d}$. Si $DF = d$. fiet

$$\frac{c^2\beta}{\cancel{2}d} = Rq\,c^4 + a^4 + 6a^2c^2 + \beta^4 - 2c^2\beta^2 - 2a^2\beta^2.$$

$$\frac{c^4\beta^2}{d^2} = c^4 + a^4 + 6a^2c^2 + \beta^4 - 2c^2\beta^2 - 2a^2\beta^2.$$

Ergo $\dfrac{c^4\beta^2}{d^2} + 2c^2\beta^2 + 2a^2\beta^2 - \beta^4 = c^4 + a^4 + 6a^2c^2.$

$\xi - 1$
$\xi - 4$
$Rq\,\xi^2 - 9\xi = \text{sinus}$
$Rq\,\xi^2 - 9\xi \quad - \quad Rq\,\xi^2 - 4\xi$

$$\begin{array}{r} \xi^2 - 4\xi \\ \underline{\xi^2 - 9\xi} \\ +\xi^4 - 4\xi^3 - 9\xi^3 + 36\xi^2 \end{array}$$

$$2\xi^2 - \cancel{11\xi} + \xi^4 - 11\xi^3 + \underset{25\xi}{\cancel{36}\xi} + 1. \frown \epsilon^2, \quad Rq \quad = \beta.$$

$$\begin{array}{lcl} & \xi\ \ \epsilon & = d. \\ \xi^2 - 4\xi, +2\epsilon^2, Rq & \ldots\ldots\ldots & = a. \\ \xi^2 - 9\xi, +3\epsilon^2, Rq & \ldots\ldots\ldots & = c. \end{array}$$

sinus toti	applicatae parabolae ad axem		sinus
β	$\beta - 1$	Rq	$\beta^2 - \beta$
β	$\beta - 4$	Rq	$\beta^2 - 4\beta$
β	$\beta - 9$	Rq	$\beta^2 - 9\beta$
β	$\beta - 16$	Rq	$\beta^2 - 16\beta$
β	$\beta - 25$	Rq	$\beta^2 - 25\beta$
β	$\beta - 36$	Rq	$\beta^2 - 36\beta$

2 $a\ \ x\ \ b$ [;] $x^2 = ab$ [;] $x - Rqa$ [*Rechnung bricht ab*]

	10 000		
		100	
$Rq\,10\,000 - 100$	$Rq\ 9\,900$		
		300	$\underline{\beta^2 - \beta}$
$Rq\,10\,000 - 400$	$Rq\ 9\,600$		
		500	$\underline{\beta - x}$
$Rq\,10\,000 - 900$	$Rq\ 9\,100$		
		700	$\beta^2 - 2x\beta + x^2 = \beta$
$Rq\,10\,000 - 1600$	$Rq\ 8\,400$		
		900	
$Rq\,10\,000 - 2500$	$Rq\ 7\,500$		$\dfrac{-2x\beta + x^2}{\beta} = 1$
		1100	
$Rq\,10\,000 - 3600$	$Rq\ 6\,400$		

Memorabile est quod rectam datam exhibere possum cuidam circumferentiae circuli sed cuius radius nondum geometrice datus est aequalem. Ita possum rectam exhibere aequalem peripheriae, quam quadrante circa suum axem [gyrato] centrum gravitatis arcus [eius] describit.

Quadrans agitur circa suum axem. Superficies hemisphaer. $\dfrac{ax}{2}\gamma = x\psi x\delta$. posito $x\psi$ peripheria quam describit centrum gravitatis arcus quadrantis positoque $x\delta$ arcu quadrantis. Ergo $\dfrac{\dfrac{a\cancel{x}\gamma}{2}}{\cancel{x}\delta} = x\psi$. ergo $\dfrac{a\gamma}{2\delta} = x\psi$.

---

3 $\begin{array}{l} \underline{10000 \quad - \quad 100} \\ \underline{100 \qquad\qquad\quad} \\ \qquad\qquad 200 \end{array}$

11+14 $= 1| = \dfrac{2x\beta}{1} \begin{smallmatrix} + \\ \times \end{smallmatrix} \dfrac{x^2}{\beta}$ *(1)* $2x\beta$ *(2)* x = *(3)* x $= 2x^2 + \dfrac{x^3}{\beta}$ *(4)* 2x *gestr.* | Memorabile *L* 14 datam *erg. L* 16 f. quadrante | aut parabola *gestr.* | circa suum axem | gyratis *ändert Hrsg.* | centrum gravitatis arcus | eorum *ändert Hrsg.* | describit *L* 20–294,1 xψ. *(1)* Habemus ergo *(2)* Possumus *L*

Possumus ergo geometrice exhibere rectam aequalem circumferentiae circuli, cuius radius est distantia centri gravitatis arcus circuli, a diametro ad quam arcus terminatur.

[*Teil 2*]

Invenire duos numeros quadratos, quorum differentia sit quadratus datus:

Quadratus datus esto a^2. numerus quaesitus minor x^2. maior: $a^2 + x^2$. Ergo $Rq\, a^2 + x^2 = a$. [*sic!*]

$a - 3[x]$, cuius $\square\ a^2 + 9x^2 - 6ax$. $a^2 = x^2 - z^2$. Ergo $a^2 + z^2 = x^2$. Ergo $a^2 + z^2 + 2az = x^2 + 2az$. Ergo $a + z = Rq\, x^2 + 2az$.

Nota cum non habeantur tot aequationes quot sunt numeri incogniti ideo alterum incognitorum pro arbitrio assumere permissum est. Nam $x^2 = a^2 + z^2$. Sed non habetur aequatio alia pro z. quae ex hac non nascatur. Ergo pro z^2. sumamus b^2. Ut proinde b. sit cognitus, habebimus $x^2 = a^2 + b^2$. Sed quia ex isto non est certum extrahi posse radicem, posset enim esse numerus surdus, ideo facienda est aequatio talis, ut aliquod destruatur, quod ut fieri queat non supponendus est aliquis notus, pro incognito, sed potius in ipsa quaestione aliquid pro lubitu agendum, quando commodum est, quod non minus determinat quaestionem; quasi alia aequatio accessisset.

Quadratus datus esto a^2. quaeruntur duo x^2. et z^2. quorum differentia $= a^2$.

Ergo $a^2 = x^2 - z^2$. Ergo $x^2 = a^2 - z^2$. Sed opus est etiam aequatione pro z^2. hanc ei dabimus pro nostro arbitrio sed aptam ad solutionem reddendam faciliorem, et talem quidem ut vel x^2. vel a^2. elidatur, ergo si $z^2 = a^2 - 3x^2$, elidetur nobis a^2. plane. Ita ergo agendum est, ut partim elidatur, partim relinquatur, quod ut fiat alteri miscendum

4 quadratos *erg.* *L* 7 b *ändert Hrsg.* 12 + b^2. *(1)* Imo male *(2)* Sed *L* 13 radicem, | ut *gestr.* | posset *L* 13 f. aliquod *(1)* incognitorum *(2)* destruatur *L* 15 agendum, *(1)* quod *(1)* quando *L* 16 determinat *(1)* aequationem *(2)* quaestionem; *L* 16 f. accessisset. | Et ideo fiet aequatio: $\mathrm{a}^2 = \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2$. Sumamus iam pro lubitu aliquid = a. quod ex x. a. sit compositum, v. g. $\mathrm{a} = \mathrm{a} - 3\mathrm{x}$. Ergo $\mathrm{a}^2 = \mathrm{a}^2 + 9\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{ax}$. *(1)* ergo $\mathrm{o} = 9\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{ax}$. Ergo $9\mathrm{x}^2 = 6\mathrm{ax}$. $9\mathrm{x} = 6\mathrm{a}$. Ergo $\frac{6\mathrm{a}}{9} = \mathrm{x}$. 16. 4.$\frac{24}{9}$. *(2)* Ergo $\cancel{\mathrm{a}^2} + 9\mathrm{x}^2 - 6\mathrm{ax} = \cancel{\mathrm{a}^2} + \mathrm{x}^2$. *(a)* Iam *(b)* Ergo $9\mathrm{x}^2 - \mathrm{x}^2 - 6\mathrm{ax} = \mathrm{o}$. Ergo $8\mathrm{x}^2 = 6\mathrm{ax}$. Ergo $8\mathrm{x} =$ *gestr.* | Quadratus *L* 19 faciliorem, *(1)* esto ergo $\mathrm{z}^2 = 3\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2$ *(2)* et *L*

17–295,9 Die folgenden Betrachtungen leiden unter Vorzeichen- und Rechenfehlern, obwohl richtige Teilergebnisse auftreten.

est. Id fiet per extractionem, diximus enim $a^2 = x^2 - z^2$. extrahamus radicem, fiet $a = Rq\, x^2 - z^2$. facienda ergo talis natura ipsius z. ut radix sit extrahibilis, ut si $z^2 = 2ax - a^2$. fiet. $Rq\, x^2 - z^2 = Rq\, x^2 - 2ax + a^2$. Ergo $a = x + a$. Ergo $x = o$. Ergo primum si x sit $= o$. res procedit, sed procedet aliter quoque, si $z^2 = 4ax - 4a^2$. ergo $Rq\, x^2 - z^2 = Rq\, x^2 - 4ax + 4a^2 = x - 2a = a$. Ergo $x = a$.

Esto differentia data $a^2 = 4$. huius radix $a = 2$. x. 2. ergo a^2. 4. differentia est inter duos numeros quadratos 4. et o. et z^2 erit o. ut antea a. erat o. et per consequens $z = x$.

$a^2 = x^2 - z^2$. Et $a = Rq\, \llcorner x^2 - z^2 \lrcorner$. Si iam $z^2 = 6ax - 9a^2$. erit $a = x - 3a$. Ergo $x = 4a$.

Iam $a = 2$. $x = 8$.
$a^2 = 4$. $x^2 = 64$. $z^2 = \underbrace{6 \frown 16 - 9 \frown 4}_{60}$

$a^2 \sqcap x^2 = 60$ [*sic!*]

Haec vera quidem, sed necesse erat talem instituere impositionem, ex qua necesse sit ipsum z^2. fieri numerum quadratum, quod ex his $6ax - 9a^2$ non sequitur. Igitur potius resolvendum ad ipsum usque z. eiusque talis assumenda aequatio, ut inde $Rq\, x^2 - z^2$ fiat extrahibilis, ut si z. sit $3a - x$. fiet $z^2 = 9a^2 + x^2 - 6ax$.

Cumque difficile futurum sit praecise reperire, modum, quo extrahibile reddatur, rectius adhibebimus modum quo alterius termini dimensio 2^{da} destruatur.

$a^2 = x^2 - z^2 = \cancel{x^2} - 9a^2 - \cancel{x^2} + 6ax$. Ergo $a^2 = 6ax - 9a^2$. Ergo $10a^2 = 6ax$. Ergo $\dfrac{10a}{6} = x$.

1 $- z^2$. *(1)* Ergo dicemus a = pro lubitu nostro *(2)* Ergo a = *(3)* Sed hoc non necesse, possumus enim z. abicere, cum non habeat peculiarem sibi aequationem iam z $= x^2 - a^2$ substituamus ae *(4)* extrahamus *L* 5 f. = a. *(1)* Ergo si *(2)* Esto *(a)* numerus datus *(b)* differentia *L* 7 f. = x. *(1)* Sed si resolvamus in intima, id est non solum z^2. sed ipsi z. aliqu *(2)* Sed si $z^2 = 18ax - 9a^2$. fiet $a = Rq\, x^2 - 9ax + 3a^2 = x - 3a = a$. Ergo $x = 2a$. $a = 2$. $a^2 = 4$. $x = 4$. $x^2 = 16$. $z^2 =$ *(3)* $a^2 =$ *L*
12 f. = 60 *(1)* Quod, cum debeat *(2)* Haec *L* 14 fieri *(1)* radicem *(2)* numerum *L*
16 fiet *(1)* eius $\square$ *(2)* $z^2 =$ *L* 16 f. 6ax. *(1)* Ergo aequatio: $a^2 = 9a^2 + 2x^2 - 6ax$. Sed ita nulla oritur extrahibilitas, nullum enim quadratum penitus tollitur. *(2)* Sed si sic $3x - a = z$. fiet $z^2 = 9x^2 + a^2 + 6ax$. Ergo $a^2 = x^2 - z^2 =$ *(a)* $x^2 + 9x^2 + a$ *(b)* $x^2 - 9x^2 - a^2$. Ergo aequatio: $a^2 =$ *(3)* Cumque *L*

Esto iam $\quad a = 1. \quad x = \dfrac{10}{6}$

$$a^2 = 1. \quad x^2 = \overset{(10)}{\frac{100}{36}} - \overset{(6)}{\frac{36}{36}} = \overset{(8)}{\frac{64}{36}} \,\Big|\, \frac{8}{6} \,\Big|\, \frac{2}{3}$$

$$a = 2. \quad x = \frac{10}{3}$$

$$a^2 = 4. \quad x^2 = \overset{(10)}{\frac{100}{9}} [-] \overset{(6)}{\frac{36}{9}} [=] \overset{(8)}{\frac{64}{9}}$$

$$a = 2. \quad x = \frac{20}{6}$$

$$a^2 = 4. \quad x^2 = \overset{(20)}{\frac{400}{36}} - \overset{(12)}{\frac{144}{36}} \quad \overset{(16)}{\frac{256}{36}}$$

Hinc patet locum hunc esse quodammodo ad superficiem, si problema hoc modo proponatur: invenire duos numeros quadratos quorum differentia sit quadratus. Primum enim in omnibus datis hoc fieri potest, et adhuc in quolibet dato rursus multis modis.

$$a = 3 \quad x = \frac{30}{6}$$

$$a^2 = 9 \quad x^2 = \overset{(30)}{\frac{900}{36}} - \overset{(18)}{\frac{324}{36}} [=] \overset{(24)}{\frac{576}{36}}$$

Si posuissemus $z = 2a - x$. cuius $\square$ $4a^2 + x^2 - 4ax$. et $a^2 = \cancel{x^2} - 4a^2 - \cancel{x^2} + 4ax$. $5a^2 = 4ax$. Ergo $\dfrac{5a}{4} = x$.

2 f. $\dfrac{2}{3}$ | *(1)* $a^2 +$ *(2)* $x^2 - a^2 =$ *gestr.* | $10 - 6 = 4. \dfrac{10}{4} - \dfrac{6}{6} = \dfrac{4}{6}$. *streicht Hrsg.* | $a = 2$. *L* 4 $-, =$ *erg. Hrsg.* 7 quodammodo *(1)* planum, id est *(2)* ad *L* 9 enim *(1)* inf *(2)* in *L* 11 $=$ *erg. Hrsg.*

Iam $a = 1. \quad x = \frac{5}{4}$

$a^2 = 1. \quad x^2 = \frac{25}{16} - \frac{16}{16} = \frac{9}{16}$

(17) (8) [(15)]

$\frac{17}{8} \quad \frac{289}{64} \quad \frac{64}{64} \quad \frac{225}{64}$

(5) (4) (3) (10) (6) (8) (17) (8) [(15)]

[*Teil 3*]

1		1		27	
	$\frac{1}{2}$		$\frac{2}{3}$		18
$\frac{1}{2}$		$\frac{1}{3}$		9	
	$\frac{1}{4}$				6
$\frac{1}{4}$		$\frac{1}{9}$		3	
	$\frac{1}{8}$				2
$\frac{1}{8}$		$\frac{1}{27}$		1	

$a \qquad Rqqq\,a^{[7]}b \qquad Rqq\,a^3b \qquad Rq\,ab \qquad [b]$

1 2 4 . 16 . . . 256 . . . . [65536]

14 $Rqq\,a^2 \frown ab, = Rqq\,a^3b.$

3+5 (25) *L ändert Hrsg. zweimal* 14 ^{5} *L ändert Hrsg.* 14 b *gestr. L, erg. Hrsg.* 15 14336 *L ändert Hrsg.*

3 Das Lösungstripel ergibt sich bei dem Ansatz $z = 4a - x$ mit $a = 1$.

Quadratura figurae logarithmicae,
vel quod idem est geometrice proportionalium.

Si figurae cuiusdam applicatae ad altitudinem sint geometrice proportionales, eiusdem applicatae ad basin, erunt logarithmice proportionalium complementa.

Figura logarithmica necessario quadrilinea est, seu constat ex tribus rectis, quarum duae parallelae sunt applicatae altitudinis et curva. Ratio est, quia a puncto incipi non potest, media proportionalis intelligi non potest, nisi linea quaedam, quae sit infinite minor recta, et infinite minor puncto, qualis imaginaria est. Ratio applicatarum sibi vicinarum est quidem infinite parva, possis appellare ratiunculam, aliqua tamen. Ratiuncula semper est eadem. Et ideo ratio applicatae maximae ad minimam, aequatur ratiunculae minimae infinities in se ductae, seu toties in se ductae, in quot puncta divisa est altitudo.

Etsi applicatae geometrice proportionales, non differant, nisi rectis infinite parvis, eae tamen rectae infinite parvae, sunt utique, quantitates, etsi earum ratio ad sensibiles infinita sit. Summa omnium differentiarum, est differentia inter maximam et minimam, applicatarum, hoc facile patet: semper enim si sit series quantitatum continue crescentium decrescentiumque, infinita vel finita, summa omnium differentiarum, aequatur differentiae inter maximam et minimam.

Iam in serie geometrice proportionalium continue decrescente manifestum est eam semper rationem esse terminorum et differentiarum, seu eam esse rationem termini primi ad differentiam a secundo, quae est secundi ad differentiam a tertio, quare est ratio summae terminorum ad summam differentiarum, quae est ratio termini primi ad differentiam primam. Iam ratio termini primi ad differentiam primam, hoc loco est quae lineae ad punctum. Iam si lineam dividas per punctum, manet linea, quemadmodum si quid dividas per unitatem, manet quod erat. Est autem punctum ad lineam, ut unitas ad infinitum. Nec interest per quod punctum dividas, si scilicet per ipsam unitatem,

---

6 *Nach* Ratio est *interlinear:* Error, potest infinitae esse longitudinis.

3 *(1)* Geometrice *(2)* Eadem est summa *(3)* Line *(4)* Eiusdem fi *(5)* Si *L* 3 ad altitudinem *erg. L* 5 ex *(1)* quatuor *(2)* tribus *L* 6 parallelae *erg. L* 7 potest, *(1)* nisi inter punctum *(2)* cum inter punctum *(3)* imo videtur posse, nam inter punctum et rectam media proportionalis est eadem recta, *(4)* media *L* 19 decrescente *erg. L*

partem scilicet aequalem basis, an differentiam, prodibit enim alia linea, sed non nisi parte inassignabili differens a producto ex divisione per unitatem expositam. Et hoc loco res manifesta est. Sed accurate demonstranda, manifestum est ipsam maximam applicatarum quatenus figurae compositionem ingreditur, esse rectangulum cuius longitudo maxima applicatarum, latitudo unitas.

Esto latitudo ϵ. longitudo a. erit rectangulum $a\epsilon$. Hoc iam dividendum [per] maximam differentiam, quae esto θ. fiet $\dfrac{a\epsilon}{\theta}$. aio istius θ. divisionem nullius esse momenti, seu $a\epsilon\theta = a\epsilon$ quia θ. est infinite minor ipso ϵ. ergo est infinite minor puncto, seu unitate, quemadmodum ergo si planum multiplicari intelligatur per lineam et dividi per punctum seu lineam inassignabilem, manet solidum, seu factum ex plano in lineam, et similiter si factum ex plano in lineam, multiplicatur per punctum seu lineam inassignabilem, non mutat quantitatem dimensionemve; ita si qua linea ducta in punctum seu lineam inassignabilem, dividatur vel multiplicetur per aliquam dimensionem ipso puncto inferiorem, seu cuius ad punctum ratio s u b i n f i n i t u p l a est, non mutat quantitatem dimensionemque: Sed θ. esse subinfinituplum ipsius ϵ. dupliciter demonstro, primum, ab absurdo, quia alioquin ex rectangulo faceret lineam simplicem, et ideo non posset ex applicatis componi figura logarithmica, quia necesse est eam componi ex rectangulis, deinde a priori, quia differentiarum eadem est ratio quae terminorum, ergo si terminus maximus est subinfinituplus summae terminorum, seu ut linea ad superficiem, etiam differentia maxima erit subinfinitupla summae differentiarum[,] sed haec non satis valida.

Aliter ratiocinandum, hoc loco manifestum est, ut est maxima differentia ad maximum terminum [seu] maximam applicatam demta minima seu summam omnium differentiarum, ita est maximus terminus demto minimo seu summa omnium differentiarum, ad summam terminorum, seu figuram totam. Seu summa omnium differentiarum, vel differentia applicatarum extremarum est media proportionalis inter differentiam applicatarum duarum maximarum, et figuram[,] ergo quadratum differentiae applicatarum extremarum,

3 f. applicatarum | ut 1. *erg. und gestr.* quatenus figurae compositionem ingreditur, *erg.* | esse *(1)* figuram logarithmicam *(2)* rect *(3)* rectangulum *L* 6 per *erg. Hrsg.* 10 seu lineam inassignabilem *erg. L* 12 linea *(1)* mult *(2)* ducta *L* 13 per *(1)* lineam *(2)* aliquam *L* 19 etiam *(1)* terminus *(2)* differentia *L* 20 f. valida. *(1)* Vera dem *(2)* Aliter *L* 21 f. ad *(1)* maximam *(2)* maximum terminum *(3)* maximam applica *(4)* maximum terminum | seu *gestr., erg. Hrsg.* | maximam applicatam | demta minima *erg.* | *(a)* ita est maximus terminus ad *(b)* seu *L* 23 demto minimo *erg. L* 24 f. vel *(1)* terminus maximus *(2)* differentia terminorum extremorum est media proportionalis inter differentiam maximam et summam *(3)* differentia *L*

aequatur rectangulo solido ex figura et differentia duarum applicatarum maximarum, at haec differentia duarum applicatarum maximarum est punctum, ergo factus ex figura et puncto, vel quod idem est figura aequatur quadrato differentiae duorum terminorum extremorum. Q. E. D.

Hinc illud quoque demonstratur nihil referre quae sit altitudo, cui applicentur. Sed hoc videtur absurdum. Et est certe. Sciendum ergo non posse absolute haberi huius figurae quantitatem. Et ratio est, quia revera non complet⟨a⟩, non enim rectangulis, sed lineis constat, et est quidem figura geometrica, sed in cuius naturam aequationemque non ingreditur recta cui applicatur, sed applicatae tantum. Hoc ergo tantum exhiberi potest comparatione figuram logarithmicam aequari quadrato differentiae applicatarum extremarum. Sed ut tamen misceamus et altitudinem, sic opinor agendum est:

Errorem aliquem deprehendo: Fateor, ut est differentia maxima, ad summam omnium differentiarum, seu differentiam terminorum extremorum, ita est terminus maximus ad summam omnium terminorum. Ergo summa terminorum, seu figura aequatur rectangulo sub differentia terminorum extremorum et termini maximi. Notabene, hic multiplicatio intelligenda non ductio figurarum. Ponamus ergo terminum maximum esse βa. minimum, θa. differentia erit $\beta a - \theta a$. differentia duorum terminorum maximorum erit $\beta a - \dfrac{\beta a}{\gamma}$. Erit iam

$$\frac{\gamma\beta a - \beta a}{\gamma}. \quad \beta a - \theta a. \quad \beta a. \quad \text{summa linearum.}$$

---

19 *Daneben am Rande:*
Demonstrandum non difficile, si inter duas datas lineas inveniatur media proportionalis, et inter extremam quamlibet et mediam rursus media proportionalis; has quinque lineas fore continue proportionalis.

10 logarithmicam *(1)* esse ad suam isoparallelam, ut *(2)* aequari *L* 11 f. est: | Quadratum *gestr.* | Errorem *L* 17 θa. *(1)* rectangulum | ex ipsis non est *nicht gestr.* | $\beta\theta a^2$, sed *(2)* differentia *L* 19 $-$ θa. *(1)* x^2. figura *(2)* βa. *(a)* figura x^2. *(b)* summa *L*

---

21 Demonstrandum: s. dazu N. 16_4 Teil 1.

Sed haec proportionalitas est tantum ea inter se iungendo, neque enim facit transire in aliam dimensionem. Ergo sic:

$$\frac{\gamma\beta-\beta}{\gamma} \frown \text{summa lin.} = \beta^2-\theta\beta = x^2.$$

Sed si illam summam linearum in figuram transire volumus, applicanda est ipsis unitas, in quam divisa est linea data: Atque ideo sic concipienda est propositio: numerus unitatum in duabus applicatis extremis, ductus in numerum unitatum maximae, aequatur numero unitatum figurae logarithmicae. Hinc si alia adhibeatur recta, et in eundem ut ante numerum partium dividatur, partes tamen singulae erunt maiores, etsi idem numerus partium prodeat. Unitates autem sunt quadratae ad constituendam figuram: Ergo posita unitate a^2. Ergo figura logarithmica $= \beta^2a^2 - \beta\theta a^2$. Iam ponatur eadem manere recta, at applicatas aliter dividi, nempe in partes quae sint ad unitatem, ut maxima applicata est ad rectam. Unitas erit alia b. pro recta[,] applicata data esto ut ante βa. recta erit βb. applicata minima esto θa. differentia earum $\beta a-\theta a$. ducta in maximam $\beta^2a - \beta\theta a$. ducatur in rectam βb. et per numerum partium eius rursus dividatur, fiet:

$$\frac{\beta^3ab-\beta^2\theta ab}{\beta} = \beta^2ab - \beta\theta ab.$$

seu quod idem est: quia β^2ab. aequatur rectangulo ex recta data βa. in applicatam maximam βb. ducta, et $\beta\theta ab$. aequatur rectangulo ex recta in applicatam minimam ducta. Ideo figura logarithmica aequatur rectangulo sub altitudine et differentia applicatarum extremarum geometrice proportionalium. Quod breviter ostendi poterat, si tantum summae linearum $\beta^2a-\beta\theta a$. addatur unitas rectae, ad quam facienda est applicatio fit $\beta^2ab-\beta\theta ab$. quae alia atque alia pro altitudine variante. Hoc me confuderat, quod unitate eadem assumta in recta et applicatis, hoc non apparebat. Unde apparet aliquando utile esse, dividere omnes lineas datas in partes easdem quantitatis, interdum praestare, eas in eundem partium numerum dividi.

Complementa logarithmorum eandem faciunt summam, sunt enim applicatae eiusdem figurae. Ergo si hoc rectangulum a rectangulo sub altitudine et applicata maxima seu basi auferatur, restabit summa logarithmorum, quae rectangulo

1 proportionalitas | summam collectam *streicht Hrsg.* | est *L* 5 unitas *(1)* figurae datae *(2)*, in *L* 7 adhibeatur *(1)* figura, *(2)* recta, *L* 9 ad constituendam figuram *erg. L* 11 at *(1)* partes *(2)* applicatas *L* 12 b. | pro recta *erg.* | *(1)* recta erit *(a)* unit *(b)* ut ante βa. *(2)* recta data cogitetur esse ξa. *(3)* applicata data *(a)* erit $\beta\theta$. *(b)* esto *L* 19 f. geometrice proportionalium *erg. L* 28 summa *(1)* rectangulorum *(2)* logarithmorum *L*

sub recta et applicata minima aequatur. Differentia inter differentiam applicatarum et applicatam maximam est applicata minima. Sed hinc videtur absurdum sequi, nimirum eandem esse summam logarithmorum, utcunque maximum extremorum varietur, manente eadem recta. Respondeo id non esse absurdum, sed necessarium. Nam si recta eadem manet, et dividitur quoque in easdem partes, manifestum est, eundem esse, qui ante numerum partium, et earum quoque quantitatem. At si dividatur in partes v. g. duplo minores, v. g. quoniam applicata maxima duplo maior, et eam in easdem cum recta partes dividere nobis placet, (etsi numero inaequali) tunc fateor numerum quidem unitatum fieri maiorem, sed non ideo quantitatem figurae, quia ipsae unitates tanto sunt minores quanto numerus maior. Hinc patet numeri unitatum et figurae non confundendas esse rationes.

Imo NB ordinatae ad basin non sunt complementa logarithmorum, sed ipsi logarithmi, figura logarithmica mihi videtur debere esse convexa, quoties applicata minima est minor dimidia maximae, concava, cum maior, sed hoc expendendum.

$$\begin{array}{ccccccc}
1 & & 4 & & 8 & \qquad & \text{non} \\
a & & b & & a+c & & b^2 = a^2 + ac. \\
& \dfrac{b}{a} & & \dfrac{[a+c]}{b} & & & \\
a & & b & & a+c & & \\
& & & & & & \\
& \dfrac{b}{a} & & \dfrac{b}{a} & & & \\
a & & b & & \dfrac{b^2}{a} & &
\end{array}$$

3 utcunque *(1)* duo extrema *(2)* maximum *L* 4 , manente eadem recta *erg. L.* 7 eam *(1)* | eodem *nicht gestr.* | cum recta modo *(2)* in *L* 12–303,5 Imo NB ... rectangulorum. *am Rande erg. L* 13 esse *(1)* concava, quoties *(2)* convexa *L* 17 $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *(1)* $\frac{\mathrm{a+c}}{\mathrm{b}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ *L ändert Hrsg.*

15 non: mit diesem Zusatz deutet Leibniz an, dass das angegebene Zahlentripel gerade kein Beispiel für das Folgende darstellt.

$1 \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{4}$ In his media proportionalis propior maiori. Et tunc figura fit convexa. Res intelligi potest ex prima, si scilicet med. proport. prima vicinior maiori, idem semper eveniet. Demonstrandum.

Imo NB: tota ista quo lineae magis differunt haec rectangula ex ipsis sunt minora ergo et mediae proportionales seu radices eorum rectangulorum.

1		2		3		4		5		6
1		2		4		8		16		32
1		4		12		32		80		192
	3		8		20		48		112	
		5		12		28		64		NB
			7		16		36			
		NB		9		20				
					11					

1		2		4		8		16		32
6		5		4		3		2		1
6		10		16		24		32		32
	4		6		8		8		[0]	

	1		2		4		8		16		32		64		128		256	
	9		8		7		6		5		4		3		2		1	
	9		16		28		48		80		128		192		256		256	
NB		7		12		20		32		48		64		64		[0]		NB

Harum summa ⟨inita⟩ haberi posset centrum gravitatis figurae logarithmicae, ac per consequens solida quae figurae revolutione circa axem basinque fiunt. Innumera de hac figura dici possent, definiri tangentes, inquiri in superficies solidorum revolutione genitorum, in superficierum centra, in centra solidorum, in ipsius curvae quantitatem centrumque. Sed hanc doctissimorum virorum inquisitioni materiam intactam relinquere volui, distentus ipse tot aliis.

De curva inquirendum, chordae sunt radices ex differentiae quadrato addito quadrato unitatis rectae. Iam differentiae sunt in progressione geometrica ut 1. 2. 4. 8. ergo et earum quadrata 1. 4. 16. 64. et termini progressionis quadratorum, sunt ad

9 1 *L ändert Hrsg.* 17 1 *L ändert Hrsg.* 24 f. inquirendum, *(1)* ea fit *(2)* chordae *(a)* fiunt ex differentiae quadrato addito quadrato unitatis rectae fiunt ex 1 + 1. 4 + *(b)* sunt radices ex ... rectae |Rq 1 + 1. 4 + *gestr.*|. Iam *L* 25 progressione *(1)* quadrata ergo e *(2)* geometrica *L*

respondentes terminorum, ut terminus minimus est ad suum quadratum, ergo per minimi termini numerum multiplicari debet summa terminorum, ut det summam quadratorum. Sed si addatur semper aliquid, v. g. unitas, ad quadrata ista: $1 + 1$. $4 + 1$. $16 + 1$. $64 + 1$. horum radices summare utique difficile, non minus quam tetragonismus.

Caeterum ex his suppositis iam habebimus perfectam et absolutam hyperbolae quadraturam. Nam Gregorius a S. Vincentio ostendit ungulam quandam componi ex planis quae sunt ut logarithmi arithmetice proportionalium, Wallisius ostendit *Trans.* 38. num. 758, eius ungulae dimensionem a plani hyperbolae cognitione pendere. Hac ergo ungulae dimensione aliunde reperta, habebitur et plani seu hyperbolae.

16_4. PLAGULAE ℸ(4) ET ℸ(5)

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 301–304. 2 Bog. 2°. 7 1/2 S. Bogenmarkierung ℸ(4), ℸ(5). Kustoden für den Bogenwechsel (nach S. 317 Z. 4), Leitkustode auf Bl. 304 v° für den Übergang zu N. 17. Am Schluss des Stückes isolierte Figur (= N. 17 Fig. 1a). — Druck von Teil 1: *LSB* VII, 1 N. 114 S. 705–708.
Cc 2, Nr. 547 tlw.

[*Teil 1*]

$a. d. c. e. b.$

Si sit $c.$ media proportionalis inter $a.$ et $b.$ et $d.$ inter $a.$ et $c.$ et $e.$ inter $c.$ et $b.$ quaerendum an necesse sit, omnes $a. d. c. e. b.$ esse continue proportionales. Nam si [$c.$] est media proportionalis inter $a.$ et $b.$ ergo $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$. Iam si $d.$ media proportionalis inter $a.$ et $c.$ ergo $\frac{a}{d} = \frac{d}{c}$. denique $\frac{c}{e} = \frac{e}{b}$. Restat [ut] demonstremus $\frac{d}{c} = \frac{c}{e} = \frac{e}{b}$. Nam $\frac{a}{c} = \frac{c}{b}$.

4 quam *(1)* circuli quadratura *(2)* tetragonismus *L* 5 suppositis *erg. L.* 7 f. Trans. 38. num. 758 *erg. L* 19 c. *erg. Hrsg.* 21 denique $\frac{c}{e} = \frac{e}{b}$. *erg. L* 21 ut *erg. Hrsg.*

7 Wallisius ostendit: *Philosophical Transactions* Bd III N. 38 vom 17./27. Aug. 1668, S. 758. Der Hinweis auf Gregorius a S. Vincentio findet sich bereits dort.

ergo $\left\{\begin{array}{l} a = \boxed{\dfrac{c^2}{b}} \\ \\ a = \boxed{\dfrac{d^2}{c}} \end{array}\right\}$ Idem $\dfrac{a}{d} = \dfrac{d}{c}$. ergo $a = \dfrac{d^2}{c}$. Porro $d = \boxed{\dfrac{ca}{d}}$. Ergo $d^2 = ca$. Item quia $\dfrac{c^2}{b} = \dfrac{d^2}{c}$. ergo $\dfrac{c^3}{b} = d^2$. ergo $\dfrac{c^3}{bd} = d$.

Iam c. quoque investigemus: $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{b}$. ergo $\boxed{\dfrac{ab}{c}} = c$. Item $\dfrac{a}{d} = \dfrac{d}{c}$. ergo $ca = d^2$. ergo $c = \boxed{\dfrac{d^2}{a}}$. Item $\dfrac{c^2}{b} = \dfrac{d^2}{c}$. ergo $c^3 = d^2b$. ergo $c = \dfrac{d^2b}{c^2}$. item quia $\dfrac{ca}{d} = \dfrac{c^3}{bd}$. ergo $ca = \dfrac{c^3}{b}$. ergo $c = \dfrac{c^3}{ab}$. Iam $\dfrac{c}{e} = \dfrac{e}{b}$. ergo $c = \boxed{\dfrac{e^2}{b}}$. $e = \boxed{\dfrac{bc}{e}}$.

Quod attinet b. quia $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{b}$. ergo $\dfrac{ba}{c} = c$. ergo $b = \boxed{\dfrac{c^2}{a}}$. Item quia $\dfrac{c}{e} = \dfrac{e}{b}$. ideo $bc = e^2$. et $b = \boxed{\dfrac{e^2}{c}}$.

$$\begin{array}{llll} a = \boxed{\dfrac{c^2}{b}} = \boxed{\dfrac{d^2}{c}} & & d = \boxed{\dfrac{ca}{d}} = \boxed{\dfrac{c^3}{bd}} \\ c = \boxed{\dfrac{ab}{c}} = \boxed{\dfrac{d^2}{a}} = \dfrac{d^2b}{c^2} = \dfrac{c^3}{ab} = \boxed{\dfrac{e^2}{b}} \\ e = \boxed{\dfrac{bc}{e}} & & b = \boxed{\dfrac{c^2}{a}} = \boxed{\dfrac{e^2}{c}} \end{array}$$

Ex tot a e q u a t i o n i b u s , tres primae sunt datae seu fundamentales $\dfrac{a}{c} = \dfrac{c}{b}$. item $\dfrac{a}{d} = \dfrac{d}{c}$. ac denique $\dfrac{c}{e} = \dfrac{e}{b}$. Ex his eruuntur definitiones terminorum datorum, et cuilibet

1 ca. *(1)* Ergo *(2)* Ergo cum a. sit $= \dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{c}}$. erit a $= \dfrac{\mathrm{ca}}{\mathrm{c}}$. *(3)* Item $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{c}}{\mathrm{b}}$. ergo *(4)* Item *L* 4 $\dfrac{\mathrm{d}^2\mathrm{b}}{\mathrm{c}^2}$. | et ca. *streicht Hrsg.* | item *L* 5 c $= \boxed{\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{b}}}$. | denique *gestr.* | e = *L* 11 a e q u a t i o n i b u s , | quarum *gestr.* | tres *L*

termino tot sunt concedendae d e f i n i t i o n e s p r i m a r i a e , quot sunt definitiones fundamentales, quas ingreditur.

His positis, iam conemur demonstrare $\frac{d}{c} = \frac{c}{e}$. quod ita tentandum, cum c. sit in utraque aequationis demonstrandae, parte, pro ipso c. duae eius substituendae sunt definitiones, quibus scilicet d. atque e. continetur, nempe $\frac{d^2}{a}$ et $\frac{e^2}{b}$. fient aequationes $\dfrac{d}{\dfrac{d^2}{a}}$ = etc. Sed et tentabimus quid fiat, substitutis definitionibus ipsius d. vel e. vel ut compendiosius procedamus, supponamus hanc propositionem esse veram $\frac{d}{c} = \frac{c}{e}$. ergo $d = \frac{c^2}{e}$. ergo $ed = c^2$. Iam $c^2 = ab = \frac{d^2a}{c} = \frac{d^2b}{c} = \frac{e^2a}{c}$. At $d = \frac{c^3}{bd}$. at pro b. substituamus $\frac{e^2}{c}$. ergo $d = \dfrac{c^3}{d\dfrac{e^2}{c}}$. ergo $d^2 = \dfrac{c^3}{\dfrac{e^2}{c}}$. ergo $d^2 = \frac{c^4}{e^2}$. ergo $d = \frac{c^2}{e}$. Quod erat demonstrandum.

Demonstrandum opinor, idem fieri, et si tres proportionales interponantur.

Ex his exemplis discimus praeclaram methodum demonstrandi theorema datum, qualem legere me non memini. Nimirum, quemadmodum in Algebra problema ponitur factum, ita hoc loco theorema sumendum est esse verum, seu demonstratum. Ita habemus aequationem $ed = c^2$. quam ut probemus, verane sit, ex definitionibus seu aequationibus elementaribus, tales, formemus, literarum datarum, seu elementorum, $d.\,e.\,c.$ in quas nulli alii termini ingrediantur quam $d.\,e.\,c.$ quod facile fieri potest, substituendo

---

17 Eadem methodo puto procedi posse in solutione problematum.

3 $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{e}}$. *(1)* Et *(2)* quod *L* 4 utraque *(1)* defini *(2)* aequationis *L* 8 $\frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{e}}$. *(1)* Iam *(2)* ergo *L*
11 Demonstrandum ... interponantur. *erg. L* 14 demonstratum. *(1)* Denique *(2)* Dein *(3)* Ita *L*
15 sit, *(1)* ex *(2)* caeteras *(3)* ex *(a)* caete *(b)* definitionibus *L* 16 formemus, *(1)* quas non ingredian *(2)* literarum *L*

---

8 Das Glied $\frac{d^2a}{c}$ der Gleichungskette ist gleich a^2, es wird aber von Leibniz nicht weiter verwendet.

elementis aliis nihil ad rem pertinens habentibus, eorum definitiones, sed eas, tantum, quibus non nisi termini propositi continentur. Ita ex aequationibus elementalibus, fecimus definitiones accommodatas, ut e l e m e n t a l i s est ista: $d = \frac{c^3}{d \frown b}$, ex qua faciemus a c c o m m o d a t a m , pro b. substituendo eius definitionem sed eam qua non nisi e. et c. continentur, qualis est $\frac{e^2}{c}$. fit ergo definitio accommodata $d = \frac{c^3}{d \frown \frac{e^2}{c}}$. Unde fit $d^2 = \frac{c^3}{\frac{e^2}{c}} = \frac{c^4}{e^2}$. Ergo $d = \frac{c^2}{e}$. Hanc methodum nullum theorema effugere potest, quod d e m o n s t r a n d u m proponitur.

Sed omnium difficillima artis analyticae pars est, i n v e n t i o theorematum, longe profecto difficilior quam solutio problematum. Ita enim exhibentur modi optimi, solvendi problemata. Et fassus est ipse Cartesius, analysin suam eo non pertingere, quod et annotat Schotenius difficile esse ista divinare, modus scilicet solvendi optimos. Et ratio est quia opus foret instituere mille combinationes frustraneas, antequam detegatur una commoda et brevis. Huic ergo arti subsidia paranda sunt. Vide quae Schotenius in notis ad Geom. Cartesii, obiter fatetur in solutione problematis a quodam Persyn arithmetico ipsi

---

3 Nota cum haec $d = \frac{c^3}{d \frown b}$. non sit elementalis, fit statim ex elementali $d = \frac{ca}{d}$. si pro a. substituatur eius definitio elementalis $\frac{c^2}{b}$. ita enim fit $\frac{c^3}{db}$.

12 *In Höhe von Z. 12*: Tentanda eiusdem demonstratio, si duae mediae proportionales semper interponantur, sed forte tunc non est verum.

2 ex *(1)* de *(2)* aequationibus *L* 2 f. fecimus *(1)* aequatio *(2)* definitiones accommodatas, *(a)* qualis est ista *(b)* ut *L* 9 problematum. *(1)* Est *(2)* Ita *L* 12 f. una *(1)* vera *(2)* commoda *L* 14 a *(1)* Domino *(2)* quodam *L*

10–308,1 Cartesius, Schotenius: Wahrscheinlich spielt Leibniz auf DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, S. 83 und SCHOOTEN, *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*, *DGS* I, S. 319 f. bzw. 222 an.

propositi. Quare iniuria ipse Schotenius aliique doctissimi viri, scriptores theorematum contemnunt, cum theoremata, quae scilicet res maxime dissitas inter se harmonia quadam ligant, praeclara sint compendia rationis humanae, sine quibus, in omni solutione problematis cuiuscunque omnia ab integro ordienda forent. Haec ergo theoremata in aerarium publicum relata exstare, interest generis humani, ne de integro semper iteratione laboris opus sit. V. g. nisi extarent divina illa theoremata de centro gravitatis, tot praeclaras quadraturas, fortasse non invenissemus. Adde si theoremata quaedam alicui in mentem venere, fortasse aliquot secula abitura, antequam alius in eadem incidat. Quoniam analysis non statim offert optimas methodos; nec facile quisquam sibi impositum sit omnia tentandi laborem. Theorematum inventio est genus quoddam experimenti rationalis. Et inprimis in numeris inductione inveniuntur, demonstrationeque postea confirmantur.

[*Teil 2*]

[*Es folgt Fig. 1 auf S. 309.*]

Esto figurae proportionum seu logarithmicae $ABDEC$. altitudo AB. extremae proportionales AC. BD. Ipsa AB. divisa sit in partes aequales quotcunque (5), ex quibus mediae proportionales indefinitae, inter se parallelae, in easdem partes eductae intelligantur DEC. Harum partium inassignabilium una B.10 appelletur $\aleph$. numerus earum θ.(5) ipsa recta $\underline{\underline{AB \text{ erit} = \theta\aleph.}}$ (5$\aleph$). Minima proportionalium extremarum BD. dividatur

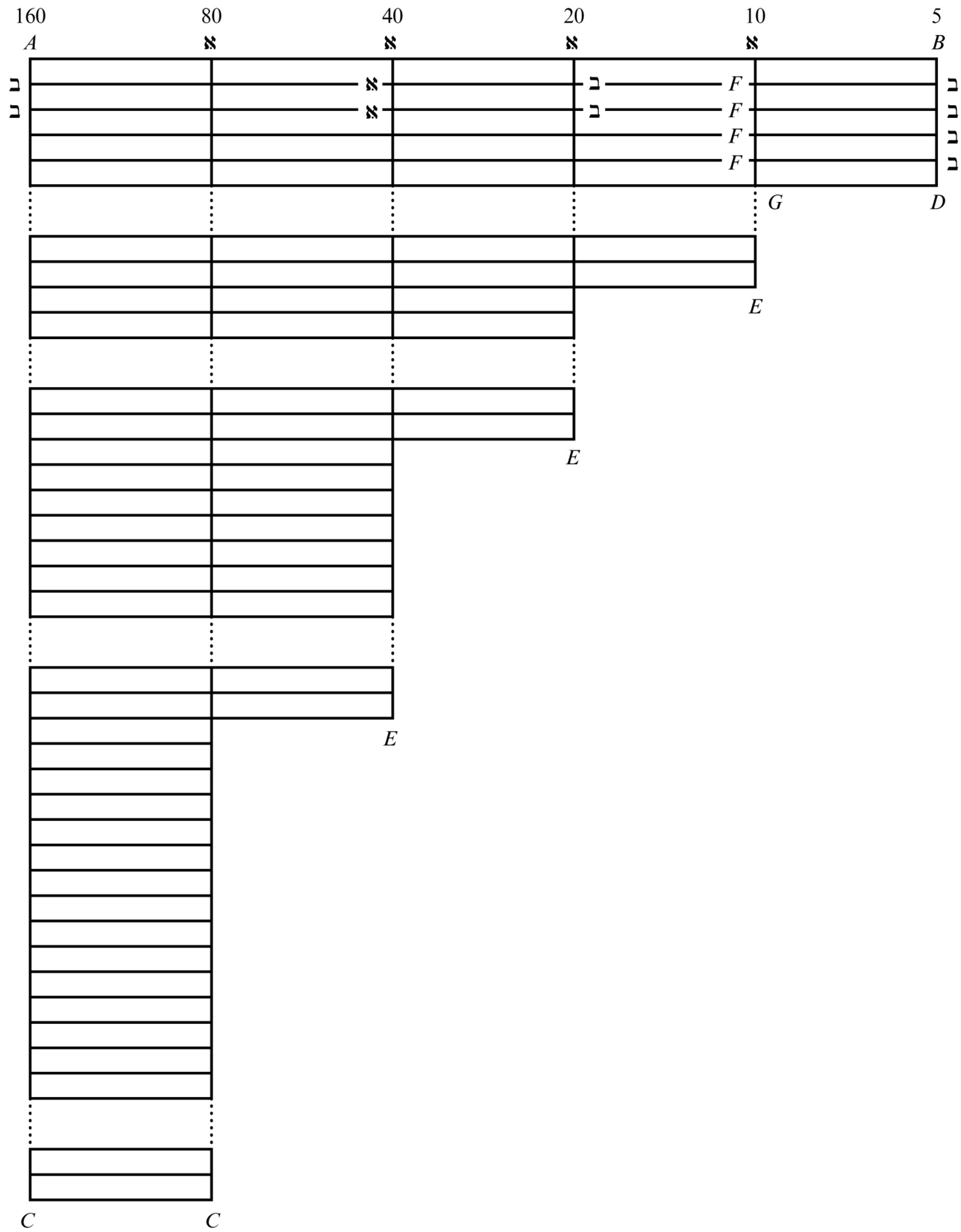
---

13 *Zu* [*Fig. 1*]:
Frustra hic quaesivi dimensionem figurae logarithmicae. Sed ea nunc perfacile habetur, quia ordinatarum eius seu logarithmorum differentiae sunt progressionis harmonicae; quarum momentum haberi potest. Momentum autem differentiarum dat summam figurae.

2 scilicet | brevibus *gestr.* | res *L* 4 ergo *(1)* problemata *(2)* theoremata *L* 6 tot *(1)* alias *(2)* praeclaras *L* 8 secula *(1)* abire, *(2)* abitura, *L* 14 Esto *(1)* fi *(2)* altitudo figurae proportionum AB. *(3)* figurae | proportionum seu *erg.* | logarithmicae ... AB. *(a)* applicatae *(b)* extremae *L* 16 in easdem partes *erg.* *L*

---

13 [*Fig. 1*]: Leibniz hat in der Handschrift sämtliche Elemente gezeichnet. Die Figur wurde aus Gründen der Übersichtlichkeit entsprechend verkürzt.



[*Fig. 1, Blindzeichnung*]

itidem in partes aequales infinitas $B\beth$., ea lege ut pars aliquota inassignabilis ipsius BD. quae esto $\beth$. sit ad aliquotam inassignabilem ipsius AB. nempe $\aleph$. ut recta tota BD. est ad rectam totam AB. ergo numerus partium inassignabilium erit aequalis utrobique θ.(5) et $\underline{\underline{\text{ipsa } BD = \theta(5)a.}}$ Maxima autem extremarum divisa sit in partes inassignabiles $\beth$. aequales partibus inassignabilibus ipsius BD., et per consequens numerus partium erit inaequalis, id est ut ipsae rectae, ponatur recta AC. esse ad rectam BD. ut ξ ad θ. erit numerus partium rectae $AC = \xi$.(160) et ipsa $\underline{\underline{\text{recta } AC = \xi a.}}$(160$a$). Quod si omnes intermediae proportionales, dividantur in infinita $\beth$. seu partes inassignabiles aequales inassignabilibus extremarum, numerus partium in qualibet linea, erit ad numerum partium aliarum linearum ut linea ipsa est ad alias lineas; ac proinde ut lineae, ita et numeri partium, erunt continue proportionales (5. 10. 20. 40. 80. 160.). Porro divisa qualibet proportionalium in infinita $\beth$. ex punctis divisionis ducantur rectae altitudini parallelae usque ad proportionalem proximam. Manifestum est figuram totam $ABDEC$. dividi in infinita rectangula aequalia et similia $\aleph\beth$., eorumque numerum (315) esse aequalem, summae omnium numerorum omnium proportionalium $(5 + 10 + 20 + 40 + 80 + 160)$, qui si iniri possit, habebimus aream figurae.

Haec ex ipsa figura ad oculum apparent. Nam cum duae proximae proportionales ut BD. et $\aleph E$. sint inter se parallelae, earum intervalla seu rectae altitudini parallelae, eas iungentes $\beth F$. aequabuntur ipsi $B\aleph = \aleph$. seu portioni inter eas rectas in ipsa altitudine interceptae, rectangula ergo exigua inter se aequalia (cum latera homologa sint aequalia et parallela) ut $\beth B\aleph F$, cum eorum altitudo sit $B\aleph = \aleph$. basis $B\beth = \beth$. erunt $\aleph\beth$. Tot autem manifestum est, rectangula $\aleph\beth$. ad quamlibet proportionalium constitui, modo ex ea rectae altitudini parallelae intelligantur duci ad proxime maiorem, quot sunt in ipsa partes $\beth$. id est quot sunt unitates in numero eius proportionalis, ac proinde tot esse rectangula in universum quot in summa omnium numerorum sunt unitates. Porro cum numeri isti sint termini progressionis geometricae, summam eorum ita inibimus, ut aliarum serierum geometricarum solemus.

2 f. tota *und* totam *erg.* *L* 9 erit *(1)* ad aliarum linearum ut lineae ipsae sunt *(2)* ad *L* 13 ad *(1)* maximam proportionalium *(2)* proportionalem *(a)* maiorem sequent *(b)* proximam *L* 14 aequalia et similia *erg.* *L* 17 apparent *(1)* , ut non sit opus verba perdere in re manifesta. Sed ne qui *(2)*. Nam *(a)* distantia *(b)* cum *L* 18 earum *(1)* distantia *(2)* intervalla seu rectae *(a)* basi *(b)* altitudini *L* 20 aequalia *(1)* et similia *(2)* (cum *L*

Nimirum constat in omni progressione geometrica differentias terminorum, esse terminos, progressionis geometrice eiusdem. Quia si a proportionalibus auferas proportionalia, residua sunt proportionalia:

5 /	10	20	40	80	160	vel	3 /	9	27	81	243
	5	10	20	40	80			6	18	54	162

Constat etiam si duae sint series progressionis geometricae eiusdem, aequali utrobique numero terminorum summas harum duarum serierum, esse inter se, ut terminos ex diversis seriebus, ordine sibi respondentes ac proinde ut est maximus ad maximum, sive, ut est minimus ad minimum. Cumque series aliqua geometrica data, et series differentiarum eius, sint progressionis geometricae eiusdem, futurum est, abiecto ex serie data, termino minimo, ut tam series data terminorum, quam series differentiarum, sint quemadmodum eiusdem progressionis, ita et numero terminorum aequales. Hinc ut est maxima differentia (162) ad maximum terminum (243), vel minima differentia (6) ad pene minimum antea, nunc minimo (3) abiecto minimum terminum (9) ita erit summa differentiarum (6 + 18 + 54 + 162) ad summam terminorum datam minimo demto (9. 27. 81. 243.). Superest nunc ut summam differentiarum inveniamus. Iam constat in serie continue crescente vel decrescrente, quocunque genere progressionis (modo scilicet termini semper crescant, aut semper decrescant, non: modo crescant modo decrescant) summam differentiarum inter duos quoscunque terminos interceptarum, aequari differentiae horum duorum terminorum, ac proinde summam omnium differentiarum totius progressionis continue crescentis aut decrescentis aequari differentiae inter terminum maximum et minimum, quare et summam differentiarum progressionis geometricae datae, aequari differentiae inter ex-

1 geometrica | continue decrescente *gestr.* | differentias *L* 15 datam *erg. L*

tremos proportionales. ($6 + 18 + 54 + 162 = 243 - 3 = 240$). Hac ergo differentiarum summa inventa, summam terminorum inire licebit ex dictis, si dicamus:

ut est differentia maxima ad $\left\{\begin{array}{l}\text{summam differentiarum}\\ \text{differentiam extremarum proportionalium}\end{array}\right.$

ita esse terminum maximum ad summam terminorum

vel: ut est differentia minima ad $\left\{\begin{array}{l}\text{summam differentiarum}\\ \text{differentiam extremarum proportionalium}\end{array}\right.$

ita esse terminum minimum [*Text bricht ab*]

Quare: ducta $\begin{array}{l}\text{differentia extremarum}\\ \text{summa differentiarum}\end{array}$ in terminum maximum, factoque diviso per differentiam maximam, prodibit summa terminorum[;]

ducta $\begin{array}{l}\text{differentia extremarum}\\ \text{summa differentiarum}\end{array}$ in terminum minimum, factoque diviso per differentiam minimam, prodibit summa terminorum[;]

ducta $\begin{array}{l}\text{differentia extremarum}\\ \text{summa differentiarum}\end{array}$ in terminum alium quendam, factoque diviso per differentiam ei respondentem, prodibit summa terminorum.

1+313,1 *Nebenrechnungen:*

6		
18	$\cancel{3}$	240
54	$\cancel{1}\cancel{9}\cancel{1}$	$\underline{9}$
$\underline{162}$	$\cancel{2}\cancel{0}\cancel{7}$	2160
240	$\cancel{5}\cancel{8}\cancel{3}\cancel{2}\cancel{0}\,\cancel{\int}\,360$	
$\underline{243}$	$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{2}\cancel{2}\cancel{2}$	$\cancel{3}$
72	$\cancel{1}\cancel{6}\cancel{6}$	$\cancel{2}\cancel{1}\cancel{6}\cancel{0}\,\cancel{\int}\,360$
96	$\cancel{1}$	$\cancel{6}\cancel{6}\cancel{6}$
$\underline{48}$		
58320		

---

6 ita esse: Leibniz hat hier gemerkt, dass seine Formulierung unrichtig wird. Er hat daher den Satz nicht beendet und nachträglich das erste Glied der Reihen in S. 311 Z. 4 durch einen Schrägstrich von den übrigen abgetrennt.

$240 \frown 243 = 58320. \smile 162 = 360.$ vel $240 \frown 9 = 2160. \smile 6 = 360.$

Sed hoc ad infinitum translato ubi differentia inter duos quosdam terminos proximos, est magnitudo inassignabilis, quaeque proinde non dividit, oritur difficultas ingens. Nam summa differentiarum in terminum maximum ducta, fit utique superficies (cum duarum linearum numeri, qui puncta eorum seu quantitates inassignabiles designant, in se invicem ducantur) quae divisa per numerum differentiae, seu lineae qualibet assignabili minoris, non videtur minui posse, manet ergo qualis erat. Ergo summa omnium rectangulorum $\aleph\beth$. aequabitur numero $\xi - \theta$. differentiae extremarum proportionalium in ξ. numerum extremae maximae ducto ergo ea summa erit $\xi^2 - \xi\theta$. at eodem iure contrarium, aut aliud quodvis concluseris. Nam etiam summa differentiarum $\xi - \theta$. in terminum minimum θ. ducta, vel in alium intermedium quemcunque ψ. fiet $\xi\theta - \theta^2$. vel $\xi\psi - \psi^2$. productoque diviso per differentiam minimam, vel aliam quamcunque termino respondentem[,] ideo cum ea differentia sit minor assignabili quavis, manebit idem quod erat, ergo summae quaesitae[,] ac proinde inter se aequabuntur $\xi^2 - \xi\theta = \xi\theta - \theta^2 = \xi\psi - \psi^2$. quod est absurdum, nam omnibus his quantitatibus, aequalibus, per eandem $\xi - \theta$. divisis producta quoque θ. vel ξ. vel ψ. necesse foret aequalia esse quod est absurdum. Fateor ingenue me biduo integro in hac difficultate haesisse, obstructo undique exitu, cum et nihil falsi assumtum videretur, et conclusionem absurdam esse constaret. Cum ecce venit in mentem, ulterius procedere resolvendo, ut quantum res pateretur eodem omnia nomine constarent. Quare cum agnoscerem omnes terminos posse intelligi productos ex minimo per multiplicationem, ex maximo per divisionem; et eodem modo quo factus est terminus ex maximo minimove, etiam differentiam ei respondentem, ex maximo minimove factam esse constitui terminos pariter differentiasque omnes per minimum terminum minimamve differentiam denominare, quare, cum terminus minimus, sit θ. placeat alium quemcunque, v. g. maximum appellare $\beta\theta$. ut β. scilicet sit ratio eius ad θ. ergo $\underline{\underline{\xi = \beta\theta.}}$ eodem modo, si terminus sit ψ. ratione eius ad θ. posita γ. erit $\underline{\underline{\psi = \gamma\theta.}}$ Eodem modo differentia minima,

1 f. 360. *(1)* Quare ducta $\xi - \theta$ in $\xi = \xi^2 - \xi\theta$. factoque diviso *(2)* Porro terminus maximus est ad differentiam maximam, ut minimus ad minimam, $\theta = \xi\theta - \theta^2$. et alius quivis, ad ei respondentem, quare et summa terminorum | (demto minimo) *erg.* | erit ad summam $\psi = \xi\psi -$ *(a)* $\psi\theta$ *(b)* ψ^2. differentiarum, ut differentia maxima ad terminum maximum. *(3)* Sed *L* 4 ducta, *(1)* factoque per *(2)* fit utique *(a)* figura *(b)* superficies *L* 9 f. contrarium | imo *erg. und gestr.* aut aliud quodvis *erg.* | , concluseris *L* 12 f. termino respondentem *erg. L* 20 intelligi *(1)* factos *(2)* productos *L*

posita $\frac{\theta}{\text{infinit.}}$. maxima erit $\frac{\beta\theta}{\text{infin.}}$. et differentia termino ψ. respondens erit $\frac{\gamma\theta}{\text{infin.}}$. His positis operationem supra tam infausto cum successu tentatam redintegremus.

Ducatur summa differentiarum $\xi - \theta$. in terminum minimum θ. producto $\xi\theta - \theta^2$. diviso per differentiam minimam $\frac{\theta}{\text{infinit.}}$. prodibit summa terminorum: $\dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\frac{\theta}{\text{infin.}}}$.

Ducatur summa differentiarum $\xi - \theta$. in terminum maximum $\beta\theta$. producto $\xi\beta\theta - \beta\theta^2$. diviso per differentiam maximam $\frac{\beta\theta}{\text{inf.}}$. prodibit summa terminorum: $\dfrac{\xi\cancel{\beta}\theta - \cancel{\beta}\theta^2}{\frac{\cancel{\beta}\theta}{\text{inf.}}} = \dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\frac{\theta}{\text{inf.}}}$.

Ducatur summa differentiarum $\xi - \theta$. in terminum quemlibet $\gamma\theta$. producto $\xi\gamma\theta - \gamma\theta^2$. diviso per differentiam respondentem $\frac{\gamma\theta}{\text{inf.}}$. prodibit summa terminorum: $\dfrac{\xi\cancel{\gamma}\theta - \cancel{\gamma}\theta^2}{\frac{\cancel{\gamma}\theta}{\text{inf.}}} = \dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\frac{\theta}{\text{inf.}}}$. Vides quemcunque terminum assumas, productum; summam nempe terminorum, seu omnium rectangulorum, esse eundem, ac proinde in obiectione falso assumtum fuisse assignabile, divisione per inassignabile seu subinfinituplum plus quam uno gradu inferius, ut superficiem divisione per punctum, seu lineam inassignabilem minui non posse, quod verum est si utrumque sit purum, sed si ambo vel divisor saltem sit aliquo numero, ut hoc loco θ. est numero seu ratione β. vel γ. affectus, tunc subinfinituplum dividere potest ac minuere infinituplum, etsi enim ipsum illud subinfinituplum non dividat, tamen numerus ille quo multiplicatus est divisor, non ideo minus aget partes suas, dividetque. Perinde enim est, ac si numerus ille solus omisso subinfinituplo, divisor esset. Revera enim subinfinituplum tale salvis omnibus omitti potest. Exempli causa si quantitas infinita dividenda sit per [finitam] quandam triplicatam[:]

$$\frac{\text{infinitum datum}}{3 \cdot \text{finit. dat.}}, \text{ omisso finito, restabit } \frac{\text{infinit. dat.}}{3}$$

10 f. fuisse *(1)* finitum *(2)* assignabile *L* 11 f. plus quam ... inassignabilem *erg. L* 14 numero seu ratione *erg. L* 19 infinitam *L ändert Hrsg.*

ac proinde si infinitum intelligatur esse linea, finitum esse punctum, fiet

$$\frac{\text{linea data}}{3 \cdot \text{punct.}} = \frac{\text{lin.}}{3}.\ \text{id est tertia lineae datae pars.}$$

Idque tunc multo maxime necessarium est, si dividendus pariter et divisor affecti sint, ut $\dfrac{6\,\text{lin.}}{3 \cdot \text{punct.}} = \dfrac{2\,\text{lin.}}{1}$. Quare et $\dfrac{3\,\text{lin.}}{3 \cdot \text{punct.}} =$ linea data.

Eodem modo:

$$\frac{\cancel{\gamma} \frown \text{superficies data}}{\cancel{\gamma} \frown \text{linea inassignabilis}} = \frac{\text{superficies data}}{\text{linea inassignabilis}} = \text{superficies data.}$$

Idque hoc loco paulo ante nobis usu venisse, in γ. vel β. in divisore pariter ac diviso deletis patet. Ut appareat quanti sint momenti profundiores istae de infinito et inassignabilibus contemplationes, quae quibusdam talium inexpertis, nugae videntur, cum tamen in iis abditissima contineantur mysteria essentiae rerum.

Ostensum est ergo summam terminorum progressionis nostrae, seu numerum omnium rectangulorum esse: $\dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\dfrac{\theta}{\text{infin.}}}$. Sed dividendus hoc loco est quantitas quae est ad divisorem, ut superficies ad punctum, sive lineam inassignabilem, quia $\xi - \theta$. numerus punctorum (seu rectangulorum sub lateribus inassignabilibus) in una linea, differentia nempe inter applicatam maximam AC. et minimam BD; ductus in θ. numerum punctorum in alia linea BD. comprehensorum, facit utique numerum eorundem punctorum sive rectangulorum in tota quadam superficie comprehensorum, sive $\xi\theta - \theta^2$. hoc loco dividendum. Divisor autem $\dfrac{\theta}{\text{infin.}}$ est differentia inter duos terminos minimos seu duas applicatas minimas sibi immediate vicinas, seu numerus punctorum vel rectangulorum, integrorum aut fractorum in EG. differentia inter duos terminos minimos BD. et $\aleph E$. contentorum.

Hunc divisorem crederet aliquis tuto statim abici posse, cum superficiem per lineam inassignabilem dividere velle, videatur esse nihil agere, id est dividendum relinquere qualis

8 f. et inassignabilibus *erg.* *L* 11 f. ergo *(1)* summam *(2)* numerum *(3)* | summam ... numerum *erg.* | omnium *L* 13 f. numerus *(1)* unitatum *(2)* punctorum *L* 14 rectangulorum *(1)* inassignabilium) *(a)* lineae unius *(b)* in una linea, comprehensorum *(2)* sub *L* 18 f. duas *(1)* lineas *(2)* applicatas | minimas *erg.* | sibi *L* 19 vicinas, *(1)* si *(2)* talis autem differentia minor est linea qua *(3)* seu *L* 19 f. punctorum *(1)* in differentia *(2)* | vel ... differentia *erg.* | inter *L*

erat. Credidissem ego quoque nisi paulo ante superata difficultas cautiorem me reddidisset. Quare operae pretium est, ostendere, quam lente hic sit festinandum: meretur ea res considerationem profundam et diligentem, cum et a nemine quod sciam tacta sit, et nisi observetur, possit seminarium esse paralogismorum, quibus dudum negligentia aut facilitas utentium, quanquam magnorum aliquando virorum, infamen fecit hunc cui uni maiorem geometriae problematum solutionem debemus, calculum inassignabilium infinitorum.

Aio igitur linea[,] superficie, corpore etc., per punctum aliquod, aliudve inassignabile divisa quo scilicet dimensio eius minui non potest, quotientem esse aliam lineam, superficiem, corpus, quae ita sit ad dividendum, uti unitas in constructione exposita ad divisorem. Id nimirum generale est omni divisioni[:] sit enim dividendus a. divisor b. productus $\frac{a}{b}$. constat ut est b. ad 1. ita esse a. ad $\frac{a}{b}$. Huius canonis tam vulgaris, quis obsecro utilitatem expectasset in hoc tantae profunditatis argumento, et eius tamen recto usu tota quaestio absolvitur. Nam unitas in quaestione nostra est $B\aleph$. vel $GD. = \aleph$. Divisor autem est $\frac{\aleph\beth\theta}{\text{infin.}} = GE.$, differentia inter duas minimas proportionales BD. et $\aleph GE$. Ergo ut $GE = \frac{\theta}{\text{infinit.}}$. ad $GD. = \aleph$. seu ut differentia duorum minimorum proportionalium ad [unitatem] ita erit factus ex differentia extremorum in minimum proportionalium, ad summam rectangulorum quaesitam. Sed illud omnino notandum est hoc loco cum comparo GE. et GD. non comparo eorum longitudinem, sed numerum unitatum in ipsis, seu numerum rectangulorum ipsis applicatorum, ita in exemplo figurae sensibili, ubi utique non nisi finitus rectangulorum numerus repraesentari potuit, apparet eo modo GD. non nisi unum eiusmodi rectangulum subtendere, seu non nisi pro uno sumi posse, at GE. pro quinque. Unde apparet cur GD. sit unitas. At in infinito, ubi inassignabilis est rect-

5 aut facilitas *erg. L* 5 fecit *(1)* hanc *(2)* eam qua *(a)* utimur *(b)* hoc loco utimur, analysin per *(3)* hanc cui uni *(a)* magnorum *(b)* maiorum geometriae problematum solutionem debemus, methodum *(4)* hunc *L* 8 linea *und* etc. *erg. L* 9 quo ... potest *erg. L* 12 Huius *(1)* theorematis *(2)* canonis *L* 14 $= \aleph$. *(1)* ergo *(a)* si divis *(b)* ut unitas GD. est ad divisorem *(c)* ut divisor *(2)* Divisor *L* 16 f. seu ... differentiam *erg. L ändert Hrsg.* 18 quaesitam. *(1)* Nimirum cum dico ut est *(2)* Sed *L*

15–18 Dies ergibt sich aus S. 314 Z. 3 f.

angulorum quantitas, et differentia pariter ac distantia inter duas minimas applicatas minor est qualibet recta quae non dicam cogitari, sed fingi possit, quis obsecro nobis rationem numeri rectangulorum super GE. ad unitatem nempe numerum rectangulorum super GD. dabit? Quod tamen nisi fiat, desperari potest, de hac certe solvendi via.

Iam cum aliquid multiplicatur per unitatem, dividitur vero per aliquid minus unitate, manifestum est id minui quidem, sed tanto minus quanto ipse divisor minor est unitate,

1 pariter ac distantia *erg. L* 2 qualibet *(1)* linea *(2)* recta *L* 3 unitatem nempe *erg. L* 4 f. via. *(1)* Sed omnia in salvo sunt, ostendam enim si *(a)* recta *(b)* unitas GD. infinite parva sit, differentiam minimarum applicatarum GE $= \dfrac{\theta}{\text{infinit.}}$. fore infinities infinite parvam, *(aa)* ac proinde *(bb)* seu GE. fore ad GD. ut punctum ad lineam. Iam 1. divisum per infinite minus $= \dfrac{1}{\text{infinite parvum}}$. manet 1. *(2)* Sed *(3)* Ratio unitatis in constructione expositae ad infinite parvum, nulla alia ratione | per constructionem *erg.* | affectum, est ipsa unitas. *(a)* Nulla autem alia ratione affectum intelligi *(b)* Nam ut divisor infinite parvus est ad 1. ita 1. dividendus est ad productum $\dfrac{1}{\text{infin. parv.}}$. *(aa)* Est ergo 1. media proportionalis inter *(bb)* Ergo $\dfrac{\text{infin. parv.}}{1} = \dfrac{1}{\text{infin. parv.}}$. ergo $\dfrac{\text{infin. parv.} \frown \text{infin. parv.}}{1}. = \dfrac{1}{1}$. ergo et $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{\text{infin. parv.} \frown \text{infin. parv.}}$. ergo et $\text{Rq}\dfrac{1}{1} = \text{Rq}\dfrac{1}{\text{infin. parv.} \frown \text{infin. parv.}}$. ergo $\dfrac{1}{1} = \dfrac{1}{\text{infin. parv.}}$. *(aaa)* Cum ergo positis applicatis lineae finitae AB. infinitis, *(bbb)* Hinc paradoxum. *(4)* Producitur enim quantitas *(5)* Ponatur enim productum seu numerus quo quantitas illa infinite parva, in | data *gestr.* | unitate continetur esse δ. seu $\dfrac{1}{\text{infin. parv.}} = \delta$. ergo $1 = \delta \frown$ infin. parv. ergo *(a)* $\dfrac{1}{\delta}$ aequatur infini *(b)* $\dfrac{1}{\delta} =$ infinite parvum. Quare $\dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\dfrac{\theta}{\text{inf.}}} = \dfrac{\xi\theta - \theta^2}{\dfrac{1}{\delta}} = \dfrac{\xi\theta - \theta^2, \frown \delta}{1}$. *(aa)* Manifestum enim est, *(bb)* Cum ergo $\xi\theta - \theta^2$ dividitur per aliquid infinite minus unitate, et contra multiplicatur per unitatem, *(6)* Porro *(7)* Iam *L*

quare cum divisor est subinfinituplus unitatis, imminutio seu differentia erit nulla, vel quod idem est assignabili qualibet minor. Porro positis continue proportionalibus infinitis, lineae AB. finitae applicatis, differentiam duarum minimarum applicatarum GE. esse infinities minorem ipsa unitate seu recta inassignabili GD. Quod unum restat, ita ostendo: constat ex constructione figurae, inde enim velut de integro repetenda res est, cum inter duas extremas $\aleph C$. vel $80\,C$. et BD. media proportionalis constituitur $20\,E$. rectam $80\,B$. dividi in duas partes aequales in 20., similiter cum inter $20\,E$. et BD. media proportionalis invenitur, ipsa $20\,B$. rursus bisecatur in 10. idque eodem modo evenit, utcunque procedas in infinitum, donec minimus terminus progressionis huius duplae sit ipsa unitas $\aleph B$. seu GD. maximus autem ipsa recta AB. At vero quoties una fit bisectio, aut subsectio ipsius AB. eiusque partis ad B. pertinentis, ad constituendam istam quam dixi progressionem subduplam, cuius terminatio est $\aleph B$. vel GD. seu quoties unitate augetur numerus terminorum huius progressionis, toties numerus applicatarum proportionalium duplicatur, ideo numerus terminorum seriei geometricae applicatarum, aut differentiarum est ad numerum progressionis geometricae subduplae cuius initium altitudo AB. terminus, unitas $\aleph B$.

ut	1	2	4	8	16	32	64	128	etc. etc.
est ad	1	1	1	1	1	1	1	1	etc. etc.

Porro si series differentiarum et series subdupla inter se porro comparentur, manifestum utriusque summam esse lineam et tamen terminum maximum illius esse punctum, maximum huius lineam; vicissim rationem illius esse infinite parvam, huius autem esse $\frac{1}{2}$. his positis quaeritur quomodo se habeant termini minimi utriusque seriei. Fingamus primum numerum terminorum utriusque seriei esse eundem, vel saltem rationem horum duorum numerorum esse finitam.

1 est *(1)* infinite parvae *(2)* subinfinituplus *L* 1 seu differentia *erg. L* 2 positis *(1)* applicatis *(2)* continue *L* 12 progressionem *(1)* duplam *(2)* subduplam *L* 18 f. etc. *(1)* Patet *(2)* His positis *(3)* Porro constat *(a)* duas series *(b)* si duae series progressionis geometricae sint, eiusdem numeri terminorum, terminationes earum seu terminos minimos esse *(aa)* in composita ratione rationum et summarum *(bb)* ut summas; at si *(aaa)* sint aequ *(bbb)* numeri terminorum sint inaequales esse in composita ratione summarum, et potestatum, quarum *(aaaa)* exponens est *(bbbb)* radix ratio progressionis, exponens numerus terminorum. Ita $\begin{array}{l} \text{si sit (1)}\ 2\ 4\ 8 \\ \quad\ \ \text{et}\ \ 1\ 3\ 9\ \cancel{27} \end{array}$ termini minimi (1) et 1. sunt in composita ratione summarum, quae est $\frac{(15)}{13}\ \frac{8}{9}$ *(4)* Porro *L* 20 tamen *(1)* maximam *(2)* terminum *L*

$\xi\theta - \theta^2 = \xi\theta\aleph a - \theta^2\aleph a = \xi\aleph \frown \theta a - \theta\aleph \frown \theta a$. vel: $\xi a \frown \theta\aleph - \theta\aleph \frown \theta a$. seu $AC \frown AB - AB \frown BD$. quod est nimium. Ideo necesse est dividi per rationem GE. ad a.

Ut duo ista GD. et GE. comparentur, seu rectangulorum utrique insistentium numerus, manifestum est rectangula ipsius GE. esse $GE\aleph$. et rectangulum ipsius GD. esse $\aleph a$. sufficit ergo comparari longitudinem ipsius GE. et ipsius $\beth$.

[*Zusatzbetrachtungen auf Bl. 303 r°*]

[*Am linken Rand*]

Differentiae cuiusque proportionalis a minima

$$\begin{array}{rccc}
a & -\,b & \times & 1 \\
Rq\,ab & -\,b & \times & \frac{1}{2} \\
Rqq\,ab^3 & -\,b & \times & \frac{1}{4} \\
Rqqq\,ab^{[7]} & -\,b & \times & \frac{1}{8} \\
Rqqqq\,ab^{[15]} & -\,b & \times & \frac{1}{16}
\end{array}$$

1–3 $\xi\theta - \theta^2$ ... ad $\beth$. *durch Anführungszeichen je am Zeilenbeginn hervorgehoben, erg. und mittels Verbindungsstrich hier eingefügt. L* 1 $-\theta\aleph \frown \theta\beth$. *(1)* $\xi\aleph$. est ad AC. seu $\xi\beth$. *(2)* vel: *L* 6 ipsius $\beth$. | Idem breviter sic demonstratur: ponatur minima proportionalium θ. | maxima est *gestr.* | ratio incrementi ϕ. summa omnium erit $\theta + \theta\phi + \theta\phi^2 + \theta\phi^3$ *gestr.* | *L* 13 5 *L ändert Hrsg.* 14 7 *L ändert Hrsg.*

1	6	6		1	1	1		
			4					
2	5	10		2	2	4	63	
			6				$\underline{21}$	
4	4	16		4	3	12	63	
			8				$\underline{126}$	
8	3	24		8	4	32	1323	
			8					
16	2	32		16	5	80		
			[0]				1323⨍4	[*Rechnung bricht ab*]
$\underline{32}$	$\underline{1}$	32		$\underline{32}$	$\underline{6}$	$\underline{192}$	321	
63				63	21	321		

[*Am unteren Rande*]

			A	
A		$Ab - A$		b
	$\dfrac{A}{A+a}$		Ab	
$A + a$		$Ab^2 - Ab$		b
			Ab^2	
		$Ab^3 - Ab^2$		b
			Ab^3	

$\dfrac{Ab^3 - A}{d} = A$. Ergo $b^3 - 1 = d$. Ergo $d + 1 = b^3$. Si $Ab^3 - A = A$. erit $\dfrac{Ab^3}{2} = A$. $\dfrac{A}{Ab - A} = \dfrac{1}{b-1}$. Si $Ab - A = A$. erit $Ab = 2A$. et $Ab^2 - Ab = [Ab]$. Si $b = Rq$ inf. 2. [*Text bricht ab*]

10 1 *L ändert Hrsg.* 22 2Ab² *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{llllllllll} & 1a & & 2ab^2 & & 3ab^3 & & 4ab^4 & & 5ab^5 \text{ etc.} \\ \text{Iam} & a & + & ab^2 & + & ab^3 & + & ab^4 & + & \text{etc} = D. \end{array}$$

$a + 2ab^2 = 2b^2 + 1 \frown a. + 3ab^3$ etc. $= 1 + 2b^2 + 3b^3, +4b^4 + 5b^5$ etc. $\frown A =$

$$\begin{array}{rl} 1+2+3+4+5 \frown & b\ A \\ 2+3+4+5 \frown & b^2 A \\ 3 \cdot 4 \cdot 5 \frown & b^3 A \\ 4 \cdot 5 \frown & b^4 A \\ 5 \frown & b^5 A \\ \text{etc.} & \text{etc.} \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} a & \\ & 1 \\ a - 1 & \\ & \frac{1}{2} \\ a - \frac{3}{2} & \\ & \frac{1}{3} \\ a - \frac{11}{6} & \\ & \frac{1}{4} \\ a - \left[\frac{25}{12}\right] & \\ & \frac{1}{5} \\ a - \left[\frac{137}{60}\right] & \\ & \frac{1}{6} \end{array}$$

1 f. 1a ... = D. *A in a verbessert L* 18 $\frac{24}{12}$ *L ändert Hrsg.* 20 $\frac{132}{60}$ *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
\frac{1}{1} & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & \frac{1}{5} & & \frac{1}{6} & & \\
& \frac{1}{2} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{12} & & \frac{1}{20} & & \frac{1}{30} & & \frac{1}{42} & \\
& 1 & & \frac{1}{2} & & \frac{1}{3} & & \frac{1}{4} & & & & & \\
& & \frac{4}{12} & & \frac{6}{72} & & \frac{8}{240} & & \frac{10}{600} & & \frac{12}{1260} & & \\
& & 1 & & 2 & & 3 & & 4 & & 5 & &) \\
& & \frac{1}{3} & & \frac{1}{6} & & \frac{1}{10} & & \frac{1}{15} & & \frac{1}{21} & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
\frac{1}{1} & \frac{2}{3} & \frac{3}{6} & \frac{4}{10} & \frac{5}{15} & \frac{6}{21} & \frac{7}{28} & \frac{8}{36} & \\
\frac{1}{1} & \frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{10} & \frac{1}{15} & \text{etc. in infin.} & & & \\
\frac{4}{1}\Big| & \frac{9}{3}\Big|\,3 & \frac{16}{6}\Big|\,\frac{8}{3} & \frac{25}{10}\Big|\,\frac{5}{2} & \frac{36}{15}\Big|\,\frac{12}{5} & \frac{49}{21}\Big|\,\frac{7}{3} & \frac{64}{28}\Big| & \frac{81}{36} & \text{etc. infin.} = \\
2. & 2. & 2. & 2. & 2. & 2. & & \text{etc.} &
\end{array}$$

Nam 1. 1. 1. etc. est summa pyramidalis horum 1. $\frac{1}{3}$ $\frac{1}{6}$ etc. quae aequatur in infinito horum summae per quadrata multiplicatorum, in finito, si triangularem eorum summam adimas, ergo huius 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{6}{21}$ $\frac{7}{28}$ $\frac{8}{36}$ summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$ est 2. 2. 2. 2. etc. ergo si tales sint differentiae applicatarum: 1 $\frac{2}{3}$ $\frac{3}{6}$ $\frac{4}{10}$ $\frac{5}{15}$ $\frac{6}{21}$ summari potest figura.

8 f. infin. *(1)* $\frac{1}{1}\Big|^{1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{9}{6}$ *(2)* $\frac{4}{1}$ $\frac{9}{3}\Big|^{3}$ *L* 9 f. infin. = *(1)* 1. 1. 1. 1. 1. 1. etc. *(2)* 2. *L*

7–14 Grundlage des Folgenden ist der Satz, dass die Summe der Quadratzahlen gleich zweimal der Summe der Pyramidalzahlen minus der Summe der Triangularzahlen ist (s. Pascal, *Lettre à Carcavi*, 1658, S. 16 = *PO* VIII S. 364). Leibniz wendet den Satz jedoch ungenau an. — In Z. 9 müsste es genauer $\frac{1}{1}$ $\frac{4}{3}$ $\frac{9}{6}$ $\frac{16}{10}$ $\frac{25}{15}$ ... heißen.

[*Teil 3*]

Methodus generalissima figuras curvilineas omnes aut absolute aut in numeris proxime veris, prout cuiusque natura patitur, quadrandi: per differentias ordinatarum. Nimirum differentiae ordinatarum ad altitudinem ductae in suas distantias a basi, dant aream figurae. At distantiae earum a basi sunt ut numeri naturales. Ergo differentiae ordinatarum a basi ductae in numeros naturales respondentes, incipiendo scilicet a basi seu series eorum triangularis incipiendo a basi dat aream figurae. Differentiae ordinatarum figurae datae et eius complementi ad rectangulum sunt eaedem. Ideo differentiae ordinatarum ductae in numeros naturales incipiendo a parte basi opposita dant complementum figurae datae ad rectangulum.

Hinc theorema universalissimum, sane admirabile. Figura data est ad isoparallelam, ut est brachium differentiarum inter ordinatas in altitudine sumtum, seu distantia centri gravitatis earum differentiarum a basi, ad altitudinem.

Vicissim ubicunque datur quadratura vel dimensio figurae, datur brachium differentiarum inter ordinatas ad altitudinem, in altitudine, seu summa $\bigtriangledown^{\text{laris}}$.

Quotiescunque datur summa seriei, summaque differentiarum, datur et summa triangularis differentiarum, ab utroque latere.

In numeris progressionis harmonicae eorumque differentiis, aut differentiis differentiarum, differentiis in numeros naturales ductis prodit series terminorum, quorum sunt differentiae.

Ratio eorum quae supra dixi est, quia semper differentia ordinatarum ad axem ducta in distantiam a basi, dat applicatam (etsi non ordinatam) ad basin.

4 ad altitudinem *erg. L* 14 vel dimensio *erg. L* 14 f. brachium *(1)* differentiae ordinatarum *(2)* differentiarum *L* 19 series *(1)* areae *(2)* terminorum *L* 21 ordinatarum ad axem *erg. L* 22–324,1 basin. *(1)* Sinus inter se *(2)* Cum quadrata |circulorum *erg.*| hemisphaerii ita procedant: 1. 1. 1. *(3)* Applicatae *(a)* parabolae sunt *(b)* trilinei *L*

Applicatae trilinei parabolici axi parallelae, sunt:

$$1. \quad 4. \quad 9. \quad 16. \quad 25. \quad 36.$$

ipsius semiparabolae vero

$$\xi - 1. \;\; \xi - 4. \quad [\xi - 9.] \quad \xi - 16. \;\; \xi - 25. \;\; \xi - 36. \quad \text{etc.}$$

Sinus quadrantis:

$$Rq\,\xi - 1. \;\; Rq\,\xi - 4. \quad [Rq\,\xi - 9.\,] \quad Rq\,\xi - 16. \;\; Rq\,\xi - 25.$$

differentiae sinuum:

$$Rq\,\xi - 1, -Rq\,\xi - 4. \quad Rq\,\xi - 4, -Rq\,\xi - 9. \quad Rq\,\xi - 9, -Rq\,\xi - 16. \quad \text{etc.}$$

$$Rq\,\xi - 1, \overset{1}{-}Rq\,\xi - 4. \quad Rq\,4\xi - 16, \overset{2}{-}Rq\,4\xi - 36. \quad Rq\,9\xi - 81, \overset{3}{-}Rq\,9\xi - 144.$$

Si qua sit figura, in qua ordinatarum differentiae, sint progressionis harmonicae; figura aequabitur triangulo orthogonio eiusdem altitudinis et basis. Figuras istas possis

---

1–9 *Nebenbetrachtungen:*

$$\cancel{\xi} - \cancel{1} + \overset{3}{\cancel{4}} - \cancel{\xi}$$

$$\begin{array}{ccc}
\xi - 1 & \xi - 4 & 4\xi - 16 \\
\underline{\xi - 4} & \underline{\xi - 9} & \underline{4\xi - 36} \\
-\xi - 4\xi + 4 + \xi^2. & -9\xi + 36 & -\;64\xi + 576 \\
 & \underline{-4\xi + \xi^2} & \underline{-144\xi + 16\xi^2} \\
Rq\,\xi^2 + 4 - 5\xi. & \xi^2 + 36 - [13]\xi. & 16\xi^2 - 208\xi + 576.
\end{array}$$

Videndum an aliqua multiplicatione perpetua radix possit fieri semper extrahibilis.

Zugehörige Hilfsrechnungen:

$$\begin{array}{rrrr}
36 & 36 & \cancel{1}\cancel{1} & 24 \\
\underline{4} & \underline{16} & \cancel{5}\cancel{7}\cancel{6} & \underline{16} \\
144 & 216 & \underline{.\;\;.} & 144 \\
 & \underline{36\;\;} & \underline{2\;\;4} & \underline{24\;\;} \\
 & 576 & \cancel{4}\cancel{4}\cancel{4} & 384
\end{array}$$

4 $\xi - 9.$ *erg. Hrsg.* 6 Rq $\xi - 9.$ *erg. Hrsg.* 18 11 *L ändert Hrsg.*

appellare apotomicas, quas per apotomas seu differentias metimur. Talis est logarithmica, habetur ergo quadratura eius. Et hanc in specie possis dicere apotomicam hyperboloeidem. Figura apotomica in qua ordinatae et differentiae ordinatarum sunt eiusdem progressionis, est progressionis arithmeticae et geometricae.

Regula nostra adeo generalis est, ut ne ordinatas quidem esse necesse sit, sufficiunt applicatae: brachium aequilibrii differentiarum inter applicatas, sumtum in altitudine, ad basin, ductum in altitudinem, producit aream figurae. Sed non possumus uti summis triangularibus, nisi applicatae sint ordinatae seu aequidistantes. Quemadmodum distantia centri gravitatis omnium chordarum, seu curvae, ductum in curvam, dat superficiem cylindricam ungulae, atque eius ope superficiem curvam solidi circa axem voluti.

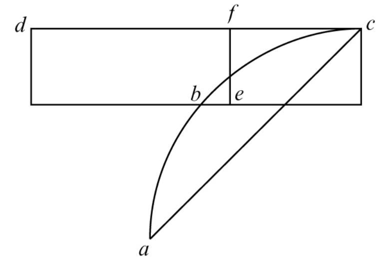
Iac. Gregorius dedit tantum clepsydram ut vocat parabolicam, si scilicet circa tangentem verticis volvatur, ego dabo, si circa tangentem quamcunque, imo circa rectam quamcunque extra ipsam volvatur. Idque non tantum in parabola simplici, sed et cubica, et alia quacunque. Imo non tantum in parabola sed et figura omni, cuius notum est centrum gravitatis. Imo erravi, exhibet ille superficiem huius.

Gregorius a S. Vincentio quadravit ungulam parabolicam plano seminormali per axem transeunte abscissam, ego quadrare possum ungulam parabolicam omnem, ex cylindro parabolae aut semiparabolae, aut cuiusque portionis parabolicae, (cuius centrum gravitatis haberi potest) plano seminormali per q u a m c u n q u e r e c t a m d a t a m transeunte, abscissam. Consideranda tamen res est, an scilicet quae de ungularum et solidorum revolutione productorum, relatione dicta sunt, sint plane universalia. Hoc modo possum quoque quadrare ungulam hyperbolicam plano quodam, neque per asymptotam, neque per axem, neque per his parallelam, transeunte, abscissam. Porro omnium istarum ungularum quadrabilium reperire possum centra gravitatis, supposita quadratura baseos.

1 f. Talis ... eius. *am Rande erg. L* 5 f. ut *(1)* regula constitui possit eiusdem: *(a)* distantia *(b)* brachium | in *(aa)* basi *(bb)* axi *erg.* | *(2)* ne *L* 7 Sed | eo casu *gestr.* | non *L* 15 f. huius. | Theorema memorabile, si ex uno libro brachio suspensum sit *gestr.* | Gregorius *L* 24 quadrabilium *erg. L*

11 Iac. Gregorius dedit: *Geometriae pars universalis*, Padua 1668, Satz 52, S. 98–100. Das Wort „Clepsydra“ kommt dort nicht vor, wohl aber spricht John Collins in seiner Anzeige des Werkes (*Philosophical Transactions* Bd III Nr. 35 vom 18./28. Mai 1668, S. 685–688) von einem „Parabolical Hour-Glass“.
16 Gregorius a S. Vincentio quadravit: *Opus geometricum*, Antwerpen 1647, Buch IX Teil V, S. 1020 bis 1037.

Ideo possum quoque reperire centra gravitatis (supposito scilicet tetragonismo, ubi opus est,) omnium conoeidum, ungulis respondentium.



[*Fig.2*]

Segmentum circulare $\underline{abca}$ aequatur rectangulo $\underline{efcd}$ sub arcu eius $\underline{abc} = \underline{cd}$, et dimidia $\underline{ef}$ distantia centri gravitatis arcus, a tangente ad extremitatem $\underline{cf}$. $\underline{abc} = \underline{cd}$. Ergo $\underline{abca} = \dfrac{efcd}{2}$. Idem sic efferri potest, si segmentum circulare libere suspendatur ex brachio librae longitudinis quantaelibet, et superficies cylindrica basi arcu, altitudine aequali dimidio brachio segmenti libere suspendatur ex altero librae brachio cuius longitudo sit distantia centri gravitatis arcus, a tangente ad eiusdem arcus extremitatem, fiet aequilibrium. Sed idem ita elegantius: Si superficies cylindrica cuius altitudo quaecunque, basis, arcus circuli horizonti parallelus, tangenti ad extremitatem, in eodem plano horizontali iacenti, velut axi affixus, ab altero autem axis latere, segmentum eiusdem arcus brachio sive distantia ab axe, altitudinis superficiei cylindricae dupla libere suspensum intelligatur, fiet aequilibrium. Hanc enuntiationem praefero quia nec arcum in rectam extensum, neque centrum gravitatis arcus aut superficiei cylindricae, aut segmenti datum supponit, et sane hoc theorema tanto magis mirum videri debet, quod superficies cylindrica in circulum redigi potest, circulum autem cum segmento comparare hactenus nemo potuit, non magis, quam circumferentiam diametro.

Ex iis quae de quadratura figurae logarithmicae demonstravi, nova ratio detegitur, fortasse commodior omnibus quae in usu hactenus fuere, construendi logarithmos et summam colligendi, quadrandi hyperbolam, caeteraque peragendi, quae ad rationes

11 horizonti parallelus *erg. L* 11 horizontali *erg. L* 18 quam *(1)* arcum rectae *(2)* circumferentiam *L* 21 et summam colligendi *erg. L*

10 elegantius: Die „elegantere“ Formulierung des Satzes ist richtig. Damit der Waagebalken aber waagrecht bleibt, muss gerade die zusätzliche Bedingung erfüllt sein, die Leibniz vermeiden will.

pertinent. Nam figura fit: termino maximo demto minimo ducto in altitudinem, id est numerum terminorum productoque diviso per differentiam duorum terminorum minimorum. Eadem ergo est area figurae seu summa logarithmorum. Ad inveniendum autem ipsum logarithmum, duas summas proximas sibi subtrahemus, ut si quaerimus logarithmum termini 20. a summa logarithmorum a termino 20^{mo} auferemus summam a termino 19^{no} etc. Cumque hae duae summae fiant prior differentia termini 20. et 1^{mi} ducta in 20. posterior differentia termini 19. et 1. ducta in 19. at vero differentia termini 20. et 1. sit 19. quia terminus 20^{mus} est 20. primus 1. in logarithmis, scilicet numerorum naturalium[,] ea ducta in 20. divisa per differentiam dabit summam logarithmorum usque ad 20. eodem modo 18. ducta in 19. dabit [*bricht ab*] Imo haec male, de numero terminorum, quia is non est certus, quoniam 1. 2. 3. etc. numeri naturales, quippe non semper aequidistent. Imo iste numerus terminorum dat ipsum logarithmum ergo logarithmus ductus in numerum cuius est logarithmus, unitate minutum producto diviso per differentiam inter unitatem et ratiunculam, dabit figuram, quae subtracta a rectangulo sub logarithmo et termino maximo dabit logarithmorum summam. Applicatae enim figurae logarithmicae sunt complementa logarithmorum.

Logarithmus numeri maximi esto a. numerus maximus b. minimus 1. ratiuncula c. figura erit $\dfrac{ab-a}{c-1}$. summa logarithmorum $ab - \dfrac{ab-a}{c-1}$. vel $\dfrac{cab-ab}{c-1} - \dfrac{ab-a}{c-1}$. vel $\dfrac{cab-2ab+a}{c-1}$. Sed malo primam enuntiationem $ab - \dfrac{ab-a}{c-1}$.

Differentiae applicatarum trilinei parabolici, sunt:

$$\begin{array}{ccccccccc} & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & \\ 0 & & 1 & & 4 & & 9 & & 16 \end{array}$$

cumque applicatae parabolae sint $a-1.$ $a-4.$ $a-9.$ $a-16.$ erunt differentiae eaedem, 3. 5. 7. etc. At quid si differentiae crescant decrescentibus ordinatis ut 1. 4. 9. 16. vel quid si crescant crescentibus ordinatis, quo casu ipsae ordinatae crescunt ut numerorum quadratorum summae. Videntur transire in pyramidales. Quid si sint, ut numerorum harmonicorum summae, erit hyperboloeis, sed quadrabilis.

1 demto minimo *erg.* *L* 2 f. minimorum. | Quae si valde parva sit *gestr.* | Eadem *L* 3 area figurae seu *erg.* *L* 6 fiant *(1)* differentia termini *(2)* termino maximo ducto in *(3)* prior *L* 14 et *(1)* factum ex uni *(2)* ratiunculam *L* 17 numeri maximi *erg.* *L* 17 minimus 1. *erg.* *L* 24 f. crescant | *(1)* vel decrescant *(2)* decrescentibus ordinatis *erg.* | ut *L* 26 numerorum *(1)* naturalium *(2)* quadratorum *L*

Eodem modo quadrari possunt omnes figurae harmonicoeides, ut quarum differentiae sint: $\frac{1}{1}$ $\frac{3}{2}$ $\frac{6}{3}$ $\frac{10}{4}$ $\frac{15}{5}$ $\frac{21}{6}$ $\frac{28}{7}$ $\frac{36}{8}$ etc. tales applicatae sic crescentes inveniri possunt, quando ineuntur tertiae proportionales non ad eandem, sed ad continue crescentem. 1. 2. 3. 4. 5. fiunt $\frac{1}{1}$ $\frac{4}{2}$ $\frac{9}{3}$ $\frac{16}{4}$ etc. sed sic producitur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$.

Qualis ista obsecro figura est in qua differentiae ita procedunt 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. etc. id facile, tunc enim applicatae ita: 1. 3. 6.

Nota aliud est summam invenire logarithmorum absolute, quod ego, aliud summam inire logarithmorum progressionis arithmeticae. Imo contra: idem est, quia logarithmi numerorum progressionis arithmeticae.

Methodus illa metiendi figuras per differentias, longe facilior est, quam per inscripta et circumscripta. Imo contra id in certis tantum casibus, quando illae differentiae per 1. 2. 3. multiplicatae facilius summari possunt, quam ipsae figurae.

1		4		9		16		25		36
	3		5		7		9		11	
	9		25		49		81		121	
	1		1		1		1		1	
	Rq 10.		*Rq* 26.		*Rq* 50.		*Rq* 82.		*Rq* 122.	

		1		2		4		8		16		32
0		1		4		16		64		256		1024
	1		3		12		48		192		768	
		4		16		64		256				

Figura proportionum hoc habet sibi peculiare, quod in nulla forte alia repereris, ut solidum ex eius circa altitudinem revolutione genitum, ipsi figurae planae homogeneum sit.

22 | Nota *gestr.* | Figura *L*

3 tertiae proportionales: Bei der Berechnung der dritten Proportionalen ergibt sich eigentlich die Folge $\frac{4}{1}$ $\frac{9}{2}$ $\frac{16}{3}$ etc.

Examinanda non tantum quasi triangula super cylindris et conis et conoeidibus, sed et quasi parabolae, etc. Dum scilicet supponitur v. g. aliquid moveri super cylindro motu composito ex descendente et in gyrum, fiet hypotenusa quasi trianguli, et figura quasi triangulum. Si acceleratio sit in uno motu, simplicitas in altero, fient quasi parabolae etc. aliaeque figurae infinitae quae ex compositione motuum fiunt in plano. Exprimi etiam possunt in superficie curva. Eadem in conoeidibus et sphaeroidibus, et proinde omnibus superficiebus revolutione factis, considerare licet. Imo etiam compositione motuum non factae, sed aliis modis sic exprimi possunt ut hyperbola, etc. si pro applicatis sumantur circumferentiae in cylindrica superficie basi parallelae.

Si sit figura in qua differentiae applicatarum sint

	$Rq\,0.$	$Rq\,3.$	$Rq\,8.$	$Rq\,15.$	$Rq\,24.$	$Rq\,35.$	
erit quadratum harum differentiarum							
	0.	3.	8.	15.	24.		
cui si addantur quadrata unitatis 1.							
	1	1	1	1	1		
fiet	1	4	9	16	25		
cuius radices	1.	2.	3.	4.	5.	6.	etc.

erunt chordae figurae. Sed 1. eiusmodi intelligendum est tam parvum, ut eius tot, quot communibus opus habemus ad quadratum, hic opus sit ad altitudinem. Quo posito 1. 2. 3. 4. 5. etc. dabit dimidiam altitudinem quod absurdum est, curva enim maior altitudine. Quomodo ergo? Necesse est ut utrobique 1. sit eiusdem rationis, si volumus inire summam curvae, et ideo curvam necesse est esse non lineam sed superficiem, et solidum non nisi summam triangularem ordinatarum alicuius plani, cuius ordinatae: $Rq\,0.$ $Rq\,3.$ $Rq\,8.$ $Rq\,15.$ at reapse tale planum est ∇^{lum}, nil enim refert, si substituas $Rq\,1.$ $Rq\,4.$ $Rq\,9.$ etc. Ideo superficies hoc loco pyramidalis, at si hoc modo: $Rq\,0.$ $Rq\,8.$ $Rq\,35.$ $Rq\,99.$ erit summa triangularis, seu ungula solida cuius hae differen-

1 et conoeidibus *erg.* *L* 8 f. sumantur *(1)* circuli in cylindro *(2)* circumferentiae *L* 10 in qua *(1)* sint applicatae Rq 3. Rq *(2)* differentiae *L* 14 quadrata *(1)* basium *(2)* unitatis *L* 26–330,1 differentiae *(1)* , et cho *(2)* cui solido si qua figura plana homogenea exhibeatur, eius chordae erunt: 3. 6. 10. etc. *(3)* . Ungula *L*

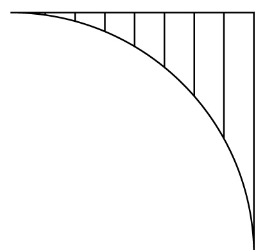
10–330,11 In diesen Abschnitten versucht Leibniz, verschiedene Sätze von Gregorius a S. Vincentio (s. *Opus geometricum*, 1647, Buch IX Teil I u. III, S. 955–975 u. 985–1005) zu den ungulae anzuwenden, begeht dabei aber mehrere Fehler und bezweifelt schließlich sein Ergebnis selbst.

tiae. Ungula ista converti intelligatur in prisma homogeneum, eius prismatis superficies aequabitur basi ungulae.

Regula generalis: Si ungula converti intelligatur in prisma homogeneum, superficies prismatis, aequabitur basi ungulae, et curva baseos prismatis aequabitur basi ungulae per altitudinem prismatis divisae.

Quodsi plana ungulae applicata quadrari possunt, ut possunt si ungula parabolica sit, potest ungula redigi in prismam qualibet applicata in rectangulum redacta, servata eadem semper eius rectanguli longitudine. Hoc posito tum area datur basis prismatis huius, si scilicet area prismatis aliunde cognita per altitudinem dividatur, tum vero datur prismatis superficies quae scilicet aequabitur basi ungulae. Basis prismatis eiusmodi semper est figura apotomica, seu differentiarum.

$Rq \llcorner z^2+1 \lrcorner \quad Rq \llcorner z^2+4 \lrcorner \quad Rq \llcorner z^2+9 \lrcorner$ ipsum 1. in quod divisa altitudo sumendum hic quasi pro linea integra, quia differentiae hic infra lineam subsidunt, aliquando gradibus 2bus et ultra, ut si differentiae per cubos procedant etc. summa facit lineam, cum tamen alioquin si unitas in iis foret ordinaria, faceret cubum. Ergo 1. in quod altitudo dividitur, ipsis addi simpliciter non potest.



[*Fig. 3*]

$z. \quad z-1. \quad z-2. \quad z-3.$

---

10 *Hinter* ungulae *interlinear:* Dubito.

1 prisma *(1)* , sed ita ut eadem maneat *(2)* homogeneum *L* 8 datur *(1)* prismatis *(2)* basis *L* 10 ungulae. *(1)* In *(2)* Figura *(3)* Basis *L* 11 *Nach* differentiarum, *nicht gestr.*: N *L*

$$Rq\,\frac{2\cancel{z^2}+4z^{\overset{2}{\cancel{4}}}-4z^{\cancel{3}}+\cancel{z^2}}{\cancel{z^2}}\ [=]\ 3+4z^2-4z,\ Rq. \qquad \frac{\overset{\cancel{\beta^2}}{\cancel{z^2}}a-\overset{\cancel{\beta^2}}{\cancel{az^2}}+a-2za}{z^2}$$

$$Rq\,\frac{a^2+4z^2a^2-4za^2+z^2}{z^2} \qquad \left.\frac{4z^2a^2-4za^2}{z^2}=\frac{4\cancel{z}a^2\frown z\,[-]\,1}{z^{\cancel{2}}}\right\}Rq$$

reicio $+\dfrac{a^2}{z^2}$ et $\left[+\dfrac{z^2}{z^2}\right]$ quia faciunt non lineas, sed n u m e r o s , restat: $\dfrac{2a\frown Rq\,z\,[-]\,1}{Rq\,z}$.

$$Rq\,\frac{9z^2a^2-6za^2+a^2}{z^2}=\frac{a-3z[a]}{z}.$$

$\dfrac{a-2z}{z}$ $\quad \dfrac{a-3z}{z}$ $\quad a-4z$ $\quad$ [*Rechnung bricht ab*]

$Rq\,z^2-1.\quad Rq\,z^2-4.\quad Rq\,z^2-9.\quad Rq\,z^2-16.$ sinus.

Differentiae: $Rq\,z^2-1,\ -\ Rq\,z^2-4.\quad Rq\,z^2-4,\ -\ Rq\,z^2-9.$

Differentiae $\square$ est $z^2+z^2\ [-]\ 5-[2]Rq\,z^4+4-5z^2,\,,\,Rq$

---

3 *Über* n u m e r o s : Male.

8 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{r} z^2-1 \\ \underline{z^2-4} \\ z^4\ \ +\ \ -\ \ 5z^2+4 \end{array}$$

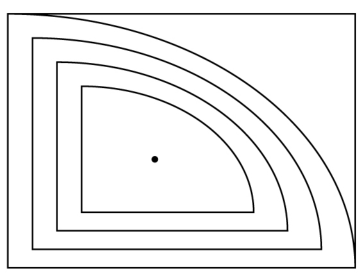
1 = *erg. Hrsg.* 2 + *L ändert Hrsg.* 3 $-\dfrac{z^2}{z^2}$ *L ändert Hrsg.* 3 + *L ändert Hrsg.* 4 a *erg. Hrsg.* 6 f. sinus. *(1)* At chordae: *(2)* Differentiae *L* 8 est *(1)* $z^2-1,+$ *(2)* $z^2+z^2+5-\mathrm{Rq}\,z^4+4-5z^2,\,,\,\mathrm{Rq}$ *L ändert Hrsg.*

17. MATHEMATICAE COLLECTIONIS PLAGULAE SEIUNCTAE
[Spätes Frühjahr 1673]

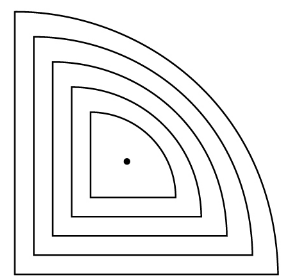
Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 261–262 u. 312–313. 2 Bog. 2°. 8 S. Fig. 1a isoliert auf Bl. 304 v° (vgl. a. N. 16_4). Bogenmarkierungen: 1 neben gestrichenem fragmentarischen hebräischen Buchstaben (vielleicht ℵ?) auf Bl. 313 r° sowie 2 auf Bl. 261 r°. Bl. 312 am unteren Rande stark bestoßen u. abgeschabt, außerdem kleinere Ausrisse, dadurch teilweise Textverlust, s. S. 343 Z. 3–5 . (Zur Textgestaltung hier wurde zusätzlich die Sicherheitsverfilmung vom April 1967 herangezogen.)
Cc 2, Nr. 545 B, 547 tlw.

Datierungsgründe: s. N. 9.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

O m n e m f i g u r a m h a b e r e c e n t r u m g r a v i t a t i s, demonstrari ita potest, quoniam si figurae datae aliae atque similes continue minores inscriptae intelligantur, minima omnium, quae scilicet punctum est, id est figura sed areae inassignabilis, erit centrum gravitatis.

I n o m n i f i g u r a, i d e m e s t c e n t r u m g r a v i t a t i s a r e a e p a r i t e r a t q u e p e r i p h e r i a e i n t e g r a e. Quia centrum gravitatis figurae est minima figura similis inscripta. Ergo et peripheriae figurae peripheria figurae minimae inscriptae; quia ea omnium peripheriarum similium sibi inscriptarum minima est. Peripheria autem figurae minimae et figura minima cadunt in idem punctum.

Coroll. (1) ergo dato centro gravitatis figurae, datur centrum gravitatis peripheriae, et vicissim. Datur ergo centrum gravitatis peripheriae parabolae, aut semiparabolae, trilineive, quadraticorum, cubicorum, etc. Dabitur et centrum gravitatis peripheriae ungulae parabolicae; item hyperbolicae.

Coroll. (2) ergo data linea quadam in quam cadit centrum gravitatis figurae, aut axe quodam aequilibrii, si ea linea recta est, dabitur et axis aequilibrii peripheriae. Dabitur ergo axis aequilibrii peripheriae figurae hyperbolicae.

Dato centro gravitatis figurae, eiusve distantia ab aliquo axe, dimensioneve curvae, invenire centrum gravitatis curvae aut eius distantiam ab eodem axe. Suppono ab aliis ostensum: superficiem curvam rotatione genitam aequari rotato in viam centri gravitatis ducto. Ergo, cum data dimensione curvae, detur quantitas totius peripheriae, deturque et centrum gravitatis eius, dabitur genitum rotatione figurae circa axem extra figuram assumtum, ducta peripheria in viam centri gravitatis. A quo detrahatur genitum rectis figuram comprehendentibus, circuli zona a basi, cylindrica superficies ab axe genita, residuum dividatur per dimensionem curvae datam, quotiens erit distantia centri gravitatis curvae ab eodem axe.

---

3 *Über* semiparabolae *und* trilineive *jeweils*:

12–17 Non opus est tam longe iri. Sufficit ex peripheria data duci lineas ad planum quoddam. Quarum summa aequatur ductui distantiae centri gravitatis in eandem peripheriam.

7 f. hyperbolicae. *(1)* Dato centro gravitatis figurae *(a)* invenire *(b)* planae et dimens *(2)* Ex his tribus: dato centro gravitatis figurae, dimensione curvae, centro gravitatis curvae; datis duobus tertium invenire. *(3)* Dato *L* 14 ducta peripheria in *(1)* distantiam *(2)* viam centri gravitatis *erg. L* 15 comprehendentibus, *(1)* circulus *(a)* et superfici *(b)* a basi *(2)* circuli *L* 17–334,1 axe. *(1)* Sector *(a)* fi *(b)* dat *(c)* rectis ex centro gravitatis ad extrema curvae ductis comprehensus, componitur ex triangulis totidem quot sunt latera infinita, in quae figura divisa intelligitur, |et *gestr.*| quorum bases sunt latera ista vel chordae, altitudines sunt radii, sive distantiae centri a tangentibus sive lateribus. Ergo *(2)* Sector *L*

---

11 ab aliis ostensum: s. z. B. P. Guldin, *Centrobaryca*, 1635–41, Bd II, 1640, S. 147. Der Satz ist danach schnell Allgemeingut geworden.

Sector omnis extremis radiis et curva comprehensus dimidius est radiorum super curva erectorum, seu curvae in rectam extensae applicatorum. (Huius ergo propositionis universalissimae non nisi subsumtio est, quae ab Archimede de sectore circuli sunt demonstrata.) Ratio est, quia sector rectis ex centro gravitatis ad extrema curvae ductis comprehensus componitur ex triangulis totidem quot sunt latera infinita, in quae figura divisa intelligitur, quorum bases sunt latera ista vel chordae, altitudines sunt radii, sive distantiae centri a tangentibus sive lateribus.

Hinc generaliter: figura radiorum dimidia est sectoris figurae. Radii autem sunt rectae ex centro ad peripheriam. Sector est figura duabus rectis et curva comprehensa. Idem ergo verum est, nulla mentione centri gravitatis: Omnis figura orthogonia est sector. Imo etsi trilineum, non sit orthogonium, tamen est sector. Hoc autem verum est, utcunque curva in partes aequales inaequalesque divisa intelligatur.

Hinc quandocunque radiorum ad portiones curvae aequales in ordinatas alicuius rectae transformatorum summa iniri potest, curvae quoque dimensio haberi potest; data sectoris dimensione, ut enim est summa radiorum ad aliam rectam ordinatorum, ad duplicatum sectorem, ita est recta illa ad curvam.

Summa triangularis arcuum ad ordinatas axis aequatur summae sinuum ad basin, incipiendo ab imo, seu puncto axis quo basin attingit. Porro pro voce axis vox basis substitui potest, mutuo. (Ratio est quia summa arcuum ad ordinatas axis aequatur summae sinuum ad basin per Pascaliana.) Ergo momentum arcus ex basi librati est summa sinuum. NB. hoc aliunde constat. Ergo hinc demonstrari potest, non utendo licet figura adiuncta Pascalii, quod summa triangularis arcuum summae sinuum aequetur. Hinc illud quoque apparet aequari: summam triangularem arcuum ad ordinatas axis, summam sinuum ad basin, ac denique factum ex arcu in distantiam eius centri a basi ducto.

14 potest; *(1)* imo *(2)* etsi *(3)* modo conste *(4)* quodsi vero laterum curvae in radio *(5)* data *L* 16 duplicatum *erg. L* 17 ad ordinatas axis *erg. L* 18 incipiendo *(1)* a summo, seu puncto axis a basi maxime remoto. Vicissim summa arcuu *(2)* ab imo *L* 19 ad ordinatas axis *erg. L* 20 basin | per Pascaliana *erg.* |). *(1)* Hinc semper summa si *(2)* Ergo *(a)* summ *(b)* momentum *L* 20 ex *(1)* tangente verticis *(2)* basi *L* 23 ad ordinatas axis *erg. L* 24 ad basin *erg. L*

3 ab Archimede: *Dimensio circuli*, prop. 1. 20 per Pascaliana: *Traité des trilignes*, 1658, prop. 6, S. 7 sowie Fig. 13. (*PO* IX S. 14 f.).

NB. esto arcus ille $\frac{x}{\beta}$. peripheria distantiae centri gravitatis cui recta aequalis habetur, esto b. ex qua ut fiat radius multiplicetur per a. dividatur per x, fiet $\frac{ab}{x}$. hic radius ducatur in arcum $\frac{x}{\beta}$ fiet: $\frac{ab — x}{x — \beta} = \frac{ab}{\beta}$ = summae sinuum ad basin. Hinc illud apparet, quotiescunque datur ratio curvae ad arcum circuli, toties haberi posse summam sinuum ad curvam; seu momentum curvae. Si ratio curvae ad rectam haberi potest, ut in cycloeide, momentum eius [*Text bricht ab*]

Hinc aliam duco consequentiam sane memorabilem: Si arcus circuli volvatur circa tangentem ad verticem eius genitum esse ad eundem volutum circa basin eidem tangenti parallelam ut est segmentum ad figuram illam rectilineam, nempe summam sinuum.

℞. Videndum an hoc generale, ut revolutione genita sint ut momenta.

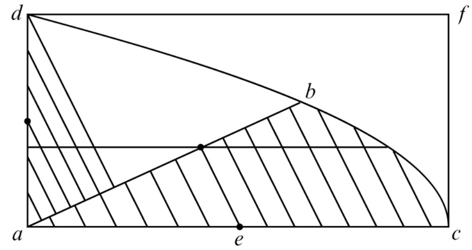
Hinc illud quoque ut sunt sinus ad basin, ad sinus ad axem, ita esse revolutione genitum super basi *ad* revolutione genitum super axi.

Hinc aliam consequentiam duco: summam semper esse eandem, sive sinus sive alias quascunque rectas infinitas ex curva in basin demittas. Semper enim summa aequatur momento figurae. Ideo superficies ungulae super basi abscissae (momentum, summa sinuum etc. id enim idem), aequatur superficiei cylindricae arcui impositae, cuius applicatae crescunt, ut applicatae trianguli, sed applicantur arcubus inaequalibus, nempe distantiis, a basi, seu portionibus axis a basi abscissis. Omnia haec eodem redeunt.

---

1 f. Male, quia non semper datur aequalis recta peripheriae distantiae centri gravitatis. Ergo tunc tantum cum datur circulus aequalis superficiei.

5 f. Si ratio ... momentum eius *erg.* *L* 8 eius *(1)* aream *(2)* genitum *L* 18 abscissis. *(1)* Quod si vero *(2)* Omnia *L* 18+336,2 redeunt. *(1)* Si in trilineo orthogonio | cuius basis atque altitudo aequales *erg. und gestr.* | (idem ad solida applicari potest) | cuius basis atque altitudo aequales *erg.* | habetur centrum gravitatis figurae, haberi potest recta transiens per centrum gravitatis curvae, seu quidam axis aequilibrii curvae. *(2)* Si *L*



[*Fig. 2*]

Si in trilineo orthogonio cuius datur centrum gravitatis recta quaecunque per centrum gravitatis ducatur *ab*. quae est ∇^{li} axis aequilibrii, et utrinque rectarum *ac*. *ad* momenta conferantur (quod fit distantias v.g. ipsius *ac* ab *ab* ipsi *ac* imponendo, seu ducendo *ac* in distantiam dimidii *e* ab *ab*, in *ad* eodem modo), quae erit differentia momentorum rectarum, lateris v.g. inter momentum *ac* et *ad*. ea erit arcuum reciproce, seu inter momentum *db* et *bc*. ita ut si excessus rectae sit ab uno latere, excessus curvae sit ab altero.

Hinc si recta *ab* talis ducatur, ut momenta rectarum utrinque sint aequalia, quod per analysin fieri potest, habebitur et axis aequilibrii curvae, seu curva bisecabitur in partes aequiponderantes.

Hinc si haberi possit centrum gravitatis duorum trilineorum eiusdem curvae communis, alterius concavi, alterius convexi, reperta per analysin bisecandarum in aequalia momenta rectarum, ratione dabitur centrum gravitatis curvae. Scilicet in intersectione duarum rectarum momenta bisecantium, si modo non coincidant.

Dato autem centro gravitatis curvae, dataque summa sinuum eiusdem curvae, sive circulo aequali superficiei eius revolutione genitae, datur recta curvae aequalis.

Haec conemur ad curvam parabolicam applicare. Datur opinor centrum gravitatis semiparabolae, datur enim ratio ad cylindrum tam conoeidis parabolici circa axem quam circa basin. Idem et de trilineo parabolico dici posse puto. Consulenda Archimedis et

13 f. in aequalia momenta *erg. L*

---

1 [*Fig. 2*]: Nach dem Text soll die Gerade *ab* beliebig durch den Schwerpunkt gehen, Leibniz zeichnet sie aber durch die Spitze des trilineum. 20 Consulenda: ARCHIMEDES, *Quadratura parabolae* sowie E. TORRICELLI, *De dimensione parabolae*. In: *Opera geometrica*, 1644, Tl. 2, S. 17–84; auch in *TO* I, 1 S. 102–162.

Torricellii de parabola demonstrata. Tandem et superficiei conoeidis parabolici datur aequalis circulus per Hugenium. His ergo positis, potest curvae parabolae aequalis haberi recta, atque ideo habebitur et quadratura hyperbolae.

Porro ex his illud quoque apparet: dato centro gravitatis curvae et dimensione eius, ac partium, dari et centrum gravitatis figurae, duci enim poterit per analysin recta per centrum gravitatis curvae, quae et rectas, bisecet in partes aequiponderantes, idque pluribus modis, duo autem (in plano) sufficiunt tunc ad centrum gravitatis. Eadem applicari quoque possunt ad parabolas altioris gradus.

His positis haberemus et centrum gravitatis hyperbolae. Iam enim habemus per Wallisium rectam unam, in qua est centrum gravitatis hyperbolae. Habemus et cylindrum aequalem conoeidi hyperbolico circa asymptotam, ergo distantiam centri gravitatis hyperbolae ab asymptota, cum eius quadratura detur, sunt enim solida ut momenta, momenta autem in ratione distantiarum et figurarum.

Dato autem centro gravitatis hyperbolae, eiusque quadratura, atque eadem methodo centro gravitatis trilinei hyperbolici, concavi non minus ac convexi, dabitur et centrum gravitatis curvae hyperbolicae, eadem plane methodo qua parabolicae. At aliunde posita quadratura hyperbolae, datur superficies conoeidis hyperbolici per Hugeniana. At superficie conoeidis distantiaque curvae ab axe data, datur quantitas curvae. Ergo dabitur curvae hyperbolicae recta aequalis, data quadratura hyperbolae. Hinc habebimus et figuram logarithmicam quadratam per Greg. a S. Vincent., et summam seriei harmonicae

2 per Hugenium *erg. L* 4 f. et dimensione eius, ac partium *erg. L* 5 per analysin *erg. L* 8 f. gradus. | Hinc figurarum Heuratianarum, et quae evolutione describuntur *gestr.* | His *L* 9 f. per Wallisium *erg. L* 20 per Greg. a S. Vincent. *erg. L*

---

2 per Hugenium: *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 73 (*HO* XVIII, S. 213). 9 f. per Wallisium: *Nonnulla de centro gravitatis hyperbolae*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII Nr. 87 vom 14./24. Okt. 1672, S.5074 f.; auch in: *WO* I, S. 928 f. 17 per Hugeniana: *a. a. O.* S. 75 (*HO* XVIII S. 215). 20 per Greg. a S. Vincent.: Im *Opus geometricum*, 1647, findet sich hierzu nichts. Die Namensnennung geht möglicherweise auf eine beiläufige Erwähnung von Gregorius durch J. Wallis zurück, s. J. Wallis, Brief an W. Brouncker vom 5./15. Aug. 1668. In: *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 38 vom 17./27. Aug. 1668, S.753–759. 22 figurarum Heuratianarum: H. v. Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas, DGS* I S. 517–520; vgl. a. Huygens, *a. a. O.* S. 71 f. (*HO* XVIII S. 209).

infinitae, et per ostensa a Gregorio Scoto summam figurae secantium, seu planisphaerii nautici, et summam ex trilineis quadratico cubico etc.

Data quadratura hyperbolae, datur et superficiei sphaeroeidis lati, seu circa minorem ellipseos diametrum aequalis circulus, per ostensa ab Hugenio.

Hinc apparet distantiam centri gravitatis curvae quadrantis elliptici ab axe minore supponere quadraturam hyperbolae, ab axe autem maiore, supponere quadraturam circuli. Sed cum supposita quadratura circuli habeatur quadratura ellipsis, habebitur et centrum gravitatis ellipsis eiusque partium[,] datur enim quantitas sphaeroeidis. Quo posito, per methodum centri gravitatis peripheriae, inveniemus centrum gravitatis curvae ellipticae[,] ergo et superficies sphaeroeidis circa axem minorem. At hanc iam tum habemus, hinc aequatio. Ergo posita quadratura hyperbolae datur quadratura circuli, et vicissim. Hinc cum detur superficies sphaeroeidis posita quadratura hyperbolae, dabitur ea posita et quantitas curvae ellipticae, supposito scilicet dari eius centrum gravitatis, vel eius saltem distantiam ab axe minore.

Requiritur autem ad haec centrum gravitatis non tantum quadrantis elliptici, sed et trilinei elliptici concavi, quod est complementum quadrantis ad rectangulum. Sed haec modo duae lineae momenta rectarum tam in quadrante, quam in trilineo concavo bisecantes non coincidant, et per utriusque centrum gravitatis transeant. An coincidant, statim experiri licet, ducatur recta per centra gravitatis trilinei concavi et convexi, si ea recta utrobique rectarum laterum momenta non bisecat, impossibile est eas lineas coincidere, cum aliae omnes lineae per duo centra simul non transeant.

Ad areas spatiorum aut rectarum, evolutione descriptarum, habendas, ita procedendum est: Ante omnia curva evolvenda dividatur in chordas infinitas eundem ad se invicem angulum facientes, quod per analysin obtineri potest, inita ratione, qua ducantur indefinitae tangentes quibus productis duae quaelibet vicinae iisdem se angulis secant. Hoc autem obtineri facile potest, cum curvae evolvendae mensura detur, et omnia eius puncta

1 per ostensa a Gregorio Scoto *erg. L* 8 datur enim quantitas sphaeroeidis *erg. L* 10 f. ergo et . . . hinc aequatio *erg. L*

---

1 a Gregorio Scoto: *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 14–24. 4 ab Hugenio: *a. a. O.* S. 75 (*HO* XVIII S. 215).

geometrice inveniri possint. His ita positis constat ex alibi ostensis evolutione descriptae chordas hac evolutione designatas esse filis describentibus, seu summis chordarum evolutae, proportionales. Porro spatium evolutione descriptum intelligi potest componi ex triangulis infinitis, quorum altitudines fila, bases vero chordae in evolutione descripta, filis respondentes. Sed quia bases istae sunt lineae infinite parvae, ideo altitudines duci intelligantur in lineas assignabiles, ipsis proportionales, id est in se ipsas; habebimusque summam productam, quae est summa filorum quadratorum. Sed haec summa tanto nimia est, quanto unum filum est maius chordae inassignabili sibi respondenti, seu ea est ratio summae huius ad veram, quae est summae omnium filorum, ad summam omnium chordarum, seu summae omnium filorum unitati datae in axe figurae applicatorum, ad curvam evolutione descriptam. Iam summa horum filorum vel summa arcuum evolutae aequatur momento evolutae ad basin, seu summae dimissarum ad basin ipsi applicatarum, ergo s i s u m m a f i l o r u m q u a d r a t o r u m m u l t i p l i c e t u r per curvam evolutione descriptam, factumque dividatur per summam filorum simpliciter, seu momentum curvae evolutae ad b a s i n (latus scilicet versus quod terminatur evolutio) quotiens erit s p a t i u m e v o l u t i o n a l e.

Hinc si detur quadratura duorum trilineorum orthogoniorum, alterius concavi cuius curva est evoluta, alterius convexi, cuius curva est evolutione descripta, ita, ut basis amborum sit communis; altitudines autem utriusque simul iunctae constituant evolutam; deturque summa chordis evolutae aequalis filorum quadratorum, pariter ac simplicium; d a b i t u r c u r v a e e v o l u t i o n e d e s c r i p t a e a e q u a l i s r e c t a.

Nota summa filorum simplex semper eadem est, utcunque chordae assumantur, est enim summa triangularis chordarum, seu momentum curvae ex basi libratae. Videndum an summa quadratorum filorum, facili forte negotio inveniri possit, quomodocunque di-

---

11 f. Error ut mox dicam.

22 f. Error hoc enim verum non est, nisi arcus dividantur per ordinatas.

1 ex alibi ostensis *erg. L* 2 hac evolutione designatas *erg. L* 12 summae *(1)* sinuum *(2)* demissarum *L* 17 quadratura *(1)* figurae *(2)* duarum figurarum cuius curva est evoluta, *(3)* duorum *L* 20 chordis evolutae aequalis *erg. L*

---

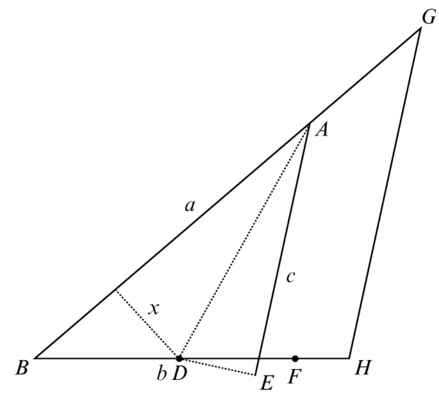
1 ex alibi ostensis: s. z. B. N. 7 Teile 1 u. 2.

visa sit curva in chordas, de quo dubito. Quicquid tamen sit, putem summas istorum filorum quadratorumve, ideo forte tanto facilius iniri posse, quia curva evoluta in rectam potest transmutari, omnesque eius partes.

Nota Hugenius edidit librum de quadratura hyperbolae circuli et ellipseos, ex dato partium gravitatis centro; cum generalibus Guldini inventis addidisset inventionem solidi hyperbolici circa diametrum coniugatam. Haec Gregorius Scotus in *Appendicula*, quae est in eius *Exercitationibus*. Videndum an huic solido, ut arbitror cylindrum exhibuerit aequalem. Ego vero exhibere possum aliud solidum hyperbolicum cylindro aequale, scilicet circa asymptoton. Ponamus eiusdem spatii hyperbolici iam circa asymptoton, quam circa diametrum coniugatam dari cylindrum. Ergo cum solida sint ut momenta, seu in composita ex ratione figurarum et distantiarum ipsorum centrorum; et figura sit eadem, ut assumo (quod tamen nondum manifestum est) sequetur dari rationem distantiae centri gravitatis spatii hyperbolici ab asymptota, ad rationem distantiae eiusdem a diametro coniugata. Atqui idem centrum cadit in aliam rectam. Hinc quaestio: si quaeritur aliquod punctum, et datur recta in quam cadit punctum, et ratio distantiarum eiusdem puncti, ab aliis duabus rectis datis, an punctum inveniri possit, et si potest, an problema sit planum. Quibus positis daretur utique centrum gravitatis hyperbolae, et quod hinc sequitur, absoluta hyperbolae quadratura.

6 f. in Appendicula ... Exercitationibus *erg. L* 8 aequalem. *(1)* Habemus ergo *(2)* Ego *L* 18+341,2 quadratura. | Imo sufficit punctum quoddam cadere in unam lineam rectam et dari distantiam eius ab alia linea recta. *erg. und gestr.* | Cum *L*

4 Nota: Im Folgenden zitiert Leibniz — allerdings nicht ganz exakt — J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 2. Die angezogene Passage lautet: „et praecipue Hugenius ... testantur *Theoremata de Quadratura Hyperboles, Ellipsis et Circuli ex dato portionum gravitatis Centro*, quae sunt solummodo consectaria ad generalia *Guldini* inventa, anno 1635 impressa, supposito tantum solido rotundo Hyperbolico circa Diametrum conjugatam, quod inventu non est difficile“.



[*Fig. 3*]

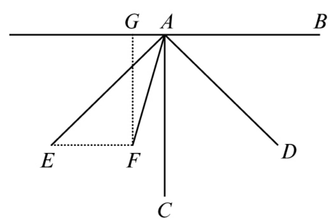
Cum tres istae lineae sint datae, si nulla earum nulli parallela intelligatur, iungantur dum constituant triangulum, cuius omnia latera data esse necesse est $a.\, b.\, c.$ Distantia puncti quaesiti ab una recta ponatur esse x. Ex puncto quaesito ducatur recta in oppositum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ angulum, secabitur triangulum datum in bina. Quorum unius altitudo est x. basis a. ergo area $\frac{ax}{2}$. alterius basis c. altitudo DE. ergo area $\frac{c \frown DE}{2}$. At DE facile haberi potest, cum enim DE ad x. ratio sit data γ. ergo trianguli area $\frac{c \frown DE}{2}$, erit $= \frac{cx\gamma}{2}$. Summa harum duarum arearum aequatur areae totius trianguli aliunde datae, cum omnia latera data sint, quam appellabimus f^2. Ergo $\frac{cx\gamma + ax}{2} = f^2$. ergo $x = \frac{2f^2}{c\gamma + a}$. Quod si ergo eiusdem spatii hyperbolici solida circa diversos axes genita ad cylindros reduci possunt, et praeterea datur recta quaedam alia ab illis axibus transiens per eius centrum gravitatis, dabitur eius spatii centrum gravitatis, ac proinde quadratura.

12 *Nach* quadratura *interlinear*:
Si linearum datarum duae omnesve sint parallelae, non minus facilis est calculus.

2 intelligatur | (qui difficillimus est casus *gestr.* | , iungantur *L*

Sed quid si punctum D quaesitum extra $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ cadat v.g. in F. sed nos id nesciamus. Tunc sic procedendum[:] determinari potest facile, intra quos limites cadat F. quo habito, ducatur trans illum limitem, parallela ipsi AE, v.g. GH. scilicet ipsa BA producta in G. Et hac methodo reperiri potest centrum gravitatis curvae parabolae. Porro si datur distantia puncti quaesiti D. vel F. a recta AE. dabitur etiam a parallela eius GH. modo constet, intra an trans ipsam parallelam punctum quaesitum cadat.

Nota methodum qua in diagrammate rectae datae a quaesitis, aut mixtis, id est quae ex coniunctione datarum quaesitarumque habentur distingui possint. Dati sunt linearum ductus, quaesita una pluresve, punctis exhibebuntur, item quae ex his fiunt simplici multiplicatione, alia quoque nota quae solum additione subtractione multiplicatione ac divisione, alia denique quae radicum extractionibus ex quantitatibus mixtis, obtinentur haec in diagrammatis discernere utile foret. Hoc loco tantum datas quaesitas et mixtas discrevimus.



[*Fig. 4*]

At vero si omnes tres lineae, sint parallelae, aut si duae tantum sint parallelae, aut si omnes tres lineae in uno puncto concurrant problema determinari non potest. Sint enim AB et AC asymptotae, AD axis, AE axis coniungatus, habemus duo solida eiusdem spatii hyperbolici, alterum circa AB alterum circa AE. Habemus et rectam AF in quam cadit centrum gravitatis spatii hyperbolici. Sumatur punctum quodlibet in linea AF ut F, quod ponatur esse centrum gravitatis. Distantia eius ab EA esto $\underline{EF}$. ab AB esto $\underline{FG}$. Manifestum autem quodcunque sit punctum F rationem FE ad FG. semper esse

1–6 Sed quid ... quaesitum cadat. *erg. L*

14 [*Fig. 4*]: Nach dem Text sollte die Linie AF zwischen AC und AD liegen sowie EF senkrecht auf AE stehen. Leibniz zeichnet die Figur ohne Hyperbel. — Vgl. dazu auch Teil 2, Fig. 9b, wo Leibniz Hyperbel und Hyperbelsegment angibt.

eandem, nec proinde punctum aliquod hoc modo determinari posse. Imo potius ex eo quod duo solida, unum circa asymptotam AB, alterum circa coniugatam AE habentur, ratione distantiarum lineam AF ex puncto concursus duorum axium horum s⟨olidorum⟩ ductam, et datam, quae solidorum est distantia ⟨ — ⟩ servantem inveniri, ⟨nil⟩ reperiatur ⟨ — ⟩ rectam ⟨ — ⟩ producta non incidit. Quare ex solidis ⟨ — ⟩ invenietur n⟨ — ⟩.

Hinc interim methodum habemus universalem solida omnia hyperbolica reperiendi, quorum axes producti incidunt in A. seu centrum asymptotae. Sumto enim puncto quolibet in axe aequilibrii AF per duo solida circa diametrum coniugatam et circa asymptotam invento, ut sunt distantiae axium in A concurrentium ab illo puncto, ita erunt solida. Ergo si linea aliqua recta ex A ducta tantum positione data sit, etsi non magnitudine, ratio solidorum etiam in lineis positione ductis, dabitur.

In genere si duo quaedam solida eiusdem figurae circa diversos axes dentur, statim dabitur axis quidam aequilibrii, seu linea recta transiens per centrum gravitatis. Unde sive duo isti axes sint paralleli, sive in uno puncto concurrant, solidum circa alium axem quemlibet illis, aut uni eorum parallelum, aut in eodem puncto concurrentem dabitur.

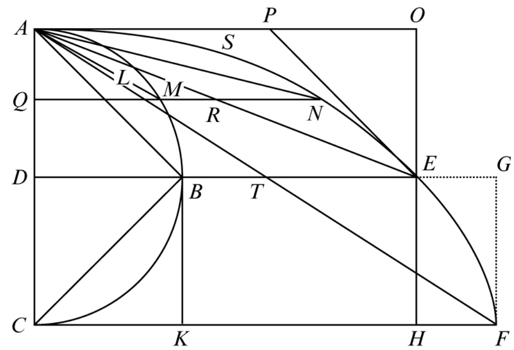
Hinc si duae dentur superficies [hyperbolicae] dabuntur aliae innumerae.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Ordinatae} & \dfrac{a^2}{1} & \dfrac{a^2}{2} & \dfrac{a^2}{3} & \dfrac{a^2}{4} & \dfrac{a^2}{5} \\[2ex]
\text{Differentiae} & \dfrac{a^2}{1}-\dfrac{a^2}{2}\Bigg| & \dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2}{3}\Bigg| & \dfrac{a^2}{3}-\dfrac{a^2}{4}\Bigg| & \dfrac{a^2}{4}-\dfrac{a^2}{5}\Bigg| & \\[2ex]
\begin{array}{l}\text{Summa}\bigtriangledown^{\text{laris}}\\ \text{differentiarum}\end{array} & \multicolumn{5}{l}{a^2 \; + \; a^2 \; + \; a^2 \; + \; a^2 \; + \text{ etc.}\lrcorner -} \\[2ex]
 & \multicolumn{5}{l}{\dfrac{a^2}{2} \quad \dfrac{2a^2}{3} \quad \dfrac{3a^2}{4} \quad \dfrac{4a^2}{5} \qquad\qquad = \quad \dfrac{a^2}{2} \quad \dfrac{a^2}{3} \quad \dfrac{a^2}{4}}
\end{array}$$

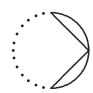
16 parabolicae *L ändert Hrsg.*

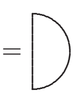
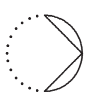
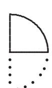
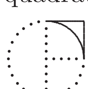
---

4 f. ⟨ — ⟩: Aufgrund des in dieser Passage stark wechselnden Schriftduktus kann über die Zahl der ausgefallenden Worte keine sichere Aussage gemacht werden, insgesamt dürfte aber nicht mehr als eine Drittelzeile an Text verloren gegangen sein.



[*Fig. 5*]

Esto semicirculus $ABCD = \frac{ax}{4}$. posito radio $AD = a$. et circumferentia circuli x. erit semicycloeis $AEFCA = \frac{3ax}{4}$. et retorta semicycloeidis $AEFCBA = \frac{2ax}{4} = \frac{ax}{2} =$ circulo genitori. Si a circulo genitore auferatur quadratum radii, a^2, restabit semicirculus cum binis segmentis quadrantis  $+2$  $= BCFE$. posito $ABE = a^2$.

Porro rectangulum $DCFG =$ circulo, a quo si auferatur $BCFE + DBC =$  $+$ 2  $+$  restabit differentia inter quadratum radii et quadrantem. Nam si a circulo auferas primum semicirculum restabit semicirculus, a quo si auferas duo segmenta, restabit quadratum radii, a quo si auferas quadrantem restabit trilineum concavum quadrantis,  vel $BKC = EGF$. ergo $EGF + DBC =$ quadrato radii. ergo $= ABE$.

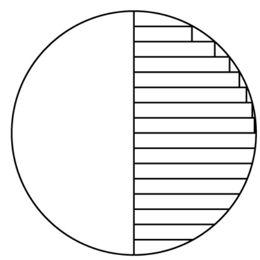
10–345,1 ABE. *(1)* Porro CF *(a)* bise *(b)* peripheria *(c)* semiperipheria circuli bisecta in I. *(aa)* rectangulum re *(bb)* rectaque CI translata in BH rectangulum BKHL. erit semicirculus, quo ablato ex BCFE. residuum BKC+ *(2)* Porro *L*

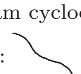
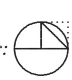
1 [*Fig. 5*]: In seiner Handzeichnung hat Leibniz die Zykloide etwas zu lang ausgestreckt gezeichnet. Dadurch liefert die Abtragung von CI $(= \frac{1}{2}CF)$ auf der Strecke BG einen neuen Punkt H, das Lot von H auf CF den Punkt L (s. die Variante zu Z. 10 – S. 345 Z. 1). Diese Elemente sowie vier überflüssige weitere hat Leibniz getilgt; sie werden der Übersichtlichkeit halber weggelassen.

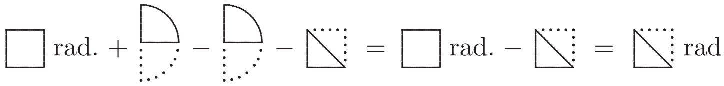
Porro cum BE aequetur arcui AB seu quadranti, ergo $BEHK$ aequatur semicirculo, quo exemto ex $BCFE$ residuum $BKC + EFH$ = duobus segmentis $AB + BC$. Atqui $BKC = EGF$ ergo $BKC + EFH = EGFH$. ergo $EGFH$ = duobus segmentis. Hoc autem verum esse aliunde ita probamus: Iam $EGFH$ est rectangulum ex radio et differentia inter CF semiperipheriam, et DBE summam arcus quadrantis et radii seu differentiae inter radium et arcum quadrantis $\frac{x}{4} - a. \frown a = \frac{ax}{4} - a^2$ = duplici segmento.

Si ab $ADENA$ id est quadrato radii et quadrante simul sumtis auferatur triangulum ADE, seu quadrans + semiquadratum radii [restabit]

8–346,1 *Neben der Streichung in Blindtechnik:*



3 f. Hoc … probamus: *erg. L* 6 f. segmento. *(1)* | Porro *erg.* | triangulum ABE cuius basis, *(a)* perip *(b)* arcus quadrantis, altitudo radius facit semicirculum, a quo si auferatur segmentum ABL. | demto segmento *gestr.* | restabit quadrans circuli + semiquadratum radii, *(2)* Summa retortae quadrabilis AEB. et trianguli huius facit semicirculum, + quadratum *(a)* semicircu *(b)* radii a quo si auferatur LBE et addatur segmentum AL. habebitur curvilineum ABE. id est quadratum radii + segmentum quadrantis ergo *(aa)* semicirc. + *(bb)* + ~~□rad.~~ + segm. AL − LBE = ~~□rad.~~ + segm. AB. Iam si utrinque auferatur segmentum AL, *(aaa)* restab *(bbb)* cum ademto AL ex AB restet trilineum ALB. erit ALB = semicirculo AEB − LEB. ut patet. *(3)* Si *L* 8–346,1 seu *(1)* semicirculus + semiquadratum radii restabit □rad. + − − = − . Unde patet *(a)* differen *(b)* ▽ADE esse maius ipso ADENA ipsa differentia inter et id est segmento quadrantis. Quod videtur absurdum, cum ▽ADE ipsi ADENA inesse videatur. Nec puto, posita veritate propositionis nostrae aliud quicquam responderi posse, quam triangulum istud ADE non cadere totum intra cycloeidem. Quod vereor ne verum sit, ac proinde lineam cycloeidalem esse mire difformem, initio convexam, postea concavam, sub finem rursus convexam, ut: . Sane in circulo ordinatae pariter et arcus primum modice crescunt, subito crescunt ingentibus incrementis, sed ea incrementa continue decrescunt ad medium usque unde iterum crescunt. *Zusätzlich, nicht gestr. Merkfigur:*  *(2)* quadrans + semiquadratum radii | restabit *gestr., erg. Hrsg.* | □rad. *L*



Habemus ergo quadraturam segmenti cycloeidalis $ANEA$.

Iam cum tota semicycloeis sit triplum semicirculi, si ab ea auferatur hoc segmentum cycloeidale quod est dimidium quadratum radii, residuum erit circulus + quadrant. + segm. quadr. = $AEFCA$. hinc auferatur ADE. quadrans + semiquadr. = circ. + segm. quadr. − semiquadr. = semicirc. + quadr. + 2 segm. = $DEFCD$, ut supra.

$ADEO$ est semicirc. + quadr. rad. EOP = et simile BAD quae simul faciunt □ rad. Ergo rhomboeides $ABEP$ = semicirculo, quod iam aliunde constat, at si a semicirculo auferatur □ rad. = retorta $ANEBLA$ restabunt duo segmenta, quorum cum ALB sit unum, erit $APENA$ alterum id ergo = segmento quadrantis.

QR est dimidia DE. et AQ dimidia AD, ergo AQR quarta AED, seu decimasexta pars circuli + semidecimasexta pars quadrati radii, auferatur ab $AQNSA$ dimidio hexagoni circuli inscripti, residuum erit $ARNS$, ab eo auferatur $ARNA$ seu quarta pars radii in sinum octantis et arcum eiusdem residuum erit segmentum $ANSA$, quo ablato a segmento $AESA$ restab⟨it AN⟩EA ergo et $RNER$ ergo et $MBERM$ etc.

Redeatur ad figuram cycloeidis pagina praecedenti aio et trilinei mixti $ATENA$ quadraturam haberi posse. Est enim totum abscissum $ADENA$ = quadr. rad. + quadrant. per superiora at triangulum ADT, cuius altitudo AD radius, basis DT dimidia CF seu arcus quadrantis. Hinc quia triangulum $ATEA$ = semiquadrato, facile patet $AENA$ segmentum esse etiam semiquadratum, ac proinde rectam AE hoc mixtilineum $ATENA$ bisecare. Si vero inverso modo ex supra iam demonstratis assumas quadraturam $AENA$ segmenti haberi, addito rectangulo $AETA$ cuius itidem datur quadratura, facile conficitur eadem mixti trilinei $A\ T\ E\ N\ A$, quadratura.

14 radii *(1)* ex sinu *(2)* in sinum octantis et *(a)* octante *(b)* arcum *L* 19 quadrantis. *(1)* Idem aliter sic concludes, quia *(2)* Hinc *L*

2 Habemus: Das hier ermittelte Ergebnis gibt Leibniz im Sommer 1674 an Huygens und am 15. VII. 1674 an Oldenburg weiter, vgl. *LSB* III, 1 S. 115 f. und 119 f. 11–15 Die folgenden Betrachtungen sind nur qualitativ richtig. 16 Redeatur: Damit beginnt Bogen 2.

[*Teil 2*]

Data area figurae, datoque uno eius solido tantum habetur figurae centrum gravitatis. Semper si duo ex his tribus, uno solido, area, centro gravitatis dentur, datur tertium.

Figurae logarithmicae area data, dabitur statim et momentum eius ex basi proportionalium maxima, seu summa triangularis proportionalium incipiendo a basi. Quia summa ista proportionalium est ad aream, uti area est ad summam differentiarum ex hypothesi, atqui area datur, ex hypothesi, summa autem differentiarum aliunde, est enim ordinatarum seu proportionalium maxima. Ecce exemplum memorabile plani quod est media proportionalis inter solidum et lineam. Ut appareat posse heterogenea quoque comparari. Ergo quadratum plani, seu figura quartae dimensionis ex plano in se ipsum ducto, seu a^4 (plano posito a^2) aequabitur momento isti ducto in maximam applicatarum seu proportionalium b. Ergo $\dfrac{a^4}{b}$ = momento figurae huius ex basi. Dato iam momento eius, vel quod hinc sequitur solido circa basin, seu maximam applicatarum, dabitur et centrum gravitatis figurae ac proinde solida circa quemlibet alium axem.

Porro dato centro gravitatis figurae, datur et centrum gravitatis peripheriae, unde spes est methodo supra tradita centrum gravitatis curvae haberi posse. Quod si iam momentum eius ex aliquo axe haberi posset, vel aliqua superficies eius revolutione genita, haberetur ipsius curvae dimensio.

Centrum gravitatis alicuius solidi reperitur, reperto solido ungulae. Ungulae autem solidum datur, data area ungulae et basis, quia ungula fit ex ductu distantiae centri gravitatis a basi in basin. At ita unam habemus distantiam tantum. Nondum totum centrum gravitatis.

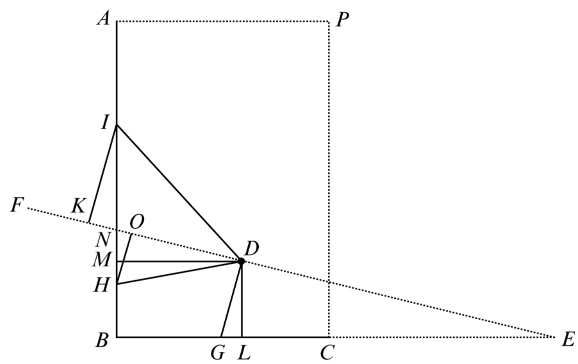
Data figurae cuiusdam quadratura, datoque eius momento ex basi, dabitur quadratura alterius figurae, cuius ordinatarum differentiae, sunt ut ordinatae figurae datae. Haec autem figura geometrice haberi potest, si figura data, omnesque eius portiones a basi ab-

20 ungulae | seu trilinei *gestr.* |. Ungulae *L* 23 f. gravitatis | , quod sic habebimus, si v.g. obliquae ungulae termi *gestr.* | . Data *L* 24 f. quadratura | alterius *erg.* | figurae, *(1)* cuiusde *(2)* cuius | *(a)* applicatarum *(b)* ordinatarum *erg.* | differentiae *L*

---

17 supra tradita: s. o. Teil 1, S. 332 Z. 13 – S. 333 Z. 7.

scissae quadrari possunt, ut in parabola aut paraboloeidibus. Figurae differentiales dici possunt, quas metimur per differentias ordinatarum. Hoc autem modo metiri possumus tum ungulas seu momenta, tum figuras ungulis homogeneas quales sunt tum solidae revolutione genitae, tum planae quarum rectae ordinatae, plana ungularum ordinata basi parallela proportione referunt. Quemadmodum alioquin scimus parabolae ordinatas ad basin referre elementa hemisphaerii.



[*Fig. 6*]

Sint duae rectae normales AB. BC. datumque inter eas punctum D. per quod transeat recta FE. ita comparata ut transeat per centrum gravitatis totius ABC. seu momentum eius bisecet, ita ut posita FE. velut axe aequilibrii momenta utrinque tum ipsius NA. tum ipsius NBC. sint aequalia, vel ut recta AN. ducta in rectam IK. distantiam sui centri gravitatis seu puncti medii I. ab axe aequilibrii, rectangulum productum aequetur duobus rectangulis NB in HO. et BC in GD. Porro cum punctum D. datum sit dabitur eius distantia a recta AB. nempe MD. et a recta BC. nempe $DL = MB$. His ita positis ad analysin accedamus.

3 seu momenta *erg.* *L* 4 planae *(1)* quaedam *(2)* quarum *(a)* ordi *(b)* rectae *(aa)* applicatae *(bb)* ordinatae *L* 4 f. ordinata *(1)* ad basin *(2)* basi *L* 6 ad *(1)* axem *(2)* basin *L* 6+8 hemisphaerii | , et trilinei *gestr.* | . Sint *L*

---

5 alioquin scimus: H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 69 f.; s. a. N. 1.

$\underline{\underline{AB}} = (a)$. $\underline{\underline{BC}} = (b)$. $\underline{\underline{DM}} = \underline{\underline{BL}} = (c)$. $\underline{\underline{DL}} = \underline{\underline{MB}} = (d)$. $\underline{\underline{AM}} = a - d$. $\underline{\underline{LC}} = b - c$. $\underline{\underline{NB}}$ ponatur esse (x). ergo $\underline{\underline{NH}}$ est $\dfrac{x}{2}$. Compleatur triangulum NEB. Porro $\underline{\underline{NM}} = NB - MB = x - d$. eius $\square$, $= x^2 + d^2 - 2xd$. cui addatur $\square$ de $DM = c^2$. eius Rq erit

$$Rq\, x^2 + d^2 - 2xd + c^2. = \underline{\underline{ND}}.$$

Iam $\dfrac{NB}{NM} = \dfrac{BE}{MD}$. Ergo $\dfrac{MD \frown NB}{NM} = BE$. $\dfrac{cx}{x-d} = \underline{\underline{\underline{BE}}}$. ergo

$$x^2 + \frac{c^2x^2}{x^2 + d^2 - 2xd},, Rq = \underline{\underline{\underline{NE}}}.$$

Porro $GL = GC - LC$ (seu quia $GC = \dfrac{b}{2}$) $= \dfrac{b}{2} - b + c = \dfrac{b}{2} - \dfrac{2b}{2} + c = c - \dfrac{b}{2} = \underline{\underline{\underline{GL}}}$. ergo

$$\underline{\underline{\underline{DG}}} = d^2 + c^2 + \frac{b^2}{4} - cb, Rq.$$

$\dfrac{NH \frown MD}{2}$ area trianguli $\underline{\underline{NHD}} = \dfrac{cx}{4}$. cuius duplum $\dfrac{cx}{2}$ divisum per ND. dabit OH. ergo

$$\frac{cx}{2\, Rq\, x^2 + d^2 - 2xd + c^2} = \underline{\underline{\underline{OH}}}.$$

Restat ut et $\underline{\underline{IK}}$. investigemus, quod ita fiet: Duo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KNI. et MND. sunt similia, sunt enim rectangula, et habent angulos KNI. et MND. ad verticem sibi oppositos aequales, cum ergo duos habeant angulos aequales, habebunt omnes aequales. Habebunt ergo latera homologa proportionalia seu $\dfrac{IN}{ND} = \dfrac{IK}{MD}$. ergo $\dfrac{MD \frown IN}{ND} = IK$. At IN. habere facile est, est enim $\dfrac{AN}{2}$. et $AN = a - x$. ergo $IN = \dfrac{a-x}{2}$. ergo

$$\underline{\underline{\underline{IK}}} = \frac{ca - cx}{2\, Rq\, x^2 + d^2 - 2xd + c^2}.$$

Habemus ergo tres distantias $DG.\, OH.\, IK$. quae ducantur DG in $\overset{= b}{BC.}$ et OH in $\overset{= x}{NB}$. et IK in $\overset{= a - x}{AN.}$ erit $IK \frown AN = DG \frown BC + OH \frown NB$.

8 f. $\mathrm{d}^2 + \mathrm{c}^2 + \dfrac{\mathrm{b}^2}{4} - \mathrm{cb}, \mathrm{Rq}$. *(1)* Porro D *(2)* Eodem modo recta $\mathrm{MH} = \mathrm{MB} - \dfrac{\mathrm{NB}}{2} (= \mathrm{HB}) = \mathrm{d} - \dfrac{\mathrm{x}}{2} = \underline{\underline{\mathrm{MH}}}$. eius $\square$ addatur ad $\square$ *(3)* $\dfrac{\mathrm{NH} \frown \mathrm{MD}}{2}$ *L*

$$\begin{array}{l|l|l|}
DG = \underbrace{d^2+c^2+\frac{b^2}{4}-bc,}_{Rq}\frown b & OH = \dfrac{cx}{2\,\underbrace{c^2+x^2+d^2-2xd}_{Rq}}\frown x & IK = \dfrac{ca-cx}{2\,\underbrace{c^2+x^2+d^2-2xd}_{Rq}}\frown a-x \\
\underbrace{d^2b^2+c^2b^2+\frac{b^4}{4}-b^3c}_{Rq} \quad = & \cancel{\dfrac{cx^2}{2\,\underbrace{c^2+x^2+d^2-2xd}_{Rq}}} \quad = & \dfrac{a^2c+\cancel{cx^2}-2xac}{2\,\underbrace{c^2+x^2+d^2-2xd}_{Rq}} \quad = \\
\end{array}$$

$$\begin{array}{lclcl}
\underline{\qquad\qquad\qquad} & + & \underline{\qquad\qquad\qquad} & = & \underline{\qquad\qquad\qquad} \\
\underline{\qquad\qquad\qquad} & & & = & \underline{\qquad\qquad\qquad}
\end{array}$$

$$d^2b^2 + c^2b^2 + \frac{b^4}{4} - b^3c = \frac{a^4c^2 + c^2x^4 + 6a^2c^2x^2 - 4xa^3c^2 - 4x^3ac^2}{4\frown \llcorner c^2+x^2+d^2-2xd\lrcorner}.$$

$$\begin{array}{l}
4c^2 + 4d^2,\frown + \quad d^2b^2 + c^2b^2 + \dfrac{b^4}{4} - b^3c, = a^4c^2 + c^2x^4 + 6a^2c^2x^2 - 4xa^3c^2 - 4x^3ac^2. \\
4x^2 - 8xd,\frown + \quad \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad}
\end{array}$$

$$4c^2 + 4d^2,\frown\, d^2b^2 + c^2b^2 + \frac{b^4}{4} - b^3c,, - a^4c^2 = c^2x^4 + 6a^2c^2x^2 - 4xa^3c^2 - 4x^3a^2,,$$

$$-4x^2 + 8xd,\frown\, d^2b^2 + c^2b^2 + \frac{b^4}{4} - b^3c.$$

Haec aequatio reduci tunc poterit, quando in casu aliquo occurrente ipsius b. et c. et d. ratio ad a. data erit, ita potest fieri ut sit $a = b$.

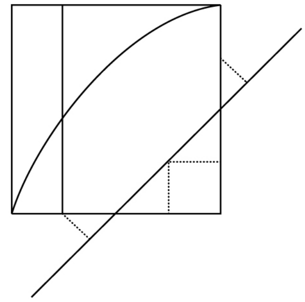
---

2 *Nebenrechnung*:
$$\begin{array}{rcl}
ca - cx & = & a - x \frown c \\
a - \ \ x & & \left.\underline{a - x}\right\} \\
& & a^2c + x^2c - 2xac
\end{array}$$
Daneben isoliert:
$$\underbrace{4a^2 + \frac{a^2}{2}}_{\frac{9a^2}{2}} = 3a \frown \frac{3}{2}a = \frac{9a^2}{2}.$$

5 $a^4c^2 + c^2x^4 + \overset{6}{\cancel{2}}a^2c^2x^2 + \cancel{4x^2a^2c^2} - 4xa^3c^2 - 4x^3ac^2$

---

5 Auf der rechten Seite der Gleichung müsste im Zähler $a^4c^2 + 4x^2a^2c^2 - 4xa^3c^2$ stehen. Der Fehler setzt sich bis Z. 9 fort.



[*Fig. 7*, *tlw. Blindzeichnung*]

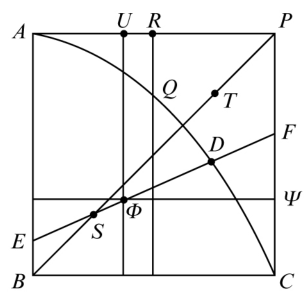
Imo vero methodus generalis est resolvendi problema datum per puram geometriam, illustri admodum exemplo imperfectionis algebrae in geometria. Nam rectam FE. transeuntem per D. et lineas datas ita secantem in N, ut IK in AN sit $= DG \frown BC + OH \frown NB$. necesse est transire per centrum gravitatis linearum AB. et BC. Quod ita inveniemus, libratae intelligantur primum ex axe AP. deinde ex axe PC. Si librentur [ex axe] AP. momentum earum ita facile habebitur, cum una sit axi parallela altera perpendicularis, parallelae BC. momentum erit rectangulum $ABC = ab$. perpendicularis AB. momentum erit semiquadratum AB, seu $\dfrac{a^2}{2}$. Iam $ab + \dfrac{a^2}{2}$ momentum dividatur per linearum summam $a + b$. erit $\dfrac{ab + \dfrac{a^2}{2}}{a+b}$ distantia centri gravitatis linearum $AB.\,BC$. ab axe AP. Momentum eorum ex axe PC. eodem modo initum erit: $ab + \dfrac{b^2}{2}$ et distantia centri gravitatis linearum ab axe PC. erit: $\dfrac{ab + \dfrac{b^2}{2}}{a+b}$. Erit ergo centrum gravitatis linearum normalium $AB.\,BC$. in intersectione harum distantiarum. Quod si iam recta per istud centrum, pariter et D. ducatur, ea praestabit desideratum.

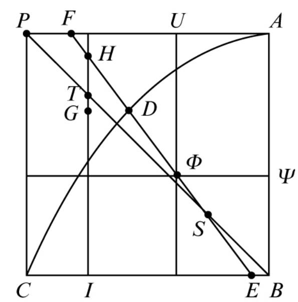
2 est *(1)* reducendi *(2)* resolvendi *L* 7 exe *L ändert Hrsg.*

1 [*Fig. 7*]: die Figur ist nicht ganz richtig gezeichnet, alle Lote müssten senkrecht zur schräglaufenden Geraden sein.

Ex his intelligi potest problemata quae analysis simplex, quanquam tenori quaestionis exacte insistens ingenti atque irreducibili aequatione involuta relinquit, saepe praeclaris illis geometriae purae theorematis, plana reddi posse.

Sit iam $a = b$. erit distantia utrobique aequalis: $\dfrac{a^2 + \dfrac{a^2}{2}}{2a} = \dfrac{3a^2}{4a} = \dfrac{3a}{4}$.





[*Fig. 8a, tlw. Blindzeichnung*] [*Fig. 8b, Blindzeichnung*]

$2 = \dfrac{3}{2} \frown x$. ergo $\dfrac{2}{\dfrac{3}{2}} = \dfrac{4}{3} = x$. ergo distantia centri gravitatis semiparabolae ab axe ad distantiam centri gravitatis quadrati seu $\dfrac{a}{2}$ est ut 3 ad 4. ergo $\dfrac{3a}{8}$ est distantia centri gravitatis semiparabolae ab axe. At distantiam centri gravitatis trilinei parabolici ab axe AB. ita investigabimus, cum solidum trilinei circa AB. revolutione genitum sit supplementum solidi parabolici circa axem quod est dimidium cylindri ad cylindrum, erit etiam dimidium cylindri, ergo $2 = \dfrac{3}{1} \frown z$. ergo $\dfrac{2}{3} = z$. Ergo si distantia centri gravitatis $\dfrac{a}{2}$

6–8 $4 — \dfrac{a}{2} — 3 — \dfrac{3a}{8}$

11–353,1 $2 — \dfrac{a}{2} — 3 — \dfrac{3a}{4}$

---

5 [*Fig. 8*]: In Fig. *8a* ist Ψ zu tief angesetzt, deshalb liegt die Gerade $S\Phi DF$ falsch. Leibniz hat daher Fig. *8b* neu gezeichnet.

quadrati est 2– trilinei erit 3. ergo $\frac{3a}{4}$. Unde apparet centrum gravitatis linearum APC, et trilinei $APCA$. cadere in eandem rectam ipsi AB. parallelam.

Nunc quaeramus centrum gravitatis tam semiparabolae quam trilinei a basi BC. vel AB. itidem per solida. Constat trilinei applicatas ordinatarum PC. parallelas esse in duplicata ratione altitudinum[,] seu si RQ. sit 1. PC. esse 4. Porro circuli revolutione geniti, sunt ut quadrata radiorum seu ordinatarum, ergo si quadratum de RQ. sit 1. quadratum de PC. erit 16. Ergo solidum trilinei erit homogeneum trilineo quadratoquadratico id est quinta pars cylindri et solidum ipsius semiparabolae revolutione circa AP. erit $\frac{4}{5}$ cylindri. His positis calculus centrorum gravitatis distantiarum ab AP. erit facilis. Nam $\frac{5}{4} = \frac{3}{2} \frown y$. ergo $\frac{\frac{5}{4}}{\frac{3}{2}} = \frac{10}{12} \,\Big|\, \frac{5}{6} = y$. Ergo si distantia centri gravitatis quadrati ab AP. seu $\frac{a}{2}$ sit ut 5. distantia centri gravitatis semiparabolae erit ut 6. ergo $\frac{6a}{10} \,\Big|\, \frac{3a}{5}$ est distantia centri gravitatis semiparabolae ab AP. Hinc patet centrum gravitatis semiparabolae non cadere in rectam BP. centra gravitatis linearum $AB + BC$. vel $AP + PC$. coniungentem seu diagonium quadrati, quia non est eius distantia $\frac{3a}{8}$ [=] AU. ab AB. aequalis distantiae $C\Psi[=]a - \frac{3a}{5} = \frac{2a}{5}$. ab altero axe. Ponamus iam centrum gravitatis semiparabolae inventum esse Φ. recta ducta EDF. transiens per S. et Φ. bisecabit momentum curvae parabolicae.

Restat centrum gravitatis trilinei, seu eius distantia ab AP. quam ex dictis facile habemus: $\frac{5}{1} = \frac{3}{1} \frown u$. ergo $\frac{5}{3} = u$. rationi distantiae centri gravitatis quadrati $\frac{a}{2}$ ad distantiam centri gravitatis trilinei ab axe AP. Ergo 5 — $\frac{a}{2}$ — 3 — $\frac{3a}{10}$. Patet hinc

---

14 f. $\frac{3}{8}$ $\frac{2}{5}$ $\frac{15}{40}$ $\frac{16}{40}$

4 ordinatarum *erg. L* 5 seu ... esse 4. *erg. L* 9 distantiarum ab AP. *erg. L*

semper distantiam centri gravitatis trilinei, tam ab AP. quam ab AB. ad distantiam centri gravitatis semiparabolae, habere rationem duplam, sed ita, ut quemadmodum $\frac{3a}{8}$ distantia centri semiparabolae ab AB. erat dimidia ipsius $\frac{3a}{4}$ distantiae trilinei ab eodem; ita contra nunc distantia centri semiparabolae ab AP. nempe $\frac{3a}{5}$ est dupla distantiae trilinei ab eodem $\frac{3a}{10}$.

Ex his patet centrum gravitatis trilinei G. haberi, et recta transiens per centrum gravitatis trilinei et linearum HGI. bisecabit momentum curvae AC. quod videtur absurdum et H. centrum curvae cadet extra eius concavitatem. Quod est absurdum poterit enim linea recta duci per centrum gravitatis quae figuram cuius centrum est non secet.

Hinc discimus rationem erroris, quia scilicet regula illa: (solida esse in ratione composita ex ratione figurarum et distantiarum eorum centrorum ab axe) abusi sumus, quam demonstratio eius non ostendit, nisi quando revolutum ubique attingit axem. Ideo quae de annularibus alibi ostendere posse credidi, vacillant.

Methodus generalis quadrandi figurarum quadraticas id est, quae sunt ut quadrata rectarum parallelarum infinitarum in figura assumtarum, neque enim tantum de applicatis loquor. Modo scilicet solidum aliquod figurae revolutione circa axem quendam figuram terminantem, genitum, cylindro comparari possit, tunc enim summa quadratorum iniri potest, ergo et momentum seu summa semiquadratorum. Ergo et figura quadrari potest ipsi homogena, eiusdemque altitudinis cum isto solido, erit enim ad ipsam, ut basis eius quae est recta, ad basin alterius quae est planum. Scilicet solidum multiplicetur per basin suam, dividatur per basin alterius planae figurae, quotiens erit area planae homogeneae. Si centrum gravitatis figurae datae habeatur, cum eo casu habeantur infinita solida, haberi possunt infinitae quadraticae eius parallelarum quadratis respondentes. Imo etsi non

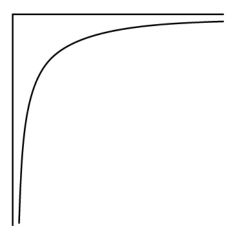
8 centrum *(1)* cavitatis *(2)* curvae *L* 10 discimus | facile *gestr.* | rationem *L* 12 eius *(1)* ostendit non esse veram *(2)* non *L* 17 genitum, *(1)* habeatur quia solidum istud su *(2)* cylindro *L* 22 figurae datae *erg.* *L* 23 eius *(1)* applicatis respon *(2)* applicatae *(3)* parallelarum *L*

13 de annularibus alibi: s. o. N. 16_2, Teil 2.

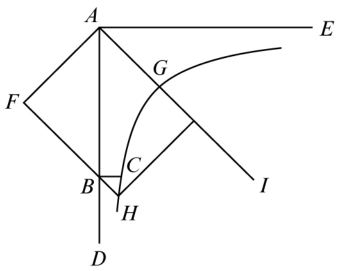
habeatur centrum gravitatis, modo habeatur recta in quam incidat centrum gravitatis, ut in hyperbola, eo enim casu nihilominus infinita solida, quorum axes ex eodem cum recta ista puncto egrediuntur comminisci licet, quae reduci possunt ad cylindros, quare et figurae quadraticae parallelarum ad axem istum perpendicularium haberi possunt.

Hoc specimine apparet non inutile esse in figuris alia quoque considerare elementa praeter applicatas; modo parallelae sint.

Nota autem figuram quadraticam circuli esse parabolam; trianguli esse trilineum parabolicum; parabolae esse quandam paraboloeidem altiorem; hyperbolae esse hyperboloeidem quadraticam; iuxta parallelas asymptotae, vel perpendiculares alteri asymptotae prout scilicet assumas rectangulum quod est numerator progressionis harmonicae.



[*Fig. 9a*]



[*Fig. 9b*]

Ut si duae asymptotae sint AE. AD. et rectangulum ABC. esse b^2. et rectam b dividas in partes aequales infinitas $a. a. a.$ etc. erunt applicatae parallelae ipsi AE. incipiendo ab infinita seu asymptota AE: (quae est $\frac{b^2}{a}$. quo casu manet infinita) $\frac{b^2}{a}$ $\frac{b^2}{2a}$ $\frac{b^2}{3a}$ $\frac{b^2}{4a}$ etc. et si totum $AEBC$. secetur in parallelas ipsi AB. et figura curvilinea plana describi intelligatur, cuius applicatae ut quadrata harum applicatarum, eius habebitur quadratura. Quemadmodum figurae apotomicae, quae sit ut ungulae plana, seu resectae a spatio hyperbolico, quam apotomicam vocare queas. Si revolutio sit circa axem coniugatum AF.

1 modo habeatur *(1)* recta *(2)* tres rectae in eodem puncto *(3)* recta *L* 8 f. esse *(1)* hyperbolam quadraticam *(2)* hyperboleidem *L* 9 asymptotae, *(1)* sed nunc assumi etiam potest iuxta parallelas axi, *(a)* posita *(b)* vel *(2)* vel perpendiculares cuius part *(3)* vel *L* 15 curvilinea plana *erg. L* 16 intelligatur, *(1)* quae sit *(2)* cuius applicatae *L*

2 ut in hyperbola: vgl. o. N. 16_2, S. 278, Erl. 1.

spatii $AFHG$. itidem haberi solidum potest per Hugeniana, et ideo figura dari quadratica quae ut quadrata parallelarum ipsi AF. Imo cum iam habere possim ex aliqui ostensis solidum semihyperbolae ex revolutione circa axem GI. habebimus figuram quadraticam hyperbolae proprie dictam, cuius quadrata sint ut applicatae hyperbolae. Hanc autem figuram puto describi posse per motum. Quod faciendum est, proponendaque in titulo eius quadratura.

Nota utile est semper series arithmeticae infinitorum redigi in figuras, ita enim exhiberi possunt modi diversi exhibendi earum applicatas, ex quibus aliqua potest oriri summabilis, ut in parabola.

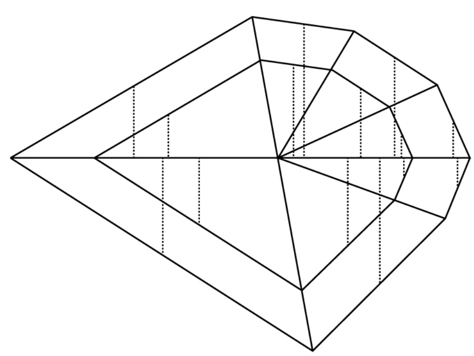
Redeundum ad investigandum centrum gravitatis semiparabolae, et eius trilinei. Distantia centri gravitatis semiparabolae ab axe AB. est recta inventa $\frac{3a}{8}$, trilinei ab axe AP. est recta inventa $\frac{3a}{10}$. Si trilineum parabolicum volvatur circa axem suum PC. erunt circuli basi paralleli, ut quadrata altitudinum, at applicatae, sunt ut differentiae basis ab applicatis quae sunt in subdupla altitudinum. Sunt enim applicatae: $a - Rq\,0$. $a - Rq\,1$. $a - Rq\,2$. $a - Rq\,3$. (Ita tum ut componens istas applicatas, $Rq\,1$ etc. sit ad 1. partem infinitesimam aliquotam ipsius PC. ut est pyramis ipsius, ad eius triangulum.) ergo quadrata applicatarum $a^2 - 0$. $a^2 - 1$. $[a^2 - 2.]$ $a^2 - 3$. $a^2 - 4$. posito iam 1. 2. 3. 4. etc. aequari non triangulo, sed prismati a. erit totum $\frac{a^3}{2}$. De quo ne dubitetur, aliter poterit iniri ratio posita applicata non $Rq\,1$. $Rq\,2$. etc. sed esse ita ad datam maximam $b = a$. ut scilicet quadrata earum sint ut altitudines[;] quadratum maximae $\frac{\beta^2}{a^2} = \frac{1}{a}$. Ergo $\beta^2 = \frac{a^2}{a}$. item $\gamma^2 = \frac{2a^2}{a}$. Sed inverso modo rectius procedemus posito x. esse maximam post a. fiet:

3 semihyperbolae *erg. L* 9 ut in *(1)* hyperbola *(2)* parabola *L* 14 sunt *(1)* ut *(a)* applicatae altitudinum *(b)* radices a *(2)* in *L* 16 est *(1)* summa earum *(2)* pyramis *L* 17 $a^2 - 2$. *erg. Hrsg.* 19 b = a. *(1)* erit ergo primae quadratum *(2)* posito maximae $\square^{to}$ a^2. quod sit ad minimam, ut a. ad 1. erit *(a)* primum *(b)* prima *(c)* a. *(d)* minima applicata $\frac{a^2}{a}$ *(3)* ut *L*

1 per Hugeniana: s. o. Teil 1, S. 340 Z. 4–7 und die dazugehörige Erläuterung. 17 quadrata applicatarum: Leibniz quadriert hier unzulässigerweise separat.

minimae $\dfrac{\xi^2}{a^2} = \dfrac{a-1}{a}$. ergo $\xi^2 = \dfrac{a^3-a^2}{a} = a^2 - a$. $\xi = Rq\,a^2 - a$. $\chi = Rq\,a^2 - 2a$. etc.

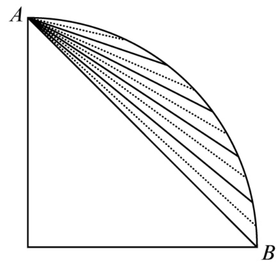
Circuli revoluti trilinei circa axem axi parabolae parallelum descripti crescunt ut applicatarum quadrata. Cumque applicatae sint $a-\xi$. posito ξ. applicata parabolae basi parallela, fient quadrata $a^2+\xi^2-$ $[2a\xi]$. Porro omnia a^2. habentur, est enim cubus de a, seu a^3. Habentur et omnia quadrata applicatarum semiparabolae basi parallelarum, aequantur enim ut constat, dimidio cubi de a, seu $\dfrac{a^3}{2}$. At $[2a\xi]$ seu a. ductum in omnia $[\xi]$, facile haberi potest, est enim cylinder seu prisma, cuius basis semiparabola, altitudo a, et posita semiparabola $\dfrac{2a^2}{3}$, erit prisma istud $\dfrac{2a^3}{3}$. duplicatum $\dfrac{4a^3}{3}$. habemus ergo $a^3+\dfrac{a^3}{2}-\dfrac{4a^3}{3}=\dfrac{3a^3}{2}-\dfrac{4a^3}{3}=\dfrac{9a^3}{6}-\dfrac{8a^3}{6}=\dfrac{a^3}{6}$. Quod momentum est 6^{ta} pars momenti ipsius a^2. seu rectanguli $PABC$. ex PA. librati, et ratio horum momentorum, erit $\dfrac{6}{1} = \dfrac{3}{1} \frown z$. seu $\dfrac{6}{3} = 2 = z$. ergo $\dfrac{a}{2}$. distantia centri gravitatis quadrati, ab axe AP. est dupla quod coincidit priori.



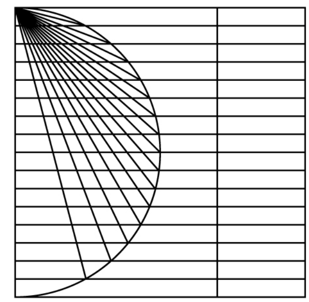
[*Fig. 10*]

3 crescunt *(1)* in composita ratione *(2)* ut *L* 5 2ax *L ändert Hrsg.* 7 At *(1)* 2aξ *(2)* 2ax *L ändert Hrsg.* 8 x *L ändert Hrsg.* 11 PA. | librati *erg.* | , *(1)* eritque compositum *(2)* et *L*
14 Neben [*Fig. 10*]: Figurae datae alteram inscribere aut circumscribere similem. Hoc facto statim habetur figurae centrum gravitatis. *gestr.*; *dazu nicht gestr.:* Error *L*

NB. si eaedemmet applicatae adscribantur diversis eadem proportione partium; summae, erunt, ut lineae.



[*Fig. 11a*]



[*Fig. 11b*, *Blindzeichnung*]

Probandum est, quod a Pascalio animadversum non video: si duo spatia simul dividantur, seu eadem constructione dividantur in partes indefinitas, partesque aut partium summae etc. unius partibus alterius applicentur; idem fore productum, seu summam areae, alteri areae partibus indefinitis alia licet constructione provenientibus, sed eodem modo applicatis, productae. Vel si spatio constructione quadam in partes indefinitas diviso, applicentur alterius spatii partes indefinitae eadem constructione productae, eadem

---

357,14 *Neben* [*Fig. 10*]:

$$\begin{array}{rcl@{\qquad}rcl}
\dfrac{b^2}{a^2} & = & \dfrac{3}{4}. \quad \text{Ergo} & b^2 & = & \dfrac{3a^2}{4}. \\
b^2 & = & 3a. & b & = & Rq\,12 \\
b^2 & = & 12. & & & Rq\ \ 8 \\
 & & & & & Rq\ \ 4
\end{array}$$

1 eaedemmet *(1)* lineae *(a)* applicentur *(b)* adscribantur diversis lin *(2)* applicatae *L* 3 [*Fig. 11b*]: *rechte Hälfte tlw. überschrieben.* 4 si *(1)* duae lineae *(2)* duo *L* 5 seu eadem constructione *erg. L* 5 partes | aequales *gestr.* | indefinitas *L* 5 f. aut partium summae etc. *erg. L* 8 productae. *(1)* Arcus AB. dividatur in partes *(2)* Rectius sic: *(3)* Vel si *(a)* lineae *(b)* spatio *L*

---

4 Probandum est: D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 35, zitiert diesen Satz wörtlich und sieht in dem ganzen Abschnitt den Keim des sogenannten Transmutationstheorems.

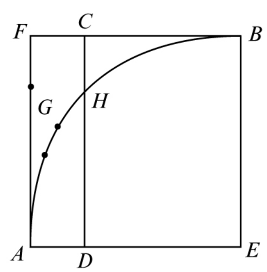
summa est, etsi alia atque alia fiat constructio. Nec refert partes illae sint aequales imo nec refert an parallelae. Ut si chordae arcui applicentur, sive chordae sint ad sinus sive ad ordinatas, sive ad alias applicatas nil refert. Perinde enim est ac si dicerem, sit figura cuius altitudo recta AB. extensa, applicata ad quodlibet punctum chorda ad illud punctum. Eodem modo chordae ad ordinatas, sive aliae, idem semper producunt semiparabolam, earumque quadrata semicubum.

Hinc consequentiam illam quoque duco: Spatium evolutionale, produci ex filis describentibus applicatis curvae, etiamsi curva illa in partes aequales inaequalesve dividatur.

Porro eadem regula generalis etiam sic demonstrari potest, quia differentiam summarum necesse est esse inassignabilem.

Quotiescunque summa quorundam ineunda est, non data unitate, tunc necesse est quaeri non summam absolutae, sed rationem eius ad aliam summam, v.g. summae filorum ratio ad summam chordarum evolutione descriptae. Quae ut ineatur summa filorum ineunda, quod ut fiat applicetur unitati cuilibet, sed cum ita omnia maneant determinatae, applicetur datae in constructione, habebitur ratio summae simplicis filorum ad summam quadratorum filorum.

In omni ergo constructione in infinitum dividente, quaerenda est u n i t a s c o n s t r u c t i o n i s seu linea si geometrica est constructio, seu si omnia puncta ingredientium geometrice haberi possunt, recta; quae rectis quibusdam assignatis ex infinitis punctis constructione ortis, ductis, dividitur in partes indefinitas aequales. Quoties spatia evolutionalia, et chordis evolutae aequiangulis summae filorum simplices, et summae filorum quadratorum dantur, datur linea evolutione descripta.



[*Fig. 12*]

10 esse *(1)* nihilo mino *(2)* inassignabilem *L* 13 summam *(1)* applicatarum *(2)* chordarum *L* 21 chordis evolutae aequiangulis *erg. L* 23 [*Fig. 12*]: *gestr. L, erg. Hrsg.; Bezeichnung* G *in Mehrfachfunktion.*

Quaerendum an momentum curvae AB. possit bisecari per rectam CD. positis $AF = AE$. et CF. quarta parte AF. Quod ut fiat intelligendum est curvam infra centrum gravitatis valde assurgere in rectum, supra, valde inclinari. Hoc cogitetur quantum fieri potest, quasi curva esset $A - G - H - B$. videamus an momentum eius bisecetur.

Ex solo circulo exhiberi possunt per puncta lineae plurimae, parabola ex chordis, ellipsis ex sinubus, hyperbola ex secantibus puto, conchoeis credo ex tangentibus. Et regula dari potest, ut pro data hyperbolae specie alius atque alius assumatur circulus, et quoniam in alia specie, seu ex similibus, aliae sunt aliis minores. Ideo v.g. chorda potest sumi integra, aut eius duplum[,] triplum. Hinc sequeretur in qualibet specie aliquam prae caeteris eximiam esse, quae ex circuli lineis non diminutis sumatur, alias autem esse protractas, contractasque. Uti in cycloeidibus, uti item circulus est eximia ellipsis. An potius ut patet in parabola, quaelibet etsi videatur protracta contractaque ratione unius circuli, erit tum naturalis ratione alterius.

Investigandum problema, parabola data, eius circulum invenire, seu rectam applicatam altitudini aequalem. Et vicissim hac data, parabolam.

1 an *(1)* curva *(2)* momentum *L* 4 f. bisecetur. | Porro quadratum est a^2. tertia pars $\frac{a^2}{3} =$ AFBA. quadratum FG. est $\frac{a^2}{16}$. rectangulum HCB. est $\frac{3a}{4} \frown \frac{a}{4} = \frac{3a^2}{16} + \frac{a^2}{16} = \frac{a^2}{4}$. Iam $\frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} = \frac{4a^2}{12} - \frac{3a^2}{12} = \frac{a^2}{12}$. *gestr.* | Ex *L* 7 specie *(1)* datus *(2)* alius *L*

6 hyperbola ex secantibus puto, conchoeis credo ex tangentibus.: Vgl. dazu J. Wallis, *Epitome binae methodi tangentium*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII Nr. 81 vom 25. Mz./4. Apr. 1672, S. 4010–4016, v. a. S. 4012. Auf dieser Seite hat sich Leibniz die wichtigsten drei Rechengrößen am Rande notiert: *s*. sinus[,] *k*. sinus compl.[,] *v*. sinus versus. Für die Hyperbel gibt Wallis dort den zusätzlichen Verweis auf *De motu*, 1670/71, S. 750–752 (*WO* I, S. 926 f.); zur Konchoide vgl. ferner *ebd.* S. 534–536 (*WO* I S. 910 f.) sowie *Tractatus duo*, 1659, S. 122 (*WO* I S. 550).

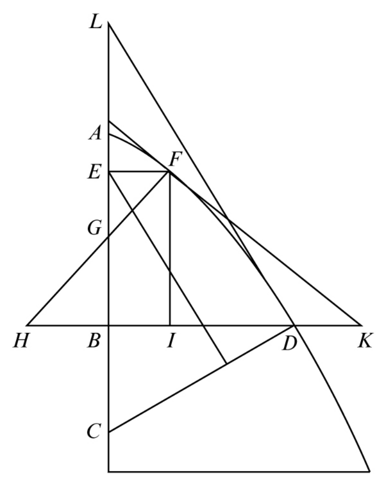
18. DE METHODO TANGENTIUM INVERSA
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 2 Bl. 5. 1 Bl. 2°, davon rechts unten ein Zettel von ca 8 x 11 cm herausgeschnitten. Haupttext: ca 3/4 S. = Teil 1. Außerhalb des Haupttextes: 2 verworfene, sich teilweise überlappende Figuren, gegenläufig. Weiter: eine ebenfalls verworfene Rechnung aus späterer Zeit, rechtläufig = Teil 2. Alles auf Bl. 5 r°. Blatt 5 v° leer.
Cc 2, Nr. 905

Datierungsgründe: Im Haupttext versucht Leibniz, sich über die Natur der umgekehrten Tangentenprobleme klar zu werden; er ist inhaltlich klar vor N. 40 vom Aug. 1673 anzusetzen. Die verworfenen Figuren sind aufgrund der Schriftführung als erste auf das Blatt gezeichnet worden; sie stellen offenbar Vorstufen zu fig. 2. von N. 21, bzw. fig. 3. von N. 23 dar. Die verworfene Rechnung stammt wegen des verwendeten Gleichheitszeichens frühestens aus 1674.

[*Teil 1*]

De methodo tangentium inversa



[*Fig. 1*]

Investigatio rectae BD ex datis rectis AB et BC.

$AB = x$. $BC = b$. $BD = y$.

Ergo $CD = \sqrt{,}\, y^2 + b^2$. $BL = \dfrac{y^2}{b}$. $DL = \sqrt{,}\, y^2 + \dfrac{y^4}{b^2} = \dfrac{LC \frown BD}{CD}$.

$LC = \dfrac{y^2}{b} + b$.

Nunc faciam x quoque intrare aequationem, supposito ipsam y iam cognitam esse. Intelligantur autem duae esse rectae y, altera minima, cuius x est 1. seu unitas constructionis, altera maxima seu basis, cuius x est altitudo. Unam vocabo y. alteram υ.

$AE = \xi$. $EF = \upsilon$. EG data est $= \beta$. loco $BC = b$.

Iam $\dfrac{HB}{EF} = \dfrac{BG}{EG}$. Ergo $HB = \dfrac{BG \frown EF}{EG}$. Iam $BG = x - \xi - \beta$. Ergo $HB = \dfrac{x\upsilon - \xi\upsilon - \beta\upsilon}{\beta}$. et $FI = EB = BG\ (= x - \xi - \beta) + EG\ (= \beta) = x - \xi$. et $BI = EF$. Ergo $HI = HB\ \left(\dfrac{x\upsilon - \xi\upsilon - \beta\upsilon}{\beta}\right) + EF\ (\upsilon) = \dfrac{x\upsilon - \xi\upsilon}{\beta}$. Iam $IK = \dfrac{FI^2}{HI} = \dfrac{x^2 + \xi^2 - 2x\xi}{\dfrac{x\upsilon - \xi\upsilon}{\beta}} = \dfrac{\beta x^2 + \xi^2\beta - 2\beta x\xi}{x\upsilon - \xi\upsilon}$.

Sed nunquam hactenus x et y. in eandem aequationem convenire voluere.

Ut tangens ad punctum curvae datum ducatur necesse est triangulum quaeri LBD, cuius utcunque continuatae applicatae omnes sint maiores applicatis curvae respondentibus, demta una sola, quae applicatae curvae aequalis est. Huius trianguli datur basis BD. dantur et omnes applicatae ipsius curvae, quaeritur altitudo. Contra si detur altitudo $\bigtriangledown^{\text{li}}$, altitudoque figurae, quaere applicatas curvae.

Videtur mihi problema istud ex AL datis, vel ex BC datis, semper una cum AB definire ipsam BD. non esse definitum. Videndum ergo quid praeterea assumi possit,

---

3 $DL = \dfrac{\dfrac{y^3}{b} + by}{\sqrt{y^2 + b^2}.}$. $DL = \sqrt{LC^2 - CD^2}$. seu $\sqrt{\dfrac{y^4}{b^2} + b^2 + 2y^2 - y^2 - b^2}$. seu $\sqrt{\dfrac{y^4}{b^2} + y^2}$.

5 aequationem, *(1)* ipso y non considerato. *(2)* manifestum est triangulum *(3)* supposito *L*
18 quaere *(1)* applicatam sive naturam *(2)* applicatas *L* 19 semper una cum AB *erg. L*

ut definiatur, an data BC. assumi possit quaelibet AL. v. g. posito BC esse applicatas hyperbolae, an AL possint assumi applicatae parabolae. Vel etsi BC dato LA non determinetur absolute, an saltem sufficiat ipsam determinari relatione quadam ad incognitam y. Quae pro lubitu assumi potest, ut si AB posito $= x$. $BC = b$. $BD = y$. ponatur $AL = \frac{y^2}{b}$. vel an possit absolute poni v. g. $AL = \frac{b^2}{x}$. Quo casu videtur fortasse nimium supponi, quemadmodum assumtis tantum BC et AB non satis. Ideo AL ex parte assumto, ex parte ab incognito pendente, vel etiam omnino ab incognito pendente, res facilius exitum sortiri videtur.

Videamus primum an AL assumi possit absolute, v. g. $= \frac{x^2}{b}$. fiet $BL = x + \frac{b^2}{x}$. Iam $BL \frown BC = BD^2$. Ergo $BD^2 = xb + \frac{b^3}{x}$. Et $BD = \sqrt{\frac{x^2b + b^3}{x}}$.

Ergo $\sqrt{\frac{x^2b + b^3 + b^2x}{x}} = CD$.

Iam $\frac{BC}{CD} = \frac{CD}{LC}$. Ergo $BC \frown LC = CD^2$. Ergo $\frac{x^2b + b^3 + b^2x}{x} = x + \frac{b^2}{x} + b, \frown b = bx + \frac{b^3}{x} + b^2$. Ergo $x^2b + b^3 + b^2x = bx^2 + b^3 + b^2x$.

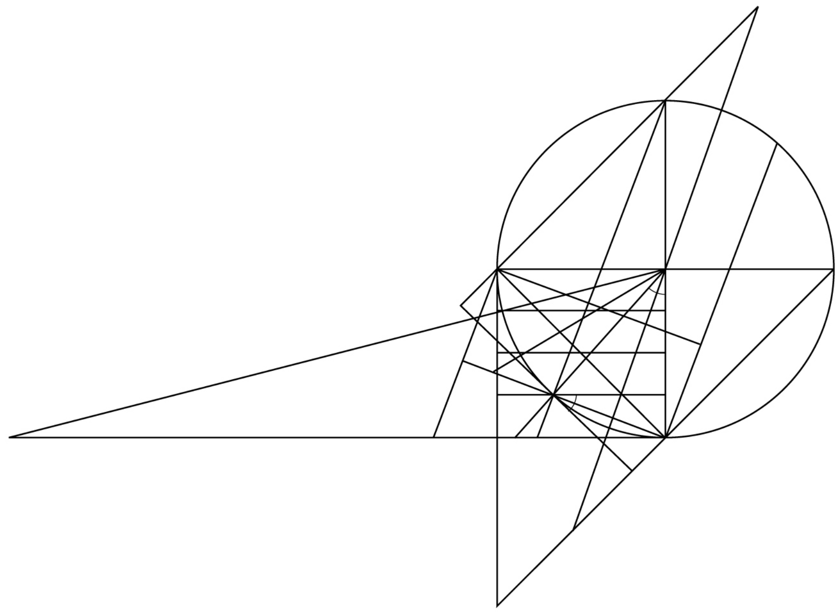
Sed nondum ista satis probant positionem esse possibilem. Hoc ergo ut appareat clare retexendo examinanda positio est. Positoque esse figuram datam, cuius BD seu applicata sit $\sqrt{\frac{x^2b + b^3}{x}}$, an ipsa BC futura sit $= b$. et $AL = \frac{b^2}{x}$. Idque methodo tangentium a Cartesio prodita investigari potest.

Et vero puto nos reperturos problema esse definitum, ac proinde suppositiones istiusmodi fieri non posse. Cum enim demonstraverimus semiquadratum ipsius BD semper aequari summae omnium BC inde a vertice, summa autem omnium BC semper sit eadem, necesse erit ipsam BD quoque esse definitam.

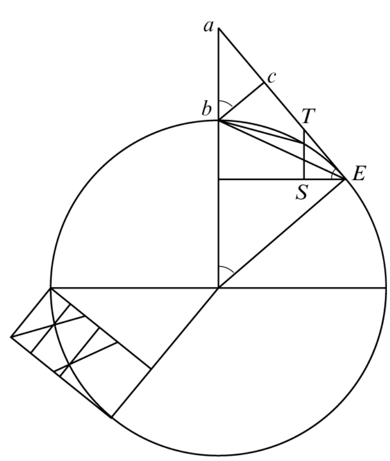
---

19 demonstraverimus: vgl. N. 27 S. 500 Z. 4.

[*Teil 2, verworfen*]



[*Fig. 2, Blindzeichnung*]



[*Fig. 3, tlw. Blindzeichnung*]

[*Zu Fig. 3:*]

$$\frac{AB}{ET} = \frac{BC}{\quad} \text{ [\textit{bricht ab}]}$$

[*Zusatz aus späterer Zeit*]

$$\frac{a^2}{a^2+y^2} \text{ pone } y \sqcap z+a, \text{ fiet: } \frac{a^2}{a^2} \text{ [\textit{bricht ab}]}$$

364,3 [*Fig. 3*] *Benennungen*: *(1)* d, f, e *(2)* e, t, s *(3)* T, E, S *L*

2 *(1)* $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{df}} = \frac{\mathrm{cb}}{\mathrm{ef}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{ab}}{\mathrm{et}} = \frac{\mathrm{bc}}{\mathrm{st}} = \frac{\mathrm{ac}}{\mathrm{es}}$. Ergo ab *(3)* $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{ET}}$ *L*   4 *(1)* $2\mathrm{ay}^2$ *(2)* $\frac{2\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *(3)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *(a)* $\sqcap$ *(b)* pone *L*

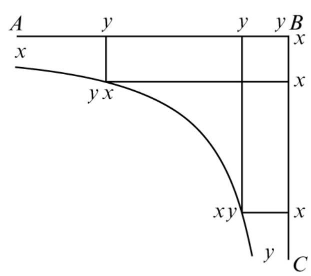
19. DE QUADRATURA HYPERBOLOEIDUM OPE MOMENTORUM [Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 38. 1 Bl. ca 8°. 1 S. Bl. 38 v° leer. Cc 2, Nr. 642

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück spiegelt die Lektüre von Pascals *Lettres de Dettonville*, 1659, insbesondere des darin enthaltenen *Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets*, 1658 wider, welche Leibniz im späten Frühjahr, bzw. Frühsommer 1673 durchgearbeitet hat (s. dazu auch N. 10 sowie die Einleitung). Es dürfte kurz danach oder sogar noch während des Studiums des *Traité* entstanden sein.

B i s e c t i o h y p e r b o l a e, o p e h y p e r b o l o e i d i s c u b i c a e quia cylinder hyperbolicus est momentum hyperboloeidis cubicae, seu momentum eius ex basi. Ergo distantia centri gravitatis eius hyperboloeidis ab axe, quae haberi potest, hyperbolae cylindrum bisecat.

$a^4 = x^3 y$. ideo $y = \dfrac{a^4}{x^3}$. et $yx = \dfrac{a^4}{x^2}$. $\quad \dfrac{x^2}{2} = \dfrac{a^4}{2yx}$. $\quad y^2 = \dfrac{a^8}{x^6}$.



[*Fig. 1*]

10–13 B i s e c t i o ... bisecat. *erg. L* 14–367,1 $\dfrac{\mathrm{a}^8}{\mathrm{x}^6}$. | $\mathrm{a}^2 = \mathrm{xy}$. *streicht Hrsg.* | *(1)* Ergo $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{x}} = \mathrm{y}$. et $\dfrac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{x}^2} = \mathrm{y}^2$. At $\dfrac{\mathrm{y}^2}{2} = \mathrm{xy} = \mathrm{a}^2 = \dfrac{\mathrm{a}^4}{2\mathrm{x}^2}$. *(2)* $\mathrm{a}^2 = \mathrm{xy}$. *L*

12 Ergo: Dieser Schluss ist unberechtigt.

$a^2 = xy$. Ergo $x^2 = \frac{a^4}{y^2}$. Ergo momentum hyperbolae ex vertice BC est cylinder hyperboloeidis $a^3 = y^2x$. Et quia summa omnium $\frac{x^2}{2}$ ad basin = summae omnium xy ad axem, seu omnibus a^2 ad axem. Hinc quadratura hyperboloeidis cubicae $a^3 = y^2x$.

$a^3 = y^2x$. Ergo quadrata omnium y seu summa omnium ad alt. $y^2 = \frac{a^3}{x}$. cyl. hyp. Quadrata omnium x [sunt]: $x^2 = \frac{a^6}{y^4}$. cylinder hyperboloeidis: $a^5 = y^4x$. Porro quadrata omnium y quae basi parallelae, ad altitudinem, aequantur omnibus x in y, ad basin, $\frac{a^3}{y}$. Ergo summa omnium $\frac{a^3}{x}$ ad alt. et $\frac{a^3}{y}$ ad basin aequalis.

Contra x in y, ad altit. quia $y = \frac{\sqrt{a^3}}{x}$. erit $yx = \sqrt{a^3x}$; aequantur scilicet omnibus x^2 ad basin. Hinc quadratura cylindri hyperboloeidis $a^5 = y^4x$.

$a^4 = y^3x$. Hinc $\frac{a^8}{y^6} = x^2$ (cylinder hyperboloeidis $a^7 = y^6x$.) ad alt. $= xy = \frac{a^4}{x}\sqrt{③}$, $\frown$ x seu a^4x^2, $\sqrt{③}$ seu cylinder paraboloeidis, cuius aequatio $a^2x = y^3$.

At $y^2 = \frac{a^8}{x^2}\ \sqrt{③}$ cylinder hyperboloidis, cuius aequatio $y^6 = \frac{a^8}{x^2}$ seu $y^3x = a^4$ ad alt. Idem cum $x \frown y$ ad bas. seu $\frac{a^4}{y^2} = yx$. cylinder hyperboloeidis $a^3 = y^2x$.

Hac methodo quadrari possunt hyperboloeides in universum omnes.

2 y^2x. *(1)* Itemque | summa horum *erg.* | = | summae omnium *erg.* | $\frac{a^4}{2y^2} = a^2$. (Hinc quadratura hyperboloeidis cubicae.) Nam *(2)* Et *L* 5 est *L ändert Hrsg.*

---

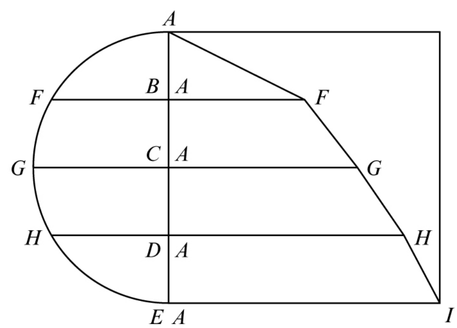
1 $a^2 = xy$: Im Folgenden verwendet Leibniz die Ergebnisse Pascals aus dem *Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets*, 1658. Er übersieht aber, dass die bei Pascal verschwindenden integralfreien Glieder hier beibehalten werden müssen. Weiterhin wird ab Z. 5 der Faktor 2 vernachlässigt. Die grundsätzliche Quadraturaussage bleibt davon unberührt.

20. DE ORTHOGONIO CONVEXO
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 267–268. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 267 v° und B. 268 r°. Textfolge: Teil 1 auf Bl. 268 r° oben, mittels Trennstrich abgegrenzt. Teil 2 Bl. 267 v° und Bl. 268 r° unterer Teil. Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext neben und unter dem gestrichenen Schluss von Teil 2. — Auf dem übrigen Bogen N. 21.
Cc 2, Nr. 550 A, B

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist trägergleich mit N. 21 und als erstes auf den Bogen geschrieben worden. Dies dürfte kurz vorher geschehen sein.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

$$AF = \underset{(a)}{Rq\,a^2}. \quad AG = Rq\,2a^2. \quad AH = Rq\,3a^2. \quad AE = \underset{(2a)}{Rq\,4a^2}.$$

$$AB = BC = CD = DE = \frac{a}{2}.$$

$$ABF = a \frown \frac{a}{2} \smile 2 = \boxed{\frac{a^2}{4}}.$$

$$BCFG = a \frown \frac{a}{2},,,, + Rq\,2a^2, -a,, \frown \frac{a}{4},,, = Rq\,, \frac{2a^4}{16} - \frac{a^2}{4}$$

$$= \frac{a^2}{2} - \frac{a^2}{4} + \frac{Rq\,2a^4}{4} = \boxed{\frac{a^2}{4} + \frac{Rq\,2a^4}{4}}.$$

$$CDGH = Rq\,2a^2 \frown \frac{a}{2} = \frac{Rq\,2a^4,}{2} + Rq\,3a^2 - Rq\,2a^2, \frown \frac{a}{4}$$

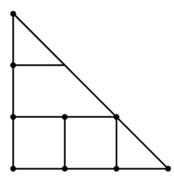
$$= \boxed{\frac{Rq\,2a^4}{\cancel{2}\;4} + \frac{Rq\,3a^4}{4}} - \cancel{\frac{Rq\,2a^4}{4}}.$$

$$DEIH = \frac{a}{2} \frown 2a = a^2, -2a + Rq\,3a^2, \frown \frac{a}{4} = \frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{4}\;2} + \frac{Rq\,3a^4}{4}$$

$$= \boxed{\frac{a^2}{2} + \frac{Rq\,3a^4}{4}}.$$

Summa areae $\frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{4} + \frac{a^2}{2} = a^2, + \frac{\cancel{2}Rq\,2a^4}{\cancel{4}\;2} + \frac{\cancel{2}Rq\,3a^4}{\cancel{4}\;2}.$

[*Teil 2*]



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

$$a^2 \frown \frac{a}{2} [=] \frac{a^3}{2}.$$

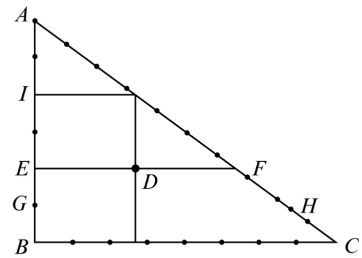
$$2a^2 \frown \frac{2a}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$

$$2a^2 \frown \frac{a}{2} = a^3. \qquad \text{Iam } \frac{3a^3}{3} + \frac{a^3}{3} = \frac{4a^3}{3}.$$

$$\frac{a^2}{2} \frown \frac{2a}{3} = \frac{a^3}{3}.$$

8 [=] *erg. Hrsg.* 9 *(1)* $2a^2 \frown \frac{2a}{3} = \frac{4a^3}{3}$. $2a^2 \frown \cancel{2}a = 2a^3$. $4a^2 \frown 2a = 8a^3$. $\frac{8a^3}{6} = \frac{4a^3}{2}$. $\frac{4a^3}{2} \times 2a^2 = \frac{4a^3}{4a^2} = a$. $\frac{4a^3}{2} \times 2a^2$ $\frac{4a^3}{6a^2} = \frac{2a}{3}$. *jeweils separat gestr. (2)* $2a^2 \frown \frac{2a}{3}$ *L*

9–11 Dieser Abschnitt steht auf Bl. 267 v° rechts oben und ist nebst der dazugehörigen Fig. 2 vom übrigen Text mittels Trennstrich abgegrenzt.



[*Fig. 3, Blindzeichnung*]

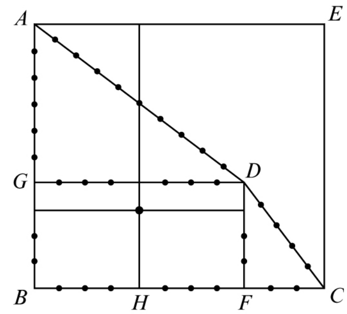
Esto in $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ rectangulo AB 3. BC 4. AC 5. centrum gravitatis D. Videamus an recta ducta per D ut est EDF etiam peripheriae momentum bisecet.

Esto ED basi BC parallela, exempli gratia. Iam momentum BC est $4a \frown a = 4a^2$. ducta EB in BC. momentum EB $\frac{a^2}{2}$. Porro FC est $\frac{AC}{3}$. eius puncti medii distantia ab EF est $= EG$. ergo eius momentum $\frac{5a}{3} \frown \frac{a}{2} = \frac{5a^2}{6}$. Summa momentorum huius lateris:

$$4a^2 + \frac{a^2}{2} + \frac{5a^2}{6} = \frac{9a^2}{2} + \frac{5a^2}{6} = \frac{54+10}{12} = \frac{64}{12} \,\Big|\, \frac{16a^2}{3}.$$

Ab altero latere primum summam linearum omnium $AE + EF + AF = 8a$ $(2 + \frac{4 \frown 2}{3}$ $\frac{8}{3} + \frac{5 \frown 2}{3}$ $\frac{10}{3} = \frac{18}{3} = 6, +2 = 8)$. ducamus in distantiam centri gravitatis trianguli AEF a recta EF. quasi istud centrum trianguli AEF etiam peripheriae eius $\bigtriangledown^{\mathrm{li}}$ centrum esset, distantia autem est $\frac{2a}{3}$. fiet $\frac{16a^2}{3}$. ecce idem quod ante.

Idem aliter proveniet, multiplicando EA per $IE = 2a \frown a = 2a^2$, et $AF = \frac{10a}{3} \frown a = \frac{10a^2}{3}$. Iam $\frac{10a^2}{3} + \frac{6a^2}{3}$ $(2a^2)$ $= \frac{16a^2}{3}$.



[*Fig. 4, Blindzeichnung*]

Nunc rem experiamur in figura rectilinea compositae hypotenusae ut $ABCD$. F ita tamen, ut facilioris calculi causa surdas radices evitemus, ideo altitudo $AB = 6 \overset{10}{\ } + 4$. basis $BC = 8 \overset{11}{\ } + 3$. hypotenusa AD $10 + DC$ 5.

Investigemus nunc centrum gravitatis orthogonii convexi $ABCDA$, ergo primum momentum ex AB. Primum rectanguli BD momentum ex AB est $8a \frown 4a = 32a^2, \frown 4a = 128a^3$. $DFC = \dfrac{4a \frown 3a}{2} = \dfrac{12a^2}{2} = 6a^2 \frown 9a = 54a^3$. $AGD = 6 \frown 8 = \dfrac{48a^2}{2} = 24a^2 \frown \dfrac{8a}{3} = 64a^3$. Summa momentorum $128 + 54 + 64 = 246a^3$. dividatur per aream $32a^2 + 6a^2 + 24a^2 = 62a^2$. fiet $\overset{60}{\cancel{246}}\ \cancel{\overline{62}}$ ⨍ $3\, \dfrac{60}{62} = 4 - \dfrac{2}{62} \frown a = \dfrac{246}{62} \,\Big|\, \boxed{\dfrac{123a}{31}} = BH$. distantia centri gravitatis trilinei convexi a AB.

8 *Kontrollrechnungen zu Z. 8 f., S. 372 Z. 2 f., S. 372 Z. 6, S. 372 Z. 12:*

128	32	64	121	121
54	6	8	80	15
<u>64</u>	<u>24</u>	<u>144</u>	<u>95</u>	<u>140</u>
246	62	216	296	276

5 gravitatis *(1)* trilinei convexi *(2)* orthogonii *L*

Similiter axe librationis posito BC. momentum $BD\square$ erit $32a^2 \frown 2a = 64a^3$. $\triangle$ FDC $6a^2 \frown \frac{4a}{3} = 8a^3$. $\triangle$ AGD $24a^2 \frown 6a = 144a^3$. Summa: $64 + 8 + 144 = \frac{216a^3}{62a^2} \,\Big|\Big|\, \boxed{\frac{108a}{31}}.\frac{\overset{15}{\cancel{108}}}{\underset{7}{\cancel{31}}} \mathop{-\!\!\!\!\int} 3\frac{1}{2}$ fere, sed nondum.

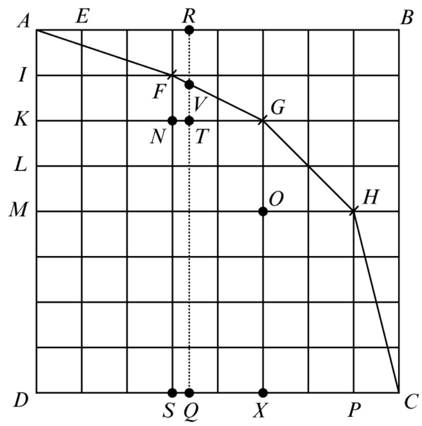
Nunc quaeramus et centrum gravitatis peripheriae: ac primum ex axe librationis AB. Primum $BC = 11a \frown \frac{11a}{2} = \frac{121a^2}{2}$. deinde $DC = 5 \frown 8 + \frac{3}{2} = 40 + \frac{15}{2} = \frac{95a^2}{2}$. $AD = 10a, \frown 4a = 40a^2$. Summa $\frac{121a^2}{2} + \frac{95a^2}{2} + \frac{80a^2}{2} = \frac{296a^2}{2} = 148a^2$. dividatur per $11 + 5 + 10 = 26a$. fiet $\frac{148a^2}{26a} = \frac{74a}{13}$. Comparetur haec distantia priori: $\frac{123a}{31} \times \boxed{\frac{74}{13}}$ patet has duas rationes non esse eandem. Si $\begin{matrix}\text{dividas}\\ \text{per}\end{matrix}$ $\frac{148a^2}{36a}$, addito scil. $10a = AB$. fiet $\frac{148}{36} \,\Big|\, \frac{74}{18} \,\Big|\Big|\, \boxed{\frac{37a}{9}}$. Haec ratio propius quidem accedit, sed non tamen est praecise eadem priori $\frac{123a}{31}$. Ergo tentemus ex brachio CE extra assumto. $BC = 11a \frown \frac{11a}{2} = \frac{121a^2}{2}$. $CD = 5a, \frown \frac{3a}{2} = \frac{15a^2}{2}$. $AD = 10a \frown 3a + 4a = 70a^2$. Summa: $121a^2 + 15a^2 + 140a^2\ \frac{276}{36} \,\Big|\, \frac{138}{18} \,\Big|\, \frac{69}{9} \,\Big|\Big|\, \boxed{\frac{23}{3}}$.

1 Similiter *(1)* ex basi B *(2)* axe *(a)* aequili *(b)* librationis *L* 3 sed nondum *erg. L*

11 Summa: Die Summenbildung ist nicht fehlerfrei, richtig ergibt sich das Moment zu $248a^3$ und der Abstand des Schwerpunkts zu $\frac{62}{9}$.

Addatur ad $\frac{123}{31} \mathop{\asymp}\limits^{+} \frac{23}{3}$. deberet fieri 11. quod non facit. Ad $\frac{23}{3}$ adde $\mathop{\asymp}\limits^{+} \frac{74}{13}$. rursus nihil. Quid si $\frac{23}{3} \mathop{\asymp}\limits^{+} \frac{37}{9}$. ne sic quidem.

Patet lineas non nisi ex axe, qui inter ipsas non sit, librari debere, ut earum centrum aequilibrii habeatur.



[*Fig. 5, tlw. Blindzeichnung*]

$ABCD = 64AE\square = a^2.\quad AB.\quad 8a = AD.\quad DC.\quad BC.$

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

31	31	23	74	1	37	2
<u>23</u>	<u>3</u>	<u>13</u>	<u>3</u>	$\cancel{1}\cancel{3}4$	<u>3</u>	$\cancel{1}\cancel{4}1$
93	93	69	222	$\cancel{5}\cancel{2}\cancel{1}$ ⨍ 13	111	$\cancel{3}\cancel{1}\cancel{8}$ ⨍ 11
<u>62</u>		<u>23</u>	<u>299</u>	$\cancel{3}\cancel{9}\cancel{9}$		$\cancel{2}\cancel{7}\cancel{7}$
713	15	299	521	$\cancel{3}$	23	$\cancel{2}$
<u>369</u>	$\cancel{1}\cancel{0}\cancel{8}2$ ⨍ 11				<u>9</u>	
1082	$\cancel{9}\cancel{3}3$	13			207	
	9	<u>3</u>			<u>111</u>	
		39			318	

$$AFGHCD = \frac{3}{2}, +3 + \frac{2}{2}, +5 + \frac{1}{2}, +6 + \frac{1}{2} + (4 \frown 7 =)\, 28 + \frac{4}{2}$$

$$= \frac{11}{2} + \frac{\substack{14\\28}}{42} = \frac{95a^2}{2}.\ \text{ergo}$$

$$ABCHGF = 64 - \frac{95}{2} = \frac{128-95}{2}. \qquad \frac{33}{2} \not\int 16\frac{1}{2}.$$

$$\frac{3}{2} + 5, \frac{2}{2} + 3, \frac{1}{2} + 2, \frac{1}{2} + 1, \frac{4}{2} = \frac{11}{2} + 11 = \frac{33}{2}.$$

Summa	Momentum trilinei convexi ADC ex AD.
$25a^3$	AIF momentum ex AI est pyramis AIF dimidiata. Pyramis autem
$\underline{108a^3}$	est $FI\square = 9a^2$, in $\frac{AI}{3} = \frac{a}{3}$. ergo momentum $\frac{3a^3}{2}$.
$133a^3$	Rectanguli IKF momentum est rectangulum $= 3a^2$ in $\frac{3a}{2} = \frac{9a^3}{2}$.
$3\frac{a^3}{2}$	
$\underline{9\quad}$	Trianguli FNG $\frac{\cancel{2}a^2}{\cancel{2}} \frown \frac{9a}{3} + \frac{2a}{3}, = \frac{11a^3}{3}$.
$\underline{12\frac{a^3}{2} = 6a^3}$	Rectanguli MKG momentum est $2 \frown 5a^2 \frown \frac{5a}{2} = 25a^3$.
$139a^3$	Trianguli GOH est $2a^2 \frown 5a + \frac{2a}{3}, = \frac{15a}{3} + \frac{2a}{3} = \frac{17a}{3} \frown 2a^2 = \frac{34a^3}{3}$.
$68\frac{a^3}{6}$	

---

6 f. *Nebenrechnungen:*

$$\frac{\cancel{3}a^3}{\cancel{2}} \times \frac{\cancel{3}a^2}{\cancel{2}}\ \ a. \qquad \frac{3a^2}{2} \frown a = \frac{3a^3}{2}.$$

5 Momentum *(1)* concavi *(2)* trilinei *L*

---

5 Momentum trilinei: Die folgende Berechnung ist unrichtig, korrekt ergibt sich für das Moment $\frac{476}{3}a^3$ und für den Abstand des Schwerpunkt $\frac{952}{285}a$.

$$\begin{array}{l} \underline{\ \ 88\ \ } \\ 156\dfrac{a^3}{6} \\ \hline \ \ 26 \\ \hline 165a^3 \end{array} \qquad \begin{array}{c} \cancel{3}0 \\ \cancel{1}5\cancel{6}\cancel{6} \ \rfloor\ 26 \\ \cancel{6}\cancel{6} \end{array}$$

Rectanguli $MDH = 28a^2 \frown \dfrac{7a}{2} = \dfrac{216a^3}{2} = 108a^3$

Trianguli HPC $\dfrac{4a^2}{2} \frown \dfrac{21a}{3} + \dfrac{a}{3} = \dfrac{22a}{3}, \frown \dfrac{4a^2}{2} = \dfrac{88a^3}{6}$.

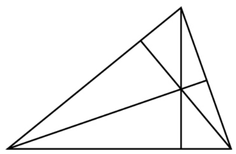
Ergo summa momentorum seu momentum totius trilinei convexi qua divisa per summam trilinei erit $\dfrac{2 \frown 156a^3}{95a^2}$. fiet $\dfrac{312a}{95} = 3a \Big| \dfrac{27a}{95}$ distantia centri gravitatis momenti, ab axe AD.

Ponatur DQ esse $\dfrac{312a}{95}$. centrum gravitatis trilinei erit in recta QR. ac proinde recta QR bisecabit momenta trilinei ex recta DC. Quod ab verum sit, ita inveniemus: [*Text bricht ab*]

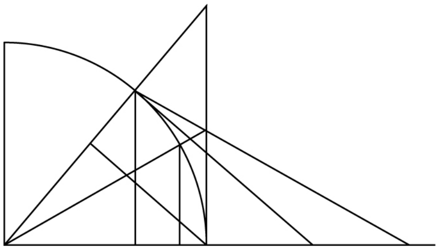
9 inveniemus: | Momentum rectanguli IDSF $21a^2 \frown \dfrac{7a}{2} = \dfrac{147a^3}{2}$. trianguli AIF $\dfrac{3a^2}{2} \frown 7a + \dfrac{a}{3} = \dfrac{22a}{3}, = \dfrac{66a^3}{6} = 11a^3$. rectanguli SQN $\dfrac{27a}{95} \frown \dfrac{6a}{1} \frown 3a = \dfrac{27a}{95} \frown \dfrac{18a^2}{1} = \dfrac{486a^3}{95}$. de residuo NTVF mox. Ab altero latere habemus rectangulum QXTG $= 2a - \dfrac{27a}{95}$ per $18a^2 = 36a^3 - \dfrac{486a^3}{95}$. rectangulum OHP $= 8a^2 \frown 2a = 16a^3$. triangulum OGH $= 2a^2 \frown 4a + \dfrac{2a}{3} = 8a^3 + \dfrac{4a^3}{3} = \dfrac{28a^3}{3}$. *gestr.* | *L* — *Dazu nicht gestr.:* $\begin{array}{r} 27 \\ \underline{18} \\ 216 \\ \underline{27} \\ 486 \end{array}$

9 ita inveniemus: Bei der anschließenden Rechnung erkennt Leibniz, dass sich seine Vermutung hier nicht verifizieren lässt, und streicht.

[Figuren ohne direkten Bezug zum Haupttext]



[Fig. 6]



[Fig. 7]

21. VARIA AD CYCLOMETRIAM I
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept mit Ergänzungen: LH 35 II 1 Bl. 267–268. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 268 v° und 268 r°. Textfolge: Teil 1 auf Bl. 268 v° und 267 r° oben. Teil 2: verschiedene spätere Ergänzungen zu fig. 1 auf Bl. 268 v° Außenrand. Teil 3 mit späteren Zusätzen neben und unter dem Text auf Bl. 267 r° unten. (Fortsetzung dieses Teils in N. 22.) — Auf dem übrigen Bogen N. 20.
Cc 2, Nr. 551

Datierungsgründe: Die Entdeckung des charakteristischen Dreiecks erfolgte nach dem Studium der Schriften Pascals im Frühsommer 1673. (S. dazu J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 48.) Die eng zusammenhängenden N. 21, 22, 23 (Teil 1) liegen unmittelbar vor dieser Entdeckung. Die drei Stücke sind daher auf diese Zeit zu datieren.

[*Teil 1*]

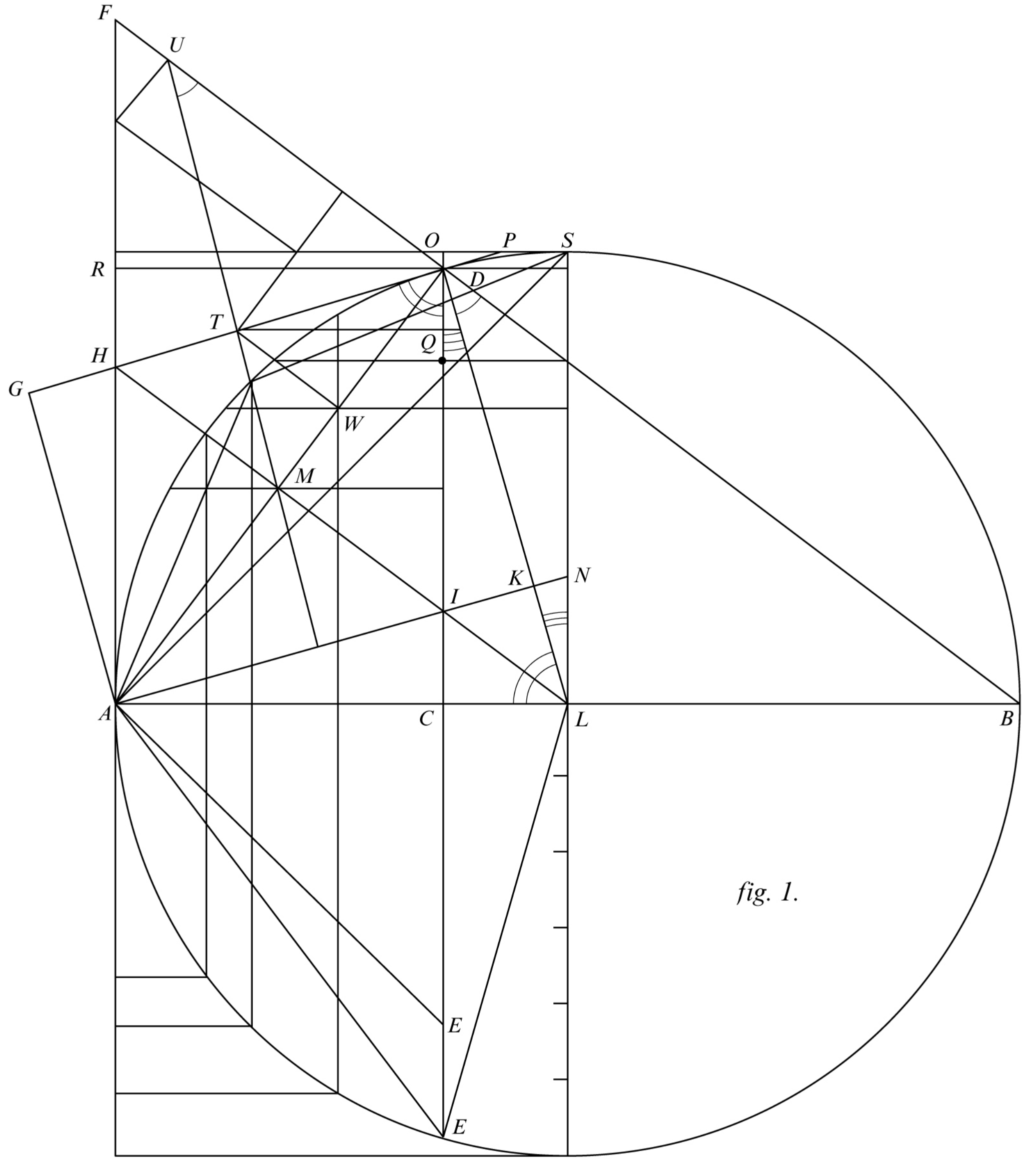
In circulo AB ducta applicata seu sinu CD iunctisque chordis AD. DB erit $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADB simile ADC. quia $\vee ACD = \vee ADB$. rectus recto et $\vee DAB = \vee DAC$. ergo $\vee ADC = \vee DBA$. Eodem modo $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ DCB simile utrique.

Ergo $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AC}$. Ergo $AB \frown AC = AD \frown AD$. seu rectangulum sub diametro et sinu verso aequatur quadrato chordae.

Hinc summa sinuum versorum diametro applicatorum, ut $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ACE, ducta in [diametrum] aequatur summae quadratorum applicatorum parabolae basi parallelorum.

19 versorum *(1)* radio *(2)* diametro *L*   20 radium *L ändert Hrsg.*

378,1 [*Fig. 1*]: Die Figur ist in ihrem oberen Teil am linken Rand leicht beschädigt, lässt sich aber weitestgehend rekonstruieren. Die Benennung E wird von Leibniz zweifach verwendet (vgl. Z. 19 bzw. S. 385 Z. 14). Die Linien TW sowie die Parallele zur Basis durch T hat Leibniz zu einem späteren Zeitpunkt gestrichen. Die Figur wird in N. 26 erneut benutzt.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Hinc si sinus versi, arcui applicati intelligantur, quo casu summa eorum est segmentum duplicatum, cylinder cuius basis est segmentum duplicatum, altitudo diameter, aequabitur solido, cuius altitudo est arcus segmenti, basis quadratum chordae segmenti, progressio elementorum basi parallelorum arithmetica, ac proinde summa cylindri segmenti duplicati sub diametro erit quadratum chordae ductum in arcum segmenti dimidiatum. Ergo quadratum chordae segmenti per diametrum divisum, ductum in arcum segmenti dimidiatum, aequabitur segmento circuli duplicato. Idque tum statim exemplo manifesto patet, cum segmentum est ipse semicirculus, tunc enim segmentum duplicatum seu circulus, aequatur quadrato chordae segmenti (id est hoc loco quadrato diametri), per diametrum diviso, id est diametro ducto in arcum segmentum dimidiatum, id est in circuli quadrantem. Nam ut ex radio in semiperipheriam ducto, fit circulus, ita ex diametro in quadrantem peripheriae ducto, fit idem circulus.

Ergo in hexagono quadratum, radii a per diametrum $2a$ divisum $\dfrac{a^2}{2a} \Big| \dfrac{a}{2}$. ductum in $\dfrac{x}{6 \frown 2} = \dfrac{x}{12}$. posito x esse peripheriam circuli $= \dfrac{ax}{24}$. aequabitur duplo segmento hexagoni, ergo $\dfrac{ax}{12}$ aequatur segmento hexagoni. Iam sector hexagoni $= \dfrac{ax}{12}$. est ergo conclusio absurda.

Ratio erroris in eo est, quod quadrata chordarum assumsi esse etiam progressionis arithmeticae, cum arcui applicantur, quod falsum est.

4 progressio *(1)* aliorum quadrato *(2)* elementorum *L* 4 f. summa *(1)* erit *(2)* | cylindri ... erit *erg.* | quadratum *L* 6 chordae | segmenti *erg.* | per *(1)* radium *(2)* diametrum *L* 7 segmenti *erg.* *L* 13 in hexagono *erg.* *L* 17 f. progressionis *(1)* geometricae *(2)* arithmeticae *L*

---

3 aequabitur solido: diese Aussage ist falsch. Den Hauptfehler in der Deduktion erkennt Leibniz am Ende des Abschnitts. Ein unbedeutender Rechenfehler in Z. 15 spielt keine Rolle.

Ergo sic potius cylinder sub segmento duplicato et diametro, aequatur summae quadratorum chordarum, arcui segmenti applicatorum per demonstrata. Sunt autem semichordae nihil aliud quam sinus arcuum dimidiorum. At quadrata sinuum ad arcum summari possunt, seu reduci ad cylindrum.

Porro manifestum est summam omnium sinuum arcuum dimidiorum, aequari summae omnium sinuum arcus dimidii, et proinde summam omnium chordarum ad arcum, esse duplum summae sinuum arcus dimidii, et summam quadratorum omnium chordarum, esse quadruplum summae quadratorum sinuum arcus dimidii. At summa quadratorum sinuum est cylinder sub semisegmento et radio. Unde facile intelligas, nihil hinc novi detegi.

1–10 *Daneben mit Bezug auf S.* *381* *Z. 15 – S.* *382* *Z. 13:*

$$\left.\begin{array}{lccccc}
a^2 - \overset{b^2}{1},\ Rq & \frown\ 1 \frown 1 & 1 & \text{vel} & [1 \frown 2] & [1]\ \frown \\
a^2 - 4,\ Rq & \frown\ 2 \frown 3 & 6 & & 2 \frown 4 & 4 \\
a^3 - 9,\ Rq & \frown\ 3 \frown 5 & 15 & & 3 \frown 6 & 9 \\
 & \frown\ 4 \frown 7 & 28 & & 4 \frown 8 & 16 \\
 & \frown\ 5 \frown 9 & 45 & & 5 \frown 10 & 25
\end{array}\right\}\ 2$$

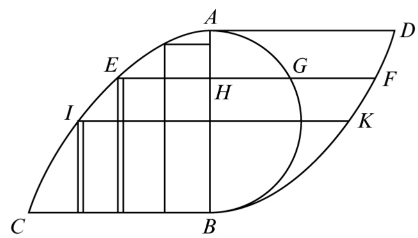
2 arcui |segmenti *erg.*| applicatorum |per demonstrata *erg.*| . Sunt *L* 3 ad arcum *erg. L* 6 sinuum *(1)* arcuum constructione datorum, |ergo *streicht Hrsg.*| *(2)* arcus *L* 7 arcus dimidii *erg. L* 8 arcus dimidii *erg. L* 8 f. quadratorum *(1)* reduci potest *(2)* sinuum *L* 12 f. *(1)* Sit sinus *(a)* $a^2 - \cancel{\beta^2}, -a^2 + \cancel{\beta^2} -$ *(b)* $b \frown a - b$. *(2)* Sinus $\begin{array}{r} b \frown a - b,\ Rq\ \ Rq\ ab - b^2 \\ 2b \frown a - 2b,\ Rq\ \ Rq\, 2ab - 2b^2 \\ 3b \frown a - 3b,\ Rq\ \ Rq\, 3ab - 3b^2 \end{array}$ *(3)* $a^2 - \overset{b^2}{1}$, Rq $\frown$ *(a)* sinus *(b)* chord *(c)* $1 \frown 1$ *L* 13 $1 \frown 2$ *und* 1 *erg. Hrsg.* 15 2 $\left|\begin{array}{ll} \text{vel} & 1 \frown 0 \\ & 2 \frown 1 \\ & 3 \frown 3 \\ & 4 \frown 5 \\ & 5 \frown 7 \\ & 6 \frown 9 \end{array}\right.$ *gestr.*| *L*

---

5 Porro: Die folgende Transformation ist unrichtig; sie pflanzt sich weiter fort, hat aber keinen Einfluss auf die Schlussbemerkung.

Sed redeamus ad schema nostrum ubi sic quoque dici potest: $\dfrac{AB}{DB} = \dfrac{AD}{DC}$. Ergo $AB \frown DC = AD \frown DB$. seu rectangulum sub diametro et sinu aequatur rectangulo sub chorda arcus dati, et arcus supplementi ad circulum.

Summam illorum rectangulorum, id est cylinder, cuius basis est portio a semicirculo per perpendicularem ad diametrum seu applicatam abscissa, aequabitur summae horum rectangulorum. Rectangulorum autem horum summa sic elegantius exhiberi potest.



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

Cum chordae ad diametrum applicatae, sint applicatae parabolae ideo iungantur sibi per axem AB duae parabolae similes (proportione idem de dissimilibus) et aequales, quarum bases quoque BC. AD tam axi quam inter se aequales sunt, alteraque ad alterius planum horizontaliter erecta, in alteram ducatur, aio productum solidum, aequari cylindro, cuius altitudo AB basis semicirculus AB. et portionibus quoque assumtis $AHFDA$ ducta in $AEHA$ solidum aequabitur cylindro basi portione semicirculi per applicatam abscissa AHG in altitudine AB.

Illud quoque apparet applicata IK per mediam basin ducta solidum quoque in duas partes similes et aequales secari.

Porro cum applicatae parabolae ita procedant crescendo

$Rq\,\beta a$ $\qquad$ $Rq\,2\beta a$ $\qquad$ $Rq\,3\beta a$ $\qquad$ $Rq\,4\beta a$ $\qquad$ etc.

si scilicet quadratorum applicatarum solidum, convertatur in triangulare prisma eiusdem

3 f. circulum. *(1)* Hinc aliquid *(2)* Summam *L* 4 est *(1)* semisegmentum quoddam, *(2)* portio *L*
8 f. per axem AB *erg. L* 14 f. AB. *(1)* Basis CB. *(2)* Illud *L* 17–382,13 Porro ... etc. *erg. L*
17 parabolae *(1)* Rq 1. Rq 2. Rq 3. Rq *(2)* ita procedant | crescendo *erg.* | $\mathrm{Rq}\,\beta^2, \mathrm{Rq}\,2\beta^2, \mathrm{Rq}\,3\beta^2, \mathrm{Rq}\,4\beta^2$ posito β^2, quadratillo infinitesimo ipsius AB. et ab altera parte, ita procedant decrescendo $\mathrm{a} - \mathrm{Rq}\,\beta^2$ $\mathrm{a} - \mathrm{Rq}\,2\beta^2$ $\mathrm{a} - \mathrm{Rq}$ ergo multiplicatio haec erit β^2 *(3)* ita *L* 18 f. etc. *(1)* sumto *(2)* consi *(3)* con *(4)* | scilicet *nicht gestr.* | summa qua *(5)* si scilicet *(a)* quadratillum eius *(b)* quadratorum *L*
19 triangulare *erg. L*

basis altitudinisque, et proinde homogeneum, ubi patet applicatas prismatis basi parallelas, aequales quadratis applicatarum parabolae, ita crescere, haec ducantur in oppositas applicatas

$$Rq\,a^2 - \beta a. \qquad Rq\,a^2 - 2\beta a. \qquad Rq\,a^2 - 3\beta a. \qquad Rqa^2 - 4\beta a. \quad \text{etc.}$$

fiet

$$Rq\,\llcorner a^2\beta a - \beta^2 a^2\lrcorner \quad Rq\,\llcorner 2a^2\beta a - 4\beta^2 a^2\lrcorner \quad Rq\,\llcorner 3a^2\beta a - 9\beta^2 a^2\lrcorner \quad \text{etc.}$$

dividatur per $Rq\,a^2$, seu diametrum, fiet semicirculus:

$$Rq\,\llcorner \beta a - \beta^2\lrcorner \qquad Rq\,\llcorner 2\beta a - 4\beta^2\lrcorner \qquad Rq\,\llcorner 3\beta a - 9\beta^2\lrcorner \quad \text{etc.}$$

qui si dividatur per $Rq\,a$ diametri fiet arcus quadrantis $\frown Rq\,a =$

$$Rq\,\llcorner \beta - \frac{[\beta^2]}{a}\lrcorner \qquad \llcorner Rq\,2\beta - \frac{4\beta^2}{a}\lrcorner \quad \text{etc.}$$

ergo arcus quadrantis

$$Rq\,\llcorner \frac{\beta - \frac{[\beta^2]}{a}}{a}\lrcorner \quad \text{seu}$$

$$Rq\,\llcorner \frac{\beta}{a} - \frac{[\beta^2]}{a^2}\lrcorner \qquad Rq\,\llcorner \frac{2\beta}{a} - \frac{4\beta^2}{a^2}\lrcorner \quad \text{etc.}$$

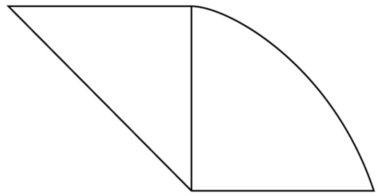
Similiter cum etiam $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ADC. CDB sint similia erunt $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{AC}{DC}$. ergo $AD \frown DC = DB \frown AC$.

Ergo ut chorda arcus in sinum arcus, ita chorda arcus supplementi in sinum versum arcus dati.

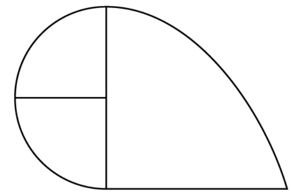
---

7 $\dfrac{ax}{4} = \dfrac{Rq\,a \frown Rq\,a \frown x}{4}$.

10–13 $2\beta^2$ *L ändert Hrsg. dreimal* 16 arcus | minoris *erg. und gestr.* | in *L*



[*Fig. 3*]



[*Fig.4*]

Ergo si in parabolam altitudinis basisque eiusdem, AB, triangulum cuius basis AB, altitudo AB, inverso modo ducatur, productum aequabitur eidem parabolae in semicirculum suum recta ductae idque adeo ut portiones abscissae quoque sint aequales, et ideo summae quoque sectionum seu momenta, manifestum est enim, elementa esse aequalia et proportionalia. Habemus ergo quadraturam solidi parabolico-circularis, quod fit ex ductu semicirculi in semiparabolam.

Item $\dfrac{AD}{DB} = \dfrac{DC}{CB}$. ergo $AD \frown CB = DB \frown DC$.

Seu rectangulum sub chorda et sinu verso arcus supplementi aequatur rectangulo sub sinu verso arcus dati, et chorda arcus supplementi.

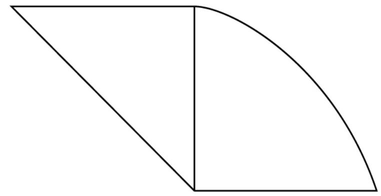
---

3 At hoc productum aequatur momento parabolae ex recta per verticem basi parallela, nam chorda supplementi intelligenda ibidem applicata, ubi est sinus CD. ergo vertex in B. et BC distantia a vertice.

4 ut *(1)* sectiones *(2)* portiones abscissae *L* 11 ex *(1)* basi *(2)* recta *L*

---

9 aequatur: statt sinu verso müsste es sinu heißen. Der anschließende Satz wird dadurch falsch.



[*Fig. 5*]

Quod per se manifestum in totis est, cum utrobique in eiusdem speciei parabolam, ducatur idem specie $\bigtriangledown^{\text{lum}}$, at non in partibus, nisi per hanc demonstrationem.

Idem accommodari potest ad triangulum AFB simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADB.

Ergo ut $\dfrac{FB}{AB\,\text{diam.}} = \dfrac{AB}{DB}$. ergo $\square$diam. $= FB \frown DB$. seu si in chordam ducatur recta, quae sit ita ad ipsam ut est sinus versus arcus ad sinum versum supplementi, productum erit quadrato diametri aequale.

$$\frac{\text{quaesita}\,FD}{\text{chorda}} = \frac{\text{sinus versus}}{\text{sinus versus supplementi}}.$$

$$FD = \frac{\text{sinus versus} \frown \text{chorda}}{\text{sinus versus supplementi}} \frown \text{chorda} = \text{quad. diam.}$$

$$\frac{\text{sin. vers.} \frown \text{chorda}}{\text{sin. vers. supplementi}} \quad \frac{b \frown Rq\,ba^2 - ba}{a-b} \quad \frac{2b \frown Rq\,2a^2b - 2ba}{a-2b} \frown \text{chorda:}$$

$$\frac{b \frown ba^2 - ba}{a-b} \quad \frac{2b \frown 2ba^2 - 2ba}{a-2b} \quad \text{etc.} \quad = \frac{b^2a^2 - b^2a}{a-b} \quad \frac{4b^2a^2 - 4b^2a}{a-2b} \;\text{[etc.]}$$

---

8 *Zur Variante:* Error fuit FD. non fuit quaesita.

9 Imo deberet esse FB. sed tunc cessat aequatio.

2 in totis *erg.* *L* 4 ad *(1)* tangentes et secantes. Triangulum enim *(2)* triangulum *L* 5 $\dfrac{\text{FB}\mid\text{secans } \textit{gestr.}\mid}{\text{AB diam.}}$ *L* 8 quaesita *(1)* FB *(2)* FD *L* 9 *(1)* FB *(2)* FD = *L* 11 etc. *erg. Hrsg.* 12 quaesita. | Ista FD est tangens arcus dimidii *gestr.* | *L*

4–385,7 Die folgende Rechnung ist trotz der später erfolgten punktuellen Verbesserungen in Z. 8 f. fehlerhaft geblieben. Leibniz will daher das Ganze exakter wiederholen.

Si dividantur omnia per ab vel a est genus quoddam solidi hyperboloeiformis, quod quadrari potest.

Erit $\dfrac{a-1}{a-1}$ $\dfrac{4a-4}{a-2}$ $\dfrac{9a-9}{a-3} = a+a+a$ etc. summa a^2. Ecce planum hyperboliforme quadrabile.

Ergo ista rectangula ita crescent: $\dfrac{b^2a}{a-b} = a^2$ $\dfrac{2b^2a}{a-2b} = a^2$ $\dfrac{3b^2a}{a-3b}$ etc. Unde apparet solidum istud ex rectangulis factum aequari momento hyperbolico seu ungulae.

Videndum exactius.

[*Teil 2*]

In $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADL radius AL in sinum $CD = AD$ sin. dimidii duplicatum, seu chordam arcus dati in LM sinum complementi arcus dimidii.

$\vee TUD = LDB$. Ergo UDT et ADL ($\vee^{\text{li}}$) aequales, ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ UTD et ADK similia, item LMD, item HDL. MTW ang. $= LDB$. ang. $TMW = ADL$.

$\bigtriangledown DML = \bigtriangledown MTW$.

Ang. ADC dimid. ang. ALE (alter ad centrum, alter ad circumferentiam, super eodem arcu AE). Ergo et HDI $\vee$ duplus ADC (quia $HD = DI$ et $HM = MI$) $= ALD$. qui est $= ALE$. quia AD arcus $= AE$.

$\vee^{\text{lus}}$ HID (vel DHI) $=$ $\vee^{\text{lo}}$ HLS. supplenti dimidii anguli dati ALD nempe ALH ad quadrantem.

Ang. ADB rect. $= AGD$ rect. $\vee ADC = CBD$. $AG = AC$. $DC = GD$. $AH = HD$. et quia $AK = GD$. ergo $GH = IK = IC$. Porro $\vee CIK = \vee AHD$. item $\vee CIK = AID$. ergo $\vee AHD = \vee AID$. Ergo et dimidii aequales seu $\vee HID = \vee IHD$.

1 per *(1)* a^{2}b *(2)* ab vel a *L* 4 f. quadrabile. *(1)* Incipiatur inverso modo $\dfrac{\text{sinus versus b} \frown \text{chorda Rq ba}}{\text{sinus versus supplementi a} - \text{b}}$ $\frown$ *(a)* b^2 *(b)* chorda $= \dfrac{\text{b}^2\text{a}}{\text{a}-\text{b}} = \text{a}^2$ *(2)* $\dfrac{2\text{b}^2\text{a}}{\text{a}-2\text{b}}$ *(3)* Ergo *L*
21–386,1 $\vee$IHD. *(1)* Ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ HDI est aequiangulum, ac proinde et aequilaterum ergo HI (FD) = HD = AH. *(2)* Idemque *L*

13 $\bigtriangledown DML = \bigtriangledown MTW$.: Leibniz verwendet hier das Gleichheitszeichen auch als Ähnlichkeitssymbol.

Idemque brevius, quia AB duplum LB. Ergo AF duplum HF. ergo $HF = AH$. ergo LM sagitta arcus dimidii, dimidia chorda complementi arcus dati, uti sinus arcus dimidii est dimidius chordae arcus dati. Cumque sit BF duplum LH erit HM dimidium FD.

Momenta sinuum ex vertice, aequantur distantiis tangentium a vertice in tangentes.

$KN = DP$. Iam $\dfrac{AK}{KL} = \dfrac{KL}{KN}$. Ergo $\left.\begin{matrix}\mathrm{KN}\\ DP\end{matrix}\right\} = \dfrac{\square KL (= CL)}{AK = \text{sin.}}$. Iam DG protrahatur dum occurrat rectae AB. erit $\dfrac{DG\,\text{producta}}{HD = AH} = \dfrac{CD}{CD - HD = AH}$. erit ergo DG producta $= \dfrac{CD \frown AH}{CD - AH}$. Porro $\dfrac{PD}{DG\,\text{prod.}} = \dfrac{OD}{CD}$. Ergo $\dfrac{PD \frown CD}{DG\,\text{prod.}} = OD$. Ergo $\dfrac{PD \frown \cancel{CD}}{\dfrac{\cancel{CD} \frown AH}{CD - AH}} = OD$. Ergo $OD = \dfrac{PD \frown CD - PD \frown AH}{AH}$. seu $OD = \dfrac{PD \frown CD}{AH} - PD$. Iam $PD = \dfrac{\square CL}{CD}$. Ergo $OD = \dfrac{\square CL}{AH} - \dfrac{\square CL}{CD} = AL - CD$. Porro $CD = Rq \square AL - CL \square$.

$AH = HF = HD = DI = AI$. Sic demonstro rursus AF et CD parallelae, item HD et AI parallelae. Ergo $HD = AI$ (quippe parallelae intra parallelas). Porro $AH = HD$. ut constat. Ergo AI quod $= HD$ etiam $= AH$. $DI = AH$. quia parallelae intra parallelas, ergo $=^{\text{lia}}$: AH. HD. DI. AI. Porro $AM = MD$. et $\vee HMD = DMI$. ergo $HM = MI$. sed HM (et per consequens HI) [*bricht ab*].

3 f. FD | vel AH *gestr.* |. Momenta *L* 10 AI. *(1)* AD = HI. *(2)* Sic *L* 14 HI) | est incommensurabile ad HD. Quia angulus *gestr.* | *L*

---

5 $KN = DP$.: Diese Bezeichnung ist unrichtig. Der Fehler vererbt sich auf Z. 9.

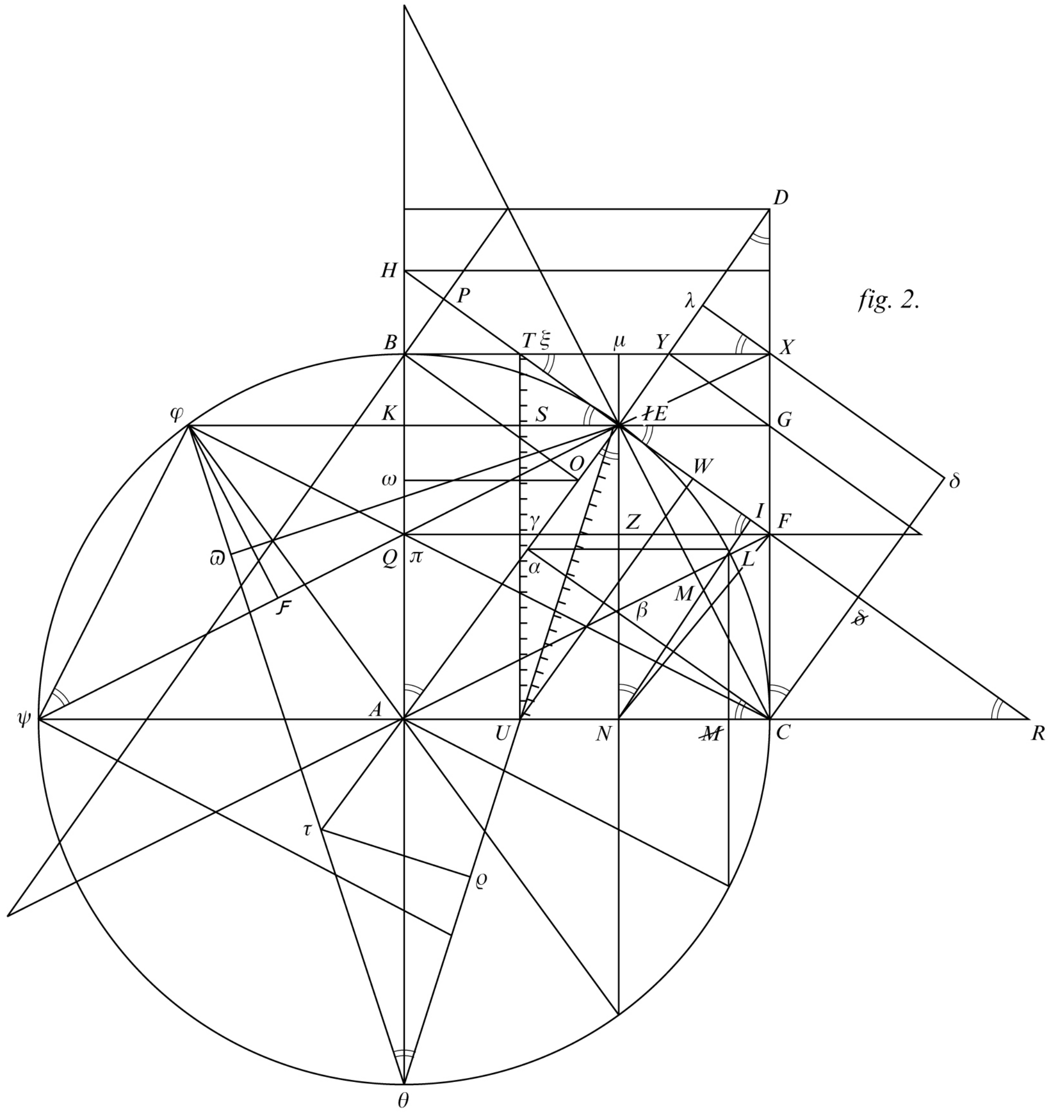
[*Teil 3*]

Ad quadrantem AB ducatur CD indefinita altitudini AB parallela sumtoque in arcu puncto quolibet E, ductoque radio AE et EF tangente ex E in CD, ac denique per E secante AD ad tangentem CD arcus CE tandemque recta AF patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ADC. EDF esse similia, sunt enim rectangula et habent praeterea angulum communem ADC vel EDF. ergo $\vee EFD = \vee DAC$. Ergo $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DF}{DE}$.

388,1 *Zu* [*Fig. 6*]:

Comparanda $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AKE et EZF.
⟨Comparanda⟩ $\bigtriangledown^{\text{la}}$ nova NFR. et NFC. et NZF. γEF. $F\delta C$.
Comparandum adhuc EGF cum summa, item HEK cum KEA.
NB[:] $\bigtriangledown YDX$.

9 NFR et NFC: Leibniz hat zunächst geglaubt, dass NF senkrecht auf HR stehe. Später (vgl. N. 26 Prop. 51) hat er den Irrtum bemerkt und die Linie NF in der Zeichnung gestrichen.
388,1 [*Fig. 6*]: Die Figur ist schrittweise erweitert worden. Dadurch bedingt treten konkurrierende Bezeichnungen auf. Leibniz hat sich hier damit beholfen, dass er obsolet gewordene Bezeichnungen gestrichen und die frei gewordenen Buchstaben weiter verwendet hat. Hinzu kommen die zwangsläufigen Ungenauigkeiten einer mehrfach verbesserten Handzeichnung. Die Figur wird in den N. 22, 26 und 27 erneut benutzt.



[*Fig. 6, tlw. Blindzeichnung*]

$AD \frown DE$ secans in se ipsum radio demto $=$
$DC \frown DF$ tangenti in se ipsum demto tangente arcus dimidii.

Nota secans in se ipsum seu summa $\square^{\text{torum}}$ hyperbolae quadrari potest seu momentum ex asymptota ad quam applicatae sunt secantes. Ergo hoc solidum, demto cylindro hyperbolico cuius basis spatium asymptoton, altitudo radius aequatur tangenti in se ipsum (quadrato tangentis) demto tangente arcus dimidii, et hoc aequatur rectangulo ex differentia sinus a secante in sinum demto rectangulo facto ex eadem differentia ducta in differentiam sinus arcus dimidii minoris a secante arcus dimidii minoris. Tangens HI est med. prop. inter KK [*sic!*] et KA $(= GC)$. AI radius est med. prop. inter sinum AK et secantem. Opus ergo invenire tantum sinum arcus dimidii, at is est dimidia chorda arcus dati. LM dimid. IC. Fit autem chorda arcus dimidii, si sinus versi arcus dati $\square^{\text{to}}$ addatur $\square^{\text{tum}}$ sinus, summae Rq. est chorda.

$$\frac{AD}{DF} = \frac{DC}{DE} = \frac{AC}{EF}.$$

$AD \frown EF = DF \frown AC$. secans in tangentem arcus dimidii $=$ differentiae tangentis arcus dati et dimidii in radium.

$AC \frown DE = DC \frown EF$. radius in differentiam secantis et radii, aequatur tangenti arcus dati in tangentem arcus dimidii.

4 f. (Imo quadrari non potest.)

17–19 *Daneben in größerer Schrift:* NB.

4–13 Nota secans ... est chorda. *erg. L* 7 f. ex *(1)* tangente in sinum *(2)* differentia *L*

4 Nota: Der folgende Rechnungsversuch ist fehlerhaft und leidet zudem unter unpräziser Bezeichnungsweise.

Ducta EG sinu verso arcus CE patet $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DE}{DG}$. Ergo $DE\square = DF \frown DG$. seu quadratum differentiae inter radium et secantem $= \square^{\text{lo}}$ ex tangente demto sinu in tangentem demto tangente arcus dimidii.

tang. $-$ sin.

$\underline{\text{tang.} - \text{tang. dim.}}$

tang. $\square -$ sin.$\frown$ tang. $-$ tang. $\frown$ tang. dim. $-$ sin.$\frown$ tang. dim.

Porro $\dfrac{DF}{FE} = \dfrac{FE}{FG}$. ergo $FE\square = DF \frown FG$. $\square^{\text{tum}}$ tangentis arcus dimidii aequale rectangulo differentiae inter ipsum, et sinum arcus dati in differentiam ipsius a tangente arcus dati ductae.

Porro $\dfrac{DE}{EF} = \dfrac{EG}{GF.}$ Ergo $DE \frown GF = EG \frown EF$. seu differentia secantis a radio in differentiam sinus recti a tangente arcus dimidii, aequatur [sinui verso] in tangentem arcus dimidii.

1 *Zu* $DE\square = DF \frown DG$. *am unteren Rande:*

$$\square, \llcorner \frac{a^2}{b} - a \lrcorner = \underset{A}{\frac{Rq\, a^2 - b^2 \frown a}{b}} - \underset{B}{Rq\, a^2 {-} b^2,,} \frown + \underset{C}{\frac{Rq\, a^2 - b^2, \frown a}{b}} - \underset{D}{\frac{a^2 - ab}{Rq\, a^2 - b^2}}.$$

$$AC - BC - AD + BD$$

$$A\square, - (BC = -)\ \frac{a^2 - b^2, \frown a}{b} - (AD = -)\ \frac{a^3 - a^2 b}{b} + (BD =)\ a^2 - ab.$$

Vide plag. seq. sign. $\oplus$

1 EG *(1)* differentia *(2)* sinu *L* 2 radium et *(1)* diametrum *(2)* secantem $= \square^{\text{lo}}$ ex *(a)* secante *(b)* tangente *L* 4–6 tang. ... $-$ sin.$\frown$ tang. dim. *erg.* L 8 ipsius a *(1)* sinu *(2)* tangente *L* 10 seu *(1)* sinus | versus *streicht Hrsg.* | in differentiam tangentis a radio, aequatur *(2)* differentia *(a)* tangentis *(b)* secantis *L* 11 aequatur *(1)* sinui verso *(2)* | differentiae sinus a radio *streicht Hrsg.*, sinui verso *erg. Hrsg.* | in tangentem *L*

18 Vide: s. N. 22 S. 395 Z. 8.

22. VARIA AD CYCLOMETRIAM II
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept mit Ergänzungen: LH 35 II 1 Bl. 323–324. 1 Bog. 2°. 4 S. Überschrift in anderem Duktus ergänzt und verworfen.
Cc 2, Nr. 695

Datierungsgründe: Das Stück ist eine direkte Fortsetzung von N. 21 (s. dort).

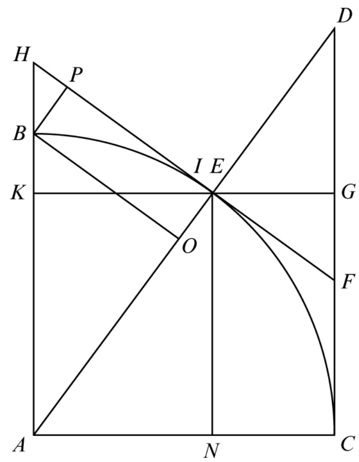
Praecedenti plagula multa dixi ad cyclometriam pertinentia, dedi quadraturam ductus cuiusdam cycloparabolici, aliaque id genus. Ea tentabo persequi si merentur.

Summa $\square^{\text{torum}}$ applicatorum asymptotae hyperbolae, seu ductus spatii hyperbolici asymptoti rectus in se ipsum, demto cylindro spatii hyperbolici asymptoti in radium; aequatur summae rectangulorum tangentis in se ipsum, demto tangente arcus dimidii. Porro tangens est media proportionalis inter sinum et differentiam sinus a secante.

7 f. *Zur verworfenen Überschrift:* falsum

7 | Quadratura conoeidis, cuius basis est circulus diametri infinitae, seu cuius radius asymptota hyperbolae. *erg. u. gestr.* | Praecedenti *L* 12+392,2 secante. *(1)* Sint ergo posito b. | ut radio a | *(2)* Pono *L*

7–12 Vgl. dazu die Ergänzung in N. 21, S. 389 Z. 4–13 .



[*Fig. 1*]

Pono a. basin AC. in partes sectam aequales. Ergo datur AN. differentia sinus versi a radio, velut numerus unitatum, esto b. eius q. b^2. a quadr. radii a^2. fiet $Rq\,a^2 - b^2$, sinus IN. Posito sinu facile habetur tangens quia ut b ad a. ita sinus ad tangentem. Ergo $\dfrac{\text{tangens}}{Rq\,a^2 - b^2} = \dfrac{a}{b}$. Ergo tangens $= \dfrac{a\,Rq\,a^2 - b^2}{b}$.

NB. error in his, quia non cum AC. sed cum AB aequidividitur ordinatae ad asymptotam hyperbolae prodeunt. Et necesse est sinus aequaliter crescere, non sinus versos, vel eorum complementa. Ergo aliter inchoandum.

Radius a. sinus b. secans $\dfrac{a^2}{b}$. tangens $= Rq \llcorner\llcorner \dfrac{a^2}{b} - b \lrcorner \frown b = a^2 - b^2, Rq$ = tangens $(= Rq \llcorner \dfrac{a^4}{b^2} - a^2 \lrcorner$ unde $a^2 - b^2 = \dfrac{a^4 - a^2b^2}{b^2}$. Ergo $a^2b^2 - b^4 = a^4 - a^2b^2$. Ergo $2a^2b^2 - b^4 = a^4$.)

Nunc quaeramus tangentem arcus dimidii, hoc modo: datur $AN = a^2 - b^2, Rq$. ergo et $NC = a - Rq\,a^2 - b^2$. ergo et IC.

1 [*Fig. 1*] *erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.*

Aliter: in $\bigtriangledown^{\text{angulo}}$ DIG datur $DI = \dfrac{a^2}{b} - a$. et $DG = Rq\, a^2 - b^2 \lrcorner - b$. Porro dabitur et EG. nam $\dfrac{EG}{AC} = \dfrac{DI}{AD}$. Ergo $EG = \dfrac{DI \frown AC}{AD}$. $\dfrac{a^2}{b} - a \frown a \smile \dfrac{a^2}{b} = \dfrac{\dfrac{a^3}{b} - a^2}{\dfrac{a^2}{b}} = \dfrac{a^3 - a^2 b}{b^2} = a - b$. falsum.

Ergo sic emendenda res est: sinus debet sumi $KE = b$. secans AD erit $\dfrac{a^2}{b}$. tangens $\dfrac{a^4}{b^2} - a^2, Rq$. Ang. $KEA =$ Ang. DAC. quia ang. EAC est angulo KAE supplemento ad rectum, et KEA eidem KAE. cum sit in eodem $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ rectangulo. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ EKA et ADC similia. Ergo $\dfrac{DA}{EA} = \dfrac{EA = CA}{EK}$. Unde apparet secantes ipsi AC ordinatim applicatas hyperbolam dare.

Porro datur recta $EG = a - b$. Datur et DG. nempe $\dfrac{DG}{DC} = \dfrac{EG}{AC}$. $DG = \dfrac{DC \frown EG}{AC.}$ seu $DG = Rq\, \dfrac{a^4}{b^2} - a^2 \frown \dfrac{a-b}{a} = Rq\, \dfrac{a^2}{b^2} - 1, \frown a - b$.

Porro cum $\bigtriangledown^{\text{la}}$ DEF et AEN sunt similia, cum sint rectangula, et praeterea angulos habeant aequales EAC et EFD. ergo $\dfrac{EF}{AN} = \dfrac{DE}{EN}$. ergo $EF = \dfrac{DE \frown AN}{EN}$. EN autem est $Rq\, a^2 - b^2$. Ergo

$EF = FC$. tangens arcus dimidii $= \dfrac{a^2}{b} - a, \frown b \smile Rq\, a^2 - b^2 = \dfrac{a^2 - ab}{Rq\, a^2 - b^2}$.

1 Aliter: *(1)* ut AD ad DE. ita AC ad IF vel FC. $\dfrac{\mathrm{IF}}{\mathrm{AC}} = \dfrac{\mathrm{DE}}{\mathrm{AD}}$. Ergo IF $= \dfrac{\mathrm{DE} \frown \mathrm{AC}}{\mathrm{AD}}$. ergo $\mathrm{a} - \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} \frown \mathrm{a}\lrcorner \smile \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} = \dfrac{\mathrm{a}^2 - \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}}}{\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}} = \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b} - \mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2} = \mathrm{b} - \mathrm{a}$. ἄτοπον *(2)* in *L* 7 ordinatim *erg. L*

Hoc theorema comparare libet cum illo Pellii, relato a Schotenio quod huc redit:

$$\frac{2a^2 \frown \text{ tang. arcus dimidii}}{a^2 - \square\text{tang. arcus dimidii}} = \text{tang. arcus dupli.}$$

Ergo $2a^2 \frown$ tang. dimid. $=$ tang. dupli $\frown a^2 - \square$ tang. arc. dimid.

Nos autem primo tangentem ut a nobis determinatus est, $\dfrac{a^4}{b^2} - a^2, Rq.$ ducemus in se ipsum, fiet $\dfrac{a^4}{b^2} - a^2$. summa horum haberi et hoc spatium quadrari potest. Restat summa rectangulorum ex tangentibus in tangentes arcuum dimidiorum, fiet

$$\frac{a^4}{b^2} - a^2 \frown \frac{a^4 + a^2b^2 - 2a^3b}{a^2 - b^2} = \frac{a^8 + a^6b^2 - 2a^7b}{a^2b^2 - b^4} - \frac{a^6 + a^4b^2 - 2a^5b}{a^2 - b^2},, Rq.$$

An ergo brevius hoc modo quia tangens etiam aliter enuntiari potest:

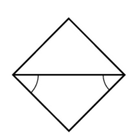
$\dfrac{\text{tang.}}{\text{sin. } Rq\, a^2 - b^2} = \dfrac{a}{b}$. Ergo tang. $= \dfrac{Rq\, a^2 - b^2, \frown a}{b}$.

Erit multiplicatio hoc modo concipienda: $\dfrac{Rq\, a^2 - b^2, \frown a}{b} \frown \dfrac{a^2 - ab}{Rq\, a^2 - b^2}$. fieret $\dfrac{a^3 - a^2b}{b}$ seu $\dfrac{a^3}{b} - a^2$.

Cumque omnes b sint termini arithmeticae progressionis, ergo omnes $\dfrac{a^3}{b}$ erunt spatium hyperbolicum in radium ductum, nam omnia $\dfrac{a^2}{b}$ darent spatium hyperbolicum.

---

10 *In Höhe der Rechnung am Rande:*



5 summa horum haberi *erg. L*

---

1 relato a Schotenio: *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*, *DGS* II S. 366–368. Den Hinweis auf Pell gibt Schooten selbst; s. auch J. Pell, *Controversiae de vera circuli mensura … pars prima*, 1647, S. 13.

Habemus ergo aequationem hanc:

$$\text{sum. } \square^{\text{torum}} \text{ applicatar. hyperbolae ad asympt. } = \cancel{\frac{a^4}{b^2}} - \cancel{a^2}, -\cancel{\frac{a^3}{b}} + \cancel{a^2}.$$

$$- \text{ cylind. spat. hyperb.}$$

Ecce exactissimam aequationem signum ingens veritatis, etsi nihil novi detegat.

Ex Pelliano theoremate, ducatur

$$\frac{a^2-ab}{\cancel{Rq\,a^2-b^2}} \frown \frac{2a^2 \frown \dfrac{a^2-ab}{\cancel{Rq\,a^2-b^2}}}{\cancel{a^4}-\cancel{b^2a^2} \quad \cancel{a^2} - \dfrac{\cancel{a^4}+\cancel{a^2b^2}-\cancel{2a^3b}}{\cancel{a^2-b^2}} \quad 2a^3b}.$$

Error forte aliquis sed res per multas licet ambages eodem redit.

$\oplus$

Ex iis quae hic, et sub finem plagulae praecedentis, ubi idem signum $\oplus$ scripsi patet aequatio notabilis: ab una parte sunt quadrata differentiarum inter ordinatas ad asymptotam hyperbolae et radium, quae utique quadrari queunt

$$\square \llcorner \frac{a^2}{b} - a \lrcorner = \frac{a^4-b^2a^2}{b^2} + a^2 - \cancel{ab} - \frac{a^3}{b} + \cancel{ba} - \frac{a^3}{b} + a^2$$

$$\frac{a^4}{b^2} - \cancel{a^2} + \cancel{a^2} - \frac{2a^3}{b} + a^2. \text{ patet omnia elidi.}$$

Differentia secantis a radio, in differentiam sinus recti a tangente arcus dimidii aequatur rectangulo complementi sinus (aequaliter assumti) in tangentem arcus dimidii.

---

15 *Über* complementi: distantiae a basi

---

7 Error forte: Leibniz vermutet zu Recht einen Fehler. Im Nenner des rechten Faktors müsste es anstelle von $+2a^3b$ vielmehr $-2a^2b^2 + 2a^3b$ heißen. 8 $\oplus$: s. a. N. 21 S. 390 Anmerkung 1. 14–396,3 Die Aussage selbst ist korrekt; die Umsetzung in Formelsprache misslingt jedoch.

At ista puto quadrabilis.

$$\frac{a^2}{b} - a, \frown \frac{Rq\,a^2 - b^2 \frown a}{b} - Rq\,\llcorner a^2 - b^2 \lrcorner = a - b \frown \frac{a^2 - ab}{Rq\,a^2 - b^2}.\ \text{ ergo}$$

$$\frac{a^2}{b} - a, \frown \frac{a^2 - b^2 \frown a}{b}, - \llcorner a^2 - b^2 \lrcorner = a - b \frown a^2 - ab. \qquad \text{etc.}$$

Ang. $EFD = \vee\ DAC$ vel AHE. $\vee\ EDF = \vee AEN = \vee HAE$. Ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AHE et AEN similia sunt.

$\dfrac{HA}{AE} = \dfrac{AE}{EN}$. Ergo HA secans $\frown$ EN sinus arcus complementi $= AE \frown AE, \square$ rad.
Nimirum secans per sinum [arcus complementi] multiplicata, dat quadr. radii, quia secans est quadr. radii per sinum arcus complementi divisum. Hinc quadratura momenti hyperbolici. Sinus complementi est portio regulae seu altitudinis, vel distantia a basi.

$\dfrac{HA}{HE} = \dfrac{AE}{AN}$. Ergo $HA \frown AN = HE \frown AE$. seu secans in basin aequalis radio in tangentem.

Ergo summa rectangulorum ex secantibus et sinubus aequatur summae tangentium in radium. Sinus autem KE sunt ordinatim applicati, horum ergo summa seu quadrans, si ducatur in summam secantium seu spatium asymptotum hyperbolicum, fiet summa tangentium, puto conchoeis, in radium ducta seu cylinder conchoeidis. Sed nota ad habendas secantes necesse esse ut eae semper transeant ex A per H. tangentibus tantum variatis. Posita quadratura conchoeidis, dabitur quadratura huius d u c t u s h y p e r b o l i c o - c i r c u l a r i s.

$\dfrac{AE}{EN} = \dfrac{HE}{NA}$. Ergo $AE \frown NA = EN \frown HE$.

---

10 *Über* basin: sinum AN

1 At ... quadrabilis. *erg. L* 4 *(1)* Nota angulus AED $= \vee^{\text{lo}}$ DEF. ergo $\vee$AHE $= \vee^{\text{lo}}$ EDH. quia uterque supplementum priorum aequalium in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ rectangulo AEH et EDF. Ergo $\dfrac{\text{HE}}{\text{AE}} = \text{F}$ *(2)* Ang. *L* 6 secans *und* sinus arcus complementi *erg. L* 7 sinum *(1)* divisa *(2)* | arcus complementi *erg. Hrsg.* | multiplicata *L* 8 arcus complementi *erg. L* 9 Sinus complementi ... a basi. *erg. L* 11 f. tangentem. | Et quia quando anguli sunt infinite parvi, *(1)* tangens *(2)* secans non differt a radio, hinc rec *gestr.* | Ergo *L* 17 f. Posita ... h y p e r b o l i c o - c i r c u l a r i s. *erg. L*

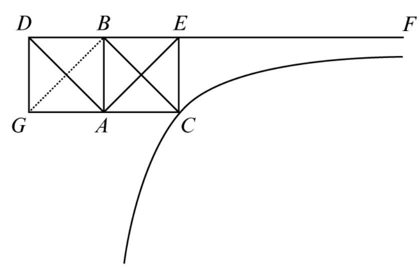
---

15 puto conchoeis: vgl. dazu N. 17 S. 360 Z. 5 f. und die zugehörige Erläuterung.

Ex hac propositione pendet quadratura figurae sinuum, et pleraque omnia in Pascalii tract. de sinubus arcubusque circuli, deque cycloeide.

$\bigtriangledown^{\text{lum}}$ HKE simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AEN vel KEA. Ergo $\dfrac{KA}{KE} = \dfrac{KE}{HK}$. ergo $KA \frown HK = KE\,\square$.
seu quod memorabile est: quadrata sinuum radio aequidiviso applicata, aequantur sagittis, seu sinubus complementi, qui sunt progressionis arithmeticae, in differentias suas a secantibus ductis. Hinc si ab applicatis asymptotae hyperbolae auferas applicatas respondentes trianguli aeque alti cum spatio asymptoto hyperbolae, et altitudinis basisque eiusdem triangulo in residua ducto, solidum productum est homogeneum hemisphaerio, et aequatur quadratis sinuum.

Triangulum recte applicatum est spatio hyperbolico, minima applicata unius minimae alterius.



[*Fig. 2*]

$AB = AC = BD = BE$. $AD = AE$. et ante ductum hoc triangulum abscinditur. Quodsi addatur tantum producto solido, quadrabili, ductus trianguli ADB in se ipsum ABE. habebimus ductum trianguli ADB in totum spatium asymptotum $CABEF$. Imo cavendum, non ducendum $\bigtriangledown ADB$. sed BGA. Si modus esset ducendi etiam triangulum ADB in spatium hyperbolicum haberetur quadratura hyperbolae.

11 f. *Zu* Triangulum ... alterius: *interlinear:* male

1 f. Pascalii tract.: s. Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, sowie *Traité général de la roulette*, 1658 (PO IX, 60–104; 116–133). 7–10 Diese Aussage ist nicht zutreffend.

Redeamus ad figuram priorem. Ducatur BO sinus inversus $= KE$. erit $OE = KB$. ergo $\dfrac{AE\,\text{rad.}}{OE} = \dfrac{AH\,\text{secans}}{BH} = \dfrac{HE}{HP}$. Ergo

$$AE \text{ rad.} \frown BH \text{ diff. rad. a secante} = OE \frown AH \text{ secans.}$$

At OE sunt applicatae trianguli ADB supplementa scilicet trianguli AGD vel AGB. Ergo radius ductus in spatium hyperbolicum, demto cubo suo, aequatur $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADB in spatium idem ducto. Cubus autem eius est ipsum momentum seu $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BGA in eum ductum.

Summa triangularis ab uno latere, addita summae $\bigtriangledown^{\text{lari}}$ ab altero latere, facit cylindrum figurae, cuius altitudo est ipsa mensura, cuius infinitesimae scilicet sunt unitates.

Differentiarum usus est in dimensione solidi figurae proportionalium. Ostenditur in eo loco differentias eius solidi esse ut ipsa solidi elementa, et ideo solidum illud esse plano cuius revolutione gignitur homogeneum.

---

3 *Zusatzbetrachtungen am unteren Rande:*

$\dfrac{AH}{BH} \times \dfrac{AE}{OE}$. Ergo $AH \frown OE = BH \frown AE$.

$$\dfrac{a^2}{1} \quad \dfrac{a^2}{2} \quad \dfrac{a^2}{3} \quad \dfrac{a^2}{4} \quad \dfrac{a^2}{5} \qquad \dfrac{a^2}{a-1} \quad \dfrac{a^2}{a-2} \quad \dfrac{a^2}{a-3}$$

$$\underline{a-1 \quad a-2 \quad a-3 \quad a-4 \quad a-5}$$

$$\dfrac{a^3}{1} -$$

$$a - \dfrac{a^2}{a-3} + \dfrac{a^2}{\dfrac{a-3}{3}} \frown \dfrac{a^2}{3} \qquad a + \dfrac{a^2}{\dfrac{a-3}{3}} \frown \dfrac{a^2}{3} = \dfrac{a^3}{3} + \dfrac{[a^4]}{\left\langle \dfrac{3a-9}{3} \right\rangle}.$$

18 a^3 *L ändert Hrsg.*

---

18 Leibniz hat die Ausdrücke zunächst für $n = 2$ aufgestellt; dann hat er mittels Überschreibens durchweg 2 in 3 verwandelt.

Ex quadratis tangentium et radiorum simul iunctis, quorum summa certe iniri potest, haberi possunt quadrata secantium, et per consequens momentum spatii hyperbolici tam ex finita, quam ex infinita asymptotorum includentium.

Haberi potest momentum conchoeidis, et solidum conchoeidis revolutione factum, quia haberi possunt quadrata tangentium.

$\frac{KA}{KE} = \frac{EA}{HE}$. Ergo $KA \frown HE = KE \frown EA$. hoc habuimus quia $KE = AN$.

Simila sunt $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KHE et EFG. Ergo $\frac{HE}{EF} = \frac{KE}{EG} = \frac{HK}{GF}$.

Ergo $HE \frown EG = EF \frown KE$. seu tangens in complementum sinus = tangenti arcus complementi dimidiati, in sinum arcus dati.

Ergo si in figuram tangentium seu conchoeidem exemto quadrante genitore, ducatur quadrans circuli productum aequabitur trilineo concavo circulari, cuius arcus quadrans, ducta in figuram tangentium arcuum complementi dimidiorum.

Item $HE \frown GF = EF \frown HK$. seu triangulum inverse ductum in figuram tangentium arcuum complementi dimidiorum, aequatur supplementis horum tangentium ad radium in tangentes arcuum datorum ductis. Imo male, pro $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ substitue differentiam trianguli a summa sinuum. Est enim HK. non AK.

Item $KE \frown GF = EG \frown HK$. seu summa sinuum ducta in differentias applicatarum trianguli a tangentibus dimidiorum arcuum complementi, aequatur hyperbolico spatio demto radii $\square^{\text{to}}$ recta in trilineum concavum circulare ducto.

---

1 *Über* iniri potest *interlinear:* Imo iniri non potest, nisi ascendatur ad altiorem dimensionem seu qq.

4 f. *Hinter dem Satz:* male

3 f. includentium. *(1)* Iam *(2)* Sed hoc iam *(3)* | Hinc *gestr.*, haberi *ändert Hrsg.* | potest *L* 10 Ergo *(1)* summa *(2)* figura tangentium seu conchoeis *(3)* si ... exemto *(a)* circulo *(b)* semicirculo *(c)* quadrante *L* 13–16 seu triangulum *(1)* recta *(2)* inverse ... tangentes arcuum *(a)* praecedentium *(b)* datorum ... non AK. *erg. L* 17–19 seu ... differentias *(1)* sinuum *(2)* applicatarum ... aequatur *(a)* triangulo *(b)* hyperbolico ... ducto. *erg. L*

---

6 hoc habuimus: s. o. S. 397 Z. 3 f. 13–16 Die Formel selbst ist korrekt, die Ausformulierumng gelingt trotz der Verbesserungsversuche am Schluss nicht.

$$HF = HA$$

Sed et summae proportionales: $\dfrac{HF}{HE} = \dfrac{KG}{KE} = \dfrac{\overbrace{HK + GF}^{HE} = HA - EF}{HK}$. Ergo $HF \frown KE = HE \frown KG$. seu radius ductus in summam tangentium, seu cylinder cuius basis conchoeis (demto quadrante) altitudo radius, aequatur summae sinuum in summam tangentium arcus dati et dimidii complementi, ductorum seu quadranti recta ducto in conchoeidem figura tangentium arcuum complementi dimidiorum inverse applicata (id est maius unius ad minus alterius) auctam.

$HF \frown HK = HK \frown HE + GF \frown HE = HA - EF, \frown HE$. seu differentia $\bigtriangledown^{\text{li}}$ in secantibus ducta in summam tangentium duplicium, proxime dictorum aequatur summae differentiarum secantium a tangentibus arcus complementi dimidiati in dictas tangentes ductorum.

3–7 *Dazu ergänzt und gestrichen:*

Ergo hic ductus sinuum in tangentes falsas quadrari potest.

Nota habebimus ductum quadrantis in tangentes falsas habito ductu eiusdem in veras per superiora.

8–11 E r r o r , in his et quibusdam sequentibus ad finem huius paginae, quia per errorem visus $HK + GF$ appellaveram differentiam tangenti dimidii a radio, cum sit eius differentia a secante.

HK autem est secans demta portione regulae, seu applicata hyperbolae demta applicata $\bigtriangledown^{\text{li}}$.

Über der Anmerkung: correxi

3 in summam *(1)* sinuum, seu cylinder cuius basis quadrans *(2)* tangentium *L* 8 seu *(1)* triangulum ductum *(2)* differentia *L* 9 f. summae *(1)* radiorum *(2)* differentiarum secantium *L* 11–401,1 ductorum *(1)* a $\frown$ *(2)* HK *L*

8–403,3 Die Betrachtungen dieser Abschnitte, welche sich über die gesamte untere Hälfte von Bl. 324 r° erstrecken, sind nicht fehlerfrei durchgeführt. Leibniz entdeckt zwar einen Hauptfehler (s. die Anmerkung) und verbessert danach entsprechend; es gelingt ihm aber trotz weiterer Verbesserungen nicht, Konsequenz im Rechengang zu erreichen. Stehengebliebene falsche Zwischenergebnisse beeinflussen auch den späteren Rechengang.

$$HK \frown \text{tang. dupl.} + \text{tang. dimid} = \text{secans} - \text{tang. dimid.} \frown \text{tang. dimid.}$$
$$= \text{tang.} + \text{tang. dimid.} \frown \text{tang. dimid.}$$

Ergo secans in tangentem dimidii demtis ~~quadratis tangentium dimidii~~

= ~~quad. tang. dimid.~~ + tang. dimid. $\frown$ in tang. dati.

Ergo ductus hyperbolici in tang. dimid. aequatur tangentibus dimid. in tangentibus dati, seu aequatur cylindro hyperbolico demto cubo.

Item $KG \frown HK = KE \frown HK + GF = KE \frown HA - EF$. seu radius in differentiam secantis ab applicatis $\bigtriangledown^{\text{li}}$ seu cylinder hyperbolicus, demto semicubo seu momentum spatii asymptoti, seu ductus eius in $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectus [(] si adhuc semel semicubus adimatur), aequatur sinubus ductis in secantem demtis sinubus ductis seu quadrante ducto in tangentes dimidii, vel quod eidem redit quadranti ducto in differentias secantium ab applicatis trianguli, + quadranti ducto in differentias tangentium dimidii ab eadem.

Nota habuimus aream quadrantis circuli in spatium hyperbolicum ducti = cylindro conchoeidis (exemto quadrante genitore). Habemus et aream concavi trilinei in idem

---

11 f. *Darunter, mit Verbindungsstrich*: $a - b, + b - c = a - c$.

13 *Zur Variante, gestrichen:*

Quia quadraturam conchoeidis habemus, hinc ad quadraturam hyperbolae restat d u c t u s s i n u u m i n t a n g e n t e s f a l s a s.

NB. si hoc inveniemus, habemus quadraturam hyperbolae, seu cylindri hyperbolici. Habemus enim ductum quadrantis in spatium hyperbolicum (aequalem spatio conchoeidis quadrabili [)], habemus et ductum trilinei concavi circularis in spatium hyperbolicum aequalem momento demtis sinubus.

1 = *(1)* rad. *(2)* secans *L* 3 Ergo *(1)* radius *(2)* secans *L* 4 tang. *(1)* dupl. *(2)* dati *L* 5 Ergo *(1)* cylinder tangentium dimid. sub radio *(2)* ductus *L* 5 tangentibus *(1)* dupl. *(2)* dati *L* 8 secantis *(1)* a radio seu cylinder hyperbolicus demto cubo, vel momentum *(a)* cylindri *(b)* hyperboli *(c)* spatii asymptoti ex minima applicatarum, seu ductus eius in $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectus, aequatur sinubus ductis in radium, seu cylindro circulari sub radio, *(2)* ab applicatis *L* 11 f. , vel ... eadem. *erg. L* 13 ducti | (ergo eius q u a d r a t u r a m *erg. u. gestr.* | = cylindro *L* 14 (exemto quadrante genitore) *erg. L* 19 NB. si *(1)* haec vera sunt *(2)* hoc inveniemus *L*

---

13 habuimus: s. o. S. 399 Z. 10–12. 16 Aus der Zuordnung und dem ursprünglichen Beginn folgt, dass der zweite Teil der Anmerkung zunächst direkt auf den Haupttext bezogen war. Später hat Leibniz beide Teile zusammengefasst und schließlich alles gestrichen.

spatium hyperbolicum ducti, nempe summam sinuum ductam in applicatas trianguli (id est in distantias a basi AC. id est momentum summae sinuum, quod aliquando quadrabile), demta eadem summa sinuum, seu quadrante aliaque portione circulari, in tangentes dimidii ducta. Ergo collectio horum omnium cylinder conchoeidis sub radio, demto cylindro quadrantis, addito momento quadrantis ex basi demtoque quadrante in tangentes dimidii aequatur cylindro hyperbolico sub radio. At quadrans in tangentes dimidii aequatur quadranti in spatium hyperbolicum ducto, addito semicubo radii, demtoque cylindro hyperbolico.

Ergo aequatio haec: Cyl. conch. − cyl. quadr. + mom. quadr. − quadr. in spat. hyperb. − semicub. rad. + ~~cyl. hyperb.~~ = ~~cylind. hyperb.~~

Ergo cyl. conch. + mom. quadr. = cyl. quadr. + semicub. rad. + quadr. in spat. hyperb.

At moment. quadr. $= \frac{2}{3}$ quadr. rad. ⌒ rad. At cylind. conch. demto cylindro = quadrant. in spat. hyperb. Restaret ergo aequatio inter semicubum radii et momentum quadrantis, signum falsi calculi. At quadrantis ductus in spatium hyperbolicum haberi potest posita quadratura hyperbolae et ductus trilinei circularis in spatium hyperbolicum. Ergo his positis daretur et tetragonismus.

Hic aliud etiam theorema memorabile incidit, quod ex praecedentibus sequitur: ostensum est secantes in tangentes dimidii aequari omnibus rectangulis tangentium dati

1 ductam in *(1)* differentiam sinuum, *(2)* sinus (quod solidum quadrari potest), *(3)* applicatas *L* 4 f. demto *(1)* quadrato *(2)* cubo radii *(3)* cylindro *L* 6 f. aequatur *(1)* cylindro circulari, addito cubo *(2)* quadranti *L* 9 mom. quadr. − *(1)* cyl. *(a)* circ. *(b)* quadr. − cub. rad. *(2)* quadr. *L* 11 = *(1)* 2 cyl. quadr. + cub. rad. *(2)* cyl. *L* 12 $\frac{2}{3}$ quadr. rad. ⌒ rad. *(1)* Ergo cylind. conchoeid. = 2 cylind. quadr. $-\frac{1}{3}$ cub. rad. Ergo conchoeid. ⌒ rad. = 2 quadrant. ⌒ rad. $-\frac{1}{3}$ quad. rad. ⌒ rad. Ergo conchoeis | quadrantis (non imminuta) *erg.* | = semicirculo, demta tertia parte quadrati a radio. Quod si verum est, habebitur quadratura *(a)* circuli posita quadratura hyperbolae, et vicissim. Nam data *(b)* hyperbolae posita quadratura circuli. Nam data quadratura circuli datur quadratura conchoeidis, per hoc loco demonstrata. Conchoeis autem aequatur duplo spatii hyperbolici addito quodam semisegmento, demto quodam rectangulo per ostensa a Iacobo Gregorio. Ergo semisegmento isto, quod quadratum esse suppono, a quadrato conchoeidi aequali, subtracto, et rectangulo addito, fiet spatium hyperbolicum. At ex his non sequitur vicissim data quadratura hyperbolae dari circuli quadraturam. *(2)* At cylind. conch. | demto cylindro *erg.* | = quadrant. *L* 13 inter *(1)* cylindrum et rectilineum, signum falsi calculi *(2)* semicubum *L* 18 est *(1)* cylindrum tangentium *(2)* secantes *L*

17 f. ostensum est: s. o. S. 401 Z. 3 f. 28 per ostensa a Iacobo Gregorio: *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 23.

in tangentes dimidii. At haec rectangula ut supra ostendi, aequantur cylindro hyperbolico demto cubo radii. Ergo secantes in tangentes dimidii aequantur cylindro hyperbolico demto cubo radii.

$$\frac{\overset{\text{rad.}}{KG}}{\underset{\text{portio regulae}}{KA}} = \frac{\overset{\text{secans}}{AH} - \overset{\text{tang. dimid.}}{EF}}{\underset{\text{sinus}}{KE}} = \frac{\overset{\text{tang.}}{HE} + \overset{\text{tang. dimid.}}{EF}}{\text{rad.}}.$$

$KG \frown KE = KA \frown AH - EF \frown KA$. id est cylinder quadrantis, aequatur momento spatii hyperbolici, demto momento figurae tangentium dimidiati arcus complementi ex basi AC. ergo si huius solidum revolutione genitum circa AC haberi posset, haberetur tetragonismus. Nam momentum idem est, quod applicatae alicuius figurae, in portiones regulae seu altitudinis a basi abscissas, ductae.

$KG \frown$ rad. seu $\square$ rad. $= KA \frown HE + EF$. seu cubus radii aequatur momento tangentium, addito momento tangentium arcuum complementi dimidiatorum. Quod si ergo momentum tangentium seu conchoeidis haberi posset ex basi, seu asymptota infinita, haberetur et momentum tangentium arcuum complementi dimidiatorum, et ideo per aequationem praecedentem tetragonismum. Hinc si quis exhibere possit solido conchoeidis circa asymptotam aequalem cylindrum, uti habemus solido hyperbolae circa asymptotam, daret tetragonismum. Imo puto in hyperbola non haberi lineam quae transeat per centrum gravitatis spatii asymptoti.

---

5 *Daneben, gestrichen:* Nota idem si pro totis simpla sumantur, semper enim partes totis, etc. proportionales. Hinc ingens numerus aequationum:

18 f. *Dahinter:* dubito

2 Ergo *(1)* dividendo omnia per radium, erit *(a)* cylinder hyper *(b)* hy *(2)* summa tangentium dimidii aequatur spatio hyperbolico asymptoto, abscisso quadrato radii ut EFC (*und Verbindungsstrich zu Fig. 2*) *(3)* secantes *L* 13 dimidiatorum. *(1)* At momentum tangentium haberi potest, si modo a momento secantium seu hyperbolico | (quod habetur) *erg.* | auferatur cubus radii, quia semper quadrato radii a *(a)* secante abl *(b)* secantis quadrato ablato relinquitur quadratum tangentis. Habito autem momento tangentium dimidii, haberetur cylinder quadrantis, quare aut habebitur tetragonismus, aut error erit in calculo. *(aa)* ~~cub. rad.~~ = mom. hyperb. − ~~cub. rad.~~ + mom. tang. dim. Ergo mom. *(bb)* Posita enim *(aaa)* regula *(bbb)* portione regulae KA = b. et radio a. erit *(2)* Quod *L* 14 seu conchoeidis *erg. L* 18 f. Imo … asymptoti. *sowie* dubito *und* *erg. L*

Rad.,$\frown$ secans $-$ tang. dimid. $=$ sinus $\frown$ tang. $+$ tang. dimid. seu cylinder hyperbolae, demto cylindro tangentium arcus supplementi dimidiati, aequatur quadranti ducto in conchoeidem figura tang. dimid. auctam. At hunc ductum quadrantis supra pag. praeced. ostensum, aequari cylindro cuius basis conchoeis exemto quadrante altitudo radius. Ergo spatium hyperbolicum, demta figura tangentium arcus semi-supplementi aequatur conchoeidi quadrante minutae. At ista figura tangentium falsorum est quadrabilis. Ergo data quadratura conchoeidis, datur hyperbolae, et contra, et conchoeidis data quadratura datur quadratura circuli.

$\dfrac{KG}{EG} = \dfrac{AH - EF}{GF} = \dfrac{HE + EF}{EF}$. Ergo $KG \frown GF = EG \frown AH - EF$. seu radius in applicatas trianguli demto cylindro tangentium arcus semisupplementi aequatur trilineo concavo circulari ducto in spatium hyperbolicum, demto eodem trilineo concavo ducto in tangentes arcus semisupplementi.

---

5 *Zu* Ergo (*mit Bezugsstrich und Kustode*):
NB. opus habemus ductu quadrantis in conchoeidem ad quadraturam hyperbolae quia per inferiora ductus quadrantis in tangentes semisupplementi haberi potest. Vel opus concavo circulari ducto in spatium hyperbolicum. At hic trilinei ductus aequatur momento sinuum per pag. praeced.

6 *Zu* tangentium falsorum:
Imo dubito, aequalis est segmento cum ducitur in AC. rectilineo cum in $[AN]$. ut hoc loco.

3 f. pag. praeced. *erg. L* 4 exemto quadrante *erg. L* 5 tangentium *(1)* supplementalium *(2)* suppletoriorum aequatur *(3)* arcus *L* 6–8 At ... circuli. *erg. L* 6 est *(1)* segmento circuli aequalis et figura conchoeidis quadrato *(2)* quadrabilis *L* 7 quadratura *(1)* conchoeidis datur *(2)* hyperbolae datur quadratura circuli et vicissim. *(3)* conchoeidis *L* 9 seu *(1)* cylinder in triangulum seu semiquadra *(2)* radius *L* 19 AC *L ändert Hrsg.*

---

13 Außer dem Verbindungsstrich mit Ergo ist die Anmerkung mittels eines weiteren Bezugsstriches (ausgehend von per inferiora) mit S. 408 Z. 7 verknüpft. Der Verweis am Schluss bezieht sich auf S. 401 Z. 14 – S. 402 Z. 4 bzw. S. 399 Z. 17–19.

cyl. tang. arcus semisuppl. $\left\{\begin{array}{l}\text{Iam tangentes arcus semisupplementi in concavum circulare trilineum} \\ \qquad\underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad} \text{ quadr. circ.}\end{array}\right.$

= trilineo concavo circulari ducto in spatium hyperbolicum seu momento sinuum, demto rad. in applic. triang. addito cyl. tang. arcus semisuppl.

= cyl. hyperb. − cyl. tang. arcus semisuppl.

Cyl. tang. arcus semisuppl. = cylind. hyp. − 2 · cyl. tang. arc. semisuppl.
+ (rad. in applic. triang.) cub. rad. dimid.

Ergo 3 · cylindr. tang. arcus semisuppl. = cylind. hyperb. + $\dfrac{\text{cub. rad.}}{2}$.

(At tangentes arcuum semisupplementi dant portiones circulares. Ergo data quadratura hyperbolae datur quadratura circuli.)

Ergo data quadratura hyperbolae datur figura tangentium semisupplementalium. At hac data datur figura tangentium, seu chonchoeis exemta circuli generantis portione. Ergo data quadratura hyperbolae datur quadratura conchoeidis, exemta scilicet portione circuli generantis. Alia methodo quadraturam conchoeidis ex quadratura hyperbolae demonstravit Iac. Gregorius, videndum an idem proveniat ut sane videtur.

1–6 *Dahinter:* male

7 f. *Dahinter:* (male)

9 *Über der linken Gleichungsseite:* male

12 *Zu* Ergo ... semisupplementalium: male

3 f. = | trilineo ... demto *erg.* | *(1)* cylindro *(2)* rad. ... triang. *(a)* − *(b)* addito *L* 10 f. (At ... circuli.) *erg. L* 10 semisupplementi *(1)* sunt *nicht gestr.* *(2)* dant *L* 13 figura tangentium, | *darüber abbrechend* (unde hoc | seu *L*

1–16 Trotz des nachträglichen Verbesserungsversuches in Z. 3–5 ist der vorliegende Abschnitt fehlerhaft. Dies vermerkt Leibniz an vier aufeinanderfolgenden Stellen. Der Fehler in Z. 9 pflanzt sich bis S. 406 Z. 10 fort. — Zu dem Hinweis auf J. Gregory s. o. die Erläuterung zur Streichung von S. 402 Z. 12.

$KG \frown EF = EG \frown HE + EF.$ seu

cylinder tangentium arcus semisupplementi = trilineo concavo circulari ducto tam in tangentes, quam in tang. semisuppl.

At supra ostensum quod cylind. hyperb. − cyl. tang. arcus semisuppl. = quadranti circulari ducto tam in tangentes, quam in tang. semisuppl.

cyl. tang. semisuppl. + cyl. hyp. − cyl. tang. semisuppl. = cyl. hyperb. = cylind. tang. + cyl. tang. semisuppl.

Iam supra cyl. hyp. $= 3 \cdot$ cyl. tang. suppl. $- \dfrac{\text{cub. rad.}}{2}$.

Ergo $3 \cdot$ cyl. tang. suppl. $- \dfrac{\text{cub. rad.}}{2} =$ cylind. tang. + cyl. tang. semisuppl.

---

1 NB. EF vel CF seu tangentium semisupplement. summa, ad altitudinem AB applicata quadrari potest, ergo sequeretur quadratura hyperbolae posita dictorum veritate.

9 *Zu* cyl. hyperb. *quergeschrieben am Rande:*
E r g o N B [:] Spatium hyperbolicum aequatur conchoeidi communi addita suppletoria vel conchoeidi suppletoriae ter sumtae triangulo portionis regulae minutae. Ergo conchoeis communis (demta semper circ. gen. port.) = ⟨suppleto⟩riae duplicatae demto triangulo seu semiquadrato portionis regulae.

11 *Darüber:* NB.

3 f. semisuppl. *(1)* trilin. concav. in tang. semisuppl. = cyl. conchoeid. *(2)* cyl. tang. semisuppl. = cyl. conchoeid. (demta port. circ.) + *(3)* At *L* 9 hyperb. *(1)* Ergo *(a)* hyperbo *(b)* spatium hyperbolicum aequatur figurae tangentium datorum et *(aa)* supplem *(bb)* semisupplementi simul sumtae. *(2)* = cylind. *L*

---

4 supra ostensum: s. o. S. 404 Z. 1. 10 Iam supra: s. o. S. 405 Z. 9 und die dazugehörige Anmerkung.

$$\text{Ergo } 2\cdot\text{cyl. tang. suppl.} - \frac{\text{cub. rad.}}{2} = \text{cyl. tang.}$$

$$= AK - EF$$

$$\backslash /$$

$$AH - EF \frown EF = HE + EF \frown \qquad GF.$$

seu hyperbola ducta in figuram tangentium semisuppl. demtis horum ~~tangentium semisuppl. quadratis~~ $= \cancel{EF}\square$.

$$\begin{array}{l} HE + EF \\ = \underline{AK - EF} \\ AK \frown HE + AK \frown EF - HE \frown EF - \cancel{EF}\square. \end{array}$$

Ergo additis utrobique seu ex calculo abiectis $EF\square$. fiet:

Hyperb. ducta in conchoeid. (demt. port circ.) = momento tangentium addito momento tang. suppl., demto tang. in tang. semisuppl. quod = cyl. hyp. demt. cub. rad.

Hyperb. ducta in conchoeid. (demt. port. circ.) = momento tangentium addito momento tang. suppl. demto cyl. hyp. demt. cub. rad.

Similia sunt $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AKE et EHK. ergo $\dfrac{AE}{HE} = \dfrac{KA}{KE} = \dfrac{KE}{KH}$. habuimus nisi fallor, sed repeti nil nocet.

Ergo $AE \frown KE = HE \frown KA$. seu cylinder sinuum aequatur momento tangentium, cumque ut supra ostensum est initio huius paginae, cylinder sinuum etiam momento spatii hyperbolici, demto mom. tang. suppl. aequetur et cubus radii aequetur mom. tang. + mom. tang. suppl., ergo mom. tang. = mom spat. hyp. − mom. suppl. tang. Ergo

---

1 *Daneben, gestrichen:* At habemus quadraturam cylindri tangentium, ergo si omnium spatium haberemus tetragonismum circuli et hyperb.

1 tang. | item 2 cyl. hyp. = cyl. tang. semi *gestr.* | *L* 20 initio huius paginae *erg.* *L* 24 haberemus *(1)* cylindrum *(2)* tetragonismum *L*

---

14 quod =: Dies ist unrichtig, zur Genese des Fehlers vgl. o. S. 401 Z. 5 f. und S. 398 Z. 5 f. 17 habuimus: s. o. S. 397 Z. 3 f.; s. auch S. 399 Z. 6. 20 supra ostensum: s. o. S. 403 Z. 7 und S. 403 Z. 12.

mom spat. hyperb. = mom. tang. + mom. tang. suppl. = cubo radii ut iam aliunde demonstratum, insigni documento veritatis calculi.

$AE \frown KH = KE \frown HE$. seu cylinder spatii hyperbolici, demto cylindro trianguli regulae, = quadranti ducto in conchoeidem. At idem cylinder hyperbolicus − cyl. tang. semisuppl. = quadrant. duct. in conch. + quadrant. duct. in tang. semisuppl. Ergo ~~cyl. hyp.~~ − cyl. tang. semisuppl. = ~~cyl. spat. hyperb.~~ − cyl. $\bigtriangledown^{\text{li}}$ reg. + quadrant. duct. in tang. semisuppl. Ergo iste ductus quadrantis in tangentes semisupplementi quadrabilis. Ergo cyl. tang. semisuppl. + quadrant. duct. in tang. semisuppl. = triangulo portionis regulae, a basi abscissae in radium ducto. Addatur ductui quadrantis ductus trilinei circularis concavi, fiet cyl. tang. semisuppl.

$KA \frown KH = KE, \square$. seu momentum differentiarum secantium a [sinu complementi], aequatur quadratis sinuum.

---

11 f. *Darüber:* NB.

7 Ergo ... quadrabilis. *mit Verbindungsstrich zur Anmerkung S. 404 Z. 5 erg. L* 9 f. Addatur ... semisuppl. *erg. L* 11 seu *(1)* semiquadratum portionis regulae in conchoeidem, m *(2)* momentum *L* 11 radio *L ändert Hrsg.*

---

1 aliunde: S. 398 Z. 5 f. 4 idem cylinder: s. o. S. 404 Z. 1.

23. FIGURA TERTIA

[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 141–143. — Bl. 141–142: 1 Bog. 2°, von Bl. 141 oben ein Streifen von ca 7 cm Höhe abgeschnitten, 1 S. auf Bl. 141 r° (übriger Bogen leer). Bl. 143: 1 Ausschnitt ca 23,5 x 24,5cm, 1 S. auf Bl. 143 r° (Rückseite leer). — Textfolge: Bl. 143 r° = Teil 1 (Figur und direkte Anmerkungen), Bl. 141 r° = Teil 2.
Cc 2, Nr. 555 C, D

Datierungsgründe: Die beiden Teile dieses Stückes sind je auf Trägern unterschiedlichen Wasserzeichens geschrieben. Die Figur von Teil 1 steht in direktem Zusammenhang mit N. 21 (s. dort). Teil 2 ist einige Zeit später entstanden; offensichtlich sollte er, wie der freigebliebene Platz zeigt, weiter ausgeführt werden. Als letztes sind die direkten Anmerkungen zur Figur hinzugefügt worden.

[*Teil 1*]

Fig. 3.

$\cancel{AN} = AE = AK$

$AI = ID = IG = A\beta = \gamma M = \dfrac{AG}{2}$ modo β sit in linea DE.

$IB = AZ = B\gamma = \gamma\delta = \dfrac{CG}{2} = ZG$

$BI = AZ \quad B\alpha = BE \quad \beta\alpha = \beta E \quad A\beta = D\beta$

NB. recta $A\alpha$ non incidit in rectam AZ.

13 Fig. 3: ϵ, ζ, η *erg. Hrsg.*

---

13 Zu Fig. 3: Nach Aussage (4) soll D ein beliebiger Punkt auf dem Quadranten AO sein. Leibniz hat in seiner Handzeichnung den Bogen AD jedoch gleich 60° gewählt, wodurch die Allgemeinheit verloren gegangen ist. Leibniz hat dies, wie die Zusätze neben der Figur zeigen, später bemerkt. Er hat aber keine neue Zeichnung angefertigt, sondern hat sich damit begnügt, den allgemeinen Fall mittels Einzeichnen der Linie $B\varpi\varphi$, der Verlagerung der Linie $A\beta\alpha$ sowie vieler zusätzlicher Winkelmarkierungen darzustellen. Hierbei bedeuten $\measuredangle = 25°$; $\measuredangle = 50°$; $\measuredangle = 65°$ und $\measuredangle = 40°$. — Die Handzeichnung ist bis auf einige wenige Winkelangaben korrekt. 14 $\cancel{AN}$: s. dazu N. 29 S. 523 Z. 22 – S. 524 Z. 8 .
15 modo: Eine ähnlich unbestimmte Haltung bezüglich der Existenz des Höhenschnittpunkts im Dreieck nimmt Leibniz *LSB* VII, 1 N. 2 S. 4 ein.

$$\left.\begin{array}{l}90\\25\\50\end{array}\right\}\text{Ang.}\qquad \begin{array}{lr} 90-25=65=25+40 & 65\\ 90-50=40 & 65\\ 65+40=105 & 50\\ \quad 180-105=75 & \overline{180}\end{array}$$

NB. recta DB continuata non cadit in ϖ punctum medium rectae CF nisi $\measuredangle$ sit $=$ $\sphericalangle$ nam angulus $EF\varpi$ est $\measuredangle$ ob $\bigtriangledown CEF$. et idem foret $\sphericalangle$ ob $\bigtriangledown D\varpi F$.

[*Teil 2*]

Determinatio punctorum, sive quantitas linearum in fig. 3.

(1) Ex centro B radio BA describatur circulus.

(2) Ducatur diameter ABC producta utcunque versus $C\gamma$.

(3) et ex puncto A ducatur tangens sive ad diametrum perpendicularis AH.

(4) Sumto puncto quolibet D in circumferentia, semicirculi ADC. ducatur recta CD. quae producatur, dum occurrat tangenti AH in G.

(5) Rectae CG ducatur ex centro B parallela BMI occurrens arcui AD in M et tangenti AH in I.

(6) Necesse BI esse dimidiam CG. et AI vel BZ dimidiam AG, quia AB est dimidia AC.

(7) Ex A ducatur perpendicularis $A\alpha$ in BD, et ex D perpendicularis DE in AB. Manifestum est triangulum $A\alpha B$ esse simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DEB. ob angulum DBE vel $AB\alpha$ utrique communem, et rectum utrobique. Et quoniam latera aequalibus angulis subtensa, nempe rectis utrobique BD et AB. nempe radii, aequalia sunt, etiam caetera latera homologa aequalia erunt ideo $DE = A\alpha$. et $BE = B\alpha$.

(8) Ergo $D\alpha = AE$.

(9) Item punctum intersectionis rectarum $A\alpha$ et DE, nempe β. aequales abscindet ab unoquoque portiones, seu $A\beta = D\beta$. Nam ang. $A\beta E$ et ang. $D\beta\alpha$ aequales, et rectus praeterea utrobique in $\bigtriangledown^{\text{lis}}$ $AE\beta$ et $D\alpha\beta$. ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia, et quia laterum homologorum unum AE, uni $D\alpha$ aequale per $\underline{8}$. ergo et caetera, $A\beta = D\beta$. item

(10) eandem ob rationem $E\beta = \beta\alpha$.

16 *(1)* Necesse est angulum ABI esse dimid *(2)* Necesse *L* 18 in BD, | quae ei occurrat *gestr.* | et *L* 21 utrobique BD *(1)* , *(a)* et *(b)* oppositum angulo recto DEB, et *(2)* et *L* 25 Nam *(1)* per 7. ang. αAβ = ang. βD *(2)* ang. *L*

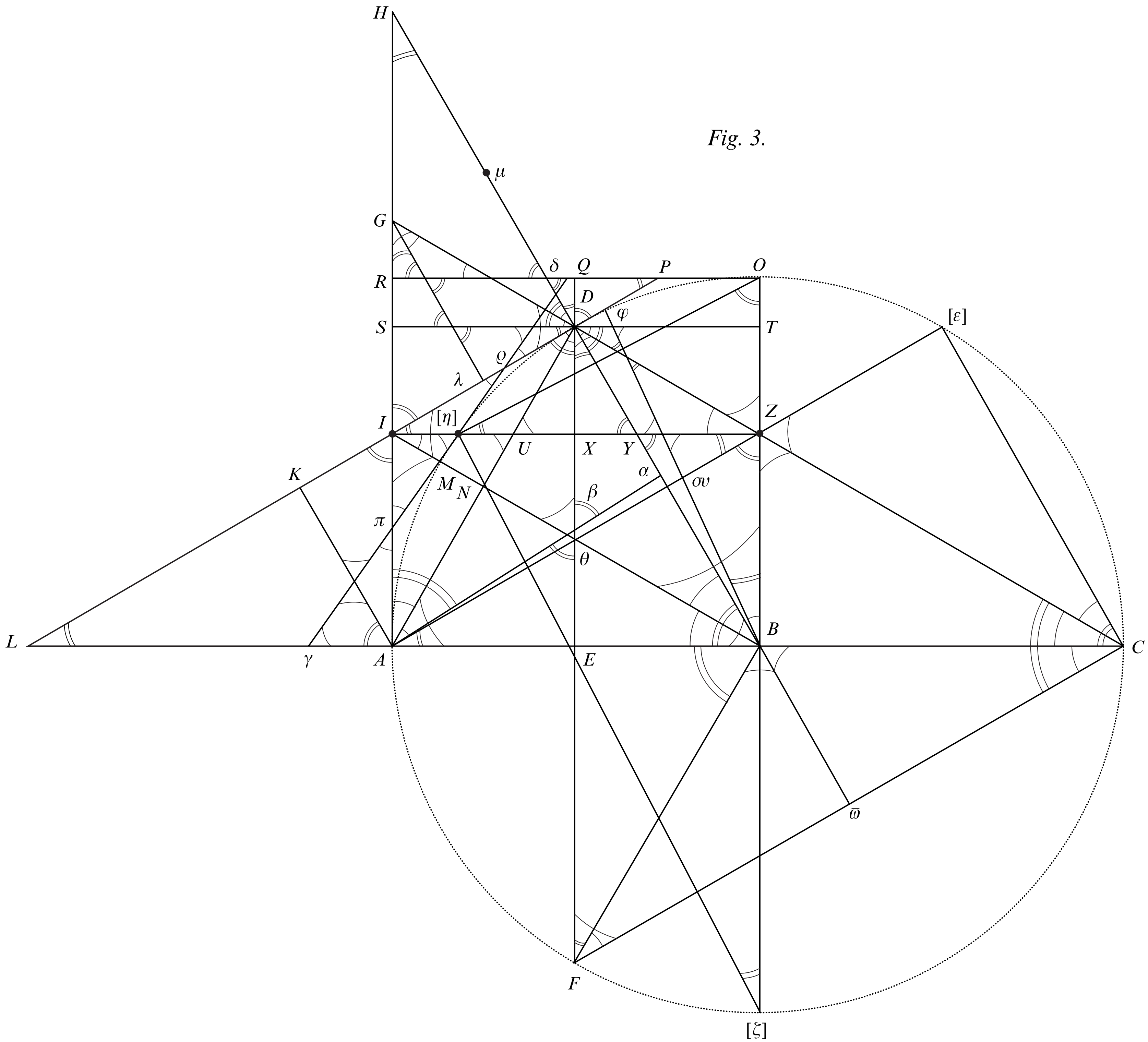


Fig. 3.

(11) Angulus ABM est dimidius anguli ABD. Nam ang. ABM est = angulo ACD per 5. at angulus ACD quippe ad circumf. est dimidius anguli ABD quippe ad centrum. Seu arcus AMD in puncto M bisecatur.

(12) Ergo subtensa seu chorda AD, in puncto N, a recta AM bisecatur sive $AN = ND$.

(13) ideo recta BI transit per punctum β.

(14) Tangens ducta ex D versus productam CA, occurret tangenti AH in eodem puncto, quo et recta BI ei occurrit, nempe in puncto I. ut patet.

(15) Ergo $AI = DI$.

(16) $A\beta = ID$, quia cadunt intra duas parallelas AI et $D\beta$. (nam per 9. β est punctum quo recta $A\alpha$ occurrit rectae DE) et sunt parallelae inter se, nam ID est perpendicularis ad BD, cum sit tangens (14) et $A\beta\alpha$ perpendicularis ad BD (per 7).

(17) Ergo habemus quadrilaterum aequilaterum $AID\beta$, seu $AI = DI$ (15) $= A\beta$ (per 16) $= D\beta$(9).

(18) Recta AK ex A tangenti DI productae perpendiculariter occurrat in K. aio $AK = AE$. Nam $AK = D\alpha$ (quia parallelae seu perpendiculares ad eandem, KD, et inter easdem parallelas $A\alpha, KD$). et $D\alpha = AE$ (per 8).

(19) $I\beta = GD$. et $\beta B = DZ$.

(20) $IN = N\beta$, quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia IND et $AN\beta$. et latera homologa $A\beta, ID$, aequalia per 17.

C o r o l l. [:] Ergo IN vel $N\beta = \dfrac{I\beta}{2}$ vel $\dfrac{GD}{2}$.

(21) Ductis BI et AZ se mutuo secantibus in θ. manifestum est ob $AI = BZ$ et $ZI = AB$, esse $AZ = BI$, et $A\theta = I\theta = B\theta = Z\theta$. punctum autem θ non est necesse incidere in rectam DE, ne inde errori locus.

NB. AZ non transit per β. vel α. sed alia est, a recta $A\alpha$. Ergo KD et AZ non sunt parallelae.

(22) Si ex G in ID demittatur perpendicularis $G\lambda$ erit $G\lambda = AE$. Nam $G\lambda = AK$ (quod $= AE$ per 18) quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KAI [et $G\lambda I$] similia, et unum latus homologum AI, uni $I[G]$ aequale, ergo et caetera.

(23) Ergo ob eandem rationem $KI = I\lambda$. seu $= \dfrac{K\lambda}{2}$.

24 f. NB. ... parallelae. *am Rande erg. L* 27 et GλI *erg. Hrsg.* 28 D *L ändert Hrsg.*

(24) $KI\,(=I\lambda)=E\beta\,(=\beta\alpha)$ ob $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia AKI et $AE\beta$ et latera aequalia $AK=AE$, vel $AI=A\beta$.

(25) $\alpha\mu=2AE\ (2G\lambda)$ per <u>22</u>.

(26) $KI\,(=I\lambda=E\beta=\beta\alpha)=IS=ZT$. Nam $AS=DE$. auferantur $AI=D\beta$. restant $IS=E\beta\,(=KI$ etc. per <u>24</u>). Ista nimirum omnia aequalia differentiae inter tangentem semiarcus, et sinum.

(27) Si tangens ex puncto M producatur utrinque donec occurrat ipsi AB in γ. et ipsi OR in δ. erit recta $\gamma\delta=$ secanti BI, hoc alibi probavi.

(28) Recta autem $M\delta=$ rectae $O\delta$.

(29) $DP=PO$.

(30) $A\pi=\pi M=M\varrho=\varrho D=\dfrac{AI}{2}=\dfrac{GI}{2}=\dfrac{AG}{4}=\pi I=I\varrho$.

(31) $D\lambda=GS$. quia $GI=ID$, et $IS=I\lambda$.

(32) $AZ(=BI)=CZ$.

1 *Zu* (24): Diff. inter sin. et tang. semiarcus *am Rande erg. u. gestr. L* 5 differentiae *(1)* arcus dimidii *(2)* tangentis semiarcus, et sinus *(3)* inter *L*

---

8 alibi probavi: Dies ist ein Spezialfall von N. 28 S. 512 Z. 6–10. 11 (30): Die Gleichungskette gilt nur abschnittsweise. Es sind jeweils gleich: $A\pi=\pi M=M\varrho=\varrho D$. $\dfrac{AI}{2}=\dfrac{GI}{2}=\dfrac{AG}{4}$. $\pi I=I\varrho$.

24. DE CONCHOEIDE
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 69. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 69 r°. Schluss (S. 419 Z. 21 – S. 420 Z. 5) quergeschrieben am Rande. Späterer Zusatz zu Fig. 1. Bl. 69 v° leer. Cc 2, Nr. 636

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist offenbar im Rahmen des Studiums der *Géométrie* Descartes' entstanden, zu welchem Huygens geraten hatte, als Leibniz ihm von seiner Entdeckung des charakteristischen Dreiecks berichtete. Es dürfte kurz vor den Satzlisten von N. 26 und N. 27 anzusetzen sein.

Ad conchoeidem considerandam transcribatur huc figura Schotenii ad lib. 2. *Geom.* Cartes. pag. 252 et 258.

In conchoeide ista, polus est G. norma AB, eaque curvae CE proprietas, ut omnes rectae ab ea versus G ductae usque ad AB, ut CL. EA, sint aequales.

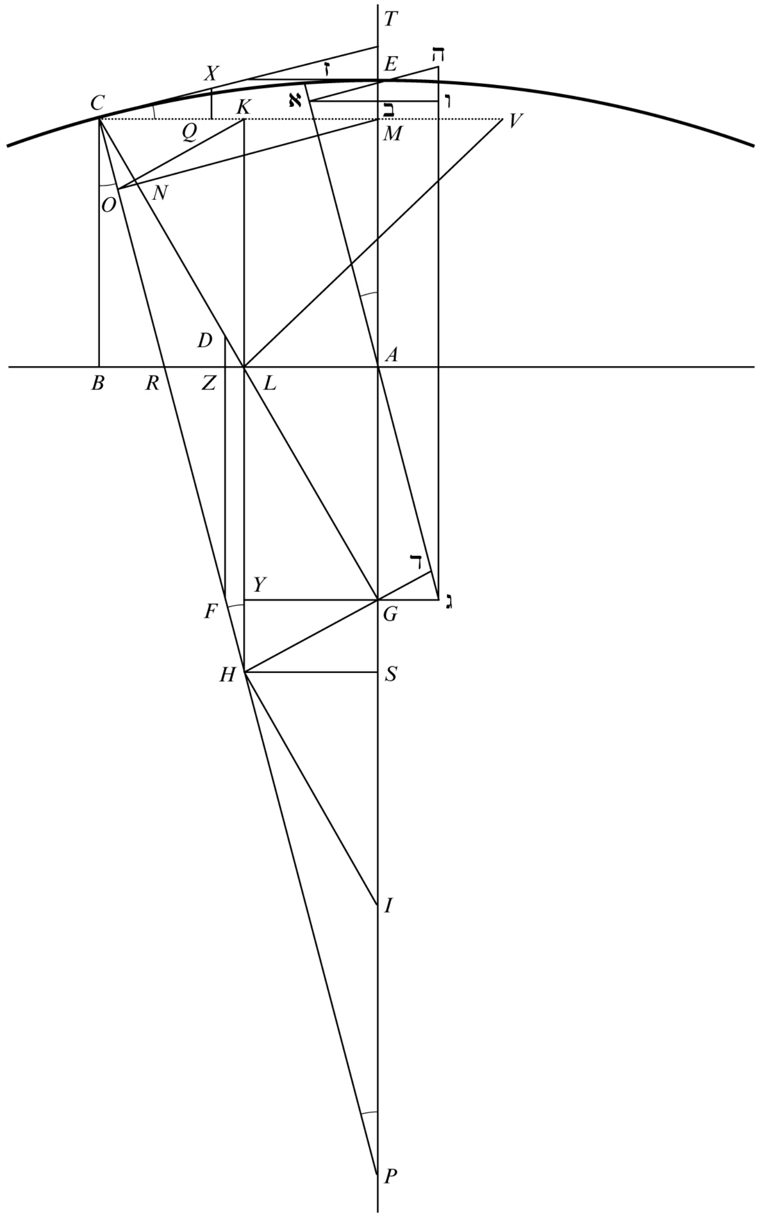
Ducatur CB applicata seu perpendicularis normae AB, eique sumatur aequalis CD $(CD = CB)$, ducaturque DF aequalis LG $(DF = LG)$ et parallela EP. recta PFC erit ad curvam perpendicularis. Porro memorabile est, observatum ab Hugenio, si ducatur LH parallela EP. dum rectae CP occurrat in H. ac deinde recta HG. angulum HGC esse rectum.

Tangens quoque aliter a Schotenio inventa est, et hoc quidem modo: Ducatur LK perpendicularis ad CM. et KN perpendicularis ad CG. erit NM parallela CT tangenti, sive si MN producatur dum occurrat ipsi CP in O. erit OM perpendicularis ipsi CP.

$HI = LG$. et $LH = GI$. $SH = GY$.

11 pag. 252 et 258. *erg. L* 22 HI ... GI. SH = *(1)* GT *(2)* GY. *erg. L*

10 transcribatur: vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, *DGS* I S. 249–262. Leibniz' Figur stellt eine Kombination der beiden Figuren von S. 252 und 258 dar. Sie enthält darüber hinaus weitere Elemente, die im vorliegenden Stück nicht vorkommen, und zu welchen kein zugehöriger Text gefunden wurde.
16 observatum ab Hugenio: s. *DGS* I S. 253. 22 $SH = GY$ (nebst Var.): In seiner Handzeichnung hat Leibniz die Benennung T zweimal verwendet. Anlässlich dieser Ergänzung hat er den Irrtum bemerkt und hier sowie in Fig. 1 ein T in Y verwandelt. Dies jedoch nur hier, nicht aber im laufenden Text. Um Übereinstimmung mit der Figur zu erhalten, ist daher in den Zeilen S. 417 Z. 8–18 überall Y anstelle von T zu lesen.



[*Fig. 1*]

Triangulum characteristicum esto: CQX. Triangula ei similia sunt PCT (POM). CMT (XET). PMC $(PAR.\ PHS.\ HLR)$. CBR.

Ex his multa duci possunt theoremata memorabilia. V. g.[:]

$$\frac{CP}{CX} = \frac{MP}{CQ} = \frac{CM}{QX}.$$

Ergo: $CP \frown CQ = MP \frown CX$. etc.

Quando $EA = PA$. conchoeis nascitur ex tangentibus circuli. Adde Iac. Greg. prop. 5. fig. 6.

Cum similia sint [triangula] rectangula CKL et LAG erit:

$$\frac{CL}{LG} = \frac{LK = MA = CB}{AG} = \frac{CK}{TG}.$$

Ergo $CL \frown AG = LG \frown CB$. Ecce propositionem memorabilem: quocunque puncto C in conchoeide assumto, rectangulum ex applicata ad normam CB, et LG portione rectae CG a puncto C ad punctum G ductae inter polum G et normam BA cadentis, semper idem est, quia rectangulo eorum quae semper eadem, CL et AG aequale.

$CL \frown TG = LG \frown CK$. Cylinder omnium $TG = LG \frown CK$. seu aequalis rectangulo differentiae inter CM et TG in LG.

$AG \frown CK = TG \frown CB$. Cylinder omnium CK seu cylinder omnium CM applicatarum ad basin (quadrabilis ad altit.) demto cylindro omnium TG = rectangulo ex TG et CB aequalis.

2 CBR *erg. L* 6 f. Adde ... fig. 6. *erg. L* 8 triangula *erg. Hrsg.* 9 $\frac{\mathrm{LK = MA = CB}}{\mathrm{AG}}$ = *(1)* $\frac{\mathrm{TG}}{\mathrm{CK}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{CK}}{\mathrm{TG}}$ *L* 13 f. aequale. *(1)* Item CL $\frown$ CK = LG $\frown$ TG. id est cylinder omnium CK aequatur omnibus LG in TG. vel omnibus LT in HG. Denique AG $\frown$ TG = CB $\frown$ CK. seu rectangulum TA = rectangulo CL. *(2)* CL $\frown$ TG *L* 16 f. CM | applicatarum ad basin *erg.* | (quadrabilis | ad altit. *erg.* |) demto *L*

1 CQX: Aufgrund der folgenden Beziehungen bekommt das charakteristische Dreieck eine spezielle Lage, dies jedoch ohne Beschränkung der Allgemeinheit. (In der Figur vom Hrsg. der Übersichtlichkeit halber geändert.) 6 Adde: s. J. Gregory, *Exercitationes geometricae*, 1668, S. 23. 8–18 s. Erl. zu S. 415 Z. 22. 16 cylinder omnium CM: Die folgenden Textergänzungen sind widersprüchlich. CM ist die applicata bez. der Höhe, die applicata bez. der Basis ist CB. CM ist bez. der Höhe, da von Kreis- und Hyperbelquadratur abhängig, im Sinne von Leibniz nicht quadrierbar, CB jedoch schon.

Rursus $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia CBR et RLH. fiet: $\dfrac{CR}{RH} = \dfrac{CB}{LH} = \dfrac{BR}{RL}$.
$CR \frown LH = CB \frown RH$. $CR \frown RL = RH \frown BR$. $CB \frown RL = LH \frown BR$. ita CB et LH bis in $\bigtriangledown^{\text{lis}}$ similibus occurrunt.

Cum sit $CD = CB = AM$ erit $DL = EM$.

Triangula similia CBR et CQX. Ergo: $\dfrac{CR}{CX} = \dfrac{CB}{CQ} = \dfrac{BR}{XQ}$.
$CR \frown CQ = CB \frown CX$. seu CB ad arcum (momentum arcus ex norma) $= CR$ ad normam.
$CR \frown XQ = BR \frown CX$. seu BR ad arcum, summae omnium CR ad altitudinem.
$CB \frown XQ = BR \frown CQ$. seu BR ad basin $= CB$ ad altitudinem.

Triangula similia RLH et CQX. Ideo: $\dfrac{HR}{CX} = \dfrac{HL}{CQ} = \dfrac{LR}{QX}$.
$HR \frown CQ = HL \frown CX$. summa omnium HR ad basin $=$ omnibus HL ad arcum.
HL autem sic investigabimus $\dfrac{HL}{DF = GL} = \dfrac{CL}{CD = CB}$. Ergo: $HL = \dfrac{CL \frown GL}{CB}$. Idem aliter: $HL = GH^2 + LG^2, Rq$.

Linearum quantitas ante omnia investiganda:
CL semper eadem $= EA$ (a). AG semper eadem (b). CM. $BA = (y)$. CB. $MA = (u)$. Sed quia CB aliter inveniri potest, posita CM pro cognita, et vicissim, assumamus CM pro cognita, id est ponamus BA normam divisam in partes aequales infinitas. Manifestum est, cum sit $\dfrac{CB}{AG} = \dfrac{CL}{LG}$. esse $CB = \dfrac{CL \frown AG}{LG} = \dfrac{ab}{LG}$. $CB \frown LG = ab$. Ergo ad habendam CB investiganda est LG.

LG autem inveniemus si CLG invenerimus, atqui CLG est Rq $CM^2 + MG^2$. sed $MG = AG + CB$. Ergo $MG^2 = AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB$.
Ergo $CLG = \sqrt{CM^2 + AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB} = CL + LG$. sed $LG = \dfrac{CL \frown AG}{CB}$.

1–3 Rursus ... occurrunt. *erg. L*

Ergo $\sqrt{CM^2 + AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB} = CL + \dfrac{CL \frown AG}{CB}$. Ergo $CM^2 + AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB = CL^2 + \dfrac{CL^2 \frown AG^2}{CB^2} + \dfrac{\overbrace{2CL \frown CL}^{2CL^2} \frown AG}{CB}$. $CM^2 + AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB - CL^2 - \dfrac{2CL^2 \frown AG}{CB} = \dfrac{CL^2 \frown AG^2}{CB^2}$. Ergo $CM^2 \frown CB^2 + AG^2 \frown CB^2 + CB^4 + 2AG \frown CB^3 - CL^2 \frown CB^2 - 2CL^2 \frown AG \frown CB = CL^2 \frown AG^2$.

Ex hac aequatione pendet cognitio ipsius CB. Sed hinc apparet faciliorem longe reddi aequationem, si CB sumatur pro cognita, CM pro incognita, statim enim talis aequatio oritur:

$$\frac{AG^2 \frown CB^2 + CB^4 + 2AG \frown CB^3 - CL^2 \frown CB^2 - 2CL^2 \frown AG \frown CB - CL^2 \frown AG^2}{CB^2} = [-]\ CM^2.$$

Sed ne in prolixum nimis calculum nos induamus, ad linearum nostri diagrammatis determinationem, theorematis iam inventis utamur.

1 AG eadem.

2 CL eadem $= EA = CG - LG$.

3 $CB = CD = MA$.

4 CM.

5 $LG = \dfrac{AG \frown CL}{CB} = DF = CG - CL$.

6 $DL = EM = CL - CB$.

7 $GH = \sqrt{LH^2 - LG^2} =$ $(CH^2 - CG^2$ vel$)$ $\sqrt{CH^2 - CL^2 - LG^2 - 2CL \frown LG}$.

8 $CG = CL + LG = \sqrt{CM^2 + AG^2 + CB^2 + 2AG \frown CB} = \dfrac{CH^2 - LH^2}{CL} - CL$.

9 $LH = \sqrt{CH^2 - CL^2 - 2CL \frown LG} = \dfrac{CL \frown LG}{CB}$ vel iunct. 5. $\dfrac{CL^2 \frown AG}{CB^2}$.

Per 7. seu $GH)$ est $LH^2 - \cancel{LG^2} = CH^2 - CL^2 - \cancel{LG^2} - 2CL \frown LG$.

9 $-$ *erg. Hrsg.*

---

19 Die letzte Beziehung der Gleichungskette 8 ist unrichtig ($\dfrac{CH^2 - LH^2}{CB} - CL$ ergibt $2LG$); sie wird von Leibniz nicht weiter benutzt.

$CL^2 + 2CL \frown LG = CH^2 - LH^2$. Ergo $\dfrac{CH^2 - LH^2}{CL} = [CL + 2LG]$.

Per 9) $\dfrac{CL^2 \frown LG^2}{CB^2} = CH^2 - CL^2 - 2CL \frown LG$. Ergo $CH^2 = \dfrac{CL^2 \frown LG^2}{CB^2} + CL^2 + 2CL \frown LG$. Ergo. $\dfrac{CH^2}{CL} = \dfrac{CL \frown LG^2}{CB^2} + CL + 2LG$. Iam $LG = \dfrac{AG \frown CL}{CB}$. Ergo $\dfrac{CL \frown LG^2}{CB^2} = \dfrac{CL \frown CL^2 \frown AG^2}{CB^3}$. Ergo $\dfrac{CH^2}{CL^2} = \dfrac{CL \frown AG^2}{CB^3} + 1 + \dfrac{2AG}{CB}$. Ergo $\dfrac{CH^2}{CL^2} - \dfrac{CL \frown AG^2}{CB^3} - \dfrac{2AG}{CB} = 1$.

[*Zusatz zur Figur:*]

Summa omnium זA ad normam $= EA$ ad curvam.

Summa omnium Aא ad [altitudinem], vel אב ad curvam, quadrabilis.

1 2CL + LG *L ändert Hrsg.* 8 curvam *L ändert Hrsg.*

---

2 Per 9: Die letzten 3 Gleichungen sind fehlerhaft: Es sollte dort $\dfrac{CL \frown CL^2 \frown AG^2}{CB^4}$ bzw. $\dfrac{CL^2 \frown AG^2}{CB^4}$ heißen; die letzte Gleichung ist konsequent gerechnet. 8 quadrabilis: Diese Aussage ist unrichtig. Der Fehler ergibt sich daraus, dass Leibniz in seiner Handzeichnung zwar den Winkel bei A korrekt markiert, die Gerade זג aber parallel zu CG anstatt zu PC zeichnet.

25. DIVISIO PER BINOMIA. FIGURAE VARIAE. RELATIO INTER CIRCULUM ET HYPERBOLAM
[Frühsommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 379–380. 1 Bog. 4°. Die untere Hälfte von Bl. 379 mit nach oben geschwungener Kante abgeschnitten. Neben dem Bogenfalz auf Bl. 379 r° oben Tropfen von rotem Siegellack. $1\frac{1}{2}$ S. Textfolge: Bl. 380 v°. 379 r°. Überschrift zu Teil 1 in anderer Tinte ergänzt; Teil 3 später in die Lücken von Teil 1 geschrieben. — Auf Bl. 380 r° rechts oben, schräg geschrieben, Aufstellung von fremder Hand:

6
6
4
3
2
21 frc. M^r^ La Fontaine avec sa viole.

Rest von Bl. 380 r° sowie Bl. 379 v° leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Notation: (1) Teil 1 des vorliegenden Stückes hat enge Beziehungen zu *LSB* VII, 3 N. 17 [April – Mai 1673], verwendet aber eine modernere Notation (Wurzelhaken anstelle von Rq), liegt also etwas später als diese. (2) Die im ergänzten Teil 3 auftretende Form des Doppelvorzeichens ist ab Sommer 1673 nachweisbar. Beides zusammen ergibt obige Datierung.

[*Teil 1*]

Comparatio diversarum eiusdem hyperbolae partium cum differentia inter ipsas

$\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}+a} = y$. Ergo $a^2 = y\sqrt{ax}+ay$. Ergo $a^2-ay = y\sqrt{ax}$. Et $a^4+a^2y^2-2a^3y = y^2ax$. sive $a^3+ay^2-2a^2y = y^2x$. seu $\dfrac{a^3}{y^2}+a-\dfrac{2a^2}{y} = x$.

$$2ax - x^2 = y^2. \quad x = \frac{y^2}{2a-x}. \quad \frac{y^2}{2ax-x^2} = 1.$$

$$\frac{a^2}{\sqrt{ax}} = y. \text{ Ergo } \frac{a^4}{ax} = y^2. \text{ Ergo } \frac{a^3}{x} = y^2.$$

Ad divisores per binomia ergo fractionibus hyperboloeides, non tantum paraboloeides dantibus utendum est.

$$\frac{a}{a+b} = \boxed{\frac{a}{b}} - \frac{a^2}{ab+b^2}. \quad -\frac{a^2}{ab+b^2} = \boxed{-\frac{a^2}{b^2}} + \frac{a^3}{ab^2+b^3}.$$

$$\frac{a}{a+b} = 1 - \frac{b}{a+b}. \text{ item } \frac{a^2}{ab+b^2} = \frac{a^2}{ab}\ \left(\frac{a}{b}\right) - \frac{ab}{ab+b^2}\ \left(-\frac{a}{a+b}\right).$$

$$\frac{a}{b-a} = \boxed{\frac{a}{b}} + \frac{a^2}{[-]\ ab+b^2}. \quad +\frac{a^2}{[-]\ ab+b^2} = \boxed{\frac{a^2}{b^2}} + \frac{a^3}{[-]\ ab^2+b^3}.$$

$$\frac{a}{a-b} = -\frac{a}{b} - \frac{a^2}{b^2} - \frac{a^3}{b^3} \text{ etc.} \quad \text{Mirum.}$$

$$\frac{a}{\sqrt{ax}+a} = \frac{a}{\sqrt{ax}} - \frac{a^2}{xa} + \frac{a^3}{\sqrt{a^3x^3}} - \frac{a^4}{a^2x^2} + \frac{a^5}{\sqrt{a^5x^5}} \text{ etc.}$$

Horum summa complemento est summae ipsorum: $\dfrac{a^3}{y^2} + a + \dfrac{2a^2}{y} = x$.

Hinc iam oritur memorabilis quaedam comparatio diversarum hyperbolae eiusdem partium, cum differentia inter eas: $\dfrac{2a^2}{y}$, et $\dfrac{a^2}{x}$ videatur quadam summa eiusmodi infinita exhiberi.

1 f. $= 1.$ | Ergo $\dfrac{\mathrm{y^2 + 2ax - x^2}}{\mathrm{2ax - x^2}} = 2.$ *gestr.* | *(1)* $\dfrac{\mathrm{a^3}}{\sqrt{\mathrm{ax^2 + a^2}}} = \mathrm{y}.$ $\mathrm{a^3 = y\sqrt{ax^2} + a^2y}.$ $\mathrm{a^4 - a^2y^2 = y\sqrt{ax}}.$ $\mathrm{a^6 + a^4y^2 - 2a^5y = y^2a^2x}.$ Ergo $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{a^4}}{\mathrm{y^2}} + \mathrm{a^2} - \dfrac{\mathrm{2a^3}}{\mathrm{y}}.$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a^2}}{\sqrt{\mathrm{ax}}}$ *L* 7 – *erg. Hrsg. dreimal*

$$\frac{a^2}{\sqrt{2ax-x^2}} = y. \text{ Ergo } \sqrt{\frac{a^4}{2ax-x^2}} \; [\textit{bricht ab}]$$

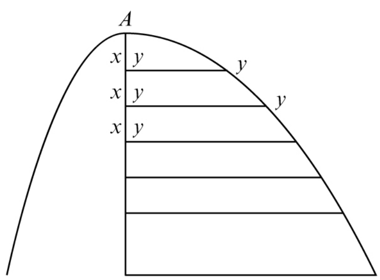
$$\frac{a}{b+c} = \boxed{\frac{a}{b}} - \frac{ac}{b^2+bc}. \quad \frac{-ac}{b^2+bc} = \boxed{\frac{-ac}{b^2}} + \frac{ac^2}{b^3+b^2c}.$$

$$+\frac{ac^2}{b^3+b^2c} = \boxed{\frac{ac^2}{b^3}} - \frac{ac^3}{b^4+b^3c}. \quad \text{etc.}$$

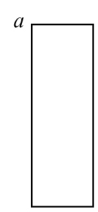
$$\frac{a}{b-c} = \quad \frac{a}{b} + \frac{ac}{b^2} + \frac{ac^2}{b^3} + \frac{ac^3}{b^4} \;\; \text{etc.}$$

$$= -\frac{a}{c} - \frac{ab}{c^2} - \frac{ab^2}{c^3} \;\; \text{etc.}$$

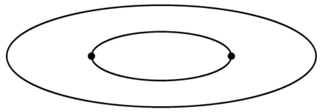
[*Teil 2*]



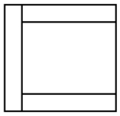
[*Fig. 1*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 4*]

---

7 f. *Zwischen Figur 3 und Figur 4:*

$$\frac{\frac{1}{100}}{100-\frac{20}{100}} = \frac{1}{1000-20} = \frac{1}{980} \quad \textit{(!)}$$

[*Teil 3*]

$2ax - x^2 = y^2$. $2ax - x^2 - a^2 = y^2 - a^2$. Ergo $\mp x \mp a = \sqrt{y^2 - a^2}$. seu $x = \sqrt{y^2 - a^2}$. seu $x^2 + a^2 = y^2$. seu $x^2 = y^2 - a^2$.

Sed hoc impossibile, NB. quia non potest dici $y^2 - a^2$, est enim a maior quam y. Est ergo haec figura imaginaria seu falsa cum describi non possit. Necesse est enim ipsam x^2 esse nihilo minorem.

Sed non ideo negligendae sunt figurae imaginariae. Ita enim habetur hyperbola quaedam imaginaria circulo comparanda. Ista de figuris negativis accuratius excutienda cum habeant nescio quid veri in se, non minus ac radices falsae, et hac quidem ratione comparatio fortasse circuli et hyperbolae obscurata est.

5 possit. *(1)* Ergo fiat $x^2 + a^2 - 2ax$ *(2)* Necesse *L* 8 circulo *(1)* aequalis *(2)* comparanda *L* 8 figuris *(1)* imaginariis | seu negativis *erg.* | *(2)* negativis *L*

---

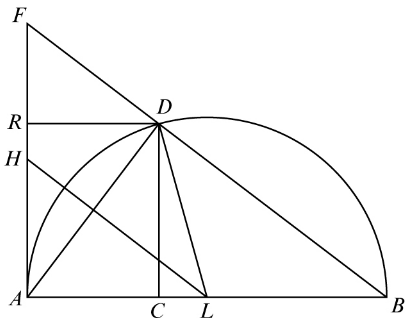
1 [*Teil 3*]: Im Folgenden versucht Leibniz die Kreis- in eine Hyperbelgleichung umzuformen. Er tut dies auf unzulässige Weise, gelangt aber zu der fundamentalen Einsicht, dass ein solcher Übergang mit Hilfe des Imaginären möglich sein müsste.

26. DE DUCTIBUS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 229–232. 2 Bog. 2°. 8 S. — Figuren 1–3 nicht vorhanden (Vorlage die entsprechenden Figuren aus N. 21 u. N. 23). Im Laufe der Überarbeitung umfangreiche Änderungen des ursprünglichen Textes vor allem auf dem 1. Bogen (bis S. 448 Z. 11); Hinzufügung von Verweisen auf andere Sätze; substanzielle Ergänzungen (Sätze 4_2, 5_{2-3}, 6_{2-6}, 15, 16; der größte Teil der Abschnitte S. 437 Z. 11 bis S. 439 Z. 16; Fig. 5 nebst den zugehörigen Abschnitten S. 442 Z. 9 – S. 443 Z. 12).
Cc 2, Nr. 697

Datierungsgründe: Das vorliegende sowie das nächstfolgende Stück stützen sich insbesondere auf die Figuren 1–3 von N. 21 und N. 23; sie sind unmittelbare Folgestücke. Beide Studien nehmen wechselseitig aufeinander Bezug.

Catalogus propositionum, quibus ductus
curvilineorum ex circulo natorum, comparantur:



[*Fig. 1*]

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BDA et DCA. $\dfrac{AB}{AD} = \dfrac{AD}{AC} = \dfrac{DB}{DC}$.

$$\begin{array}{cccc} & \text{sinus versus} & & \\ \text{diam.} \frown & \text{abscissa a vertice} & & \text{chorda arcus} \\ AB & AC & = & AD\,\square. \end{array}$$

15 *Fig. 1 erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.*

P r o p. 1. Semicubus [diametri] aequatur summae quadratorum semiparabolae, seu duplo momento semiparabolae ex axe libratae.

diam. sin. chord. chorda complementi

$\frac{AB}{AD} = \frac{AC}{DC}$. Ergo $AB \frown DC = AD \frown DB$. seu

P r o p. 2. Parabola eiusdem altitudinis ac basi, ducta in se ipsam inverse, aequatur cylindro semicirculi sub diametro. Idem est de portionibus abscissis, quae aequantur cylindris semisegmentorum sub diametro.

chord. sin. chorda complem. sinus versus

$\frac{AD}{DB} = \frac{AC}{DC}$. Ergo $AD \frown DC = DB \frown AC$. ergo

P r o p. 3. Ductus semicirculi rectus in parabolam aequatur ductui trianguli inverso in eandem, seu momento parabolae ex vertice.

Sed si ductus sit semisegmenti in parabolam, aberit momentum ex vertice abscissae portionis parabolae, per rectam basi parallelam, a basi ipsa AC distantem. Ecce rem admirabilem: semisegmentorum ductus in parabolam q u a d r a r i posse, parabolae in parabolam non posse.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: DCA et BCD. $\frac{DB}{AD} = \frac{BC}{DC} = \frac{DC}{AC}$.

chord. sinus vers. complem. chorda complem. sin.

$AD \frown CB = DB \frown DC$. est quodammodo inversa prioris.

P r o p. 4. Momentum parabolae vel a vertice abscissae portionis ex basi aequari portioni parabolae eiusdem a vertice abscissae inverse, ductae in semisegmentum circuli eiusdem altitudinis.

Praecedens ductus semisegmenti in parabolam erat rectus, posterior est inversus, itemque ductus est q u a d r a b i l i s .

P r o p. 4. n u m. 2. $BC \frown AC = DC\,\square$. quadrata sinuum momentis ex vertice portionum diametri.

[$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia FBA et ABD.] $\frac{FB}{AB} = \frac{AB}{DB} = \frac{FA}{AD}$. FB = secans falsa.

1 radii *L ändert Hrsg.* 10 Ductus *(1)* circuli vel semisegmenti | circularis *nicht gestr.* | inverso *(2)* semicirculi *L* 25 *(1)* P r o p. 4. n u m. 2: DB $\frown$ AC = AD $\frown$ BC. seu momentum chordarum supplementi ex basi *(2)* P r o p. 4. *L* 27 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ... ABD. *erg. Hrsg.* 27 FB = *(1)* chorda compl. aucta tangente arcus dimidii *(2)* secans *L*

$$\text{Ergo} \quad FB \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB} = \overset{\text{diam.}}{AB}\square. \quad \text{ergo}$$

P r o p. 5. Parabola vel portio, seu summa chordarum complem. ducta in se ipsam, seu summa quadratorum parabolae portionisve (quae quadrari potest), aucta eadem parabola, seu summa chordarum arcuum complementalium, in summam FD ducta, aequatur cubo diametri.

C o r o l l. Cumque quadrata applicatarum parabolae summari possint, si a cubo diametri subtrahantur, residuum erit ductus parabolae inversus in figuram omnium FD. Is ergo ductus poterit q u a d r a r i .

P r o p. 5. n u m 2. $FB \frown AD = AB \frown FA$. seu secantes falsae in chordas aequantur diametro in tangentes falsas seu c y l i n d r o c o n c h o e i d i s f a l s a e .

P r o p. 5. num 3. $AB \frown AD = DB \frown FA$. diameter in chordas, chordis supplementi in tangentes falsas, seu c y l i n d e r p a r a b o l i c u s aequatur ductui inverso parabolico in conchoeidem falsam.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia FDR et DCB. $\dfrac{FR}{DC} = \dfrac{FD}{DB} = \dfrac{AC = RD}{CB}$. Ergo

$$FD \frown \overset{\text{dist. a basi } B}{CB} = \overset{\text{chord. complem.}}{DB} \frown \overset{\text{dist. a basi } A}{AC}. \qquad \text{seu}$$

P r o p. 6. Momenta FD ex basi (eiusve portionis a vertice abscissae), aequantur momentis figurae chordarum seu parabolae eiusve portionis a basi abscissae, itidem ex basi.

At haec quadrari possunt. Ergo illa quoque.

C o r o l l. 1. Habetur ergo m o m e n t u m f i g u r a e o m n i u m FD ex basi, quadrabile. Adde inf. prop. 8. coroll.

C o r o l l. 2. Ergo et solidum revolutione reductum ad cylindrum.

P r o p. 6. n u m. 2. $FR \frown DB = DC \frown FD$. seu [chorda supplementi in differentiam

5 summam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum *(2)* FD *L* 8 in *(1)* figuram tangentium dimidiorum *(2)* figuram *L* 17 *Über* FD *gestr.:* tang. dim. *L* 22 f i g u r a e *(1)* tangentium dimidiorum tam ex vertice quam ex basi, quadratus *(2)* o m n i u m *L* 24 revolutione *(1)* conchoeidis falsae | contractae *erg.* |, sic enim appellare placet *(2)* | eius *gestr.* | reductum ad cylindrum. | Et | esse *erg.* | aequale *(a)* cylindro sec *(b)* conoeidi parabolico homogeneumque *(c)* conoeidi circulari. *gestr.* | *L* — *Dazu interlinear, gestr.:* Conchoeidem autem falsam voco, cum secans exit non ex centro, sed ex altera diametri extremitate, tangens autem ex una A. ut AH est[,] dat conchoeidem falsam contractam.
25–428,1 sinus in chordam semisupplementi, demto sinu in differentiam sui *L ändert Hrsg.*

sinus] a tangente falsa = sin. $\frown$ FD.

P r o p. 6. n u m. 3. $FR \frown CB = DC \frown AC$. seu momenta ex vertice differentiarum inter sinus et tangentes falsas = momentis sinuum ex una diametri extremitate seu vertice circuli, si quadrans non excedatur, seu momenta tangentium falsarum ex basi aequantur momentis sinuum, ex utraque extremitate, id est sinuum cylindro. Add. prop. 2. et coroll. prop. 7. ubi quae huic aequantur.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: FDR et FAB. Ergo $\dfrac{BF}{DF} = \dfrac{AB}{RD} = \dfrac{AF}{FR}$.

P r o p. 6. n u m 4. $BF \frown RD = DF \frown AB$ secantis falsae m o m e n t a a vertice circuli, seu suo quoque aequantur diametro in earum differentias a chordis supplementi, seu c y l i n d r o omnium FD.

Secans autem falsa BF componitur ex chorda supplementi BD et ipsa DF seu FD. Ergo cum momentum chordarum supplementi detur, ad q u a d r a t u r a m omnium FD opus erit eorum momento ex circuli vertice.

P r o p. 6. n u m 5. $BF \frown FR = DF \frown AF$. secans falsa in differentiam tangentis falsae a sinu = FD in tangentes falsas.

P r o p. 6. n u m 6. $AB \frown FR = RD \frown AF$. differentia inter tangentem falsam et sinum in diametrum, seu c y l i n d e r c o n c h o e i d i s f a l s a e, demto c y l i n d r o p o r t i o n i s c i r c u l a r i s, aequatur m o m e n t o t a n g e n t i u m f a l s a r u m e x v e r t i c e.

Hoc ergo momentum supponit tetragonismum. Adde prop. 7. et prop. 6. num. 2. nimirum cylinder portionis circularis est momentum tangentium falsarum ex basi.

Semper autem NB. duo momenta, alterum ex vertice, alterum ex basi constituunt cylindrum.

Dictum paulo ante, quod chord. $\frown$ sin. = chord. complem. $\frown$ sin. versus. Ergo

$$\text{sin} = \frac{\text{chord. complem.} \frown \text{sin. vers.}}{\text{chord.}}.$$

Ergo si applicatae semiparabolae basis altitudini aequalis, ex basi sumtae ducantur in rationes sinuum versorum ad applicatas eiusdem parabolae respondentes ex vertice sumtas

3 falsas = *(1)* cylindro sinuum, sub radio. Prop. 6. *(2)* momentis *L* 4 circuli, | quadrabilibus *gestr.* si quadrans non excedatur, *erg.* | seu *L* 27 basis ... sumtae *erg.* *L*

(seu aeque distantes a vertice, ut illae a basi) producentur applicatae quadrantis circuli. Et summa illorum, dabit semisegmenta circularia ex radio abscissa per applicatam. Aliter: si rationes applicatarum diverse sumtarum, ita tamen ut ex basi sumta sit antecedens, ex vertice sumta consequens, inter se ducantur in sinus versos applicatarum parabolae ex basi sumtarum, a vertice, producentur sinus seu applicatae quadrantis, et ex summa semisegmentum ex radio abscissum vel etiam quadrans.

Sunt autem applicatae parabolae[:]

$$\frac{Rq \llcorner a^2 - \beta a \lrcorner}{Rq\ \beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 2\beta a \lrcorner}{Rq\ 2\beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 3\beta a \lrcorner}{Rq\ 3\beta a} \qquad \frac{Rq \llcorner a^2 - 4\beta a \lrcorner}{Rq\ 4\beta a}$$

fiet

$$Rq \llcorner \frac{a^2}{\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{2\beta a} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a^2}{3\beta a} - 1 \lrcorner$$

seu

$$Rq \llcorner \frac{a}{\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{2\beta} - 1 \lrcorner \qquad Rq \llcorner \frac{a}{3\beta} - 1 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

quae si ducantur in

$$a - \beta \qquad a - 2\beta \qquad a - 3\beta$$

vel

$$Rq \llcorner a^2 + \beta^2 - 2a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 4\beta^2 - 4a\beta \lrcorner \qquad Rq \llcorner a^2 + 9\beta^2 - 6a\beta \lrcorner$$

fient

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner \qquad \text{etc.}$$

sinus.

$\bigtriangledown$la similia: BAF et BCD. $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo

P r o p. 7. $AB \frown CD = CB \frown AF$. seu c y l i n d e r p o r t i o n i s c i r c u l i sub AC

---

18 $\dfrac{a^2 + \beta^2 - 2a\beta}{1} \quad \dfrac{—}{—} \quad \dfrac{a}{\beta} = \dfrac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2.$

$$Rq \llcorner \frac{a^3}{\beta} + a\beta - 2a^2 - a^2 - \beta^2 + 2a\beta \lrcorner \quad \text{sinus.}$$

$$\llcorner \frac{a^3}{\beta} + 3a\beta - 3a^2 - \beta^2 \lrcorner Rq.$$

3 f. ita ... consequens *erg. L* 21 CB ⌢ AF. *(1)* | seu *nicht gestr.* | semicubus radii, vel etiam *(a)* cylinder semiquadrati portionis regulae vel sinus versi *(b)* prisma sinus versi sub radio *(2)* seu c y l i n d e r p o r t i o n i s *(a)* q u a d r a n t i s | sub *nicht gestr.* | radio *(b)* c i r c u l i *(aa)* altitudine AC *(bb)* sub *L*

a vertice abscissa, aequatur momento tangentium duplorum arcuum dimidiatorum seu distantiis earum a basi.

Intelligendum est enim AF applicatam esse ubi est CD. basis eius seu maxima applicabitur in B. ergo CB. est applicatae distantia a basi; est autem AF tangentis arcus dimidii, AH duplum. Cylinder ergo portionis ACD sub AC aequatur momentis omnium AF applicatarum ad AC.

Coroll. Hinc momentum chonchoeidis falsae ex basi, et ductus parabolico-parabolicus inversus aequantur per prop. hanc iuncta prop. 2. adde prop. 6 num. 3. et prop. 19.

Pergendum in his aequationibus: $\dfrac{AB}{CB} = \dfrac{AF}{CD} = \dfrac{FB}{DB}$. Ergo

diam.		chord. complem.		sin. vers.		chord. compl. + $[FD]$
AB	$\frown$	DB	$=$	CB	$\frown$	FB.

Ergo

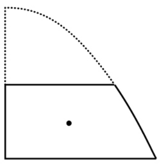
Prop. 8. Cylinder cuius basis portio semiparabolae a basi per applicatam abscissae, altitudo diameter, aequatur summae momentorum ex basi, tam chordarum, seu portionis parabolicae a basi per applicatam abscissae, quam omnium FD, seu portionis figurae omnium FD a vertice abscissae.

Coroll. Hinc rursus quadratura momenti figurae omnium FD. ut et supra prop. 6. coroll.

---

1 seu momento conchoeidis falsae

6 f. ad AC. | At cum AF sit duplum FD. *(1)* et momen *(2)* vel AH. tangentium dimidiorum, seu applicatarum conchoeidis falsae contractae, et ostenderimus tangentium dimidiorum momentum aequari momento portionis parabolae a vertice abscissae, ex basi. Ergo cylinder portionis circularis, momento parabolico aequaretur. Quod si verum esset haberetur non tantum *(a)* qua *(b)* tetragonismus sed et goniotomia |. Et certe nondum invenio errorem. *gestr.* | modo haberi possit centrum gravitatis portionis semiparabolae a basi per applicatam abscissae.



Sin minus habetur saltem tetragonismus arithmeticus, *(aa)* isque non per approximationes, sed exactus, *(bb)* nimirum per infinitam seriem numerorum rationalium quod hactenus in circulo potuit nemo. Et quod est admirabilius, datur sectio angulorum universalis, seu inventio quotcunque proportionalium methodo eadem. *gestr.* | Coroll. *L*

8 inversus *(1)* quadrari possunt *(2)* aequantur *L* 11 tang. arcus dimid. *L ändert Hrsg.* 15 quam *(1)* tangentium arcuum dimidiorum, seu conchoeidis falsae contractae *(2)* omnium *L* 17 momenti *(1)* conchoeidis falsae contractae. *(2)* figurae *L* 19 falsae | (protractae) *gestr.* | *L*

$\overset{\text{dupl. tang. arcus dimid.}}{AF} \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB} = \overset{\text{sin}}{CD} \frown \overset{\text{chord. compl.} + FD}{FB}.$ Ergo

P r o p. 9. Portio conchoeidis falsae a vertice abscissae, ducta in portionem semiparabolae a basi abscissae, aequatur portionis semicirculi a vertice abscissae, ductui in semiparabolicam a basi abscissae, demto ductu eiusdem portionis semicirculi in figurae omnium FD portionem a vertice abscissam. Eadem omnium portionum altitudine (AC) supposita.

Iam ductus parabolico-circularis quadrari potest, prop. 3. Ergo ductus parabolicus in conchoeidem falsam demto ductu circulari in fig. FD q u a d r a r i potest.

Antequam autem ad novas aequationes procedamus operae pretium est resumere atque examinare alibi iam explicatas, ac uno velut obtutu oculis sistere.

Diximus supra $FD \frown \overset{\text{chord. compl.}}{DB}$ quadrari posse.

At quia etiam $\dfrac{FD}{DB} = \dfrac{DR = AC}{CB}$ portio regulae a vertice port. circ. / altera portio seu supplementum regulae.

Ergo $FD \frown CB = DB \frown AC$. ut iam habuimus. Ergo $FD = \dfrac{AC \frown DB}{CB}$. Ergo $\dfrac{AC \frown DB}{CB} \frown DB = FD \frown DB$. Ergo

P r o p. 10. $\dfrac{AC \frown \square DB}{CB} = FD \frown DB.$ seu [solido] dato quia $FD \frown DB$ quadrabile est, sup. prop. 5. coroll.

---

3 NB. cum c o n c h o e i d e m dico, intelligo exemta circuli generatoris portione. Cum de ductibus loquor, intelligo iisdem regulae portionibus seu altitudinibus assumtis; et quod de totis, idem de partibus per applicatas abscissis intelligo.

1 chord. compl. + *(1)* tang. dimid. *(2)* FD *L* 5 f. in *(1)* conchoeidis falsae contractae *(2)* figurae *L* 13 supra *(1)* $\overset{\text{tang. dimid.}}{\text{FD}} \frown \overset{\text{chord. compl.}}{\text{DB}} = \overset{\text{diam}}{\text{AB}\,\square}$. *(2)* FD *L* 16 FD ⌢ DB *(1)* = *(a)* AB□. Ergo P r o p. 10. $\dfrac{\text{AC} \frown \square\text{DB}}{\text{CB}} = \text{AB}\square$. *(b)* plano *(aa)* assignabili *(bb)* dato *(2)*. Ergo *L* 17 plano *L ändert Hrsg.*

At $\square^{\text{ta}}$ DB seu chordarum a maxima, seu ab AB ita procedunt:

$$a^2 \quad a^2-\beta a \quad a^2-2\beta a \quad a^2-3\beta a$$

eae ducantur in suas distantias ab A. seu in AC.

$$0 \quad \beta \quad 2\beta \quad 3\beta$$

fient

$$0 \quad a^2\beta-\beta^2 a \quad 2a^2\beta-4\beta^2 a \quad 3a^2\beta-9\beta^2 a \quad \text{etc.}$$

Quae si dividantur per CB. seu distantias a B.

$$a \quad a-\beta \quad a-2\beta \quad a-3\beta$$

[fiet]

$$\frac{0}{a} \quad \frac{a^2\beta-\beta^2 a}{a-\beta} \quad \frac{2a^2\beta-4\beta^2 a}{a-2\beta} \quad \frac{3a^2\beta-9\beta^2 a}{a-3\beta} \quad \text{etc.} \quad = \text{solido dato.}$$

C o r o l l. 1. Manifestum est, hoc solidum esse progressionis cuiusdam ad harmonicam accedentis, seu hyperboliformis, et tamen quadrari posse. Quod nulli hactenus quod sciam hyperboloeidi contigit.

Idem ex solido transferri potest in planum, divisis omnibus per a, unde apparet ipsum solidum esse spatii cuiusdam hyperboloeidis cylindrum, fiet enim basis:

$$\frac{a\beta-\beta^2}{a-\beta}+\frac{2a\beta-4\beta^2}{a-2\beta}+\frac{3a\beta-9\beta^2}{a-3\beta} \text{ etc.} = \text{solido dato per } a \text{ diviso.}$$

Hoc spatium habet asymptotam, sed in eo differt ab hyperbolico quod incipit a puncto, nam $\dfrac{a\beta-\beta^2}{a-\beta} = [\beta] =$ puncto, β enim est infinitesima ipsius a. Ipsae autem rectae a. $a-\beta$. $a-2\beta$ etc. sunt distantiae applicatarum ab aymptota continue decrescentes uniformiter, ut in spatio hyperbolico asymptoto. Habemus ergo

C o r o l l. 2. q u a d r a t u r a m p l a n i h y p e r b o l o e i d i s asymptoti infiniti.

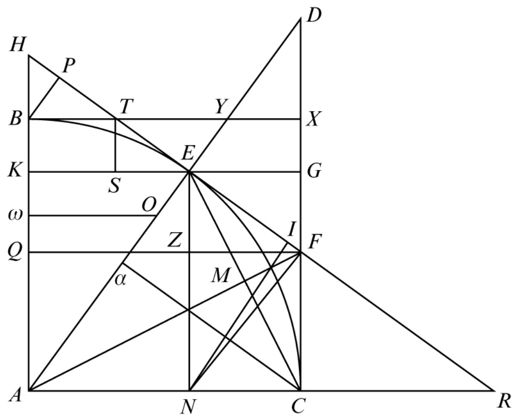
Quod hactenus quantum sciam nemo praestitit. Nam solidum hyperbolicum, seu ungulam spatii asymptoti, ideo quadrare facillimum fuit quia elementa eius non

9 fiet *gestr. L, erg. Hrsg.* 10 = *(1)* a^3. *(2)* solido *L* 15 cylindrum | sub a *gestr.* |, fiet *L* 16 = *(1)* a^2 *(2)* solido *L* 18 $\frac{\text{a}}{\text{a}}$ *L ändert Hrsg.*

11 C o r o l l. 1. : Leibniz übersieht, dass $\dfrac{na^2\beta-n^2\beta^2 a}{a-n\beta} = na\beta$ ist, so dass sich keine Hyperbel- sondern eine Parabelquadratur bzw. eine Identität ergibt.

hyperbolice sed cylindrice, ut elementa rectanguli, progrediuntur, ex nota hyperbolae proprietate.

Figura II.



[*Fig. 2*]

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ ADC et EDF similia. Ergo $\dfrac{AD}{DF} = \dfrac{DC}{DE} = \dfrac{AC}{EF}$.

P r o p. 11. $AD \frown DE = DF \frown DC$. secans in seipsum radio demto = tangenti in seipsum, demto tangente arcus dimidii, adde inf. prop. 43. coroll. 1. $d^2 - \cancel{ad} = c^2 - \cancel{ad} + a^2$. seu quadrata applicatarum spatii hyperbolici ad altitudinem, demto c y l i n d r o h y p e r b o l i c o , aequantur quadratis tangentium, seu applicatarum conchoeidis, demto rectangulo tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, seu ductu conchoeidis in conchoeidem falsam contractam, seu demto cylindro hyp. add. cub. rad. prop. 13. Ergo quadr. sec. = quad. tang. + quad. rad.

Caeterum quadrata ista applicatarum, credo summari non posse; quia ipsae applicatae sunt infinitae, nec refert, quod applicatae summari possunt. Nam omnia quadrata sunt momentum utique figurae seu omnium applicatarum ex altitudine, at momentum hoc est figura ducta in distantiam centri gravitatis, ab axe librationis. Quam distantiam

4 *Fig. 2 erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.* 8 $d^2 -$ … $+a^2$. *erg. L* 11–13 seu demto … quad. rad. *erg. L*

necesse est esse assignabili qualibet maiorem. Semper enim quamcunque ducas rectam ex asymptota altitudini parallelam, patet ab uno eius latere finitas, ab altero infinitas longitudines esse. Pro longitudinibus autem seu distantiis continue pondera crescunt. Quare non est dubitandum haec spatia quibusdam quadrato-quadratis aequari, quemadmodum lineas infinitas aequari quadratis, alibi ostendi hyperbolae ipsius exemplo, in qua asymptota, quadrato illi, numeratori communi, aequalis est.

Unde praeclara consequentia ducitur, scilicet figuras quadratoquadratas, aliasque quascunque altiores non esse imaginarias, sed reapse posse exhiberi. Quod alioquin multis modis in partibus inassignabilibus ostendi potest, quemadmodum aliud paradoxum longe maius dari dimensiones medias inter puncta, lineas, superficies, corpora etc.

Ductus autem tangentium in tangentes arcuum dimidiorum, finitus est ut mox ostenderimus. Nam maximus tangentium arcus dimidii est ipse radius, unde patet conchoeidem falsam, eiusque contractam esse finitae longitudinis, nec habere asymptotam.

Prop. 12. $AD \frown EF = DF \frown AC$. secans in tangentem arcus dimidii aequatur differentiae tangentium, arcus dati et dimidii, in radium, seu spatium hyperbolicum in conchoeidem falsam contractam, aequatur cylindro conchoeidis verae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae, adde prop. 38.

Prop. 13 $DC \frown EF = DE \frown AC$. seu tangens arcus dati in tangentem arcus dimidii aequatur radio in differentiam secantis et radii.

Ergo ductus conchoeidis verae in falsam contractam, cylindro hyperbolico demto cubo radii, add. prop. 37.

Ergo cubus radii aequatur cylindro hyperbolico demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam. Quare si ductus iste quadrari posset, haberetur quadra-

---

13 Nota quod dixi conchoeidem falsam eiusve contractam esse finitam intellige, si intra quadrantem sistatur, quod fit quotiescunque secantibus, scilicet ex radio ductis utimur, at quoties chordas ex adversa diametri extremitate venientes ipsamque diametrum adhibemus, tunc ultra quadrantem ad ipsum usque semicirculum progredimur, quod in conchoeidis falsae eiusve contractae dimensione notandum est.

8–10 Quod alioquin ... corpora etc. *erg. L* t u r a h y p e r b o l a e , unde apparet, quanti sit momenti haec ductuum doctrina.

Cylinder hyperbolicus demto ductu conchoeidis verae in falsam contractam q u a d r a r i p o t e s t , semper autem aequatur cubo radii, quaecunque sit altitudo portionis regulae, quod notabile est.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ DEF et DGE similia sunt. Ergo $\dfrac{DF}{DE} = \dfrac{DE}{DG} = \dfrac{EF}{EG}$.

P r o p. 14. $DF \frown DG = DE\Box$. quadratum differentiae inter secantem et radium aequatur differentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii ductae in differentiam sinus et tangentis.

sec. ⌢ sec. + rad. ⌢ rad. - 2 rad. ⌢sec. =

$$\begin{array}{l} \qquad\qquad\qquad\qquad \text{tang.} - \text{tang. dim.} \qquad\qquad [\text{sec.}\frown \text{rad.} - \text{quad. rad.}] \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{tang.} - \text{sin.} \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \backslash\ / \\ \text{tang.} \frown \text{tang.} - \overline{\text{sin.} \frown \text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}} - \quad \text{tang.} \frown \text{tang. dim.} \end{array}$$

seu $\cancel{2}$ rad. ⌢ rad. $-\cancel{2}$ rad. ⌢sec. = − sin. ⌢ tang. + sin. ⌢ tang. dim.

$$- \cancel{\text{rad.} \frown \text{sec.}} + \cancel{\text{rad.} \frown \text{rad.}}$$

7 quadratum *(1)* complementi sinus | altitudinis seu portionis a vertice abscissae *erg.* | *(2)* differentiae *L* 9 et *(1)* secantis. sec.⌢sec. + rad.⌢rad. − 2rad.⌢sec. = sec.⌢tang. − $\dfrac{\text{tang.} - \text{tang. dim.}}{\text{sec.} - \text{sin.}}$ $\overline{\text{sin.} \frown \text{tang.} + \text{sin.} \frown \text{tang. dim.}}$ − sec.⌢tang. dim. Ergo semicubus portionis a vertice abscissae = ductui conchoeidis in spatium hyperbolicum addito ductu portionis circularis in conchoeidem falsam contractam, demto ductu portionis circularis in conchoeidem | *darüber nicht gestr.:* prop. 46. 20. |, demtoque ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam | *darüber erg. u. gestr.:* C o r o l l. seu demto cylindro conchoeidis verae, addito cylindro conchoeidis falsae contractae per prop. 14 |. Idem sic enuntiari potest: semicubus aequatur ductui hyperbolae in conchoeidem veram falsa contracta minutam, addito ductu portionis circularis in *(a)* eandem *(b)* falsam contractam, demto ductu eiusdem in veram | *darüber nicht gestr.:* (qui quadrari potest posita hyperb. quadr. prop. 20.) |. Mirabilis est ista figurarum usque adeo heterogenearum atque extraordinariarum q u a d r a t u r a. *Absatz.* C o r o l l. Eadem est quadratura si per p r o p. 14. pro ductu spatii hyperbolici in conchoeidem falsam contractam substituas cylindrum conchoeidis verae, demto cylindro conchoeidis falsae contractae. *(2)* tangentis *L* 11 cyl. hyp. − *(1)* quad. rad. *nicht gestr.* *(2)* cub. rad. *L ändert Hrsg.*

7 P r o p. 14.: Die fehlerhafte 1. Fassung des Satzes hat Leibniz, wie die Verweise auf spätere Aussagen zeigen, bis zu Satz 48 beibehalten; erst dann hat er den Irrtum bemerkt und korrigiert.

Iam sin. $\frown$ tang. = [sec. $\frown$ rad.] − rad. in sin. compl.

Ergo: rad. $\frown$ rad. = rad. in sin. compl. + sin. $\frown$ tang. dimid.

Vide infra post prop. 48.

P r o p. 15. $DF \frown EG = DE \frown EF$. seu differentiae tangentium a tangentibus arcuum dimidiorum ductae in distantias suas a vertice, seu eorum momenta aequantur differentiis inter radium et secantem in tangentem arcus dimidii ductis, seu ductui hyperbolae in tangentes arcus dimidii, demto c y l i n d r o tangentium arcus dimidii.

P r o p. 16. $DE \frown EG = DG \frown EF$. seu momentum ex vertice differentiarum inter secantem et radium (quod datur data hyperbolae quadratura) aequatur ductui differentiae inter sinum et tangentem, in tangentem arcus dimidii; seu cylindro hyperbolico demto cubo radii (id est tangenti in tangentem arcus dimidii) et demto ductu sinuum in tangentes arcuum dimidiorum.

Ergo is ductus habetur dato hyperbolae tetragonismo.

$$\cancel{da} - df - a^2 + af = \cancel{ad} - \cancel{a^2} - bi.$$

$$\cancel{a^2}$$

Ergo sinus in tang. arc. dimid. $bi = a^2 - af$. seu sinus in tang. arc. dimid. = rad. in dist. a vertice. Ergo q u a d r a b i l e .

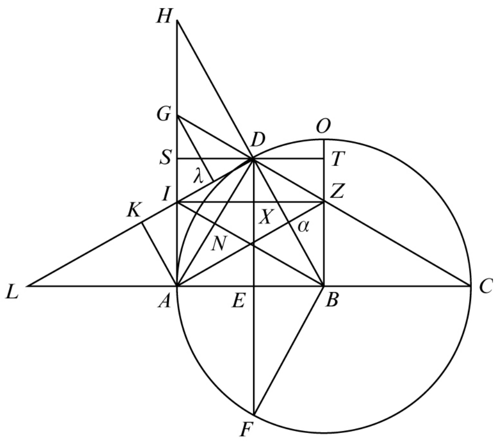
Regula artis combinatoriae in geometria:

Post lineas fundamentales, nulla facile recta ducenda est, quae non sit a puncto aliquo iam dato, ad aliud iam datum, aut quae non sit alteri cuidam parallela, aut aequalis, aut rationis ad eam datae, aut anguli aequalis, aut perpendicularis. Sed hoc inprimis observandum, ut linea ex puncto dato ducta sit alteri parallela aut perpendicularis, aut aequalis, aut angulum faciens aequalem.

1 cyl. hyp. *L ändert Hrsg.* 10 (quod *(1)* q u a d r a r i potest *(2)* datur *L* 13 f. dimidiorum. *(1)* Hoc ergo ductu habito haberetur h y p e r b o l a e t e t r a g o n i s m u s. *(2)* Ergo *L*

20 Regula: Beispiele dafür finden sich vor allem in Leibniz' Handexemplar des *Horologium oscillatorium*, 1673, insbesondere S. 66 u. 89; s. dazu N. 2.

Inprimis autem magni momenti est, triangula similia, inprimis rectangula constituere, quoad eius fieri potest. In rectangulis enim triangulis inter se comparatis, sufficit unius anguli obliquorum aequalitas, ad perfectam similitudinem.
Porro ope similium triangulorum, habentur lineae proportionales. At harum ope omnis generis rectangula aequalia.
Sed et alius modus est inveniendi rectangula aequalia citra similitudinem diversorum $\triangledown^{\text{lorum}}$, si scilicet in eodem $\triangledown^{\text{lo}}$ diversis modis assumtae altitudines in bases ducantur. Quod inprimis utile est, in triangulis quae rectilinea non sunt, nam in rectilineis res ad considerationem triangulorum similium redit.



[*Fig. 3*]

Fig. 3. $\triangledown IDZ$. ubi $IZ \frown XD = ID \frown \alpha D$. at $\alpha D = EA$. distantia a vertice.
NB. radius ductus in sinum demto tangente arcus dimidii aequatur momento tangentium arcus dimidii ex vertice.

10 *Fig. 3 erg. Hrsg. nach Text u. N. 23.* 13–438,1 ex *(1)* circuli centro *(2)* vertice. | Dato hoc momento | et *(a)* conchoeide *(b)* figura ipsa *erg.* | datur ... alibi. *erg.* *(aa)* Nota datur autem hoc momentum *(bb)* Dato momento tangentium fig. sufficit momentum tangentium verarum ad tetragonismum. *erg. u. gestr.* | *L*

10 [*Fig. 3*]: Es ist zu beachten, dass Leibniz die urspüngliche spezielle Fassung der fig. 3. (s. N. 23) heranzieht und mit ihrer Hilfe die folgenden Beziehungen ableitet, die daher nicht immer allgemein gültig sind, so dass die darauf basierenden Integrationen falsch werden.

Dato hoc momento et figura ipsa datur tetragonismus ut alibi.

$\bigtriangledown IDB$. tang. dimid. ID in radium DB = secanti dimidii BI in [sinum dimidii DN].

NI differentia inter NB regulae portionem ex centro, et BI secantem, ducta in sinum duplicatum AD aequatur ID in AK non tamen momento tangentium arcus ex vertice.
NB est dimidia CD. et BI dimidia CG.
Dato autem momento ex basi, datur momentum ex vertice et contra, saltem cylindris datis.
Hinc sequitur quadrabilem esse differentiam inter circularem portionem, et conchoeidis falsae contractae.

$\bigtriangledown BDC$. DE sinus in radium BC = chordae complementi DC in semisinum arcus.

Fig. 3. in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ZDB. rad. BD. in $Z\alpha = AZ$ $(= BI) - A\alpha$ $(= DE)$ aequatur $ZB \frown BE$.
Radius in differentiam secantis arcus dimidii a sinu dati, aequatur $ZB \frown BE$ tangenti arcus dimidii in distantiam a basi, seu momento horum tangentium ex basi, ac denique aequatur differentiae DZ inter CD et CZ $(= BI)$, seu inter chordam supplementi, et secantem arcus dimidii in sinum arcus dimidii DN.
Horum ergo omnium per prop. 19. coroll. 6. q u a d r a t u r a haberi potest.

---

19 *Daneben (bezogen auf die Grundstufe) großes*

2 dimidium semi *L ändert Hrsg.* 4 inter *(1)* radium et secantem, ducta in sinum duplicatum (quadrabilis) aequatur momento tangentium arcus | dimidii *gestr.* | ex vertice, | sed eorum duplo *gestr.* | *(2)* NB | semicordam *(!)* complementi *erg. u. gestr.* | regulae *L* 8 saltem *(1)* in totis *(2)* cylindris *L* 17 aequatur *(1)* illi toties dicto TD | = GD. male, tota ZD non est = DG. *erg.* | *(2)* differentiae *L* 19 per prop. 19. coroll. 6. *erg. L*

---

4 NI: s. dazu auch S. 439 Z. 11. 12 $\bigtriangledown BDC$.: s. dazu auch S. 439 Z. 3.

Et quia habetur ductus sinuum in chordas supplementi, habebitur ductus sinuum in secantes arcus dimidii.

NB. fig. 3. $\bigtriangledown BDC$: BC rad. in DE sin. = chorda compl. in sagittam complementi. NB. sagitta est distantia a centro, non tamen ideo cylinder quadrantis aequatur momento semicirculi, quia intellegi debent applicari chordae ubi sunt sinus et tunc sunt parabolae, sed sagittae non sunt amplius earum distantiae a centro.

Fig. 3. $\bigtriangledown FBD$. radius FB in sinum complementi arcus dimidii BN = duplo sinui arcus dati FD in BE sinum complementi.
Ergo summa sinuum complementi arcus dimidii q u a d r a r i potest. Ergo et summa sinuum versorum arcus dimidii.

Esto in fig. 3. $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ AID. chorda arcus in diff. secantis et sinus complementi aequatur ID tangenti dimidii, in sinum versum $AK = AE$. seu momento tangentis dimidii ex vertice.
Hoc vero momentum quadrabile est, forte et sinus complementi in chordam, ergo tunc foret quoque quadrabilis ductus hyperbolicus in parabolicum.

In $\bigtriangledown BAD$. AB rad. in ED sinum = sinus complementi arcus dimidii, in chordam.

Portiones conchoeidis falsae, ademtis portionibus cissoeidis, faciunt portiones cy-

---

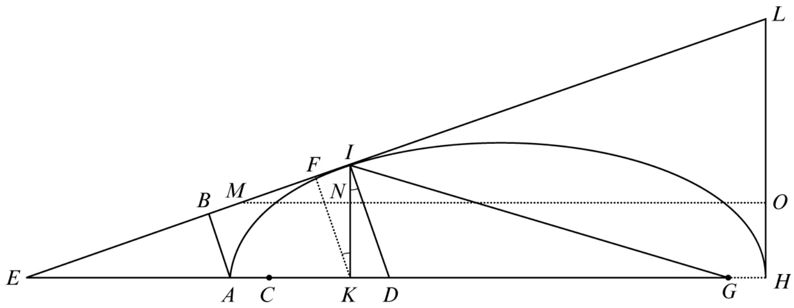
14 NB. hoc momentum ex vertice est quadrabile, quia figura (segmento) detracta ex portione circulari, residua manet rectilinea.

16 NB.

438,19–439,1 potest. *(1)* Quare differentia inter portionem circularem *(2)* At secans *(3)* Hinc data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae, et vicissim. Imo data dimensione partium hyperbolae, datur sectio angulorum universalis. | Imo forte error quia in prop. 19. coroll. 6. ponderant ex basi per centrum non per extremum diametri transeunte. Sed quicquid huius sit, si unum momentum datur, dabitur etiam alterum, modo et figurae dimensio detur, data enim distantia centri figurae, a basi per centrum circuli transeunte, dabitur et a transeunte per diametri extremum. Ergo data quadratura circuli datur quadratura hyperbolae *(a)* non *(b)* et contra. Quia figurae dimensio pendet a circuli quadratura igitur et ex data circuli quadratura, dabitur curva elliptica et parabolica. *erg.* | *(4)* Et *L* 11 *(1)* NB. videtur etiam ductus hyperbolico-parabolicus quadrari posse *(2)* Esto *L* 14 forte *erg. L* 15 parabolicum. | Imo non est, nam *gestr.* | *L* cloeidis; modo scilicet a cycloeide portiones circulorum generantium ademtae intelligantur.

Lineae figuraeque epicyclicae dimensio.
Arnaldus, Bullialdus, Carcavius, Dalancius, Galloisius, Huetius, Hugenius, Oldenburgius, Thevenotus, Thomasius.

Conchoeis falsa contracta est momentum arcus circuli ex tangente, seu duplum eius segmentum.



[*Fig. 4*]

Si sit ellipsis AIH. foci C et G. punctum quodlibet in curva sumtum I. ex quo perpendicularis in distantiam focorum CG demissa ID. erit $\dfrac{CG}{AH} = \dfrac{DG}{IG}$. ut ostendit P. Fabri, *Synoψ. Opt.* prop. 51.
Ergo $CG \frown IG = AH \frown DG$. seu summa omnium rectarum ex uno focorum ad curvam ducibilium, ducta in distantiam focorum, aequatur abscissis a perpendiculari ex distantia focorum, ductis in diametrum transversam maiorem. Ergo bases horum cylindrorum erunt ut altitudines reciproce, seu summa ductarum ex foco ad curvam, erit ad summam abscissarum, ut est diameter transversa ad distantiam focorum.

1 scilicet a | conchoeide et *gestr.* | cycloeide L

10 ostendit: *a. a. O.* S. 155. Auf dieser Seite hat Leibniz in seinem Handexemplar die fehlende Figurenangabe (fig. 127) ergänzt.

Et hoc verum est, quomodocunque unitas in constructione assumatur, seu quaecunque intelligatur regula, sive ea sit curva, sive CD. sive ipsa IG. continue crescens uniformiter.

In omni figura perpendicularis ex curva ad altitudinem, seu applicata, ut IK $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectangulum EIK in similia secat. Hinc similia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ EID. et EIK. et IKD.

Ergo $\dfrac{ED}{EI} = \dfrac{EI}{EK} = \dfrac{ID}{IK}$. Ergo $ED \frown EK = \underline{\underline{\underline{\square\, EI}}}$. item: $ED \frown IK = EI \frown ID$. item: $EI \frown IK = EK \frown ID$.

Porro $\dfrac{EI}{ID} = \dfrac{EK}{IK} = \dfrac{IK}{KD}$. ergo: $EI \frown IK = EK \frown ID$. habuimus. $EI \frown KD = ID \frown IK$. denique $EK \frown KD = \underline{\underline{\underline{IK\,\square}}}$. seu applicata est media proportionalis inter portiones quas facit in parte altitudinis inter tangentem et perpendicularem interiecta.

Tandem: $\dfrac{ED}{ID} = \dfrac{EI}{IK} = \dfrac{ID}{KD}$. Ergo $ED \frown IK = ID \frown EI$. habuimus $ED \frown KD = \underline{\underline{\underline{ID\,\square}}}$. seu perpendicularis est media proportionalis inter totum intervallum perpendicularis et tangentis in altitudine sumtum, eiusque portionem minorem.

Demissa recta KF constat angulos KID et FKI esse aequales ergo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ KFI et IKD similia ergo $\dfrac{ID}{IK} = \dfrac{IK}{KF} = \dfrac{KD}{FI}$. Ergo $ID \frown KF = IK\,\square$.

Si tangens EI continuetur dum perpendiculari HL occurrat in L. et ex applicata ducatur parallela ipsi EH. nempe MN. patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ MIN et MLO esse similia ergo

$$\frac{LI}{IM} = \frac{LO}{IN} = \frac{KH = NO}{MN}.$$

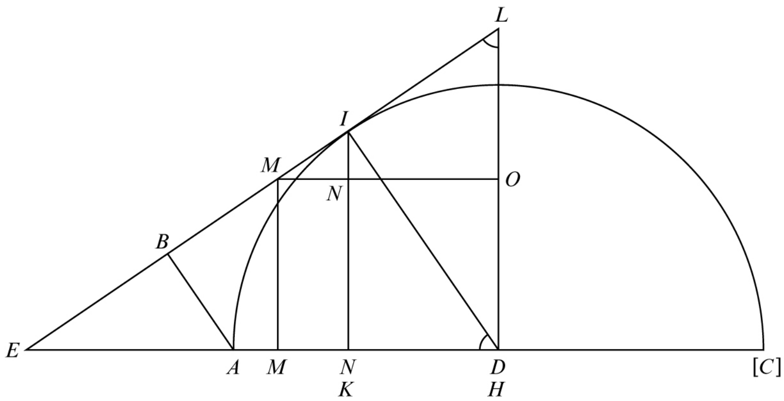
Ergo $LI \frown IN = IM \frown LO$. seu tangentes IL applicatae arcubus IM aequantur summae partium basis LH. demtis applicatis $OH = NK$.

Item $LI \frown MN = IM \frown KH$. Ergo momenta chordarum seu exiguorum arcuum ex basi aequantur summae portionum tangentium inter basin et punctum contactus interceptae altitudini applicatarum, nam ipsae MN sunt altitudinis partes, eamque exacte implent. Quibus si ipsae tangentes imponantur, posita divisione AH. si ponatur esse diameter

18 f. seu *(1)* secantes *(2)* tangentes . . . summae *(a)* tangentium *(b)* partium . . . = NK. *erg. L*

17–442,7 Die Ähnlichkeitsbeziehung ist unrichtig. Dadurch wird die folgende Textaussage falsch; die beiden anderen sind im Ansatz richtig.

circuli in infinitas MN inter se aequales, orietur figura tangentium, seu conchoeis circulo generatore deminuta, ea ergo aequalis est momento arcus.
Idem universaliter verum est, quaecunque portio conchoeidis assumatur. Conchoeis ergo et quaevis eius portio abscissa quadrari potest, si curva illa sit circularis, quia curvae circularis momentum ex basi radio quadrari potest. Imo error, non tangentium summa sed tangentium arcus supplementi. Nec obest, quod tandem LI fit infinita MO semper manet finita, nam et $\underline{\underline{MN}}$ fit infinities minor IM puncto.



[*Fig. 5*]

$EID\bigtriangledown$ tangens in radium = secanti in sinum.

Secans in secantem complementi = radio in tang. + tang, compl. ob $\bigtriangledown ELD$.

$\dfrac{LM}{IM} = \dfrac{OM}{NM} = \dfrac{LO}{IN}$. ergo
$LM \frown NM = IM \frown OM$. item $LM \frown IN = IM \frown LO$. $\quad OM \frown IN = NM \frown LO$.

$\dfrac{LE}{IM} = \dfrac{LH}{IN} = \dfrac{EH}{MN}$.
$LE \frown IN = IM \frown LH$. $\quad LE \frown MN = IM \frown EH$. $\quad LH \frown MN = EH \frown IN$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EIK et MIN. Ergo $\dfrac{EI}{IM} = \dfrac{EK}{MN} = \dfrac{IK}{IN}$.

8 [*Fig. 5*]: H *L ändert Hrsg.* 9 |EID$\bigtriangledown$ *erg.*| *(1)* secans in radium = tangenti in sinum. Quo posito dabitur absoluta conchoeidis quadratura *(2)* tangens *L*

$EI \frown MN = IM \frown EK$. $EI \frown IN = IM \frown IK$. $EK \frown IN = MN \frown IK$.
sum. tang.

Item $\triangledown^{\mathrm{la}}$ similia EIH et IMN. Ergo $\dfrac{EH}{IM} = \dfrac{IH}{IN} = \dfrac{IE}{MN}$. Ergo
$EH \frown IN = IM \frown IH$. seu in circulo secans in basin = radio in chordam seu arcum.
$IH \frown MN = IN \frown IE$. ergo quadrari possunt omnia $IN \frown IE = IM \frown IK$.
$EH \frown MN = IM \frown IE$. seu tangentes applicatae arcubus aequantur hyperbolae.

Tandem similia $\triangledown^{\mathrm{la}}$ EBA et IMN. nam $\vee BEA = IMN$. Ergo $\dfrac{EA}{IM} = \dfrac{AB}{IN} = \dfrac{BE}{MN}$.
Ergo
$EA \frown IN = AB \frown IM$. Ergo EA applicatae basi aequantur segmento figurae duplicato (utile hoc in cycloeide, ubi quadratura cuiusdam segmenti).
$AB \frown MN = IN \frown BE$. in circulo $AB = AK$.
$EA \frown MN = IM \frown BE$.

$\triangledown^{\mathrm{la}}$ AHE et AEN similia sunt. Ergo: $\dfrac{AH}{AE} = \dfrac{AE}{EN} = \dfrac{HE}{AN}$.

Prop. 17. $AH \frown EN = AE\square$. seu secans in sinum complementi aequatur quadrato radii. Quod aliunde constat, quia quadratum radii divisum per portionem regulae seu distantiam a basi seu sinum complementi, dat secantem. Hoc ergo idem est cum momento hyperbolae ex basi.

Prop. 18. $AH \frown AN = AE \frown HE$. secans in sinum = radio in tangentem. Ergo cylinder conchoeidalis aequatur ductui portionis circularis in hyperbolicam. Adde prop. 56.

---

4 *Hinter der Formel größeres* NB.

9 segmento *(1)* circuli *(2)* figurae *L* 15 per *(1)* distantiam a basi *nicht gestr.* *(2)* portionem *L*

---

13 $\triangledown^{\mathrm{la}}$ AHE et AEN: Von hier an greift Leibniz auf fig. 2. zurück. Die Figur gilt für die Sätze 17–76 sowie 79 u. 80.

P r o p. 19. $AE \frown AN = EN \frown HE$. seu c y l i n d e r c i r c u l a r i s aequatur m o m e n t o tangentium ex basi.

Hoc theorema conferendum cum p r o p. 7. Ibi diameter ductus in sinum, aequatur tangenti falso ducto in distantiam a basi, id est in distantiam ab altera diametri extremitate, seu si arcus minor quadrante, in distantiam a centro + rad. Hoc loco (ubi arcus quadrantem nunquam excedit) radius ductus in sinum, aequatur tangenti vero, ducto in distantiam suam a centro.

Esto radius a. sinus b. tangens verus c. falsus d. distantia a centro seu tangentis veri a basi e. tangentis falsi a basi $e + a$. Iam $ab = ce$. item $2ab = de + da$.

C o r o l l. 1: Ergo $2ce = de + da$.

C o r o l l. 2: Ergo $\dfrac{2ce}{d} = e + a$. Et quia $2ce - de = da$.

C o r o l l. 3: Ergo $2c - d = \dfrac{da}{e}$. Item quia $2ab - da = de$. erit

C o r o l l. 4: $2b - d = \dfrac{de}{a}$.

---

1 f. *Zu* P r o p. 19. *am Rande ergänzt:*
cyl. circ. = ab. momentum tangentium ex basi = ec. Iam vid. <u>15. et 12.</u> add. prop. 6. num 6. mom. tang. ex vertice, scilicet id = (prop. 15 + 12) cyl. conchoeid. ver. − cyl. quadrupli segmenti arcus (seu minus cyl. conchoeid. fals.) + (per duct. prop. 6. num. 6.) + cyl. conchoeid. fals. seu cyl. quadrupl. segm. sub rad. − cyl. port. circ.
Ergo, iungendo utrumque momentum: cyl. conch. = cyl. circ. + cyl. conch. − cyl. circ. Calculi comprobatio. Add. prop. 24.

5 f. loco *(1)* diameter *(2)* | (ubi … excedit) *erg.* | radius *L* 8 f. seu *(1)* sinus *(2)* tangentis veri a basi *erg. L* 13–445,1 $\frac{\mathrm{de}}{\mathrm{a}}$. | C o r o l l 5. Ergo omnes 2b − d. seu ductae in a = de. Seu | dupla *erg.* | summa sinuum | omnium *erg.* | id est quadrans | duplicatus seu semicirculus *erg.* |, demtis tangentibus falsis omnibus in quadrante, aequatur tangenti falso | maximo *erg.* | quadrantis, id est diametro, ducto in veri tangentis quadrantis radio scilicet applicati, distantiam a basi. Quae nulla est, tangentibus cum falsis continuo applicatis radio, maximus cadit in ipsum centrum. Hinc sequitur s u m m a m t a n g e n t i u m f a l s o r u m quadrantis, aequari | semi *gestr.* | circulo. Ecce modum probandi, *(1)* ubi de toto *(2)* dimensionem totius, sine partium dimensione. Sed partes alias metimur, generaliterque definiemus summam tangentium falsorum aequari duplo | semi *gestr.* | segmento arcus | , seu segmento arcus duplicati *gestr.* | . *gestr.* | Porro *L*

Porro

Coroll 1. etiam sic enuntiari potest: duplum momentum tangentium verorum ex basi per centrum transeunte aequari momento tangentium falsorum, addito cylindro eorum sub radio.

Coroll. 4^{tum} ita enuntiari potest: summa sinuum duplicatorum demta summa tangentium falsorum, aequatur dicto momento tangentium falsorum, per radium diviso. Idque non tantum in quadrante, sed et in alia quacunque portione circulari minore.

Coroll. 6. Hinc dimensio momenti tangentium falsorum ex basi.

Nam summa sinuum duplicata est duplum semisegmentum arcus dati, seu segmentum arcus BE dupli. Summa tangentium falsorum est quater segmentum arcus BE [dimidiati]. Ergo differentia, seu $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BKE [duplicatum] ductum in radium, dabit momentum tangentium falsorum.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ AEN (vel KEA) et HKE similia sunt. Ergo: $\dfrac{AE}{HE} = \dfrac{AK}{HE} = \dfrac{KE}{KH}$.

$AE \frown KE = HE \frown AK$. coincidit cum prop. 19.

Prop. 20. $AE \frown KH = HE \frown KE$. seu radius in differentiam secantis et distantiam a basi per centrum transeunte aequatur tangenti in sinum. Seu cylinder hyperbolicus demto prismate, cuius basis distantiae a basi (quadrabiles) aequatur ductui portionis conchoidalis in circularem.

Ergo ductus portionis conchoeidalis in circularem, prop. 14. 46, demto cylindro hyperbolico, quadrari potest. Add. prop. 27. et repetita prop. 14. post prop. 48.

4 f. radio. | Coroll. 2. ita enuntiatur. *gestr.* | *(1)* Ex corollario 4^{to} praeter 5^{tum} duco sextum. Coroll. 6^{tum} *(2)* Coroll. 4^{tum} *L* 13 dimidiati *erg. Hrsg.* 13 duplicatum *gestr. L, erg. Hrsg.* 14 f. falsorum. | Coroll. 7. ideo coneides tangentium falsorum reduci potest ad verum cylindrum, etsi area ad segmentum. *gestr.* | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ *L* 17 HE $\frown$ KE. *(1)* seu differentia secantis a radio, *(a)* in momentu *(b)* in distantia a basi *(2)* seu *L* 18 f. Seu *(1)* momentum *(a)* hyp *(b)* differentiarum *(c)* applicatarum *(aa)* hyperbolae *(bb)* spatii hyperbolici radio cuilibet earum ademto (quod quadrari potest) *(2)* cylinder hyperbolicus demto *(a)* semiquadrato cui *(b)* prismate *L*

9 Coroll. 6.: In diesem Korollar setzt Leibniz entgegen der Ausgangsformel $d = a - tg\dfrac{\varphi}{2}$.

P r o p. 21. $AK \frown KH = KE\,\square$. seu quadratum sinus aequatur differentiae secantis a distantia a basi momento ex basi.

Utrumque autem q u a d r a r i dudum constat.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEH et BPH. Ergo: $\dfrac{AH}{HB} = \dfrac{AE}{BP} = \dfrac{EH}{HP}$.

P r o p. 22. $AH \frown BP = AE \frown HB$. secans in distantiam a circuli vertice = radio in differentiam radii a secante. Seu m o m e n t u m s p a t i i h y p e r b o l i c i e x v e r t i c e, aequatur c y l i n d r o h y p e r b o l i c o sub radio, demta summa radiorum, quae quadrabilis est in radium.

Ergo cylinder hyperbolicus demto momento spatii ex vertice, q u a d r a r i potest est enim momentum ex basi. Hoc per se patet.

P r o p. 23. $AH \frown HP = HB \frown EH$. secans in differentiam inter sinum et tangentem aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem.

Radius a. sinus b. tangens c. secans d. ita $dc - db = dc - ac$.

C o r o l l. Ergo $db = ac$. seu secans in sinum = radio in tangentem.

Ergo ductus hyperbolicus in circularem, aequalis c y l i n d r o c o n c h o e i d a l i.

P r o p. 24. $AE \frown HP = BP \frown EH$. radius in differentiam tangentis et sinus aequatur distantiae a vertice in tangentem, seu c y l i n d e r c o n c h o e i d a l i s, d e m t o c i r c u l a r i, uterque sub radio, aequatur m o m e n t o p o r t i o n i s c o n c h o e i d a l i s ex vertice.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: HPB et EGF. quia $\vee^{\text{li}}$ BHP et EFG. aequales. Ergo:

$$\frac{FE}{HB} = \frac{GF}{HP} = \frac{EG}{BP}.$$

P r o p. 25. $FE \frown HP = HB \frown GF$. seu [tangentes] arcus supplementi dimidiati in differentiam tangentis et sinus, aequantur differentiae inter radium et secantem in differentiam inter distantiam a basi et tangentem arcus supplementi dimidii.

Seu posito radio a. secante d. distantia a basi f. tangente arcus suppl. dimid. e.

7 f. summa *(1)* distantiarum a vertice *(2)* radiorum . . . est *(a)* (semiquadratum distantiae a vertice) *(b)* in *L* 23 seu *(1)* momenta tangentium arcus supplementi dimidiati, ex vertice circuli *(2)* | tangentium *ändert Hrsg.* | arcus *L* 25 inter *(1)* sinum *(2)* distantiam *L* 26 secante d. *(1)* sinu b. *(2)* distantia *L*

21 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: Bei der Behandlung der aus dieser Beziehung abgeleiteten Aussagen unterlaufen Leibniz verschiedene Versehen, welche trotz nachfolgender Korrekturen nicht alle behoben werden. Die Sätze 25–27 sind daher nur eingeschränkt gültig.

fiet $d-a, \frown f-e$. seu $df-de-af+ae=ec-eb$. seu momentum hyperbolicum ex basi demto ductu hyperbolico in tang. dim. suppl. demto momento sinuum ex basi addito denique cylindro tang. arc. suppl. dim. Si hic quadrari potest, ut alibi ostensum ergo m o m e n t a tang. arc. supplem. dim. addito ductu hyp. in tang. dim. suppl. q u a d r a r i possunt. Prop. 46. coroll. 2.

P r o p. 26. $FE \frown BP = HB \frown EG$. tang. dim. suppl. momentum ex vertice circuli = diff. inter distantiam a basi et radium in diff. rad. et sec. [;] seu ductus tang. suppl. dimid. in conchoeid. − tang. dimid. suppl. ductus in port. circ. $= a-f. \frown d-a. = ad-a^2-fd+fa$. seu cylindro hyperbolico sub radio demtis radiis in radios, demto momento hyperbolico addito prismate distantiarum a basi.

P r o p. 27. $GF \frown BP = HP \frown EG$. differentia tangentis dimid. arcus supp. a distantia a basi, ducta in differentiam radii et distantiae a basi, aequatur differentiae inter tangentem et sinum in differentiam inter sinum et radium, seu $[e]-f \frown a-f = c-b \frown a-b$.

$[e]-f \frown a-f = ea-ef-fa+f^2 = c-b \frown a-b = ca-cb-ba-b^2$. seu

$$ca-da+af-ba-b^2.$$

Seu cylinder tangentium arcus dimidii supplementi $\underline{\underline{ea}}$, additis distantiarum a

6 *Zur Formel:* prop. 46. coroll. 2.

17 *Zur Streichung:* (quadrabilis) *mit gültigem* non *überschrieben.*

1 fiet *(1)* d − a,⌒ b − e. seu db − de − ab + ae = | ec − eb. *erg.* | seu ductus hyperbolicus in circularem (cylinder conchoeidalis) *(2)* d − a,⌒ f − e. *L* 2 suppl. *(1)* addito cylindro circulari *(2)* demto *L* 5 suppl. *(1)* et cyl. circ. | *darüber:* mom. arc. | demto cyl. conchoeid. *(2)* q u a d r a r i *L* 8 circ. *(1)* | b iam posito sinu *erg. u. nicht gestr.* | = a − b. ⌒ d − a = ad − a^2 − bd + ba. *(2)* = a − f. ⌒ d − a. *L* 10 demto *(1)* cylindro conchoeidis (=bd) *(2)* momento *L* 10 addito *(1)* cylindro circulari *(2)* momen *(3)* prismate *L* 11 dimid. arcus supp. *erg.* *L* 13 seu *(1)* c − f ⌒ a − f = c − b ⌒ a − b. c − f ⌒ a − f = ~~ca~~ − cf − fa + f^2 = c − b ⌒ a − b = ~~ca~~ − cb − ba − b^2. Ergo f^2 − cf − fa = b^2 − cb − ba. Ergo f^2 − cf − fa − b^2 + cb + ba = 0. Ergo f^2 + cb + ba = cf + fa + b^2. Seu quadrato distantiarum a basi aucta ductu conchoeido-circulari (qui demto c y l i n d r o quodam hyperbolico quadrari potest prop. 20.) et c y l i n d r o circulari, aequantur momento tangentium, radio in distantias a basi, sinuum quadratis. Hinc dari potest m o m e n t u m t a n g e n t i u m , dato tetragonismo circuli et hyperbolae. Vicissim data quadratura hyperbolae eiusve partium, et momento conchoeidis *(a)* eiusve *(b)* eiusque partium datur t e t r a g o n i s m u s c i r c u l i eiusque partium seu sectio angulorum universalis et quotcunque mediarum proportionalium inventio. *(2)* | c *ändert Hrsg.* | − f *L* 15 c *L ändert Hrsg.* 17 $\underline{\underline{ea}}$ | (quadrabilis) *gestr.* |, additis *L*

basi quadratis $\underline{\underline{f^2}}$ (quadrabilibus) et quadratis sinuum $\underline{\underline{b^2}}$ (itidem quadrabilibus), demtis $\underline{\underline{fa}}$ distantiis a basi in radium (itidem quadrabilibus), iisdem rursus additis (et ideo plane omissis), aequatur cylindro conchoeidali $\underline{\underline{ca}}$ addito momento tangentium arcus dimid. suppl. $\underline{\underline{ef}}$, demtis cylindris hyperbolico et circulari.

Cylindri autem isti omnes sunt sub radio, etsi altitudo partium abscissarum a vertice radio minor sit. Quodsi momenta tangentium arcus dim. suppl. redigi possunt vel ad figuram rectilineam vel saltem ad cylindrum circularem, ut credo, et verum est conchoeidis et hyperbolae et partium quadraturas a se invicem dependere, necesse est dari quadraturam circuli et partium eius, data quadratura hyperbolae; si etiam cylinder tang. semicomplementi quadrari queat, sed ille non potest.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEK et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AE} = \dfrac{DC}{AK} = \dfrac{AC = AE}{KE}$.

Prop. 28. $AD \frown AK = AE \frown DC$. secans complementi in distantiam a basi per centrum transeunte seu sinum complementi, aequatur radio in tangentem complementi, seu cylinder tangentium complementi (quadrabilis de quo infra) aequatur momento secantium complementi ex basi quadrantis seu ipsius figurae secantium complementi ex vertice.

Ergo hoc momentum quadrabile est.

Adde prop. 40. Et adde prop. 23. coroll. *Trigonometriae inassignabilium*.

Prop. 29. $AD \frown KE = AE\square$. sinus in secantem complementi, aequatur quadrato radii, seu radius est media proportionalis inter sinum arcus dati, et secantem arcus complementi.

---

20 *Zu* $AD \frown KE$*:* add. prop. 41.

7 vel ... vel *erg. L* 14 seu sinum complementi *erg. L* 16 f. seu ... vertice *erg. L*

---

19 Et adde: s. N. 27 S. 472 Z. 6 f., weitere Hinweise auf dieses Stück finden sich in den Sätzen 43, 45, 47 (Korollar 2), 51 und 72.

Quare ductus circularis in figuram secantium complementi inversus, aequatur prismati, cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus in vertice quadrantis. Ergo quadratur.

His adde prop. 33. corollar.

Prop. 30. $DC \frown KE = AK \frown AE$. sinus in tangentem complementi aequatur radio in distantiam a basi quadrantis.

Quare ductus portionis circularis in portionem figurae tangentium complementi inversus, aequatur radio in summam distantiarum a basi seu abscissam trianguli a basi, ergo ductus iste est quadrabilis.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEH et ADC. Ergo $\dfrac{AD}{AH} = \dfrac{DC}{AE} = \dfrac{AC = AE}{HE}$.

Prop. 31. $AD \frown AE = AH \frown DC$. radius in secantem complementi, aequatur secanti in tangentem complementi, atque ideo cylinder secantium complementi sub radio aequatur ductui inverso secantium, seu portionis hyperbolicae in portionem figurae tangentium complementi.

Prop. 32. $AD \frown HE = AH \frown AE$. radius in secantem, aequatur secanti complementi in tangentem, atque ideo cylinder hyperbolicus aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis in portionem figurae secantium complementi. Vide post prop. 44. et 67.

Prop. 33. $DC \frown HE = AE\,\square$. tangens in tangentem complementi, aequatur quadrato radii. Adde prop. 43.

Atque ideo prisma, cuius basis quadratum radii, altitudo distantia sinus a vertice quandrantis, aequatur ductui inverso portionis conchoeidalis eiusdem altitudinis a vertice abscissae, in portionem figurae tangentium complementi a basi abscissam.

1 secantium *(1)* falsarum *(2)* complementi *L* 14 f. complementi. | Coroll. id est, iuncta prop. 35., cylinder secantium complementi, aequatur cylindro *erg. u. gestr.* | Prop. 32. *L* 15 f. secantem | (complementi) *erg., streicht Hrsg.* |, aequatur secanti complementi | (secanti) *erg. u. gestr.* | in tangentem | (complementi) *erg. u. gestr.* |, atque *L* 21 sinus *erg. L* 22 eiusdem altitudinis *erg. L*

15 Prop. 32.: Bei der Ausformulierung erkennt Leibniz die Dualität von Satz 32 zu Satz 31. Er versucht dies mittels beigefügter Klammereinschüben auszudrücken, hat den Versuch aber schließlich doch abgebrochen; s. aber unten die Sätze 48 und 52.

C o r o l l. atque ideo per prop. 29. sinus in secantem complementi, aequatur tangenti in tangentem complementi ductusque circularis inversus in figuram secantium complementi, ductui conchoeidali inverso in figuram tangentium complementi. Adde prop. seq. 34. et 37.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: HEK et ADC. ergo $\dfrac{DA}{HE} = \dfrac{DC}{EK} = \dfrac{AC}{HK}$.

P r o p. 34. $DA \frown EK = HE \frown DC$. secans complementi in sinum = tangenti in tangentem complementi, habuimus prop. 33. corollar., q u a d r a b i l e .

P r o p. 35. $DA \frown HK = HE \frown AC$. differentia inter secantem et sinum complementi in secantem complementi, aequatur tangenti in radium, atque ideo c y l i n d e r c o n c h o e i d a l i s aequatur ductui inverso figurae hyperbolicae in figuram secantium complementi, add. prop. 38, demto momento (quadrabili prop. 28) secantium complementi ex basi quadrantis seu vertice suo. Adde prop. 44. et prop. 45.

P r o p. 36. $DC \frown HK = EK \frown AC$. radius in sinum = tangenti complementi in differentiam secantis et sinus complementi. Atque ideo c y l i n d e r portionis circularis aequatur ductui inverso hyperbolae in figuram tangentium complementi (= c y l i n d r o s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i , prop. 31.) demto momento tangentium complementi ex vertice suo seu basi quadrantis.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: ADC et HQF. Est autem QF = radio, HF = tangenti arcus dati + tangenti arcus dimidii complementi, et HQ est differentia inter secantem et tangentem compl. dimid. vel est summa ex differentiis duabus, altera inter secantem et sinum complementi, altera inter sinum complementi et tangentem complementi dimidii. Hinc iam:

$$\frac{AD}{HF} = \frac{DC}{QF = AC} = \frac{AC}{QH}.$$

P r o p. 37. $AD \frown AC = HF \frown DC$. secans complementi in radium = tangenti complementi in summam ex tangente et tangente complementi dimidii vel in secantem. Atque ideo c y l i n d e r s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i sub radio, aequatur tangentibus complementi in tangentes (q u a d r a b i l i b u s , per prop. 33. coroll. et prop. 34.) additis tangentibus complementi in tangentes complementi dimidii.

26 vel in secantem *erg. L*

Atqui tangentes complementi in tangentes complementi dimidii, aequantur radio in secantes complementi, demto radio in radios; seu cylindro secantium complementi, demto quadrato radii in distantiam a vertice circuli, per prop. 13.

Utraque ergo proposito, 13. et 37. eodem redit, argumento veritatis calculi. Adde prop. 45.

Prop. 38. $AD \frown QH = HF \frown AC$. secans complementi in differentiam secantis et tangentis complementi dimidii, aequatur radio in summam ex tangente et tangente complementi dimidii, atque ideo:

Cylinder conchoeidalis, addito cylindro tangentis complementi dimidiati, aequatur ductui hyperbolico inverso in figuram secantium complementi (qui per prop. 35. = cylindro conchoeidali momento secantium complementi, ex basi quadrantis, quadrabili, quod et cylindro tangentium complementi aequatur, prop. 28., aucto), demto secante complementi in tangentem complementi dimidii.

Atqui secans complementi, in tangentem complementi dimidii aequatur DF differentiae inter tangentem complementi, et tangentem complementi dimidii, in radium, supra prop. 12.

Hinc talis aequatio orietur. Esto radius a. tangens c. secans d. secans complementi g. tangens complementi h. tangens dimidii complementi e. literis superioribus retentis. Ergo:

$$gd - ge = ac + ae.$$

Sed quia pro $\underline{gd}$ substitui potest per prop. 35. $ac + ah$. et per prop. 12. pro $\underline{ge}$ substitui potest $ah - ae$. fiet aequatio talis: $ac + ah - ah + ae = ac + ae$. seu $ac + ae = ac + ae$. insigni documento calculi recte positi.

Prop. 39. $DC \frown QH = AC\,\square$. tangens complementi; in differentiam secantis, et tangentis semicomplementi, aequatur quadrato radii.

18 *Zu* supra *zusätzlich:* 46.

10 cylindro *(1)* conchoeidis falsae dimidiatae arcus *(2)* tangentis *L* 13 f. quod et ... prop. 28. *erg. L* 23 ac + *(1)* $\frac{a^2}{\alpha}$ ($\frac{a^2}{\alpha}$ significat quantitatem quadrabilem) *(2)* ah *L*

Atque ideo figura tangentium complementi inverse ducta in hyperbolicam, seu per prop. 31. cylinder secantium complementi, demto suo ductu in figuram tangentium semisupplementi, seu per prop. 13. 37. demto cylindro secantium complementi, addito quadrato radii in distantiam a vertice circuli, seu sagittam, aequatur quadrato radii in sagittam; rursus omnia eodem redeunt certissimo argumento veritatis.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: ADC et DEG. Ergo $\dfrac{AD}{ED} = \dfrac{DC}{DG} = \dfrac{AC}{EG}$.

Prop. 40. $AD \frown DG = ED \frown DC$. secans complementi in differentiam inter tangentem complementi et sinum complementi, aequatur differentiae inter secantem complementi et radium in tangentem complementi, seu

$$gh - gf = hg - ha.$$

Ergo $gf = ha$. quod iam supra, prop. 28.

Prop. 41. $AD \frown EG = ED \frown AC$. secans complementi in differentiam radii a sinu, aequatur radio in differentiam secantis complementi et radii. Seu $ga - gb = ag - a^2$. adde prop. 29.

Prop. 42. $DC \frown EG = DG \frown AC$. tangens compl. in differentiam sinus a radio, aequatur radio in differentiam tangentis complementi a sinu complementi.

Cumque posterior terminus aequationis det summam quadrabilem, erit quadrabilis prior quoque. Ergo

Coroll. 1. Ductus tangentium complementi in differentias sinuum a radio quadrari potest.

Coroll. 2. Ergo ductus tangentium complementi in sinus quadrari potest.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia: AHR et AEH. ergo $\dfrac{HR}{AH} = \dfrac{AR}{AE} = \dfrac{AH}{HE}$. Est autem

$ER = CD$. et $AR = AD$. et $\bigtriangledown^{\mathrm{lum}}$ $EAR =^{\mathrm{le}}$ et simile $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ ADC.

1 f. seu ... complementi *erg.* *L* 14 Seu | momentum radiorum, demto momento sinuum *gestr.* | ga *L* 22 f. potest. | Nam ductus tangentium complementi in differentias secantium complementi a radio qui quadrari potest, aequatur ductui tangentium complementi in secantes complementi, demto radio in tangentes complementi, qui radii ductus seu cylinder, etiam quadrari potest. Ergo et residuum seu ductus tangentium complementi in *(1)* secantes *(2)* sinus complementi. *gestr.* | *L*

24 f. Est ... $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ ADC. *erg.* *L*

P r o p. 43. $HR \frown HE = AH\square$. seu secans est media proportionalis inter tangentem arcus dati, et tangentem arcus dati auctum tangente arcus complementi.

Atque ideo quadrata secantium aequantur quadratis tangentium, ductu tangentium in tangentes complementi auctos. Confer cum prop. 45.

At sup. prop. 11. ostensum est quadrata secantium, demto cylindro hyperbolico sub radio aequari quadratis tangentium, demto ductu tangentium in tangentes arcus dimidii, prop. 46. coroll. 2., seu demto cylindro hyperbolico addito quadrato radii in altitudinem. Ergo

C o r o l l. 1. quadrata secantium = quadratis tangentium quadrato radii in altitudinem, seu a vertice circuli abscissam, auctis.

Hoc ita posito patet tangentem arcus dati in tangentem arcus complementi, aequari quadrato radii, quod iam habuimus prop. 33.

P r o p. 44. $HR \frown AE = AH \frown AR$. compositum ex tangente et tangente arcus complementi in radium, aequatur secanti in secantem complementi.

Hoc facile conciliabis cum prop. 36. et 28.

$AR \frown HE = AE \frown AH$. habuimus, vide prop. 32.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AHR et ADC. ergo $\dfrac{HR}{AD} = \dfrac{AR}{DC} = \dfrac{AH}{AC}$.

P r o p. 45. $HR \frown DC = AD \frown AR = AD\square$. tangens tangente complementi auctus in tangentem complementi, prop. 33. 37., aequatur quadrato secantis complementi. Seu secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi, et tangentem complementi, tangente auctum, confer cum prop. 43.

---

1 *Zu* media proportionalis: adde *Inass.* prop. 41.

19 *Zu* aequatur: quadrato radii in arcum, *I n a s s i g n a b.* p r o p. 19.

7 addito *(1)* cubo *(2)* quadrato *L* 12 f. prop. 33. | *Absatz:* $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AER et AEH. ergo $\dfrac{\text{AR}}{\text{AH}} = \dfrac{\text{ER} = \text{CD}}{\text{AE}} = \dfrac{\text{AE}}{\text{HE}}$. Triangulum AER aequale et simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ ADC. *Absatz:* P r o p. 44. CD $\frown$ HE = AE$\square$. sed hoc iam habuimus, prop. 33. et passim. *gestr.* | P r o p. 44. *L*

---

19 aequatur: Der Bezug der zugehörigen Anmerkung auf N. 27 enthält einen Irrtum.

Ergo quadrata secantium complementi, excedunt quadrata tangentium complementi, ductu tangentium complementi in tangentes.

C o r o l l. Ergo differentia inter quadratum tangentis et secantis, aequatur differentiae inter quadratum tangentis complementi, et quadratum secantis complementi. Eaque differentia est q u a d r a b i l i s per prop. 43. coroll. 1.

$HR \frown AC = AD \frown AH$. haec iam ex prop. 28. et 35.

$AR \frown AC = DC \frown AH$. habuimus prop. 31.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia HKE et EFG. $\dfrac{HE}{EF} = \dfrac{KE}{EG} = \dfrac{KH}{GF}$.

P r o p. 46. $HE \frown EG = KE \frown EF$. tangens in differentiam inter sinum et radium, aequatur tangenti arcus semicomplementi in sinum arcus dati $= AE \frown GF$, adde prop. 63.

Seu cylinder conchoeidalis sub radio, demto, prop. 14. 20. 27., ductu spatii conchoeidalis in circulare (qui demto cylindro hyperbolico quadrabilis est, p r o p. 20.) aequatur ductui tangentium semicomplementi in sinus seu portionem circularem.

Porro ductus secantium complementi (qui sunt $\dfrac{a^2}{b}$. posito a radio, b sinu) in tangentes semicomplementi (e) aequatur cylindro tangentium complementi, demto cylindro tangentium semicomplementi per prop. 38. et 12. Quod esto x^2a. erit $\dfrac{a^2e}{b} = x^2$.

---

3 *Zum Korollar am Rande.* NB.

2 f. tangentes. | At ductus tangentium comp. *gestr.* | C o r o l l. *L*

---

14 seu: Dieser Schluss ist unzulässig. 18 erit: Auch dieser Schluss ist unzulässig; dennoch bleibt das Folgende im Wesentlichen richtig.

Quaeramus rationem $\frac{a^2e}{b}$ ad $\frac{be}{1}$. ea erit $\frac{a^2}{b^2}$. ergo si ductus secantium complementi in tangentes semicomplementi sit ut a^2. ductus circularis erit ut b^2. Et vicissim

$$\text{ductus}\ \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.}}{\text{sin. in tang. semicompl.}} = \frac{a^2}{b^2}.$$

Ergo

$$\frac{\text{sin. in tang. semicompl.}}{b^2} = \frac{\text{secant. compl. } \frac{a^2}{b}\text{. in tang. semicompl.}}{a^2}.$$

atque ideo

$$\text{sin. in tang. semicompl.} = \frac{\text{secant. compl. in tang. semicompl.} \frown b^2}{a^2}.$$

Ergo

$$[\text{ductus}]\ \frac{\text{tang. complementi} - \text{tang. semicomplementi}}{a}\ \text{in}\ b^2$$

$$= \text{cylind. conchoeid.} + \text{cyl. hyp.} - \text{aliquid quadrabile}.$$

C o r o l l. Dimensio d u c t u s c i r c u l a r i s i n f i g u r a m t a n g e n t i u m s e m i c o m p l e m e n t i supponit dimensionem conchoeidis et hyperbolae.

P r o p. 46. n u m. 2: $HE \frown GF = KH \frown EF$. tangens c in differentiam sinus complementi f et tangentis semicomplementi e, aequatur tangenti semicomplementi e in differentiam secantis d et sinus complementi f. Ergo $cf - ce = ed - ef$. ergo $\frac{cf}{e} - c = d - f$.

C o r o l l. 1. Ergo summa quartarum proportionalium, ad has tres, tangentem semicomplementi, tangentem, sinum complementi, aequatur spatio hyperbolico demto aliquo quadrabili.

C o r o l l. 2. Aliter $cf + ef = ed + ce$. Seu momenta tangentium ex basi (ex q. circ. 19.), addita momentis, prop. 26., tangentium semicomplementi (quadrab.),

---

1 *Unter* ad*:* ×

1 $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$. seu si ergo si *L ändert Hrsg.* 8 f. Ergo | cylinder *gestr., ändert Hrsg.* | *L*

aequantur, prop. 25., secantibus in tangentes semicomplementi, additis, prop. 43., tangentibus in tangentes semicomplementi. Prop. 25. supra.

P r o p. 47. $HF \frown EN = AC\ (= AE) \frown AE$ seu $AE\square$. sive momenta tangentium et tangentium semicomplementi simul ex basi quadrantis, aequantur quadratis radii. Ergo sunt q u a d r a b i l i a .

C o r o l l. 1. Hinc sequitur summam ex tangente et tangente dimidio complementi, aequari secanti, seu $HF = AH$. quia $AH = \dfrac{AE\square}{EN}$. et $HF = \dfrac{AE\square}{EN}$.

C o r o l l. 2. Hinc differentiae inter conchoeidem et hyperbolam, aequatur tangentibus semicomplementi, de quibus 35. *Inass.*

C o r o l l. 3. Item tangens arcus dimidii, auctus tangente complementi, aequalis secanti complementi. Item $HQ = HE$.

C o r o l l. 4. Momenta tangentium semicomplementi ex basi q u a d r a b i l i a , adde prop. 61.

C o r o l l. 5. Ergo iunct. p r o p. 25 *Duct.* hyperb. in tang. semicompl. q u a d r a b i l .

P r o p. 48. $AD \frown EF = DF \frown FQ$ $(FQ = AE)$ ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ADF. ergo secans (complementi) in tangentem arcus dimidii (complementi) aequalis radio in differentiam tangentis (compl.), et tangentis arcus dimidii (compl.).

C o r o l l. Hinc haberi possunt et tangentes arcus dimidii in tang. arcus dimid. compl. si a tang. arc. dimid. in sec. auferatur tang. arc. dimid. in tang. quia sec. = tang. + tang. compl. arc. dimid.

R e p e t i t i o p r o p. 1 4 :

$DE\square = DF \frown DG$. seu quadratum differentiae secantis et radii, est aequale dif-

---

6 Coroll. 1. ita brevius demonstres: in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AHF altitudo AE = altitudini FQ. ergo basis HF = basi AH.

12 *Über* q u a d r a b i l i a *:* male, ex q. circ.

14 *Zu* C o r o l l. 5.*:* Error

8 hyperbolam, | q u a d r a r i potest *gestr.* | aequatur *L* 16 | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AEF et EST *gestr.* | P r o p. 48. *L*

ferentiae inter tangentem et tangentem arcus dimidii, ductae in differentiam inter tangentem et sinum.

Esto secans d. radius a. tangens c. tangens arcus dimidii i. sinus b. fiet:

$$d^2 + a^2 - \cancel{2}da = c - i, \frown c - b. = \cancel{c^2} + bi - ci - bc.$$

prop. 11. $\cancel{c^2} + \underbrace{a^2}_{\cancel{2a^2}}$ prop. 16. $\cancel{a^2} - af$ prop.13. $- \cancel{da} + \cancel{a^2}$

$$da = bc + af.$$

Adde prop. 20. ubi idem a l i t e r demonstratum, insigni calculi confirmatione.

Redibimus ad $\bigtriangledown^{\rm la}$ similia intermissa, de quibus ante prop. 46.

$\dfrac{HE}{EF} = \dfrac{KE}{EG} = \dfrac{KH}{GF}$. habuimus $HE \frown EG = KE \frown EF$, restant:

P r o p. 49. $HE \frown GF = KH \frown EF$. tangens in differentiam tangentis semicomplementi et sinus complementi, aequatur differentiae secantis et sinus complementi in tangentem semicomplementi.

$$cf - ce = de - fe.$$

cf: ex. q. circ. duct. 19. $= ab$; de: quadrabil. Prop. 47. coroll. 4.; fe: quadrabil. Prop. 47. coroll. 3.

C o r o l l. 1. Ergo ce. seu tangentes semicomplementi in tangentes, vel tangentes complementi in tangentes arcus dimidii pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

C o r o l l. 2. Cumque sit $c + e = d$. erit $d^2 = c^2 + \underbrace{e^2 + 2ce}_{a^2 \text{ per prop. 11.}}$.

Ideoque e^2 seu summa quadratorum tangentium semicomplementi, vel quadrata

17 *Zu de:* Error

4 $-$ bc. | Iam $d^2 = c^2 + a^2$. p r o p. 11. *streicht Hrsg.* | *L* 22 ex *(1)* <u>da</u> seu cylindro hyperbolico, vel quadratura hyperbolae *(2)* quadratura *L*

tangentium arcus dimidii ad basin pendent ex quadratura circuli, conchoeid. et hyp.

P r o p. 50. $KE \frown GF = KH \frown EG$. seu sinus in differentiam sinus complementi, et tangentis semicomplementi, aequantur differentiae inter secantem et sinum complementi in differentiam sinus et radii.

$\cancel{bf}$	$-$	be	$= d - f \frown a - b = da + \cancel{fb}$	$-$	db	$-$	$fa.$
/\		/\			/\		/\
quadrab.		ex q. circ. et hyp.			q. circ. et hyp.		quadrab.
		46.			vel q. conchoeid.		

P r o p. 51. $NI \frown EF = ZF(EG) \frown EN$. ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ ENF in quo posita basi EN altitudo est ZF, posita basi EF altitudo est NI.

Investiganda iam quantitas ipsius NI. Patet NI parallelam AE. Ergo $\dfrac{NI}{AE\,\text{rad.}} = \dfrac{AR\,\text{sec. compl.} - AN\,\text{sinus}}{AR = AD\,\text{secans compl.}}$.

Literas ut ante substituamus: $\dfrac{NI}{a} = \dfrac{g-b}{g}$. seu $NI = \dfrac{ga - ba}{g}$. vel $a - \dfrac{ba}{g}$. Atqui $g = \dfrac{a^2}{b}$. Ergo $NI = a - \dfrac{ba}{\dfrac{a^2}{b}} = a - \dfrac{b^2a}{a^2} = \underline{\underline{a - \dfrac{b^2}{a}}}$.

Ergo cylinder tangentium semicomplementi, demtis rectangulis ex tangentibus semicomplementi, et applicatis semiparabolae circularis axi parallelis, aequatur momentis ex basi differentiarum inter sinum et radium, utique quadrabilibus.

Nam posito sinu b. et radio a. erit $\dfrac{b^2}{a}$ applicata parabolae circularis axi parallela, quia sinus est media proportionalis inter applicatam axi parallelam semiparabolae circularis, et radium. Semiparabola autem circularis est, cuius altitudo et basis aequales, adde *Inassign.* 41.

Recta EI ex his facile haberi potest est enim $Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. adde prop. *Inass.* 42. 43.

1 f. quadratura *(1)* hyperbolae *(2)* circuli |, conchoeid. et hyp. *erg.* | L

P r o p. 52. $AC \frown DF = AD \frown EF$. cylinder tangentium [seu] conchoeid. (complementi), demto cylindro tang. semiarcus seu conchoeid. fals. dimidiatae (complementi) = secans (compl.) in tang. semiarcus (compl.), seu tangens + tangens semiarcus in tang. semiarcus, seu tangens in tang. semiarcus + quadrat. tang. semiarcus.

C o r o l l. 1. Ergo quadrata tangentium semiarcus pendent ex quadratura conchoeidis et hyperbolae.

C o r o l l. 2. Cylinder tangentium complementi (quadrabilis) demto cylindro tangentium semicomplementi aequatur tangentibus complementi in tangentes semicomplementi (id est cylindro secantium complementi, demto cylindro radii) additis quadratis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ. prop. 49.).

P r o p. 53. $C\alpha = EN$. quia in $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ AEC. $AC \frown EN = AE (= AC) \frown C\alpha$.

P r o p. 54. $A\alpha = AN$. Nam $\bigtriangledown ENA$ simile $\bigtriangledown^{\mathrm{lo}}$ $A\alpha C$. quia ang. AEN = angulo $AC\alpha$. duo autem latera aequalia sunt $EN = C\alpha$. et $AC = AE$. ergo et tertia seu $A\alpha = AN$. ergo $E\alpha = NC$ vel EG.

P r o p. 55. $AM \frown EC = AC \frown EN$. Chorda arcus in sinum complementi arcus dimidii, aequatur cylindro portionis circularis sinuum arcus dati. Vel:

Chorda arcus complementi ad quadrantem (non ad semicirculum) in sinum arcus dati = cylindro sinuum complementi (q u a d r a b i l i).

P r o p. 56. $AD \frown C\alpha = AC \frown CD$. Momentum secantium complementi = cylindro tangentium complementi quadrabili, adde prop. 18.

---

11 *Zu* pendent: *Darüber:* Error
Dahinter: (imo ex q. circ. et dimens. cyl. tang. semicompl.)

1 seu *erg. Hrsg.* 17 portionis circularis *erg. L*

---

3 f. Anstelle von tangens + tangens semiarcus müsste es tangens + tangens semicomplementi heißen. Das Versehen wirkt sich bis zum Ende von Satz 52 aus. 17 Vel: Anstelle des Sinus des gegebenen Bogens hätte Leibniz den Kosinus des halben Komplementärbogens verwenden müssen.

P r o p. 57. $EC \frown MF = EF \frown E\alpha$, vel $FC \frown EG$. Chorda arcus in differentiam secantis arcus dimidii a sinu complementi arcus dimidii = tangenti arcus dimidii in sinum versum arcus dati.

P r o p. 60. $EF \frown EK = KQ \frown AE$. Tangens semiarcus in sinum complementi, seu momentum tangentium semiarcus = radio in differentiam sinus, et tang. semiarcus.

C o r o l l. Tangens semicomplementi in sinum = radio in sinus complementi, demto cylindro tang. semicompl.

At per prop. 46. iunct 20. cylinder conchoeid. − cyl. hyp. + rad. in sinus compl. = tang. [semicompl.] in sin. Ergo res eodem redit.

P r o p. 61. $EF \frown EN = NC$ (vel EG) $\frown AE$. Momentum tang. [semicompl.] = radio in diff. rad. et sinus, adde prop. 47. coroll. 4. Hinc et tang. [semicompl.] in sinus q u a d r a b.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: AKE et EZF. Nam ang. KAE = angulo EFZ.

$$\frac{AE}{EF} = \frac{AK = EN}{ZF = EG} = \frac{KE}{EZ = GF}.$$

P r o p. 62. $AE \frown EG = EN \frown EF$. momenta tangentium semicomplementi = cylindro trilinei concavi circularis, seu radii demto sinu.

C o r o l l. Tangentes arcus dimidii seu conchoeidis falsae dimidiatae applicatae, in sinus = radio in sinus versos arcus dati seu quadrabiles.

P r o p. 63. $AE \frown GF = KE \frown EF$. cylinder radii in sinus complementi (q u a d r a - b i l i s) demto cylindro radii in tang. semicompl. (q u a d r a b.) = ductui sinuum in tangentes semicomplementi.

Is ergo ductus quadrabilis. Hoc prorsus coincidit prop. 46.

C o r o l l. Hinc radius in sinus, demto radio in tang. fals. dimid. (cyl. segm. dupl.) = momento tang. fals. dimid. ex basi.

P r o p. 64. $EN \frown GF = KE \frown EG$. seu quadrata sinuum complementi (portiones pyramidis a basi abscissae), demtis momentis tangentium semicomplementi (quae pendent ex q. circ.) = ductui sinuum in sinus versos arcuum complementi, seu in differentias suas a radio seu cylindro sinuum, demtis sinuum quadratis.

C o r o l l. vel sinus in seipsum (quadrab.), demto sinu in tang. arcus dimid. (qua-

4 *Zählung springt L* 10–12 compl. *L ändert Hrsg. dreimal*

drab.) = sinubus versis (seu differentiis sinuum complementi et radiorum) in sinus complementi, seu momento sinuum versorum.

$\bigtriangledown^{la}$ similia $C\alpha D$ et AEH. $\dfrac{CD}{AH} = \dfrac{\alpha D}{AE} = \dfrac{C\alpha = EN}{HE}$.

Prop. 65. $CD \frown AE = AH \frown [\alpha D]$. cylinder tangentium complementi (quadrabilium) = ductui secantium in secantes complementi (cyl. tang. compl. + cyl. tang.) demtis secantibus in sinus (cyl. conch.).

Prop. 66. $CD \frown HE = AH \frown EN$. seu tangentes in tangentes complementi = momento secantium ex basi, quadrabili, adde. 33. 43.

Prop. 67. $\alpha D \frown HE = EN \frown AE$. secantes complementi in tangentes, demtis sinubus in tangentes = quadrabiles, seu aequales sinubus complementi in radium, adde *Duct.* 20.

Porro per prop. 32. sec. compl. in tang. = rad. in sec. et per prop. 20. sin. in tang. = rad. in sec. − rad. in EN.

$\bigtriangledown^{la}$ similia $C\alpha D$ et AKE. $\dfrac{CD}{AE} = \dfrac{\alpha D}{AK = EN} = \dfrac{C\alpha = EN}{KE}$.

Prop. 68. $CD \frown EN = \alpha D \frown AE$. Momenta ex basi tangentium complementi = cylindro secantium complementi (dupl. sect.) − cyl. sin., adde prop. 73.

Prop. 69. $CD \frown KE = AE \frown EN$. Tangentes complementi in sinus (momenta ex basi sua, si basi quadr. applicentur), adde 42. 61., quadrabiles = quadrilinei cylindro.

Prop. 70. $\alpha D \frown KE = EN\,\square$. Sinus complementi est media proportionalis inter sinum et differentiam secantis complementi a sinu.

Sive secans compl. in sin., demtis quadratis sinuum = quadratis sinuum compl. Ergo $[\alpha D]\frown KE$ quadrabiles, adde *Duct.* 29.

$\bigtriangledown^{la}$ similia: ACD et $C\alpha D$. $\dfrac{AD}{DC} = \dfrac{DC}{D\alpha} = \dfrac{AC}{C\alpha = EN}$.

4 AD *L ändert Hrsg.* 5 ductui *(1)* tangentium complementi in secantes complementi | quadrabilis *erg.* |. Ergo *(2)* secantium *L* 22 AD *L ändert Hrsg.*

22 adde: Der Verweis bezieht sich auf die Verschreibung AD anstelle von αD.

P r o p. 71. $AD \frown D\alpha = DC\,\square$ (45.) quadrata secantium complementi, demtis secantibus complementi in sinus (quadrabilibus) = quadratis tang. compl., adde *Duct.* 11. 74.

P r o p. 72. $AD \frown EN = AC \frown DC$. seu momentum ex basi secantium complementi (quadrabile, *Inassign.* 43. coroll. 1. *Duct.* 28.) = cylindro tangentium compl., adde *Duct.* 18. 23. 50.

P r o p. 73. $DC \frown EN = \alpha D \frown AC$. $(AC = AE)$ habuimus prop. 68.

$\bigtriangledown$[la] s i m i l i a : $C\alpha D$ et EGD. $\dfrac{CD}{DE} = \dfrac{D\alpha}{DG} = \dfrac{C\alpha = EN}{EG}$.

P r o p. 74. $CD \frown DG = DE \frown D\alpha$. Tangens compl. in seipsum demto tang. compl. l moment. ex basi = differentiae secantis complementi g et radii a in differentiam secantis complementi et sinus b, seu $g - a, \frown\, g - b = g^2 + ab - ga - gb$. seu quadrata secantium complementi aucta cylindro sinuum, minutaque sec. compl. [et sec. compl.] in sin.

Iam $g^2 - gb = l^2$ (per prop. 71. si l = tang. compl.). ideo $l^2 + ab - ga = l^2 - lf$. Ergo $ga - ab = lf$. concordat 68.

P r o p. 75. $CD \frown EG = \overset{EN}{C\alpha} \frown DE$. $la - lb = gf - af$. Et quia per prop. 72. $la = gf$. ideo $lb = af$. tangens compl. in sinum = radio in sin. compl.

P r o p. 76. $D\alpha \frown EG = DG \frown EN$. secans compl. demto sinu, in radium demto sinu = tang. compl. in sin. compl., demto sin. compl. in sin. compl. $g - b \frown a - b$. seu

$$\cancel{ga} + b^2 - gb - \cancel{ba} = \overset{lf}{\underset{\cancel{ga} - \cancel{ab}}{/\backslash}} - f^2.$$ Ergo $gb - b^2 = f^2$.

13 et sec. compl. *erg. Hrsg.*

5 *Inassign.* 43.: Der Verweis bezieht sich auf die gestrichene Fassung des Satzes, s. N. 27 S. 479 Z. 32–36.

P r o p. 77. Ex f i g. 3. $HG \frown DS\ (= AC) = DH \frown D\lambda$. ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ HGD.

id est: differentiae inter tangentem veram et falsam momentum ex vertice, aequatur differentiae inter secantem et radium, in tangentem semiarcus minutum differentia inter sinum et tangentem semiarcus, seu

$$c-2i, \frown a-f = d-a, , \frown \underbrace{i-, b-i}_{2i-b}. \qquad \text{seu}$$

$$\begin{array}{ccccccccccccccc}
\cancel{ca} & - & cf & + & 2if & - & \cancel{2ia} & = & 2di & + & \cancel{ab} & - & db & - & \cancel{2ia}. \\
 & & /\backslash & & /\backslash & & & & /\backslash & & // & & /\backslash & & \\
 & & \cancel{ab} & & \cancel{2ab}-\cancel{2ai} & & & & \cancel{2ca}-\cancel{2ai} & & & & \cancel{ca} & & \\
 & & & & //\quad /// & & & & ////\quad /// & & & & //// & & \\
 & & \text{prop. 19.} & & \text{prop. 7.} & & & & \text{[prop. 12]} & & & & \text{[prop. 18.23.50.72. } \textit{Duct.}\text{]} & &
\end{array}$$

Manifestum est omnia exacte convenire.

In eadem fig. 3. $\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a , quanquam non orthogonia: HGD et DBZ. Nam ang. GDH = ang. BDZ. et ang. GHD = angulo DBZ. etc. Ergo

$$\frac{DB = \text{rad.}\, AB}{HD} = \frac{BZ = AI}{[GH]} = \frac{GD}{DZ}.$$

$AB \frown [GH] = AI \frown HD$. Radius in differentiam tangentis et tangentis falsae, = tangenti falsae dimidiae in differentiam secantis et radii.

5+7 seu *(1)*

$$\begin{array}{cccccccccccccc}
ca & + & 2if & - & cf & - & \cancel{2ia} & = & 2di & + & \cancel{ab} & - & db & - \cancel{2ia}. \\
 & & /\backslash & & & & & & /\backslash & & & & /\backslash & \\
 & & \cancel{ab} & & & & & & |\,2, \underset{///}{\cancel{ca}} - ai\ \textit{gestr.}\,| & & & & \underset{///}{\cancel{ca}} & \\
 & & \text{prop. 7. Duct.} & & & & & & \text{prop. 12} & & |\ \text{prop. 18.23.50.72. Duct}\ | & & & \\
\end{array}$$

$$\underbrace{\underset{//}{\cancel{ca}} \quad - \quad cf}_{\underset{///}{\cancel{ca}} \quad - \quad ab} \qquad\qquad \underset{//}{\cancel{2}}ca - 2ai \qquad \textit{nicht gestr.}$$

$$\underset{///}{\cancel{ca}} - 2ai$$

prop. 19. et 24. Duct.

Ergo cf = 2ia. | cf = ab. prop. 19. *nicht gestr.* | Ergo ab = 2ai, quod absurdum, error ergo in calculo. *(2)* ~~ca~~ *L* 11 prop. 12 *und* prop. 18.23.50.72. Duct. *erg. Hrsg.* 15 GN *L ändert Hrsg.* 16 GN *L ändert Hrsg.*

---

15 $\frac{GD}{DZ}$: Es müsste umgekehrt $\frac{DZ}{GD}$ heißen. Dies wirkt sich auf Prop. 78 aus, welche Leibniz konsequent mit dem falschen Ansatz durchrechnet.

$ac - 2ai = \qquad id \qquad - ai.$ Patet ex calculo.

$/\backslash$

$ac - ai.$ prop. 12.

P r o p. 78. $AB \frown DZ = GD \frown HD.$ seu applicata parabolae inversa (chorda suppl.) demto secante arcus dimidii, in radium (haec quadrabilia)

$=$ 2 sec. fals. $-$ chord. suppl. $\frown$ sec. $-$ rad.

$=$ 2 sec. fals. $\frown$ sec. $+$ chord. suppl.$\frown$ rad.

$-$ 2 sec. fals. $\frown$ rad. $-$ chord. suppl. $\frown$sec.

Et quia chord. suppl. $\frown$ rad., et 2 sec. fals.$\frown$ rad. q u a d r a b i l i a , ideo 2 sec. fals. $\frown$ sec. $-$ chord. suppl. $\frown$ sec., q u a d r a b i l e .

In fig. 2. ex puncto O. termino sinus complementi AO. ducatur in radium AB perpendicularis $O\omega$. manifestum est:

$$\frac{O\omega}{KE\,\text{sinus}} = \frac{AO\,\text{sin compl.} \;= AK}{AE\,\text{rad.}}.\ \text{Ergo } O\omega = \frac{\text{sin.} \frown \text{sin. compl.}}{\text{rad.}}.$$

P r o p. 79. $O\omega \frown AE = AO \frown KE.$ cylinder omnium $O\omega =$ momento sinuum, ideoque q u a d r a b i l i s est summa omnium $O\omega$.

P r o p. 80. Porro $\dfrac{O\omega}{BY = HE\,\text{tang.}} = \dfrac{AO = AK}{AY = AH\,\text{sec.}}.$ Ergo $O\omega \frown AH = HE \frown AK.$

seu ductus hyperbolicus in $O\omega =$ momento tangentium, pendet ergo ex q. circ.

27. TRIGONOMETRIA INASSIGNABILIUM

[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 242–245. 2 Bog. 2°. 8 S. — Titel fehlt, Zwischentitel mit Bogenzählung: (II) I n a s s i g n a b i l i a am Beginn des 2. Bogens (über S. 481 Z. 23). Figura secunda nicht vorhanden (Vorlage die entsprechende Figur aus N. 21).
Cc 2, Nr. 696

Datierungsgründe: s. N. 26.

[Trigonometria inassignabilium]

[*Teil 1*]

Fig. 2.

$\underline{ST}$ pars regulae, seu altitudinis, $\underline{ES}$ pars basis, $\underline{ET}$ pars arcus.

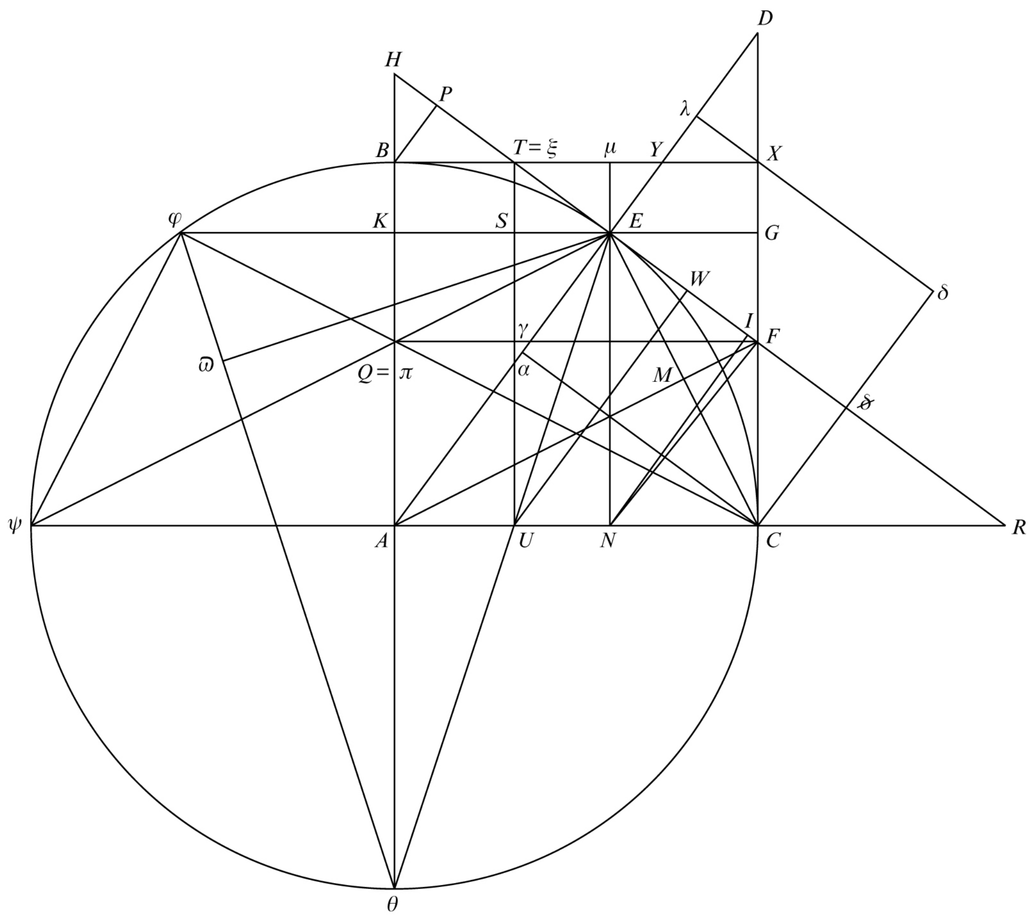
[A l t i t u d i n e m autem voco latus orthogonii divisum in partes aequales infinitas, per ordinatim applicatas, b a s i n latus alterum.

Porro quoties summam linearum nomino, eas altitudini ordinatim applicatas intelligi debet. Hinc sinus, tangentes, secantes etc. c o m p l e m e n t i in circulo sunt, qui scilicet sinus, tangentes etc. appellari deberent, si id quod nunc basis est, altitudo esset, seu cum non altitudini, sed basi applicantur.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et AEH. Ergo $\dfrac{AH}{ET} = \dfrac{AE}{ES} = \dfrac{HE}{ST}$.]

P r o p. 1. $AH \frown ES = AE \frown ET$. secans in portionem basis = radio in portionem arcus. Seu figura secantium basi applicatarum, aequatur superficei cylindricae sub arcu et radio, adde prop. 9.

9 Trigonometria inassignabilium *erg. Hrsg. nach N. 26 S. 448 Z. 19.* 11–19 Fig.2. | ST ... arcus. *erg.* | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ... $\dfrac{\text{HE}}{\text{ST}}$. *(1)* AH $\frown$ ES = ET $\frown$ AE. secans in portionem *(a)* altitudinis = tangenti in partem basis. *(b)* basis = radio in partem altitudinis. Ideo summa secantium complementi, scilicet in *(aa)* sagittam *(bb)* sinum arcus altitudini parallelum, seu altitudinem trilinei orthogonii aequatur radio in basin. *(2)* A l t i t u d i n e m ... esset *(a)* . Habemus ergo iam q u a d r a t u r a m f i g u r a e s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i. *(b)* , seu ... applicantur. *L, Reihenfolge ändert Hrsg.*



[*Fig. 1*]

1 *Figur erg. Hrsg. nach Text u. N. 21.*

C o r o l l. 1. Ergo summa s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i, aequatur radio in arcum, seu s u p e r f i c i e i c y l i n d r i c a e sub arcu et radio.

C o r o l l. 2. Ergo figura secantium basi applicatarum aequatur summae secantium complementi.

P r o p. 2. $AH \frown ST = ET \frown HE$. secans in portionem altitudinis = tangenti in portionem arcus. Ideoque superficies cylindrica truncata tangentium arcui insistentium, aequatur s p a t i o h y p e r b o l i c o, adde prop. 11.

P r o p. 3. $AE \frown ST = HE \frown ES$. rectangulum sub radio et basi aequatur s u m m a e t a n g e n t i u m c o m p l e m e n t i, prop. 23. Huius ergo figurae datur q u a d r a t u r a.

C o r o l l. 1. Vel rectangulum sub radio et altitudine, aequatur tangentibus basi applicatis.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et AKE. Ergo: $\dfrac{AE}{ET} = \dfrac{AK}{ES} = \dfrac{KE}{ST}$.

P r o p. 4. $AE \frown ES = AK \frown ET$. rectangulum sub radio et basi (altitudine) = momento arcus ex radio basi (altitudini) parallelo.

C o r o l l. 1. Ergo momentum ex radio basi parallelo arcus aequale summae tangentium complementi.

C o r o l l. 2. Momentum arcus ex radio altitudini parallelo = summae tangentium ad basin.

P r o p. 5. $AE \frown ST = KE \frown ET$. Radius in altitudinem = summae sinuum in arcum, seu momento arcus ex altitudine, seu superficiei cylindricae truncatae sinuum arcui impositorum, add. prop. 7. et prop. 3 coroll. 1.

P r o p. 6. $AK \frown ST = KE \frown ES$. Momentum altitudinis ex basi aequatur momento basis ex altitudine, in trilineo orthogonio circulari, cuius altitudo pars radii, basis radio parallela.

Nihil autem hic refert, quod eius latus pro radio sumas quod pro basi[;] aliter enunties: sinus ad basin aequantur sinubus complementi ad altitudinem[,] adde

15 f. parallelo. *(1)* Coroll. 1. Hinc datur quadratura momenti omnis trilinei orthogonii circularis, tam ex altitudine quam ex basi. *(2)* C o r o l l. 1. *L*

8 P r o p. 3.: Leibniz dualisiert die Formel zunächst; die direkte Umsetzung erfolgt im Korollar.

prop. 12. 36[a]. prop. 36[b]. coroll. 4.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et EKH. $\dfrac{HE}{ET} = \dfrac{KE}{ES} = \dfrac{HK}{ST}$.

Prop. 7. $HE \frown ES = KE \frown ET$. figura tangentium basi applicatarum, aequatur momento arcus ex altitudine, adde prop. 3. coroll. 1. + prop. 5.

Prop. 8. $HE \frown ST = HK \frown ET$. Summa tangentium (seu spatium conchoeidale, exemta quod postea semper intelligi volo portione circuli generantis) aequatur secantibus in arcum, demto momento arcus ex basi, adde prop. 14. et 24.

Prop. 9. $KE \frown ST = HK \frown ES$. Summa sinuum, seu portio circularis, aequatur secantibus in basin, demtis sinubus complementi in basin.

At sinus complementi in basin aequantur toti figurae $ABEN$, vid. prop. 16., radio AB. arcu BE. sinu complementi EN. portione basis AN. comprehensae. Hinc iuncta prop. 1. duplex calculi fundamentum, alterum examini alterius.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et BPH. $\dfrac{HB}{ET} = \dfrac{BP = BK}{ES} = \dfrac{HP}{ST}$.

Prop. 10. $HB \frown ES = BK \frown ET$. sinus versi BK in arcum (id est segmentum arcus duplum) aequantur secantibus in basin (id est, prop. 1., arcui in radium [=] sectori duplo) demto radio in sinum (quadrabili).

Prop. 11. $HB \frown ST = HP \frown ET$. spatium hyperbolicum, demto rectangulo radii in altitudinem (quadrabili), aequatur tangenti in arcum (spatio ipsi hyperbolico prop. 2.) demto momento arcus ex basi (= rectangulo radii in altitudinem prop. 4.)

Prop. 12. $BK \frown ST = HP \frown ES$. [summa sinuum versorum in altitudinem (quadrabilis)] aequatur tangentibus in basin (quadrabilibus prop. 7.) demtis sinubus in basin. Seu sinus compl. in altitud. = sinubus in basin, vid. prop. 43. et 45.

Coroll. Ergo habetur quadratura summae sinuum in basin, add. prop. 6. [21]. 23. 36[a,b].

15 BK | seu altitudines *gestr.* | in *L* 17 | = *erg. Hrsg.* | sectori duplo *erg. L* 17 radio in *(1)* basin *(2)* sinum *L* 22 f. HP $\frown$ ES. *(1)* summa sinuum versorum (quadrabilis) demt *(2)* Radius in altitudinem demta summa sinuum versorum (quadrabili) *L ändert Hrsg.* 24 Seu ... et 45. *erg. L* 26 prop. 6. 20. 23. 36. *L ändert Hrsg.*

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et FQH. Ergo $\dfrac{FH}{ET} = \dfrac{FQ}{ES} = \dfrac{HQ}{ST}$.

Prop. 13. $FH \frown ES = FQ \frown ET$. Tangentes in basin, et tangentes semicomplementi in basin, adde prop. 27 = radio in arcum,

quod idem est ac si diceres,

Coroll. 1. summam tangentium arcus dimidii, addita summa tangentium complementi (quae quadrabilis est), aequari arcui in radium, seu sectori cuidam circulari.

Coroll. 2. Ergo summa tangentium arcuum dimidiorum segmento circulari duplicato comparari potest, adde prop. 15.

Prop. 14. $FH \frown ST = HQ \frown ET$. spatium conchoeidale, addita summa tangentium semicomplementi, seu spatium hyperbolicum, aequatur secantibus in arcum (= prop. 8. spatio conchoeidali, addito momento arcus ex basi, adde prop. 24.) demtis tangentibus semicomplementi in arcum, seu aequatur tangentibus in arcum.

Coroll. Ergo summa tangentium semicomplementi, additis tangentibus semicomplementi in arcum, aequatur momento arcus ex basi, ac proinde quadrari possunt, adde prop. 28. et 42.

Prop. 15. $FQ \frown ST = HQ \frown ES$. Radius in altitudinem = summae secantium in basin (= radio in arcum), demto tangente semicomplementi in basin, add. prop. 13. et 29.

TS producatur usque ad basin in U. et iungatur EU. et ex U. ducatur perpendicularis in TE productam si opus est, quae erit UW. Manifestum est in triangulo TEU. posita basi TU. altitudinem esse ES, et posita basi ET. altitudinem esse UW. Basin autem UE poni nil necesse est, cum UE non differat, nisi parte inassignabili a TU.
Porro UW autem sic investigabimus: cum $\bigtriangledown^{\text{la}}$ AER et UWR sint similia erit

$$\frac{WU}{AE} = \frac{UR = AR - AU.\,(AU = KE\,\text{sinus})}{AR\,(= AD.\,\text{secans compl.})}.\ \text{ergo}\ WU = \frac{AD - KE, \frown AE}{AD}.$$

Surget aequatio haec, posita etiam $TU = KA = EN$. sinu complementi.

11 seu spatium hyperbolicum *erg. L* 19 (= radio in arcum) *erg. L*

17 adde prop. 28. et 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Fassung der prop. 42.

$$\frac{\overset{(WU)}{AD - KE \frown AE}}{AD} \frown TE = ES \frown EN.$$

Iam sinus complementi in basin aequantur areae quadrilinei $ABEN$. vid. prop. 9. Et $AD - KE \frown AE, \frown TE = AD \frown ES \frown EN$. ergo

P r o p. 16. ductus figurae secantium in basin, in figuram ipsam $ABEN$. aequatur cylindro secantium in arcum demto cylindro sinuum in arcum (quadrabili). Radio posito altitudine cylindrorum.

Sed si AD ponatur esse non secans complementi, sed ipse secans, ES portio altitudinis, KE sinus complementi, EN sinus, utilior erit aequatio, quia dividi poterit per AD. Quia enim omnes AD, sunt $\frac{a^2}{1}\ \frac{a^2}{2}\ \frac{a^2}{3}$ etc. seu quadratum radii divisum per sinus complementi, ideo dividi per AD idem est quod dividi per quadratum radii, multiplicari per sinum complementi. Ergo pro AD substitue $\frac{AE\,\square}{KE}$. fiet aequatio talis:

$$\frac{\frac{AE\,\square}{KE} - KE, \frown AE}{\frac{AE\,\square}{KE}} \frown TE = EN \frown ES. \text{ seu } \frac{\overset{(WU)}{AE\,\square - KE\,\square}}{AE} \frown TE = EN \frown ES.$$

Hanc aequationem dupliciter interpretari potes, ut dixi, vel enim KE est sinus, EN sinus complementi, vel contra. Alterutro modo, haec inde ducetur enuntiatio:

P r o p. 17. superficies cylindrica sub arcu et radio, seu duplex sector arcus, demtis quadratis sinuum (sinuum complementi) ad arcum, per radium divisis, aequatur sinubus complementi (sinubus) in basin (altitudinem) id est areae figurae arcu, basi (altitudine), radio et sinu complementi (sinu) minimo (radius enim maximus est, vel etiam si usque ad maximum seu radium non pertingatur, duabus maximis), comprehenso.

Hinc quadrata sinuum, item sinuum complementi ad arcum, necesse est non esse q u a d r a b i l i a pure, adde prop. 22.

$\triangledown^{\text{la}}$ similia EST et ADC. $\frac{AD}{ET} = \frac{DC}{ES} = \frac{AC}{ST}$.

16 seu duplex sector arcus *erg. L* 22 non *erg. L*

P r o p. 18. $AD \frown ES = DC \frown ET$. secantes complementi in basin id est s p a t i u m h y p e r b o l i c u m (adde prop. 21), aequantur tangentibus complementi in arcum.

P r o p. 19. $AD \frown ST = AC \frown ET$. summa secantium complementi aequatur radio in arcum, adde prop. 26.

P r o p. 20. $DC \frown ST = AC \frown ES$. summa tangentium complementi aequatur radio in sinum, adde prop. 25.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et UWR. Ergo $\dfrac{UR}{ET} = \dfrac{WR}{ES} = \dfrac{UW}{ST}$.

Iam (UW) est $\dfrac{AE\,\square - KE\,\square}{AE}$. WR autem sic inveniemus $\dfrac{WR}{UR} = \dfrac{AE}{AH}$. Ergo $(WR) = \dfrac{AE \frown UR}{AH}$. At (UR) est $AD - KE$. AH est $\dfrac{AE\,\square}{EN}$. ergo $WR = \dfrac{AE \frown UR \frown EN}{AE\,\square}$. seu $\dfrac{UR \frown EN}{AE}$. UR seu $NR = AD - KE$.

P r o p. 21. $UR \frown ES = WR \frown ET$. seu secantes complementi in basin (tangentes complementi in arcum, prop. 18.) spatium hyperbolicum demtis sinubus in basin (quadrabilibus, prop. 12.), aequantur, rectangulis secantium (spatio hyperbolico) complementi in sinus complementi, ad arcum, divisis per radium, demtis, rectangulis sinuum in sinus complementi, in arcum. adde prop. 36[b]; divisis per radium.

P r o p. 22. $UR \frown ST = UW \frown ET$. summa secantium complementi (sector duplicatus ABE), demta summa sinuum (seu portioni circulari KBE) aequatur UW in arcum, vel sectori duplicato, demtis $\dfrac{KE\,\square}{AE}$ in arcum.

C o r o l l. Ergo $\dfrac{KE\,\square}{AE}$ in arcum seu quadrata sinuum per radium divisa, in arcum, aequantur s u m m a e s i n u u m , seu portioni circulari, adde prop. 17. et 36[a].

23.

1 f. id est s p a t i u m h y p e r b o l i c u m *erg. L* 13+14 spatium hyperbolicum *und* (spatio hyperbolico) *erg. L* 15 radium | (quadrabilibus) *gestr.* |, demtis *L* 19 sinuum *(1)* (residuum q u a d r a b i l e esse necesse est) *(2)* (seu *L*

P r o p. 23. $WR \frown ST = UW \frown ES$. seu momentum secantium complementi ex radio basi parallelo, demto momento (quadrabili) sinuum complementi, ex eodem radio, aequatur summae UW in basin, seu radio in basin, demtis sinubus in basin, per radium divisis.

At sinus in basin sunt quadrabiles prop. 12., adde prop. 32. 36[a]. Ideo

C o r o l l. 1. ergo m o m e n t u m s e c a n t i u m c o m p l e m e n t i ex radio, basi parallelo, q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo habetur cylinder aequalis conoeidi secantium complementi.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et ENR. $\dfrac{ER}{ET} = \dfrac{NR}{ES} = \dfrac{EN}{ST}$.

P r o p. 24. $ER \frown ES = NR \frown ET$. tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), aequantur secantibus complementi in arcum demtis sinubus in arcum seu momento arcus ex [radio altitudini parallelo] (quadrabili).

Conf. prop. 8. et 14. ubi dicitur: secantes in arcum aequari spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio basi parallelo.

C o r o l l. Ergo differentia inter secantes in arcum, et secantes complementi in arcum, seu differentia inter secantem et secantem complementi in arcum q u a d r a r i potest.

P r o p. 25. $ER \frown ST = EN \frown ET$. summa tangentium complementi aequatur momento arcus ex radio basi parallelo, quadrabilis ergo, adde prop. 20. et alias passim.

P r o p. 26. $NR \frown ST = EN \frown ES$. summa secantium complementi, demta summa sinuum, aequatur sinubus complementi in basin, seu duplex sector arcus (prop. 19.),

---

6 f. *Zu* Coroll. 1: adde prop. 28. *De ductibus*.

8 complementi. | Coroll. 3. Ergo sinus *streicht Hrsg.* | *L* 11 f. arcum *(1)* (quadrabilibus) *(2)* seu momento arcus ex | altitudine, radio *ändert Hrsg.* | (quadrabili) *L* 16 seu . . . arcum *erg. L*

---

1 P r o p. 23.: In der Ausformulierung des Satzes müsste es statt momento sinuum complementi und demtis sinubus vielmehr momento sinuum und demtis quadratis sinuum heißen. — Die Aussagen bezüglich der Quadrierbarkeit bleiben davon unberührt. 15 C o r o l l.: Diese Aussage ist unzutreffend.

demta summa sinuum; aequatur quadrilineo arcu, basi, radio et sinu complementi comprehenso.

Quod facile comprobatu, calculi nostri confirmatio est.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et DEF. $\dfrac{DF}{ET} = \dfrac{DE}{ES} = \dfrac{EF}{ST}$.

P r o p. 27. $DF \frown ES = DE \frown ET$. Tangentes complementi in basin (spatium conchoeidale), demtis tangentibus semicomplementi in basin (id est per prop. 13. duplex sector, demtis tangentibus in basin, p r o p. 7., quadrabilibus, adde prop. 33.) aequantur secantibus complementi in arcum (prop. 24. spatio conchoeidali addito momento arcus ex radio [altitudini parallelo]) demto radio in arcum (seu duplici sectore).

Manifesta horum omnium aequatio est, documentum calculi veri.

P r o p. 28. $DF \frown ST = EF \frown ET$. summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa tangentium semicomplimenti aequatur tangentibus semicomplementi in arcum, adde prop. 14. et 34. 42.

P r o p. 29. $DE \frown ST = EF \frown ES$. summa secantium complementi (duplex sector), demto radio in altitudinem, aequatur tangentibus semicomplementi in basin, adde prop. 15. adde prop. 31.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et DEG. $\dfrac{DE}{ET} = \dfrac{DG}{ES} = \dfrac{EG}{ST}$.

P r o p. 30. $DE \frown ES = DG \frown ET$. secantes complementi in basin (spatium hyperbolicum, intellige scilicet i n v e r s u m , id enim semper intelligendum est, ita tangentes complementi in basin sunt spatium conchoeidale inversum, sinus complementi in basin sunt spatium circulare inversum) demto radio in sinum, ae-

---

20 *Über* inversum: NB.

9 radio *(1)* basi parallelo *(2)* altitudine *L ändert Hrsg.* 15 complementi *(1)* quadrabilis, demta summa sinuum *(2)* (duplex sector) *L*

---

14 adde prop. 14. et 34. 42.: Leibniz bezieht sich auf die gestrichene Version der prop. 42.

quantur tangentibus complementi ad arcum demtis sinubus complementi in arcum seu momento arcus ex radio basi parallelo.

Sed cum per prop. 18. aequentur secantes complementi in basin et tangentes complementi in arcum, rursusque radius in sinum, et momentum arcus ex radio basi parallelo, prop. 4. Hinc rursus calculi veritas comprobatur.

P r o p. 31. $DE \frown ST = EG \frown ET$. summa secantium complementi (duplex sector) demto radio in altitudinem aequatur radio in arcum, demtis sinubus ad arcum, seu aequatur segmento arcus complementi duplicato.

Rursus comprobatio eorum, quae prop. 29.

P r o p. 32. $DG \frown ST = EG \frown ES$. summa tangentium complementi demta summa sinuum complementi, aequatur radio in sinum, demtis sinubus ad basin.

Hinc confirmatur quadratura sinuum ad basin, de qua prop. 12. et 23.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EST et EGF. $\dfrac{EF}{ET} = \dfrac{EG}{ES} = \dfrac{FG}{ST}$.

P r o p. 33. $EF \frown ES = EG \frown ET$. Figura tangentium semicomplementi ad basin (seu portio conchoeidis contractae dimidiatae, seu figurae tangentium arcus dimidii, inversa) aequatur radio in arcum, demto momento arcus ex altitudine seu radio in altitudinem seu sinum ⟨versum⟩, adde prop. 13. 27. 35.

P r o p. 34. $EF \frown ST = FG \frown ET$. summa tangentium semicomplementi (seu figura inversa tangentium arcus dimidii) ad basin, aequatur momento arcus ex radio basi parallelo (seu momento arcus ex altitudine), demta figura tangentium semicomplementi (figura inversa tangentium arcus dimidii) ad arcum.

At per prop. 28. tangentes semicomplementi in arcum, aequantur summae tangentium complementi (quadrabili) demta summa tangentium semicomplementi. Ergo summa tangentium semicomplementi, aequatur momento arcus ex radio

---

14 (Segmentum quoddam circulare, vid. prop. 27.)

6 f. (duplex sector) *(1)* demta summa sinuum | complementi *gestr.* | (portione circulari) *(2)* demto *L* 8 seu ... duplicato. *erg. L* 16 f. arcum, *(1)* demtis sinubus in arcum *(2)* demto momento arcus ex *(a)* radio basi parallelo *(b)* altitudine seu radio in altitudinem seu sinum | versum *Papierverlust erg. Hrsg.* |, adde *L* 20 (seu ... altitudine) *erg. L*

basi parallelo addita summa tangentium semicomplementi, demta summa tangentium complementi.

Ergo momentum arcus ex radio basi parallelo, aequatur summae tangentium complementi, quod iam toties habuimus.

P r o p. 35. $EG \frown ST = FG \frown ES$. radius in altitudinem, demta summa sinuum, seu quadrilineum circulare concavum $BXGE$, aequatur sinubus complementi ad basin, id est quadrilineo supra dicto $ABEN$. demtis tangentibus semicomplementi ad basin.

Iam vero figura tangentium semicomplementi ad basin per prop. 33. aequatur duplo sectori ABE, demto radio in altitudinem. Ergo [quadrilineum] circulare concavum $BXGE$, aequatur quadrilineo $ABEN$, demto duplici sectore ABE, addito [rectangulo $BKXG$]. Seu mixtilineum $BXGE = \bigtriangledown^{\text{lo}}\, AKE$, demto sectore ABE, addito rectangulo $BKXG$. Cumque sector constet ex portione circulari BKE et triangulo AKE. fiet mixtilineum $BXGE = \bigtriangledown^{\text{lo}}\, AKE - \bigtriangledown AKE -$ portio circular. BKE + rectang. $BKXG$. Ergo mixtilineum $BXGE$ + portio circularis BKE = rectang. $BKXG$. Quod cum per se pateat, apparet calculum recte positum fuisse.

$$NIE$$

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et (TUW). sed pro hoc triangulo, substituendum est istud NIE. ita ut N sit loco U. I loco W. Sic ergo:

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia EST et NIR. $NR = AD - KE$. et $AD = \dfrac{AE\,\square}{KE}$. et $IE = ER - IR$.

6 seu *(1)* trilineum circulare concavum BXE *(2)* quadrilineum *L* 10–12 sectori ABE, *(1)* demta portione circulari | KBE. id est sectori ABE *(a)* − *(b)* + $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AKE *gestr.* |. Ergo trilineum circulare concavum BXE, aequatur quadrilineo ABEN, demto sectore ABE, *(aa)* addito *(bb)* demto $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AKE. ad *(!)* his ablatis a quadrilineo residuum erit nihil. Errorem ergo hoc loco in calculo esse necesse est. *(2)* demto radio in sinum. Ergo trilineum circulare concavum BXGE, aequatur quadrilineo ABEN, demto duplici sectore ABE, addito radio in sinum seu rectangulo BAN. Iam si quadrilineum abiciatur, restabit ex duplici sectore nil nisi portio circularis KBE. Ergo haec prodibit aequatio: BXGE = rectang. BAN − KBE. Ergo rectang. BXGK = rectang. BAN. Sed hoc absurdum, nondum ergo sublatus omnis error. *(3)* demto radio in altitudinem. Ergo | trilineum *ändert Hrsg.* | circulare . . . addito | seu rectangulo BAN *ändert Hrsg.* |. Seu *L*

19–476,3 Leibniz verwendet die Benennung Y. Diese ist aufgrund der später erfolgten Umbenennung (vgl. unten prop. 41) vom Hrsg. in I abgeändert worden.

et $IR = WR = \dfrac{NR \frown EN}{AE}$. et $NI = UW = AE - \dfrac{KE\square}{AE}$.

Iam haec laterum comparatio erit:

$$\frac{EN}{ET} = \frac{NI = AE - \dfrac{KE\square}{AE}}{ES} = \frac{EI = ER - \dfrac{NR \frown EN}{AE}}{ST}.$$

P r o p. 36[a]. $EN \frown ES = AE \frown ET,, - \dfrac{KE\square}{AE}, \frown ET.$ sinus complementi ad basin (quadrilineum $ABEN$) = radio in arcum (duplici sectori ABE), demtis sinubus quadratis ad arcum per radium divisis.

Atqui sector duplex est quadrilineum $ABEN$ portione circulari KBE auctum. Ergo sinuum quadrata ad arcum aequantur, portioni circulari KBE. quod iam ostensum, prop. 22.

P r o p. 36[b]. $EN \frown ST = ER \frown ET - NR\,(AD - KE) \frown \dfrac{EN}{AE} \frown ET =$

$$ER \frown ET + \frac{KE \frown EN}{AE} \frown ET - \frac{AD - EN}{AE} \frown ET. \text{ sive:}$$

Summa sinuum complementi (quadrabilis), aequatur tangentibus complementi in arcum (spatio hyperbolico) additis sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis (vid. sup. prop. 21.), demtis secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis, ad arcum.

Iam secantes complementi in sinus complementi, aequantur tangentibus complementi in radium, vid. *D e d u c t i b u s p r o p.* 28. Ergo secantes complementi in sinus complementi, per radium divisi, ad arcum, aequantur tangentibus complementi in radium ductis, per radium divisis, ad arcum.

C o r o l l. 1. Ergo tangentes complementi ad arcum, spatium hyperbolicum, aequantur secantibus complementi in sinus complementi per radium divisis ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo summa sinuum complementi (quadrabilis) = sinubus in sinus complementi ad arcum per radium divisis, seu ductui figurae sinuum, in figuram sinuum complementorum, inverso.

C o r o l l. 3. sinus in sinus complementi in arcum per radium divisi, aequantur sinubus in basin (adde prop. 21.).

4+10 P r o p. 36. *Zählung doppelt, L ändert Hrsg.* 20 spatium hyperbolicum *erg. L*

C o r o l l. 4. summa sinuum complementi aequatur sinubus ad basin.

P r o p. 37. $AE \frown ST - \dfrac{KE\square}{AE} \frown ST = ER \frown ES \ \ (= CD \frown ES) - \dfrac{NR \frown EN}{AE} \frown ES.$

Iam pro $NR = AD - KE$. pro AD $\dfrac{AE\square}{KE}$ fiet:

$$CD \frown ES - \dfrac{\dfrac{AE\cancel{\square} \frown EN}{KE} \frown ES}{\cancel{AE}} + \dfrac{KE \frown EN}{AE} \frown ES.$$ Iam per prop. 36[b] hic et p r o p. 28. *D e d u c t i b u s*, $\dfrac{AD \frown EN}{AE}$ $\left(= \dfrac{\dfrac{AE\square \frown EN}{KE}}{AE}\right) = \dfrac{DC \frown AE}{AE}.$

ergo (C o r o l l. 1) $\dfrac{AE \frown EN}{KE} = DC.$

(quemadmodum [C o r o l l. 2.] $\dfrac{AE \frown KE}{EN} = HE$.)

Hinc propositio tandem eiusmodi oritur:

Radius in altitudinem, demtis quadratis sinuum per radium divisis (quae omnia quadrabilia sunt) = tangentibus complementi in basin (spatio hyperbolico inverso), demtis tangentibus complementi in basin (quae se destruunt), additis sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin.

Ergo

C o r o l l. 3. Radius in altitudinem demtis quadratis sinuum per radium divisis, aequatur sinubus in sinus complementi per radium divisis ad basin. Haec ergo quadrabilia.

$\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ similia YXD et TSE. quia $\vee DYX = \vee BYA$. Ergo YDX ang. $= BAE$ ang. Ergo $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ AEH et YXD ergo et TSE et YXD similia, quia $\vee SET = \vee BAE$. ergo $=$ $\vee^{\mathrm{lo}}$ YDX. Ideo $\dfrac{DY}{ET} = \dfrac{DX}{ES} = \dfrac{YX}{ST}$.

DY est differentia inter secantem arcus complementi, et dati; YX est differentia inter tangentem et radium; DX est differentia inter tangentem complementi et radium.

---

2 *Über* $AE \frown ST$: adde prop. 6.

7 *Eckige Klammern L*

P r o p. 38. $DY \frown ES = DX \frown ET$. secantes complementi in basin, demtis secantibus in basin (spatium hyperbolicum demto circulari) aequantur tangentibus complementi in arcum (spat. hyp.), demto radio in arcum (spat. circ.), vid. 2. hic et 18.

P r o p. 39. $DY \frown ST = YX \frown ET$. res eodem redit cum prop. praeced.

P r o p. 40. $DX \frown ST = YX \frown ES$. Tangentes complementi demto radio in altitudinem = tangentibus demto radio in basin.

7–479,1 basin.

| $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EDG et EST. $\frac{\mathrm{DE}}{\mathrm{ET}} = \frac{\mathrm{DG}}{\mathrm{ES}} = \frac{\mathrm{EG}}{\mathrm{ST}}$. *gestr.* |

| $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: EFN et EST. quia angulus ENF (vel HAE) = ang. SET. $\frac{\mathrm{EN}}{\mathrm{ET}} = \frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{ES}} = \frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{ST}}$.

(1) | Porro FN sunt ad radium ut differentiae secantium complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{g-b}}{\mathrm{g}}$. seu FN $= \frac{\mathrm{g-b}}{\mathrm{g}} \frown$ a. at $\frac{\mathrm{g-b}}{\mathrm{g}} = \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} - 1$. Ergo FN $= \frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{b}^2} -$ a. et FN $\frown$ a. seu cylinder FN $= \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{b}^2} - \mathrm{a}^2$. aequalis quadratis segmentorum complementi demtis quadratis radii. *erg.* |

P r o p. 41. EN $\frown$ ES = FN $\frown$ ET. sinus complementi in basin (quadrilineum) = FN. in arcum. Ergo

C o r o l l. 1. Cylinder quadrilinei, aequatur quadratis secantium complementi in arcum | quadrato radii in arcum minutis *erg.* |.

Atqui per Duct. prop. 43. secans complementi est media proportionalis inter tangentem complementi arcus dati, et compositam ex tangente arcus dati, et arcus complementi. Ergo

C o r o l l. 2. quadrata tangentium complementi in arcum, aucta rectangulis ex tangentibus et tangentibus complementi in arcum, aequantur cylindro quadrilinei sub radio quadratis radii in arcum, seu cylindro sectoris duplicis aucto.

(2) Porro FN sunt ad radium ut differentiae complementi et sinuum, ad secantes complementi. Si radius a. secans complementi g. sinus b. erit $\frac{\mathrm{FN}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{g-b}}{\mathrm{g}}$. seu FN $= \frac{\mathrm{g-b}}{\mathrm{g}} \frown$ a.

„ Dixi FN inquam $= \frac{\mathrm{ag-ba}}{\mathrm{g}}$. vel a $- \frac{\mathrm{ba}}{\mathrm{g}}$. Sed g $= \frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}$.

„ Ergo $\frac{\mathrm{ba}}{\mathrm{g}} = \cfrac{\mathrm{ba}}{\cfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}}} = \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2} = \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$. Ergo FN = a $- \frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}}$.

P r o p. 41. EN $\frown$ ES = FN $\frown$ ET. Sinus complementi, in basin (quadrilineum) = FN. in arcum, seu radio in arcum, demtis quadratis sinuum per radium divisis, in arcum.

Constat autem aliunde quadrata sinuum cylindro cuidam circulari sub radio aequari. Haec ergo concordant. Sed si alibi non extarent hic demonstrarentur. Nam si quadrilineum ABEN detrahatur a duplici sectore ABE, restat portio circularis KEB. quae proinde quadratis sinuum per radi-

P r o p. 41. Summa omnium IN quadrari potest.

Nam IN est radius demta applicata parabolae axi parallela, p e r *D u c t.* p r o p. 5 1. Est ergo summa omnium IN radius in altitudinem BK. demta portione semiparabolae per axi parallelam abscissae, cuius altitudo BK. id est, summa omnium NI, dabit trilineum parabolicum.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ IEN et EST similia sunt. Ang. SET = angulo ENI. Ideo $\dfrac{EN}{ET} = \dfrac{IN}{ES} = \dfrac{EI}{ST}$.

um divisis aequalis, atque ideo

C o r o l l. cylinder portionis circularis sub radio aequalis quadratis sinuum, adde supra 17. 22. 23.

P r o p. 42. EN $\frown$ ST = EF $\frown$ ET. Sinus complementi in altitudinem, seu summa sinuum complementi = tangentibus semicomplementi in arcum.

C o r o l l. 1. Ergo tangentes semicomplementi in arcum, sunt quadrabiles.

C o r o l l. 2. Ergo quia per prop. 14. et 28. 34. tangentes semicomplementi in arcum, iunctis tangentibus semicomplementi in altitudinem, seu iuncta eorum summa sunt quadrabiles. Ideo summa tangentium semicomplementi quadrabilis.

Inter omnia figurarum circularium elementa, nulla sunt tangentibus semicomplementi, et per consequens tangentibus arcus dimidii feliciora, quae in arcum, altitudinem, basin habentur. Nisi quod tang. semicompl. in basin, et tang. arcus dimid. in alt. habentur. Sed supposita quadratura.

C o r o l l. 3. Figura tang. arc. dimid. in arcum quadrabilis, est enim non nisi figura inversa tangentium arcus semicomplementi in arcum.

C o r o l l. 4. Figura tangentium arcus dimidii in basin quadrabilis, est enim inversa tangentium arcus semicomplementi in altitudinem.

C o r o l l. 5. Quadratura figurae tangentium seu conchoeidis ex data quadratura hyperbolae, seu quadratura differentiae inter conchoeidem et hyperbolen. Nam per D u c t. p r o p. 47. coroll. 1. differentia inter secantem et tangentem (applicata hyperbolae et conchoeidis), aequatur tangenti semicomplementi.

C o r o l l. 5. *(!)* Cum figura tang. semicompl. ad arc. + sum. tang. semicompl. = prop. 14. mom. arcus ex basi = prop. 4. rad. in basin, seu sinum. Ergo summa tangentium semicompl. seu diff. hyp. et conch. est radius in basin, demtis sinubus complementi in altitudinem.

| C o r o l l. 6. Differentia inter *erg., bricht ab* |

P r o p. 43. FN $\frown$ ST = EF $\frown$ ES. Summa omnium FN = tangentibus semicomplementi in basin.

At tangentes semicomplementi in basin aequantur tangentibus arcus dimidii (inversis) in altitudinem seu conchoeidi falsae dimidiatae. Et conchoeis falsa dimidiata aequatur portioni inversae seu a basi abscissae. Ergo

C o r o l l. 1. Portio quaelibet conchoeidis falsae *gestr.* |

P r o p. 41 *L*

P r o p. 42. $EN \frown ES = IN \frown ET$. sinus complementi ad basin, seu quadrilineum $ABEN$ = applicatis trilinei parabolici ad arcum, adde prop. 46.

C o r o l l. Ergo trilineum parabolicum ad arcum, pendet a quadratura circuli.

P r o p. 43. $EN \frown ST = EI \frown ET$. sinus complementi ad altitudinem, aequantur ipsis EI ad arcum.

Ergo EI ad arcum q u a d r a b i l i a sunt. Qualis autem sit recta EI, vid. *Duct.* 51., vid. prop. 45.

P r o p. 44. $IN \frown ST = EI \frown ES$. seu EI ad basin, aequantur applicatis trilinei parabolici ad altitudinem, seu quadrabiles sunt.

His ita positis istud EI accuratius determinemus. Nimirum EI est ad tangentem, ut NI ad radium vel ut EN ad secantem: Ideo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{d}$. Iam $d = \dfrac{a^2}{f}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{f}{\;\frac{a^2}{f}\;} = \dfrac{f^2}{a^2}$. Ergo $EI = \dfrac{f^2 \frown c}{a^2} = Rq\, f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $EI\,\square = \dfrac{f^4 \frown c^2}{a^4} = f^2 - a^2 - \dfrac{b^4}{a^2} + 2b^2$. Ergo $f^4c^2 = f^2a^4 - a^6 - b^4a^2 + 2b^2a^4$.

Item $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{NI}{a}$. Iam: $NI = a - \dfrac{b^2}{a}$. Ergo $\dfrac{EI}{c} = \dfrac{a - \frac{b^2}{a}}{a} = 1 - \dfrac{b^2}{a^2}$. Ergo $EI = c - \dfrac{b^2c}{a^2}$. Ergo $\dfrac{f^2c}{a^2} = \dfrac{a^2c - b^2c}{a^2}$. Ergo $f^2c = a^2c - b^2c$. Ergo $f^2 = a^2 - b^2$. quod verissimum, notaque calculi recte positi.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ NIR et EST similia sunt et ang. NRI = angulo SET. ideo: $\dfrac{NR}{ET} = \dfrac{IR}{ES} = \dfrac{NI}{ST}$.
IR est tangens compl. $-EI$. NR est secans compl. demto sinu.

P r o p. 45. $NR \frown ES = IR \frown ET$. secantes complementi ad basin (spatium hyperbolicum inversum), demtis sinubus ad basin (quadrabilibus) = tangentibus

11 Ideo *(1)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c} = \text{tang.}} = \dfrac{\mathrm{d} = \text{sec.}}{\mathrm{f}\,\text{sin. compl.}}$. Iam $\mathrm{d} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}}$. Ergo $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}^2}$.

Coroll.: Ergo $\mathrm{EI} \frown \mathrm{f} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{f}} \frown \mathrm{c}$. seu momenta omnium EI ex basi = se *(2)* $\dfrac{\mathrm{EI}}{\mathrm{c}}$ *L*

11 Ideo: im Folgenden verwendet Leibniz die Bezeichnungen von N. 26.

complementi ad arcum (spatio hyperbolico inverso), demtis EI ad arcum. Ergo Coroll. EI ad arcum = sinubus ad basin, seu sinubus compl. ad altit. prop. 43. et 12.

Prop. 46. $NR \frown ST = NI \frown ET$. Ergo summa secantium complementi (sect. circ. duplex), demta summa sinuum, seu quadrilineum $= NI \frown ET$. concordat prop. 42.

Prop. 47. $IR \frown ST = NI \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) demta summa ipsorum EI. seu summa horum: $\dfrac{b^2c}{a^2}$ aequatur, applicatis trilinei parabolici circularis axi parallelis, ad basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $C\alpha D$ et EST. $\dfrac{DC}{ET} = \dfrac{D\alpha}{ES} = \dfrac{C\alpha}{ST}$.

Prop. 48. $DC \frown ES = D\alpha \frown ET$. Tang. complementi ad basin (spat. conchoeid. inversum) = secantibus complementi ad arcum (spat. hyp. inverso) demtis sinubus ad arcum, quadrabilibus.

Coroll. 1. Quadratura conchoeidis ex data hyperbolae quadratura.

Coroll. 2. Tang. semicompl. inversi (seu diff. hyp. et conch. invers.) = sinubus ad arcum, et ideo quadrab.

Coroll. 3. Tang. ad alt. (spat. conch.) = sec. ad arc. (spat. hyp.) − sin. compl. ad arc., quadrabiles prop. 4. hic. Et ideo summa tang. semicompl. = sin. compl. ad arc. seu momento arcus ex basi, sive radio in sinum.

Prop. 49. $DC \frown ST = C\alpha \frown ET$. Summa tangentium complementi (quadrabilis) = sinubus complementi ad arcum seu momento arcus ex basi, ut supra toties.

Prop. 50. $D\alpha \frown ST = C\alpha \frown ES$. Summa differentiarum inter secantes complementi et sinus = quadrilineo $ABEN$.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ γEF et EST similia: Nam ang. $EF\gamma$ ang. TES. Porro $E\gamma$ ita investigabimus: $\dfrac{A\gamma}{AE} = \dfrac{AQ\ (EF)}{AK\ (EN)}$. Ergo $A\gamma = \dfrac{EF}{EN} \frown AE$. Ergo ut obiter dicam momenta $A\gamma$ = cylindro tangentium semicompl. (quadrabili). Ergo et quadrabilia momenta $E\gamma$. Ergo $\gamma E = AE - \dfrac{EF}{EN} \frown AE$. Eodem modo $\dfrac{Q\gamma}{KE} = \dfrac{EF}{EN}$. Ideo $Q\gamma \frown EN = EF \frown KE$.

---

7 $\dfrac{b^2c}{a^2}$: mit den Bezeichnungen von N. 26 müsste es genauer $\dfrac{f^2l}{a^2}$ heißen. 14–18 Die Korollare 2 und 3 sind fehlerhaft.

seu momenta omnium $Q\gamma$ = sinubus in tang. [semi]compl. quae pendent a q. hyp. ergo et momenta omnium γF. Ergo $\gamma F = AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$. Iam $EF \frown KE = AE \frown KQ$ $[=] \dfrac{AE \frown EN}{EN} - \dfrac{AE \frown EF}{EN}$ $[=]$ $AE - \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. Et quia $\gamma F = AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$ $\left\{\text{vel } -AE + \dfrac{AE \frown EF}{EN}\right\}$. ideo $\gamma F = \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. ideo momenta omnium γF = cylindro EF. et quia tam $A\gamma$ quam $\gamma F = \dfrac{AE \frown EF}{EN}$. ergo $=^{\text{lia}}$ inter se. Ergo $Q\gamma = E\gamma$. Ergo $\triangledown^{\text{la}}$ γEF et $AQ\gamma$ similia et aequalia inter se.

Iam $\dfrac{\gamma F}{TE} = \dfrac{EF}{ES} = \dfrac{\gamma E}{ST}$.

P r o p. 51. $\gamma F \frown ES = EF \frown TE$. Tang. semicomplementi in arcum q u a d r a b. = γF in basin (q u a d r a b.).

Ergo γE in basin quadrab. quia rad. in basin (quad.) $-$ γF in basin = γE in bas.

P r o p. 52. $\gamma F \frown ST = \gamma E \frown TE$. Summa omnium γF = summae omnium γE in arcum, quadrab. prop. 55. coroll. 4. $[=]$ radio in arcum demto γF in arcum.

C o r o l l. Ergo momenta omnium γF arcui impositorum ex basi quadrabilia, seu $\gamma F \frown EN$ ad arcum = $AE \frown EF$.

P r o p. 53. $EF \frown ST = \gamma E \frown ES$. Summa tang. semicompl. (q u a d r a b.) = γE ad basin.

$\triangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : $DF\gamma$ et EST. $\dfrac{D\gamma}{ET} = \dfrac{DF}{ES} = \dfrac{F\gamma}{ST}$.

---

2 *Unter* $AE - \dfrac{EF \frown KE}{EN}$, *gestr.:* subsunt errores

1 semi *erg. Hrsg.* 2 EF $\frown$ KE = *(1)* $\underbrace{\text{ca} - \text{cb}}_{\text{ca} + \text{af} - \text{da}}$. Et cb = da $-$ af. An error forte in calculo, nam hoc videtur aliquo casu impossibile, quando f. exigua *(2)* AE $\frown$ KQ *L* 3 = *erg. Hrsg. zweimal* 12 arcum, *(1)* pendet ex q. circ. v. prop. 55. *(2)* quadrab. *L* 12 = *erg. Hrsg.*

8–16 Die Aussagen der Sätze 51–53 bezüglich der Quadrierbarkeit der einzelnen Größen sind nur teilweise zutreffend. Dies wirkt sich negativ auf die entsprechenden Aussagen von Satz 54 sowie auf Teil 2 S. 489 Z. 10 aus.

P r o p. 54. $D\gamma \frown ES = DF \frown ET$. secantes complementi ad basin (secantes in altitudinem inversi, spatium hyp. a basi abscissum) demtis $A\gamma$ vel γF ad basin (quadrabilibus prop. 51.) aequantur tangentibus compl. ad arcum (spat. hyp.) (tang. ad arc.) demtis tangentibus semicomplementi ad arcum (tang. arcus dimidii ad arcum) quadrabilibus.

P r o p. 55. $D\gamma \frown ST = F\gamma \frown ET$. secans complementi ad altitudinem (radius in arcum), demtis omnibus $F\gamma$ in altitudinem = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 1. Secans ad basin demtis omnibus $F\gamma$ ad basin (quadrabilibus) = omnibus $F\gamma$ ad arcum.

C o r o l l. 2. Ergo omnes $F\gamma$ ad arcum = radio in arcum, demtis tang. arc. dimid. in arc. (quadrab.).

C o r o l l. 3. Ergo summa omnium γF (scil. ad altitudinem) = tang. arc. dimid. ad arcum = γF ad basin inversis.

C o r o l l. 4. Ergo summa omnium γE in arcum quadrabilis.

P r o p. 56. $DF \frown ST = F\gamma \frown ES$. Summa tangentium complementi (quadrab.), demta summa tangentium semicomplementi (quadrab.) = $F\gamma$ in basin seu tang. semicompl. in arcum (quadrabilibus).

C o r o l l. Figura tangentium in basin (quadrabilis) demta tang. arcus dimidii in basin (seu summa tang. semicompl. inversa, quadrabilis) = $F\gamma$ ad altitudinem (quadrabilibus).

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $X\lambda D$ et EST. Porro XD habemus. Quaerenda sunt $X\lambda$ et λD.
Iam $X\lambda$ est $C\alpha$ $(= EN)$ $- X\delta$. Sed $X\delta = KE$. quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ $X\delta C$ et AKE similia, unumque latus AE et CX aequale, uni alterius, ergo et reliqua. Ergo $X\lambda = EN - KE$.
Similiter λD est $AD - A\alpha$ $(= AN = KE)$ $- C\delta$ $(= EN)$. Ergo $\lambda D = AD - EN - KE$.
Denique $DX = CD - AE$.

7 f. arcum |, quadrabilibus *gestr.* | *(1)* C o r o l l. 1. Summa omnium Fγ pendet ex q. circ. iunct. prop. 52. C o r o l l. 2. Omnes γE ad arcum pendent ex q. circ. dict. prop. 52. iunct Coroll. 1. hic. *(2)* C o r o l l. 1. *L* 13 basin | absurdum *gestr.* | inversis. *L* 20 f. (quadrabilibus). *(1)* $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: CδR et EST. *(a)* Ang. FCD = ang. *(b)* $\frac{\text{CR}}{}$ *(2)* $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia *L*

6 P r o p. 55.: Richtig sind die Hauptaussage, Korollar 3 und (trotz mangelhafter Begründung) Korollar 4; falsch hingegen die Korollare 2 und 3. 15 P r o p. 56.: Der Satz selbst ist korrekt, das Korollar nicht; die Quadrierbarkeitsaussagen treffen nur zum Teil zu.

Iam: $\dfrac{DX}{ET} = \dfrac{\lambda D}{ES} = \dfrac{X\lambda}{ST}$.

P r o p. 57. $DX \frown ES = \lambda D \frown ET$. Tangentes complementi ad basin (ex conchoeid.) demto radio in sinum = secantibus complementi ad arcum, demtis pariter sinubus complementi ad arcum, et sinubus ad arcum (ex conchoeid.), adde prop. 24.

P r o p. 58. $DX \frown ST = ET \frown X\lambda$. Summa tangentium complementi, demto radio in altitudinem = momento arcus ex basi demto mom. arcus ex alt.

P r o p. 59. $\lambda D \frown ST = X\lambda \frown ES$. Summa secantium complementi, demta summa sinuum pariter et sinuum complementi = quadrilineo $ABEN$, demta summa sinuum ad basin quadrabili.

Sive figura secantium ad basin, demta summa sinuum, quadrab., pariter et sinuum complementi ad basin = sinubus ad alt. demt. sin compl. ad alt.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a $Y\lambda X$ et EST. nam ang. λXY = angulo TES. Porro $X\lambda$ habemus. YX est radius demto tangente $BX - BY$. et denique $Y\lambda$ est $A\alpha$ (= KE) $+\alpha\lambda$ (= $C\delta = EN$) $- AY$ (= AH).

$\dfrac{YX}{ET} = \dfrac{X\lambda}{ES} = \dfrac{Y\lambda}{ST}$.

P r o p. 60. $YX \frown ES = X\lambda \frown ET$. Radius in basin (sinum) demto tangente in basin ([tangente complementi] in altitudinem) (quadrabili) = momento arcus ex basi, demto momento arcus ex altitudine.

P r o p. 61. $YX \frown ST = Y\lambda \frown ET$. Radius in altitudinem, demta summa tangentium (vel contra) = $Y\lambda$ ad arcum, seu momento arcus ex altitudine, addito momento arcus ex basi, demtis secantibus ad arcum (vel contra).

P r o p. 62. $X\lambda \frown ST = Y\lambda \frown ES$. Summa sinuum complementi demta summa sinuum (intellige in talibus semper: vel contra) = sinubus ad basin + sin. compl. ad basin − secant. ad basin.

---

23 *Über der Klammer:* NB.

17 radio *L ändert Hrsg.* 24–485,1 basin. | $\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a EμY et EST. Nam ang. MEY = angulo TES. Lineae ita habentur: $\underline{\text{ME}}$ = AE − EN. $\underline{\text{EY}}$ = AY (AH) − AE. $\underline{\text{MY}}$ est differentia tangentis et sinus. Ideo iam habuimus in $\bigtriangledown$HPB. *gestr.* | $\dfrac{\xi\text{Y}}{\text{AR} = \text{AD}}$ *L*

$\dfrac{\xi Y}{AR = AD} = \dfrac{\mu N(AE) - EN}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - \dfrac{EN \frown AD}{EN}$. seu $\xi Y = \dfrac{AE \frown AD}{EN} - AD$.

aliter: $\dfrac{\xi Y}{AE - HE\ (YX)} = \dfrac{EY\ (HA - AE)}{Y\lambda\ (KE + EN - AH)}$.

$\dfrac{\xi E}{EF} = \dfrac{XG\ (AC - EN)}{GF\ (EN - EF)}$. Ergo $\xi E = \dfrac{AC - EN, \frown EF}{EN - EF}$.

$\bigtriangledown$la similia: ξEY et EST. $\dfrac{\xi Y}{TE} = \dfrac{\xi E}{ES} = \dfrac{EY}{ST}$.

Prop. 63. $\xi Y \frown ES = \xi E \frown TE$.

Prop. 64. $\xi Y \frown ST = EY \frown TE$. seu summa omnium AD per radium multiplicata aequatur momentis omnium secantium radiis minutorum, arcubus impositorum.

Prop. 65. $\xi E \frown ST = EY \frown ES$. Summa omnium ξE aequatur secantibus radio minutis in basin, seu pendet ex q. circ., add. prop. 67.

$\bigtriangledown$la similia $\xi\mu E$ et EST. $\dfrac{\xi E}{ET} = \dfrac{\xi\mu}{ES} = \dfrac{E\mu}{ST}$.

Prop. 66. $\xi E \frown ES$ ad basin. $= \xi\mu \frown ET$ ad arcum.

Prop. 67. $\xi E \frown ST = E\mu \frown ET$. ξE summa, aequatur radio sinubus complementi minuto in arcum.

Prop. 68. $\xi\mu \frown ST = E\mu \frown ES$. Summa omnium $\xi\mu =$ radio in basin, demtis sinubus complementi ad basin, seu quadrilineo.

$\bigtriangledown$la similia: ξXF et EST. $\dfrac{\xi F}{ET} = \dfrac{\xi X}{ES} = \dfrac{FX\ (AB - EF)}{ST}$.

16 basin *(1)* . Summa ergo horum ξM aequatur trilineo concavo BMC. Quod per se patet. *(2)*, seu L

1 ξ, μ: In seiner Handzeichnung hat Leibniz den Punkt ξ rechts neben den Punkt T gezeichnet; T und ξ müssen aber zusammenfallen. — In seiner Zeichnung verwendet Leibniz die Bezeichnung μ, ebenso in der Variante zu Beginn des Textes; im laufenden Text ist er zur Bezeichnung M gewechselt. Da M bereits in anderer Funktion vorkommt (s. N. 26, prop. 55 und 57), ist vom Herausgeber das ursprüngliche μ beibehalten worden. Die Änderung betrifft Z. 1 sowie Z. 11–16. 7 Prop. 64.: Die Formel ist korrekt, die Ausführungen sind misslungen.

Prop. 69. $\xi F \frown ES = \xi X \frown ET$. Tang. semicompl. ad basin. (segm. circ.) addito ξE ad basin $= \xi X$ ad arcum.

Prop. 70. $\xi F \frown ST = FX \frown ET$. Summa tang. semicompl. (quadrab.) + ξE summa (ex q. circ.) = radio in arcum, demtis tang. semicompl. ad arcum.

Prop. 71. $\xi X \frown ST = FX \frown ES$. seu summa omnium ξX = radio in basin − tang. semicompl. in basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: $\theta\varpi E$ et EST. Nam ang. $\varpi\theta E$ = angulo BAE. quia eius dupli ad centrum est angulus ad circumf.
θE autem est parabolica seu chorda supplementi ad semicirculum.
ϖE ita inveniemus: $2b \frown a + f$ seu $2bf + 2ba = \theta E$. quam vocemus $k, \frown \varpi E$. Ergo $\dfrac{2ba+2bf}{k} = \varpi E$.

$$\frac{\theta E}{ET} = \frac{\theta\varpi}{ES} = \frac{\varpi E}{ST}.$$

Prop. 72. $\theta E \frown ES = \theta\varpi \frown ET$. Applicatae parabolicae inversae, ad basin, aequantur ipsis $\theta\varpi$ ad arcum.

Prop. 73. $\theta E \frown ST = \varpi E \frown ET$. Summa applicatarum parabolicarum inverse sumtorum, aequantur ipsis ϖE ad arcum.
Ergo ϖE ad arcum quadrabilia.

Prop. 74. $\theta\varpi \frown ST = \varpi E \frown ES$. summa omnium $\theta\varpi$ aequalis omnibus ϖE ad basin.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia $\psi\varphi\pi$ et EST. $\psi\varphi = CE$. Punctum π cadit in rectam AB, et si duceretur recta $C\pi\varphi$ ea aequalis rectae $C\pi E$. Ideo $\pi E = \pi\varphi$. et $\psi\pi + \pi\varphi = \psi E$.
Nota si basin AC pro altitudine sumamus, seu aequadivisam intelligamus, $\psi\varphi$ et $\psi\pi + \pi\varphi$ erunt applicatae parabolicae.

$$\frac{\psi\pi}{ET} = \frac{\psi\varphi}{ES} = \frac{\varphi\pi}{ST}.$$

20 similia *(1)* $\psi\varphi$Q et EST. $\psi\varphi$ = CE. Punctum Q cadit in rectam AB sed non est necesse idem esse cum illo Q, quod alias adhibuimus ut AQ = EF. sed ne *(2)* $\psi\varphi\pi$ *L*

3 Prop. 70.: Die Aussagen zur Quadrierbarkeit sind nur teilweise richtig. 20 Punctum π: Leibniz' ursprüngliche Intention (s. die zugehörige Variante) war richtig. π und Q fallen in der Tat zusammen.

P r o p. 75. $\psi\pi \frown ES = \psi\varphi \frown ET$. seu $\psi\pi$ ad basin $= \psi\varphi$ chordis ad arcum.

Iam per prop. 42. chordae in arcum pendent ex q. circ. Ergo et $\varphi\pi$ ad basin.

P r o p. 76. $\psi\pi \frown ST = \varphi\pi \frown ET$. seu summa omnium $\psi\pi =$ omnibus $\varphi\pi$ ad arcum.

P r o p. 77. $\psi\varphi \frown ST = \varphi\pi \frown ES$. Chordae ad altitudinem $= \varphi\pi$ ad basin.

[*Teil 2*]

Memorabiles sunt consequentiae quae ex his duci possunt ad arithmeticam infinitorum, reperientur enim summae, quae alias omnem opinor artem humanam eludent. Et certe vulgo non extant summae linearum seu quadraturae figurarum nisi paraboleidum. Sed consideremus exempli causa: summam tangentium complementi.
Esto radius a. tangens complementi l. secans complementi g. sinus b. sinus compl. f. Constat: $g = \dfrac{a^2}{b}$. Constat item $\dfrac{g}{a} = \dfrac{l}{f}$. Ergo $l = \dfrac{gf}{a} = \dfrac{a^2 f}{ba} = \dfrac{af}{b}$. Et quia $b = Rq\, a^2 - f^2$. ideo secans complementi $g = \dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - f^2}$. et tangens complementi $l = \dfrac{af}{Rq\, a^2 - f^2}$. Ponantur autem f continue crescere proportione arithmetica, primum seu minimum esse β. post 2β. post 3β. etc.
Summa ista $\dfrac{a\beta}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{2a\beta}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{3a\beta}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ etc. iniri potest. Demonstravi enim quadrari posse summam tangentium complementi.
Et ista tamen summa $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - \beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 4\beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\, a^2 - 9\beta^2}$ quae est secantium complementi, habere non potest, est enim eadem cum tetragonismo sectoris duplicati.

---

15 *Zu* summa ista:
Imo NB. error, summa ista non habetur, quia tangentes [*bricht ab*]

---

2 $\varphi\pi$ ad basin: Im Gegensatz zu Leibniz' Aussage ist das Integral von der Kreisquadratur unabhängig. Der Hinweis auf die prop. 42 irreführend.

Porro si summam tangentium complementi a linea maxima incipias, primum erit $\dfrac{a-\beta.\frown a,\ \text{seu}\, a^2-\beta a}{Rq,\ a^2-a^2-\beta^2+2a\beta\ \text{seu}\, Rq\,2a\beta-\beta^2}$, secundum $\dfrac{a^2-2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$, tertium $\dfrac{a^2-3\beta a}{Rq\,6\beta a-9\beta^2}$, etc. quadrabilis.

Ergo si quadrabilis esset haec quoque series $\dfrac{\beta a}{Rq\,2\beta a-\beta^2}$ $\dfrac{2\beta a}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc. haberetur quadratura huius $\dfrac{a^2}{Rq\,2\beta a-\beta^2}$ $\dfrac{a^2}{Rq\,4\beta a-4\beta^2}$ etc.

Differentia inter duas series: $\dfrac{a^2-a\beta}{Rq\,a^2-\beta^2}$ etc.

$$\begin{array}{lllll}
 & & 1a\beta & & 2a\beta \\
\cancel{a^2}-a\beta \fint & a & \cancel{a^2}-\cancel{2}\cancel{a}\beta \fint\ a-\dfrac{a\beta}{a-\beta} & & \cancel{a^2}-\cancel{3}\cancel{a}\beta \fint\ a-\dfrac{2a\beta}{a-\beta} \\
\cancel{a}-\beta & & \cancel{a}-\beta & & \cancel{a}-\beta \\
 & \overline{Rq\,a^2-\beta^2} & & \overline{Rq\,a^2-4\beta^2} & \qquad \overline{Rq\,a^2-9\beta^2}
\end{array}$$

Ratio primi ad primum est $\dfrac{a}{\beta}$, 2^{di} ad 2^{dum} $\dfrac{a}{2\beta}$, tertii ad tertium $\dfrac{a}{3\beta}$ etc.

vel $\dfrac{\beta}{a}$ $\dfrac{2\beta}{a}$ $\dfrac{3\beta}{a}$

summa harum rationum est $\dfrac{a^2}{a}=a$.

Tota inquisitio in posterum arithmeticae infinitorum in eo verti debet, ut inveniantur regulae, quarum ope, datis rationibus partium singularum unius totius ad singulas partes totius alterius, ratio inveniri possit, totorum inter se. Manifestum enim est, rem esse determinatam, ac datis istis partium rationibus, necessario emergere per synthesin

14–16 Vid. ubi de voluto centro gravitatis.

1–5 Porro ... etc. *erg. L*

13 summa: Leibniz summiert die untere Folge; genauer müsste es $\frac{1}{2}a$ heißen. 18 Vid.: vgl. dazu N. 16_2 Teil 2.

certas ac determinatas totorum rationes, etsi hactenus regrediendo per analysin non deprehendamus.

$\frac{a}{b} \underset{\times}{+} \frac{c}{d} \propto \frac{a+c}{b+d} \times \frac{ad+cb}{bd} \qquad \frac{abd+cbd}{b^2d+d^2b} \qquad \frac{adb+ad^2+cb^2+cbd}{b^2d+d^2b}$

Ergo differentia inter $\frac{a+c}{b+d}$ et $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}$ qua hoc excedit illud, est $\frac{ad^2+cb^2}{b^2d+db^2}$.

Si iam addenda: $\frac{a+c}{b+d}$ $\frac{e}{f}$, fiet $\frac{a+c+e}{b+d+f}$ $\frac{af^2+cf^2+[eb^2+ed^2+2bed]}{b^2f+d^2f+2bdf+f^2b+f^2d}$.

[Iam $EN = a-x$. et $KE = y$. et $AC = a$.]

Tang. compl. $\frac{CD}{EN} = \frac{AC}{AN}$. $CD = \frac{AC \frown EN}{AN}$. $\frac{a^2-ax}{y}$.

At tang. semicompl. ita. $\frac{2CF}{EN} = \frac{\psi C = 2a}{\psi N = a+y}$. Ergo $2CF = \frac{a \frown EN = a^2-ax}{a+y}$.

Denique secans complementi $= AD = \frac{a^2}{y}$.

Habemus summam omnium tang. compl. $\frac{a^2-ax}{y}$. tang. semicompl. $\frac{a^2-ax}{a+y}$.

Desideratur summa omnium secant. compl. $\frac{a^2}{y}$ vel summa tangentium semiarcus seu

5 eb + ed *L ändert Hrsg.* 6 f. *(1)* NB. Tang. semicompl. | $= \frac{\mathrm{a^2-ax}}{\mathrm{2y}}$. *erg., nicht gestr.* | *(a)* Imo potius tan *(b)* Tang. compl. = *(c)* Nam $\frac{\mathrm{CF}}{\frac{\mathrm{EN}}{2}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{KE}}$. ergo CF $= \frac{\mathrm{AC} \frown \frac{\mathrm{EN}}{2}}{\mathrm{KE}}$. *(aa)* Iam $\frac{\mathrm{EN}}{2}$ *(bb)* et $\frac{\mathrm{AC \frown EN}}{\mathrm{2KE}}$. Iam EN = a − x. et KE = y. et AC = a. ergo CF $= \frac{\mathrm{a^2-ax}}{\mathrm{2y}}$. Sed $\frac{\mathrm{CD}}{\mathrm{EN}} = \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{AN}}$. Ergo CD $= \frac{\mathrm{CA \frown EN}}{\mathrm{AN = EK}}$. ergo CD $= \frac{\mathrm{a^2-ax}}{\mathrm{y}}$. *(2)* | Iam EN . . . = a. *erg. Hrsg.* | Tang. compl. *L* 11–490,1 seu figura semicissoeidis *und* applicata asymptoto parallela *erg. L*

3 $\propto$: Das Zeichen bedeutet hier fiet, s. Z. 5. 10 Habemus: Die erste Aussage ist richtig (s. o. Prop. 20 u. 25.), die zweite hingegen falsch (s. o. Prop. 53.).

figura semicissoeidis: $\dfrac{ax}{y} = z$. applicata asymptoto parallela.

Quadrata secantium complementi sunt: $\dfrac{a^4}{y^2} = \dfrac{a^4}{ax - x^2}$.

Momenta ex vertice: $\dfrac{a^2}{\sqrt{\dfrac{a}{x} - 1}}$.

$z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax - x^2}}$. $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{\cancel{2}ax - x^2}$. $\cancel{2}z^2ax - x^2z^2 = a^2x^2$. Ergo $\cancel{2}z^2a - xz^2 = a^2x$. Ergo $\cancel{2}z^2a = a^2x + xz^2$. Ergo $\dfrac{\cancel{2}z^2a}{a^2 + z^2} = x$. vel si Cartesii notis pro z substituas x. pro x, y fiet aequatio figurae segmentorum circuli: $\dfrac{\cancel{2}x^2a}{a^2 + x^2} = y$.

Ita habemus applicatas figurae segmento circuli symmetrae, ab irrationalitate liberatas et ad modum cuiusdam quasi hyperboloeidis expressas. Quod hactenus potuit nemo, dimensionem circuli dare infinita serie numerorum rationalium.

Hactenus nihil erratum est.

Est autem magni momenti haec circuli reductio ad rationalitatem, qua nemo quicquam maius ad circuli dimensionem praestitit.

Porro momentum quoque figurae eiusdem, ex altitudine, seu summa quadratorum z vel applicatarum cissoeidis dimidiatae, asymptoto parallelarum ad hyperbolam reduci potest. Nam z asymptoto parallela aequalis est: $\dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo $z^2 = \dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2} =$

---

2 $y^2 = ax - x^2$.

5–7 = x. | vel si ... = y. *erg.*; applicatae semicissoeidis, basi, seu diametro circuli generatoris parallelae et *(1)* parallelae *(2)* perpendiculares et asymptotae parallelae *(3)* perpendiculares asymptoto *erg. u. gestr.; darüber, nicht gestr.:* 𝔖 | Ita *L* 14 f. dimidiatae, *(1)* basi parallelarum, seu ad asymptotam perpendicularium, eiusdem pene aequationis est, cuius sunt *(a)* axi | seu asymptoto *erg.* | *(b)* basi parallelae *(2)* asymptoto ... potest *(a)*, nimirum mutato tantum + in − . Nam z basi parallela, aequalis *(b)*. Nam *L*

---

16 $ax - x^2$: stattdessen müsste es genauer $2ax - x^2$ heißen. Die folgende Rechnung führt Leibniz mit diesem Fehler konsequent durch, verbessert dann, streicht aber schließlich sämtliche hinzugefügten Zweien in Z. 4–6 wieder aus.

$\frac{a^2x}{2a-x}$. Ideoque respondet momento figurae secantium ex vertice, seu opposita asymptotae. Nam si x crescere incipiat ab opposita asymptotae, erit hyperbola $\frac{a^2}{a-x}$. Eiusque momentum ex illa opposita: $\frac{a^2x}{a-x}$. Hinc dubitandum non est momentum istud ex quadratura hyperbolae pendere. (Hyperbola est, $\frac{a^2}{a-x} = y$. Ergo $a^2 = ay - xy$. Ergo $a^2 + xy = ay$. Ergo $xy = ay - a^2$. Ergo $x = \frac{ay-a^2}{y}$. vel $x = a - \frac{a^2}{y}$. Ergo y abscissa ex asymptota semper maior a. Hinc apparet aequationem ipsius $x = \frac{2z^2a}{a^2+z^2}$. aequationi ipsius $z^2 = \frac{a^2x^2}{2ax-x^2}$. valde affinem esse, sed illam tamen non aeque reducibilem.[)]

Nota autem summa quadratorum parallelarum asymptotae seu z^2 inventa, inventum utique momentum cissoeidis ex basi seu circuli diametro, cui applicata intelligitur, ac per consequens haberi summam ipsarum x. seu basi parallelarum, ductarum in distantias a basi, quae scilicet his semiquadratis aequatur.

Notandum ante omnia cum dicitur $z = \frac{ax}{\sqrt{ax-x^2}}$. Tunc posito quod x sit initio minimum, ipsam z fore minimam applicatarum asymptotae parallelarum, nam posito x esse infinite parvum, ac proinde negligi velut non ascriptum erit $z = \frac{a}{\sqrt{a}}$. ac proinde linea qualibet assignabili minus. Nam sic $z^2 = \frac{a^2}{a}$. seu $z^2 = a$.

Ergo inspecta figura quam de cissoeide descripsi[:] x erit AD. et z erit DI. At applicatae inversae IK, non sunt x. sed $a-x$. verum x sunt applicatae spatii complementalis. Ergo omnia momenta ipsorum $a-x$ ad altitudinem sunt aequalia semiquadratis omnium z ad basin. Ergo xz ad asymptotam reducta sunt ad quadraturam hyperbolae.

1 Ideoque *(1)* aequatur *(2)* respondet *(3)* aequatur *(4)* respondet momento *(a)* hyperbolae ex *(b)* figurae *L* 3 $\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}$. *(1)* Ergo cissoeis ex asymptota aequiponderat hyperbolae ex opposita asymptotae. Modo idem *(2)* Hinc *L*

16 inspecta figura: s. N. 34, S. 575, Fig. 4.

At semiquadrata omnium x. vel momenta omnium z. ex asymptota aequantur sinuum cylindro, atque ideo zx vel (quia $z = \dfrac{ax}{\sqrt{ax-x^2}}$) $\dfrac{ax^2}{\sqrt{ax-x^2}} = a \frown \sqrt{ax-x^2}$. Ergo $\dfrac{x^2}{\sqrt{ax-x^2}} = \sqrt{ax-x^2}$. Ergo $x^2 = ax - x^2$. Ergo $2x^2 = ax$. Ergo $2x = a$. absurdum. Error ergo alicubi.

Eius ratio haec est[:] primum sumsi semiapplicatam cissoeidis asymptotae parallelam esse hanc $z = \dfrac{ax}{y}$. posito y esse sinum, quoniam scilicet secans compl. erat $\dfrac{az}{y}$. et tang. compl. erat $\dfrac{a^2-ax}{y}$. at horum differentia est tangens semiarcus. Ergo tangens semiarcus est $\dfrac{ax}{y}$. ducantur in $2a - x$. distantias a basi, fiet: $\dfrac{2a^2x - ax^2}{y} = \dfrac{2a^2x - ax^2}{\sqrt{ax-x^2}} =$ [*bricht ab*]

Sed de his alias exquisitius, sufficit interea certam exquisitamque detexisse rationem exprimendi progressionem elementorum circuli, aut figurae circularibus symmetrae, infinita serie numerorum rationalium. Quod hactenus in hyperbola ac hyperboloeidibus, parabolaque aliisque id genus figuris, in circulo nunquam fieri potuit, novaque methodus detecta arcus, sinus, segmenta supputandi.

Si $\dfrac{z^2a}{a^2+z^2} = x$. series numerorum rationalium ipsis x respondentium ita exhiberi potest: posito $a = 10$. nam assumi potest quantumcumque, et in continuo, infinitum:

$$\frac{10}{\substack{100+1\\101}} + \frac{40}{\substack{100+4\\104}} + \frac{90}{\substack{100+9\\109}} + \frac{160}{\substack{100+16\\116}} + \frac{250}{\substack{100+25\\125}} + \frac{360}{\substack{100+36\\136}} + \frac{490}{\substack{100+49\\149}} +$$

$$\frac{640}{\substack{100+64\\164}} + \frac{810}{\substack{100+81\\181}} + \frac{1000}{\substack{100+100\\200}}$$

17–20 Imo hoc est complementum rectanguli isoparalleli ad segmentum duplicatum, potest a assumi $\dfrac{1}{10}$. et $z = \dfrac{1}{100}\ \dfrac{2}{100}\ \dfrac{3}{100}$.

Asymptota conchoeidis asymptotae hyperbolae aequalis est, differentiis, cum ipsarum utriusque applicatarum incremento decrescentibus.

Spatium hyperbolae asymptoton esse magnitudine infinitum facile demonstrari potest quoniam cylinder eius infinitae magnitudinis. Quod rursus sic probo: Quoniam residuum eius, demto momento ex asymptota vel basi, est momentum ex opposita asymptotae seu ex vertice spatii asymptoti, at hoc momentum necesse est ad alterum illo esse ut infinitum ad finitum, adeo ut si momentum ex basi est finitum, alterum sit infinitum, et si momentum ex basi est infinitum, momentum ex vertice futurum sit plus quam infinitum. Cuius rei manifesta ratio est, quoniam in asymptotam aliasque ei parallelas numero infinitesimarum finito distantes quippe infinitas ducta puncta faciunt plana a^2. Ergo lineae in ea ductae facient solida.
Imo ℌ, videndum. Istae enim faciant solida, facient tantum finita, quoniam et plana fuerant finita. Sed de hoc porro videndum.

Credo Collinium summam inire terminorum progressionis harmonicae divisione illa per partes adhibita, qua et Mercator usus est.

$$\frac{z^2}{z^2+a^2}.$$

Iam $\dfrac{1}{1+a} = 1 - a + a^2 - a^3 + a^4 - a^5$ etc. Ergo $\dfrac{z^2}{z^2+a^2} =$

$$\left\{\begin{array}{rl} z^2 & -a^2 + a^4 - a^6 + a^8 - a^{10} \text{ etc.} \\ 4z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 9z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 16z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \\ 25z^2 & \underline{\hspace{6cm}} \end{array}\right\}$$

17 NB. si a fractio est, necesse est etiam z esse fractionem fractionis, cum sit portio ipsius a.

18–22 *Links neben dem Schema:* Summa horum omnium linea est.
Darunter, gestrichen: Male non z^2 sed 1.

14 Collinium: vgl. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. IV. 1673 (*LSB* III, 1 S. 60).

seu $z^2+4z^2+9z^2$ etc. | $+a^4+a^8+a^{12}$ etc. $-a^2-a^6-a^{10}$ etc. ducta in a. id est infinities sumta.
Seu: $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc.
Et quia $z^2+4z^2+9z^2$ etc. $=\dfrac{a^3}{3}$. habebimus: $\dfrac{a^3}{3}+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-a^3-a^7-a^{11}$ etc.
vel $+a^5+a^9+a^{13}$ etc. $-\dfrac{2a^3}{3}-a^7-a^{11}$ etc.

Unde posita a minore quam 1. v. g. $\dfrac{1}{2}$. posteriores potestates erunt fractiones tam parvae ut tuto negligi possunt, habebiturque approximatio facillima, quantam volemus. Haec pro quadratura totius, si partis tantum quaeratur multiplicationis per a. multiplicandum per z. seu altitudinem abscissamve ex vertice.

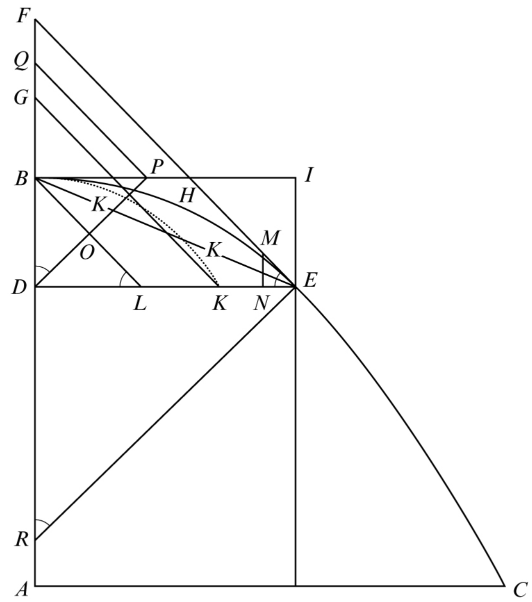
Si a v. g. ponatur 10. posteriores potestates continue crescent, si ponatur esse $\dfrac{1}{10}$. nec hoc satisfacit. Ergo quemadmodum si 1. sit infinitesima lineae seu punctum, a foret infinitum. Ita si a volumus facere fractionem quantumlibet, et si opus infinite, parvam, ipsum 1. intelligamus $= a^2$. seu quadratum radii. Cuius infinitesima est a. et loco infinitesimae, intelligatur esse $\dfrac{1}{100,000}$. Imo nec opus est postrema, negligi potest summa eorum enim in infinitum, quia sunt progressionis geometricae. Denique omnia multiplicanda per a. id est 100,000, quaeritur enim non summa omnium $\dfrac{z^2}{z^2+a^2}$. sed omnium $\dfrac{z^2a}{z^2+a^2}$.
Ille demum maximus usus est, quod idem fit, etiamsi series sit finita, seu altitudo divisa in partes finitas, eodem modo enim hac tangentium methodo summa eius inveniri potest, ut credo. Videndum tamen, an scilicet sinus in suas ipsorum differentias ducti, producant eorum semiquadrata, in summa. Forte utilius infinitis summa potius omnium DK uti, quia ea non ad basin sed simpliciter. Nam infinitis summa omnium DE ad basin difficilis, quia basis non potest dividi in partes aequales.

17–22 Ille demum ... partes aequales. *erg.* *L*

8 per a: von hier geht ein Verbindungsstrich zu ducta in a Z. 1 aus.

[*Teil 3*]

Theorema est in omni figura: secantes ad basin aequant rectangulum abscissae in applicatam, segmento duplicato auctum. Et hoc quidem in circulo facit quadrilineum duplicatum, seu sectorem duplicatum.



[*Fig. 2*]

Esto figura quaelibet ABC. cuius applicata quaelibet DE. tangens [EF]. abscissa trans verticem BF. eius dimidia BG.

2–4 Male fit regula generalis.

2 est | generale *gestr.* | in *L* 2 basin *(1)* aequantur quadrilineo figurae duplicato, sciendum est autem in circulo, quadrilineum *(2)* aequant *L* 6 EF *erg. Hrsg.*

2 Theorema: für eine eingehende Analyse des Theorems vgl. D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 41 f.

Aio summam omnium [DG] ad basin semper esse quadrabilem, aequarique triangulo BIE. quod ita demonstro:

Summa omnium BD ad basin complet trilineum concavum $BIEHB$. Summa autem omnium BG ad basin aequatur segmento BHE (quoniam ut alibi demonstratum est summa omnium $BF = 2BG$, ad basin, aequatur duplicato segmento BHE). Ergo summa omnium $DB + BG = DG$. ad basin = trilineo concavo $BIEHB$ + segm. BHE = triang. BIE.

Hinc habetur methodus geometrica universalis, incomparabilis, admiranda, divina, quadrandi figuram quamlibet datam, quod sic ostendo.

Ducatur recta GK parallela FE. Aio summam omnium DK simpliciter sive ad altitudinem, id est uti iacent, id est figuram altitudine BD. basi DK. et curva per omnia puncta K inter B et K praesens rectae DE, ducta, comprehensam aequari triangulo BIE. Nam ut demonstratu facile est, omnes DK in altitudinem aequantur omnibus DG in basin, id est, ut demonstravimus paulo ante, triangulo BIE.

Quare data quadam figura, quaeramus per analysin aliam figuram, in qua omnes DE seu applicatae figurae datae, faciant officium rectarum DK. Triangulum BIE figurae inventae aequabitur figurae datae $BKKD$.

Oportet autem figuram datam $BKKD$ esse convexam, seu cuius applicatae sint applicatis trianguli aeque alti BDL maiores, uti patet. Quare si figura concava quadranda offeratur, sumenda est convexa, seu complementum eius ad rectangulum.

Sed quid circuitionibus opus est, quid ex figuris datis novas per analysin quaerimus, cum nunc tandem praeter opinionem inciderimus in methodum non tantum generalem, sed et ita expeditam, ut ad figurae cuiuslibet datae quadraturam absolutam, non nisi tangente eius ducto opus sit.

1 DB *L ändert Hrsg.*

4 alibi: s. o. Satz 10.

Data ergo figura quadranda quacunque $DBHE$. ductoque tangente EF. ducatur ei parallela BL. aio triangulum BDL aequari trilineo concavo (si figura data convexa est) seu complemento ($BIEHB$) figurae datae ($DBHE$) ad rectangulum (DI) vel quod idem est triangulum BLE = segmento BHE.
Demonstratio haec est: intelligatur triangulum figurae characteristicum esse MNE. cuius scilicet altitudo MN est infinitesima altitudinis figurae, triangulum hoc simile est trian-

---

496,15–17 *Nebenbetrachtung:*

NB. Data figura geometrica quadratrice figurae angulorum et omnium eius partium, datur sectio angulorum universalis. Ponatur figura ista quadratrix esse decimi gradus v. g. sursolido-surdesolido cubica etc. Ea semel in plano descripta, poterunt problemata omnia geometrice effici etiam quae sunt centesimi et millesimi, et cuiuscunque gradus altioris, et inveniri centum, et ultra si velis, mediae proportionales, cum sectio angulorum inventioni mediarum proportionalium respondeat.
Sed iam videndum si semel fieri possit, ut aequatio quae per analysin centesimi gradus esse ostenditur, reduci potest ad decimum gradum. Videtur eodem pure, quae decimi gradus reduci posse, ad primum ac secundum, et in plano exhiberi. Quo posito absolutum foret mesolabum.

$$\sqrt{}_{10}\ a^{10}+b^{10}\quad \sqrt{}_{20}\ a^{20}+b^{20}+2[a^{10}b^{10}]$$

Reducatur[:] quasi extractione radicis reduci non posset, et ideo quasi esset gradus decimi. Deprimetur ergo, et reducti radix quadrata, cubica. etc. tandem deprimetur infra decimum.

NB. Si v. g. omnes altiores dimensiones reduci possunt ad aliquam certam minorem omnes radices extrahi possunt. Nam si certa illa est sexta, ergo ex aequatione sextae dimensionis extrahi potest radix quadrata. Ex aequatione octavae *(!)* radix cubica etc. Ergo extrahi potest radix cubica, si ex altiore, ergo et ex inferiore exaltando inferius, et postea rursus dividendo, v. g. pro valore $\sqrt{}_c\ a^3+b^3$. dici potest a valere c^4. et b valere d^4 etc. fiet $\sqrt{}_c\ c^{12}+d^{12}$. vel sic: $a^3d^4+b^3d^4, \sqrt{}_c$.

2 Falsa pars eorum quae sequuntur falsum[,] inquam summam omnium DL esse triangulum. Sed haec nihil derogant methodo praecedenti utique infallibili.

14 analysin | non nisi *gestr.* | centesimi *L* 18 $a^{20}b^{20}$ *L ändert Hrsg.*

gulo FDE per constructionem, ergo et triangulo BDL. Ergo
$$\frac{BD}{MN} = \frac{DL}{NE} = \frac{BL}{ME}.$$
Ideo primum $BD \frown NE = DL \frown MN$. id est BD ad basin aequantur summae omnium DL. nempe ad altitudinem, seu triangulo BDL. Nam quia omnes BD faciunt triangulum, seu arithmetice proportionales sunt, ideo etiam omnes DL sunt arithmetice proportionales, ac proinde triangulo BDL continentur. At omnes BD ad basin vel NE implent complementum figurae ad rectangulum $BIEHB$. idem enim est, sive basi DE, sive oppositae BI applicentur. Hinc sequitur triangulum BLE aequari segmento BHE. Nam $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDE = \bigtriangledown BIE$. item $\bigtriangledown BDL =$ compl. fig. $BIEHB$. Ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDE - \bigtriangledown BDL$, seu $\bigtriangledown BLE$ erit $= \bigtriangledown^{\text{lo}}\, BIE-$ compl. fig. $BIEHB$, sive segmento BHE.

Figurae illae, quae hac methodo describentur, erunt vere quadratrices, cum quadratrices veterum non sint geometricae, seu describi geometrice non possint.

Experiemur rem in figura cognitae dimensionis, qualis est parabola, ubi $BD = BF$. Ergo et $DL = LE$. ergo $\bigtriangledown^{\text{lum}}\, BDL$ quarta pars figurae, cum debeat esse tertia. Hinc patet errorem aliquem subesse debere. Is vero in eo est, quod summam omnium DL triangulum BDL constituerem re non satis examinata.

Verissimum est summam omnium DL aequari triangulo BIE. sed haec summa non est semper triangulum, etsi summa omnium DB. sed ad altitudinem, non ad basin, triangulum sit.

---

2 $BD \frown ME$ (segmentum, in circulo, duplicatum) $=$ summae omnium $BL \frown MN$ (ea ergo in circulo pendet ab eius quadratura).

$DL \frown ME = BL \frown NE$.

11 f. Figurae ... possint. *erg. L*

DL autem sic investigabimus: $\dfrac{DL}{DE} = \dfrac{BD}{DF}$. ergo $DL = \dfrac{BD \frown DE}{DF}$. Et si curva BHE sit circulus erit

$$DL = \dfrac{xy}{\dfrac{a^2}{x} - a + x} = \dfrac{x^2y}{a^2 - ax + x^2} = z.$$

$$\text{seu } \dfrac{x \frown \sqrt{2ax - x^2}}{a^2 - ax + x^2} = z. \text{ seu } \dfrac{2x^5a - x^6}{\square, a^2 - ax + x^2} = z^2 \text{ etc.}$$

Inde facile haberi potest etiam x. sed quia parum credibile est liberatam iri ab irrationalitate, id linquamus. Et ad praeclaram illam methodum superiorem revertamur, eique novam non absimilem, nec minus facilem universalemque adiciemus.

Ducatur recta DO perpendicularis ad BL, aio cuiuscunque tandem generis sit curva BH summam omnium BK ad arcum semper iniri posse. Quia enim triangulum BOD simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BDL vel $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ MNE, et angulus $BDO =$ angulo DLB vel NEM, ideo

$$\dfrac{BD}{ME} = \dfrac{BO}{MN} = \dfrac{DO}{EN}.$$

Ergo $BD \frown MN$. semiquadratum maximae $BD = BO \frown ME$. seu BO in arcum.
$BD \frown EN$ (trilineum concavum) $= DO \frown ME$. semper ergo summa DO in arcum pendet a quadratura figurae et vicissim.
$BO \frown EN = DO \frown MN$.

Recta DO producatur, dum occurrat rectae BI in P. Aio summam omnium BP ad basin semper quadrari posse. Est enim $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ PBD simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ MNE. et angulus BDP aequalis angulo NEM. Ergo

$$\dfrac{DP}{ME} = \dfrac{PB}{MN} = \dfrac{BD}{EN}.$$

---

1 f. *Anderer Ansatz:*
$\dfrac{\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{2x}}{x} = \dfrac{\dfrac{a^2}{x}}{z}$. Ergo $z = \dfrac{a^2}{x} \frown \dfrac{x^2}{\dfrac{a^2}{\cancel{x}} - \dfrac{a^2}{2\cancel{x}}}$. $z = \dfrac{a^2}{x} \frown \dfrac{2x^2}{a^2}$. $z = 2x$.

14 f. vicissim. | Innumeras dare possumus figuras quadrabiles, datis ipsis *gestr.* | BO ⌢ EN *L*
15 f. DO ⌢ MN. | Sed hoc obiter, nunc ad methodum novam universalemque | aliam a priore *erg.* | quadrandi omnes figuras accedemus: *gestr.* Recta ... occurrat *gestr. u. wieder gültig gemacht* | rectae *L*

Ergo $DP \frown EN$ seu ad basin $= BD \frown ME$ ad arcum seu momento arcus ex vertice.
$DP \frown MN = PB \frown ME$. seu summa omnium DP simpliciter = summae omnium PB ad arcum.
$PB \frown EN = BD \frown MN$. seu summa PB ad basin = semiquadrato BD.

Sed quia PB ad basin quadrabilis, ergo summa omnium PQ absolute erit quadrabilis, nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.
Ecce ergo aliam methodum universalissimam quadrandi figuram quamlibet datam, si quaeratur alia figura, in qua applicatae omnes figurae datae, faciant functionem rectarum QP.

Intelligi ex hoc exemplo potest, plerumque si quae lineae ad arcum basinve semper quadrentur, alias eius ope reperiri posse, quarum summa simpliciter semper quadretur. Ac totidem habebuntur methodi universales quarum singulis quadrari possunt figurae in universum omnes. Sed ex his tres illae methodi principales, quarum duas hoc loco, primam alibi dedi, ubi ostendi summam omnium DR semper quadrari posse; videntur suffecturae, saltem ut se mutuo examinent vitandi erroris calculi causa. Cum alioquin vel unica earum sit suffectura ad problemata in universum omnia resolvenda.

3 f. arcum. | Sed haec obiter, nunc tandem *gestr.* | PB $\frown$ EN *L* 10–16 Intelligi ... resolvenda. *erg. L*

---

6 nam $PQ \frown MN = PB \frown EN$.: Diese Begründung ist falsch, anstelle davon müsste es vielmehr $\dfrac{PQ}{ME} = \dfrac{PB}{EN}$ heißen. 14 alibi dedi: s. o. Prop. 6,12; die allgemeine Aussage steht N. 28 S. 503 Z. 24 f.

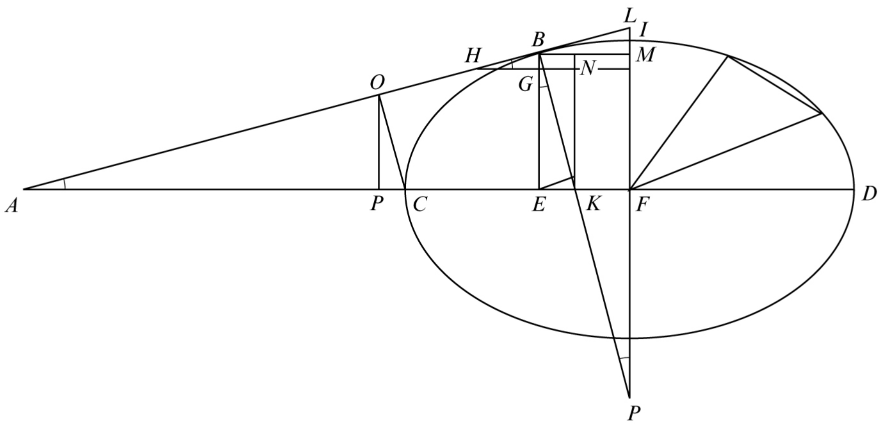
28. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM ELLIPSIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 359–360. 1 Bog. 2°. ca 3. S. — Von Bl. 359 ist die obere äußere Ecke abgerissen, hinzu kommen drei kleinere Ausrisse am oberen Rand, dadurch geringfügiger Textverlust. Von Bl. 360 fehlt außen ein Streifen von ca 9 cm Breite, zudem ist ein trapezförmiger Teil von ca 11 x 18 cm herausgerissen. (Möglicherweise sind die zwei Stücke beieinandergeblieben.) — Überschrift ergänzt, verschiedene spätere Zusätze, unter Fig. 1 Fragment einer Bleistiftzeichnung, weitere isolierte Betrachtungen. Textfolge: Bl. 359 r°, Bl. 359 v° oben. Bl. 360 v°, interlineare Zusätze = Teil 1; separate Zusätze in der Mitte der Doppelseite 360 v°/360 r° = Teil 2; Bl. 359 v° Rest und Bl. 360 r° = Teil 3; isolierte Betrachtungen auf Bl. 360v° sowie Bl. 359 v° und 360 r° = Teil 4.)
Cc 2, Nr. 548

Datierungsgründe: In dem vorliegenden Stück wird das ursprünglich am Kreis gefundene charakteristische Dreieck auf die Ellipse angewandt. Die Studie ist demnach etwas später als N. 21 und N. 23 verfasst; sie setzt die Betrachtungen von N. 26 und N. 27 fort. Die beiden nächsten Nummern, N. 29 und N. 30, sind jeweils unmittelbare Folgestücke.

[*Teil 1*]

T r i a n g. c h a r a c t e r i s t i c u m e l l i p s i s



[*Fig. 1*]

Character ellipsis: Si quae⟨libet contin⟩gens product⟨ae ellipseos dia⟩me⟨tro cuicumque occurrat,⟩ atque a puncto contactus B ad eandem diametrum recta B⟨E ordinatim ap⟩plicetur, er⟨it rectangulum sub⟩ diametri portionibus AE. EF a centro F per contingentem AB applicatamque BE abscissis, semidia⟨metri quadrato aequale.⟩

$CF = a$. $EF = b$. Iam $EB = \llcorner Rq\, a^2 - b^2 \lrcorner \frown \beta$. Omnis enim ⟨— —⟩ habet rationem quandam certam ad sinum cuiusdam circuli, quae ratio sit β. et radius illius ⟨— —⟩

P r o p. 1. Iam ⟨— —⟩ ergo $\dfrac{CF\,\square}{EF} = AF$. ergo summa AE. seu $AF - EF$. pendet a spatio hyperbolico quia summa EF quadra⟨— —⟩

Ducatur ⟨trian⟩gulum characteristicum inassignabile BGH. simile ipsi ABE. ita ut HB sit portio inassignabilis curvae, HG portio infinite parva altitudinis, BG portio infinite parva basis. Comparatio haec erit: $\dfrac{AE}{GH} = \dfrac{AB}{BH} = \dfrac{BE}{BG}$. Hinc propositiones transformatoriae.

P r o p. 2. $AE \frown BH = AB \frown GH$. applicatae spatii hyperbolici translatae ad curvam, aequantur summae tangentium ellipseos.

P r o p. 3. $AE \frown BG = BE \frown GH$. seu applicatae hyperbolicae ad basin, quadrantis elliptici (quarum summa aliunde facile haberi potest, cum haberetur si basis FI esset $= CF$. seu si ellipsis essset circulus, ut alibi ostendimus summam secantium circuli in basin aequari radio in arcum; et ideo sufficit hoc productum

7 *Zu* summa AE: Male. Summa omnium AF est spat⟨— —⟩

1–4 *Bezeichnungen erg. L; Textverlust erg. Hrsg. nach de Witt.* 6 et radius illius ⟨— —⟩ *erg. L* 7 $\dfrac{\mathrm{CF}\,\square}{\mathrm{EF}}$ = *(1)* AE. *(2)* AF. *L* 7 summa AE. | seu AF – EF. *erg.* | *(1)* est *(a)* hyperbola *(b)* spatium hyperbolicum *(2)* pendet *L* 8 quia summa EF quadra⟨— —⟩ *erg. L* 10 sit portio *(1)* minima *(2)* inassignabilis *L* 18 circuli *erg. L*

1–4 S. J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, Buch I Satz 18, *DGS* II, S. 224. 3 portionibus AE. EF: Anstelle von AE müsste es AF heißen. Leibniz hat das Versehen in Z. 7 korrigiert. Er hat die Verbesserung allerdings nur dort vorgenommen. Dadurch werden alle Betrachtungen, in welche diese Beziehung eingeht, falsch. 17 alibi ostendimus: N. 27, prop. 1. 18 sufficit: Diese Aussage ist unzutreffend.

multiplicari per β. rationem applicatae ellipticae ad circularem, idemque haud dubie hic provenit), aequantur portioni ellipticae CBE.

P r o p. 4. $AB \frown BG = BE \frown BH$. seu tangentes ellipticae ad basin, aequantur momento arcus ex altitudine. Si ergo summa inveniri potest tangentium ellipticarum, ad basin, haberi potest superficies sphaeroeidis circa altitudinem, adde prop. 5. (pendet ex q. circ.)

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BGH et BEK. Ergo: $\dfrac{BK}{BH} = \dfrac{BE}{GH} = \dfrac{EK}{BG}$.

P r o p. 5. $BK \frown GH = BE \frown BH$. Summa perpendicularium ad altitudinem scilicet, aequatur momento arcus ex altitudine.

C o r o l l. Ergo summa perpendicularium ad altitudinem aequatur summae tangentium ad basin, adde prop. 4. et 10. (pendet ex q. circ.).

P r o p. 6. $BK \frown BG = EK \frown BH$. Perpendiculares ad basin aequantur intervallis perpendicularium et applicatarum in altitudine, ad arcum (proportionalibus EF ad arcum seu momento arcus ex basi). Ergo CE ad curvam pendent ex momento arcus ex basi (pendent ex q. hyp.).

P r o p. 7. $BE \frown BG = EK \frown GH$. Sinus seu applicatae ellipticae ad basin (quae figura q u a d r a r i potest, ut in sinubus circuli ad basin ostendi), aequantur intervallis applicatarum et perpendicularium in altitudine ad altitudinem.

C o r o l l. 1. Ergo summa intervallorum applicatarum et perpendicularium in altitudine, q u a d r a r i potest.

C o r o l l. 2. Ergo etiam q u a d r a r i potest summa omnium KF seu intervallum perpendicularis a basi, in altitudine sumtorum.

C o r o l l. 3. Et summa omnium CK.

NB. Sinus ad basin in omni figura sunt quadrabiles. Ergo et semper summa omnium EK. Hinc sequeretur ad quadrandam figuram datam, nihil aliud opus esse, quam aliam

6 (pendet ex q. circ.) *erg. L* 8 f. ad altitudinem scilicet *erg. L* 11 (pendet ex q. circ.) *erg. L* 13–15 (proportionalibus ... q. hyp.) *erg. L* 17 ad basin *erg. L* 18 in altitudine *erg. L* 22 f. sumtorum. *(1)* C o r o l l. 3. Ergo et summa omnium BM *(2)* C o r o l l. 3. *L* 24–504,2 NB. Sinus ... $\dfrac{\mathrm{BE}^2}{2}$. *erg. L*

17 ostendi: N. 27, prop. 12.

quaerere, in qua applicatae figurae datae faciant functionem EK. Summa omnium EK, a C usque ad $E = \dfrac{BE^2}{2}$.

$\bigtriangledown^{la}$ similia: ABK et BGH. $\dfrac{AK}{BH} = \dfrac{AB}{GH} = \dfrac{BK}{BG}$.

P r o p. 8. $AK \frown GH = AB \frown BH$. Iam $AK = AE + EK$. Et summa omnium AE est spatium hyperbolicum per prop. 1. Summa omnium EK est quadrabilis prop. 7. coroll. 1. Ergo

C o r o l l. Figura omnium tangentium ad arcum, pendet a quadratura hyperbolae.

Restat quaerenda summa omnium EK ad basin. Ea autem pendet a q. ellipseos quia proportionalis summae omnium EF. ad basin, ut alibi ostendam ex iis quae Schoten. ad Cart. p 245. Ergo summa omnium CE ad basin pendet ab eadem.

P r o p. 9. $AK \frown BG = BK \frown BH$. Ergo secantes ex perpendiculari ad basin, aequantur perpendicularibus ad arcum, adde prop. 14.

P r o p. 1 0. $AB \frown BG = BK \frown GH$. habuimus prop. 5. coroll.

$\bigtriangledown^{la}$ similia: BLM et BGH. $\dfrac{BL}{BH} = \dfrac{BM}{GH} = \dfrac{LM}{BG}$.

P r o p. 1 1. $BL \frown GH = BM \frown BH$. Summa tangentium complementi elliptici ad altitudinem, aequatur figurae sinuum complementi ellipticorum ad arcum, seu momento arcus elliptici ex basi.

C o r o l l. Hac ergo summa opus est, ad inveniendam superficiem sphaeroeidis circa basin voluti.

---

10 *Unter* ostendam: NB.

6 prop. 7. coroll. 1. *erg. L* 9–11 Restat quaerenda ... ab eadem. *erg. L* 13 arcum *(1)* . C o r o l l. 1. Ergo aequantur momento arcus ex altitudine, per prop. 5. *(2)* . C o r o l l. 1. Ergo aequantur summae tangentium ad basin, prop. 5. coroll. 1. *(3)* Corollarium *(4)*, adde prop. 14. *L* 16 f. ad altitudinem *erg. L*

---

10 f. Schoten.: *Commentarii*, *DGS* I S. 245.

Prop. 12. $BL \frown BG = LM \frown BH$. Tangentes complementi elliptici ad basin, aequantur intervallis applicatarum basis, et tangentis in basi assumtis, ad arcum.

Prop. 13. $BM \frown BG = LM \frown GH$. Seu sinus complementi ad basin (= quadrilineo figurae $FCBM$) aequantur summae intervallorum applicatarum basis et tangentis in basi assumtorum, ad altitudinem.

Coroll. Horum ergo summa pendet a dimensione figurae.

Prop. 14. Figura perpendicularium ad arcum, aequatur trilineo CBK portione altitudinis CK, maxima perpendiculari BK, et curva CB comprehenso, duplicato, ablata portione CHB, aequatur ergo quadrilineo $KCBN$.

Coroll. Ergo figura perpendicularium ad arcum pendet a figurae quadratura.

Coroll. Quemadmodum et figura secantium ex perpendiculari, ad basin per prop. 9.

Prop. 15. Si curva in partes notae progressionis (ut aequales, continue crescentes uniformiter etc.) secta, fieri potest, per naturam figurae datae, ut series perpendicularium in ea quoque ratione crescat, quae in progressionem chordarum curvae ducta, sit capax summationis; tunc data dimensione arcus datur area figurae et vicissim.

⟨— —⟩s recta quaedam ⟨— —⟩ ⟨—⟩am ⟨perpendi⟩culariter cuius omnia puncta iacent in eodem plano; et recta quoque in eodem semper plano cum curva maneat, aream zonae productae, ex data curvae area invenire. Problema satis difficile.

---

7 *Zu* Prop. 14. 𝔖. adhuc ab interiecta $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$, videndum an illa nullius considerationis.

9 ablata portione ... KCBN. *erg. L* 12 f. prop. 9. *(1)* Prop. 15. Si *(a)* series *(b)* progressio perpendicularium ad eam speciem redigi potest, in qua ducta basis | seu terminus maximus *erg.* | in certam partem altitudinis | producit summam *gestr.* | seu numeri terminorum, producit summam ut sit in applicatis *(aa)* hyperboloei *(bb)* paraboloeidum, poterit haberi dimensio curvae, data dimensione figurae, et vicissim. Coroll. Ergo si qua sit figura eius naturae, ut perpendicularis *(aaa)* ex curva *(bbb)* ad curvam, inde ductae ad altitudinem sint progressionis *(aaaa)* hyper *(bbbb)* paraboloeidum. *(2)* Prop. 15. *L* 13 partes *(1)* aequales secta, perpendiculares sunt in *(2)* notae *L* 16 datur *(1)* di *(2)* series *(3)* area *L* 20–506,1 difficile. *(1)* Prop. 15. [*sic!*] Quotiescunque in figura quadam contingit, ut quocunque assumto curvae puncto E. *(a)* ea sem *(b)* eadem semper ratio sit *(2)* Nota perpendicularis BK = *(3)* Perpendicularis *L*

Perpendicularis $BK\,\square = [CF\,\square - EF\,\square, \beta^2 + EK\,\square.]$
$\triangledown^{\text{la}}$ similia: ABE et BLM.

$$\frac{AB}{BL} = \frac{AE}{BM} = \frac{BE}{LM}. \qquad\qquad \frac{AB}{BK} = \frac{AE}{BE} = \frac{BE}{EK}.$$
$AB \frown BM = AE \frown BL.$ $\qquad$ $AB \frown BE = AE \frown BK.$
$AB \frown LM = BE \frown BL.$ $\qquad$ $AB \frown EK = BE \frown BK.$
$AE \frown LM = BE \frown BM$, quadrabilia. $\qquad$ $AE \frown EK = BE\,\square$, quadrabilia.

Iam $CF\,\square = AE \frown EF$. Ergo $\dfrac{CF}{AE} = \dfrac{EF}{CF}$. vel $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF}$.

Ex hoc dato iam quaeratur ratio alia triangula similia construendi, quae non ex generali natura omnium figurarum, sed ex speciali ellipseos pendeant. Quod fit inveniendo aliam rationem quae sit $= \dfrac{CF}{EF}$ vel $\dfrac{AE}{CF}$.

Ducatur linea CP parallela AL. manifestum est $\dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BE}{[PF]}$. duo triangula rectilinea. Hinc iam $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AB}{CP} = \dfrac{BE}{[PF]}$. item $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{CP}$. item $\dfrac{CF}{EF} = \dfrac{AE}{CF} = \dfrac{AB}{[PF]}$.

Totidemque construi possunt triangula similia quanquam non sint omnia futura rectilinea. Erunt tamen quaedam rectilinea et videndum quaenam ex illis futura sint similia $\triangledown^{\text{lo}}$ characteristico.

Quaerendum est quoddam triangulum characteristico simile cuius unum latus sit perpetuum, sive id sit latus rectum, sive transversum etc., sive distantia focorum.

1 CF$\square$ + CE$\square$, β^2 + CK. *L ändert Hrsg.* 7 f. $\dfrac{\text{AE}}{\text{CF}}$. *(1)* Ergo si super recta CF erigatur $\triangledown^{\text{lum}}$ cuius altitudo CF quadratum *(2)* Ex *L* 11–13 PM *L ändert Hrsg. dreimal* 11 f. duo triangula rectilinea *erg. L* 14 f. sint | omnia *erg.* | futura *(1)* rectangula *(2)* rectilinea *L* 15 sint *(1)* aequalia *(2)* similia *L* 17 characteristico simile *erg. L*

11 Ducatur: Die Linie CP hat Leibniz in der Figur nicht ausgeführt. Die Punktbezeichnung P tritt in der Figur in anderer Funktion auf.

[*Teil 2*]

⟨— —⟩ ⟨m⟩edia proportionalis inter EK et KA. id est inter EK et E⟨— —⟩
⟨— —⟩ $Rq\,EK\square + AE \frown EK$.
⟨— —⟩ ⟨—⟩$EK\square + BE\square$.

Investigandus est locus omnium BK. altitudini applicatorum, seu locus $Rq\,EK\square + BE\square$. Videndum ad non BP fieri debeat radius. Pro $BE\square = \dfrac{a^2 - EL\square}{\gamma}$ fiet $BK = Rq\,EK\square + \dfrac{a^2 - EL\square}{\gamma}$. ratio autem $EK\square$ ad $\dfrac{EL\square}{\gamma}$ semper eadem δ. et ideo $EK\square = \dfrac{EL\square}{\delta\gamma}$. fiet: $\dfrac{a^2}{\gamma} - \dfrac{EL\square}{\delta\gamma - \gamma}$ [*sic!*].

$$\frac{AK}{AB} = \frac{AB}{AE} = \frac{BK}{BE}.$$

$$AK = \frac{AB\square}{AE} = \frac{AE\square + BE\square, \frown EF}{CF\square}. \qquad EK = \frac{AE\square + BE\square, \frown EF}{CF\square} - \frac{CF\square}{EF}.$$

$$\frac{CF\square\square}{EF\square} + \beta CF\square - AF\beta\square = AB\square = AK \frown AE.$$

$$AK\square - AB\square = BK\square. \qquad AB \frown BK = AK \frown BE. \qquad BK = \frac{AK \frown BE}{AB}.$$

NB. Haberi potest summa quadratorum omnium EK (quippe pyramis) et omnium EB. ergo et omnium KB.

3 AE $\frown$ EK. | $= \dfrac{\mathrm{CF}\square}{\beta}$. Erit ergo ⟨— —⟩ *gestr.* | *L* 4 BE$\square$. | ⟨— —⟩$\dfrac{\mathrm{CF}\square}{\mathrm{EK}\beta}$. | Ergo *nicht gestr.* | ⟨— —⟩$\dfrac{\langle—\rangle \mathrm{F}}{\mathrm{Rq}\,\beta}$. absurdum ⟨—⟩ enim omnes BE $=^{\text{les}}$. *gestr.* | *L* 5 | Latus transversum q. rectum r. Ergo $\dfrac{\mathrm{EK}}{\mathrm{EF}} = \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{q}}$. Ergo EK $= \dfrac{\mathrm{r} \frown \mathrm{EF}}{\mathrm{q}}$. $\dfrac{\mathrm{EK} \frown \mathrm{q}}{\mathrm{r}} = \mathrm{EF}$. *gestr.* | Investigandus *L*

2–4 Trotz des Textverlustes ist die Rechnung klar: Leibniz berechnet die Größe BK auf zweierlei Weise. Aufgrund der (irrigen) Beziehung $CF\square = AE \frown EF$. folgt dann ein absurdes Ergebnis, worauf Leibniz streicht und nur die (richtigen) Ausgangsformeln stehen lässt. 5 Die folgende Betrachtung leidet unter Rechenfehlern und unklarer Bezeichnungsweise; sie wird von Leibniz ergebnislos abgebrochen. 11 Leibniz verwendet hier bei der Quadratbildung keine Klammern; AF ist eine Verschreibung für EF.

NB. BK ad $BP = EK$ ad EF. Ideo porro EK semper ad EF eandem habet rationem, quae est lateris recti ad transversum. Ergo tum summa omnium EK ad summam omnium EF erit ut latus rectum ad transversum, verum etiam momentum curvae ex altitudine ad momentum curvae ex basi, ergo dato uno dabitur alterum, seu data quadratura circuli dabitur q. hyp. et vicissim, imo et sectio angulorum universalis. Imo e r r o r habeo tantum perpendicularium ad basin summam ad altitudinem. Non summam eorum ad basin.

Haberi possunt et omnia AE in EK id est quadrata $\dfrac{CF\,\square}{EF} \frown EK$. id est $CF\,\square$ multiplicata per rationem lateris recti ad transversum. Ergo habemus et $\square^{\text{ta}}$ omnium AB.

Ex prop. 6 hanc consequentiam duco: cum perpendicularis super altitudinem ad basin, sit $= EK$ ad arcum, et EK ad arcum sit ad EF ad arcum, ut latus rectum ad transversum, et EF ad arcum $=$ perp. super basin, ad axem, ergo perpendicularis super axem ad basin, ad perpendicularem super basin ad basin, seu BK ad BP ut latus rectum ad transversum: confirmatio priorum.

Summa omnium BP ad altit. $=$ omnibus MP ad arcum (ob $\bigtriangledown BMP$).

Ad p r o p. 8. Cum autem sit $\dfrac{AE}{BM = EF} = \dfrac{AB}{BL} = \dfrac{BE}{LM} = \dfrac{CF\,\square}{EF\,\square}$. quia $AE = \dfrac{CF\,\square}{EF}$. hinc multae possunt consequentiae duci. Primum $EF\,\square$ ad arcum quadrari pot-

---

1 f. *Zusätzlich daneben in größerer Schrift:* NB.

4 f. *Daneben:* Error

18–509,1 *Darüber:* Dubito; *zusätzlich daneben:* .

6 perpendicularium | hyp. *gestr.* | *(1)* relationem *(2)* ad basin *L* 11 cum *(1)* perpendicularium super altitudinem summa *(2)* perpendicularis *L* 14 super *(1)* axem ad altitudinem, ut *(2)* basin *L* 18–509,1 Primum | EF $\square$ ... spatium hyp. *gestr. und wieder gültig gemacht* | Quod *L*

---

17 Ad p r o p. 8.: Die folgende Betrachtung ist nur teilweise richtig.

est, nam EF ad arcum est, spatium hyp. Quod si ducantur in EF triangularia, quadratur, cum habeatur eius momentum, modo per rationem CF ad FL multiplicetur. $CF\,\square$ autem ad arcum est superficies cylindrica elliptica ducta in CF. Hoc verum constet, si momentum applicatarum spatii hyperbolici sit ex diametro coniugata, quod probabile puto, cum decrescat momentum cum applicata. Sin minus EF in arcum saltem pendebit ex q. hyp. sed credibilior quadrabilitas, quia Hug. pag. 78. iunct. pag. 77. satis explicare videtur EF in arcum pendere ex hyperbola pag. 78. descripta. Eius autem momentum cum applicata decrescens est ex summitate eius E. id est ex diametro coniungata.

$CF\,\square$ ad altitudinem, ut et $EF\,\square$ ad altit. quadrabilia. $CF\,\square$ ad basin quadrabilia, $EF\,\square$ ad basin non sunt quadrabilia, sed pendent ex q. circ.

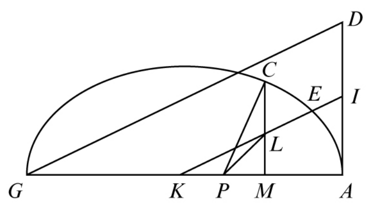
NB. Cavendum, neque enim ratiocinandum est ad rationum summas.

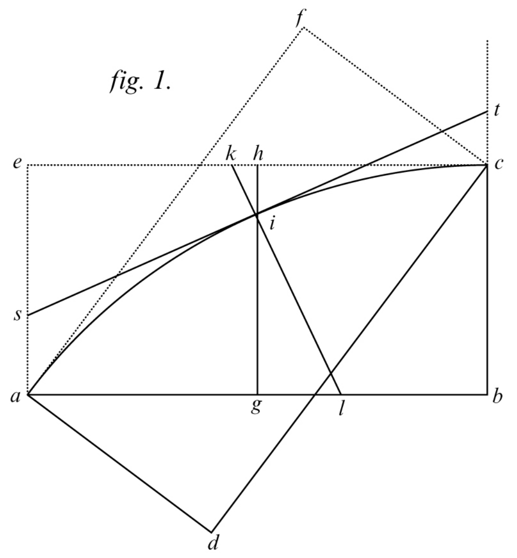
[*Teil 3*]

Ex prop. 4. et 5. habemus duas methodos universales: cuicunque superficiei curvae ex revolutione genitae, exhibere planam aequalem. Et nunc utilius est tangentes ad basin, nunc perpendiculares ad rectam exhibere, prout scilicet figura quae oritur simplicior aut tractabilior est, apparet autem figuras illas quanquam heterogeneas esse inter se aequales. Hinc cuilibet opinor figurae dari potest heterogenea aequalis. Et vicissim ut arbitror cuilibet planae aequalis superficies curva, investigando scilicet locum eiusmodi applicatarum ad altitudinem transformatarum in perpendiculares, et applicatarum ad basin transformandarum, in tangentes.

7 videtur *(1)* spatium *(2)* momentum *(3)* EF *L* 10 f. circ. *(1)* Hinc summa omnium *(2)* NB. *L* 11 summas. | EK sic exprimi debet, vide Schoten. p. 245 ad Cartes.: EK (*(1)* = LMC *(2)* LM = PM ex fig. Schoten.) *gestr.* | *L* 13 *(1)* Notandum est cum duos invenerim modos *(2)* Ex *L* 18 cuilibet *(1)* rectae *(2)* curvae ae *(3)* planae *L*

6 Hug.: Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 77 f. (*HO* XVIII S. 215–221).
10 $EF\,\square$ ad basin: Auch diese Beziehung ist im Sinne von Leibniz quadrierbar. 22 vide: s. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, *DGS* I S. 245, s. a. oben S. 504 Z. 10 f. Leibniz bezieht sich auf folgende Figur:





[*Fig. 2*]

Vicissim cum infiniti assumi possint axes, circa quos aliqua curva data agi intelligatur non est dubitandum, quin ab una qualibet linea curva describi possint, et fortasse complures superficies, in circulos commutabiles, ut curva [*ac*] agi potest circa axem *ab* et *bc*, et *ad* et *cd*. Imo et *ae* et *ec*, et *af* et *cf*.

Nota autem si duo axes paralleli sibi oppositi sint, ita, ut circa unum ut *ab* describatur superficies curva concava, circa alterum ut *ec* superficies curva convexa; momenta sibi mutuo complemento esse ad superficiem curvam cylindricam cuius basis curva *ac*, altitudo, ipsa *ae* distantia parallelorum axium [*ab* et *ce*. Nota].

Cuius rei haec demonstratio est. Quoniam enim cuiuslibet arcus infinite parvi ut *i*, momentum ex *ab* est ipsa recta *ig* seu distantia ab axe librationis, in arcum cuius momentum quaeritur, ducta, vel quod idem est, ei perpendiculariter imposita; et vicissim

3 qualibet | linea *erg.* | curva *(1)* | inf *gestr.* | occurrere *(2)* describi *L* 4 ad *L ändert Hrsg.* 6 paralleli *erg. L* 9 ab, et N. *L ändert Hrsg.* 10 cuiuslibet *(1)* exigui *(2)* arcus *L*

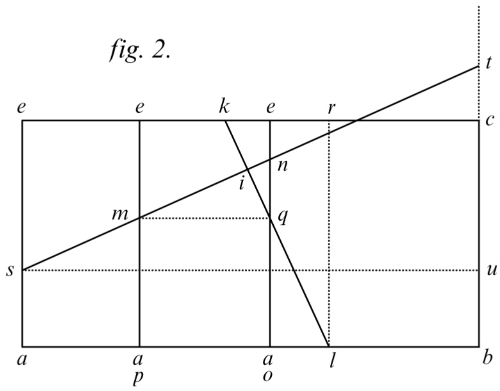
1 [*Fig. 2*]: Zu dieser Figur hat Leibniz eine Vorform gezeichnet. Diese ist gänzlich in der endgültigen Figur enthalten; sie wird deshalb nicht gesondert wiedergegeben.

momentum arcus *i*, ex axe librationis *ec* est recta *ih*. arcui imposita. Apparet autem ubicunque punctum *i* sumatur semper $gi + ih = ae$. Ergo summa omnium $gi +$ *ih* arcui impositorum seu summa utriusque momenti eiusdem arcus tam ex recta *ab* quam ex opposita *ec*. erit summa omnium *ae*, arcui eidem impositorum, seu superficies cylindrica cuius basis curva *ac*. altitudo recta *ae*.

Hinc sequitur dato momento curvae ex recta *ab*. et data recta curvae aequali, haberi etiam ex recta *ec*. Item patet, si summa momentorum ex *ab* et ex *ec* habeatur, habitum iri, quicunque alii axes v. g. *ad*. *df* assumantur, semper enim erunt istae summae, ut axes. Ideo innumeras figuras heterogeneas aequales hac methodo rursus habebimus. Hinc etiam methodi innumerae investigandi quantitatem ipsius curvae, sive possunt infinita exhiberi spatia a quorum quadratura curvae ipsius extensio pendeat.

Nec proinde desperandum, ex infinitis methodis occurrere posse unam pluresve in unaquaque curva, quibus incidatur in spatium quadrabile, quo proinde rectae aequalis curva exhibeatur.

Hinc illud quoque apparet summam omnium perpendicularium *kl* ad altitudinem seu axem *ab*, aequari ipsi *ae* in totam curvam. Quod aliter quoque ac simplicius sic demonstratur:



[*Fig. 3*]

2 f. ih | arcui impositorum *erg.* | *(1)* erit summa omnium ae, seu *(2)* seu *L* 8 f. ut *(1)* axis ab ad axem *(2)* axes. Ideo *(a)* si quando haberi possit *(b)* innumeras *L* 15 f. altitudinem | seu axem ab *erg.* | , aequari *(1)* omnibus hg *(2)* ipsi ae in | totam *erg.* | curvam. *L*

Ducta ad curvam perpendiculari $\underline{kil}$ per punctum datum $\underline{i}$ inter duos axes parallelos $\underline{ab}$, $\underline{ec}$ intercepta, et tangenti $\underline{mn}$ producta utcunque, rectangulum sub parte eius $\underline{mn}$ cadens in duas perpendiculares ad axem utrumque, $\underline{ep}$, $\underline{eo}$, et distantiam axium, $\underline{ea}$, aequatur rectangulo sub distantia perpendicularium tangentis partem abscindentium et perpendiculari ad tangentem. Idem nulla facta curvae mentione lemmate pulcherrimo sic enuntiabitur: Si duae rectae ($\underline{mn}$ et $[\underline{kl}]$) se secent ad angulos rectos; et unaquaeque earum cadere intelligatur inter duas parallelas, ($\underline{mn}$ inter parallelas $[\underline{ep}]$, $\underline{eo}$, decussatim $\underline{kl}$ inter parallelas $\underline{ec}$, $\underline{ab}$), sintque parallelae unius perpendiculares ad parallelas alterius, ductis rectis in distantias parallelarum; altera in distantiam parallelarum alterius, rectangula producta erunt aequalia inter se.

Ostendendum est $EA \frown MN = KL \frown PO$. quod fiet si ostendemus $\dfrac{EA}{PO} = \dfrac{KL}{MN}$. Id vero ita ostendo[:] $\bigtriangledown^{\text{la}}$ NQM et KRL similia sunt, nam angulus LKR $\bigtriangledown^{\text{li}}$ orthogonii KRL idem angulo QKE $\bigtriangledown^{\text{li}}$ orthogonii KEQ, at idem angulus QKE aequalis angulo MNQ vel INQ, quia haec duo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ rectangula NIQ et KEQ habentia unum angulum non rectum communem, KQE, habebunt alteros EKQ et INQ aequales. Ergo anguli INQ vel $MNQ = QKE$ vel LKR. ac proinde in duobus triangulis orthogoniis $MQN.KRL$ duo anguli non recti LKR et MNQ aequales, triangula ergo similia sunt.

1 *(1)* Esto tangens curvae $\underline{\mathrm{mn}}$, perpendicularis *(a)* inter *(b)* ad tangentem *(aa)* per *(bb)* in ipso contactus puncto, inter duos axes parallelos ducta $\underline{\mathrm{kl}}$. *(2)* Ducta | ad curvam *erg.* | perpendiculari $\underline{\mathrm{kil}}$ *(a)* inter duos axes $\underline{\mathrm{ab}}$ et $\underline{\mathrm{ec}}$ intercepta, et ex punctis $\underline{\mathrm{kl}}$ ductis | intra duos axes *erg.* | parallelis et aequalibus ipsi $\underline{\mathrm{ea}}$, nempe $\underline{\mathrm{ema}}$ et $\underline{\mathrm{ena}}$. *(b)* per *L* 2 utcunque, *(1)* pars eius *(a)* incidet *(b)* incidens *(2)* rectangulum *L* 3 utrumque, | $\underline{\mathrm{ep}}$, $\underline{\mathrm{eo}}$, *erg.* | *(1)* ducta in *(2)* et *L* 6 $\underline{\mathrm{el}}$ *L ändert Hrsg.* 7 $\underline{\mathrm{en}}$ *L ändert Hrsg.* 8 alterius, *(1)* rectangula sub recta una et distantia parallelarum alterius | rectae *gestr.* | *(2)* ducta recta *(a)* una in al *(b)* qualibet *(3)* ductis *L* 12 sunt *(1)*, cum sint rectangula, et praeter angulum rectum, habeant alium quoque aequalem. *(2)*. Nam | $\bigtriangledown$ *erg.* | *(a)* QSN simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ *(b)* QMN simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ | et *gestr.* | QSN | simile *gestr.* | et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ *(aa)* QKN, cum sint $\bigtriangledown$ rectangula, et habeant *(bb)* QKE. et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ LKR. Sunt enim omnia rectangula angulum *(aaa)* comm *(bbb)* LKR praeter rectum habentia communem. Igitur angulus RLK = angulo *(3)*, nam | in $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ rectangulo KEQ *erg.* | angulus KQE = angulo | trianguli rectanguli LKR *erg.* | KLR. ergo angulus *(a)* SNQ *(b)* QKE eiusdem $\bigtriangledown^{\text{li}}$ | QKE *erg.* | = angulo RKL. trianguli rectanguli LKR. *(4)*, nam *L* 14 MNQ *(1)* trianguli orthogonii NQM *(2)* vel *L*

---

11 Ostendendum: Ab hier wechselt Leibniz die Bezeichnungsweise und geht zu Großbuchstaben über. Gelegentlich vorkommende Kleinbuchstaben werden vom Hrsg. normalisiert.

Ideo ut est KL ad MN, ita $RL = EA$ ad $MQ = PO$. Ergo $\frac{EA}{PO} = \frac{KL}{MN}$. ac proinde $EA \frown MN = KL \frown PO$. Quod erat demonstrandum.

Est et alterum theorema longe facilius demonstratu[:] nempe tangentem MN productam ST dum duabus parallelis AE. BC occurrat in S et T. ductam in MQ, intervallum duarum parallelarum EP. EO aequari semper intervallo alterarum parallelarum EA, CB, nempe AB in MN. Quod si intervallum PO sit infinite parvum MN, erit portio arcus infinite parva. Ducta enim SU, patet $\bigtriangledown^{\text{la}}$ SUT et MNQ esse similia. Hinc $\frac{ST}{MN} = \frac{SU}{MQ} = \frac{UT}{NQ}$. Ergo $ST \frown MQ = SU \frown MN$. ut habuimus. Item $ST \frown NQ = UT \frown MN$. item $SU \frown NQ[= UT \frown MQ.]$

NB. Omnia UT in arcum quadrari possunt, videndumque quodnam id sit figurae genus.

$\frac{KL}{MN} = \frac{KR}{NQ} = \frac{RL = EA}{MQ}$. Ergo $KL \frown NQ = KR \frown MN$. perpendicularis in basin $= KR$ in arcum. Item $KL \frown MQ = EA \frown MN$. habuimus, denique $EA \frown NQ$ distantia basium in altitudinem $= KR$ in basin. Haec ergo figura curva semper quadrabilis, quae orta ex omnibus KR ad basin. Ex hoc principio licet infinitas figuras curvilineas quadrabiles, quae tamen paraboleides non sunt, comminisci, quemadmodum paulo ante

---

12–14 *Dazu auf der Gegenseite, mit dem Zusatz* minime *versehen und gestrichen:* Si in aliqua figura contingeret, ut perpendicularis ad basin, et ad altitudinem summari posset, posset et summari perpendicularis ad arcum, quia adiuncta recta quadam, summaretur perpendicularis in rectam illam ducta, ad basin + perpendicularis in rectam illam ducta, ad altitudinem. Ergo perpendicularis in rectam illam, in quadratum basis, item, in quadratum, altitudinis. Ergo in quadratum arcus. Productum dividatur per illam rectam. Erat quotiens perpendicularis in arcum. Hinc duco regulam generalem memorabilem. Si ex his tribus parte (inassignabili) basis, altitudinis, arcus summari possunt rectae quaedam assignabiles in duas horum, summari poterunt et in tertium.

4 ductam in *(1)* MN, portionem tangentis a duabus parallelis EP. EO abscissam *(2)* MQ *L* 5 alterarum *erg. L* 6 EA, CB, nempe *erg. L* 8 Hinc *(1)* intervalla parallelarum *(2)* portio tangentis inter parallelas in *(3)* $\frac{\text{ST}}{\text{MN}}$ *L* 9 f. NQ. | Ergo NB. *ändert Hrsg.* | NB. Omnia *L* 19 posset, *(1)* daretur quadratura circuli *(2)* posset *L*

infinitas superficies curvilineas truncatas quadrabiles. Ergo methodus ex qualibet figura curvilinea data exhibere aliam quadrabilem.

Ex his patet etiam semper quadrata omnium [KL] summari posse, quia semper summari possunt puto $\square^{\text{ta}}$ omnium KR. et omnium RL. quae semper eadem. Ergo eorum momenta habentur seu cylindri eorum revolutione circa CB facti. Quod satis memorabile. Imo puto esse falsum.

Nota si momenta summentur ex duobus diversis axibus in uno puncto concurrentibus haberi potest linea recta in quam cadat centrum gravitatis, si hoc adhuc alia vice, habebitur in linearum intersectione centrum gravitatis, quo reperto habebitur dato momento curva quaesita.

Nota porro: lineam illam haberi posse etsi non quadratura, modo ratio tantum haberetur, v. g. si duae essent ellipses.

Quando quadratum arcus consideratur omnia redduntur facillima, quia illud quadratum, componitur ex quadratis basis et altitudinis minimae. Ideo quorum quadrata applicantur ad arcum, idem est ac si eorum quadrata applicarentur ad quadrata basium minimarum separatim, et ad quadrata altitudinum minorum separatim. Idem est de omnibus ductibus, ad arcum applicatis, componuntur enim ex iisdem ductibus ad arcum, et iisdem ductibus ad basin. Ideo v. g. sinus ad arcum, ducti in radium ad arcum, aequantur radio in sinum ad altitudinem, auctam radio in sinum ad basin.

---

1 f. *Daneben in größerer Schrift:* NB. NB.

18 f. *Dazu am oberen Rande, gestrichen:* Dubito: nam sinus summantur in basin et in arcum, sed non in altitudinem nisi per tetragonismum. Eodem argumento, data dimensione hyperbolae et conchoeidis daretur dimensio circuli; quia secans ad altitudinem ex hyp. secans ad basin ex conchoeide secans ad arcum ex circ. pendet. Eodem argumento modus haberetur reperiendi momentum ellipseos, seu eius perpendiculares ad altitudinem. Nam eius perpendiculares ad basin [*bricht ab*]

3 KR *L ändert Hrsg.* 7–12 Nota si ... essent ellipses. *erg. L* 10 curva *(1)* parabolica *(2)* quaesita *L* 13 facillima | componitur *streicht Hrsg.* | , quia *L*

Generaliter inquirendum est in ductus in partes minimas, proportionales magnis.

Methodus data linea curva inveniendi figuram, a cuius quadratura quantitas curvae pendeat. Hoc facillimum est. Et calculi res est postea invenire figuras quadrabiles, et ideo curvas quoque in rectam reducibiles. Haberi potest iam curva v. g. cuius dimensio pendet a quadratura v. g. alterius cuiusdam hyperboloeidis, etc., aut figurae alterius etc. Ita ut data figura haberi possit curva cuius dimensio pendet ab ista quadratura, contra data quacunque curva quadrabili in rectam dudum commutabili, invenire spatium quadrabile ex ista commutatione. Ideo quot nobis Hugenius dedit curvas in rectam commutabiles, tot ergo spatia quadrabilia dabo.

Habeo et aliam methodum determinandi spatia quae pendent a curvarum rectificatione, et contra; et videndum an non coincidat priori. Si non coincidit sic dici potest: Data qualibet curva geometrica rectificabili, dare duas figuras geometricas diversas unamquamque ex illis quadrabilem. Et dato quolibet spatio quadrabili exhibere duas curvas diversas quamlibet in rectam commutabilem.

[*Teil 4*]

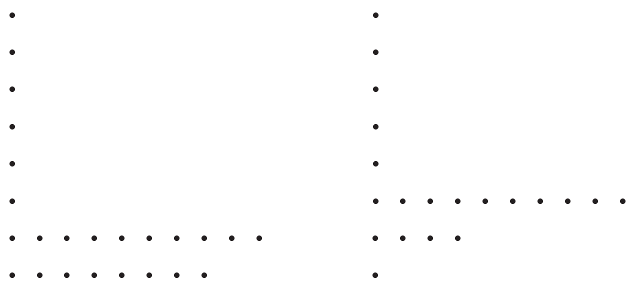
In Höhe von S. 506 Z. 2 (Bl. 360 v°):

h	h	h	h	h	h	h	h
g	g	g	g	g	g	g	
f	f	f	f	f	f		
e	e	e	e	e			
d	d	d	d				
c	c	c					
b	b						
a							

1 est in *(1)* proportio *(2)* ductus *(a)* radiorum pro *(b)* pari *(c)* in partes *L* 1 proportionales *(1)* maximis *(2)* magnis *L* 2 data *(1)* figura curva inveniendi rectam *(2)* linea *L* 3 est. *(1)* Sed difficile invenire figuras *(2)* Et *L* 4 iam *(1)* figura cuius *(2)* curva *L* 7 quadrabili *erg. L* 7 dudum *erg. L* 10 determinandi *(1)* curvas infinitas, q *(2)* spatia *L* 12 curva | geometrica *erg.* | *(1)* quadrabili *(2)* rectificabili *L*

8 Hugenius dedit: s. v. a. *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 224–241) — s. a. N. 2.

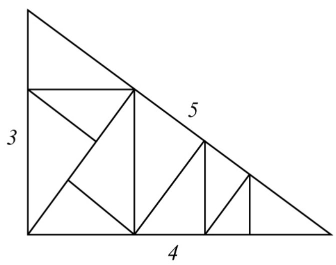
Unter S. 506 Z. 18 (Bl. 360 v°):



1	
3	4
6	10
10	20

$$\frac{a^2}{\underset{\cdot}{\underline{\underline{1}}}} \quad \frac{a^2}{2} \quad \frac{a^2}{3} \quad \frac{a^2}{3 \frown 3} \quad \frac{a^2}{9}. \qquad \text{Ergo} \quad \frac{x}{3}\,\frac{\left\{\frac{a^2}{3}\right.}{\overline{\overline{3}}} = \frac{a^2}{9}.$$

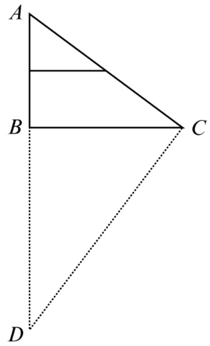
Neben S. 510 Z. 4 – S. 511 Z. 7 (Bl. 359 v°):



[*Fig. 4*]

$10 \frown 4 = 40$	$10 \frown 5 \frown 4 \frown 4 = 800$	$ab25 - ab16 = x.$
$10 \frown 5 = 50$	$10 \frown 5 \frown 5 \frown 5 = 1250$	Ergo $25 - 16 = \dfrac{x}{ab}.$
$\underline{10 \frown 3 = 30}$	$10 \frown 5 \frown 3 \frown 3 = \cancel{4}\cancel{5}0 \cancel{\,|\,} 30$	Ergo $25b - 16b = \dfrac{x}{a}$
	$\cancel{1}\cancel{5}\cancel{5}$	$ab25 - ab16 = ab9.$
	$\cancel{1}$	Ergo [*bricht ab*]

Über S. 514 Z. 13 (Bl. 360 r°):



[*Fig. 5*]

$AC \frown \dfrac{BC}{2} = \dfrac{AC \frown BC}{2}$.

Iam $\dfrac{CD}{BC} = \dfrac{AC}{AB}$.

ergo $CD = \dfrac{AC \frown BC}{AB}$.

ducta in AB dat(!)

$\dfrac{AC \frown BC}{2}$ seu AC

ductum in distantias ab AB.

7 AB. | sed huius dimidium *gestr.* | *L*

29. TRIANGULUM CHARACTERISTICUM SPECIATIM DE TROCHOIDIBUS ET CYCLOIDE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 353–354. 1 Bog. 2°. 4 S. Unterer Rand des Bogens bestoßen mit kleineren Ausrissen, starke Abschabung bis hin zu Fehlstellen auf Bl. 353 r° links unten, dadurch geringfügiger Textverlust S. 522 Z. 3 f. und S. 527 Z. 7. Überschrift und Bezeichnung der Figuren ergänzt. Bl. 354 v° = Teil 4 insgesamt gestrichen.
Cc 2, Nr. 549

Datierungsgründe: s. N. 28.

Triangulum characteristicum, speciatim de trochoidibus et cycloide.

[*Teil 1*]

Universalium de lineis curvis specimen, vide in iis quae de ellipsi dixi. — Regula generalis est, ut tot constituantur trianguli similes characteristico, quot fieri utiliter possunt. Utiliter inquam, id est ut latera facilius et alia quam hac trianguli similis via haberi possint.

Utile est etiam figuras quaerere, quarum eaedem sunt perpendiculares vel tangentes cum data, vel in quibus tangens datae est perpendicularis, vel perpendicularis datae est tangens; vel si non eaedem saltem parallelae sibi aut quod cum prioribus eodem redit, perpendiculares.

In his figuris in quibus tangens unius est perpendicularis alterius, similia sunt quidem triangula characteristica sed ita ut altitudines et bases earum sint reciproce proportionales seu

$$\frac{\text{altitudo}\,A}{\text{basis}\,A} = \frac{\text{basis}\,B}{\text{altitudo}\,B}.$$

12 et cycloide *gestr. u. wieder erg. L*

14 vide: s. N. 28.

Idque contingit quando curva unius, evolutione alterius describitur. Et quando curva evoluta rursus evolutione alterius describitur, haec ultima evoluta est directe proportionalis primae illi evolutione descriptae.
Omnes autem figurae directe proportionales sunt similes quodammodo, vel homogeneae. Hinc data qualibet curva, invenire possumus genus eius curvae quae evolutione ipsius describeretur, erit enim homogenea ei cuius evolutione descripta est data.
Hinc iam quaestio est, an non per analysin possimus ex infinitis curvis eiusdem speciei eligere eam, in qua tangens unius sit perpendicularis alterius, ita enim curvae datae aequalem invenissemus rectam.

Dato momento curvae ex axe quodam, et distantia centri gravitatis curvae ex eodem axe, datur ipsa curva. Datur et aliter centrum gravitatis curvae, ex pluribus momentis. Ergo ex pluribus momentis inter se collatis datur ipsa curva.

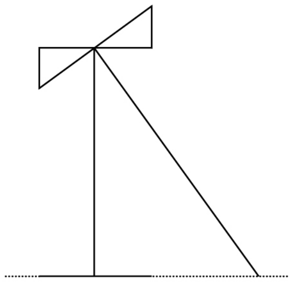
Sunt quaedam curvae in quibus rectae quaedam, quas cum Mydorgio parametros vocare possis, vel cum veteribus latera recta, intelligi queunt. Sunt et quae focos habent.

Danda opera est, ut regula detur generalis, inveniendi ordinatim applicatas ad basin, ex ordinatim applicatis ad axem.
Imo hoc facile est. Ex communi methodo geometriae locorum.
Regula generalis dimetiendi areas omnium trochoeidum, sive rota sit circularis, sive elliptica, sive etiam hyperbolica, aut parabolica. Regula autem generalis est: Summam triangularem arcuum aequari summae perpendicularium ad basin illam a qua incipitur. Ideo videndum an tota trochoeis parabolica possit quadrari, quia potest quadrari tum summa arcuum, tum ipsa parabola. Imo poterunt et omnes huius trochoeidis parabolicae portiones quadrari. Et videndum an non hoc pacto trochoeis ista tota sit figura ex genere paraboleidum, quo posito haberetur eius basis, data altitudine et summa. Imo fortasse portiones abscissae trochoeidis parabolicae non poterunt quadrari.

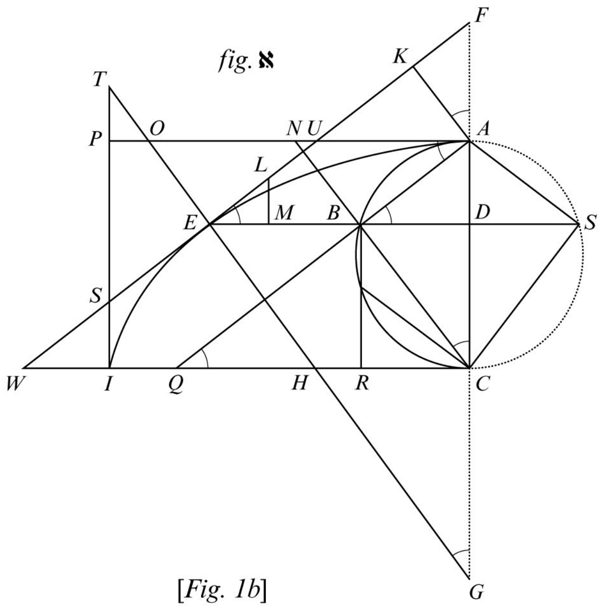
Doctrina de intervallis tangentium, quibus curvae applicatis, segmenta figurae cuiuslibet metior, tum maxime usum habere potest, cum curva ipsa area tractabilior est, ut exempli causa in iis lineis curvis quarum conversionem in rectas Hugenius docuit.

13 quibus *(1)* lineae *(2)* rectae *L* 15 generalis, *(1)* comparandi inter se *(2)* inveniendi *L* 20 triangularem *erg. L* 23 pacto *(1)* veniatur ad prog *(2)* trochoeidis *(3)* trochoeis *L*

13 cum Mydorgio: Mydorge, C., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum … libri*, 1631, S. 3. 28 Hugenius docuit: *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 229–241).



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]

In cycloeide notabile est triangulum eius characteristicum simile non triangulo characteristico circuli, sed triangulo chordarum in circulo. Esto semicirculus, applicata eius BD producatur dum occurrat cycloeidi in E. ex E demittatur perpendicularis EHG. ea est parallela ipsi BC. ideo BA parallela ipsi EF tangenti cycloeidis in E. ergo $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ ABD et FED: characteristicum cycloeidis similia. Hinc materies multarum mirabiliumque propositionum. Porro patet $EB = HC$. uti $EH = BC$. Ergo $EH = HG$. Hinc statim habetur momentum curvae cycloeidis AIC ex axe AC. perpendicularis enim EG ex puncto assumto E ducta in axem AG productum si opus est, est dupla chordae BC. Summa autem omnium chordarum est parabola, cuius basis et altitudo diameter, po-

1 *Neben fig.* ℵ: Summa omnium FA ad basin semper aequatur duplo segmento EA.

7 *Unter* Ergo $EH = HG$: Male HG non est $= EH$.

8 f. EG ex puncto assumto E *erg. L*

sita AC secta in partes aequales infinitas, et eius parabolae dupla est momentum curvae AEI ex axe AC. Hac ergo quadrata habetur momentum curvae, et eo habito, statim superficies eius curva.

DB et BE datae intelliguntur ut et $AB.\,AD$. hinc facile FE. Nam: $\dfrac{FE}{AB} = \dfrac{ED}{BD}$. Ergo $FE = \dfrac{ED \frown AB}{BD}$.

Triangulum characteristicum cycloeidis est EML. Et EL arcus, LM altitudo, EM basis, huic s i m i l e $\bigtriangledown ABC$. et ang. LEM idem cum angulo BCA. Ergo: $\dfrac{AC}{EL} = \dfrac{BC}{EM} = \dfrac{AB}{LM}$.

(1) Ergo $AC \frown EM = BC \frown EL$. Applicatae parabolae inversae ad arcum cycloeidis aequantur diametro in cycloeidis basin. Ergo pendent ex q. circ. adde 15. et 17. Hinc earum quadrata ad arcum haberi possunt, si enim in arcus cycloeidis ducantur, aut si in se ipsas per diametrum divisas idem est. Ergo si chordae istae in arcus cycloeidis, multiplicentur per diametrum, fient earum quadrata ad arcum.

(2) $AC \frown LM = EL \frown AB$. Applicatae parabolae recta ad arcum cycloeidis, aequantur diametro in altitudinem. Ergo q u a d r a b i l e s , adde prop. 7.

(3) $BC \frown LM = AB \frown EM$. Applicatae parabolicae ad altitudinem recta, ad basin cycloeidis inverse sumtis aequantur. Ergo posteriores illae etiam quadrabiles. Quadrabiles ergo chordae ad arcum circuli, eae aequantur momento curvae cycloeidis ex basi. Hinc dimensio curvae cycloeidis nova methodo, sunt enim chordae eius indivisibiles ut perpendiculares eius, seu ut chordae supplementales circuli. Ergo ut est

3 *Hinter* curva: Male

9 inversae *erg. L* 10–13 Ergo pendent ... ad arcum. *erg. L* 15 Ergo ... prop. 7. *erg. L* 17–522,5 Quadrabiles ergo ... ad altitudinem. *erg. L* 19 f. enim *(1)* appli *(2)* chordae eius | indivisibiles *erg.* | ut *(a)* chordae, *(b)* perpendiculares *L*

9–523,16 Im Folgenden wendet Leibniz das charakteristische Dreieck zugleich auf die Zykloide und ihren erzeugenden Kreis an. Seine Kernaussagen sind korrekt, lediglich einige Schlussfolgerungen sind — nicht zuletzt aufgrund einer noch unpräzisen Terminologie — unrichtig.

maxima chordarum supplementalium, seu diameter in arcum semicirculi, ad parabolas ad arcum quadrabiles, ita est arcus semicirculi seu basis cycloeidis in chordam indivisibilem maximam ducta ad curvam cycloeidis. Si dim⟨— —⟩ curvae cycloeidis datur ⟨qua— —⟩ omnium OH ad arc. circ. et omnium FES ad arc. ⟨circ.⟩ aut omnium TG. seu omnium WU vel AQ ad altitudinem.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a CAN et EML. CN secans falsa, AN tangens falsa, AC diam. $\dfrac{CN}{EL} = \dfrac{AC}{EM} = \dfrac{AN}{LM}$.

(4) $CN \frown EM = AC \frown EL$. Secantes falsae in basin cycloeidis = diametro in arcum eius, et ideo quadrabiles.

(5) $CN \frown LM = AN \frown EL$. Secantes falsae in altitudinem cycloeidis, seu earum summa = tangentibus falsis in eius arcum.

(6) $AC \frown LM = AN \frown EM$. Diameter in altitudinem cycloeidis = tangentibus falsis in eius basin, quadrabile, adde 7.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a NBA et EML. $\dfrac{AN}{EL} = \dfrac{AB}{EM} = \dfrac{NB}{LM}$.

(7) $AN \frown EM$ = tangentes falsae in basin (quadrabiles num. 6) = $AB \frown EL$. Ergo $AB \frown EL$ quadrabiles per p. 2.

(8) $AN \frown LM = NB \frown EL$. Summa omnium AN seu tang. fals. (= segm.) = istis NB (differentiis secantis falsae a chorda suppl.). Porro ista NB vel OE spatium concavum IPA complent.

(9) $AB \frown LM = NB \frown EM$. Ergo NB ad EM. seu momentum arcus ex AP (ergo et momentum arcus ex IC), quadrabile.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ s i m i l i a : CDB et EML. $\dfrac{BC}{EL} = \dfrac{CD}{EM} = \dfrac{BD}{LM}$.

(10) $BC \frown EM = CD \frown EL$. Seu BC (chordae suppl. vel appl. invers. parabol.) ad basin cycloeidis, aequantur momento arcus ex cycloeidis basi. (Ergo q u a d r a b i l e s).

(11) $BC \frown LM = BD \frown EL$. Ergo sinus ad arcum cycloeidis (q u a d r a b i l e s).

(12) $CD \frown LM = BD \frown EM$. Iam $CD \frown LM$ quadrabiles. Ergo et $BD \frown EM$.

9 eius *erg. L* 10 seu earum summa *erg. L* 13 adde 7. *erg. L* 15 AB ⌒ EL. *(1)* quadrabiles. NB: hinc datur quadratura |seu dimensio *erg.*| a r c u s c y c l o e i d a l i s , si aliunde non daretur, ex prop. 6. + 7. *(2)* Ergo *L*

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: ACQ et EML. $\dfrac{AQ}{EL} = \dfrac{QC}{EM} = \dfrac{AC}{LM}$. AQ secans supplementi, QC tangens supplementi.

(13) $AQ \frown EM = QC \frown EL$. [Secantes] supplementi in basin = tangentibus supplementi in arcum seu momento arcus cycl. ex altit.

(14) $AQ \frown LM$ summa secantium supplementi = $AC \frown EL$ diametro in arcum cycloeidis. (Ergo quadrabilis).

(15) $QC \frown LM = AC \frown EM$. (dimensio cycloeidis). Summa tangentium supplementi, cycloeidis portio NB. = diametro in basin cycloeid. adde 1. et 17.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: CBQ et EML. $\dfrac{CQ}{EL} = \dfrac{BQ}{EM} = \dfrac{CB}{LM}$. $QC = ED$.

(16) $CQ \frown EM = BQ \frown EL$. Applicatae altitudinis in cycloeid. translatae in basin = tangentibus usque ad basin productis in arcum.

(17) $CQ \frown LM = CB \frown EL$. Summa tangentium supplementi, adde 1. et 15.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BRQ et LME. $\dfrac{BQ}{EL} = \dfrac{QR}{EM} = \dfrac{BR}{LM}$.

(18) $BQ \frown EM = QR \frown EL$.

(19) $BQ \frown LM = BR \frown EL$.

([20]) $QR \frown LM = BR \frown EM$.

Sed hoc iam in nostra cycloeide memorabilissimum est, quod omnia theoremata inverti possunt et pro basi substitui potest altitudo, pro altitudine basis, quandoquidem hoc peculiare habet cycloeis ut a cycloeide evoluta describatur. In genere utile est evolutas considerationi adicere, inversionis eiusmodi causa, etsi in plerisque lineae rectae nonnihil turbent.

Ex prop. 19. patet curvam cycloeidis, pendere ex quadratura secantium falsarum, quarum dimidiae sunt secantes semiarcuum ut BI dimid. CG in fig. 3. NB. ubi $\gamma\delta =$

3 QC ⌒ EL. *(1)* Secans *(2)* Secantium supplementi summa *(3)* Secantium ... in basin *L ändert Hrsg.* 4 in *(1)* basin (| ideo *erg.* | quadrabilibus) *(2)* arcum *L* 5 supplementi | in basin *gestr.* | = *L* 7 (dimensio cycloeidis) *erg. L* 8 cycloeidis portio NB. *erg. L* 8 adde 1. et 17. *erg. L* 16 18 *L ändert Hrsg.* 16 BR ⌒ EM. | (19) $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia: BAS (isosceles) *gestr.* | *L* 17–21 Sed hoc ... nonnihil turbent *erg. L*

9 $QC = ED$.: Dies gilt nur in einem speziellen Fall. Leibniz wurde zu der Annahme durch eine Ungenauigkeit in der Zeichnung veranlasst. 23 fig. 3.: s. N. 23.

$B\gamma = BI$. ubi patet ob $\triangledown^{\text{lum}}$ AZG, esse GZ (sec. fals. dimidiata)$\frown$ AD. chorda $=$ $AG \frown ZI$. ergo quadrab. vel ob $\triangledown^{\text{lum}}$ AIB. $AI \frown AB = BI \frown AN$. Atqui $AN = AK =$ AE. habemus ergo momentum BI secantis falsae ex vertice. Atqui prop. 6 *De ductibus* num. 4. ostensum est ex momento secantis falsae ex vertice, pendere eius quadraturam. Habemus ergo quadraturam secantium falsarum. Habemus ergo quadraturam quoque omnium differentiarum inter chordas supplement. et secantes falsas.

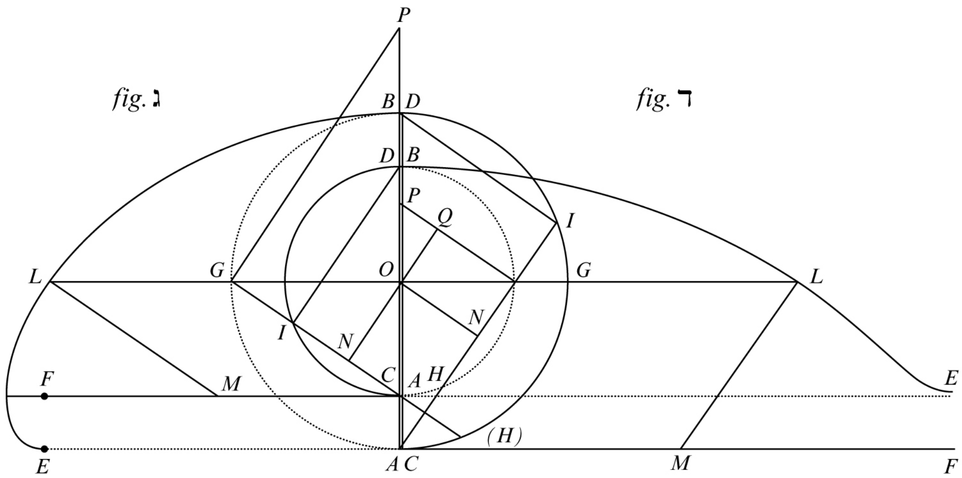
Falsum est quod $AN = AK$ vel $= AE$. Ideo potius quadratura secantium falsarum ex dimensione curvae cycloeidis accersenda, quam contra.

In cycloeide, similibusque trochoeidibus ita iniri potest ratio dimensionis curvae, si perpendicularibus ad curvam, productis [usque ad basin] ut EH, iisque infinitis, intelligantur infinita haberi triangula, quorum alia sursum alia deorsum apicem vertunt, quaeque sursum vertunt basin suam habeant in basi figurae, quae deorsum, in curva. Iam si summa habeatur primum totius figurae, uti datur certe dimensio areae cycloeidis, deinde triangulorum basin in basi habentium, residuum erit summa triangulorum ad curvam, seu (per prop. 2. hic) si duplicetur, curva ad diametrum.

10 curvam, *(1)* ad basin usque productis *(2)* productis | basin usque productis *ändert Hrsg.* | ut *L* 13 certe *erg. L* 14 deinde *(1)* curvarum basin habentium *(2)* triangulorum *L*

3 f. prop. 6 num. 4.: s. N. 26 S. 428.

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

Ad fig. ג et ד:

Iam ut data CI, investigemus CG sic agendum est: ducatur ON (dimidia DI) perpendicularis ad CI erit CN dimidia CI. restat investigemus NG (nam $NG + \dfrac{CI}{2} = CG$) quod facile est, nam $Rq\, OG^2 - ON^2 = NG$. Cumque summam CN ad curvam circularem dudum habeamus; summam NG separatim inire sufficit. Est autem $OG^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2}$. erit ergo

$$NG = \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{\gamma^2}{2}} \quad : \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{2\gamma^2}{2}} \quad : \quad \sqrt{\frac{a^2}{\beta^2} - \frac{3\gamma^2}{2}} \quad \text{etc.}$$

Ergo locus omnium NG terminationum est curva parabolica, summa autem omnium CG ad arcum circuli aequatur summae omnium GP ad altitudinem.

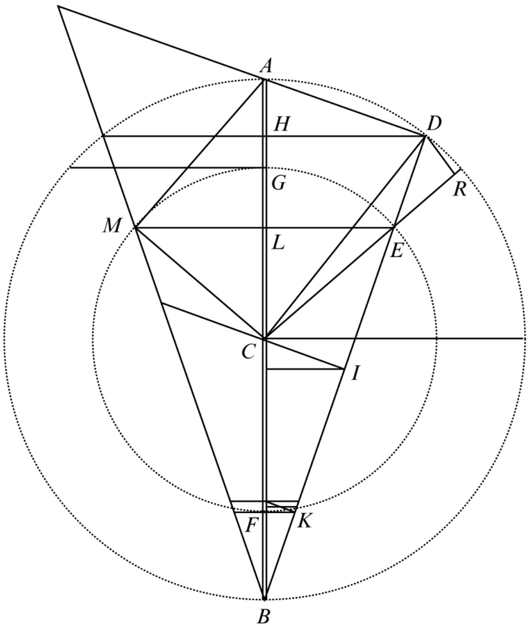
Sunt autem $\dfrac{GP}{DI} = \dfrac{CG}{CI}$. Ergo $GP = \dfrac{CG \frown DI}{CI}$.

Iam $DI \frown CI =$ diam.$\frown$ sin. $\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{DI} = CI$. $\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{CI} = DI$. Ergo

3–526,4 Die Betrachtungen dieses Abschnitts sind teilweise fehlerhaft; sie werden in N. 30 S. 541 Z. 2–11 wiederholt.

$$CG \frown \frac{DI}{CI} = CG \frown \frac{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{CI}}{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin}}{DI}}\text{. vel } CG \frown \frac{DI}{\dfrac{\text{diam.} \frown \text{sin.}}{DI}} = CG \frown \frac{DI^2}{\text{diam.} \frown \text{sin.}}.$$

Vel aliter cum detur summa ON. investigetur differentia inter PG et ON sive $Rq\,GN^2 - PO^2$. id est Rq. ex quadratis arithmetice crescentibus demtis quadratis, quadratice crescentibus, ut faciunt sinus.

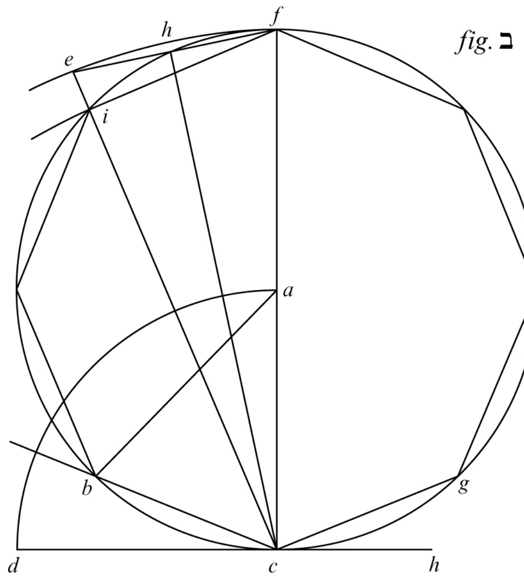


[*Fig. 3, gestr.*]

---

5 *Zu* [*Fig. 3*], *gestrichen:*

AB nota est a. $AC = CD$. $\frac{a}{2}$. CE nota $\frac{b}{2}$. $GF = b$. $AG = FB = \frac{a-b}{2}$. $AH = c$. $BD = d$. $AD = e$. $CI = f$. parallela AD. Manifestum est $\bigtriangledown$la CIB et ADB esse similia. Ideo $CI = \frac{AD}{2}$. et $IB = \frac{DB}{2}$. quia $CB = \frac{AB}{2}$. $\bigtriangledown BFK$ simile $\bigtriangledown$lo [*bricht ab*] In $\bigtriangledown$lo orthogonio AMC cuius omnia latera dantur, quaerenda est altitudo. Sed falsum est omnia latera dari, AM non datur, quia nec punctum M datur calculo.



[*Fig. 4, teilw. Blindzeichnung*]

ang. $bac + 2abc (= 2bca) = 180$. Item ang. $bca + dcb = 90$. $acg = bca$. $dcb = gch$.

$$dcb + \underbrace{bca + \underset{bca}{acg}}_{2bca} + gch = 180.$$

Ergo $dcb + 2bca (= 2abc) + gch = bac + 2abc\,(= 2bca)$. Ergo $dcb + gch = 2dcb = [bac]$. ⟨— —⟩ $cef =$ ang. $[dcf] =$ ang. fbc.

Ex his patet ef nihil differe in indivisibilibus a $[cb]$ vel fi. Ergo idem est basis semicycloeidis in ef, vel basis semicycloeidis simpliciter, quia ef est unitas constructionis. Ergo ut est diameter in arcum circuli, ad parabolas ad arcum (quadrabiles, ex toto vel parte semicirculi) ita est basis cycloeidis (ex toto vel parte), vel arcus circuli ad arcum

6 abc *L ändert Hrsg.* 7 dcb *L ändert Hrsg.* 8 cd *L ändert Hrsg.* 8 vel fi *erg. L* 8 est *(1)* basis *(2)* chorda inassignabil *(3)* chorda *(4)* basis *L* 10 circuli *erg. L*

1 [*Fig. 4*]: Der Buchstabe h kommt in der Figur doppelt vor.

curvae cycloeidis. Ergo semper quae est ratio quadrupli sectoris ad portionem parabolae, ea est arcus circuli ad curvam cycloeidalem. Id est portio parabolae divisa per diametrum dabit curvam cycloeidalem.

Obicitur: ef non est $= fi$. Respondeo[:] sed est tamen $\dfrac{ef}{if} = \dfrac{fc}{ch}$. sive $ec(fc) \frown fi = ef \frown ch$. (fig. ב) et quia $\underline{fi}$ est unitas constructionis, ergo $ch \frown ef = fc \frown fi$ seu $= fc$. item. Ergo $ef = \dfrac{fc \frown if}{ch}$. vel quia $\underline{if}$ unitas quae omitti potest, erit $ef = \dfrac{fc}{ch} = \dfrac{fc}{fc} = 1$. Porro omnes chordae inassignabiles, sunt ad suas perpendiculares ut $\dfrac{ef}{fc}$ seu ut $\dfrac{if \text{ unitas}}{ci}$. Ergo semper ratio $\dfrac{fc}{ef}$ est $= \dfrac{ci}{1}$ vel $\dfrac{fc}{1}$. Ergo obiecto se ipsam solvit.

Ideo si summa quarundam linearum, ut fig. praeced. omnium AB. in arcum cycloeidis multiplicetur per diametrum, fiet summa omnium AB in omnes CI. Habetur ergo quadratura, rectangulorum parabolico-parabolicorum inversorum, ad arcum. At hoc iam aliunde habetur, est enim nil nisi sinus ad arcum, in diametrum ducti. Hinc ergo rursus alia methodus investigandi curvam cycloeidis.

[*Teil 3*]

Porro ex his patet quadraturam eorum quos hic prop. 19. nominavi secantium haberi, at istos secantes BQ calculo ita indagabimus: Manifestum est $\dfrac{BQ}{BR} = \dfrac{AC}{AB}$. (quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia QBC et ABC.) ideo $BQ = \dfrac{AC \frown BR}{AB}$. ideo infinita series radiorum per distantiam a basi aut potius extremitate diametri multiplicatorum, per applicatas parabolae basi parallelas divisorum quadrari potest

1 quadrupli *erg. L* 3 f. cycloeidalem. *(1)* Imo id falsum, nam ef non est = fi. sed est $\dfrac{\text{ef}}{\text{if}} = \dfrac{\text{fc}}{\text{ch}}$. *(2)* Obicitur *L* 15 quos *(1)* alibi *(2)* hic *L* 15 f. secantium | quadraturam *streicht Hrsg.* | haberi *L* 18 aut potius extremitate diametri *erg. L*

$$\frac{a^2-a\beta}{Rq\llcorner a^2-\delta^2\lrcorner} \quad \frac{a^2-2a\beta}{Rq\llcorner a^2-2\delta^2\lrcorner} \quad \frac{a^2-3a\beta}{Rq\llcorner a^2-3\delta^2\lrcorner} \quad \text{etc.}$$

Nam cum hyperbolam habeo

$$\frac{a^2}{a-\beta} \quad \frac{a^2}{a-2\beta} \quad \frac{a^2}{a-3\beta} \quad \text{etc.}$$

quod spatium efficit, utique divisis omnibus per a. ipsum

$$\frac{a}{a-\beta}+\frac{a}{a-2\beta}+\frac{a}{a-3\beta} \quad \text{etc.}$$

linea erit, quae scilicet ex spatio hyperbolico per a. diviso oritur. Atque ideo summa curvae, cuius ita procedent tangentes seu chordae, ex quadratura hyperbolae patebit. Et talis est forsan curva parabolica. Quaerenda autem est methodus istam curvam describendi:

$$\frac{a^2}{1} \quad \frac{a^2}{3} \quad \frac{a^2}{6} \quad \frac{a^2}{10} \quad \text{etc.}$$

Nescio an hoc faciat infinita a^2.

NB. Si eousque ars analyseos produci posset, ut data series si possibile est reducatur ad statum tractabilem, ingrediaturque aliquod triangulum characteristicum; optata eius perfectio haberetur.

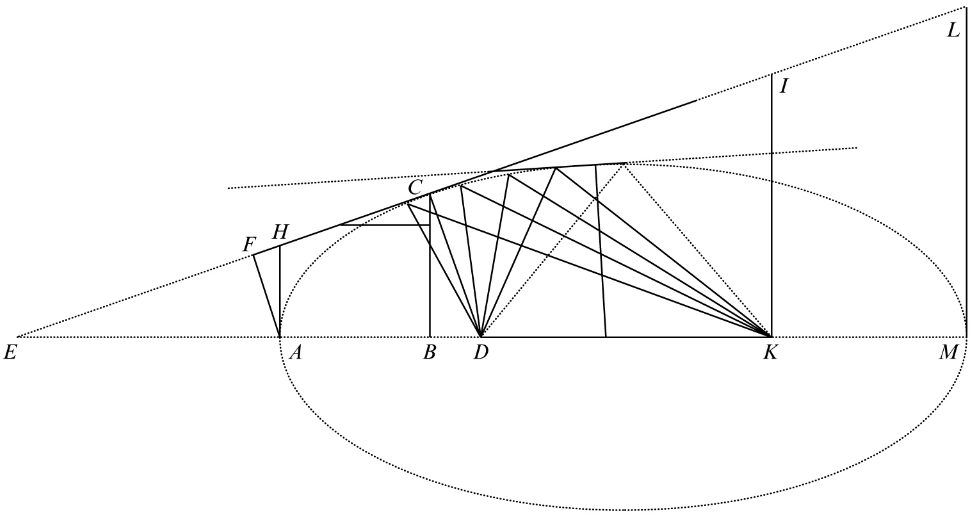
---

1 *Daneben:* Quare et si omnia dividas per a loco superficiei linea ex summa omnium fiet.

7 seu chordae *erg. L*

---

1 Vgl. dazu N. 27 S. 488 Z. 4–6.



[*Fig. 5*]

Supponam cognitas tantum lineas duas, altitudinem AB et applicatam BC, quas appellabo, altit. (a) applic. (b.) ergo habetur et $AC = a^2+b^2$, *Rq.* $\dfrac{(CB)}{AH} = \dfrac{EA+(AB)}{EA}$.

Omnes curvae quarum trochoeides sunt aliae curvae datae, possunt in rectas converti, quemadmodum Hugenius curvas, quarum volutae sunt curvae datae, in rectas extendit. Nimirum nulla curva est (demta opinor circulari), quae non intelligi possit per modum cycloeidis describi, atque ideo basis eius curvae generatrici aequalis est.

A n a l y s i s i n d i v i s i b i l i u m (quatenus ab arithmetica infinitorum separatur) in eo consistit maxime, ut data qualibet linea curva, aut superficie curva, eam ad spatium quoddam unum plurave reducamus, a quorum quadratura eius mensura pendeat. Quod per varias methodos hic praescriptas facile fiet. Porro ut spatium datum quadremus, examinanda primum ratio progressionis, an sit summae capax ex arithme-

4–7 *Daneben großes*

1 [*Fig. 5*]: Der Schnittpunkt D der Normalen CD zur Tangente ECL mit der Achse wird von Leibniz kurzerhand mit dem Brennpunkt identifiziert, in Wirklichkeit liegen D und K weiter außen.
5 Hugenius: s. o. S. 519 Z. 28.

tica infinitorum. Si hanc methodum respuit, ad analysin indivisibilium veniendum est, id est constituendum triangulum characteristicum figurae, eique quotcunque fieri potest triangula similia, quod fieri potest tum ductibus rectarum in figura, tum calculo. Calculo quidem sic: sumamus pro triangulo characteristico ECB ut in ellipsi praecedente vel ECD. utrum scilicet simplicius videbitur, vel etiam EIK, vel ELM aliudve, nobis iam notum simplicissimum, et cuique linearum valores simplicissimos ex natura figurae assignemus. Inde quotcunque haberi possunt ex natura figurae aequationes comminiscamur, duarum rationum, quarum una sit duarum trianguli characteristici linearum, altitudinis EB et basis BC. vel altitudinis EB et tangentis EC. Semper enim hic altitudo ingredi debet, quoniam summam ordinatim applicatarum, seu dimensionem figurae quaerimus; altera ratio sit lineae datae, et cuiusdam lineae quaesitae, cuius quadratura ad basin vel arcum, dudum habetur.

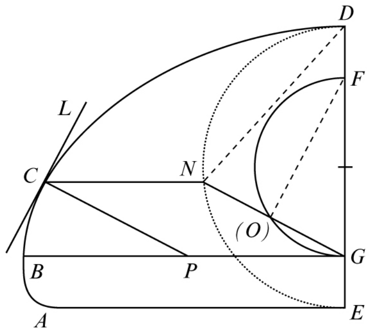
$$\frac{\text{basis (arcus)}}{\text{altitudo}} \times \frac{\text{linea data}}{\text{quaesita}}.$$

Ita duae habebuntur quaesitae, altera cuius quadratura ad arcum, altera cuius quadratura, vel saltem dimensio ad basin quaeritur. Et quidem si est ad basin, basi divisa in partes aequales, examinetur an calculus infinitorum iuvet. Caeterum in omni isto examine videndum, invenirine possit triangulum simile vel aequatio eiusmodi rationum, quas ingrediatur linea quaedam permanens. Ea enim si basi comparari possit, vel arcui vel altitudini, habebitur earum dimensio, quae cum ipsa congrediuntur in eandem rationem, qualis ex natura rei esse potest. Sin minus videndum saltem, lineasne comminisci liceat, in constructione, quae quolibet demum modo assumtae sint quadrabiles, ut sint paraboleides non tantum, sed et aliae infinitae.

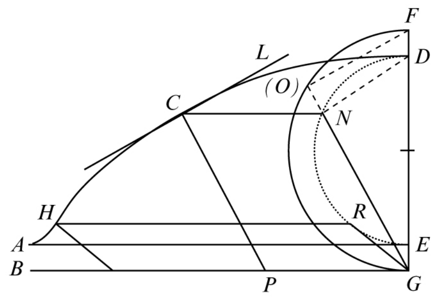
Sed ut ad priora redeamus si nulla lux affulget ex aequationibus rationum trianguli characteristici dati aliud triangulum characteristicum alterius figurae quaerendum est, quae sit tractabilior, cuius rationes lineae nobis datae summandae, ingredi possint.

6 f. assignemus. *(1)* Inde *(a)* data linea cuius summ *(b)* datis *(c)* sumtis lineis quibusdam, et quidem *(aa)* simplicissimis *(bb)* satis simplicibus, quaeramus an in illis *(2)* Inde *L*   16 iuvet *(1)* , sin minus, rursus simili aequatione, persequenda est, *(a)* constituen *(b)* videndumque an nova aequatione cum a *(2)* . Caeterum *L*   17 simile *erg. L*

[*Teil 4, gestrichen*]



[*Fig. 6a*]



[*Fig. 6b*]

Quod attinet dimensionem curvae trochoeidis protractae vel contractae, inspice quae Schotenius habet ad lib. 2. *Geom.* Cartes. pag. 268. 269. ubi figuras eius inspice, quibus ego haec addo[:] In fig. pag. 269 ducatur recta ND. et recta GN producatur usque ad arcum circuli maioris FG. cui occurrat in O. litera a me ascripta, ducaturque recta OF. Manifestum est $\bigtriangledown^{\mathrm{la}}$ GOF et GND esse similia, ideoque esse GN ad GO, ut GD ad GF. Cumque idem fiat, quodcunque sit punctum N in circulo minore, vel punctum C in cycloeide apparet perpendiculares descriptrices (quas in trochoeidibus et volutis radios appellare possis) trochoeidis contractae ad perpendiculares descriptrices trochoeidis ordinariae, habere eandem semper rationem. Nempe quae est diametri circuli minoris semidifferentia diametrorum aucti ad diametrum circuli maioris, seu quae est GD ad GF. Hinc summa omnium GF unitate posita arcu inassignabili circuli GF facile haberi

8 *Nach GF. interlinear:* (falsum)

13 inassignabili *erg. L*

2 [*Fig. 6*]: Im Folgenden behandelt Leibniz zwei Figuren aus Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, *DGS* I S. 268 f. Die Figuren fehlen im Text; sie sind vom Hrsg. nach den Schooten'schen Originalen beigefügt worden. Die von Leibniz hinzugefügten Strecken sind mittels Strichelung gekennzeichnet. Punkt O ist ebenfalls durch Leibniz ergänzt. — Diese Eintragungen fehlen in dem hannoverschen Handexemplar der *Geometria*-Ausgabe!

potest, cum enim summa omnium GO habeatur per superiora (quadrabilis prop. 10. hic), multiplicetur illa per GD, dividatur per GF. Hinc iam ad dimensionem curvae trochoeidis contractae struitur gradus. Est enim summa chordarum inassignabilium trochoeidis contractae (seu quantitas curvae) ad summam chordarum illarum seu perpendicularium descriptricium ut est maxima chorda inassignabilis trochoeidis contractae, ad maximam descriptricem DG. Sed ut est maxima descriptrix contractae GD ad suam chordam seu arcum inassignabilem, ita est GF. seu diameter circuli maioris vel maxima descriptrix trochoeidis communis, ad maximam suam descriptricem. At GF diameter est ad arcum a se descriptum, ut descriptrix proxime minor (differentiae inassignabilis), in eadem trochoeide communi ad unitatem constructionis seu ut diameter circuli maioris ad unitatem constructionis. Ergo dimensio curvae trochoeidis contractae ita habebitur. Summa omnium GF. seu descriptricium trochoeidis contractae dividatur per diametrum circuli maioris [generatoris] trochoeidis communis, quotiens erit curva trochoeidis contractae.

Eadem prorsus methodo invenietur curva trochoeidis protractae. Nam in figura paginae 268. duc rectam ND. et ex puncto O. quo recta GD secat circumferentiam circuli minoris GF. rectam OF[,] erunt ND et OF parallelae, $\bigtriangledown^{\text{la}}$que GOF et GND similia. Ideoque ut GF. diameter circuli minoris ad GD. diametrum circuli minoris semidifferentia diametrorum (DE, et GF) auctum: ita GO. d e s c r i p t r i x trochoeidis communis ad GN. d e s c r i p t r i c e m protractae. Cumque eadem semper ratio sit, summa descriptricium protractae ita habebitur, si summa descriptricium communis multiplicetur [per] GD. diametrum minoris differentia diametrorum auctum, dividaturque per diametrum minoris. Habita summa descriptricium trochoeidis protractae (quae quadrabilis est) curvae trochoeidis protractae eadem qua contractae methodo reperietur. Nam cum semper sibi sint proportionales curvae descriptrices et chordae inassignabiles descriptae, ob eundem semper angulum descriptionis, erit ut maxima chorda inassignabilis trochoeidis protractae, ad maximam descriptricem GD. ita summa chordarum inassignabilium seu curva trochoeidis protractae, ad summam descriptricium inventam. Iam maxima

---

16 *Nach* parallelae *und* similia *jeweils interlinear:* (falsum)

1 f. (quadrabilis | prop. 10. hic *erg.* |) multiplicetur *L* 8 f. ad *(1)* chordam suam, *(2)* arcum ... ut *(a)* chorda *(b)* descriptrix *L* 10 maioris *erg. L* 12 diametrum *(1)* seu maximam descriptricem *(2)* circuli *L* 13 generatorem *L ändert Hrsg.* 20 protractae *erg. L* 21 per *erg. Hrsg.* 24 inassignabiles *erg. L*

chorda inassignabilis trochoeidis protractae, est ad suam descriptricem, GD, ut est maxima chorda inassignabilis trochoeidis communis, ad maximam suam descriptricem, GF, seu ut unitas constructionis ad diametrum circuli minoris GF. quia idem angulus est descriptionis, nec nisi differentia radiorum, quare arcus radiis proportionales. Ergo si summa descriptricium trochoeidis protractae (quadrabilis), dividatur per diametrum circuli minoris, nempe generatoris trochoeidis communis, quotiens erit curva trochoeidis protractae.

At vero Pascalius ostendit in scripto sub Dettonvillaei nomine publicato; trochoeidum protractarum contractarumque curvas esse curvis ellipticis aequales; habebuntur ergo curvis ellipticis aequales rectae geometrice demonstratae.

Imo gravissimus error in demonstratione mea, quam tamen facile emendo salva curvae dimensione. Operae pretium est figura propria rem complecti, vid. pag. praeced. fig ג et ד. Falsum enim in figura Schotenii OF et ND. vel in nostra fig. ג HD et GB (quas ne inutilibus lineis figuram confunderem ducere nolui) esse parallelas, ut inter festinandum posueram. Aliter ergo re de integro assumta ratiocinandum est. Inspice fig. ד. Cum circuli BGA, DIC sint concentrici, erunt chordae HG, et CI, diametris proportionales, item HC erit aequale IG. Ergo summam CG inibimus, si summae omnium HG addemus summam omnium CH vel GI. seu semidifferentiam inter summam omnium CI, et summam omnium [HG]. Cumque summa omnium CI, detur per prop. 10. hic, restat tantum ad summam omnium CG habendam, invenire summam omnium HG. At haec facilis est, quia enim semper $\dfrac{CI}{AG} = \dfrac{CD}{BA}$. seu ut diametri circulorum, eadem quoque ratio summarum erit. Ideo si summa omnium CI inventa per prop. 10. (quadrabilis) multiplicetur per

20–22 Error rursus, quia AG. AI non sunt circulis proportionalia.

22–535,5 *Daneben großes* NB.

6 minoris, nempe *erg. L* 8 vero *(1)* Hugeni *(2)* Pascalius *L* 14 parallelas, *(1)* quod manifeste falsum est *(2)* ut *L* 18 vel GI *erg. L* 19 CI *L ändert Hrsg.*

8 Pascalius: *Lettre de A. Dettonville à Mr. Hugguens de Zulichem*, 1659 (*PO* IX S. 187–201).

20–22 Leibniz verwechselt die Bezeichnungen. Die Proportion müsste nach seinem Ansatz $\dfrac{CI}{HG} = \dfrac{CD}{BA}$ heißen. — Ebenso müsste in der Anmerkung HG bzw. CI stehen.

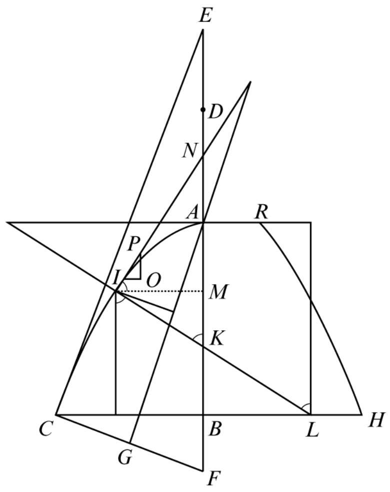
diametrum BA circuli minoris seu generatoris trochoeidis contractae, ac productum dividatur per DC diametrum circuli maioris seu generatoris trochoeidis communis, quotiens erit summa omnium GA, cui si addatur semidifferentia ipsiusmet summae GA a summa omnium CI. descriptricium trochoeidis communis, habebitur summa omnium CG descriptricium trochoeidis contractae. Eodem modo inveniemus summam omnium CG in fig. ג trochoeidis protractae. Si inventam summam omnium CI per prop. 10. fiat ut DC diameter circuli minoris, trochoeidis communis generatoris, ad BA diametrum circuli maioris trochoeidis protractae generatoris, ita, summa omnium CI, ad aliud, quod erit summa omnium $G(H)$ cui si addatur summa omnium GI, semidifferentia inter summam omnium CI, et omnium $G(H)$ habebitur summa omnium CH descriptricium trochoeidis protractae. Posita autem summa omnium descriptricium trochoeidis sive protractae sive contractae, facile habetur summa omnium chordarum assignabilium vel arcuum minimorum ad ipsis descriptorum, vel curvae trochoeidis protractae vel contractae. Cum enim idem semper sit angulus descriptionis, eadem semper ratio erit arcuum vel chordarum, et descriptricium seu radiorum. Ergo quae est ratio descriptricis maximae ad chordam maximam, ea erit summa descriptricium CG ad arcum trochoeidis descriptae. Est autem ob eundem rursus descriptionis angulum, eadem ratio CB descriptricis maximae trochoeidis contractae vel protractae ad suam chordam maximam, quae est CD. diametri circuli generatoris trochoeidis communis, ad suam chordam maximam, seu ad unitatem (ut ostensum est ad fig. ב ubi quae est ratio CH. descriptricis trochoeidis communis maximae ad ef. chordam maximam descriptam, ea est ratio cf diametri a descriptrice maxima CH quantitate qualibet data minore differentis; seu ipsius descriptricis, ad fi. unitatem). Ergo ut est in trochoeide communi summa descriptricium ad curvam, ita et in trochoeide protracta vel contracta, ac proinde summa descriptricium trochoeidis contractae vel protractae, vel communis, divisa per diametrum circuli generatoris trochoeidis communis, dabit curvam trochoeidis descriptae sive ea protracta sit, sive contracta, sive communis.

1 minoris seu *erg. L* 1 trochoeidis *(1)* exorbitantis (sive ea contracta sive protracta ut in fig. ד exhibitum, sive ut in fig. ג protracta sit). *(2)* contractae *L* 2 maioris seu *erg. L* 7 circuli *(1)* maioris *(2)* minoris *L* 17–20 Est autem ... ad unitatem *erg. L* 20 f. descriptricis | *(1)* a diametro circuli generatoris *(2)* trochoeidis communis *erg.* | maximae *L* 25 f. circuli generatoris *erg. L*

30. DIVERSA DE QUADRATURIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 266–267. 1 Bog. 2° 3 S. — Bl. 267 v° leer. Cc 2, Nr. 641

Datierungsgründe: s. N. 28.



[*Fig. 1*]

Esto semiparabola ABC. cuius latus rectum AD. abscissa AB. applicata CB. constat esse $AD \frown AB = CB\square$.
Producatur diameter vel altitudo BA, ultra verticem, in E. sumaturque $AE = AB$. et recta ducta EC. tanget curvam parabolae in C.
Item in producta AB. ultra basin sumatur BF. dimidia lateris recti AD. recta FC. erit perpendicularis ad curvam, sive tangentem CE.

---

6 [*Fig. 1*]: In der Leibniz'schen Handzeichnung ist die Linie AC nicht eingezeichnet. Das infinitesimale Dreieck zum Punkt I ist etwas nach oben geschoben und mit INO bezeichnet. Da N doppelt vorkommt, hat Hrsg. in IPO abgeändert. Der Parabelbogen RH (R vom Hrsg. erg.) geht in der Handzeichnung irrtümlich von A aus.

Denique ducatur AG. perpendicularis ad CF. quae bisecabit CF. in G. quemadmodum ipsa AG. ipsius CE. dimidia est.

Manifestum est $\bigtriangledown^{\text{la}}$ ECF. et EBC. et CBF. et AGF. et CBE. similia esse, ideo $\dfrac{BF}{CF} = \dfrac{CF}{EF}$. Ergo $BF \frown EF = CF^2$. seu $CF = \sqrt{BF \frown EF}$.
Est autem BF. semper eadem. EF. autem continuo crescit uniformiter, constat enim ex BF. quae perpetuo eadem est, et AB. uniformiter crescente, duplicata. Ergo rectangula $BF \frown EF$, vel quadrata, CF^2. sunt arithmeticae progressionis, ipsaeque radices CF. sunt applicatae parabolae ad axem seu basi parallelae. Unde: si omnes CF. applicentur altitudini AB. in punctis B. donec evanescant in A. (ubi CF. ad nihilum recidit) figura ex iis conflata ABH. utique semiparabola erit, ac proinde quadrabilis $= \dfrac{2CF \frown AB}{3}$.
Datur ergo momentum curvae AC. ex axe AB, $= \dfrac{2CF \frown AB}{3}$. et circulus radio $\dfrac{\sqrt{CF \frown AB}}{3}$ descriptus erit superficiei conoeidis parabolici circa axem, aequalis.
Parabolae ABH. latus rectum erit $\dfrac{BF \frown EF.}{AB}$. diameter idem qui prioris AB.

Nunc inquirere operae pretium est, an eadem semper ratio sit $\dfrac{CF}{CB}$. cum sint applicatae correspondentes duarum parabolarum eiusdem altitudinis. Sunt autem omnes parabolae figurae homogeneae inter se, ac proinde applicatae respondentes, erunt proportionales. Sed hoc accuratius excutiendum est, ne in re tanti momenti, ut mox dicemus, coniectura labamur.
Dictum est CB esse $= Rq\, AD \frown AB$. et CF esse $Rq\, BF \frown EF$. $BF = \dfrac{AD}{2}$. $EF = 2AB + BF$. ergo ratio $\dfrac{CB}{CF}$ erit $= Rq\, \dfrac{AD \frown AB}{\dfrac{AD}{2} \frown 2AB + \dfrac{AD^2}{4}} = Rq\, \dfrac{AB}{AB + \dfrac{AD}{4}}$. Unde

3 et AGF. et CBE. *erg. L* 4 f. $\sqrt{\text{BF} \frown \text{EF}}$. *(1)* Ergo *(2)* Unde manifeste intelligitur, si omnes | rectae *erg. u. gestr.* | CF. applicatae intelligantur ad axem in punctis B. figuram ABH. inde conflatam fore aliam semiparabolam cuius latus rectum est dimidium, at diameter | seu abscissa *erg.* | duplum parabolae prioris *(2)* Est *L* 8 ad axem seu *erg. L*

9 donec evanescant: dies ist unzutreffend. — Der Fehler beeinflusst alle davon abhängigen Aussagen.

apparet falsum esse, quod prima specie in mentem poterat venire, neque eandem semper rationem esse $\frac{CB}{CF}$.

Sumatur aliud punctum I. in curva AC. unde perpendicularis ad curvam IK. producatur usque ad basin CH. cui occurret in L. demittatur applicata ex puncto assumto I. axi perpendicularis IM. erit, per superiora, recta $MK = BF$ vel $\frac{AD}{2}$.

Porro alibi demonstratum est summam ad basin omnium IK. perpendicularium curvae ad altitudinem productarum aequari MK. intervallo, perpendicularis et applicatae, in altitudine, hoc loco dimidio lateri recto, ad curvam. Quae si haberi posset summa omnium IK. ad basin, daretur curvae parabolicae aequalis recta. Ipsa autem IK. varie determinari potest: est enim $\sqrt{\llcorner \frac{AD\square}{4} + 2AM \frown \frac{AD}{2} \lrcorner}$ est etiam $IM\square + MK\square$. (nam $MK\square = \frac{AD^2}{4}$. et $IM\square = AM \frown AD$.)

Manifestum est porro haberi summam omnium MB. ad basin, cum constituat figuram, quadrabilem, semiparabolam; et summam omnium MK. quia semper idem; ergo et omnium KB.

$$\frac{BL}{IM} = \frac{MK = \frac{AD}{2}}{MB - \frac{AD}{2}}. \quad \text{Ergo } BL = \frac{\frac{AD}{2} \frown IM}{MB - \frac{AD}{2}}.$$

$$\frac{IL}{IK} = \frac{MB}{MK}. \qquad \text{Ergo } IL = \frac{MB \frown IK}{MK}.$$

In omni figura curvilinea duo diversa haberi possunt triangula characteristica, ut pro ACB, habes CGA. idque aliter pro varie assumto puncto C. Idem non quidem in toto quadrante ellipseos, attamen in eius parte. Sed pro puncto C. eligendum est aliquod omnium commodissimum.

6 ad basin *erg. L* 19 f. Sed ... commodissimum. *erg. L*

---

6 alibi demonstratum: s. N. 28 S. 503 Prop. 6. 15 $\frac{BL}{IM}$: Es müsste umgekehrt $\frac{IM}{BL}$ heißen. — Leibniz rechnet konsequent weiter.

$IK.$ etiam sic determinari potest:

$$Rq\llcorner \underbrace{NK\square}_{\frac{AD\square}{4}+4AM^2+2\llcorner\frac{AD}{\cancel{2}}\frown\cancel{2}AM} - IM\square - \underbrace{NM\square}_{4AM^2}$$

fiet $$Rq\llcorner\frac{AD^2}{4}+2AD\frown AM-\underbrace{IM^2}_{AM\frown AD}=Rq\llcorner\frac{AD^2}{4}+AD\frown AM\lrcorner$$

sed res redit eodem.

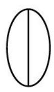
Summa omnium $IK.$ ad basin est hyperbola, ideoque curva parabolica pendet a quadratura hyperbolae, quoniam summa omnium $IK.$ ad basin = ipsi $MK.$ perpetuo eidem ad arcum.

Sunt tamen NB. figurae curvilineae, in quibus non possunt duo $\bigtriangledown^{\text{la}}$ characteristica haberi, qualia sunt figurae finitae, seu quadrantes, ut circularis, ellipticus, ovalis, in quibus duo latera, unumquodque perpendiculare est curvae.

Omnis curva alterius curvae trochoeis esse potest, ac nescio an non et cycloeis. Hoc si analytice inveniri potest, habemus totidem curvis aequales rectas. Praeclarum est analyseos per indivisibilia specimen quod ab Hugenio datum est, in curvis evolutis indagandis.

Fingi possunt modis innumerabilibus descriptrices summabiles ad curvam, iisque casibus etiam curvae descriptae erunt rectificabiles. Nota diversa describetur curva, trochoeis ab ellipsi eadem revoluta, si scilicet aliud atque aliud punctum in ea signatum intelligatur. Idem est in aliis curvis. Videndum an eadem curva diversarum aliarum trochoeis esse possit, non puto.

17–21 *Daneben Merkfigur:*



6 sed ... eodem. *erg.* *L* 7 ad basin *erg.* *L* 13 et *(1)* circularis *(2)* cycloeis *L in anderer Tinte* 17 descriptrices *(1)* assignabiles *(2)* summabiles *L*

15 ab Hugenio datum: s. v. a. *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil III, Satz XI, S. 81–90 (*HO* XVIII S. 224–241). — s. a. N. 2.

$$\begin{array}{lll}
 & \dfrac{3a^2}{4} & \\
Rq & \overline{a^2 - b^2} & \overline{\cancel{a^2} - \cancel{b^2}} \\
 & \dfrac{a}{2} & \\
 & \overline{} & \overline{} \\
 & \dfrac{\cancel{a^2}}{\cancel{4}} & \dfrac{\dfrac{3a^2}{4} - b^2}{a} \quad ⨍ \quad \dfrac{3a}{4} - \dfrac{b^2}{a}
\end{array}$$

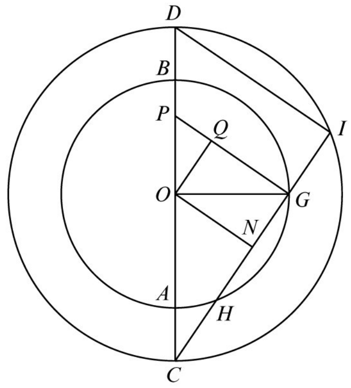
$$\begin{array}{llllll}
\overset{4}{\cancel{2}\cancel{0} - 4} & Rq\,9-0. & Rq\,9-1. & Rq\,9-4. & Rq\,9-9. & \\
\underline{4} & & 1 & 3 & 5 & \\
\cancel{1}6 & Rq\quad 9 & Rq\quad 8 & Rq\quad 5 & \quad 0 & \\
\cancel{2}\cancel{5} - 9 & Rq\,16-0. & Rq\,16-1. & Rq\,16-4. & Rq\,16-9. & Rq\,16-16. \\
\underline{4} & & 1 & 3 & 5 & 7 \\
\cancel{1}\cancel{6} & Rq\quad 16 & Rq\quad 15 & Rq\quad 12 & Rq\quad 7 & \quad 0
\end{array}$$

$$\begin{array}{ll}
a - b & \qquad a + \ Rq\,ba - b \\
\underline{a - b} & \qquad \underline{a + \ Rq\,ba - b} \\
a^2[\textit{bricht ab}] & \qquad -\,ba\ -b\ Rq\,ba + b^2 \\
 & +a\,Rq\,ba + ba\ -b\ Rq\,ba \\
 & +a^2\ +a\,Rq\,ba - ba
\end{array}$$

Auferenda:	$[-]\ 2b^2 - 2aRq\,ba - \cancel{ba}$
Adicienda:	$+\ \cancel{2}ba - 2b\,Rq\,ba$
Comparanda iam:	$+\ 2b^2 + 2a\,Rq\,ba \infty +ba + 2b\,Rq\,ba.$

Haec si sibi invicem deducantur fiet: $\llcorner 2a - b \frown Rq\,ba \lrcorner - \llcorner b \frown a - b \lrcorner$ sed hoc tamen multum abest a 0. Ideo eligenda eiusmodi quae si iis auferas addasve expressa in quantitate data, ut b^2, et deinde quae in ipsis auferri addive iubentur, quam proxime accedant ad 0. et quidem regula universali.

5 *(1)* Rq, 9 − 0. Rq, 9 − 1. | Rq, 9 − 4. 0. *streicht Hrsg.* | *(2)* Rq 9 − 0. *L* 16 *Vorzeichen erg. Hrsg.*



[*Fig. 2*]

De cycloeide contracta fig. ג et ד. sed quia ibi pleraque peccata deletaque sunt, hic breviter corrigemus: Ut data CI. investigemus CG. sic agendum est: ducatur ON. (dimidia DI.) perpendicularis ad CI. erit CN. dimidia CI. restat [ut] investigemus NG. (nam $NG+\overset{CN}{\frac{CI}{2}}=CG$.) quod facile est, nam $Rq\,OG^2-ON^2=NG$. Cumque summam CN. vel $\frac{CI}{2}$. ad curvam circularem dudum habeamus, summam NG. separatim inire sufficit. Est autem $OG^2=\frac{a^2}{\beta^2}$. erit ergo

$$NG=\sqrt{\frac{a^2}{\beta^2}-\frac{\gamma a}{2}}\quad\sqrt{\frac{a^2}{\beta^2}-\frac{2\gamma a}{2}}\quad\sqrt{\frac{a^2}{\beta^2}-\frac{[3]\gamma a}{2}}\qquad\text{etc.}$$

Ergo locus omnium NG. altitudini BC. applicatorum est curva parabolica. Debet autem inveniri summa omnium GN. ad arcum circuli, ut habeatur summa omnium arcuum curvae cycloeidis contractae. Summa autem omnium GN. ad arcum circuli aequatur summae omnium PG. ad altitudinem[,] uti summa omnium DI. ad altitudinem, aequi-

1 [*Fig. 2*] *erg. Hrsg. nach Text und N. 29.* 4 ut *erg. Hrsg.* 8 2 *L ändert Hrsg.*

3 corrigemus: Leibniz greift hier die Gedanken von N. 29 S. 526 Z. 7–10 wieder auf. Auch dieser zweite Versuch ist nicht fehlerfrei und führt zu keinem befriedigenden Ergebnis.

valet summae omnium CI. ad arcum. Ut autem habeamus PG. ducatur OQ. aequalis et parallela NG. patet $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ OQP. esse simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ CNO. Ergo $\dfrac{PQ}{ON} = \dfrac{QO}{CN}$. Ergo $PQ = \dfrac{QO \frown ON}{CN}$ vel $\dfrac{NG \frown DI}{CI}$. Videamus an constans sit ratio $\dfrac{NG}{CI}$. Dictum est qualis sit NG. nimirum Rq. differentiae inter OG^2 et ON^2. At CI est Rq. differentiae inter $\beta^2\,OG^2$ et $4\,ON^2$. erit ergo ratio $\dfrac{\sqrt{OG^2 - ON^2}}{\sqrt{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}} = \sqrt{\dfrac{OG^2 - ON^2}{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}}$. Ergo $PQ = \sqrt{4ON^2} \frown \sqrt{\dfrac{OG^2 - ON^2}{\beta^2 OG^2 - 4ON^2}}$. Quando autem $\beta^2 = 4$. seu quando $OG = OC$. tunc summa omnium PQ. quadrabilis, sive curva cycloeidis haberi potest, tunc enim non est protracta vel contracta.

Etiam atque etiam considerandum est, an non sint aliqui casus methodi per inscripta et circumscripta, quia per communem methodum indivisibilium suppleri nequeant — qualis videtur esse quadratura lunulae Hippocraticae.

Nimirum non video quid prohibeat excogitari figuras, in quibus summa laterum inscriptorum crescat, circumscriptorum decrescat in tali ratione, ut concursus eorum definiri possit, vel per problema planum vel per solidum. Fingendo scilicet summam laterum semper extendi; hic locus erit utendi illis seriebus infinitis summabilibus, quarum summae finitae, seu cum summa infinitarum linearum non it in planum: aut potius hic locus est inveniendi terminum alicuius seriei eiusmodi dupliciter affectae, id est partim crescentis partim descrescentis, donec incrementorum decrementorumque differentia evanescat. Ita non opus est serie convergente, sufficit simplex vel inscriptorum solum, vel circumscriptorum solum.

Caeterum inscripta fiunt per chordas, circumscripta per tangentes, concurrentes. Hae autem incidunt in nostrum triangulum characteristicum, et ideo utiliores. Porro utile foret tentare possitne fieri, ut chordae laterave inscripta pariter ac circumscripta semper sint aequalia, quod fieri posset, faciendo ea semper aequalia, et residuo ultimi, quod succedere non vult, seu iusto minus est, faciendo partes reliquorum subdividendorum aequales, etsi qua pars rursus superest, ita denuo procedendo, ita in infinitum semper habebuntur latera aequalia. Quodsi iam hac laterum in aequalia divisione aliae quaedam lineae quoque aequales aut apte crescentes orirentur, v. g. omnes perpendiculares ad illa latera, aut applicatae crescentes certa quadam progressione, eaque constanti, id est apparitura, subdivisa licet figura in infinitum; tunc applicatae istae lineae ad curvam summari poterunt.

Si persequamur applicatae datae figurae ut hyperbolae, in quas figuras alia forma ingredi possint, v. g. ut intervalla perpendicularium, tangentium etc., tunc eo ipso nova de ipsa theoremata habebimus, eiusque applicata curvae altitudini, basi alterius applicabimus, easque hoc modo cum aliis figurae novae lineis comparabimus.

Loci distantiarum inter focos in ellipsi et hyperbola perpetuarum, possunt esse quasi ellipses et quasi hyperbolae in quibus distantiae illae decrescant crescantve certa ratione.

Non tantum inscripta et circumscripta latera, sed et polygona ipsa, quorum latera sunt eorumque quantitas continue crescens decrescensve considerari potest ad habendam figurae quantitatem, ut prius curvae.

Alia est methodus pro summis curvarum, ut scilicet dividatur altitudo eum in modum, in partes forsan inaequales, ut latera quoque seu arcus trianguli characteristici, seu chordae inassignabiles certa proportione summabili crescant decrescantve.

Ellipsis $2ax - \frac{a}{t}x^2 = y^2$, unde $\cancel{2}ap - \frac{\cancel{2}a}{t}xp = \cancel{2}y^2$, seu $p = \frac{y^2}{a - \frac{a}{t}x} = \frac{2ax - \frac{a}{t}x^2}{a - \frac{a}{t}x}$, hoc dividatur y, hoc inquam dividatur $y = \sqrt{2ax - \frac{a}{t}x}$, seu $\frac{y}{\frac{y^2}{a - \frac{a}{t}x}} = \frac{y \frown a - \frac{a}{t}x}{y^2}$, fiet $\frac{a - \frac{a}{t}x}{y} = \frac{a - \frac{a}{t}x}{\sqrt{2ax - \frac{a}{t}x^2}}$, differentia ordinatae ellipsis, eius $\square$to $\frac{a^2 + \frac{a^2}{t^2}x^2 - \frac{2a^2}{t}x}{2ax - \frac{a}{t}x^2}$,

3 ut hyperbolae *erg. L*

15–544,2 Dieser Abschnitt steht auf Bl. 267 r° oben und ist zusammen mit der Zahlenrechnung durch einen Trennstrich von dem übrigen Text abgesetzt. Er dürfte zuerst auf den Bogen geschrieben worden sein.

additoque $1 = \dfrac{2ax - \frac{a}{t}x^2}{2ax - \frac{a}{t}x^2}$, fiet: $\sqrt{\dfrac{a^2 + \begin{array}{c}\frac{a^2}{t^2}\\ -\frac{a}{t}\end{array} x^2 - \begin{array}{c}\frac{2a^2}{t}\\ -2a\end{array} x}{2ax - \frac{a}{t}x^2}}$ latus curvae ellipticae.

$$\sqrt{\frac{a^{\cancel{2}}t^2 + a^{\cancel{2}}x^2 - \cancel{a}tx^2 - 2a^{\cancel{2}}tx + 2\cancel{a}t^2x}{2\cancel{a}t^2x - \cancel{a}tx^2}} = \sqrt{\frac{at^2 + ax^2 - tx^2 - 2atx + 2t^2x}{2t^2x - tx^2}}.$$

$\dfrac{a^2}{a \mp \sqrt{ax},} = y$, $a^2 = ay \mp y\sqrt{ax}$, vel $a^2 - ay = \mp\, y\sqrt{ax}$, vel $a^4 - 2a^3y + a^2y^2 = y^2ax$. Ergo $\dfrac{a^3}{y^2} - \dfrac{2a^2}{y} + a = x$.

$\dfrac{a}{a + \sqrt{ax}} = \dfrac{a}{\sqrt{ax}} - \dfrac{a^2}{ax} + \dfrac{a^4}{a^2x^2}$ etc. Iam $\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} = y$, dabit: $\dfrac{a^4}{ax} = y^2 = \dfrac{a^3}{x} = y^2$. Ergo $x = \dfrac{a^3}{y^2}$. Ergo reliqua $-\dfrac{2a}{y} + a$, aequant: $-\dfrac{a}{x} + \dfrac{a^2}{x^2} - \dfrac{a^4}{x^4}$ etc. Quo posito differentia inter $\dfrac{2a}{y}$ et $\dfrac{a}{x}$ in illa hypothesi $+a$, summa erit horum $\dfrac{a^2}{x^2} + \dfrac{a^4}{x^4}$ etc. Videndum an inde aliqua lux ad summam eiusmodi indagandam. Imo differentia ista nihil aliud est quam spatium quoddam hyperbolicum. Inprimis consideratione dignum, quod eadem oritur figuram quomodocunque explicetur $\mp$ sive per $+$ sive per $-$ unde etiam differentia

2 *Darunter in anderem Duktus:*

$$\begin{array}{r} 1673 \\ \underline{96} \\ 10038 \\ \underline{15057} \\ 160608 \end{array}$$

5 $\dfrac{a}{a + \sqrt{ax}}$: in der Reihenentwicklung überspringt Leibniz das dritte Glied, dies wirkt sich bis zum Ende des Abschnitts aus.

inter haec duo $\frac{a}{\sqrt{ax}} - \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}$ etc. alternantem, et simplicem $\frac{a}{\sqrt{ax}} + \frac{a}{x} + \frac{a^2}{x^2}$ etc. deberet haberi.

Adhibeat $\frac{\sqrt{ax}}{a \mp \sqrt{ax}}$. Unde fiet: $\frac{\sqrt{ax}}{a} - \frac{ax}{a^2} + \frac{\sqrt{a^3x^3}}{a^3}$ etc. vel etiam $\frac{\sqrt{ax}}{a + \sqrt{ax}} = \frac{\sqrt{ax}}{a} - \frac{\cancel{a}x}{a^{\cancel{2}} + \cancel{a}\sqrt{ax}}$. Iam si $\frac{xa}{a + \sqrt{ax}} = y$. erit $xa - ay = y\sqrt{ax}$. et $x^2a^2 - 2a^2xy + a^2y^2 = axy^2$. Ergo $a^2y^2 = -x^2a^2 + \genfrac{}{}{0pt}{}{2a^2y}{ay^2}\,x$. $\frac{a^2y^2}{a^2} - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^4} = -\frac{x^2a^2}{a^2} + \genfrac{}{}{0pt}{}{+2a^2y}{\frac{ay^2}{a^2}}\,x - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^4}$. Ergo [$\sqrt{a^2y^2 - \frac{\Box\overline{\llcorner a^2y + \frac{ay^2}{2} \lrcorner}}{a^2}} = \mp ax \mp \frac{a^2y + \frac{ay^2}{2}}{a}$.]

Alia figura $\frac{a^2}{a + \sqrt{ax} + x} = y$. Ergo $a^2 = ay + y\sqrt{ax} + xy$, vel $a^2 - ay - xy = y\sqrt{ax}$. vel $a^4 - 2a^3y - 2a^2xy + a^2y^2 - \overset{3}{\cancel{2}}ay^2x + x^2y^2 = \cancel{y^2ax} = 0$. vel $a^4 - 2a^3y + a^2y^2 = \underset{2a^2y}{3ay^2x} - x^2y$. Unde ad extractionem radicis a latere x veniri potest.

Iam $\frac{a}{a + \sqrt{ax} + x} = \frac{a}{\sqrt{ax} + x} - \frac{a^2}{ax + \sqrt{ax^3} + x^2}$

$+ \frac{a^3}{\sqrt{a^3x^3} - \underset{(ax^2)}{\sqrt{a^2x^4}} + \sqrt{ax^5} + ax^2 + \sqrt{ax^5} + x^4}$ etc. et summa tamen horum omnium facilius ita iniri potest:

---

7 *Daneben:* Haec ergo figura licet tam implicata ex hyperbolae quadratura pendet.

3–6 Adhibeat ... Ergo $\sqrt{a^2y^2 - \llcorner\Box, a^2y + \frac{ay^2}{2}\lrcorner} = \mp x \mp a^2y$ [*bricht ab*] *am Rande erg. L, ändert Hrsg.* 3 etc. *(1)* vel etiam $\frac{\sqrt{ax}}{a} - \frac{ax}{a^3 \mp \sqrt{a^5x}}$. *(a)* Unde *(b)* Hoc transformetur *(2)* vel *L*

---

7 Alia: In den Rechnungen der beiden folgenden Abschnitte unterlaufen Leibniz verschiedene Flüchtigkeiten, eine davon — S. 546 Z. 1, wo es a^2 anstelle von xa heißen müsste — führt zu dem trügerischen Endergebnis.

$\frac{a}{x} - \frac{a\sqrt{ax+xa}}{x^2} +$ etc. ita ut iam haec summa, ubi numeratores tantum sunt compositi, priori licet implicatissimae ubi nominatores compositi erant aequetur. Iam $\frac{a\sqrt{ax+xa}}{x^2}$ ita resolvi potest in partes[:] $\frac{xa}{x^2} = \frac{a}{x}$. unde priori $\frac{a}{x}$ rursus $\frac{a}{x}$ adimitur, et $\frac{a^2\sqrt{ax}}{x^2} = y$. unde $\frac{a^3x}{x^4} = y^2 = \frac{a^3}{x^3}$. cuius datur quadratura. Eodem modo si pergatur ad $\frac{a\sqrt{ax+xa,\frown\ \sqrt{ax+x}}}{x^2}$ fiet $\frac{a^2x+ax\sqrt{ax+xa\sqrt{ax+x^2a}}}{x^3}$ sive $\frac{a^2}{x^2} + 2\frac{\sqrt{a^2x}}{x^3}$ (unde $= y$, et $\frac{a^2x}{x^6} = y^2$, $\square^{\text{bile}}$) $+\frac{a}{x}$. Unde iterum $\frac{a}{x}$, quod rursus per sequens destruetur.

Si inveniri posset ars inveniendi figuram ex data tangentium proprietate, eadem opera credo arithmetica summarum perficeretur; possumus enim semper opinor ope divisionum istarum excogitare figuram ex cuius quadratura pendeat seriei alicuius geometricae finitae infinitaeve summa. Et quoniam credo ostendi posse omnium figurarum dari quadraturam ope logarithmorum iam superest rem illam maximam ostendere, quomodo scilicet datae cuilibet seriei arithmeticae adhiberi possit arithmetico-sygnotos saltem quando aliter id fieri non potest per approximationem. Duo igitur maxima puto praestari posse[:] r e s o l u t i o n e m omnium aequationum, per tabulam sinuum, sive cyclicam, et c o m p o s i t i o n e m omnium aequationum per hyperbolicam.

T a b u l a L e i b n i t i a n a: ad quam opus instrumento meo. Grandis calculus maximorum calculorum cui libro apparatus tabulae Leibnitianae servabitur, unde excerpetur exigua ad usum qualis sinuum et logarithmorum communis. Ab altero latere tabulae repraesentabitur eius sinus si ipse pro arcu sumatur; eius logarithmus si pro naturali; eius potestates si pro radice.

Tabula condenda inversa: in qua cuilibet numero naturali e regione ponatur arcus qui ei respondet si pro sinu sumatur, et numerus naturalis qui ei respondet si sumatur pro logarithmo; item radix quae ei respondet quadratica, cubica etc. Huic tabulae fundamentum est sinuum et logarithmorum calculus ad summam vastitatem extensus. Ita

3 rursus *(1)* aliquid additur *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{x}}$ adimitur *L* 16–547,4 T a b u l a . . . radicum. *erg. L*

et logarithmus exhiberi possit, qui rationem habeat datam ad logarithmum denarii, et sinus qui ad eundem rationem habeat datam.

Ante omnia condenda tam vasta logarithmorum tabula, inde enim facile habentur sinus et extractiones radicum.

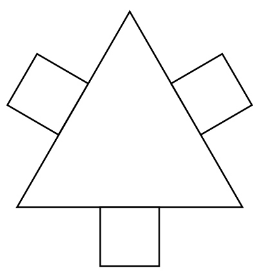
1 f. ad logarithmum denarii *und* ad eundem *erg. L*

31. NOTAE MAXIME AD CIRCULI QUADRATURAM RELATAE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 II 1 Bl. 254–255. 1 Bog. 2°. 4/5 S. auf Bl. 254 v°. Bl. 254 r° leer. — Auf dem übrigen Bogen N. 32.
Cc 2, Nr. 883 tlw.

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist als erstes auf den Bogen geschrieben worden. Es ist daher zeitlich kurz vor N. 32 (vgl. dort) anzusetzen.

Fortification nouvelle de Honoré Meusnier presentée au Roy.
Modum proponit triangula ac quadrangula, ac pentagona aeque bene fortificandi, ac ea in quibus numerus laterum maior. Idque non *par bastions flanquez, mais par des autres especes d'ouvrages, qu'il appelle avantgardes*. Variasque alias adhibet formas non communes.

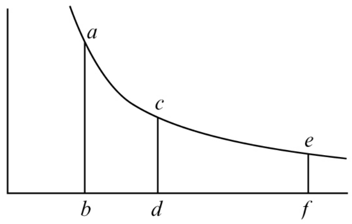


[*Fig. 1*]

Est in fol. 1626 circiter Parisiis editus.

P. Gregorius a S. Vincentio demonstravit ni fallor si ea sit ratio ab ad cd, quae est cd ad ef, spatia ad et cf esse aequalia[;] si inaequalia sint etc. ostendit, id unde deduxit P. Sarrasa usum ad logarithmos.

8 *Fortification*: HONORAT de MEYNIER, *Les nouvelles inventions de fortifier les places*, 1626.
15–17 Vgl. dazu: G. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647, S. 586 (Satz 109) und S. 594–597 (Satz 125–130) sowie A. A. de SARASA, *Solutio*, 1649, S. 7 f.



[*Fig. 2*]

Georgius Aloysius de Löwenthurn defensionem problematis Austriaci suscepit.

Domin. de Nonantcourt *Euclides Logisticus*. Is primus compositionem rationum demonstravit, teste Fr. Ainscomb. in defensione quadraturae P. Gregorii.

Quadrasse ait Ainskom, P. Gregorium duarum hyperbolarum similium et aequalium certo modo positarum lineis curvis comprehensum spatium.

P. Mersennum voluisse reducere problematum Gregorianorum solutionem ad solutionem huius problematis: exhibere lineas quae sunt ut logarithmi duorum terminorum rationem datam habentium. Eamque resolutionem esse ultimam solutionem P. Gregorii non obscure innuit, hanc esse sententiam Robervallii.

P. Ainskom refert epistolam Cartesii ex Svecia scriptam ad amicum, qui de Robervallio ita iudicat: *Si M. Roberval n'a pas l'esprit de refuter le P. Gregoire, et si le dit pere ne trouve point d'autre adversaire que celui cy il ne luy sera pas difficile de se defendre*.

---

2 suscepit: Gottfried Aloys Kinner von Löwenthurn, *Elucidatio geometrica*, 1653. 4 teste: François Xavier Aynscom, *Expositio ac deductio*, 1656, S. 72. Aynscom bezieht sich auf François de Nonancourt, *Euclides logisticus*, 1652. — In Hannover, *Niedersächs. Landesbibl.* befindet sich ein Handexemplar des *Euclides logisticus* (Ms IV 380a) mit zahlreichen Eintragungen von Leibniz' Hand aus früh-hannoverscher Zeit. 5 Quadrasse: s. Aynscom, *a. a. O.*, S. 101 f. Aynscom bezieht sich hier auf das *Opus geometricum* S. 603 (Satz 139). 7–10 Vgl. dazu M. Mersenne, *Novarum observationum*, 1647, S. 71 f. bzw. A. A. de Sarasa, *Solutio*, 1649, S. 4 sowie Aynscom, *a. a. O.*, S. 105. 11 refert: Aynscom, *a. a. O.*, S. 108; s. a. *DO* V, S. 464 f.

Video P. Gregorium invenisse primum, cylindrum aequalem esse parabolae in seipsam inverse ductae. Cum ego putarem me id invenisse.

Postea conatur hunc ductum cubare. Sed hoc ego successurum vix crediderim.

Quadraturam quae ex mesolabo dependeret, ineptam fore ait P. Ainskom, ego id minime arbitror, haberemus enim certe exactam exhibendae rectae circulo aequalis rationem, etsi conicam.

$$\begin{array}{lllll} Rq\ \beta a & Rq\ 2\beta a & Rq\ 3\beta a & Rq\ 4\beta a & \\ \underline{Rq,\ a^2-\beta a.} & \underline{Rq, a^2-2\beta a.} & \underline{Rq,\ a^2-3\beta a.} & \underline{Rq, a^2-4\beta a.} & \\ \sqrt{,}\, \beta a^3-\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\, 2\beta a^3-4\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\, 3\beta a^3-9\beta^2 a^2. & \sqrt{,}\, 4\beta a^3-16\beta^2 a^2. & \text{etc.} \end{array}$$

solidum cui cylinder aequalis.

Dividantur omnia per a, vel $Rq\ a^2$. fiet:

$$\sqrt{,}\, \beta a-\beta^2. \qquad \sqrt{,}\, 2\beta a-4\beta^2. \qquad \sqrt{,}\, 3\beta a-9\beta^2 \qquad \sqrt{,}\, 4\beta a-16\beta^2. \qquad \text{etc.}$$

spatium aequale imo idem portioni circulari.

Et aequatio talis est huius figurae istae applicatae: $y^2 = xa - x^2$. Ergo $\frac{y^2}{x} = a - x$. vel $\frac{y^2}{x} + x = a$.

NB. non potest x exhiberi pure.

$y^2+x^2 = xa$. Ergo quad. sinus additum quad° altitudinis = quad. applicatae parabolicae, ergo locus omnium y, est ad circuli circumferentiam. Ergo nihil hinc lucis.

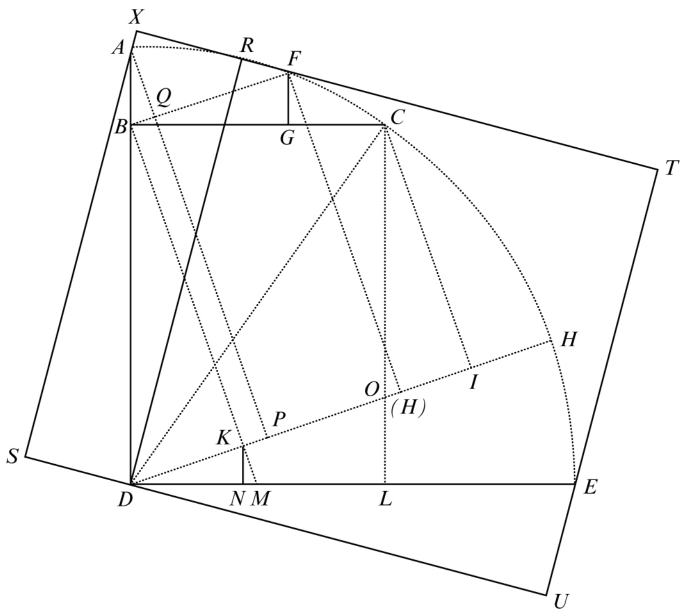
13 imo idem *erg. L* 16 f. pure. *(1)* Hinc nata figuras, quarum applicatae non possunt exhiberi p u r e g e o m e t r i c e . *(2)* Apparet autem manifeste locum ipsius y. esse *(a)* hyper *(b)* parabolam, *(3)* y^2+x^2 *L* 18 circumferentiam. *(1)* Ergo $y = \sqrt{xa-x^2}$. idem $y = \sqrt{a^2-x^2}$. Ergo $xa-x^2 = a^2-x^2$. Ergo $xa = a^2$. *(a)* ut constat *(b)* quod absurdum. *(2)* Ergo *L*

1 Video: *Opus geometricum*, S. 794 (Satz 136); das Ergebnis wird auch S. 840 angeführt. — Vgl. dazu J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 108 f. (Satz 136) = *WO* I, S. 426 f. 3 conatur: *Opus geometricum* S. 840; sein Vorhaben führt Saint-Vincent im 1. Teil des 9. Buches (S. 957–975) aus.
4 ait: Aynscom, *a. a. O.*, S. 117.

32. MOMENTA SEGMENTI CIRCULARIS
[Sommer 1673]

Überlieferung: L (tlw. verworfenes) Konzept: LH 35 II 1 Bl. 254–255. 1 Bog. 2°. $2\frac{1}{5}$ S. auf Bl. 254 v° unten sowie Bl. 255 r° u. v°. Bl. 254 r° leer. — Auf dem übrigen Bogen N. 31. Cc 2, Nr. 883 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück ist offenbar unter dem Eindruck von Leibniz' ersten gründlichen mathematischen Studien in Frühjahr 1673 entstanden und stellt einen Versuch dar, der Kreisquadratur mittels Momentenbetrachtungen näherzukommen. Das Auftreten der 1. Form des Doppelvorzeichens sowie das Wasserzeichen des Papiers deuten auf eine Abfassung in zeitlicher Nähe zu N. 40 vom August 1673 hin.



[*Fig. 1*]

11 [*Fig. 1*]: Die Elemente I, (H), DC, QP fehlen in der Leibniz'schen Handzeichnung, kommen aber im Text vor; sie sind deshalb vom Hrsg. ergänzt worden.

[*Teil 1, gültig*]

Esto segmentum circuli, ABC. Habetur eius momentum ex axe AB. habetur enim summa quadratorum applicatarum basi BC parallelarum, cuius dimidium est momentum figurae ex AB. Sed si haberetur momentum ex basi BC. haberetur area figurae. Ponamus enim haberi momentum ex AB esto b^3. ex BC esto c^3. Ergo area figurae ABC esto x^2. Distantia centri gravitatis ab AB erit $\frac{b^3}{x^2}$. et ab BC erit $\frac{c^3}{x^2}$. Datur ergo ratio harum distantiarum $= \frac{b^3}{c^3}$. ergo et recta, in quam cadit punctum seu centrum BF, si scilicet $\frac{BG}{FG} = \frac{b^3}{c^3}$.
Iam ex centro D ducatur rectae BF parallela DH. rectaeque ad eam perpendiculares: CI et BK. et ABC agatur circa axem HK. Patet momentum eius aequari cylindrico, cuius basis ABC. altitudo BK. quoniam distantia centri gravitatis, id est lineae BF ab axe HK. ducta in figuram dat eius momentum. Atqui totum momentum $ABKICA$ ex axe IK quadrabile est, item momentum et $CBKI$ trapezii, ergo et residui ABC. Posset ergo quadrari cylinder. Quod est absurdum.

2–14 *Dazu am Rande später ergänzt:*

Aliter[:] si habito momento ex AB. quaeras momentum ex DE. dicti semisegmenti ABC quod inveniri potest. Ergo potest duci recta DR. in quam cadit centrum gravitatis ipsius ABC semisegmenti. Hinc si semisegmentum volveretur circa XS vel TU. ipsi DR. axi aequilibrii parallelam, annulus productus aequabitur cylindrico cuius basis figura ABC. altitudo distantia ipsius DR. axis aequilibrii, ab axe revolutionis.

Hinc et p r o b l e m a , quamlibet circuli portionem statice bisecare.

Si quis alicuius portionis circularis momentum ex aliqua recta quae intra circulum ⟨producta⟩ in centrum non cadit, seu diametri portio non est, invenire posset, is quadraturam invenisset.

4 Sed *(1)* et habetur momentum ex basi BC. habetur enim momentum quadrantis ADE ex basi *(2)* si *L*

---

19 annulus: genauer müsste der von Leibniz angegebene Wert noch mit 2π multipliziert werden.

Sed ut ista clariora ⟨fiant⟩ ad calculos reducere operae pretium est.

Patet quadratum $\overset{\square}{B}C^2 = \overset{\square}{C}D^2 - \overset{\square}{B}D^2$. Ergo ut habeatur summa quadratorum omnium parallelarum basi BC, ipsi AB applicatarum, inveniatur primum summa omnium quadratorum ipsius radii, CD. ad AB applicatorum, demta summa omnium BD^2.
Summa omnium radii quadratorum, ad AB applicatorum, posito $AB = b$. et $CD = a$. erit a^2b.
Summa omnium BD^2 ad AB applicatorum est[:]

$$\begin{array}{lllllll} a & + & a-\beta. & + & a-2\beta. & & \text{etc.} \\ \underline{a} & & \underline{a-\beta.} & & \underline{a-2\beta} & & \\ a^2 & + & a^2+\beta^2-2\beta a & + & a^2+4\beta^2-4\beta a & & \text{etc.} \end{array}$$

vel $a^2 + a^2 + a^2$ etc. $+\ \beta^2 + 4\beta^2$ etc. — $2\beta a + 4\beta a + 6\beta a$ etc. $= a^2b + \frac{1}{3}b^3 - ab^2$.
Ergo summa omnium $BC^2 = a^2b - a^2b - \frac{1}{3}b^3 + ab^2$. vel summa omnium $BC^2 = ab^2 - \frac{1}{3}b^3$.
Hanc summam dimidiatam, seu momentum ne repetere necesse sit, appellemus (c^3).

Iam ut quadrata omnium AB ad BC applicatarum, habeamus, ita procedendum est[:]

Dantur quadrata omnium parallelarum AD ad DE applicatarum, seu omnium applicatarum totius quadrantis, nempe $a^3 - \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$.
Dantur et quadrata omnium applicatarum portionis ELC. ipsi CL. parallelarum, nempe $a\ EL^2 - \frac{1}{3}EL^3$.
Ergo $\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3$ = summae omnium $\square^{\text{torum}}$, applicatarum quadrilinei $CLDAFC$. ipsi AD parallelarum.

Quaeritur iam summa omnium quadratorum, applicatarum semisegmenti CBA, ipsi AB parallelarum.

13 dimidiatam, seu momentum *erg.* *L*

11 Leibniz verwendet hier verschieden große Vorzeichen, die größeren haben zugleich Klammerfunktion.

Et manifestum est $AB^2 + BD^2 + AB \frown BD = AD^2$. itemque est in omnibus parallelis. Ideo

$$AB^2 = AD^2 - BD^2 - AB \frown BD.$$

vel quadratum parallelae ipsius AB aequatur quadrato parallelae ipsius AD. demtis: quadrato ipsius BD perpetuo eiusdem, et rectangulo ex parallela ipsius AB in perpetuam BD.

Quare et summa quadratorum omnium parallelarum ipsius BD ad BC applicatarum aequatur summae $\square^{\text{torum}}$, omnium parallelarum AD. demto quadrato BD ducto in BC. seu demto $BD^2 \frown BC$. demtaque praeterea summa omnium AB parallelarum, id est spatio vel semisegmento ABC in BD. seu cylindrico cuius basis ABC. altitudo BD.

Fiet summa quadratorum parallelarum $AB =$

$$\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3 - BD^2 \frown BC - ABC \frown BD.$$

Est autem $BC = a - EL$. fiet:

$$\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}EL^3 - a\ BD^2 - BD^2 \frown EL - ABC \frown BD.$$

$$\begin{array}{llcl} \text{vel quia} & EL & = & a - BC. \\ & EL^2 & = & a^2 + BC^2 - 2a\ \ BC. \\ & EL^3 & = & a^3 + a\ BC^2 - 2a^2BC^2 - a^2BC - BC^3 + 2a\ BC^2.\ \text{vel} \\ & & & a^3 - 3a^2BC + 3a\ BC^2 - BC^3. \end{array}$$

fiet:

$$\frac{2}{3}a^3 \underbrace{- a^3 - a\ BC^2 + 2a\ BC}_{-a\ EL^2} + \llcorner \underbrace{a^3 - 3a^2BC + 3a\ BC^2 - BC^3}_{=EL^3} \lrcorner \smile 3$$

$$-BD^2 \frown BC, -ABC \frown BD.$$

7 ad BC applicatarum *erg. L*

1 manifestum est: Hier wird die Rechnung fehlerhaft. In der Folgegleichung vergisst Leibniz den Faktor 2. Zu diesem Versehen kommen im Laufe der Untersuchung weitere hinzu (S. 555 Z. 6, S. 555 Z. 13, S. 555 Z. 17, S. 556 Z. 5, S. 556 Z. 7). Die Fehler wirken sich bis zum Ende von Teil 1 aus und werden auch in den Teil 2 hinübergenommen.

Totum autem istud

$$\underbrace{\frac{2}{3}a^3 - a\ EL^2 + \frac{1}{3}\ EL^3 - BD^2 \frown BC}_{(d^3)}\ -ABC \frown BD.$$

appellabimus (d^3) $-ABC \frown BD$.

Et quia sector circuli, $AFCD$. est curva AFC in radium [dimidiatum] $\frac{a}{2}$. ideo curvam appellabimus x, erit sector $\frac{ax}{2}$. A quo auferatur $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ $DBC = \frac{BD \frown BC}{2} = (e^2)$. erit segmentum $ABC = \frac{ax}{2} - e^2$. et $ABC \frown BD = \frac{a^2x}{2} - e^2a$.

Ac summa quadratorum omnium ipsi AB parallelarum ad BC applicatarum erit $d^2 - \frac{ax}{2} + e^2a$. et momentum semisegmenti ABC ex basi vel semichorda aut sinu recto BC erit:

$$\frac{d^3}{2} - \frac{a^2x}{4} + \frac{e^2a}{2}.$$

Ergo $$\frac{FG}{BG} = \frac{d^3 - \dfrac{a^2x}{2} + e^2a}{2c^3}.$$

Ducatur parallela ipsi BF ex centro D. nempe DH. Actoque spatio ABC circa axem DH. momentum eius erit: $\frac{ax}{2} \frown BK$.

Investiganda ergo BK ex datis, quod ita facile fiet: Triangulum BKD est simile triangulo BGF (est enim simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DKM. et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DNK. et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ DLO. et hoc $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BGF) ergo

$$\frac{BK}{BG\ \text{cognita}} = \frac{FB}{BD\ \text{cognita}} \qquad \text{ideo } BK = \frac{FB \frown BG}{BD}.$$

4 dimidiatum *erg. Hrsg.* 8 vel ... recto *erg. L* 12 DH. | Intelligatur iam ducta, et ad eam perpendicularis BK. *gestr.* | Actoque *L*

Posito $BG = (f)$. et $BD = (g)$. et $FB = (y)$. fiet: $BK = \dfrac{yf}{g}$.

Patet hinc:

$$\frac{ax}{2} \frown \frac{yf}{g} = \left(\frac{axyf}{2g}\right) = \text{momento semisegmenti } ABC \text{ ex axe } KI.$$

Cum autem $y = FB$. sit $\sqrt{BG^2 + FG^2}$. et $FG = \dfrac{d^3 - \dfrac{a^2x}{2} + e^2a, \frown f}{2c^3}$. vel pro $\dfrac{d^3 + e^2a, \frown f}{2c^3}$ ponendo (i), fiet $(FG) = i - \dfrac{a^2fx}{2c^3}$, et $FG^2 = i^2 + \dfrac{a^4f^2x^2}{4c^6} - \dfrac{\cancel{2}ia^2fx}{\cancel{2}c^3}$. et ponendo (ξ) pro $\dfrac{a^4f^2}{4c^6}$. et (k) pro $\dfrac{ia^2f}{c^3}$, fiet $FG^2 = i^2 + \xi x^2 - kx$. Iam $BG^2 = f^2$.

Ergo $$(FB) = \sqrt{f^2 - i^2 - \xi x + kx} = (y).$$

in quae ducta $\dfrac{axf}{2g}$ dant momentum semisegmenti $\dfrac{axyf}{2g}$. Pro $\dfrac{af}{2g}$ substituatur (l) fiet momentum semisegmenti $= \sqrt{\llcorner f^2l^2x - i^2l^2x^2 - \xi x^4l^2 + kx^3l^2 \lrcorner}$.

[*Teil 2, verworfen*]

Idem vero momentum aliter investigabimus.

Ante omnia quaeremus momentum trapezii $KBAP$ sive rectanguli KQ. et $\bigtriangledown^{\text{li}}$ AQB. Ac primum rectanguli KQ momentum investigare facile est, data recta KP. Est enim $\dfrac{KB^2}{2} \frown KP$. Investiganda est ergo ante omnia ipsa KP. quod ita fiet:

$$DP \text{ est } = FB.$$

ergo $FB - DK = KP$. investiganda ergo recta DK.

---

15 *Darüber:* Error NB.

1 f. $\frac{\mathrm{yf}}{\mathrm{g}}$. *(1)* Item aliter, quia $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ BDM simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BGF. etiam $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ MGB simile erit $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BGF, ideo quia angulus MBF rectus recta FG producta incidet in M | *darüber separat gestr.:* falsum | ergo DM = BG. et DP = BF. seu $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ DMP = et simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ BGF. Iam et sic dici potest: $\frac{\mathrm{BK}}{\mathrm{BD}} = \frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{BM}}$. ideo $\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{BD = g} \frown \mathrm{BD = g}}{\mathrm{BM}} = \frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{z}}$. posito BM = (z). falsum ergo $\mathrm{BK} = \frac{\mathrm{yf}}{\mathrm{g}}$. et proinde | ut et *erg.* | id unde deduxeramus rectam FG productam cadere in M. NB. falsum rectam DM = BG. ideo falsum et rectam BM esse cognitam. Sed haec mittamus, *(2)* Patet *L*

Et quia $\bigtriangledown^{\text{la}}$ BKD et BGF similia erit $\dfrac{DK}{FG} = \dfrac{BK}{BG}$. Ergo $DK = \dfrac{BK \frown FG}{BG}$. vel quia BK rursus resolvenda in FB. brevius erit $\dfrac{DK}{FG} = \dfrac{BD}{BF}$. Ergo

$$DK = \frac{\overset{g}{BD \frown FG}}{FB}. \text{ seu } (DK) = \frac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{FB}.$$

a FB detractum relinquit KP. in quam rectam KP. ducendum quadratum dimidium rectae KB.

Est autem recta KB $\dfrac{yf}{g}$. ergo $KB^2 = \dfrac{y^2f^2}{g^2}$ sive

$$\frac{f^4}{g^2} - \frac{i^2f^2}{g^2} - \frac{\xi x^2f^2}{g^2} + \frac{kxf^2}{g^2}.$$

et pro $\dfrac{f^4}{g^2} - \dfrac{i^2f^2}{g^2}$ ponendo (m^2), pro $\dfrac{\xi f^2}{g^2}$ ponendo (ω), pro $\dfrac{Kf^2}{g^2}$ ponendo (n) fiet

$$(KB^2) = m^2 - \omega x^2 + nx.$$

ducendum in $\dfrac{KP}{2}$. quod cum sit radix surda, ipsum KB^2 rursus quadrandum est, fiet

$$\left.\begin{array}{rrrr} & m^2 & -\,\omega x^2 & +\,nx \\ & m^2 & -\,\omega x^2 & +\,nx \\ \hline & +\,m^2nx & -\,\omega nx^3 & +\,n^2x^2 \\ -\,\omega x^2m^2 & & -\,\omega nx^3 & +\,\omega^2x^4 \\ -\,\omega x^2m^2 & +\,m^2nx & - & +\,m^4 \\ \hline \end{array}\right\} \text{sive}$$

$$\overline{+m^4 + 2m^2nx - 2\omega m^2x^2 + n^2x^2 - 2\omega nx^3 + \omega^2x^4} = KB^4.$$

ducendum primum in y^2. et a producti radice quadrata; adimenda est radix quadrata eiusdem KB^4, ducti in DK^2. Residui dimidium erit momentum quaesitum.

Porro quia in caeteris omnibus componentibus implicitum est x. demto m^4. ideo reliquis sequestratis, cogitemus tantum m^4 duci in y^2. seu in $f^2 - i^2$ *etc.* fiet $m^4f^2 - m^4i^2 = (o^6)$. Cumque reliquis omnibus terminis, sane quam plurimis implicetur x. ea omnia simul appellabimus z^6. Eritque

$$KB^4 \text{ in } FB^2 = o^6 \mp z^6.$$

Et quia idem KB^2 ducendum in DK. manifestum est, nihil hic oriturum quod non incognito affectum sit, ob divisorem FB incognito affectum, etsi enim ex parte tantum, non potest tamen dividi per partes divisoris. Fieri tamen potest ut ab eo liberetur, dum scilicet oppositum aequationis per divisorem illum multiplicatur. Ideo sequestratis caeteris ipsius KB^2 terminis in DK ductis, quae simul ponamus facere: ω^3, quia ipsa scilicet ab incognito liberari non possunt, cogitemus nunc m^2 in $\dfrac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{FB}$, fiet:

$$\frac{m^2ig}{FB} - \frac{a^2fgxm^2}{2\ FB\ c^3}.$$

Sed quia posterius $\dfrac{a^2fgxm^2}{2\ FB\ c^3}$ ab incognito illiberabile est, ideo nominemus ipsum v^3 fietque

$$\sqrt{q}\ \ o^6 \mp z^6, -\frac{m^2ig}{FB} + v^3 \mp \omega^3 = \text{m o m e n t o \ \ r e c t a n g u l i} \quad [K\ P.]$$

Sed possum et simpliciter momentum totius rectanguli $[BK(H)F]$ inire multiplicando KB^2 in $FB = \sqrt{q}\ \ o^6 \mp z^6$. ergo m o m e n t u m .

Nunc et momentum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ AQB. est semitriangulum ductum in KB. et praeterea applicatarum $\bigtriangledown^{\text{li}}$ ipsi AQ parallelarum quadrata dimidia.

Iam $\dfrac{AQ}{BK} = \dfrac{a - g\ (AD - BD)}{g}$. Ergo $AQ = \dfrac{a\ BK - g\ BK}{g}$.

Iam $BK = \dfrac{FB\ f}{g}$. Ergo $AQ = \dfrac{afFB - gfFB}{g^2}$.

Huius □, AQ^2 erit $\dfrac{a^2f^2FB^2 - f^2g^2FB^2}{g^4}$.

Et quia FB^2 est $= f^2 - i^2 - \xi x^2 + kx$. sumamus tantum $f^2 - i^2$, ea per $\dfrac{a^2f^2}{g^4}$, vocemus (p^2) reliqua per eadem, vocemus: (φ^2) habemus: $p^2 \mp \varphi^2$. Eodem modo cum $\dfrac{f^2g^2}{g^4}, \frown\ f^2 - i^2$, vocemus (q^2) et reliquum (ψ^2) fiet $q^2 \mp \psi^2$. ergo

$$AQ^2 = p^2 \mp \varphi^2 - q^2 \mp \psi^2.$$

Hoc ducamus in $\dfrac{KP}{3}$. seu in $\dfrac{FB}{3} - \dfrac{ig - \dfrac{a^2fgx}{2c^3}}{3FB}$ fiet □ ipsius AQ^2. nempe AQ^4. seu $p^4 + q^4 - 2p^2q^2$ etc. $\mp$ etc.

6 f. r e c t a n g u l i | K G *ändert Hrsg.* |. *(1)* Poteramus hoc labore supersedere, et simpliciter momentum *(2)* Sed *L* 7 BKHF *L ändert Hrsg.* 9 est *(1)* triangulum *(2)* semitriangulum *L* 14 + kx. | Ac *streicht Hrsg.* | sumamus *L*

Hoc ducatur in $\frac{FB^2}{9}$. ducatur ergo tantum in $\frac{f^2-i^2}{9}$ etc. sed hoc appellemus α^6, reliqua neglecta omnia, ex ductu isto oriunda: (ω^6) habemus:

$$AQ^4 \frown \frac{FB^2}{9} = \alpha^6 \mp \omega^6. \quad \text{et} \quad AQ^2 \text{ in } \frac{FB}{3} = \sqrt{_q}\ \alpha^6 \mp \omega^6.$$

Idem AQ^2 in $\frac{ig}{3FB}$, multiplicetur in ea tantum p^2-q^2, fietque $\left(\frac{\beta^4}{3FB}\right)$. reliqua in idem $\frac{ig}{3FB} = (\varsigma^3)$. denique AQ^2 in $\frac{a^2fgx}{3FB \frown 2c^3} = (\rho^3)$. fiet: $\frac{\beta^4}{3FB} \mp \varsigma^3 - \rho^3 = AQ^2$ in DK.

Ergo AQ^2 in $\frac{KP}{3} = \dfrac{\sqrt{_q}\ \alpha^6 \mp \omega^6, -\dfrac{\beta^4}{3FB} - \mp \varsigma^3 + \rho^3}{2}$ = m o m e n t o trianguli AQB.

Momentum iam quadrilinei $QPHFQ$ quaerendum est.

Ac primum momentum totius $HFAP$ semisegmenti, id est $\square AP$ ductum in a demto cubo, HP^3.

Ac primum $\square AP$ est $BK + AQ, \square$. seu $BK^2 + AQ^2 - 2AQ \frown BK$.

Et quidem $AQ = \frac{afFB - gfFB}{g^2}$, et $BK = \frac{FB \frown f}{g}$. Ergo

$$AQ \frown BK = FB^2 \frown \frac{af-gf}{g^2} \frown \frac{f}{g}.$$

Iam $FB^2 = f^2 - i^2 - \xi x^2 + kx$. Sumamus tantum $f^2 - i^2, \frown \frac{af-gf}{g^2}, \frown \frac{f}{g} = (\gamma^2)$ et reliqua omnia erunt (π^2) ergo $AQ \frown BK = \gamma^2 \mp \pi^2$.

Iam $\square AP = BK^2 + AQ^2 - 2\gamma^2 - \mp \pi^2$

$$= m^2 - \omega x^2 + nx + p^2 \mp \varphi^2 - q^2 - \mp \psi^2$$

seu: $$\underbrace{m^2 + p^2 - q^2}_{(\delta^2)} + \underbrace{nx - \omega x^2 \mp \varphi^2 - \psi^2}_{(\varpi)}.$$

Ergo $\square AP = \delta^2 - \varpi^2$ in a erit $a\delta^2 - a\varpi^2$.

Nunc opus ut investigemus cubum ipsius HP.

Iam $HP = a(= HD) - DP(= FB)$. ergo $HP = a - FB$.

Cubus de $a - FB$. est $a^3 - 2a^2FB + 2aFB^2 - FB^3$. seu

$$a^3 - \llcorner\sqrt{q}\llcorner\, \theta^6 \mp \nu^6 \lrcorner\lrcorner + \text{א}^3 \mp \text{ת}^3 - \text{ב}^3 - \mp \text{ס}^3.$$

Ergo $a\delta^2 - a\varpi - \dfrac{a^3 + \llcorner\sqrt{q}\;\; \theta^6 \mp \nu^6 \lrcorner - \text{א}^3 - \mp \text{ת}^3 + \text{ב}^3 \mp \text{ס}^3}{3}$.

m o m e n t u m e s t s e m i s e g m e n t i.

Imo aliter potius, quadratum HP ducatur in $\langle a\rangle$ erit $a^3 + a\,FB^2 - \langle 2a^2FB\rangle$. Sed falsa determinatio ipsius HP, nempe $a - FB$. et hunc errorem iam supra [commisi], nec satis patientiae est, ad ista retexenda.

1

$$\begin{array}{rcccl}
 & a & - & b & \\
 & a & - & b & \\
\hline
 & a^2 & - & ab & + b^2 \;\textit{(!)} \\
 & & & a & - b \\
a^3 - 2a^2b & & + 2ab^2 & - b^3 &
\end{array}$$

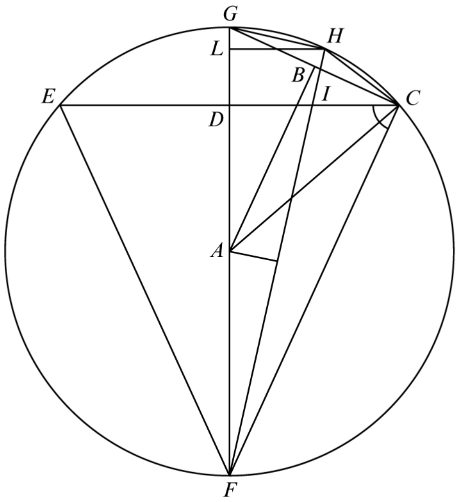
4 f. s e m i s e g m e n t i. | seu $\frac{1}{3}$ in $3\mathrm{a}\delta^2 - \mathrm{a}\varpi^2 - \mathrm{a}^3$ *gestr.* | *(1)* Investigemus et momentum semisegmenti CIH. ac primum $\square$FI $=$ IK^2. *(2)* Imo *L* 6 erravi *L ändert Hrsg.*

33. VARIA AD CIRCULUM QUADRANDUM PERTINENTIA
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 194. 1 Bl. 2°. 1 S. auf Bl. 194 r° sowie 6 Z. nebst Fig. 3 auf Bl. 194 v° oben (= Teil 3). Fig. 1 und Teil 1 bis S. 564 Z. 6 vom übrigen Text mittels Trennstrich abgesetzt.
Cc 2, Nr. 620

Datierungsgründe: Wegen des Verweises von S. 565 Z. 3 ist das vorliegende Stück nach N. 21 und nach N. 26 entstanden. Wegen des Wasserzeichens des Papiers ist es vor N. 40 vom August 1673 anzusetzen.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

11 [*Fig. 1*]: Zunächst hat Leibniz in Fig. 1 und im Text (bis S. 562 Z. 11) kleine Buchstaben zur Benennung verwendet; dann ist er zu Großbuchstaben übergegangen. In der Handzeichnung selbst hat Leibniz den Schnittpunkt von FH und EC mit I bezeichnet, gleichzeitig dient I aber auch zur Bezeichnung für den Fußpunkt des Lotes von C auf FH. Da Leibniz GL als infinitesimale Größe ansieht (vgl. S. 564 Z. 11), ist dies in 1. Näherung gerechtfertigt.

In circulo ACF ducta chorda EC. et ab extremis diametri F. G. iunctis rectis GC. FC. et ex centro A recta AB ducta, perpendiculari ad GC. aio triangula rectangula: ABC et FDC (vel DGC) esse similia.

Nam ang. $EFC =$ ang. GAC. ergo et ang. FEC vel FCE angulo AGC vel ACG aequalis. Triangula ergo EFC. GAC similia, ergo et FDC. ABC. Q. E. D.

Ergo $\bigtriangledown ABC$ simile triangulo characteristico cycloeidis. Sed hoc per se patet.

$\bigtriangledown^{\text{la}}$ HFC et IFC similia sunt seu $\dfrac{HF}{CF} = \dfrac{CF}{IF} = \dfrac{HC}{IC}$. Ergo

$$HF \frown IF = CF\square. \qquad HF \frown IC = CF \frown HC. \qquad CF \frown IC = IF \frown HC.$$

Porro ex his colligi posse puto FI, quod quaerimus.

Esto $FH = (a)$. $FC = (b)$. $FI = (x)$. erit $ax = b^2$. Ergo $\dfrac{b^2}{a} = x$.

Porro $FH = Rq \llcorner FL^2 - LH^2 \lrcorner$. et $LH^2 = \text{Rad.}^2. - LA^2$.
ergo $FH = Rq \llcorner FL^2 - \text{Rad.}^2 + LA^2 \lrcorner$ sed $FL^2 = \text{Rad.}^2 + LA^2 - 2FA \frown LA$.
Ergo $FH = Rq, 2LA^2 - 2FA \frown LA$.

$$\left.\begin{array}{c} GH^2 = GL^2 \;+\; LH^2 \\ /\backslash \\ GL \frown LF \\ \underbrace{} \\ GL + LF \frown GL \\ \underbrace{GL + LF} \\ GF \frown GL \end{array}\right\} \text{ergo } GH^2 = GF \frown GL.$$

Ergo $FH^2 = GF^2 - GF \frown GL = \underbrace{GF - GL, \frown GF}_{FH^2}$.

8 f. IF $\frown$ HC. | Ergo si FH sit diameter FG. et HC sit GC. et IC sit DC. erit diameter in *gestr.* | Porro *L*

11–13 Die Rechnungen dieses Abschnittes sind nicht fehlerfrei. Bei korrekter Rechnung ergäbe sich $FH = Rq, 2\text{Rad.}^2 + 2FA \frown LA$.

$FH = Rq\ GF^2 - GF \frown GL$. $FC = Rq\ GF^2 - \ GF \frown GD$.

Ergo $\dfrac{GF^2 - GF \frown GD}{Rq\ GF^2 - GF \frown GL} = FI$.

$$\frac{GF^4 + GF^2 \frown GD^2 - 2\ GF^3, GD}{GF^2 - GF \frown GL} = \boxed{FI^2 = \frac{GF^3 + GF \frown GD^2 - 2GF^2, GD}{GF - GL}}.$$

Ergo $\dfrac{FI^2}{GF} = \dfrac{GF^2 + GD^2 - 2GF, GD}{GF - GL}$. Ergo $\dfrac{FI}{\sqrt{[GF]}} = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{GF - GL}}$. vel $\dfrac{FI^2}{GF^2} = \dfrac{GF^2 + GD^2 - 2GF, GD}{GF^2 - GL \frown GF}$. Ergo $\dfrac{FI}{GF} = \dfrac{GF - GD = FD}{Rq\ GF^2 - GF \frown GL, = FH}$.

$\dfrac{FI}{\sqrt{[GF]}} = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{GF - GL}}$. Ergo $FI = \dfrac{GF - GD}{\sqrt{\dfrac{GF - GL}{[GF]}}}$.

$$FI \frown FH = \underbrace{GF - GD}_{FD}, \frown GF = CF^2.$$

562,18 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{l} GL \frown GL + GL \frown LF = GL + LF \frown GL \\ \quad aa \quad + \quad ab \quad = \ a \ + \ b, \ \frown \ a \\ \quad \underline{ab} \end{array}$$

4+6 GD *L ändert Hrsg. dreimal* 5 Ergo *(1)* $\dfrac{\mathrm{FI}}{\mathrm{GF}} \times \dfrac{\mathrm{GF - GD = FD}}{\mathrm{Rq\ GF^2 - GF \frown GL, = FH}}$. cylinder ergo parabolicus = cylindro omnium FI, demto ductu omnium GD in FI *(2)* $\dfrac{\mathrm{FI}}{\mathrm{GF}}$ *L*

Ergo summa quadratorum CF^2 pendet a summa quadratorum diametri, et summa omnium GD ducta in diametrum.

$\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FI}{FH}$. seu $\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2}$. Ergo $FL = \dfrac{FH^2}{GF}$. Ergo $\dfrac{FD}{FL} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2} = \dfrac{FI}{FH}$.

Ergo $\dfrac{FD \frown GF}{FH} = FI$.

$\dfrac{DI}{LH} = \dfrac{FI}{FH} = \dfrac{FD \frown GF}{FH^2}$. $\quad DI = \dfrac{FD \frown GF \frown LH}{FH^2}$. $\quad CI = \dfrac{CF \frown HC}{HF}$.

Ergo $\dfrac{FD \frown GF \frown HL}{FH^2} + \dfrac{CF \frown HC}{FH} = DC$.

In circulo LH sinus est $Rq, a^2 - \llcorner a - \beta \lrcorner \, \square$

$$\bigvee$$

$$a^2 + \beta^2 - 2a\beta = Rq, 2a\beta - \beta^2$$

ob $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ rectangulum ALH.

Idem LH sinus $= \llcorner GL \frown LF \lrcorner \; Rq, = Rq, \beta, \frown 2a - \beta, = Rq, 2a\beta - \beta^2, .$ Multiplicetur per $a - \beta$. vel $Rq\ a^2 + \beta^2 - 2a\beta$. fiet:

$$\begin{array}{rrrr}
+\, a^2 & + \quad \beta^2 & - \quad 2a\beta \\
 & - \quad \beta^2 & + \quad 2a\beta \\
\hline
 & - \quad \beta^4 & - \; 4a^2\beta^2 \\
 & +\, 2a\beta^3 & + \quad 2a\beta^3 \\
 & -\, \beta^2 a^2 & + \; 2a^3\beta \\
\hline
\end{array}$$

$$\sqrt{\llcorner} - \beta^4 + 4a\beta^3 + 2a^3\beta - [5]a^2\beta^2 \lrcorner$$

et horum quidem summa quadrari potest; puto etiam radicem extrahi posse. Imo dubito de radice.

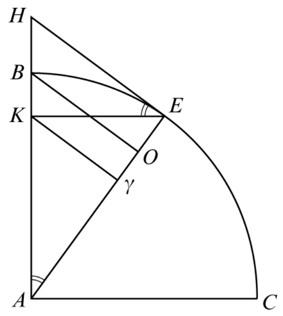
Si iam differentiae sinuum sumantur:

$Rq, 2a\beta - \beta^2,, \quad - \quad Rq, 4a\beta - 4\beta^2,, \quad - \quad Rq, 6a\beta - 9\beta^2,,$

$Rq, 4a\beta - 4\beta^2,, - \; Rq, 2a\beta - \beta^2,,$ summa pendet a q. c.

4 f. FI. | AI $= \dfrac{\text{GF}}{2\beta}$. DI $= \dfrac{\text{GF}}{2} -$ CI. *streicht Hrsg.* | $\dfrac{\text{DI}}{\text{LH}}$ *L* 18 3 *L ändert Hrsg.* 23 *Unter* Rq, $2a\beta - \beta^2,,$: $\sqrt{\llcorner} + a^2 + \beta^2 - 2a\beta \lrcorner$ *L streicht Hrsg.*

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

Inspiciatur figura 2da *De ductibus*. In ea demittatur ex K. puncto extremo rectae AK. sinus complementi perpendicularis in radium AE. esto $K\gamma$. ne literas multiplicemus. Manifestum $\dfrac{K\gamma}{BO \text{ sinus}} = \dfrac{AO \text{ [sin. compl.]}}{AE \text{ [rad.]}}$. Ergo $K\gamma = \dfrac{AO \frown BO}{AE}$. Datur autem quadratura omnium $K\gamma$, quia $K\gamma \frown$ rad. $=$ momentum sinus. Ergo cylinder omnium $K\gamma$ aequalis momento sinuum et ideo quadrabilis.

Aliter[:] $\dfrac{K\gamma}{HE \text{ tang.}} = \dfrac{AK \text{ sin. compl.}}{AH \text{ sec.}} = \dfrac{AK\ \square}{AE \text{ rad.}\ \square}$.

Ergo $K\gamma = \dfrac{AK \text{ sin. compl.}\ \square \frown \text{tang.}}{AE \text{ rad.}\ \square}$. vel $K\gamma \frown AE$ rad. $= \dfrac{\text{sin. compl.}\ \square\ \frown \text{tang.}}{\text{rad.}}$.

Ergo $K\gamma \frown AE\ \square$ (quadrab.) $=$ sin. compl. $\square \frown$ tang. Ergo $\dfrac{K\gamma \frown AE\ \square}{\text{sin. compl.}} =$ mom. tang. seu ductus hyperbolae in $K\gamma$ $=$ momento tangentium, is ergo ductus ex quadratura circuli pendet.

2 [*Fig. 2*] *erg. Hrsg. nach Text u. N. 17.* 5 $\dfrac{\text{K}\gamma}{\text{BO sinus}} =$ *(1)* $\dfrac{\text{AE rad.}}{\text{AO sin. compl.}}$ *(2)* $\dfrac{\text{AO}}{\text{AE}}$ *L ändert Hrsg.* 5 f. quadratura | summae *streicht Hrsg.* | omnium *L*

3 *De ductibus*: vgl. N. 26 S. 433; die Figur befindet sich aber nicht dort, sondern N. 21 S. 388.

Substituamus pro $K\gamma$ eius aequationem, erit:

$$\frac{\dfrac{\text{sin.} \frown \cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}} \frown \text{rad.}\ \cancel{\square}}{\cancel{\text{sin. compl.}}} = \text{mom. tang.}$$

seu $$\frac{\dfrac{\text{sin.} \frown \cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}} \frown \text{rad.}\ \cancel{\square}}{\text{sin. compl.}} = \text{tang.} \frown \cancel{\text{sin. compl.}}$$ fiet $$\frac{\text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{sin. compl.}} = \text{tang.}$$

$\dfrac{\text{rad.} \frown \text{rad.}}{\text{sin. compl.}} - \dfrac{\text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$ horum id est differentiarum inter sec. et tang. summa quadrabilis, seu horum $\dfrac{\text{rad.}\ \square - \text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$.

[*Teil 3*]

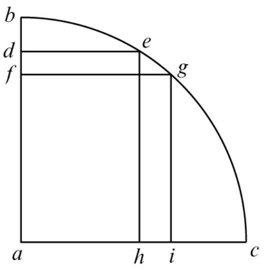
Operae pretium est examinare, an sinuum summa seu quadratura circuli exhiberi possit per infinitam seriem numerorum rationalium nulla surdorum mixtura ad exemplum hyperbolae.

7–567,6 *Dazu oben am Rande:* Imo id non procedit.

1 f. erit: *(1)* $\dfrac{\dfrac{\text{AE rad.} \frown \text{BO sin.}}{\text{sin. compl.}} \frown \text{rad.}\ \square}{\text{sin. compl.}} = \text{mom. tang. seu } \dfrac{\text{radii cubus in sinum}}{\text{sin. compl.}\ \square} = \dfrac{\text{mom. tang.}}{1}$. seu radii cubus in tangentem, aequatur sinus complementi cubo in sinum. *(2)* $\dfrac{\dfrac{\text{sin.} \frown \cancel{\text{sin. compl.}}}{\cancel{\text{rad.}}} \frown \text{rad.}\ \cancel{\square}}{\cancel{\text{sin. compl.}}}$ *L* 5 $\dfrac{\text{rad.}\ \square - \text{sin.} \frown \text{rad.}}{\text{sin. compl.}}$. | Ergo si quadrari possent $\dfrac{\text{sin.} \frown \text{rad.}}{\cancel{\text{sin. compl.}}} \frown \cancel{\text{sin. compl.}}$ *gestr.* | *L*

---

5 quadrabilis: Dies ist nicht zutreffend.



[*Fig. 3*]

Esto quadrans circuli *abc*. sinusque duo *de*. *fg*. et sinus complementi *eh*. *gi*. ita tamen ut distantiae *df* vel *hi* intelligantur linea quavis assignabili minores. Quaeramus momenta portionum abscissarum *bde*, et *bfg*, ex axe librationis *ac*. quadrabilia. Differentia momentorum per sinum complementi divisa, dabit differentiam spatiorum, ipsum scilicet spatium *dfge* quod sinui coincidit, [*Text bricht ab*]

4 quadrabilia *erg. L* 5 per sinum ... spatiorum, *erg. L*

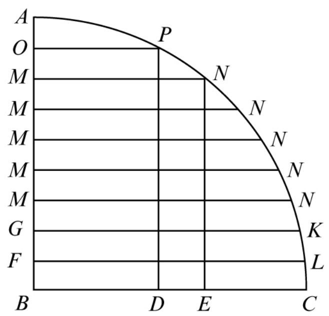
34. ANNOTATIONES AD HONORATUM FABRI ET WALLISIUM. DE HYPERBOLA

[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 263–264. 1 Bog. 2°. 4 S. Cc 2, Nr. 612

Datierungsgründe: Wie die gegenseitigen Bezüge zeigen, steht das Stück in engem Zusammenhang mit N. 26 und N. 27, ist also in deren zeitlicher Nähe anzusetzen.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1, Blindzeichnung*]

Esto quadrans circuli ABC cuius altitudo AB divisa in partes infinitas aequales BF. FG. etc. Ex punctis divisionis ductae intelligantur applicatae basi BC parallelae GK. FL. etc. quibus comprehendentur quadrilinea infinita $GKLF$. $FLCB$. etc.

Momentum cuiuslibet applicatae ut FL, vel quod aequipollet, quadrilinei latitudinis infinite parvae ut $FLBC$ ex basi BC, est factum ex ductu distantiae a b⟨asi hoc⟩ loco FB in dictam FL.

Ideo	momentum	FL	est	$1\,FL$.	
	momentum	GK	est	$2\,GK$.	
	momentum	MN	est	$3\,MN$.	etc.
	momentum	OP	est	$8\,OP$.	posito FB esse $=1$

Momentum totius quadrantis ex basi BC est $\frac{2}{3}a^3$. posita $a = AB$.

Momentum quadrilinei truncati $BOPNC$ ex basi BC est compositum ex momento rectanguli BP, et momento semisegmenti $PNCD$.

Momentum rectanguli est: $\frac{OB^2}{2} \frown \begin{matrix} OP \\ BD. \end{matrix}$

Momentum segmenti $PNCD$ est $a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3}$.

Iam $\dfrac{\frac{2}{3}a^3 - \frac{OB^2}{2} \frown OP, -a\,CD^2 + \frac{CD^3}{3}}{OB} = OP.$

Ita momentum quadrilinei truncati, est $\frac{MB^2}{2} \frown MN - a\,CE^2 + \frac{CE^3}{3}$.

Et: $\dfrac{\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3}, -\frac{MB^2 \frown MN}{2} - \frac{CE^3}{3} + a\,CE^2}{MB} = MN.$

Ecce novam exprimendarum circuli applicatarum seu Cartesiano more ipsius y (posito $MB = x$) rationem, sed ex indivisibilium sive quadratricis geometriae calculo petitam, et quodammodo hyperboloeiforme, dum fractionum more quarum continue decrescunt uniformiter nominatores, exprimuntur.

Iam aequationem istam polire conabimur:

$$\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 - \frac{CD^3}{3} - \frac{MB^2 \frown MN}{2} - \frac{CE^3}{3} + a\,CE^2 = MN \frown MB \frown (FB).$$

Quia autem ablatis a se invicem solidis, non nisi planum relinqui est solida illa aequalia esse, hinc sequitur:

$$\frac{OB^2 \frown OP}{2} + a\,CD^2 + a\,CE^2 = \frac{CD^3}{3} + \frac{MB^2 \frown MN}{2} + \frac{CE^3}{3}.$$

$$a\,CD^2 + a\,CE^2 - \frac{CD^3}{3} - \frac{CE^3}{3} = \frac{MB^2 \frown MN - OB^2 \frown OP}{2}.$$

---

8 Hinc apparet nunquam radices in serie sinuum exprimenda eliminari posse.

1–570,5 Zum Rechengang: die Werte für die Momente des Viertelkreises und des Segments müssten noch halbiert werden. Diese Flüchtigkeitsfehler haben keinen Einfluss auf die Ergebnisse, wohl aber der Vorzeichenfehler in Z. 7, der schließlich auf den von Leibniz selbst bemerkten Widerspruch führt.

et quia FB infinite parva, ideo $CD = CE$. et $MB = OB$. et $OP = MN$.

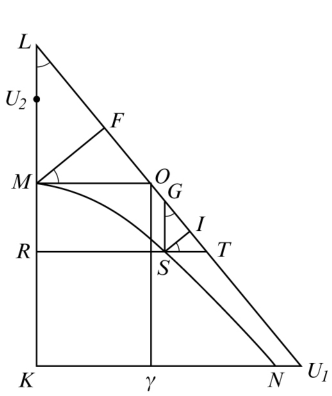
Ideo iam $a\,CD^2 + a\,CD^2 - \dfrac{CD^3}{3} - \dfrac{CD^3}{3} = \dfrac{MB^2 \frown MN - MB^2 \frown MN}{2} = 0$.

Ergo $\cancel{2}a\,CD^2 = \cancel{2}CD^3$ *(!)*. Quod est absurdum, necesse est alicubi lapsum in calculo latere.

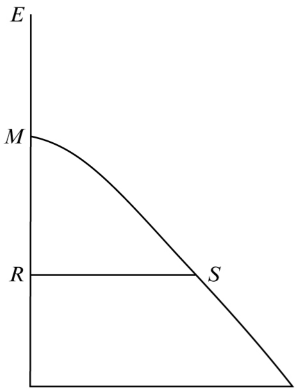
Caeterum satis illud apparet surdarum mentionem vitari non posse.

[*Teil 2*]

De hyperbola P. Fabri *Synoψi* pag. 80. 184. 293. tab. 1 fig. 18.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Nimirum si sit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LKU_1 volutum circa axem LK. ac deinde secetur conus LKU_1 in O. ita ut sectio sit hyperbola quae traducatur in triangulum coni generatrix ita ut axis hyperbolae sit MK. basis KN. Volvantur rursus omnia circa axem LK. figura solida

---

7 De hyperbola P. Fabri: *Synopsis geometrica*, 1669. An drei der angezogenen Stellen befinden sich Marginalien, s. dazu N. 1. Zum mathematischen Sachverhalt vgl. E. A. Fellmann, *Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry*; *Physis* I (1959), S. 21 f. 8 [*Fig. 2, 3*]: In Fig. 2 kommt die Bezeichnung U (wegen der Gleichheit der Strecken KU) doppelt vor; sie wird eindeutigkeitshalber mittels U_1 und U_2 unterschieden. Fig. 3 stellt in Analogie zu Fig. 2 den allgemeinen Fall dar. Die sich daran anschließende Betrachtung (ab S. 572 Z. 2) ist verfehlt.

annularis genita a spatio MOU_1N aequabitur cylindro cuius altitudo MK. basis circulus [radii] MO.
Cuius rei haec ratio est, quod quadratum applicatae hyperbolae ut RS aequatur quadrato $RT-$ quad. MO. Ergo et semiquadratum seu momentum applicatae hyperbolae aequatur momento seu semiquadrato RT demto semiquadrato MO. Iam momentum RT differt a momento RS momento ST. ergo momentum $ST =$ semiquadrato MO.
Hinc iam manifestum est genito hyperbolico circa axem haberi posse hoc modo cylindrum aequalem.

Patet etiam memorabilis quaedam circuli (vel ellipsis) et hyperbolae relatio.

In circulo est $y^2 = a^2 - x^2$.

In hyperbola est $y^2 = x^2 - a^2$.

Videndum an hinc sequatur quadratura circuli ex data hyperbolae, vel contra.
Est autem x quantitas continue crescens in hyp. decrescens in circulo arithmetica ratione, a est invariabilis. Item $y^2 + a^2 = x^2$. si y arithmetice crescere seu abscissa, x applicata iam intelligatur.
Imo x vel y hoc loco non est abscissa, potest tamen intelligi abscissa et aliquid praeterea, ut si recta KN quae est hoc loco x continue decrescens intelligatur translata in KMU_2 abscissa. Erit abscissa in M $U_2M = MO$. abscissa in R erit $U_2R = RT$. et $U_2K = KU_1$.
Notandum autem quod x in hyperbola continue crescit, sed non a minimo verum ab a. contra in circulo a minimo crescens desinit in a. Ergo sic potius ut pro x dicamus $a + x$. et eius $\square$ erit $a^2 + x^2 + 2xa$. Ergo $y^2 = a^2 + x^2 + 2xa - a^2$. sive $y^2 = x^2 + 2xa$. cum contra in circulo sit $y^2 = xa - x^2$. Hinc si applicata circuli in applicatam hyperbolae ducatur, fiet $\sqrt{2x^2a^2 - x^4}$.

---

23 *Nebenbetrachtungen:*

$$\frac{2xa + x^2}{xa - x^2} \qquad \frac{2 \frown 6, +4}{6 - 4} \qquad \frac{16}{2} \qquad \frac{2a + x}{a - x} \qquad \frac{\sqrt{2xa + x^2}}{\sqrt{2xa - x^2}} \qquad \begin{array}{r} 2xa + x^2 \\ xa - x^2 \\ \hline 2x^2a^2 - x^4 \end{array}$$

2 diametri L *ändert Hrsg.* 12 Videndum … contra. *erg.* L

---

18 Erit: dies gilt für die von Leibniz vornehmlich betrachtete gleichseitige Hyperbel, wobei L und U_2 koinzidieren. 21 f. contra in circulo: anstelle von $xa - x^2$ müsste es $2ax - x^2$ heißen. — Der Fehler wirkt sich auf die nächste Formel aus.

NB. haec aequatio: $a^2 - y^2 = kx$. est parabolae.

Si MS sit curva hyperbolae, cuius applicata RS. abscissa MR. latus transversum EM, erunt $EM^2 + EM \frown MR = RS^2$. ergo $y^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2} + \dfrac{ax}{\beta}$. Idem $y^2 = x^2 - a^2$. Ergo $x^2 - a^2 = \dfrac{a^2}{\beta^2} + \dfrac{ax}{\beta}$. Est autem β ratio EM ad ML figurae superioris.

Investigemus et MF. vel SI. perpendiculares ad ipsam LU. quam sane LU utcunque productam nunquam hyperbolam attingere necesse est.

Manifestum autem est $\dfrac{FM}{LM} = \dfrac{OM}{LO}$. Ergo $FM = \dfrac{LM \frown MO}{LO}$.

Sed rectius investigabimus SI. ubi ac primum SG. ST. GI.

Nimirum $SG = \dfrac{ST \frown LR.}{RT}$ et $ST = RT - RS$. et $GT = \dfrac{ST \frown RT}{LT}$.

Iam $SI = \dfrac{GS \frown ST}{GT}$. $IT = \dfrac{ST \frown ST}{GT}$.

Hinc facile habetur FI. si ab LT auferatur $LF + IT$.

Iam ut SI ad ultimam aequationem reducamus: cum sit $= \dfrac{GS \frown ST}{GT}$ ponatur pro GS et GT eorum definitio, fiet:

$$\frac{\dfrac{ST \frown LR}{RT}, \frown \cancel{ST}}{\dfrac{\langle \cancel{ST} \rangle \frown RT}{\langle LT \rangle}} = SI = \frac{ST \frown LR \frown LT}{RT^2}.$$

et pro $ST = RT - RS$ vel $RT - \sqrt{MR^2 + 2MR \frown MO}$. fiet

$$\frac{LR \frown LT}{RT} - \frac{\sqrt{MR^2 \frown LR^2 \frown LT^2 + 2MO \frown MR \frown LR^2 \frown LT^2}}{RT^2}.$$

Simplicior erunt omnia, si $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ LKU_1 supponatur isosceles.

Erit $GS = ST$. et $MO = LM$. et quia $ST = RT - RS$. seu

$$RT - \sqrt{MR^2 + 2\overset{ML}{MO} \frown MR}. \quad \text{erit etiam} = GS.$$

et SI erit = radix dimidii $\square^{\text{ti}}$ ST seu

$$SI = \sqrt{\frac{RT - \sqrt{\llcorner MR^2 + 2ML \frown MR \lrcorner}\square}{2}} = IT.$$

---

9 GT: anstelle von $\dfrac{ST \frown RT}{LT}$ müsste es umgekehrt $\dfrac{ST \frown LT}{RT}$ heißen. — Das Versehen beeinträchtigt die gesamte folgende Rechnung.

Cumque sit $LF = MF = \sqrt{\dfrac{MO^2}{2}}$. ideo

$$FI \text{ erit } LT - \sqrt{\frac{MO^2}{2}} - \sqrt{\frac{RT - \sqrt{\llcorner MR^2 + 2ML \frown MR \lrcorner\lrcorner \square}}{2}}.$$

Est autem $MR = LR - MO$. et $LR = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. Ergo $MR = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} - MO$. Et $RT = LR$. ergo $RT = \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. $ML \frown MO = MO^2$. $MR^2 = \dfrac{LT^2}{2} + MO^2 - 2MO \frown \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}}$. Ergo $FI =$

$$LT - \sqrt{\frac{MO^2}{2}} - \frac{\sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} - \sqrt{\llcorner \dfrac{LT^2}{2} + MO^2 - 2MO \frown \llcorner \sqrt{\dfrac{LT^2}{2}} \lrcorner\lrcorner + 2MO \frown LR - 2MO^2}}{\sqrt{_q}\, 2}.$$

vel $\sqrt{_q}\, 2 \frown FI = \sqrt{_q}\, 2 \frown LT - MO - \dfrac{LT}{\sqrt{2}} +$

$$\llcorner \frac{LT^2}{2} + \cancel{MO^2} - \cancel{2}MO \frown \frac{LT}{\sqrt{2}} \cancel{+2MO \frown LR} - \cancel{2}MO^2 \lrcorner.$$
$$\cancel{+2MO \frown} \frac{LT}{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt{2} \frown FI}{LT} = \sqrt{2}, \frown \cancel{LT} - \frac{MO}{LT} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \sqrt{\llcorner \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}.$$

$$\frac{\sqrt{2} \frown FI}{LT} - \sqrt{2} + \frac{MO}{LT} + \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{\llcorner \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}$$

$$\overline{}\;\square = \frac{1}{2} + \frac{MO}{\sqrt{2} \frown LT}.$$

3 *(1)* Iam Cartesiano more *(a)* LF vocemus a + x + y. *(b)* FT vocemus x. et SI vocemus y. LF vocemus a. erit LF = a + x + y. Ergo posita *(aa)* x ut nota *(bb)* iam x. quaeramus y. Cum detur x *(aaa)* . detur et *(bbb)* = FI. deturque LF. dabitur et LI = a + x. dabitur et MF = a. ergo et LM = $\sqrt{2a^2}$. *(2)* Est *L*

---

9 Anstelle von $\sqrt{\llcorner \dfrac{1}{2} + \dfrac{MO}{\sqrt{2} \frown LT} \lrcorner}$ müsste es $\sqrt{\llcorner \dfrac{1}{2} - \dfrac{MO}{LT^2} \lrcorner}$ heißen. — Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.

[*Teil 3*]

In Wallisii *De motu* observo quadraturas paraboloeidum et hyperboloeidum, sed simplicium tantum. Nam compositas, ubi v. g. quadrata abscissarum ducta in latus rectum aequantur cubis applicatarum, non attingit.

Miror Wallisium in *De motu*, non attingere quae figurae quibus motuum compositionibus efficiantur.

Explicat experimentum magni ponderis inflatione vesicae per spiritum humanum nonnihil elevari.

Disserit de descriptione hyperbolae Wrenniana, sive de cylindro hyperbolico, in quo infinitae duci possunt lineae rectae, idque demonstrat ex eo theoremate, quod sumtis quadratis arithmetice proportionalium, ut: $a^2 \quad 4a^2 \quad 9a^2$ etc. additoque uno quodam quadrato constanti, radices sint applicatae hyperbolicae: $\sqrt{a^2+b^2} \quad \sqrt{4a^2+b^2} \quad \sqrt{9a^2+b^2}$.

Disserit et multis de sua cycloeide. Ostendit Pascalium, Robervallium aliosque minime scivisse etiam segmenta omnia cycloeidalia certo modo abscissa, esse tripla segmentorum semicirculi. Etiam a se demonstratum, quod curvae cycloeidum contractarum et protractarum sint ellipses.

Item quod a quadratura hyperbolae dependeat recta aequalis curvae parabolae. Item superficiei curvae conoeidis parabolici tam parabolae circa axem quam circa tangentem volutae circulum a se exhibitum aequalem.
(Hinc NB. datur recta quaedam, in quam cadit centrum gravitatis curvae parabolae, adeoque cuidam superficiei annuli cuiusdam parabolici exhiberi potest hyperbola aequalis.)

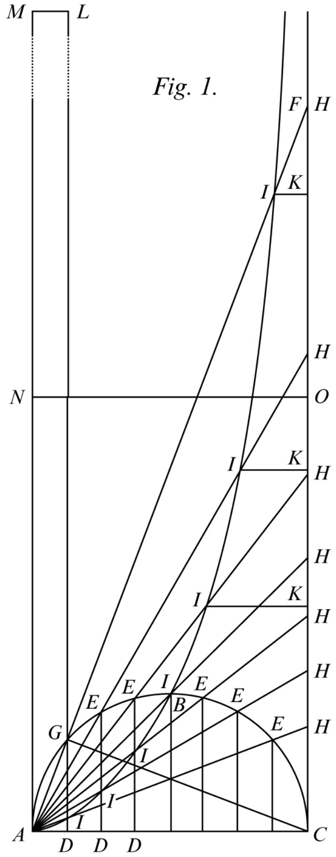
Idem Wallisius exponit a se observatum non tantum spiralem simplicem Archimedeam esse parabolam convolutam, ut vocat, sed et alias esse paraboloeides involutas. Et

---

2 observo: Diese Aussage trifft objektiv nicht zu; s. J. WALLIS, *Mechanica*, 1670–71, S. 148–189 (*WO* I S. 667–693). — Die höheren Parabeln und Hyperbeln hat Wallis schon früher allgemein behandelt; vgl. insbesondere *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. LIX, LXIV, CII, S. 47 f., 52 f., 76 f. (*WO* I S. 392, 395, 408). Erst später hat Leibniz Wallis' Ergebnisse zur Kenntnis genommen; s. dazu *De quadratura arithmetica circuli*, hrsg. E. KNOBLOCH, 1993, S. 140. 7 Explicat: *a. a. O.* S. 759–767 (*WO* I S. 1056 bis 1060). 9 Disserit: *a. a. O.* S. 556–567 (*WO* I S. 929–938). 13–16 *A. a. O.* S. 367–465 (*WO* I S. 800–862). — Auf S. 459 (859) wird mit der Bemerkung: „Ille ne uspiam advertit." auf Pascal angespielt. Der Name Roberval fällt nicht, wohl aber spricht Wallis allgemein: „Neque illud prius adverterunt, credo, ex Gallis ulli." — Die Stelle bezüglich der verkürzten bzw. verlängerten Zykloiden steht auf der Seite davor. 17–19 *A. a. O.* S. 555 und S. 748–750 (*WO* I S. 923–925). 22–575,5 *A. a. O.* S. 488–531 (*WO* I S. 878–904). — Der Hinweis auf Stefano degli Angeli steht auf S. 530 f. (903 f.) und bezieht sich auf dessen Schrift: *De infinitorum spiralium spatiorum mensura, opusculum geometricum*, 1660.

in genere non areas tantum sed et curvas respondentes esse aequales. Idque a se dudum ostensum. Et cum lapsus quidam contigisset in calculo Stephanum de Angelis eo arrepto refutasse doctrinam suam, calculo considerato, demonstratione dissimulata, et quae a se una pagina dicta erant, iusto volumine explicuisse. Idem Wallisius observat posse omnes alias figuras intelligi hoc modo convolvi in quasdam spiralium species.

Agit idem Wallisius de cissoeide, cuius integrum spatium infinitum aequari ostenderit triplo semicirculi. Ab eo tempore se ab Hugenio monitum posse hoc modo etiam partes quaslibet cissoeidis mensurari.



[*Fig. 4*]

6 Agit: *a. a. O.* S. 531–533 und 754–759 (*WO* I S. 904–910).

Semicirculus ABC. dividatur diameter in partes aequales et ex punctis divisionis D ducantur applicatae, per puncta applicatarum extrema $E.E.B.E$. etc. ducantur chordae AE. producanturque dum occurrant in punctis H tangenti semicirculi CF. in infinitum si opus sit, id est si totam cissoeidem habere velis productae. Sin partem tantum, v. g. chordarum in $GEEBEC$ cadentium produces usque in F. Denique rectis AE sumantur rectae HI respondentes, aequales, ita ut FI sit $= AG$. et ita in caeteris.

Curva per omnia puncta I transiens erit cissoeis, et spatium $AIIFC =$ ni fallor segmento $GBC +$ rectang. AGC triplicatis.

Nota, IK applicata cissoeidis semper aequalis AD. quia $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ IFK simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ AGD, et $AG = IF$. ergo et $IK = AD$. et $FK = GD$.

Sed distantiae inter ipsas K. seu portiones KK. erunt infinite parvae, modo portiones DD. sint infinite parvae. Harum ergo portionum progressio investigandum est.

Sed quia IK sunt arithmeticae progressionis, ideo investigandae sunt omnes CK. sunt enim ordinatim applicatae.

Dantur autem omnes CH. si omnes DE multiplicentur per CA. productum dividatur per AD. quia $\dfrac{CH}{DE} = \dfrac{CA}{AD}$. Ergo $CH = \dfrac{CA \frown DE}{\langle AD \rangle}$.

Ab hac summa auferatur summa omnium $FK.HK.HK$. etc. id est portio circularis. Residuum erit area cissoeidis.

Atqui summa omnium CH quadrabilis est. Est enim summa tangentium semiarcus complementi duplicatorum, seu summa tangentium falsorum ad basin, cuius quadraturam dudum invenimus.

16 *Unter* $CH = \dfrac{CA \frown DE}{\langle AD \rangle}$. : $\quad y = \dfrac{2ax}{\langle - \rangle}$.

19–21 Male, non tangentium semicomplementi, sed semiarcus.

19 semiarcus *erg. L* 20 ad basin *erg. L*

7 ni fallor: Leibniz ist sich selbst nicht sicher, und in der Tat gilt: Zissoidenfläche = 3 · Segment GBC + Dreieck AGC. 21 dudum: vgl. insbesondere N. 27, prop. 33, S. 474 Z. 14–17. — Das Stück nennt Leibniz später selbst, s. S. 577 Z. 20.

Porro summa omnium CH (quarum maxima CF) intelligatur esse rectangulum $ADML$. vel si de toto spatio cissoeidali asymptoto sermo sit, ea intelligatur esse rectangulum $ACON$. Ab hoc rectangulo $ACON$. summa scilicet omnium CH. quadrabili auferatur summa omnium FK. HK. HK. etc. id est semicirculus. Residuum quadrilineum concavum $ANOCBA$ area cissoeidis a nobis inventa aequatur areae cissoeidis ab aliis inventae, nempe triplo semicirculo. Unde sequeretur reddito semicirculo, rectangulum $ACON$ aequari quadruplo semicirculo, seu circulo duplicato. Quod prope est ut dicam absurdum.

An forte dicendum summam omnium CH non haberi, non enim esse tangentes semiarcus complementi duplicatos ad altitudinem, sed potius tangentes semiarcuum duplicatos ad altitudinem. At horum quadratura non habetur, nisi ex supposita circuli quadratura. Quod adeo verum est, ut nec momentum eorum habeatur nisi ex supposita circuli quadratura. Ideo momentum quoque cissoeidis ex asymptota opposita parallela, seu vertice.

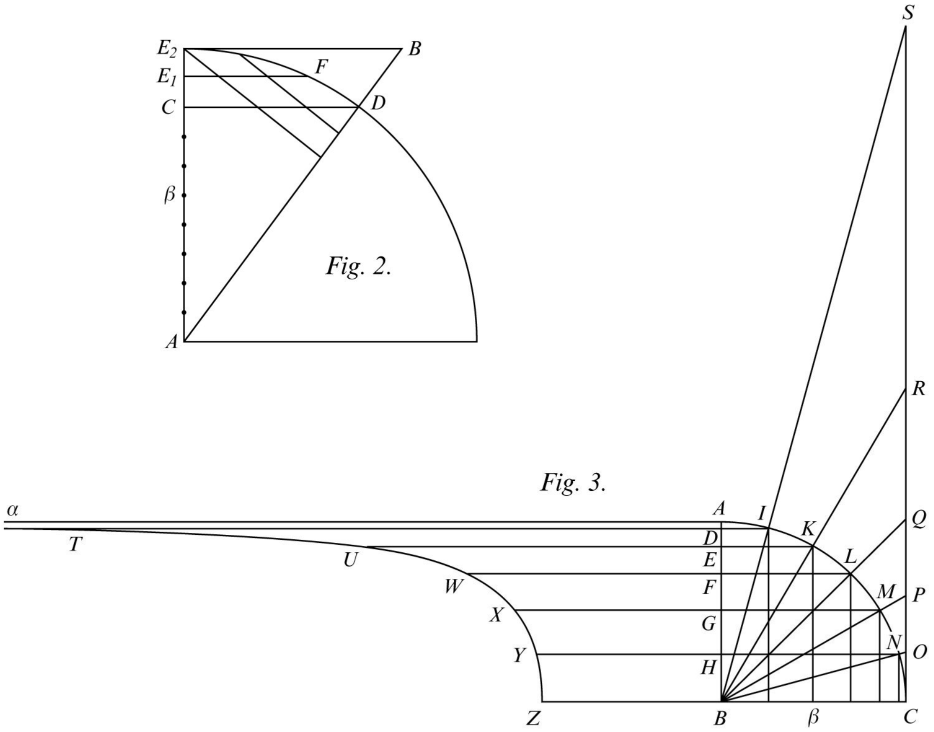
Videamus iam qualem quadraturam conchoeidi falsae, vel potius cissoeidi, ut nunc loquendum est, nam ut conchoeis est figura tangentium ademta scilicet portione circuli generatoris, ita eadem ademta cissoeis est figura tangentium falsorum NB. diminutorum sinubus. Unde illud quoque apparet semicissoeidem hoc modo sumtam seu semisinu auctam ad basin, esse differentiam hyperbolae et conchoeidis.

Iam *Inassignabilia* mea docent ipsum $ACON$ aequari quadruplo semicirculo ABC. et rectangulum AML aequari quadruplo segmento AG. Ergo spatium cissoeidis totum aequatur triplo semicirculo, et spatium cissoeidis generatae ab arcu AG aequatur quadruplo segmento AG. demto AGD. portione circulari, restabitque triplum segmentum AG demto triangulo AED.

10 ad altitudinem *erg. L* 13 f. Ideo ... vertice. *erg. L* 17 f. NB. ... sinubus *erg. L* 18 f. seu ... auctam *erg. L*

20 docent: s. N. 27, prop. 13, coroll. 2, S. 469 Z. 8 f. — Die Übertragung auf die Zissoide trifft nur für die Gesamtfläche zu.

[Teil 4]



[Fig. 5] *[Fig. 6, tlw. Blindzeichnung]*

Ostendi alibi secantes ad basin aequari sectori duplicato seu radio ad arcum.

At vero applicari ad basin est duci in differentias ordinatarum, id est secans AB ducenda in $CD - E_1F$.

Iam $AB \frown CD = AE_2 \frown E_2B$. quare si et AE_2 in E_1F commode haberi posset, habetur quadratura. Nam posita quadratura conchoeidis, si dua ista solida fierent similia, differentia eorum, id est basis maioris circulo aequaretur.

---

2 *[Fig. 5, 6]*: Die beiden Figuren sind von Leibniz ineinander gezeichnet worden. Diese Anordnung wird vom Hrsg. nachvollzogen. In Fig. 5 kommt die Benennung E nur einmal (in Doppelfunktion) vor; sie wird vom Hrsg. eindeutigkeitshalber in E_1 und E_2 aufgespalten. 3 Ostendi: s. N. 27, prop. 1, S. 465 Z. 20–22.

Excogitandi sunt aliqui casus in quibus ductus in istas differentias haberi possunt. Utilis enim ista observatio est.

Momentum secantium complementi seu secantium ad basin ex sinu haberi potest, et quadrabile est.

Restant quadrata secantium complementi in sinus ductorum, quae sunt $\dfrac{a^6 - 16a^4\beta^2}{9\beta^2}$.

Iam $\dfrac{a^6}{9\beta^2}$ haberi possunt $= \dfrac{a^3}{9\beta^2} \frown a^3$. Est autem $\dfrac{a^3}{9\beta^2}$ species hyperboloeidis quadrabilis.

Denique $\dfrac{16a^4\beta^2}{9\beta^2} = \dfrac{16a^4}{9}$.

Omnia $\sqrt{a^2 - 16\beta^2}$ et similia ducta in 3β, non sunt quadrabilia, sed ducta in 4β. Horum quadrata haberi possunt, restant momenta at puto momenta secantium complementi haberi posse.

$$\frac{a^2}{3\beta} \frown \sqrt{a^2 - 16a^2} = \sqrt{\frac{a^6 - 16a^4\beta^2}{9\beta^2}} = \frac{\sqrt{a^6 - 16a^4\beta^2}}{3\beta}.$$

Ducatur quadratum radii in basis portionem, [*Text bricht ab*]

Figura secantium complementi est $\dfrac{a^2}{y}$. Est autem $y =$ sinus circuli $= \sqrt{2ax - x^2}$. posito x abscissa. Ergo si iam in figura secantium complementi applicata nominetur y,

5 in sinus ductorum *erg. L* 8–12 Omnia ... radii in *(1)* sinum, *(2)* applicatam, dividat *(3)* basis portionem, *erg. L*

3 Momentum: s. N. 26, prop. 29, S. 448 Z. 20 – S. 449 Z. 3.

fiet $y = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$. et $y^2 = \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$.

Ergo $2y^2ax - y^2x^2 - a^4 = 0$. sive $2y^2ax - y^2x^2 = a^4$. Ergo $2y^2ax = a^4$ [+] y^2x^2. Habetur ergo summa cuborum ipsarum applicatarum huius curvae, quia omnium y^2x summa per summam cuborum indagari potest.

Fig. 3.

Esto quadrans ABC in cuius arcu designentur puncta quotlibet $I. K. L. M. N.$ per quae ex centro B. ducantur rectae, productae donec tangenti quadrantis in C. in infinitum productae prout opus est, occurrant in punctis $S. R. Q. P. O.$ fientque secantes $BS. BR. BQ. BP. BO$. Ex punctis arcus, $I. K. L. M. N.$ demittantur perpendiculares in radium AB. tangenti infinitae CS parallelum, quae radio occurrant in punctis $D. E. F. G. H.$ et punctis istis, applicentur secantes, ita ut situm accipiant parallelum inter se, et ad radium AB perpendicularem. Transferetur BS in DT. et BR in EU. et BQ in FW. et BP in GX. et BO in HY. et BC in BZ.

Iam quod punctis arcus $I. K. L. M. N. C.$ fecimus, idem fieri intelligatur punctis quibuslibet assignabilibus, ac linea curva per puncta $T. U. W. X. Y. Z.$ aliaque intermedia

---

1 *Zusatz:*
$ax - x^2 \quad x \frown \llcorner a - x \lrcorner \quad 2ax - x^2, \frown y^2 = a^4. \quad 2ax - x^2 - a^2, \frown y^2 = a^4 - a^2y^2.$

$\mp x \mathrel{\overline{\mp}} a = \dfrac{\sqrt{a^4 - a^2y^2}}{y}$. vel $\mp x \mathrel{\overline{\mp}} a = \dfrac{a\sqrt{a^2 - y^2}}{y}$. vel $\mp x \mathrel{\overline{\mp}} a = a\sqrt{\dfrac{a^2}{y^2} - 1}$.

vel si $a = 1$. fiet: $\mp x \mathrel{\overline{\mp}} 1 = \sqrt{\dfrac{1}{y^2} - 1}$. Ecce figurae angulorum naturam, unde et fit si

⟨mavi⟩s: $\mp x \mathrel{\overline{\mp}} a = \sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} - a^2}$ et $\mp x = \sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} - a^2} \mathrel{\overline{\mp}} a$.

2 − *L ändert Hrsg.*

---

1 $y = \dfrac{a}{\sqrt{2ax - x^2}}$: Die Auflösung nach x erfolgt in der Zusatzrechnung, dort müssten aber die Vorzeichen unter der Wurzel jeweils vertauscht werden.

numero infinita transire intelligatur. Manifestum est maximam omnium secantium, tunc scilicet cum punctum arcus est ipsum initium eius A, esse infinitam. Cum enim sit parallela ipsi CS. non nisi infinito abhinc intervallo eam attinget. Quare recta $A\alpha$ est asymptota ad quam curva ZXT semper propius accedit, sed eam tamen nunquam attingit.

Figuram autem ipsam $BZXT\alpha A$ voco hyperbolam falsam. Nam si demissae fuissent perpendiculares ex punctis arcus non in radium AB tangenti parallelum, sed in radium BC tangenti perpendicularem, ut $K\beta$ loco KE. et secans BKR non ipsi E in EU. sed ipsi β fuisset perpendiculariter ad BC applicata, idemque in caeteris punctis omnibus contigisset, figura hoc modo per puncta descripta, futura fuisset hyperbole, nunc autem est h y p e r b o l e f a l s a , quanquam non sit ex iis quas vulgo h y p e r b o l o e i d e s vocant.

Sed eandem hyperbolam falsam alio praeterea nomine appello f i g u r a m a n g u l o r u m quemadmodum hyperbolen veram appellare posses f i g u r a m r a t i o n u m , aut etiam f i g u r a m l o g a r i t h m o r u m (quanquam alia quaedam sit curva logarithmica, ut vocant, sed quam hactenus nemo geometrice describere potuit, et qui descripsisset, dedisset nobis hyperboles quadraturam).

Nimirum ostendit P. Sarrasa ex Gregorii a S. Vincentio, praeclaro admodum invento, quodque vel solum impensos ab eo in circuli hyperbolesque quadraturam labores repensaret; ostendit inquam Sarrasa, si figura $BZXT\alpha A$ spatium hyperbolae asymptotum sit, et ductis basi ZB parallelis $YH.\,XG.\,WF.$ quadrilinea $GXWF.\,HYXG.\,BZYH.$ inter se comparata esse, ut si rectae abscissae ab altitudine, $FG.\,GH.\,HB.$ sint geometrice proportionales, spatia cuilibet insistentia futura sint arithmetice proportionalia, ac proinde si rectae sint ut termini quicunque, spatia futura sunt ut logarithmi.

Ego vero de hyperbola falsa theorema ostendam non minus praeclarum, neque ulli veterum observationi cessurum. Nimirum si figura praesens non hyperbola vera sed falsa seu nostra intelligatur rectaeque $YH.\,XG.$ aliaeque basi parallelae ducantur, tunc futurum est, ut si rectae sustinentes inde ab asymptota sumtae, $AG.\,AH.\ AB.$ sint ut sinus versi, spatia $AGXT\alpha A.\ AHYT\alpha A.\ ABZT\alpha A.$ vicissim sint in ratione arcuum

10 f. , quanquam ... vocant *erg.* L 16 f. quadraturam). *(1)* Cur autem hyperbolen nostram falsam figuram *(2)* Nimirum L 17 ostendit *(1)* Gregorius *(2)* P. Sarrasa L

17 P. Sarrasa: A. A. de SARASA, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*, Antwerpen 1649, pars I prop. II u. III, S. 7 f.

seu angulorum $AM.AN.AC.$ Unde si arcus $AI.IK.KL.$ sint aequales spatia quoque $ADT\alpha A.$ $AEUT\alpha A.$ $AFWT\alpha A.$ aequalia erunt. Ac generaliter recta quaecunque parallela basi, ut $XM.$ spatium pariter figurae angulorum et arcum secabit in partes proportionales.

Porro figura angulorum quam dixi, geometrica est, describique potest. Nam aequatio eius essentialis est: $2y^2ax - y^2x^2 - a^4 = 0$. Et deprehendo per analysin, si ponatur z aequalis sinui recto $GM.$ et a aequalis radio $AB.$ tunc applicatam figurae angulorum respondentem GX fore $\dfrac{a^2}{z}$. Ac proinde summa secantium complementi opus esse ad angulos ex sinubus datis, vel contra supputandos. Quod ingens compendium dabit calculo canonis mathematici utcunque libuerit continuando, infinitisque aliis problematis appropinquatione facillima efficiendis.

Sed maius tamen est aliud a me inventum, quo omnia quae ad dimensionem circuli et partium eius, ad sectionem angulorum universalem, ad inventionem quotcunque mediarum proportionalium pertinent, nulla radicum mentione, sola numerorum rationalium serie adhibita facile effici possint. Quo nescio an ad geometriam mechanicam inveniri possit praestantius epicherema. Nam qui hactenus approximationes nobis per calculum dedere in infinitum continuabiles, aut fassi sunt constructionem fore difficilem linearum per calculum inventarum, aut successum in toto circulo aliquando casu quodam felicem ad partes non produxere. Cum ille casus, quo constructionem facilem reperere, non methodi ipsorum, sed fortunae fuerit, quoniam cum ubi longius prodiere, vel citerius substitere, omnia ad primam illam calculi difficultatem redierint.

Porro facile reducitur illa hyperbole falsa seu figura angulorum ad circulum, nam sector differt a portione circulari ductu sinus in sinum complementi, seu momento sinus ex basi. Ergo differentia inter summam sectorum, et summam portionum circularium est quadrabilis. Intelligi autem potest summa portionum circularium, vel incipiendo a

11 appropinquatione facillima *erg. L* 14 nulla *(1)* radicum extractione *(2)* radicum mentione *L* 15 facile *erg. L* 22 f. circulum, *(1)* nam summa omnium SI. RK. QL. aequatur duplici segmento AM. *(a)* ergo duplex *(b)* et sector | duplex *erg.* | diffe *(2)* nam sector differt *(a)* a duplici segmento rectangulo radii in sinum. Videor ergo errasse in calculo *(b)* a portione *L*

23 sector differt: In der Aussage ist der Faktor 1/2 zu ergänzen. Leibniz rechnet mit dem doppelten Wert konsequent weiter.

minimo, quod tantum semel, vel a maximo quod tantum semel. Alterum horum quadrari potest, et coincidit cum momento ex basi, alterum cum momento ex vertice. Ergo cum summa portionum, maximam non nisi semel repetendo sit momentum sinuum ex basi, et summa sectorum eodem modo sumta, differat a summa portionum momento, sequitur summam sectorum hoc modo sumtam aequari duplo momento sinuum. At summa sectorum est summa arcuum in radium ducta. Summa ergo arcuum est quadrabilis, ut iam ab aliis inventum.

Sed cum summa sectorum non usque ad maximum quaeritur, sed v. g. inter A et N posito, AH divisum in partes infinitas aequales, dabitur adhuc iterum momentum, et rursus arcuum (sinuumve) summa. Puto tamen hanc summam arcuum cum cycloeidali illa non coincidere, ubi ni fallor ab opposito incipitur. Unde et summa sectorum opposita adhibenda est.

Considerari meretur linea illa curva in summa sectorum constituenda, quae de plano in planum instar cochleae transit sive ascendit. Sed haec obiter.

Pergo illud tantum monere, si figurae angulorum quadratrix reperiatur, et quadratrix circuli quoque, sane figurae angulorum quadratricem fore altioris gradus (probabiliter), quam figuram circuli quadratricem, et tamen unam ex altera facile fieri posse, ista adiectione sinus in sinum complementi ducti.

Momentum figurae angulorum aequatur summae sectorum.

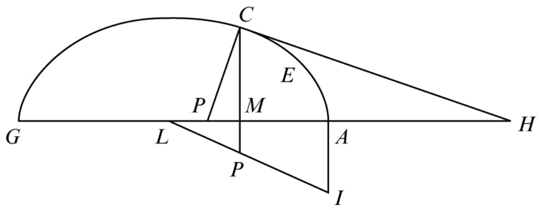
7 ab aliis: B. Pascal, *Traité des sinus et des arcs de cercle*, 1658, prop. 1 S. 10 (*PO* IX S. 78).

35. DE TANGENTIUM METHODO
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept (zwei Zusätze aus je späterer Zeit): LH 35 II 1 Bl. 265–266. 1 Bog. 2°. 3 S. Bl. 266 v° leer. Hauptteil 2 S. und 4 Z. auf Bl. 265 sowie Bl. 266 r° oben, Zusätze auf Bl. 266 r°.
Cc 2, Nr. 613

Datierungsgründe: Die Verwendung des Begriffs functio sowie das Wasserzeichen des Papiers sprechen für eine Abfassungszeit kurz vor N. 40 vom August 1673.

Cognatae sunt figurae, quae locum quendam functionum habent communem, uti circulus ellipsis hyperbola, in quibus locus reductarum est triangulum. Sed diverso modo adhiberi potest locus functionis, vel ut crescat cum applicatis, quod facit triangulum in hyperbola, vel ut crescentibus applicatis decrescat, quod fit in ellipsi et circulo. Unde intelligi potest, ellipsim et circulum non tantum cognatas, sed et e i u s d e m n a t u r a e (sic enim malim, quam speciei) esse. Porro inter eiusdem naturae figuras variae sunt species, ut in ellipsi, prout scilicet ratio recti ad transversum sumitur.



[*Fig. 1*]

15+585,1 sumitur. | Errorem calculi | sive eius qui manu typisve descripsit *erg.* | in Geometria Cartesii lib. 2. pag. 46. editionis Schotenianae 1659. mihi videor observasse. Nimirum, in eo est, ut inquirat rectam quae ellipsin in dato puncto ad angulos rectos secet. Ac [*s. Fig. 1*] ubi quadratum huius secantis PC posuit esse s^2, et abscissam AM assumsit y. latus rectum r. | latus transversum GA = q. *erg.* | rectam PA = v. ostendit pag. 41. ex natura ellipsis hanc aequationem: $y^2 \; \dfrac{+qry - 2qvy + qvv - qss}{q - r}$. Unde pag. 46. invenit $0 - 2ey$, vel (quia $e = y$) $0 - 2y^2 = qry - 2$. *gestr.* | Ad *L*

16 [*Fig. 1*]: Die Figur kommt in der Hs. insgesamt dreimal vor; einmal mit vielen Korrekturen in Zusammenhang mit der Streichung von Z. 15 – S. 585 Z. 1 sowie zweimal je auf Bl. 265 r° und 265 v°. — Der Buchstabe *P* kommt (wegen der Gleichheit der Strecken *MP*) doppelt vor.

Ad tangentes vel perpendiculares curvarum inveniendas, mihi commodissima Huddenii ratio videtur, nimirum ille invento quadrato perpendicularis PC, atque altero indeterminatarum y. AM abscissae, vel x. CM applicatae, ex aequatione, ut a Cartesio praescriptum est, ope aequationis cuiusdam naturam curvae exprimentis eliminato; ita ut altera indeterminatarum, v. g. abscissa y. tantum restet; hoc inquam facto Huddenius aequationis inde productae terminos multiplicat per exponentem ipsius y in unoquoque termino repertae. Atque ideo termini in quibus nulla est y abiciuntur. Inde orta aequatio perpendicularem dabit.

Hoc ille in conchoeide expertus, apud Schotenium, notis ad secundum *Geometriae* Cartesii librum pag. 255.

Placet in ellipsi experiar, ut appareat an calculus consentiat Cartesiano. Ostendit Cartesius pag. 41, posita perpendiculari $PC = s$. et abscissa $AM = y$. et latere recto $= r$. latereque transverso $GA = q$. recta denique $PA = v$. ostendit inquam ex natura ellipsis:

$$y^2 \quad \frac{+qry - 2qvy + qv^2 - qs^2}{q - r} = 0.$$

Indeque pag. 46, invenit:

$0 - 2ey$, vel (quia $e = y$) $\quad 0 - 2y^2 = \dfrac{qry - 2qvy}{q - r}$.

Unde $0 = \dfrac{qry - 2qvy}{q - r} + 2y^2$. sive $0 = qry - 2qvy + 2y^2q - 2y^2r$. vel $qr + 2yq = 2vq + 2yr$. Igitur $2vq = qr + 2yq - 2yr$. sive denique:

$$v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}.$$

Idem Huddenii methodo sic reperitur:

Aequatio est:

$$y^2 \qquad \frac{qry - 2qvy + qs^2}{q - r} \; = \; 0.$$

10 f. pag. 255. *(1)* Ergo in ellipsi statim facilique *(2)* Placet *L* 13 ex natura ellipsis *erg. L*
17 f. +2yr. *(1)* Igitur $\mathrm{qr} - 2\mathrm{yq} + 2\mathrm{yr} = 2\mathrm{qv}$. Ac denique $\mathrm{v} = \frac{\mathrm{r}}{2} - \mathrm{y} + \frac{\mathrm{yr}}{\mathrm{q}}$. *(2)* Igitur *(a)* $\mathrm{qr} = 2\mathrm{yq} - 2\mathrm{yr} + 2\mathrm{qv}$. Ergo $\mathrm{qr} - 2$ *(b)* 2vq *L*

1 f. Huddenii ratio: Im Folgenden setzt sich Leibniz mit dem Hudde'schen und dem Descartes'schen Verfahren, Tangenten bzw. Normalen zu bestimmen, auseinander. Neben den von Leibniz selbst genannten Stellen aus der *Geometria*-Ausgabe ist insbesondere noch J. HUDDE, *De reductione aequationum*, *DGS* I S. 436, zu nennen.

fiet per multiplicationem Huddenianam:

$$\begin{array}{ccccc} 2. & 1. \quad 1. & & 0. & \quad 0. \\ \hline 2y^2 & \dfrac{+qry-2qvy}{q-r} & + & 0 & = \; 0. \end{array}$$

Hinc ecce aequationem eandem cum aequatione a Cartesio inventa:

$$0-2y^2 \;=\; \frac{+qry-2qvy}{q-r}.$$

Caeterum videndum est quemadmodum datis abscissa AM applicata MC inveniri possint tangentes CH, sive perpendiculares PC, sive reductae PM, sive productae AH. Ita vicissim ope tangentis solius, vel perpendicularis solius, vel reductae solius, vel productae solius, ac praeterea abscissae, inveniri possit applicata. Et ut facilior haec sit inquisitio, retento exemplo praecedente, tentemus regressum.

Ponamus ergo ex cognitis PM. quas reductas voco, quaerendas applicatas CM. Cum autem sit PA vel $v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. erit

$PM = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} - y$. seu $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. sive $PM = \frac{qr-2yr}{2q}$.

Unde manifestum est locum omnium PM fore lineam rectam, et si rectae AM velut altitudini applicatae intelligantur, incidere omnes in figuram rectilineam.

5 est *(1)* an haec tangentium method *(2)* quemadmodum datis *(a)* applicatis *(b)* abscissa *L*
6 sive reductae PM, sive productae AH *erg. L* 7 f. ope *(1)* tangentium | solarum *erg.* |, vel perpendicularium | solarum *erg.* |, vel reductarum, vel productarum, inveniri queant *(a)* soli *(b)* una nimirum ex aliqua *(2)* tangentis solius, vel perpendicularis solius, vel reductae | solius *erg.* |, vel productae | solius *erg.* |, ac *L* 12 $-$y. *(1)* et quia per naturam ellipsis: $\mathrm{xx} = \mathrm{ry} - \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{q}}\mathrm{yy}$. vel $\mathrm{xxq} = \mathrm{ryq} - \mathrm{ryy}$. vel $\frac{\mathrm{xxq}}{\mathrm{r}} = \mathrm{yq} - \mathrm{ryy}$. conemur *(a)* iungere *(b)* inserere hanc aequationem priori: $0 = \mathrm{qry} - 2\mathrm{qvy} + 2\mathrm{y}^2\mathrm{q} - 2\mathrm{y}^2\mathrm{r}$. vel sic potius: $\underbrace{\mathrm{qry} - \mathrm{yyr}}_{\mathrm{xxq}} - 2\mathrm{qvy} + 2\mathrm{y}^2\mathrm{q} - \mathrm{yyr} = 0$. Erit $\mathrm{xxq} + 2\mathrm{y}^2\mathrm{q} = 2\mathrm{qvy} - \mathrm{yyr}$. *(2)* seu *L* 14 in *(1)* triangulum AMP. *(2)* figuram rectilineam *L*

6 productae AH: Dies weicht vom üblichen Gebrauch ab; mit producta bezeichnet Leibniz gemeinhin die ganze Subtangente MH.

Cuius ut constitutio intelligatur, posita AM minima seu $y = 0$. erit $PM = \frac{r}{2}$. seu lateri recto dimidio, quae ad A applicata esto AI.

Similiter in L. ellipsis centro erit $y = \frac{q}{2}$. Ergo $PM = \frac{qr - 2yr}{2q}$. erit $\frac{qr}{2q} - \frac{2qr}{4q}$ sive $\frac{r}{2} - \frac{r}{2} = 0$.

Ergo figura omnium PM erit triangulum LAI. cuius basis dimidium latus rectum ellipsis, altitudo dimidium latus transversum.

Ponamus iam datum esse locum omnium PM. quemadmodum datus est locus omnium AM (qui ipso PM applicatus semper triangulum exhibet), quaeri autem locum omnium CM. seu ipsam figurae $MCEA$ naturam.

Ergo ut ante posita $CP = s$. $PA = v$. et $PM = v - y$. erit

$$PM^2 = v^2 + y^2 - 2vy \ \text{ vel } \ \frac{r^2}{4} + \frac{y^2r^2}{q^2} - \frac{\cancel{2}yr^2}{\cancel{2}q}.$$

quoniam scilicet altera ex his, nempe vel PM, vel PA seu v. vel y seu AM. elidi potest.

Huic PM^2 addatur $CM^2 = x^2$, fiet $s^2 = \frac{r^2}{4} + \frac{y^2r^2}{q^2} - \frac{yr^2}{q} + x^2$.

Sed quoniam x quaeritur, ut methodus duplicum radicum aequalium commodius adhiberi queat, de integro ordiendum, quaerendamque ellipsis tangentem arbitror, non y, sed x assumto, atque y eliminato.

Nimirum $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$. Iam quia $xxq = ryq - ryy$. porro ex aequatione priore sequitur esse $y = v - \sqrt{s^2 - x^2}$, haec ergo ipsius y definitio in locum eius in secunda aequatione substituatur:

2 f. AI. *(1)* et *(a)* triangulum *(b)* figura, omnes MP. comprehendens erit trapezium MPAI. portio trianguli LAI. cuius vertex L. in ellipsis centro, *(aa)* quoniam L. *(bb)* quoniam tunc $y = \frac{q}{2}$. ergo $\frac{qr - 2yr}{2q} = \frac{r}{2} - \frac{\frac{\cancel{2}\cancel{q}r}{\cancel{2}}}{2\cancel{q}} = \frac{r}{2}$. *(2)* Similiter *L* 15 queat, *(1)* ab initio statim, *(2)* de *L*

fiet: $xxq = rqv - rq\sqrt{s^2-x^2}, -rv^2 - rs^2 + rx^2 + 2rv\sqrt{s^2-x^2}$. vel

$$\begin{array}{rcccccc} x^2q = & rqv - \sqrt{s^2r^2q^2 - r^2q^2x^2} & - rv^2 + & rx^2 & [-rs^2] & + \sqrt{4r^2v^2s^2 - 4r^2v^2x^2}. \\ 2x^2q = & 0 \qquad +rqx & - \ 0 & + 2rx^2 & [-0] & -2rvx. \end{array}$$

Unde fieret: $2x^2q = rqx + 2rx^2 - 2rvx$. vel $2x^2q + 2rvx = rqx + 2rx^2$. vel:

$$\cancel{2}\cancel{r}v\cancel{x} = \frac{rqx + 2rx^2 - 2x^2q}{2rx}. \text{ sive } = \frac{\cancel{r}q}{2} + \cancel{2}x - \frac{xq}{r} = v.$$

Unde sequitur: $\frac{q}{2} + x - \frac{xq}{r} = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. seu $x - \frac{xq}{r} = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} - \frac{q}{2}$. et $x = \dfrac{\frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q} - \frac{q}{2}}{1 - \frac{q}{r}}$. Quod cum sit absurdum, errorem in calculo esse necesse est. Credo in eo quod surdos per exponentes ipsius x multiplicavi.

Possumus autem eliminare surditates, si ponamus $\underset{\odot}{\sqrt{s^2r^2q^2 - r^2q^2x^2}}$ cum $\underset{☽}{\sqrt{4r^2v^2s^2 - 4r^2v^2x^2}}$ ab una aequationis parte, caetera ab altera, et utrumque quadremus, reliquum appellemus ☿ fiet $\odot + ☽ - 2\sqrt{\odot ☽} =$ ☿. Unde duae surditates reductae ad unam quae denique eliminatur, nam $0 - 2\sqrt{\odot ☽} =$ ☿ $- \odot - ☽$ ideoque $[4\odot ☽] = \underbrace{☿ - \odot - ☽}\ \square$. Sed haec prolixiora, quam ut iis insistere opus sit, brevius cum ostensum sit $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. substituendo x pro y. Quod ut fiat consideranda aequatio: $x^2 = ry - \frac{r}{q}yy$.

Ergo $0 - x^2 = \frac{r}{q}y^2 - ry$. Pone $\frac{r}{q} = \frac{1}{4}$. erit $r^2\cancel{+0} - x^2 = \frac{r}{q}y^2 - ry + r^2$.

Ergo $\sqrt{r^2 - x^2} = 2\frac{r}{q}y - r$. Ergo in eo casu: $\dfrac{\sqrt{r^2 - x^2}, +r}{2\frac{r}{q}} = y$.

2 $-$rs^2 *erg. Hrsg.* 3 -0 *erg. Hrsg.* 12 $2\sqrt{\odot ☽}$ *L ändert Hrsg.*

1 fiet: die folgende Rechnung ist fehlerhaft und führt schließlich auf die von Leibniz bemerkte Unstimmigkeit.

Imo idem fieri potest in omni ellipsi, nam si data sit aequatio: $0-x^2=\frac{r}{q}y^2-ry$, addendo utrobique $\frac{q}{2r}r^2=\frac{qr}{2}$; fiet

$$\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2}=\overset{(\sqrt{\frac{r}{q}}\,y)}{\sqrt{\frac{ry^2}{q}}}-\sqrt{\frac{qr^{\cancel{2}}}{2\cancel{r}}}.$$

Nam haec in se ducta dant: $\frac{r}{q}y^2-ry+\frac{qr}{2}$. Ergo $\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2}+\sqrt{\frac{qr}{2}}=\sqrt{\frac{ry^2}{q}}$. Ergo $\dfrac{\sqrt{\frac{qr}{2}-x^2}+\sqrt{\frac{qr}{2}}}{\sqrt{\frac{r}{q}}}=y$. sive

$$\sqrt{\frac{q^2}{2}-\frac{x^2q}{r}}+\sqrt{\underset{\underset{\frac{q}{\sqrt{2}}}{\bigwedge}}{\frac{q^2}{2}}}=y.$$

Ponamus nos figuram seu locum applicatarum, quaerere ex dato loco reductarum, idque in ellipseos exemplo tentemus.

Primum posito $MA=y$. et $CM=x$. et $PC=s$. et $AP=v$. et $PM=v-y$. erit $PM^2=v^2+y^2-2vy$. et $CM^2=x^2$. Ergo $s^2=v^2+y^2-2vy+x^2$. Cum autem

---

8–590,3 *Daneben am Rande:*

$$y^2=ax.\quad \frac{y^2}{a}=x.\quad \text{sive}\quad \frac{y^4}{a^2}=x^2.\quad \text{Ergo}\quad \frac{\frac{y^4}{a^2}}{y}=\frac{y^3}{a^2}.$$

588,17–589,1 y. *(1)* Memorabile hoc videtur, esse quoddam ellipseos genus, praeter circulum, in qua tam *(a)* applicata ad abscissam *(b)* applicata, quam abscissa pura relatione explicari potest, scilicet, quando latus transversum recti quadruplum est. Idem in aliis figuris *(aa)* explicari *(bb)* tentari potest. *(2)* Imo *L*

---

1 f. addendo utrobique: anstelle von $\frac{qr}{2}$ müsste es $\frac{qr}{4}$ heißen. — Leibniz rechnet mit dem Versehen konsequent weiter.

quaeramus relationem x ad y. ponatur x esse ξy. fiet:

$$s^2 = v^2 + y^2 - 2vy + \xi^2y^2.$$

In qua aequatione cum sint duae radices aequales fiet:

$$0 = 0 + 2y^2 - 2vy + 2\xi^2y^2.$$

Ergo $2y^2 + 2\xi^2y^2 = 2vy$. atque ideo $v = y + \xi^2y = v$. Ergo PM seu $v - y = \xi^2y$. Atqui idem $PM = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. Ergo $\xi^2y = \frac{r}{2} - \frac{yr}{q}$. Ergo ξ^2y^2 vel $x^2 = \frac{ry}{2} - \frac{y^2r}{q}$.

Deberet esse: $ry - \frac{y^2r}{q}$. error ergo, non calculi, sed methodi, quia scilicet in isto ξ^2y^2 non potest sciri quot unitatum sit exponens ipsius y. quia in ipso ξ^2 latet quoddam y.

Ergo nos ad Cartesii methodum duarum radicum aequalium, potius quam Huddenianam, recurrere debere arbitror.

Nimirum $s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \xi^2y^2 = 0$. et $y^2 + e^2 - 2ye$, etiam 0.

ergo: $s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \xi^2y^2 = y^2 + e^2 - 2\cancel{ye}y^2$.

Ergo $s^2 - v^2 - \cancel{y^2} + 2vy - \xi^2y^2 = \cancel{y^2} + e^2 - \cancel{2}\cancel{y^2}$.

Ergo $s^2 - v^2 + 2vy - \xi^2y^2 = y^2$.

$$\xi^2y^2 + y^2 + v^2 - 2vy$$

Ergo $\xi^2y^2 + \cancel{y^2} + \cancel{v^2} - \cancel{2vy} - \cancel{v^2} + \cancel{2vy} - \xi^2y^2 = \cancel{y^2}$.

Verissima quidem, sed quibus nihil explicari patet. Tollatur ergo iam v ex aequatione, quoniam eius comparatio cum y cognita est.

Est autem $v = \frac{r}{2} + y - \frac{yr}{q}$. Ergo erit $v^2 = \frac{r^2}{4} + ry - \frac{yr^2}{q} + y^2 - \frac{2y^2r}{q} + \frac{y^2r^2}{q^2}$. et $2vy = ry + 2y^2 - \frac{2y^2r}{q}$. fiet:

$$s^2 - \frac{r^2}{4} - \cancel{ry} + \frac{yr^2}{q} - \cancel{y^2} + \frac{2y^2r}{q} - \frac{y^2r^2}{q^2} + \cancel{ry} + \cancel{2}\cancel{y^2} - \frac{2y^2r}{q} - \xi^2y^2 = \cancel{y^2}\ 0.$$

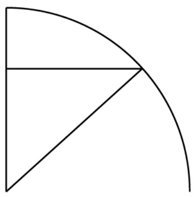
Sed nihil ex hac quoque aequatione duci potest, quoniam si s^2 explicandum sit, omnia tolluntur.

5 $=$ v. *(1)* At iam aliunde constat esse *(2)* Ergo *L*

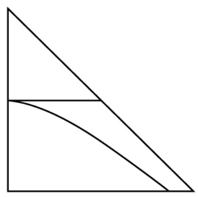
Videamus an reverti liceat ad methodum Huddenianam sed aliam.

Aequatio ista: $s^2 - v^2 - y^2 + 2vy - \overset{\xi^2 y^2}{\overset{\vee}{x^2}} = 0$. duas habet radices aequales, multiplicetur per progressionem arithmeticam, ubi prius recte fuerit ordinata. Sed malum in eo est, quod recte ordinari non potest, cum exponens verus ipsius y in termino $\xi^2 y^2$, non sit notus quia y ipsi ξ implicatum est.

[*Zusatz 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Differentia inter applicatam circuli et hyperbolae:

$$\sqrt{2ax + x^2} - \sqrt{2ax - x^2} \sqcap z.$$

fiet: $\boxed{2ax} + 2x^2 \sqcap z^2 + 2z\sqrt{2ax - x^2}\boxed{+2ax}\boxed{-x^2}$.

Ergo $4z^2 \frown 2ax - x^2 \sqcap 4x^4 \boxed{-4z^2x^2} + z^4 \sqcap 8z^2ax\boxed{-4z^2x^2}$.

Aliter $\sqrt{a^2 + y^2} - \sqrt{a^2 - y^2} \sqcap v$, unde $\sqrt{a^2 + y^2} \sqcap v + \sqrt{a^2 - y^2}$, sive $\boxed{a^2} + y^2 \sqcap v^2 + 2v\sqrt{a^2 - y^2}\boxed{+a^2} - y^2$, sive $2y^2 - v^2 \sqcap 2v\sqrt{a^2 - y^2}$, et quadrando $4y^4\boxed{-4y^2v^2} + v^4 \sqcap 4v^2a^2\boxed{-4v^2y^2}$. Ergo $\cancel{2}y^2 \sqcap \frac{v}{2}\sqrt{[4a^2] - v^2}$. $\frac{4y^4}{v^2} \sqcap 4a^2 - v^2 \sqcap 2a - v \frown 2a + v$.

Patet ante omnia figurae differentiarum quadratorum summam; pendere a momento segmenti ex centro.

1+3 methodum *(1)* Hugenianam *(2)* Huddenianam | sed aliam *erg.* |. Aequatio *L* 4 ordinata. | Sed hic rursus subesse. *streicht Hrsg.* | Sed *L* 15 a^2 *L ändert Hrsg.* 16 differentiarum *(1)* dari momentu *(2)* quadratorum *L*

$$y \sqcap \sqrt{\frac{v}{2}\sqrt{[4a^2]-v^2}}.$$

Iam v ista investigabimus:

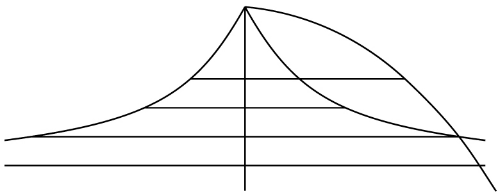
$$v^4 - 4v^2a^2 + a^4 \sqcap a^4 - 4y^4.$$

Unde $a^2 - v^2, \frown a^2 - v^2 \sqcap a^2 - 2y^2 \frown a^2 + 2y^2$, sive $a + v, \square, \frown a - v\square \sqcap a + y\sqrt{2} \frown a - y\sqrt{2}, \frown a^2 + 2y^2$;

$\mp v^2 \pm a^2 \sqcap \sqrt{a^4 - 4y^4}$, et $v \sqcap \sqrt{\mp\sqrt{a^4 - 4y^4} + a^2}$.

$4y^4 \sqcap 4v^2a^2 - v^4$, unde $16y^3l \sqcap 8v^2a^2 - [4v^4]$. Ergo $l \sqcap \dfrac{8v^2a^2 - [4v^4]}{16y^3}$.

$\dfrac{l \mp y}{z} \sqcap \dfrac{l}{v}$. Ergo $z \sqcap \dfrac{lv \mp yv}{l}$.



[*Fig. 4*]

Ope differentiarum inter duas figuras commensurabiles, novae habentur quadraturae, v. g. $\dfrac{2ay^2}{y^2 + a^2} \sqcap x$. Ergo $y^2x + a^2x \sqcap 2ay^2$. $y^2 \frown x - 2a, +a^2x \sqcap 0$, pone $x - 2a \sqcap z$, fiet $y^2z + a^2z + 2a^3 \sqcap 0$.

Differentia inter $y \sqcap \sqrt{\dfrac{a^2x}{2a - x}}$. et inter $\sqrt{2ax - x^2}$[:]

$$\sqrt{2ax - x^2} \sqcap \sqrt{\frac{a^2x}{2a - x}} + z.$$

1 a^2 *L ändert Hrsg.* 7 v^4 *L ändert Hrsg. zweimal* 12 f. $\sqcap 0.$ | In parabola: $y^2z - a^2z + 2a^3 \sqcap 0.$ *streicht Hrsg.* | Differentia *L*

4 Unde: Auf der linken Seite der Gleichung vernachlässigt Leibniz den Term $-2v^2a^2$ und löst nun diese vereinfachte Gleichung auf. 9 [*Fig. 4*]: Die grob gezeichnete Merkfigur entspricht nicht den Gegebenheiten des Textes. — Für eine graphisch korrekte Darstellung vgl. *LSB* III, 1 S. 156.

Unde $2ax - x^2 \sqcap \dfrac{a^2x}{2a-x} + 2z\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}} + z^2$. sive $2ax - x^2 - \dfrac{a^2x}{2a-x} - z^2 \sqcap 2z\sqrt{\dfrac{a^2x}{2a-x}}$. Sed nihil inde.

[*Zusatz 2*]

$\sqrt{aa+yy} - \sqrt{aa-yy}$ *aequ.* z. Ergo $2aa + \sqrt{a^4-y^4}$ *aequ.* zz. Seu $\sqrt{a^4-y^4}$ *aequ.* $zz - aa$. Seu $\sqrt{aa+yy}$. $\sqrt{a+y}$. $\sqrt{a-y}$ *aequ.* $\overline{z+a}$. $\overline{z-a}$.
Momentum figurae ex axe coniugata datur ex data $\int \overline{\sqrt{a^4-y^4}}\ \overline{dy}$. Sit $\boxed{a^4} - y^4$ *aequ.* $z^4 \boxed{+a^4} - 2zzaa$. et fit: $2zzaa$ *aequ.* $z^4 + y^4$. seu yy *aequ.* $z\sqrt{2aa-zz}$. Et y *aequ.* $\sqrt[2]{z}\sqrt[4]{2aa-zz}$.

$\sqrt{bb+cyy} + \sqrt{dd+eyy}$ *aequ.* z. fiet: $bb + cyy$ *aequ.* $zz + dd + eyy - 2z\sqrt{dd+eyy}$. Ergo $b^4 + 2bbcy^2 + ccy^4 + z^4 + 2zzdd + 2zzeyy + d^4 + 2ddeyy + eey^4 - 2bbzz - 2bbdd - 2bbey^2 - 2cy^2zz - 2cy^2dd - 2cey^4 - 4zzdd - 4zzeyy$ *aequ.* 0.
Tollamus $zzeyy$, faciendo $+2e - 2c - 4e$ *aequ.* 0. seu c *aequ.* $-e$. ita tollamus alia quam volumus.

5 f. $\overline{\mathrm{z-a}}$. *(1)* z + a aequ. $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}^4-\mathrm{y}^4}{\mathrm{z-a}}}$. Ergo momentum ipsius | *(a)* ordi *(b)* abscissae *erg.* | z + a. ex z − a. *(2)* Momentum *L*

4–8 Leibniz beginnt mit dem Ansatz von S. 591 Z. 13. Aufgrund von Flüchtigkeiten und Vereinfachungen ist das Ergebnis mit der Ausgangsgleichung nicht kompatibel.

36. FINES GEOMETRIAE
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 256. 1 Bl. 2°. 1 1/4 S. auf Bl. 256 r° und v°. Auf dem übrigen Teil des Blattes *LBS* VII, 1 N. 115.
Cc 2, Nr. 552

Datierungsgründe: Leibniz spricht in diesem Stück von seiner methodus transmutandarum figurarum, eine Anspielung auf den im 1. Halbjahr 1673 gefundenen Transmutationssatz (vgl. *LSB* III, 1 S. 115 f.). Das Wasserzeichen des Papiers ist bis August 1673 bezeugt.

Fines geometriae, seu classes problematum (omne enim theorema propter problema est) describere figuras; metiri figurarum datarum quantitates, invenire figuras quantitatis desideratae.

Horum porro omnium rursus tres sunt gradus, est enim geometria vel Euclidea, vel Apolloniana (quam Vieta et Cartesius resuscitavere), vel Archimedea, cui Guldinus, Cavalerius, aliique incubuere.

Euclidea ducit, metiturque rectilineas, invenitque figuras quantitatis desideratae rectilineas, quoties ratio quaesitarum ad datas haberi potest, seu quoties problema est planum, ductuque rectarum et circuli solvi potest.

Sed quoniam interdum rectilinea quantitatis desideratae inveniri non possunt nisi aliis quibusdam curvis, seu locis, quos vocant descriptis, eam provinciam Apollonius praeclare exornavit, et Vieta, Cartesius, Slusiusque amplificavere.

Caeterum ad geometriam Apollonianam dimensione figurarum curvarum, opus non est, sed sufficit eas describi posse, et tangentes earum inveniri quare saepe miratus sum a doctissimis viris, sed qui scilicet hoc unum agitavere geometriam Apollonianam pro absoluta ac perfecta venditari.

Commune istud est eorum peccatum, qui in Cartesii verba iuravere: ita enim ille saepe loquitur splendidius sane quam verius; methodo sua geometriam ad perfectionem perductam esse, quanta ab homine optari possit; nullum esse problema, cuius non aut

10 est) *(1)* invenire, scilicet puncta; describere scilicet locos, seu seriem punctorum infinitam; ac denique comparare, seu metiri figuras, constituereque *(2)* velut subiectum contemplationis, invenire loca, invenire quantitates desideratas, *(3)* describere *L* 27 problema, *(1)* quod eius ope aut solvi non queat *(2)* cuius *L*

solutionem aut solvendi impossibilitatem monstret. Certas sibi rationes esse praescribendi limites intellectui, definiendique quicquid aliquando inveniri possit.

Sed quantopere in eo negotio lapsus sit, vir caetera utique magnus, docuit eventus. Crediderat enim arte humana curvam rectae aequalem inveniri non posse quod in *Geometria* diserte satis expressit, forte quod ex ea quam sequebatur geometriae methodo, cui nihil addi posse putabat aditus et ad hanc speculationem nullus aperiretur. At Wrennus certe ac Heuratius ac novissime Hugenius praeclaris speciminibus, spem intellectui humano reddidere.

Constat Cartesium inveniendae dimensioni areae cycloeidis imparem, donec eius quantitas a Robervallio demonstrata, ei a Mersenno, (quanquam sine demonstratione) transmissa est.

Cuius rei ratio est (operae pretium enim est, intimas scrutari harum rerum causas, cum eas nemo satis persecutus sit), quia algebra quam hactenus habemus in surdarum calculo imperfecta est. Nam quis mortalium duas quasdam radices surdas

$$Rq\ a^2+b^2.+Rq.\ a^2+c^2.$$

in unam quandam, quanquam compositam seu binomiam redigere potest? At hoc plerumque in curvilineorum dimensione requiritur.

Alterum est quod per binomia vel residua dividi non potest quemadmodum per ea potest multiplicari, nam ex $a, \frown b+c.$ fieri possunt plures producti uninomii, $ab+ac.$ at si divisor sit binomius, ut

$$\frac{a}{b+c}$$

producti uninomii haberi non possunt nisi numero infiniti. Quorum summa iniri quidem potest, sed quae binomium datum nobis reddit.

Magni tamen usus hoc est ad approximationes quod Mercator in quadratura hyperbolae ostendit; ego in quadratura circuli exacta sed arithmetica, et sectione angulorum univer-

9 areae *erg. L* 20–22 binomius, *(1)* ex eo divisores *(2)* ut $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+c}}$ *(a)* divisores uninomii ex eo *(b)* producti *L* 23 f. reddit. *(1)* Cuius tamen maximus est usus ad approximationes *(2)* Magni *L* 25 exacta sed arithmetica *erg. L* 25–596,1 universali, *(1)* scilicet arithmetica per approximationes *(2)* non *L*

5 expressit: R. Descartes, *Geometria*, *DGS* I S. 39. 8 reddidere: s. Chr. Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 68–72 (*HO* XVIII S. 202–211). 10 f. transmissa: Mersenne – Descartes, Brief vom 28. April 1638, in: R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667; S. 380–384 (*DO* II S. 116–122; *MCW* VII S. 173–179). 25 ostendit: N. Mercator, *Logarithmotechnia*, 1668, S. 31–34.

sali, non exacta quidem, sed per approximationes, expeditissimas tamen idem, ingenti opinor fructu, exhibebo.

Tertium quod observavi malum est imperfectio arithmeticae serierum, et quae ab ea pendet arithmeticae infinitorum; quoties quadratura alicuius figurae reducta est ad infinitam seriem numerorum rationalium (rationalium inquam, surdi enim sunt intractabiles).

Quod primus omnium in hyperbola praestitit Vicecomes Bruncker, Societatis Regiae Anglicanae praeses, geometra insignis, in circulo autem hactenus, nemo, donec a me quoque eius rei ratio excogitaretur, qua circulum (et ellipsin) ad quanquam figuram hyperboloeidem reduxi, et ostendi serie quadam numerorum rationalium infinitorum exacte exhiberi posse circuli imo et segmenti cuiuslibet magnitudinem. Unde sequitur vera et exacta (id est non per approximationes), attamen arithmetica tantum quadratura, et quanquam per approximationes (sed expeditissimas), sectio angulorum universalis, et quotcunque mediarum proportionalium inventio, cubique, ac surdesolidi, altiorisque cuiuscunque potestatis duplicatio, triplicatiove etc.; et ut verbo dicam p e r f e c t i o g e o m e t r i a e i n u s u c o m m u n i v e r s a n t i s.

Sed haec aliquando fusius dicam, peculiari dissertatione de a p p r o x i m a t i o n i b u s , s e u p e r f e c t i o n e g e o m e t r i a e i n u s u v e r s a n t i s. Nunc admonuisse sufficit, hanc arithmeticae infinitorum imperfectionem, quod omnes series infinitas numerorum rationalium in summam colligere nequit, redundare in geometriam.

Neque hic algebra sufficit, nisi ei ars combinatoria succurrat.

Haec sunt quae faciunt, ut hactenus in potestate artificis non sit, datam figuram curvam metiri. Quare data quadam figura, cuius resolutio nos in surdas ducit, eousque transformanda est, donec eliminatis surdis ad infinitam seriem rationalium numerorum redigatur, qui primus est ad quadraturam gradus.

3 et *(1)* inprimis *(2)* quae *L* 9 (et ellipsin) *erg. L* 21 f. succurrat. *(1)* His ita positis, fit ut non sit in potestate artificis, invenire *(2)* Haec sunt quae faciunt, | fit *streicht Hrsg.* | ut *L* 23 metiri. *(1)* Necesse est enim fig *(2)* Quare *L* 24 eliminatis surdis *erg. L*

7 praestitit: W. Brouncker, *The squaring of the hyperbola*, in: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649. 10 reduxi, et ostendi: vgl. N. 27 Teil 3.

Et regula est generalis a me inventa: omnis figura plana curvilinea, cuius solidum revolutione genitum, circa altitudinem basinve, quemadmodum et solidum cuiuslibet partis eius a vertice revolutionis abscissae, reduci potest ad cylindrum, quod in circulo, ellipsi, hyperbola, cycloeide, figura sinuum, aliisque multis fieri potest, reduci potest ad speciem quandam hyperboloeidis, seu infinitam seriem numerorum rationalium; quod est arithmeticam eius, (exactam tamen) quadraturam dare.

Atque haec quidem dimetiendarum figurarum methodus recta est, est et alia obliqua, et fortuna subnixa, cum figura mutatur in aliam figuram, donec tandem in quadrabilem incidamus. Hoc sane hactenus factum est casu, sed qui certam quandam methodum exhibuerit transmutandarum figurarum, quam nihil effugiat, nemo comparuit. Hanc ego ausim dicere a me detectam, fontesque apertos, geometriae Archimedeae quos qui persequatur, efficere possit, quod in geometria Apolloniana iactatur, solvere problema, aut ostendere insolubilitatem.

Mira res est, et summae facilitatis, ac ne contemplationi quidem intricatissimae curvarum obnoxia; eo usque ut ex simplici quodam diagrammate, in quo nihil nisi circulus et aliquot rectae sese intersecantes depictae erunt, deduxerim, triginta et ultra propositiones admirandas, quibus curvilinea plurima, partim quadrantur partim in alia curvilinea commutantur methodo tam facili, ut non nisi rectilinea per Euclidea *Elementa* tractari videantur.

Tota res nititur triangulo quodam orthogonio laterum infinite parvorum, quod a me appellari solet c h a r a c t e r i s t i c u m , cui alia communia, laterum assignabilium, similia, ex proprietate figurae constituantur. Ea porro triangula similia characteristico comparata, exhibent propositiones multas, pro tractabilitate figurae, quibus diversi generis curvae inter se comparantur. Pauca sunt, quae ex hoc t r i a n g u l o c h a r a c t e r i s t i c o non deducantur.

Ars autem combinatoria praestare potest ut nihil effugiat. Atque ita secure pronuntiari potest, etiam de problematum possibilitate quamdiu scilicet arithmetica surdorum, atque infinitorum, separata opera non perficiuntur.

1 a me inventa *erg. L* 20 triangulo *(1)* assignabili quodam, quod a inassi *(2)* quodam orthogonio *L* 27 potest, | non *gestr.* | etiam *L*

1 regula ... a me inventa: vgl. dazu N. 17 S. 340 Z. 8 f. 16 triginta et ultra: s. vor allem N. 27. — Das charakteristische Dreieck hat Leibniz bei seinen Studien zu Pascals *Lettres de A. Dettonville*, 1659, gefunden; vgl. dazu N. 10.

37. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA I
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 239. 1 Bl. 4°. 2 S.
Cc 2, Nr. 693

Datierungsgründe: Das vorliegende und die beiden folgenden Stücke stehen in engem inneren Zusammenhang; sie sind jeweils Vorstufen voneinander und sind offenbar nach N. 26 und N. 27 entstanden. Aufgrund des Wasserzeichens des Papiers müssen sie vor N. 40 von August 1673 liegen.

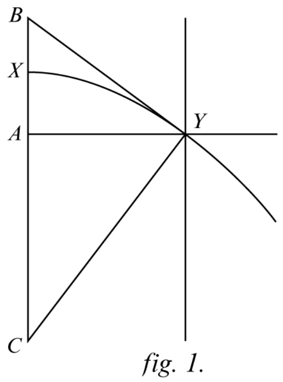


fig. 1.

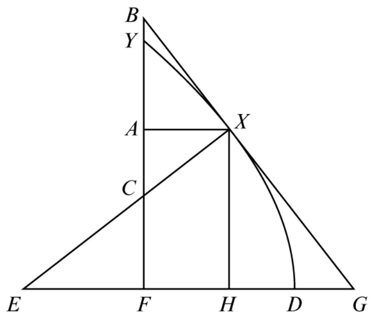


fig. 2.

Sunto tria in axe producto puncta, unum (A) quo occurrit applicatae, alterum quo tangenti (B), tertium (C) quo perpendiculari, hinc lineae AB et AC, aio hanc regulam esse generalem[:]

Applicata semper est media proportionalis inter AB et AC.

Ergo si y sit applicata, et x sit abscissa, habeatque AB constantem semper rationem ad abscissam, ut in hyperboloeidibus et paraboloeidibus[,] ea ratio ponatur esse β. Ergo $\dfrac{y^2}{x\beta} = AC$.

11 proportionalis *(1)* |inter *nicht gestr.*| punctum *(2)* li *(3)* inter *L*

Quod si iam ex natura curvae $y^2 = ax$. erit $AC = \frac{ax}{\beta x} = \frac{a}{\beta}$. Et quia β est ratio exponentium potestatis x et y. $= 2$. erit $\frac{a}{\beta} = \frac{a}{2}$.

At quid si $y^3 = ax^2$. erit $y^2 = \frac{ax^2}{y}$. (vel $y = \frac{ax^2}{y^2}$. vel $1 = \frac{ax^2}{y^3}$.) ideoque $AC = \frac{ax^2}{\beta xy} = \frac{ax}{\beta y}$. Iam hoc loco $\beta = 3$. ideo $\frac{ax}{3y} = AC$. Ergo $AC^3 = \frac{a^3x^3}{9y^3}$. et pro y^3 substituendo ax^2 fiet $AC^3 = \frac{a^3x^3}{9ax^2} = \frac{a^2x}{9}$. Ergo $AC = \frac{\sqrt{a^2x}}{3}$. Hinc memorabile est, si aequatio curvae $ax^2 = y^3$. tunc determinationem ipsius AC, fore $\frac{\sqrt{a^2x}}{3}$.

Contra, si aequatio curvae $a^2x = y^3$, erit $y^2 = \frac{a^2x}{y}$. Ergo AC vel $\frac{y^2}{x\beta}$ erit $= \frac{a^2x}{\beta xy} = \frac{a^2}{\beta y}$.
(Ideoque [locus] omnium AC in curva ista, ad basin applicatarum, erit hyperbola. Eodemque modo in aliis orietur hyperboloeis, ubicunque x tollitur[;] cum contra, ubi x manet, alia quaedam paraboloeis sit locus omnium AC, ut in praecedenti, ubi $AC = \left[\frac{2\sqrt{_c\ a^2x}}{3}\right]$. seu applicata parabolae cubicae. Ergo [locus] omnium AC hic quadrari potest, at ubi est $\frac{a^2}{\beta y}$ pendet eorum summa ad basin ex quadratura hyperbolae[;] sed ad altitudinem, potest opinor etiam quadrari, quod apparebit, si auferemus y ut mox sequetur.)
Iam si $AC = \frac{a^2}{\beta y}$. Ergo $AC^3 = \frac{a^6}{\beta^{[3]}y^3}$. vel (quia $y^3 = a^2x$.) $\frac{a^6}{[\beta^3]a^2x} = \frac{a^4}{[\beta^3]x}$. Ergo hoc casu [locus] AC est genus quoddam hyperboloeidis altioris, si axi applicentur, ut est hyperbola communis, si applicentur basi.

9 summa *L ändert Hrsg.* 11 $\frac{\sqrt{a^2x}}{3}$ *L ändert Hrsg.* 12 summa *L ändert Hrsg.* 15 *fehlende Faktoren erg. Hrsg.* 16 casu | summa *erg., ändert Hrsg.* | AC *L* 17–600,1 basi. *(1)* Hinc *(2)* NB. *(3)* Omnium *L*

3–6 Hier begeht Leibniz verschiedene Flüchtigkeitsfehler; bei richtiger Rechnung müsste sich $AC = \frac{2\sqrt{_c\ a^2x}}{3}$ ergeben.

Omnium AC axi applicatarum solidum haberi potest ex vertice, modo summa haberi possit quadratorum AY seu applicatarum paraboloeidis nostrae ($a^2x = y^3$.) ad axem. Ratio est quia $AC \frown AB$ (vel $AC \frown AX\ \beta$) $= AY^2$. At summa horum quadratorum ita habebitur:

Datur momentum huius paraboloeidis ex vertice, datur et eius quadratura, ergo eius centrum gravitatis, ergo et momentum ex ipsa AX, seu quadrata omnium AY. sed momenta omnium $[AC]$ ex X aliunde habentur, sunt enim summa omnium a^2.

Iam intelligantur omnia inversa, et fig. 2. relationem quaeri omnium curvae punctorum, non ad lineam AX, sed ad lineam AY.

Tunc BX tangens curvae in puncto X erit infinita, quia CX coincidit cum AX, et ideo BX parallela AB, ideoque infinita. Sed hoc non contingit in quolibet puncto X, sed tum demum cum AX est axis figurae. AY enim axis non est, etsi sit altitudo.

Porro ut investigemus AX, posito AY velut cognito, et $[Y]$ puncto inimmutabili, cum sit $a^2x = y^3$. alia nunc instituenda aequatio est, in qua y ipsi a misceatur, x separatim inquiratur. Ergo $\dfrac{y^3}{a^2} = x$. Quod si sit $ax^2 = y^3$. fiet: $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$.
Hinc facilis quadratura figurae[,] tantum enim summa omnium cuborum ex Y (quae iniri potest, quia y crescit uniformiter) dividenda per a^2.
At in hyperbola aut hyperboloeide ita aequatio primum: $xy = a^2$. ergo nihil refert ad summam habendam sive dicas $x = \dfrac{a^2}{y}$, sive $y = \dfrac{a^2}{x}$.

Quod si aequatio sit: $x^2y = a^3$. fiet vel $y = \dfrac{a^3}{x^2}$ (quorum momentum est cylinder hyperbolicus $\dfrac{a^3}{x}$) vel $x = \dfrac{a^3}{yx} = \sqrt{\dfrac{a^3}{y}}$. et horum $\sqrt{\dfrac{a^3}{y}}$ momentum est $\sqrt{a^3y}$ quod est genus seriei paraboloeidis, in quo $x^4 = a^3y$. Et $\dfrac{x^4}{a^2} = ay$. Cumque quadrari hoc possit,

2 f. axem. *(1)* At hanc haberi posse puto *(2)* Ratio *L* 7 AY *L ändert Hrsg.* 13 Y *erg. Hrsg.*
22 seriei | paraboloeidis *darüber* parabolae | in quo *(1)* $x^2 = a^3y$. Et $x^2 = ay$. *(2)* x^4 *L*

22 in quo: in den beiden folgenden Ausdrücken stand zunächst x^2 (s. die Variante), Leibniz hat dann abgeändert und die neue Kurve weiter betrachtet.

habebitur et series omnium x^2, habita scilicet summa omnium x earumque momento aliquo. Series autem omnium x habetur ex serie omnium y, quae est $\dfrac{x^4}{a^3} = y$. quorum manifesta est quadratura. Cumque momentum etiam omnium y ex vertice, seu summa omnium yx manifeste detur, aequalis: $\dfrac{x^5}{a^3}$ ad basin, constat momentum etiam ex basi, et ideo centrum gravitatis, atque ideo momentum ex altitudine, atque ideo summam quadratorum applicatarum ad altitudinem, x^2, dari.

Hinc praeclaram duco demonstrationem: quadraturam hyperboloeidis $x^2y = a^3$. ex quadratura hyperbolae dari. Idemque de omnibus hyperboloeidibus in infinitum demonstrari posse arbitror.

Suppono quadraturam omnium dari praeter primae seu Apollonianae. Esto fig. 2. hyperboloeis 2^{da} $a^3 = x^2y$, eius momentum ex vertice Y est cylinder hyp. $\dfrac{a^3}{x}$. Quadrata omnium $y = AX$ sunt $\dfrac{a^6}{x^4}$. quae quadrabilia, quia cylinder hyperboloeidis $\dfrac{a^5}{x^4}$ quadrabilis. Momenta omnium (x) XH ex vertice D $\sqrt{a^3y} = xy$. ergo $= \sqrt{ay}, \frown a$. seu cylindro parabolae. Restant quadrata omnium (x) XH, seu momentum ex DF est $\dfrac{a^3}{y}$ seu cylinder hyperbolae. Ergo cum momentum ex vertice $Y+$ mom. ex basi DF componant cylindrum hyperboloeidis quadrabilem, ergo duo cylindri hyperbolici eiusdem altitudinis, tantum quod una hyperbola est $\dfrac{a^2}{YF}$, altera $\dfrac{a^2}{DF}$ componunt cylindrum hyperboloeidis quadrabilem. Possunt autem duae hyperbolae ad se invicem reduci, et ita invenietur quadratura, dum scilicet hyperbolae concavae duae, similes, complent cylindrum. Ergo differentia earum habetur a convexa. Hinc quadratura.

Nota quia AB ad basin aequantur ipsis AY ad altitudinem, ideo in fig. 2. ubi paraboloeidis inverso quodam modo assumitur, nec ad axem sed basin applicatae ducuntur

4 ad basin *erg.* *L* 5 ex | axe *darüber* altitudine |, atque *L* 9–21 arbitror. *(1)* Sed demonstratio omnium pulcherrima et generalissima haec est, qua demonstro summam omnium AB. aequari figurae. Hinc quadraturam habemus omnium paraboloeidum, in quibus summa omnium AB. semper $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ est. Hinc summam habemus aliarum figurarum infinitarum, quae paraboloeides non sunt, in quibus AB. parabolam aliamve figuram quadrabilem conficiunt. NB. omnes AB. in figura 2^{da} constituunt spatium asymptotum. Huius ergo quadratura hoc modo habetur sane admirabilis. *(2)* | Suppono ... quadratura. *erg.* | Nota *L*

novum quoddam genus figurarum, et quidem asymptotarum, quadrabilium orietur[,] nam in fig. 2. ultima AB est infinita, quia et ultima XB infinita est.

Porro habebimus AB. si scilicet AX^2 dividatur per AC. erit $AB = \dfrac{AX^2}{AC}$.

Vel aliter[:] Si axem figurae inquiremus qui ponatur esse DFE (fig. 2.), quo casu AX non est axis, nec XB infinita, ductaque perpendiculari XCE, et tangente XG. patet angulum XBA esse = angulo AXC, triangulaque XAC et BAX similia, ergo $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{AX}{AC} = \dfrac{XB}{CX}$. Ergo $AB \frown AC = AX^2$. Ergo $AB = \dfrac{AX^2}{AC}$.

Sed eadem AB conemur ut opinor simplicius sic determinare: Angulus CEF = angulo ABX. Triangulaque BAX et EHX similia sunt ergo. Ergo $\dfrac{AB}{AX} = \dfrac{EH}{HX}$. Ergo $AB = \dfrac{EH \frown AX}{HX}$.

Eodem modo fig. 2. habetur summa omnium XB ad basin, si summa omnium AX ad arcum. Qualis habetur si AX est axis parabolae, sed non si applicata axi. Summa omnium XB applicata ad FD = omnibus AB ad arcum.

NB. si aequatio hyperboloeidis sit $y^3x = a^4$. fiet vel: $x = \dfrac{a^4}{y^3}$. (quorum momentum in distantias a vertice Y ductorum est cylinder hyperbolae, cuius aequatio: $\dfrac{a^3}{y^2}$, hoc ergo momentum pendet a quadratura hyperboloeidis praecedentis) vel $y = \dfrac{\sqrt{_c}\; a^4}{x}$. quae ducta in x vel $\sqrt{_c}\; x^3$ dabunt: $yx = \sqrt{_c}\; a^4x^2$. Summa autem seriei cuius termini sunt

$$\sqrt{_c}\; a^4x^2, \text{ vel } [\sqrt{_c}\; a^4\beta^2,\ \sqrt{_c}\; a^4 4\beta^2] \text{ etc.}$$

iniri potest, sunt enim applicatae paraboloeidis cuiusdam ad axem. Ergo et cubi applicatarum istarum.

2 f. est. *(1)* Posita autem XB. finita, eam sic investigabimus *(2)* Porro *L* 3 f. $\dfrac{\mathrm{AX}^2}{\mathrm{AC}}$. *(1)* Sed quia AC. et AB. nunc aeque ignotae, rectius *(2)* Vel *L* 7 f. $\dfrac{\mathrm{AX}^2}{\mathrm{AC}}$. *(1)* | Cumque summa omnium AX^2 id est quadratorum applicatarum $\bigtriangledown^{li}$ ad basin, detur. *nicht gestr.* | Caeterum omnes AC. sunt *(a)* etiam applicatae parabolae *(aa)* et i *(bb)* si *(b)* radices differentiarum inter duarum parabolarum applicatas. *(2)* Sed *L* 11 basin, *(1)* aequalis summae *(2)* si *L* 15 in … ductorum *erg. L* 18 $\sqrt{_c}\; \mathrm{a}^4\beta$, $\sqrt{\mathrm{a}^4 2\beta}$ *L ändert Hrsg.* 19 potest, *(1)* | ergo et *nicht gestr.* | *(a)* qua *(b)* sum *(2)* sunt *L*

Nimirum generali regula ostendendum est, quadratorum, cuborum, etc. summam cuiuslibet applicatae parabolae iniri posse.
Sed id impraesentiarum facile fieri potest si quaeratur $\sqrt{_c\; ax^2} = \dfrac{yx}{a}$. Ergo momentum istud hyperbolae quadrato-quadraticae est cylinder parabolae cubicae.

2 applicatae *(1)* hyperbolae *(2)* parabolae *(3)* parabolae *L* 4 hyperbolae quadrato-quadraticae *erg. L* 4 cylinder *(1)* | parabolae *nicht gestr.* | quadrato cubicae *(2)* parabolae *L*

4 parabolae cubicae: in neuerer Terminologie: semicubicae.

38. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA II
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 135–136. 1 Bog. 2°. 4 S. Bl. 135 insgesamt gestrichen.
Cc 2, Nr. 638

Datierungsgründe: s. N. 37.

[*Teil 1, gestrichen*]

Multa nuper a me demonstrata sunt, exigua licet neglectaque in schedula de quadratura paraboloeidum ac hyperboloeidum.

Ac primum quod ad paraboloeidum quadraturam pertinet methodum reperi generalem, qua non tantum paraboloeides quadraticae aut cubicae, simplices, quarum quadratura tantum vulgo extat, sed et compositae quadrantur, repetam breviter:

Quaeritur quadratura paraboloeidis simplicis, cuius haec est aequatio[:] $a^2x = y^3$. vel $\sqrt{_c\ a^2x} = y$. Hanc aequationem in aliam commutemus, qua surditas evitetur[;] ex $a^2x = y^3$, fiet $x = \dfrac{y^3}{a^2}$. Summa ergo omnium x, applicatarum axi parallelarum haberi potest, quia haberi potest summa omnium $\dfrac{y^3}{a^2}$, quia y^3 crescunt uniformiter, est ergo summa summarum, pyramidalium, seu summa triangulo-triangularis, divisa per a^2, quia a immutabile est.

At si aequatio paraboloeidis non simplicis, sed compositae sit v. g. $ax^2 = y^3$, nam quoties nimirum non immutabilis parameter, sed mutabilis applicata potestate affecta est, paraboloeidem compositam appello. Aequatio haec erit $x = \dfrac{y^3}{ax}$. vel $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. unde statim hanc consequentiam duco quadrata omnium x summari posse. Quadrata autem applicatarum aequantur momento ex altitudine, quae hoc loco est basis, sunt enim x basi parallelae axi applicatae, at y axi parallelae, basi velut altitudini applicatae. Habemus ergo momentum paraboloeidis compositae ex basi.

---

8 Multa: s. N. 37.

Altera aequatio est: $y = \sqrt{_c}\ ax^2$. Ergo $y^3 = ax^2$. At summa omnium ax^2 haberi potest, ergo et summa omnium y^3. Sed nos opus habemus summa omnium y^2. Est autem $y^2 = \dfrac{ax^2}{y}$. sed $y = \sqrt{_c}\ ax^2$. Ergo $y^2 = \dfrac{ax^2}{\sqrt{_c}\ ax^2}$. Ut auferri possit surditas, erit $y^2y^2y^2 = \dfrac{a^3x^2x^2x^2}{ax^2}$, vel $y^6 = \dfrac{a^3x^6}{ax^2} = \dfrac{a^2x^4}{1}$. Ergo $y^3 = ax^2$. nullo hactenus fructu.

Ergo quaerendum si y ducamus in distantiam a vertice x. fiet $yx = \sqrt{_c}\ ax^5$. Unde patet quadraturam huius paraboloeidis solidi (nota[:] paraboloeidi solida non sunt hactenus considerata) pendere a quadratura huius paraboloeidis plani: $y = \sqrt{_c}\ ax^2$.

Diximus supra $x = \dfrac{y^3}{ax}$. Ergo $x = \dfrac{y^3}{\dfrac{ay^3}{ax}}$. Ergo $x = x$. inepte.

An aliter pro y^3 substituendo ax^2, fiet $x = \dfrac{ax^2}{ax} = x$. iterum inepte.

Habemus $x^2 = \dfrac{y^3}{a}$. Ergo $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$.

Sed cum haec frustra tentari videantur nova methodus ineunda est:

Cum sit $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. erit $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$. Id est summa indivisibilium omnium y, dividenda est per radicem quadratam summae indivisibilium ipsius a. Quod ita facile opinor nunc assequemur novo licet isto surditatis genere ablegato. Si data nobis aequatione: $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. pro summa omnium $\sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$ substituamus $\sqrt{\dfrac{a^4\beta}{a}}$. fiet $x = \sqrt{\dfrac{a^4\beta}{a}}$. vel $x = \sqrt{a^2\beta}$. Ergo $x = a \frown \sqrt{\beta}$.

2 y^3. *(1)* Ergo et momentum paraboloeidis ex *(a)* altitudine *(b)* axi. Quare habetur eius centrum gravitatis, et cum detur momentum eius, habebitur et quadratura, quae area enim est momentum distantia centri gravitatis ab axe divisum. Restat no *(2)* Sed *L*

12–16 Zunächst hatte Leibniz überall $\sqrt{_c}$ bzw. radicem cubicam stehen; er hat dann aber ohne sonstige Änderung die Kubikwurzel durch die Quadratwurzel ersetzt. Dasselbe geschieht, wenn auch nicht an allen Stellen S. 606 Z. 26 – S. 607 Z. 2 und S. 608 Z. 10–13.

At $\sqrt{\beta}$. facile haberi potest, quia β haberi potest, est enim certus quidam numerus, ratio scilicet omnium y^3, ad omnia a^3, seu ad a^4. quae aliunde dudum nota est.

Ecce ergo repertam rationem generalem quadrandi omnes paraboloeides simplices et compositas.

Addo quod intactum, omnium dimensionum, id est planas, solidas, quadrato-quadraticas; etsi enim illae sint imaginariae, tamen repraesentationes earum utiles sunt, aliisque figuris exprimi possunt. Ita $\sqrt{_c}\ ax^5 = y^2$. vel $ax^5 = y^6$. aequatio est exprimens naturam cuiusdam figurae solidae, cuius planum applicatum in se cubice ductum, aequatur surdesolido distantiae a vertice, in quandam parametrum constantem ducto.

Unde illud quoque apparet omnium paraboloeidum applicatorum quadrata, cubos, etc. momenta, aliaque id genus innumera haberi posse. Neque in hanc rem expectari posse perfectius quicquam.

Porro ista quoque paraboloeidi solida aut supersolida, ad nova ut dixi planarum paraboloeidum genera exhibenda, utilia sunt, v. g. si sit $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = (y)$. Eius utique paraboloeidis area hoc modo haberi potest. Sed videndum an ea aliter exprimi possit: $\sqrt{_c}\ ax^5 = (y)a$. Ergo $ax^5 = (y)^3a^3$. Ergo $x^5 = (y)^3a^2$. Quare huius quidem generis aequationes paraboloeidum planarum irregulares non nisi frustra inducerentur. Solidae autem hac methodo ad suas planas reducuntur, a quibus pendent. V. g. data est aequatio $\sqrt{_c}\ ax^5 = y^2$. et summa quaeritur omnium y^2. Eam ita habebimus si substituamus: $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = \dfrac{y^2}{a}$. Iam si pro $\dfrac{y^2}{a}$ substituatur (y) (quod consulto includo parenthesi ne duo y inter se confundantur), fiet $\dfrac{\sqrt{_c}\ ax^5}{a} = (y)$. Ergo dicto modo: $x^5 = (y^3)a^2$, vel potius $\dfrac{x^5}{a^2} = (y^3)$. vel $\sqrt{_c}\ \dfrac{x^5}{a^2} = (y)$. Ita summa omnium (y) iniri potest, quae ducta in a dabit summam omnium y^2.

Non possum hinc abire, nisi admoneam, admirandam illam consequentiam, quae ex hac demonstratione duci potest:

Cum x sit $= \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. ostensum est reperiri posse summam omnium x. Iam idem $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$, ut supra dictum est, et haberi potest summa omnium $\langle \dfrac{y}{a} \rangle$. (Quae est $\dfrac{a}{2}$. posito maximum $y = a$. seu quando basis seu maxima applicata lateri recto aequalis est, sin minus habetur proportione.) Cumque $\sqrt{_c}\ a$. sit semper eadem, hinc sequitur quantitatem ipsius $\sqrt{_c}\ a$.

seu rationem eius ad a. definiri posse, quia ratio omnium $\dfrac{y}{\sqrt{a}}$ planum constituentium ad omnia $\dfrac{y}{a}$ lineam facientia, haberi potest.

Notabile enim est, rationes puras in geometricis esse nullas, sed indivisibilia communia designari quoties divisor dividendo quantum ad dimensionem aequalis; sin inferior, designari indivisibilia communibus inferiora, quorum non nisi infinita indivisibile commune constituant.

Huius rei manifestam hanc demonstrationem affero per impossibile[:]
Sunto v. g. y et a aequalia, ergo $\dfrac{y}{a}$ significant 1. ita inquies. Ego fateor, sed aio illud 1 notandum esse hoc modo *1r*. neque enim esse 1, seu numerum illum, sed esse indivisibile aliquod, quod in praesenti constructione unitatis personam sustinet, sive quod est infinitesima pars lineae cuiusdam, in partes aequales infinitas cogitatione divisae. Fateor tamen dici posse $\dfrac{y}{a}$ esse unitatem communem, nam $\dfrac{y^2}{a^2}$ non augent dimensionem, nam v. g. $\dfrac{y^2a}{a^2}$ non nisi lineam facit. Et haec manifesta sunt sciendum enim istis a^2. vel a. non significari lineam, sed numerum infinitum, unde praeclare Proclus *Comm. in 1. Eucl.*[:] ut elementa arithmeticae sint: unitas et multitudo, ita geometriae esse: τὸ ἄτομον, καὶ τὸ ἄπειρον. Id est occupari eam numero sed infinito, indivisibilium velut unitatum.

Caeterum illud manifestum est, si v. g. curvae cuiusdam in rectam ductae superficies cylindrica aequetur seriei

$$\sqrt{a\beta} + \sqrt{2a\beta} + \sqrt{3a\beta} \text{ etc.}$$

curvam ipsam aequari huic seriei ex indivisibilibus conflatae:

$$\frac{\sqrt{a\beta}}{a} + \frac{\sqrt{2a\beta}}{a} + \frac{\sqrt{3a\beta}}{a} \text{ etc.}$$

Id ipsum ergo $\dfrac{\sqrt{a\beta}}{a}$, vel simile est indivisibile quoddam.

4 dividendo *(1)* maior *(2)* quantum *L*

---

14 praeclare: vgl. dazu *a. a. O.* (ed. Friedlein) S. 19.

Caeterum ad id unde coepi redeundum est: haberi posse valorem ipsius $\sqrt{a}$. vel $\sqrt{}_c\, a$. etc. in ratione ad a. Quod nescio an non usum haberi possit, ad construendas in plano aequationes alioquin desperatas.

V. g. si aequatio prodierit $z = \sqrt{}_c\, c^2 v$. posset $\sqrt{}_c\, c^2$. et $\sqrt{}_c\, v$. quodam valore exhiberi, haberetur aequationis reductio, imo sufficeret valorem cogniti $\sqrt{}_c\, c^2$. exhiberi. Certe data summa horum $\sqrt{}_c\, \dfrac{y^3}{a}$ $\left(\text{seu } \dfrac{y}{\sqrt{}_c\, a}\right)$ seu quadratura dicta, dabitur ratio eius ad summam $\dfrac{\sqrt{}_c\, y^3}{a}$. seu ad $\dfrac{y}{a}$.

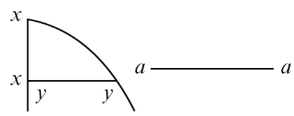
Caeterum ut clarior sit modus quadraturae paraboloeidum compositarum, sic procedendum:

Data aequatione: $x = \sqrt{\dfrac{y^3}{a}}$. substituatur $x = \dfrac{y}{\sqrt{a}}$. Iam summa omnium y inveniatur more communi, cuius ratio ad a^2. cum nota sit β. fiet summa omnium x. seu $\dfrac{xb}{\gamma} = \dfrac{a^2\beta}{\sqrt{a}}$. Ergo $\dfrac{x^2b^2}{\gamma^2} = \dfrac{a^4\beta^2}{a}$. Quod absurdum, in eo ergo peccatum quod pro $\sqrt{}_q\, \dfrac{y^3}{a}$. substitutum $\dfrac{y}{\sqrt{}_q\, a}$. vel $\dfrac{y}{\sqrt{}_c\, a}$. Neutrum procedit.

Nihil ergo actum est, nisi alia rectior, generaliorque via reperiatur de qua pagina sequenti.

[*Teil 2, gültig*]

Quadratura paraboloeidum generalis



[*Fig. 1*]

Paraboloeidis cuiusque natura aequatione quadam exprimitur qua omnia curvae puncta ad axin basinve determinantur, eam autem aequationem ingreditur parameter seu l a t u s r e c t u m , recta quaedam constans atque invariata (a), distantiam

20 f. parameter seu l a t u s r e c t u m *erg. L*

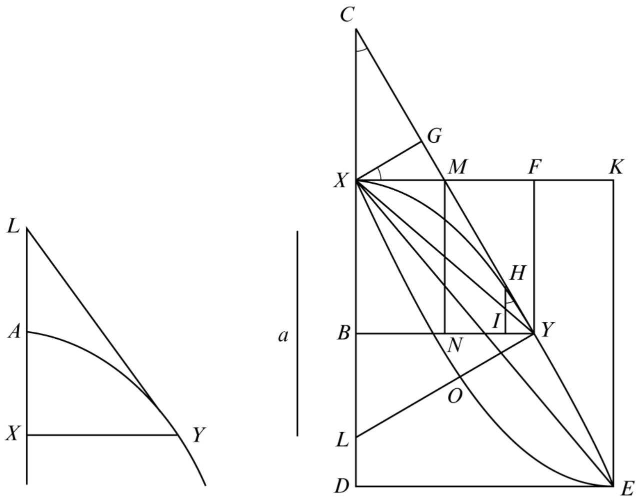
puncti a vertice seu a b s c i s s a m appellabimus (x) BX, distantiam eius ab axe seu a p p l i c a t a m ad axem (y) BY.

His ita positis paraboloeidum genera haec sunt:

$$\begin{array}{cllll}
\begin{array}{c} \frac{1}{3} \\[2ex] \frac{1}{4} \\[6ex] \frac{2}{5} \end{array} &
\begin{array}{l} a\ x = y^2 \\[2ex] \left\{\begin{array}{l} a^2x = \\[4ex] a\ x^2 = \end{array}\right\} y^3 \\[2ex] \left\{\begin{array}{l} a^3x = \\[2ex] a^2x^2 = \\[2ex] a\ x^3 = \end{array}\right\} y^4 \end{array} &
\left.\begin{array}{l} a^4x = \\[2ex] a\ x^4 = \\[6ex] a^3x^2 = \\[2ex] a^2x^3 = \end{array}\right\} y^5 &
\left.\begin{array}{l} a^5x = \\[2ex] a\ x^5 = \\[2ex] a^4x^2 = \\[2ex] a^2x^4 = \\[2ex] a^3x^3 = \end{array}\right\} y^6 &
\begin{array}{l} a\ x = y^2 \\[2ex] a^2x = y^3 \\[6ex] a^3x = y^4 \\[2ex] a^4x = y^5 \end{array}
\end{array}$$

etc.

4–11 *Anmerkungen zur Tabelle:*
gültig: NB. $a^2x^2 = y^4$ frustra diceretur, reducitur enim ad $ax = y^2$. ut et $a^3x^3 = y^6$ ad $ax = y^2$.
$a^4x^2 = y^6$. $a^2x = y^3$.
gestr. neben der 4. Spalte: Area trilinei concavi $\frac{1}{3}$



[*Fig. 2*]

Porro in omnibus istis paraboloeidibus, haec est regula generalis tangentium ducendarum, a geometris praestantibus dudum prodita, nimirum si tangens sit YC. rectam x (BX) fore ad rectam BC, ut est exponens potestatis x (BX) ad exponentem potestatis y (BY). Ideo in parabola communi BC est (2 BX) $2x$, quia cum aequatio sit: $ax = y^2$. patet exponentem x esse 1. exponentem y^2 esse 2.

At hinc se methodus mihi aperuit nova prorsus et admiranda, quadrandi figuram quamcunque, quotiescunque ea eius est natura, ut certa constansque sit ratio CX ad BX, vel BC ad BX. Quae methodus utique infinitas alias figuras comprehendit, quae paraboloeides, sive ex earum, quas tabella in infinitum continuata contineret, genere; non sunt.

Fiat triangulum figurae datae characteristicum, indivisibilium repraesentantium HIY. Ducatur et recta XG perpendicularis ad tangentem CY. seu intervallum tangentis a vertice. Patet triangula CBY et HIB esse similia, angulumque BCI angulo IHY aequalem. Ergo cum angulus XCG (vel BCY) angulo IHY sit aequalis, triangula quoque CGX et HIY similia erunt; ideoque

$$\frac{CX}{HY} = \frac{GX}{IY}, \text{ vel } CX \frown IY = GX \frown HY,$$

id est CX ad basin aequantur intervallis tangentium a vertice seu GX ad arcum, ac per consequens (ut alibi demonstravimus) segmento XY, vel si longius procedas XE, duplicato.

Porro quando rectae CX habent certam et constantem rationem ad rectas BX, etiam summa omnium CX ad basin DE, vel XK, constantem habet rationem ad summam omnium BX (vel FY) ad eandem XK. vel ad aream spatii $XYEK$. Haec ratio esto β. Summa omnium BX, seu area concavi trilinei $XYEK$ quaesita esto: z^2. Ergo

$$\text{summa omnium } CX \text{ erit } \beta z^2, \text{ ac segmentum } XYE \text{ erit } \frac{\beta z^2}{2}.$$

Iam trilineum concavum $XYEK$ segmento XYE auctum constituit triangulum $EXKE$. habemus ergo aequationem:

$$z^2 + \frac{\beta z^2}{2} = \bigtriangledown XKE. \text{ Ergo } z^2 = \frac{\bigtriangledown XKE}{\overline{1+\dfrac{\beta}{2}}}$$

Habemus ergo quadraturam trilinei concavi $XYEK$ quaesitam.

Exemplo veritas demonstrationis statim comprobatur, si curva sit parabolae communis, erit $\beta = 1$. ergo $1 + \dfrac{\beta}{2} = \dfrac{3}{2}$. Ergo $z^2 = \dfrac{\bigtriangledown XKE}{\overline{\dfrac{3}{2}}}$ vel $= \dfrac{\square XE}{3}$.

Innumerae supersunt figurae; eadem methodo quadrabiles, quae in tabula praecedente non continentur, uti, in quibus exponentes sunt ut numeri fracti, aut ut integri ad fractos, v. g. $ax^{\frac{1}{2}} = y$, sed id reducitur ad hanc aequationem: $\dfrac{ax}{2} = x^2$. Sed in haec ulterius inquirendum, et an exponentes numeri surdi esse possint.

Sed quicquid eius sit, illud certe manifestum est, si CX sit ad CB aliter quam integer rationalis ad integrum rationalem, v. g. ut $\dfrac{1}{2}$ ad 1. vel ut $\dfrac{3}{4}$ ad $\dfrac{2}{3}$. vel ut Rq 2. ad 1. quod certe fieri posse manifestum est, patet non ideo minus quadrari figuram, etsi paraboloeidum forma enuntiari non possit.

1 (ut alibi demonstravimus) *erg. L*

14–17 Hier benutzt Leibniz eine neuartige Bezeichnungsweise, wendet diese aber nicht konsequent an. Hinzu kommen Unzulänglichkeiten in der Rechnung. — Derselbe Ansatz tritt erneut in N. 39 S. 627 Z. 18 – S. 630 Z. 2 auf.

Hinc habemus quadraturas innumerabiles figurarum quae a paraboloeidum quadratura non dependent, et operae pretium, naturam aliquot figurarum eiusmodi, aequatione exprimere; quod alias fiet.

Videamus exemplum, si $\dfrac{CX}{(BX)} = \dfrac{Rq\ 2}{1}$. seu $\dfrac{CX}{x} = \dfrac{Rq\ 2}{1}$. seu $CX = Rq\ 2x^2$.

Ergo $CB = x + Rq\ 2x^2$. Iam $(BY) = y$. $\dfrac{XM}{BY} = \dfrac{CX}{CB}$. Ergo $XM = \dfrac{CX \frown y}{CB} = \dfrac{Rq\ 2y^2}{1 + Rq\ 2}$.

Iam $CXM \left(\dfrac{CX \frown XM}{2}\right) = \dfrac{Rq\ 4y^2x^2}{1 + Rq\ 2} = \dfrac{yx}{1 + Rq\ 2}$. $\square XN = BX \frown XM = \dfrac{Rq\ 2y^2x^2}{1 + Rq\ 2}$. $NY = BY - XM. = y - \dfrac{Rq\ 2y^2}{1 + Rq\ 2}$. Sed et tamen $\dfrac{NY}{y} = \dfrac{1}{1 + Rq\ 2}$. quia $\dfrac{NY}{BY = (y)} = \dfrac{XB\ (1)}{CB\ (1 + Rq\ 2)}$. Ergo $NY = \dfrac{y}{1 + Rq\ 2}$.

(Ergo $\dfrac{y}{1 + Rq\ 2} = y - \dfrac{Rq\ 2y^2}{1 + Rq\ 2}$. seu $\dfrac{1}{1 + Rq\ 2} = 1 - \dfrac{Rq\ 2}{1 + Rq\ 2}$. Ergo $\dfrac{1}{1 + Rq\ 2} + \dfrac{Rq\ 2}{1 + Rq\ 2} = 1$. vel $\dfrac{1 + 2Rq\ 2 + 2}{1 + 2 + 2Rq\ 2}$ nota veritatis. NB $\dfrac{a}{a+b} + \dfrac{b}{a+b} = \dfrac{a+b}{a+b} = 1$.)

Iam $\bigtriangledown NMY = \dfrac{yx}{2 + 2Rq\ 2}$. ac denique $CBY = x + Rq\ 2x^2 \frown y = \dfrac{xy + Rq\ 2x^2y^2}{2} = \dfrac{yx + Rq\ 2x^2y^2 + \dfrac{yx}{2}}{1 + Rq\ 2}$. Sed sic ubique y tolli potest nec inde aequatio.

$BL = \dfrac{y^2}{x + Rq\ 2x^2}$. Ergo $BYL \bigtriangledown^{\text{lum}} = \dfrac{y^3}{2x + 2Rq\ 2x}$.

quod $+ \left(\dfrac{yx + Rq\ 2y^2x^2 + \dfrac{yx}{2}}{1 + Rq\ 2}\right) \dfrac{xy + Rq\ 2x^2y^2}{2} = \dfrac{CL \frown y}{2}$.

4–613,12 In diesem Abschnitt versucht Leibniz vergeblich, den Fall eines irrationalen Exponenten zu behandeln, kommt aber trotz verschiedener Ansätze (der letzte zudem fehlerhaft) zu keinem Ergebnis.

Sed $\dfrac{CL}{LY} = \dfrac{[LY]}{BL}$. item $LY = Rq\ y^2 + \dfrac{y^4}{x^2 + 2x^2 + 2Rq\ 2x^4}$. ita veniemus credo ad aequationem.

Vel breviori aequatione [:]

$$\bigtriangledown^{\text{lum}}\ CYL = CL \frown BY \quad \text{vel} \quad \frac{xy + Rq\ 2x^2y^2}{2} + \frac{y^3}{2x + 2Rq\ 2x^2}$$

$$= \frac{CY \frown LY}{2} \qquad \sqrt{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4 + y^2} \frown \sqrt{y^2 + \frac{y^4}{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4}}.$$

Divisis omnibus per y vel $Rq\ y^2$ fiet[:]

$$x + Rq\ 2x^2 = \underbrace{\sqrt{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4 + y^2} \frown 1 + \frac{y^2}{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4}} - \frac{y^2}{2x + 2Rq\ 2x^2}.$$

Dividantur et omnia per x quantum possunt, fiet:

$$1 + Rq\ 2 = \sqrt{1 + 2 + Rq\ 8 + \frac{y^2}{x^2}} \frown 1 + \frac{y^2}{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4} \quad - \quad \frac{y^2}{2x^2 + 2Rq\ 2x^4}.$$

Vel multiplicando rursus sed aliter, per x^2:

$$x^2 + Rq\ 2x^4 = \underbrace{\sqrt{1 + 2 + Rq\ 8 + \frac{y^2}{x^2}} \frown x^2 + \frac{y^2}{1 + 2 + Rq\ 8}} - \frac{y^2}{2 + Rq\ 8}.$$

$$= \sqrt{x^4 + 2x^4 + Rq\ 8x^8 + y^2x^2} + \frac{\sqrt{y^4 + 2y^4 + Rq\ 8y^8 + \dfrac{y^6}{x^2}}}{x^2 + 2x^2 + Rq\ 8x^4} - \frac{y^2}{2 + Rq\ 8}.$$

Caeterum ex eodem principio aliae adhuc quadraturae aperiuntur, non minus late fusae. Nam si summa omnium CX ad basin seu XK applicatorum haberi potest, ut si (non trilineum concavum sed veram) parabolam constituant, quadrari potest segmentum figurae XYE duplicatum, quare et figura.

Ecce aliud[:] Summa omnium XM ad altitudinem; seu summa omnium BN, aequatur itidem segmento figurae duplicato, quod ita facile demonstro[:]

Triangula similia HIY et XGM, quia anguli GXM et IHY aequales. Ergo $\dfrac{XM}{HY} = \dfrac{XG}{HI}$. Ergo $XM \frown HI$ (seu XM ad altitudinem) $= XG \frown HY$. intervallo tangentis ad arcum.

1 BY *L ändert Hrsg.* 12 $\dfrac{\mathrm{y}^2}{2 + \mathrm{Rq}\ 8}$. | Divide rursus per x^2 fiet[:] $1 + \mathrm{Rq}\ 2 = \sqrt{1 + 2 + \mathrm{Rq}\ 8 + \dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{x}^2}}$ *gestr.* | *L*

Et summa XM ad altitudinem = segmento figurae duplicato.

Unde illud quoque apparet[:] habita quadratura omnium XM, ad altitudinem, haberi et quadraturam omnium NY. Vicissim, habita quadratura omnium NY, habetur differentia inter figuram et segmentum duplicatum; est enim [summa omnium] NY differentia inter figuram et segmentum figurae duplicatum seu inter summam omnium BY quae constituit figuram, et omnium BN quae constituit segmentum figurae duplicatum. At differentia inter figuram convexam et segmentum figurae duplicatum est trilineum figurae concavum, quod facile patet: sit enim segmentum XOE introrsum insistens chordae XE, aequale et simile extrorsum insistenti XYE, patet cum aequalia sint tota, triangula XDE et XKE, et ablata segmenta XOE, XYE, etiam residua trilinea concava $XDEOX$ et $XKEYX$ aequalia fore. Est autem trilineum concavum $XDEOX$, residuum figurae convexae $XDEYX$, ablato duplici segmento $XYEOX$; ergo id residuum figurae convexae, demto duplici segmento, triangulo figurae concavo aequale est.

Quare data quadratura omnium NY seu summa earum ad altitudinem, datur quadratura figurae et vicissim.

Hinc nova iterum methodus, qua aliae figurae innumerabiles quadrari possunt, synthetice pariter atque analytice.

Synthetice inquam, cum ex datis figuris quadrabilibus, ut paraboloeidibus, aliisque derivatur quadratura omnium XM, vel omnium NY; analytice cum assumitur certa quaedam progressio quadrabilis omnium v. g. XM, et per analysin investigatur, quaenam sit figura, cuius omnes XM sint assumtae progressionis. Eaque figura ostenditur esse quadrabilis.

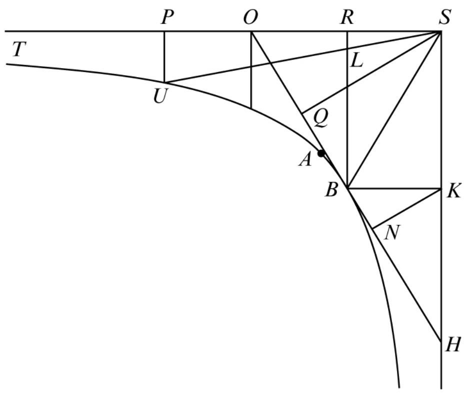
Sed accurate loquendo omnis ista investigatio est synthetica: Nam data figura invenire methodum quadrandi, analyticum est, data methodo invenire figuram, cui methodus applicari possit syntheticum. Nec vero hactenus aliter quam synthetice in geometria transformatrice procedi potest, quoniam series infinitae, inprimis ubi surdae radices interveniunt, per analysin tractabiles non sunt.

Est tamen analysis quaedam succenturiata in his rebus, ut scilicet in figura data methodos omnes, quas hoc loco demonstravi, ac quibus parum admodum ex geometria certe addi potest, quamdiu ipsa arithmetica infinitorum, aut etiam analysis non perficitur. Experiamur.

4 summa omnium *erg. Hrsg.*

$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	$\frac{1}{1}$	
$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{3}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{1}{27}$	$\frac{1}{6}$
$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	etc.	$\frac{1}{10}$
$\frac{1}{5}$	$\frac{1}{25}$	etc.	$\frac{1}{15}$
	$\frac{1}{36}$		
	$\frac{1}{49}$		

Inspiciatur figura hyperbolae aut hyperboloeidis pag. 89 libri Hugenii.



[*Fig. 3*]

1–7 *Tabelle am Rande erg. L*

---

8 Inspiciatur: Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 89. Leibniz hat keine eigene Figur gezeichnet. Die vorliegende Figur hat Hrsg. textkonform unter Berücksichtigung des Leibnizschen Handexemplars rekonstruiert. (Für die vollständige Figur s. N. 2.)

Ibi $SK = KH$. si hyperbola est communis, quia $xy = a^2$. exponentes autem x et y sunt aequales in xy.
Perpendicularis KN ad arcum = ipsi KH ad basin.
Ergo SQ ad arcum = SH ad basin quia dupla priorum, atqui SH ad basin = figurae $BRTAB$ duplicatae.
Et eiusdem dimidium seu simplex ista figura = $SBTS$.
Quod videtur absurdum, x implicans. Sed ratio est, quia tunc ipsa linea ultima ST comprehenditur, quae non comprehendebatur sectori ipsi $SBTR$, nimirum ultima ista linea scilicet dimidia = triangulo SBR, quia rectangulum $SKBR$ = toti lineae ST infinitae.
Si partes tantum sumas res eodem redit. Esto spatium $BRPUAB$ aequalis sectori $SBAUS$ quod non mirum cum UPS sit = BRS. Atque haec quidem si curva $TUAB$ sit hyperbolica communis.

Inquiramus quid futurum sit si sit aliqua hyperboloeidum, v. g. ubi $x^2y = a^3$. quo casu KH duplum SK.
Iam summa omnium SK ad arcum vel duplus sector $SBAUS$ = omnibus SH ad basin quae tripla omnium SK ad basin, seu tripla spatii $BRPUAB$.

Ergo $\quad 2,\ SBAUS = 3,\ BRPUAB$.

seu, quod idem est:

$$2,\ LBAUL + 2,\ SLB = 3,\ LBAUL + 3,\ UPRL.$$

Ergo: $\quad 2,\ SLB - 3,\ UPRL = LBAUL$.

vel $\quad 2,\ SLB - 2,\ UPRL = (LBAUL + UPRL)\ \ BRPUAB$.

Habemus ergo quadraturam spatii hyperboloeidis, $BRPUAB$. Quo posito hyperbolae quoque quadratura omniumque hyperboloeidum in infinitum haberi potest.

8 comprehendebatur *(1)* in figura *(2)* segmento *(3)* sectori L 14 f. duplum SK. *(1)* Ergo SH *(a)* triplum *(b)* $\frac{3}{2}$ KH. ideoque sector SBAUS = *(aa)* $\frac{3}{2}$ BAUPRB. seu LUABL + SLB = $\frac{3}{2}$ LUAB + $\frac{3}{2}$ UPRL. Ergo: SLB = $\frac{1}{2}$ LUAB + $\frac{3}{2}$ UPRL. *(aaa)* Ergo 2, SLB – *(bbb)* $\frac{3}{\cancel{2}}$ UPRL = $\frac{1}{\cancel{2}}$ LUAB. Ergo 2, SLB – 2, UPRL = BAUPR. quo posito haberemus huius hyperboloeidis quadraturam. *(bb)* $\frac{3}{4}$ BAUPRB. Ergo $\frac{1}{4}$ LUABL + ~~SLB~~ = $\frac{3}{4}$ UPRL – SLB. seu LUABL = 3UPRL – 4SLB. vel: (LUABL + UPRL) BAUPRB = 4UPRL – 4SLB. Habemus ergo quadraturam spatii hyperboloeidis BAUPRB. *(2)* Iam L 23 potest. | Tentandumque an ea ratione spatii quoque asymptoti infiniti quadratura haberi queat. Quod ut fiat tantum demonstrandum est, quodnam planum lineae infinitae ST sit aequale. *gestr.* | L

39. DE PARABOLOEIDUM ET HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA III
[Sommer 1673]

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 95–96, 250–251, 138–139 (Text); Bl. 140 (fig. 1. und fig. 2.). 3 Bog. und 1 Bl. 2^{o}. 12 S. sowie zwei separate Figuren. Cc 2, Nr. 555B, 635A, 635B, 692

Datierungsgründe: s. N. 37.

39$_1$. PARS PRIMA. DE PARABOLOEIDUM QUADRATURA

[Prop. 1.]

„ Superficies cylindrica truncata super curva quadam velut basi ita erecta, ut ei cur-
„ vae in puncto quolibet intervallum tangentis sui a vertice, perpendiculariter insistat;
„ aequatur segmento, recta a vertice ad extremum curvae punctum ducta abscisso,
„ duplicato.

8 Prop. 1. *erg. Hrsg.*

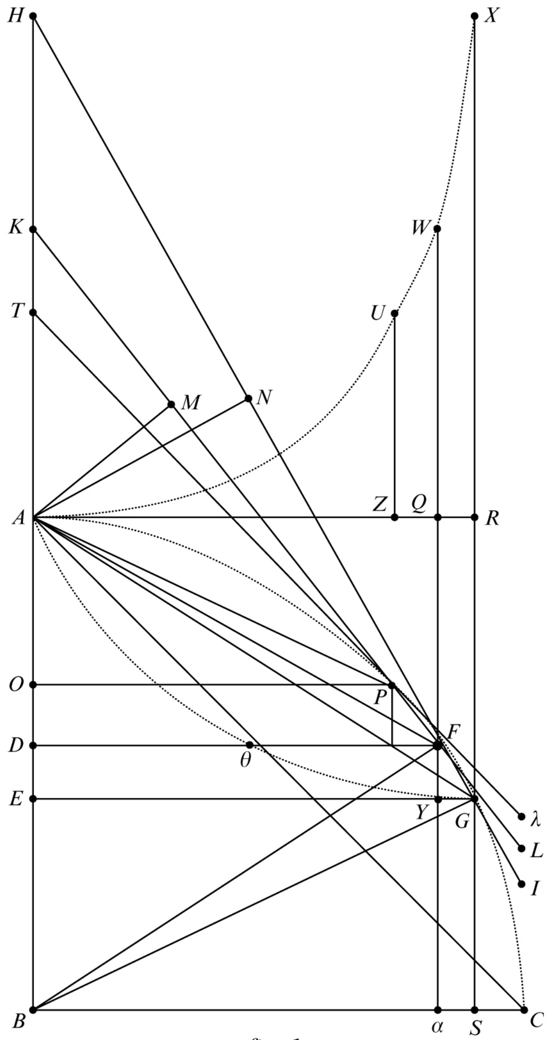


fig. 1.

Esto figura quaelibet ABC cuius altitudo AB in partes numero infinitas sive aequales, sive inaequales, qualis est DE aut OD, quas infinite parvas pono, divisa intelligatur. Et ex punctis divisionis omnibus D. et E. ducantur applicatae, DF. EG, et ad puncta curvae F. G. tangentes HFI, et KPL. quarum a vertice A intervalla sunt perpendiculares ductae a vertice ad tangentes, nempe AM, AN. Haec intervalla tangentium, punctis tangentium suarum cum curva communium, perpendiculariter imponantur, AM puncto F, et AN puncto G. idemque in omnibus curvae AFG punctis fieri intelligatur. Aio portionem superficiei cylindrici recti inde enatam, aequari duplo segmento $AFGA$, recta scilicet AG, verticem A cum extremo curvae, G. connectente; et curva ipsa AFG, contento; idemque est ubicunque punctum ultimum G. in curva AFC assignetur.

Hoc ita demonstro: intelligatur figura data constare infinitis trapeziis, ut $OPFD$, vel $DFGE$, quae scilicet duabus quibusdam applicatis, ut OP et DF, vel DF et EG, parte altitudinis infinite parva, OD, vel DE, ac denique portione quadam tangentium, ut $KPFL$, vel $HFGI$ inassignabili seu infinite parva, nempe ut PF. vel FG, contineantur. Unde fit ut curva in infinitas rectas inassignabiles, ut PF. vel FG, velut latera polygoni irregularis numeri laterum infiniti, fracta intelligatur.

Nunc vero ex vertice A. ducantur rectae ad omnia puncta extrema horum latera, ut AP. AF. AG. quas ad circuli exemplum c h o r d a s appellare possis. Manifestum est totidem oriri triangula, quot sunt latera, quorum vertex in A, basis, ipsum latus, velut APF. AFG. iisque triangulis infinitis totum segmentum AFG compleri. Unde constat figuram huic triangulorum summae aut eius duplo aequalem, ipsi segmento eiusve duplo aequari.

Qualem vero superficiem cylindricam propositam esse, ita facile ostendemus: quoniam constat ex *Elementis* altitudinem, ut AM, vel AN, ductam in basin, ut PF, vel FG duplo trianguli, ut APF, vel AFG aequari, ergo summa omnium rectangulorum, quorum altitudines, intervalla tangentium a vertice, bases vero, latera infinite parva curvam componentia, tangentiumve portiones, vel quod idem est superficies cylindrica, ex intervallis tangentium punctis contactus perpendiculariter impositis conflata, summae omnium triangulorum numero infinitorum duplicatae, id est duplo segmento aequatur. Q.E.D.

1 infinitas *(1)* inter se aequales *(2)* sive *L* 21 aut eius duplo *und* eiusve duplo *erg. L*

1 Esto figura: Die Kurve in der Handzeichnung folgt zuerst der Näherungskurve; in der Umgebung von A ist sie an die Secanslinie angeglichen.

C o r o l l. 1.

„ Si curva proposita in rectam extendatur, cui velut altitudini, intervalla tangentium
„ in punctis contactus applicari intelligantur; figura inde nata eidem segmento, curva
„ inde a vertice sumta, rectaque contento; duplicato; aequabitur.

Quoniam manifestum figuram hanc nihil aliud esse quam superficiem cylindricam supradictam, in planum explicatam.

C o r o l l. 2.

„ Segmentum circuli duplicatum aequatur figurae sinuum versorum arcui applicato-
„ rum, seu momento arcus sui ex puncti extremi tangente librati.

Nam si curva AFG sit arcus circuli, intervallum tangentis a vertice aequatur sinui verso seu abscissae per applicatam DF vel EG ex puncto dato F vel G ductam, ad radium AB in verticem A terminatum, perpendicularem; ut constat, ita AM erit aequale AD, AN erit aequale AE. Ideo in semisegmento $AEGFA$ summa sinuum versorum seu abscissarum ad arcum, seu quod idem est, momentum arcus AFG ex tangente AR (Quod, inquam, idem est, quia intervalla punctorum arcus, ab AR tangente verticis, ut QF, vel RG. aequantur sinubus versis seu abscissis ut AD, vel AE; intervalla autem ab axe librationis ponderanti applicata dant eius momentum.) aequabitur duplo segmento $AFGA$.

Σ χ ο λ. Haec quae de summa sinuum versorum diximus, pulchre conveniunt cum iis quae iam apud alios demonstrata habentur. Illi nimirum ostenderunt momentum arcus AFG ex basi BS seu summam sinuum complementi (qui in circulo ob uniformitatem coincidunt cum sinubus rectis, nisi quod inverse sumantur), arcui suo AFG applicatorum, ut si DB vel EB arcui in punctis F. vel G. perpendiculariter insistere intelligantur, quadrari posse; et radio in maximum eius sinum rectum EG, vel rectangulo AC. id est triangulo AGB duplicato aequari. Et hoc quidem ex dimensione superficiei hemisphaerii Archimedea deducere in proclivi fuit. Cum ergo summa sinuum versorum ut AD ad arcum, det duplex segmentum AFG. et summa sinuum complementi ut DB ad arcum, det duplex triangulum segmento suffultum, ideo summa amborum, $AD + DB$, seu AB. radius, in arcum AFG. aequabitur duplici sectori AFG. quod verum esse dudum constat. Et talia quidem apud eos qui de cycloeide scripsere, Torricellium, Pascalium, Fabrium, Laloveram, legi possunt, velut omnium quae illi demonstravere fundamenta. At doctissi-

25 Et hoc quidem: zur Gesamtproblematik s. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 17–19.

mus geometra, Iohannes Wallisius, ad rem praesentem propius accessit, ipsamque figuram sinuum versorum dimensus est; nostra tamen demonstratio facile prae caeteris se commendaverit, quandoquidem methodi universalis novae non nisi corollarium est; ipsosque recta sinus versos aggreditur, nullo per rectorum ambages circuitu.

P r o p. 2.

„ Figura ex productis ad basin ordinatim recto angulo applicatis nata, aequatur seg-
„ mento duplicato.

P r o d u c t a s appello compendii causa, altitudinem ultra verticem eousque productam, donec occurrat tangenti, qualis est in fig. 1. AH. vel AK, vel AT. id est quicquid in figurae altitudine AB, quantum satis est, producta, inter verticem A, et tangentis occursum H. K. T. cadit; quae si basi AC. vel ei respondenti rectae AR. ordinatim ad perpendiculum applicentur; o r d i n a t i m inquam, id est AH producta, translata in RX, quoniam R in basi, puncto curvae F, cuius tangens FH altitudini BAH productae in H occurrit, ad perpendiculum respondet; eandemque ob causam AK transferatur in QW, et AT in ZU, atque idem ad quodlibet curvae punctum, factum putetur; figura inde conflata $AUWXR$ aequabitur segmento $AFGA$ duplicato.

Quod ut demonstretur, cogitandum est: Triangula FYG et HGB vel HUA esse similia: posito nimirum BG esse perpendicularem ad curvam: atque ideo, ut est AU ad YG, ita erit AH ad FG, unde sequitur rectangulum ex AU in FG, vel quod eodem redit, ut prop. 1. ostensum est, triangulum AFG duplicatum; aequari rectangulo AH in YG. vel rectangulo XR in QR. Eodem modo rectangulum ex WQ in ZQ. triangulo APF duplicato aequabitur. Et quoniam positis YG vel QR. et FG infinite parvis, omnia triangula segmentum $AFGA$ exhauriunt, et omnia rectangula quae dixi, figuram $AUWXR$ complent, ideo figura haec segmento isti duplicato aequabitur.

Σ χ ο λ. Magni sunt momenti huius generis demonstrationes; quoniam nullis figurarum speciebus, nullis figurae propositae partibus continentur; nam et curva AFG cuiuslibet naturae, et punctum ultimum G, in ea utcunque continuata, ubilibet assumi potest.

2 versorum *erg. L* 3 novae *erg. L*

1 Iohannes Wallisius: *Mechanica*, 1672, S. 283–305 (*WO* I, S. 752–766).

Illud tantum admoneri debet, si curva eius sit naturae, ut aliqua applicatarum altitudini perpendicularium, BC. ad ipsam curvam perpendicularis sit, ut in circulo, ellipsi, aliisque ovalium speciebus contingit, tangentem ad punctum hoc C. utcunque productam, nunquam attingere altitudinem BA, utcunque productam; cum sit ei parallela, utraque enim altitudo pariter et tangens est hoc casu ad applicatam BC perpendicularis: quare si in figura productarum $AUWXR$ constituenda, punctum R ipsi C respondere ponatur, recta RX erit infinita, sive quod idem est, extremum eius X distabit a basi BR recta maiore quam quae assignari possit, spatiumque $AUWXR$ erit asymptotum longitudinis infinitae, sed finitae magnitudinis, cum non nisi segmento $AFCA$ duplicato aequetur.

Quodsi curva AFG sit arcus circuli, et AFC arcus quadrantis; manifestum est spatium $AUWXSB$ aequari sectori $AFGB$ duplicato: et si R ipsi C respondeat, seu si recta RX sit infinita, spatium $AUWXCB$ quanquam infinite longum aequabitur semicirculo. Et hanc quidem appellare soleo f i g u r a m   a n g u l o r u m , item h y p e r b o l a m f a l s a m , quemadmodum enim portiones spatii asymptoti hyperbolici sunt ut logarithmi, ut ex praeclaro P. Gregorii a S. Vincentio theoremate primus P. Sarrasa deduxit; ita portiones spatii asymptoti huius figurae sunt ut arcus sive anguli, ductisque rectis parallelis, eadem proportione secantur; posito enim rectam QF vel RG esse magnitudinis cuiusdam assignabilis, erit ut arcus circuli AF ad arcum AG, vel angulus ABF ad angulum ABC. ita spatium $BAUW\alpha$ ad spatium $BAUXS$.

Hyperbolen autem falsam cur vocem manifestum est, quia eaedem secantes, ut BH. vel BK, quae altitudini AB in punctis ut D. E. ad perpendiculum ordinatim applicatae hyperbolen formant, punctis baseos BC. ut α. vel S. impositae dant quam dixi figuram angulorum.

Eodem modo data qualibet curva inveniri potest figura quae eadem cum curva ratione secetur.

P r o p. 3. P r o b l e m a

„ Parabolam et paraboloeides in universum omnes et figuram quamlibet quadrare, in
„ qua p r o d u c t a ad a b s c i s s a m habet eandem semper rationem certam atque
„ constantem.

In eadem f i g. 1. esto curva AFC parabolae, aut paraboloeidis, aut alterius cuiusdam figurae, in qua productae sunt abscissis proportionales, seu in qua AT est ad AO,

---

15 deduxit: A. A. de Sarasa, *Solutio problematis*, 1649, S. 5–17.

ut AK ad AD. Nam in parabola quidem communi productae sunt abscissis aequales; in caeteris, proportionales. Et placet tabulam aequationum, quibus natura paraboloeidum exprimitur, hoc loco exhibere, unde eadem opera ratio abscissarum ad productas in unaquaque apparet. Cumque harum figurarum aequationes, applicatarum ad abscissas relationem exhibentes, ingrediantur rectae quaedam constantes et invariatae, quas parametros aut latera recta appellare solent, eas appellemus (a). abscissas ut AO, vel AD, (x). applicatas ut OP, vel DF, (y). Tabula vero haec erit.

2 proportionales. *(1)* Quod ut appareat tabulam paraboloeidum, qualem iam dudum geometra nobilis Christianus Hugenius in suo de Horologiis oscillatoriis tractatu novissimo, posuit; placet huc transferre, et qua *(2)* Et L 6 (a). *(1)* distantiam puncti in curva assunti a vertice, seu *(2)* abscissas L

2 *Zur Variante:* Zunächst wollte Leibniz die Huygens'sche Tabelle der Paraboloide, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 88 (*HO* XVIII S. 237), heranziehen, hat dann aber gemerkt, dass diese hier nicht passt.

[*1. Fassung, gestr.*]

Tabula Paraboloeidum

$$
\begin{array}{llcll}
 & \text{quadratica seu communis} & & ax & = y^2 \\[1em]
\text{cubica} & \begin{array}{l}\text{simplex}\\[0.5em] \text{quadratiformis}\end{array} & & \begin{array}{l} a^2x \\[0.5em] ax^2 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{l} a^2x \\[0.5em] ax^2 \end{array}}\right\} = y^3 \\[1.5em]
\text{(seu } ax = y^2\text{)} & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \begin{array}{c} \\ * \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} a^3x \\ a^2x^2 \\ ax^3 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{l} a^3x \\ a^2x^2 \\ ax^3 \end{array}}\right\} = y^4 \\[1.5em]
 & & & \begin{array}{l} a^4x \\ a^3x^2 \\ a^2x^3 \\ ax^4 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{l} a^4x \\ a^3x^2 \\ a^2x^3 \\ ax^4 \end{array}}\right\} = y^5 \\[1.5em]
\begin{array}{l} \\ \text{(seu } a^2x = y^3\text{)} \\ \text{(seu } ax \;\; = y^2\text{)} \\ \text{(seu } ax^2 = y^3\text{)} \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \\ \end{array} & \begin{array}{c} \\ * \\ * \\ * \\ \\ \end{array} & \begin{array}{l} a^5x \\ a^4x^2 \\ a^3x^3 \\ a^2x^4 \\ ax^5 \end{array} & \left.\vphantom{\begin{array}{l} a^5x \\ a^4x^2 \\ a^3x^3 \\ a^2x^4 \\ ax^5 \end{array}}\right\} = y^6 \\[1.5em]
 & & & \text{etc.} & \\
 & & & \text{etc.} &
\end{array}
$$

Unde nonnulla satis notatu digna primo aspectu apparent, primum, parabolarum quadraticarum esse speciem unam, cubicarum duas, quadrato-quadraticarum tres u n a d e m t a (quae stella notata est), surdesolidarum quatuor, cubico-cubicarum quinque u n a rursus, stellata, d e m t a . Sive, quadraticarum esse speciem unam, cubicarum et

2 *Zur Tabelle:* $*$ *nebst zugehörigen Klammereinschüben erg. L* 24 (quae stella notata est) *erg. L* 25 u n a |rursus, stellata, demta *erg., ändert Hrsg.*| d e m t a *L*

quadrato-quadraticarum duas; surdesolidarum et cubico-cubicarum tres; atque ita porro, regula generali, ut tot sint species paraboloeidum dimensionis cuiusdam propositae, exponentem habentis numerum imparem vel parem, quot sunt unitates in exponente pari, proxime minori. Cur autem ab iis dimensionibus quae exponentes habent pares, una species stellata adimatur manifestum est; quoniam stellata per extractionem radicis ad dimensionis cuiusdam inferioris speciem iam ante nominatam nimirum ad primam reduci potest. Ita ex aequatione $* \, a^2x^2 = y^4$. per extractionem radicis quadratae fit, $ax = y^2$, et ex $* \, a^3x^3 = y^6$. fit per extractionem radicis cubicae aequatio eadem quae ante $ax = y^2$. Sed haec impraesentiarum persequi nihil attinet.

Illud tantum quod ad nostrum institutum facit, cuiusque causa tabulam attuli nunc exponendum est, nimirum methodum tangentium, ad has curvas ducendarum, a geometris praestantibus hanc esse, dudum proditam, ut sicuti est exponens potestatis x abscissae, ad exponentem potestatis y applicatae, ita sit ipsa x abscissa, ut in figura nostra recta AD, ad rectam DK, ex abscissa AD, et producta ad tangentem usque, recta scilicet AK, compositam.

Hinc iam illud apparet infinitas esse alias figuras, quae eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula paraboloeidum utcunque continuata non contineantur, ut si recta DK, sit ad abscissam AD, ut numerus surdus ad integrum, vel ut integer ad surdum, vel ut surdus ad surdum; neque enim potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, v. g. $y^{Rq6} = ax^{Rq6\,-\,1}$. nisi quis forte methodum in veniat, tollendi irrationalitatem, quod fieret ducendo ipsum $ax^{Rq6\,-\,1}$ toties in se, quot in Rq 6 sunt unitates, fieret y^6. sed altera aequationis pars non ideo statim ab aequatione *(!)* liberata foret cum fiat $y^6 = a^{Rq6}\, x^{6\,-\,Rq6}$. Quare huius generis figuras paraboloeidum more, hac quidem methodo enuntiare difficillimum fuerit. Forte putet aliquis methodo

4 minori *(1)* : et tot sint species paraboloeidum dimensionis cuiusdam exponentem habentis numerum parem, quot sunt exponentes dimensionis proxime inferioris, *(2)* . Cur *L* 6 nimirum ad primam *erg. L* 24 fuerit *(1)* , sed ut enuntiari tamen geometrico more possint; adhibenda est methodus a me alibi tradita de inveniendis applicatis ex datis productis. Quae si succedit hoc loco, nobisque aequationem geometrice enuntiatam praebet, eum inde ducemus fructum sane ingentem, ut et inexpectatum, ut enuntiationes huiusmodi plane irregulares et intractabiles, reducamus ad formulas usitatas; quemadmodum, si exponentes sint numeri fracti, facilis reductio est, ponamus enim aequationem hanc esse: $\mathrm{ax}^{\frac{1}{2}} = \mathrm{y}^{\frac{2}{2}}$, ea ad hanc aequationem revocari posset: $\mathrm{ax} = \mathrm{y}^2$, *(a)* si modo regula illa de ration *(b)* quoniam exponens x. ad exponentem y. est ut 1. ad 2. Meminisse tamen debemus eandem plane rationem abscissarum ad applicatas in diversis generibus figurarum paraboloeidum *(2)* . Forte *L* 24–626,1 methodo | quadam certa *gestr.* | quam *L*

quam alibi explicui, ex datis productis, quaerendi applicatas, eiusmodi aequationes irregulares ad communes formulas reduci posse. Sed considerandum est iisdem licet positis productis, diversas esse posse applicatas, nec proinde problema satis esse determinatum, nam in duabus paraboloeidibus quarum una aequationem habet $a^2x = y^3$, altera aequationem [*bricht ab*]

[*2. Fassung, gültig*]

[*Tabelle, s. S. 628 und S. 629*]

Ubi nonnulla, notatu satis digna, primo aspectu apparent. Ac primum, parabolarum quadraticarum f o r e speciem unam, cubicarum duas, quadrato-quadraticarum tres, surdesolidarum quatuor, cubico-cubicarum quinque; f o r e , inquam, nisi eae species stella notatae adimendae essent, in quibus aequationes deprimi possunt, quod fit quando potestatum omnium aequationem ingredientium exponentes habent unum divisorem communem,

ita	$a^2x^2 = y^4$	$a^4x^2 = y^6$	$a^3x^3 = y^6$	$a^2x^4 = y^6$
dat	$ax = y^2$	$a^2x = y^3$	$ax = y^2$	$ax^2 = y^3$.

Unde fit, ut quotiescunque exponens potestatis x habet divisorem communem cum exponente potestatis y. Idem divisor etiam exponenti potestatis a applicari possit, quia exponentes potestatum a et x iuncti faciunt exponentem potestatis y. Quare ut abscissa ad applicatam datam quandam habeat rationem certam atque constantem, non nisi in una figurae paraboloeidis specie contingere potest, et si quidem in alia contingere posse videtur, ea ad priorem reduci potest.

---

7 *Zur 2. Spalte der Tabelle:* $\dfrac{1}{\beta}$ ratio productae ut AK ad abscissam ut AD, ut est exponens potestatis (a) ad exponentem potestatis (x).
Zur 4. Spalte der Tabelle: Valor trili⟨nei⟩ parabo⟨lici⟩ $AFGR$, portione ⟨rectanguli⟩ circumscripti E⟨R aliquota,⟩ $ER = b^2$; expressus.

---

1 alibi explicui: vgl. dazu N. 18. Leibniz spielt darauf noch einmal S. 630 Z. 8 an. 22–25 Zu den Ergänzungen zu Spalte 2 und 4 s. u. S. 630 Z. 18–22 sowie S. 631 Z. 8–11.

Quibus intellectis exponamus regulam, cuius causa tabulam attulimus, quae haec est, ex methodo tangentium ad huius generis curvas ducendarum, a praestantissimis geometris dudum prodita:
ut sicuti est exponens potestatis ipsius a. lateris recti, ad exponentem potestatis ipsius x. abscissae AD, ita sit producta AK ad ipsam x. seu abscissam AD.
Nec quisquam metuat, ne forte eadem exponentium y et x ratio in diversae speciei curvis obtingat, v. g. in aequatione $a^2x^2 = y^4$, et $ax = y^2$, quia, ut dixi, aequatio illa ad hanc reduci potest.

Hinc iam illud apparet, infinitas esse alias figuras, quae eadem problematis nostri methodo quadrari possint, quanquam tabula paraboloeidum utcunque continuata non contineantur, ut si producta AK sit ad abscissam AD, ut numerus integer ad surdum, vel ut surdus ad integrum, vel ut surdus ad surdum. Nam si ponatur AK ad AD, exempli gratia, ut 1. ad Rq 6. $-$ 1. figura paraboloeidum more ex regulae allatae praeceptis tractata daret hanc aequationem: $y^{Rq\ 6} = ax^{\overline{Rq\ 6}\ -1}$. ubi y et x ad dimensiones quasdam imaginarias, quales inter quadratum et cubum, cubum et quadrato-quadratum, aliasque potestates mediae fingi possunt, ascendunt. Quas vero formulas ad communem enuntiandi rationem revocare, non adeo expeditum opinor futurum est.

Annotabit forte aliquis numeros fractos surdorum loco adhibitos eandem facturos difficultatem, ut si aequatio sit $ax^{\frac{1}{2}} = y^{\frac{3}{2}}$. ascendi ad imaginarios. Sed sciendum est $x^{\frac{1}{2}}$ idem esse, quod $\frac{x}{2}$. et $y^{\frac{3}{2}}$ idem esse $\frac{y^2}{2}$. ac proinde hanc formulam ad communem illam $ax = y^2$. reduci. Idemque apparet ex ratione productae AK ad abscissam AD, quae si intelligatur esse ut numeri integri ad fractum, aut fracti ad integrum, aut fracti ad frac-

4 exponens *(1)* potestatis (y) | applicatae DF. *erg.* | ad exponentem potestatis (x) | abscissae AD. *erg.* |, ita sit *(a)* composita ex abscissa *(b)* in figura nostra prima recta KD (composita ex *(aa)* abscissa DA, et *(bb)* producta KA, et abscissa AD) *(2)* potestatis *L* 12 surdum *(1)* ; neque enim potestates enuntiari possunt, quarum exponentes sint numeri surdi, ut exempli gratia: $\mathrm{y}^{\mathrm{Rq}\ 6} = \mathrm{ax}^{\overline{\mathrm{Rq}\ 6}-1}$. Quomodo enim y. toties in seipsum duci intelligemus, quot sunt in Rq 6. unitates, cum Rq 6. non sit unitati commensurabilis? *(a)* Sane nisi sit aliqua reducendi ratio *(b)* Sane figuras talium aequationum geometrice describere difficillimum arbitror, nisi aliqua reductio adhibeatur. *(c)* Quae sane ex communibus algebrae legibus *(aa)* difficillima futu *(bb)* quam *(2)* . Nam *L* 17 opinor *erg. L*

18–630,2 Leibniz greift auf die Bezeichnungsweise von N. 38 zurück, aber auch hier leidet die Betrachtung unter Unzulänglichkeiten in der Rechnung.

Tabula

	Aequationes					
	$y^2 =$	$a\ x$		....	$\frac{1}{1}$	....
	$y^3 =$	$a\ x^2$		....	$\frac{1}{2}$	....
		a^2x		....	$\frac{2}{1}$	....
	$y^4 =$	$a\ x^3$		....	$\frac{1}{3}$	....
(seu $ax = y^2$)		a^2x^2	*	....	$\frac{2}{2} = 1$	....
		a^3x		....	$\frac{3}{1}$	....
	$y^5 =$	$a\ x^4$		....	$\frac{1}{4}$	....
		a^2x^3		....	$\frac{2}{3}$	....
		a^3x^2		....	$\frac{3}{2}$	....
		a^4x		....	$\frac{4}{1}$	....
	$y^6 =$	$a\ x^5$		....	$\frac{1}{5}$	....
(seu $ax^2 = y^3$)		a^2x^4	*	....	$\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$	....
(seu $ax = y^2$)		a^3x^3	*	....	$\frac{3}{3} = 1$	....
(seu $a^2x = y^3$)		a^4x^2	*	....	$\frac{4}{2} = 2$	....
		a^5x		....	$\frac{5}{1}$	....

etc.

etc.

Paraboloeidum

N o m e n c l a t u r a

quadratica	seu communis	$\left(\frac{2b^2}{6}\right)$	$\frac{b^2}{3}$								
cubica	quadratiformis			$\frac{2b^2}{5}$							
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{8}\right)$	$\frac{b^2}{4}$		$\left(\frac{1}{4}b^2\right)$						
quadrato–quadratica	cubiformis			$\frac{3b^2}{7}$							
	quadratiformis				$\frac{2b^2}{6}$	$\left(\frac{1}{3}b^2\right)$					
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{10}\right)$	$\frac{b^2}{5}$				$\left(\frac{1}{5}b^2\right)$				
surdesolida	$\square^{\text{to}}\ \square^{\text{ti}}$ formis			$\frac{4b^2}{9}$							
	cubiformis				$\frac{3b^2}{8}$						
	quadratiformis						$\frac{2b^2}{7}$				
	simplex	$\left(\frac{2b^2}{12}\right)$	$\frac{b^2}{6}$						$\left(\frac{1}{6}b^2\right)$		
quadrato–cubica	quadrato–cubiformis			$\frac{5b^2}{11}$							
	quad. quadratiformis				$\frac{4b^2}{10}$	$\left(\frac{2b^2}{5}\right)$					
	cubiformis						$\frac{3b^2}{9}$	$\left(\frac{1}{3}b^2\right)$.			
	quadratiformis								$\frac{2b^2}{8}$	$\left(\frac{1}{4}b^2\right)$	
	simplex		$\frac{b^2}{7}$								$\left(\frac{1}{7}b^2\right)$

15 *(1)* cubico- *(2)* quadrato-cubica *L*

tum, semper revocari potest ad rationem integri ad integrum; ut si AK ad AD sit, ut $\frac{3}{4}$ ad $\frac{1}{6}$. perinde est ac si diceretur esse ut 18 ad 4.

At si ratio sit ut *Rq* 6. ad 1. utique aequatio ad paraboloeidum formulam concepta eam, quam dixi, irregularitatem, nunquam exuet: neque enim nisi unquam surdus ad numerum erit ut numerus ad numerum.

Ut vero figura tali aequatione formata quam geometricam esse negari non potest, cum tangentes eius duci possint, communi more enuntiabilis, ac continuo quodam motu descriptibilis reddatur, adhibenda est methodus a me inventa, et alibi tradita, inveniendi applicatas ex datis productis.

Posito regulam, de eadem in talibus aequationibus ac figuris ratione linearum AK ad AD, quae est exponentium a et x esse adeo universalem, ut obtineat tunc quoque, cum ratio linearum surda est. Quod nunc excutere non vacat.

Ita enim ex ea methodo praeter alios ingentes, hunc quoque fructum capiemus, ut aequationes eiusmodi plane irregulares et intractabiles ad formulas usitatas reducantur, quod nescio an ulla algebrae arte fieri semper possit.

Et fortasse maior inde lux ad surdas tractandas, quae hactenus leges a nobis recusant, oriri potest.

Ut autem figurarum eiusmodi omnium quadrandarum rationem universaliter demonstremus, rationem illam constantem abscissae AD ad productam AK appellemus β. ita ut producta multiplicata per β det abscissam, et abscissa divisa per β productam. Aream trilinei concavi $AFGR$. quod figurae datae $AFGE$ supplemento est ad rectangulum ER. appellemus z^2. et rectangulum ER vocemus b^2. Constat autem hoc trilineum concavum esse summam omnium abscissarum ad AR perpendiculariter ordinatimque applicatarum: AO translata in ZP. et AD in QF. et AE in RG. etc. Quod si iam abscissae sunt productis proportionales, sive si abscissae ad productas respondentes, eandem semper habent rationem [quae β ad 1], etiam summa abscissarum $AUWXR$, vel per p r o p. 2. segmentum duplicatum [$AFGA$]. erit ut [β ad 1]. Ergo[:]

13–15 *Daneben großes* NB.

6 f. quam geometricam ... communi more *erg. L* 10 in ... figuris *erg. L* 12 Quod ... vacat. *erg. L* 26 rationem *(1)* β *(2)* quae 1 ad β *L ändert Hrsg.* 27+631,3 AFGθA *L ändert Hrsg. zweimal* 27 1 ad β *L ändert Hrsg.*

$2z^2$ (trilineum concavum $A\theta GE$ + trilineum concavum simile et aequale $AFGR$) $+\dfrac{z^2}{\beta}$ (segmentum duplicatum $[AFGA]$) $= b^2$ (rectangulo ER. quia duplex trilineum concavum cum duplici segmento totum rectangulum ER complent). Ergo

$$z^2 = \frac{b^2}{2+\dfrac{1}{\beta}}. \quad \text{Q. E. F.}$$

Hoc est[:]

Rectanguli (ER) pars aliquota, a numero ex binarii et alterius numeri $\dfrac{1}{\beta}$ rationem productae ad 1. abscissam exprimentis additione orto, denominata trilineo figurae concavo ($AFGR$) aequatur.

Exemplo veritas regulae statim confirmatur. Si curva sit parabolae communis, erit $\beta = 1$. ergo $z^2 = \dfrac{b^2}{2+1=3}$.

T a b u l a vero qua V a l o r e s t r i l i n e o r u m continentur secundum hanc regulam supputata, mirabiles detegit rerum naturae harmonias, quae profunda potius meditatione sentiuntur, quam paucis verbis satis libantur. Introducam tamen, atque aditum menti his dapibus inescatae dabo.

Ac primum illud animadverto, si ut solent facere primum aequationes stellatas, quae in alias dudum positas reducebantur, eliminassem; deinde recto ordine valores sibi invicem subrogassem, nullis velut gradibus atque generibus constitutis; pro pulchra quadam serie, harmoniae plena, rude nescio quid atque indigestum reportassem, in quo nec suspicio concinnitatis restaret.

Deinde illud consideratione dignum arbitror, esse in quolibet parabolarum gradu, velut inter ipsas cubicas aequationis y^3, aut quadrato-quadraticas aequationis y^4, alias aliis simpliciores. Atque eas nimirum, in quibus abscissa nulla potestate affecta est, ut

6 f. Q. E. F. *(1)* Hoc est: binario numeri rationem abscissae ad productam exprimentis (integri vel fracti, rationalis vel surdi) accessione aucto, | rectanguli ER *erg. u. gestr.* | pars aliquota secundum numerum productum rectanguli ER est *(2)* Hoc *L*

$ax = y^2$, vel $a^2x = y^3$, vel $a^3x = y^4$, vel $a^4x = y^5$, vel $a^5x = y^6$, etc. esse caeteris simpliciores, unde et trilineorum valores simplicissime exprimuntur, sunt enim tertia, quarta, quinta, sexta, septima portio rectangulorum. Atque huius generis paraboloeides propemodum solae vulgo considerantur. Certe non nisi istarum quadraturas ab aliis demonstratas legi. Caeteras uspiam exstare aut demonstratas, aut saltem indicatas, non memini.

Has vero simpliciores ita communiter explicare solent[:] Parabolae quadraticae, applicatas ad axem seu basi parallelas, esse in subduplicata ratione altitudinum, cubicae (simplici scilicet, sed quae vulgo sola nominatur) in subtriplicata, quadrato-quadraticae in subquadruplicata, et ita porro. Contra sumto trilineo, et in eo applicatis ad basin seu axi parallelis; quadraticae applicatas esse in duplicata, cubicae in triplicata, quadrato-quadraticae in quadruplicata ratione altitudinum.

Subtilissimus Wallisius vocat elementa huiusmodi in trilineo seu ordinatim ad altitudinem uniformiter crescentem applicatas axi parallelas: primanos, secundanos, tertianos, quartanos; vel in ipsa parabola, axi applicatas: subprimanos, subsecundanos, etc. Quemadmodum in hyperbola et hyperboloeidibus, primanorum, secundanorumve, vel subprimanorum, subsecundanorum reciprocos.

Atque ita factum est, ut de simplicium tantum paraboloeidum quadratura cogitaretur, praesertim cum illi omnes, qui hactenus seriebus numerorum respondentibus in unam summam colligendis operam dedere, quos inter novissimus pene ac subtilissimus omnium *Trianguli arithmetici* autor Pascalius eminet, non nisi numerorum quos vocant triangularium, pyramidalium, etc., itemque quadratorum, cuborum, altiorumque potestatum summam collegerint.

At vero ad summam seriei eiusmodi ineundam sive finitam sive infinitam:

$$1 \quad Rq\,8. \quad Rq\,27. \quad \underset{=8}{Rq\,64.} \quad Rq\,125. \quad Rq\,216.$$

qua radices quadratae numerorum cubicorum exhibentur, aut ad habendam summam seriei talis:

$$1 \quad Rcub.\,4. \quad Rc.\,9. \quad Rc.\,16. \quad Rc.\,25. \quad Rc.\,36.$$

4–6 Certe ... non memini: Zur Problematik der Quadratur der höheren Parabeln und Hyperbeln vgl. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 55–57. 13 Wallisius vocat: *Mechanica*, 1672, S. 144 f. (*WO* I, S. 665 f.), bzw. *Arithmetica infinitorum*, 1656, S. 35 u. 54 (*WO* I, S. 384 u. 390).

ex radicibus cubicis numerorum quadratorum, nemo unquam vel aspiravit. Quarum utraque ex quadratura paraboloeidis cubicae compositae seu quadratiformis (nam ex parabolis cubicis non nisi una composita est) manifeste pendet; cuius scilicet aequatio est $ax^2 = y^3$.

Unde aequatio duplex; una:

$x = \surd_q\, \dfrac{y^3}{a} = \dfrac{\surd_q\, y^3}{\surd_q\, a}$, unde posito $y = 1$. vel 2. vel 3. etc. et $a = 1$. fiet:

Rq 1. *Rq* 8. *Rq* 27. etc.

altera aequatio:

$y = \surd_c\, ax^2$, unde posito $x = 1$. vel 2. vel 3. et $a = 1$. fiet:

Rc. 1. *Rc.* 4. *Rc.* 9.

Ita inter parabolas quadrato-quadraticas, una est cubiformis $ax^3 = y^4$, qua radices cubicae numerorum quadrato-quadratorum; vel quadrato-quadraticae numerorum cubicorum in summam colligi possunt, alia est quadratiformis $a^2x^2 = y^2$, quae coincidit parabolae quadraticae; tertia est simplex, qua summa numerorum quadrato-quadraticorum, vel radicum quadrato-quadraticarum ex numeris naturalibus initur, $a^3x = y^4$.

Quod si caeteras quoque paraboloeides prout cuiusque nomenclatura in tabula est, prosequamur, apparebit nihil huius generis nos effugere posse, qualia certe nemo ab algebra aut simplici arithmetica infinitorum, a geometria separata, speraverit. Et vero cum haec methodus etiam ad finitas series in summam colligendas serviat, poterit eius usus esse ingens in reducendis aequationibus. Saepe enim duae pluresve radices surdae addi poterunt in unam summam aut sibi subtrahi; cum hactenus non nisi dicis causa signa $+$ vel $-$ interposita sint, idque illi si Diis placet additionem subtractionemque vocant. Exempli causa ostendi potest $Rq\ a^2 + Rq\ 2a^2 = \dfrac{4}{3} Rq\ 2a^2$. Ita $Rc\ 9a^3 + Rc\ 16a^3$. in unam quantitatem colligi potest. Quod si termini affecti non sint iidem, ut $Rq\ a^2 + Rq\ 2b^2$, ratioque eorum nota sit, ea ascribatur, ut si b sit $= 3a$. fiet: $Rq\ a^2 + Rq\ 18a^2$. Et haec

10 f. Rc. 9. *(1)* Aliae series | huiusmodi *erg.* | infinitae eadem methodo in summam colligi possunt; quod al *(2)* Ita *L* 20 in *(1)* poliendis *(2)* reducendis *L* 24 f. potest. *(1)* Idemque verum est, si *(2)* | Quod si *(a)* terminorum alio *(b)* termini ... + Rq $2b^2$, *(aa)* vel ne *(bb)* imo si alter sit cognitus *(cc)* ratioque ... + Rq $18a^2$. *erg.* | Et *L*

23 ostendi potest: Diese Aussage trifft nicht zu.

quidem facile fieri possunt, modo termini addendi sint continui alicuius seriei potestatum, id est numerorum naturalium, quadraticorum, cubicorum; nec refert cuius radicis extractio postuletur; nam datis terminis continuis numerorum v. g. cubicorum, summa radicum, sive quadratarum, sive cubicarum, sive quadrato-quadraticarum, sive aliarum, quarumcunque ex illis extractarum in infinitum, iniri potest: modo scilicet eiusdem simul dimensionis radix ex omnibus extrahatur, nam colligere velle $Rq\,2 + Rc\,3$. id hac quidem methodo fieri non potest. Sed nec subtractio radicum promovetur, v. g. $Rq\,3 - Rq\,2$. saepe tamen per transpositionem subtractio in additionem mutari potest in aequationibus.

Quod si termini continui non sint, cogitandum est an continuorum ritu tractari possint arte quadam, v. g. $Rq\ a^2 + Rq\ 3a^2$. Sane fingi potest 1. 3. esse terminos progressionis arithmeticae continuae, cuius intervallum 2. substitui possit in locum 1. salvo alioquin calculo.

Sed haec cum sint momenti sane maximi alias accuratius excutiemus. Quemadmodum illud quoque an non et radices quadraticae, cubicaeve, numerorum triangularium aliorumve, ut pyramidalium, etc. hac methodo iniri possint. Nunc vero possumus tot serierum summa tot figurarum quadratura nove detecta contenti esse.

Caeterum praetereo tot alias quadraturarum nostrarum harmonias, quas attenta tabulae consideratione detegere quivis potest.

At nunc quidem abibo hinc, ubi id unum admonuero, si productae abscissis sint proportionales figuram productarum $AUWXR$ fore figurae abscissarum $AFGR$ homogeneam, ac proinde si AFG sit curva cuiusdam paraboloeidis, curvam $AUWX$ eiusdem specie, quanquam alterius magnitudine (latere quippe recto, mutato) paraboloeidis fore.

P r o p. 4. P r o b l e m a

„ Centrum gravitatis omnium paraboloeidum, et quod hinc sequitur solidorum ab illis
„ revolutione circa axem quemcunque genitorum dimensiones invenire; quadratorum-
„ que, et cuborum, et quarumlibet ab applicatis potestatum summam inire.

Constat invento centro gravitatis, areaque figurae, momentum eius ex axe quocunque, sive solidum circa axem illum genitum haberi. Cumque areas omnium paraboloeidum habeamus restat ut centra gravitatis quaeramus.

Centrum gravitatis datur, dato momento figurae quadrabilis ut $AFGE$, vel $AFGR$. tum ex altitudine AE, tum basi (eiusve opposita) AR. Hoc enim momento per figurae

26 applicatis | cuiuslibet *streicht Hrsg.* | potestatum *L*

magnitudinem diviso, distantia centri, ab axe librationis habetur, habitis autem distantiis eiusmodi duabus centrum habetur.

Momentum figurae ex quodam axe librationis aequatur summae semiquadratorum, quorum latera sunt perpendiculariter figurae. Ita summa semiquadratorum

$$\frac{OP^2}{2} + \frac{DF^2}{2} + \frac{EG^2}{2} \text{ etc. seu omnium } y$$

aequatur momento figurae convexae $AFGE$ ex axe librationis AE.
Eodem modo summa semiquadratorum

$$\left[\frac{RG^2}{2} + \frac{QF^2}{2} + \frac{ZP^2}{2}\right] \text{ etc. seu omnium } x$$

aequatur momento figurae concavae $AFGR$ ex opposita basi AR.
Dato autem momento figurae concavae $AFGR$ ex AR. etiam momentum convexae $AFGE$. ex eadem AR datur; datur enim dudum momentum rectanguli ER, ex recta AR, a quo si momentum cognitum trilinei concavi detrahatur, restabit utique momentum convexi residui.

Aio nunc in omni paraboloeide summam pariter omnium x^2, et omnium y^2 iniri posse. Ac primum y semper est radix, sive quadrata, sive cubica, sive altior quaecunque quam vocabo: $R\beta$. alterius partis aequationis, in qua exponens potestatis ipsius a quicunque γ. et ipsius x quicunque δ. eritque $\gamma + \delta = \beta$. et aequatio figurae haec:

$$y = R\beta\ a^\gamma x^\delta. \text{ et } y^2 = R\beta\ a^{2\gamma} x^{2\delta}.$$

Aio horum: $R\beta\ a^{2\gamma} x^{2\delta}$ summam iniri posse.

Quaeratur aequatio naturam huius figurae solidae exprimens. Quaeratur paraboloeis cuius eadem aequatio est, qualis deesse non potest; ea quanquam plana figurae huic solidae, homogenea est, ac proinde eam habebit rationem figura solida ad prisma eiusdem cum figura solida altitudinis et basis (quod prisma quadrabile est, cum eius

8 $\frac{\mathrm{RX}^2}{2} + \frac{\mathrm{QW}^2}{2} + \frac{\mathrm{ZU}^2}{2}$ *L ändert Hrsg.* 18 $\mathrm{y}^2 =$ *(1)* $\mathrm{R}\beta\mathrm{a}^{\gamma^2}\mathrm{x}^{\delta^2}$. Aio horum: $\mathrm{R}\beta\mathrm{a}^{\gamma^2}\mathrm{x}^{\delta^2}$ summam iniri posse. Nam $\mathrm{R}\beta\mathrm{x}^{\delta^2}$ semper haberi potest, qualiscunque sit exponens β aut δ. ut ex *(a)* figura *(b)* problemate praecedente constat, ut ponamus β esse *(aa)* 5. et δ^2 esse 4. erit $\mathrm{R}\beta\mathrm{x}^{\delta^2}$ radix surdesolida *(bb)* 6. et δ^2 esse 4. erit $\mathrm{R}\beta\mathrm{x}^{\delta^2}$ radix cubico-cubica ex termino quadrato-quadratico, qualium summa iniri potest | ope parabolae cubico-cubicae quadrato-quadratiformis *erg.* |, productum per $\mathrm{R}\beta\mathrm{a}^{\gamma^2}$, quae semper eadem est multiplicetur. Intelligatur figura plana, huic solidae homogenea, in qua sit $\mathrm{y}^2 = \mathrm{a}^{\gamma^2}\mathrm{x}^{\delta^2}$ *(2)* $\mathrm{R}\beta\mathrm{a}^{2\gamma}\mathrm{x}^{2\delta}$ *L* 20 exprimens *(1)* ; nimirum ablegata irrationalitate, omnibusque toties in se ductis, quot in β sunt unitates, fiet aequatio $\mathrm{y}^{2\beta} = \mathrm{a}^{2\gamma}\mathrm{x}^{2\delta}$. *(2)* . Quaeratur *L*

basis, quadratum scilicet maximae y nota sit) quam habet paraboloeis homogenea ad rectangulum eiusdem cum ipsa altitudinis basisque. Habebitur ergo figura haec solida sive quadratorum summa.

Eodem plane modo summa omnium x^2 inibitur, aequatione enim posita

$$y^\beta = a^\gamma x^\delta, \text{ fiet } x = R\delta\, \frac{y^\beta}{a^\gamma} \text{ et } x^2 = R\delta\, \frac{y^2\beta}{a^2\gamma}.$$

Inde aequatio paraboloeidis homogeneae investigetur cuius paraboloeis summae omnium x^2 homogenea est.

Exemplo res fiet manifestior. Esto paraboloeis cubica quadratiformis aequationis

$$ax^2 = y^3. \text{ Ergo } y = Rc\ ax^2. \text{ et } y^2 = Rc\ a^2x^4,$$

patet $y^6 = a^2x^4$. Sed quia applicata hoc loco non est y sed y^2, ideo si fingatur esse y, fiet $y^3 = a^2x^4$, reformanda in istam $y^3 = \frac{x^4}{a}$, vel $y^3a = x^4$, quae figura plana seu paraboloeis quadrato-quadratica cubiformis, figurae omnium y^2, paraboloeidis datae, homogenea est, sunt enim cubi applicatarum y^2 in solida, y in plana, ut quadrato-quadrata abscissarum x.

Eritque summa omnium y^2, seu applicatarum in figura $AFGE$, usque ad maximam $EG_{[,]} = \frac{2EG^3}{7}$, quae dimidiata divisa per aream ipsius paraboloeidis datae $\frac{3EG^2}{5}$ dabit $\frac{5}{21}EG$, distantiam centri gravitatis paraboloeidis cubicae quadratiformis ab axe AE.

Vicissim si summa omnium x^2 in eadem paraboloeide, vel potius trilineo eius concavo ineunda sit, cum sit $y^3 = ax^2$, erit $x^2 = \frac{y^3}{a}$. cuius quidem facile est aliunde inire summam, cum summa omnium y^3, quae haberi potest, per a dividenda sit. Sed ut methodo tamen

9 f. Rc $\mathrm{a}^2\mathrm{x}^4$, *(1)* unde aequatio: $\mathrm{y}^6 = \mathrm{a}^2\mathrm{x}^4$. reducibilis ad | priorem *erg.* | $\mathrm{y}^3 = \mathrm{ax}^2$. Est ergo momentum eius | paraboloeidis *erg. u. gestr.* | seu solidum revolutione circa axem AB. genitum, ipsi figurae hoc loco proportionale, quod alioquin *(a)* non nisi *(b)* et in figura logarithmorum observavi. In eadem paraboloeide $\mathrm{x} = \mathrm{Rq}\,\frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{a}}$. Ergo $\mathrm{x}^2 = \frac{\mathrm{y}^3}{\mathrm{a}}$. Unde aequatio ax^2 *(2)* patet *L* 21 , cum summa ... sit *erg. L*

15 summa omnium y^2: genauer müsste es $\frac{3}{7}\, AE \cdot EG^2$ heißen. Leibiz rechnet mit dem unrichtigen Ergebnis bis S. 637 Z. 10 weiter.

nostrae insistamus, substituta x pro x^2, fiet $x = \frac{y^3}{a}$, et correcta aequatione $xa = \frac{y^3}{a}$, vel $xa^2 = y^3$. Ergo figura plana, solidae omnium x^2 homogenea est parabola cubica simplex, quae cum sit quarta pars sui rectanguli, etiam figura solida omnium x^2, sui parallelepipedi quarta pars erit. Id vero verissimum esse iam tum manifestum est, cum sit $x^2 = \frac{y^3}{a}$. et maximum horum quadratorum $AE^2 = RG^2 = \frac{EG^3}{a} = \frac{AR^3}{a}$. Iam summa omnium y^3, $= \frac{\text{maximum } y^4}{4}$ seu $\frac{EG^4}{4}$. Ergo summa omnium x^2 erit $\frac{EG^4}{4a}$. eorumque dimidium seu momentum omnium x, ex AR, erit $\frac{EG^4}{8a}$. subtractum a momento totius rectanguli ER, $\frac{AE^2 \frown AR}{2}$ relinquet $\frac{AE^2 \frown EG}{2} - \frac{EG^4}{8a}$, momentum figurae convexae $AFGE$, quod per aream eius $\frac{3EG^2}{5}$ divisum, dabit $\frac{5\ AE^2}{6\ EG} - \frac{5\ EG^2}{24a}$ distantiam centri gravitatis figurae $AFGE$, ab AR.

Atque haec quidem methodus centra inquirendi generalis est, et in omnibus paraboloeidibus successura, aliae sunt particulares; cum y in x. vel x in y. cum fructu duci potest, ut in paraboloeide cubica simplici, $a^2x = y^3$, et ideo $x = \frac{y^3}{a}$, erit $xy = \frac{y^4}{a^2}$, id est cylinder trilinei paraboloeidis quadrato-quadratici simplicis, cuius aequatio est $xa^3 = y^4$. Item cum ob aequationem $a^2x = y^3$ sit $y = Rc\ a^2x$, erit $yx = Rc\ a^2x^4$, sed hic manifestum est, non ita facilem exitum esse, nisi methodo a me exposita ad figuras planas homogeneas solidae reducantur.

Operae pretium autem foret, calculum centrorum in his figuris prosequi tabulaque exponere, spes enim est, si recte distinguatur, harmonias quasdam non inelegantes, quales ipse figurarum valor dedit, quaeque pulcherrimae certe sunt, calculi confirmationes, non defore; sed ista nunc prosequi non vacat. Attamen observationes aliquot principales omittere non possum, nimirum:

Momentum omnium x ex vertice, seu xy figurae paraboloeidis simplicis cuiuscunque esse cylindrum trilinei paraboloeidis simplicis proxime altioris. Ita momentum trilinei concavi

3 sui | parallelepipedi *streicht Hrsg.* | rectanguli *L* 21 vacat. *(1)* Lubet tamen spatium relinquere, ut si *(a)* quando otium *(b)* alias per otium attexi possint. Unam hoc loco tantum adicio observationem, *(2)* Attamen *L*

parabolae communis, esse cylindrum trilinei parabolae simplicis cubicae; et ostendimus paulo ante huius quoque trilinei momentum esse cylindrum trilinei parabolae simplicis quadrato-quadraticae; idemque de caeteris intelligendum.

Et huic observationi aliam non absimilem addo, omnes scilicet paraboloeides p e n e s i m p l i c e s , seu simplicibus proximas cuiuscunque gradus (quippe quas ingreditur x^2), habere momentum trilinei ex ipsa AR, basi paraboloeidis BC parallela, homogeneum trilineo figurae plane simplici gradus proxime sequentis, quoniam in talibus $x^2 = \frac{y^3}{a}$ vel $\frac{y^4}{a^2}$ vel $\frac{y^5}{a^3}$ vel $\frac{y^6}{a^4}$ etc. Sunt autem semiquadrata omnium x, seu omnia $\frac{x^2}{2}$ momento earum ex altitudine cui applicatae sunt AR aequalia, ut constat. Rectius dicam non tantum homogenea esse haec solida, illis planis, sed esse eorum cylindros, nam summa omnium $\frac{y^3}{a}$ est cylinder omnium $\frac{y^3}{a^2}$, seu summa omnium x^2, paraboloeidis p e n e s i m p l i c i s , est summa omnium x, paraboloeidis p l a n e s i m p l i c i s , gradus proxime sequentis, ducta in a.

Sed haec cum sint specialia praelibare volui tantum. Ac nunc ad theoremata generalia obiter tradenda accedo.

Ac primum regula fieri potest, elegans admodum et universalis, pro summis omnium y^2 habendis, quae ita habet:

Data paraboloeide in qua summa omnium y^2 quaeritur. Ad habendam novam paraboloeidem summae omnium y^2 homogeneam, distinguendi sunt duo casus, nam, aut exponens ipsius x est maior, quam ipsius a, aut minor vel aequalis.

Si maior, tunc ita procedendum est:

Ipsius y potestati ascribatur exponens duplicatus potestatis ipsius x in aequatione paraboloeidis datae occurrens, et ipsius a potestati ascribatur exponens differentiae exponentium x et a, et habebitur aequatio paraboloeidis homogeneae solido cuius quadratura quaeritur.

Ita esto paraboloeis $ax^3 = y^4$, fiet: $y^6 = a^2x^4$ ac proinde paraboloeis cubico-cubica [quadrato]-quadratiformis erit figurae omnium y^2, paraboloeidis quadrato-quadraticae

14 f. Sed ... accedo. *erg. L* 18–21 Ad habendam ... procedendum est: *erg. L* 24 x et a | et quod tamen omitti quoque potest, uterque ducatur in exponentem ipsius y priorem *erg. u. gestr.* |, et *L* 27 quadrato- *erg. Hrsg.*

cubiformis homogenea. Ratio haec est, cum sit

$$ax^3 = y^4. \text{ erit } Rqq\ ax^3 = y. \quad \text{et} \quad Rqq\ a^2x^6 = y^2.$$

Hic habemus primum exponentem x duplicatum, nempe 6 ex 3, estque $Rqq\ a^2x^6$ planum seu secundae dimensionis, et summa omnium solidum. Cui solido, ut planum homogeneum habeatur, dividatur eousque per a. donec ista Rqq praesens in lineam transeat. Productum enim manebit homogeneum priori, quia a cum sit perpetuo eadem, non variat rationes. Dividenda est ergo quantitas a^2x^6 per a. dimidio exponentium numero affectum, seu per a^4. fiet $Rqq\ \dfrac{a^2x^6}{a^4}$. vel $Rqq\ \dfrac{x^6}{a^2}$. Est enim (2) differentia inter (4) dimidium summae $(2+6)$, et partem minorem (2), eadem cum (2) differentia inter terminos (4 et 2) maiorem et minorem dimidiatos (seu 3 et 1 exponentes in aequatione data, potestatum x et a). Nam $\dfrac{a+b}{2} - b = \dfrac{a+b-2b}{2} = \dfrac{a}{2} - \dfrac{b}{2}$. Iam cum sit $y = Rqq\ \dfrac{x^6}{a^2}$, eliminata irrationalitate fiet $\dfrac{x^6}{a^2} = y^4$, atque ideo $x^6 = y^4a^2$, vel potius; sumendo y pro termino cuius unius potestas potestati duorum caeterorum terminorum aequatur $y^6 = a^2x^4$.

Si vero exponens potestatis a sit maior exponente potestatis x vel ei aequalis, exponens potestatis (non y) sed x duplicetur, et summa exponentium datorum x et a, ab exponente a dato duplicato subtracta, residuum ipsi a ascribatur.

Ut esto paraboloeis, surdesolida quadratiformis, aequationis $a^3x^2 = y^5$. fiet aequatio paraboloeidis solido omnium y^2 homogeneae, $x^4a = y^5$. quae est surdesolida quadrato-quadratiformis. Nam quoniam ob aequationem datam

$$y = R\,5\ a^3x^2. \text{ erit } y^2 = R\,5\ a^6x^4.$$

hinc habemus exponentem x duplicatum. Iam ut figuram planam homogeneam inveniamus, dividamus a^6x^4 per a toties in se ductum, donec $R\,5\ a^6x^4$ fiet linea, id est per a, exponente, omnium exponentium $6+4$, dimidio, $3+2=5$, id est summa exponentium

4 dimensionis, *(1)* id *(2)* et ... solido *L* 5–7 lineam *(1)* finit *(2)* transeat. | Productum ... rationes. *erg.* | Dividenda *L* 12 fiet *(1)* $\dfrac{x^{24}}{a^8} = y^4$ *(a)* sive x^{24} *(b)* (unde patet ad eliminandam rationalitatem *(!)* exponentes productos 6. et 2. in exponentem ipsius y. datum, hoc loco 4. ducendos) atque ideo $x^{24} = y^4a^8$, vel potius; sumendo y pro termino cuius | unius *erg.* | potestas potestati duorum caeterorum terminorum aequatur $y^{24} = x^4a^8$, vel *(2)* $\dfrac{x^6}{a^2} = y^4$ *L* 13 f. $y^6 = a^2x^4$. | Unde patet in his casibus non opus esse, ut *gestr.* | Si *L* 18 est *(1)* cubico-cubica quadrato-cubiformis *(2)* surdesolida *L*

initio datorum, affectum, fiet R ⑤ $\frac{a^6x^4}{a^5}$; et quoniam hic exponens 5 semper minor est, exponente a dato duplicato, ab eo subtrahatur, fietque R ⑤ $ax^4 = y$, sive $ax^4 = y^5$.

Superest tantum ut quadrata omnium x quoque regula aliqua complectamur, quae sane brevis est et generalissima:

Exponens y duplicetur, et exponens a duplicatus, exponente x augeatur, habebiturque aequatio trilinei paraboloeidis, summae omnium x^2 homogenei.

Ita si sit paraboloeis surdesolida cubiformis, aequationis $y^5 = a^2x^3$. fiet aequatio $y^{10} = a^7x^3$, cuius paraboloeidis trilineum omnium R ③ $\frac{y^{10}}{a^7} = x$, summae omnium x^2 paraboloeidis datae homogeneum est. Nam ob aequationem datam

$$x = R \text{ ③ } \frac{y^5}{a^2}. \text{ Ergo } x^2 = R \text{ ③ } \frac{y^{10}}{a^4}.$$

Hinc primum exponentes tam y quam a duplicatos habemus. Sed ut ex R ③ $\frac{y^{10}}{a^4}$, plano, salva progressionis ratione fiat linea, dividendum est per R ③ a^3, differentia enim inter $10-4$ quae nunc est potestas quantitatis productae, et $5-2$ quae esse deberet, ut linea fiat, est $5-2$, nam $2a-2b-a+b=a-b$. Iam $5-2$. seu differentia inter exponentem y datum, et a datum, semper est exponens x. Igitur exponenti a dato, nempe 2. duplicato, 4. addendus exponens x. seu hoc loco 3. fiet R ③ $\frac{y^{10}}{a^7} = x$, sive aequatio paraboloeidis homogeneae inventae erit: $\frac{y^{10}}{a^7} = x^3$, vel $y^{10} = a^7x^3$.

Nec dubito, ut dixi qui calculum ordine persequeretur, praeclaras in eo harmonias detecturum. Idemque futurum esse si ad cubos altioresque ipsorum x aut y potestates in summam colligendas assurgatur, methodo universali nunc aperta.

Ne quis autem putet quadrata applicatarum figurae homogeneae inventae quadrata figurae datae repraesentantium cubos eiusdem figurae datae repraesentare, exemplum

13 quae ... productae *erg. L* 20 f. aperta. *(1)* Praesertim cum quadrata | applicatarum *erg.* | figurae homogeneae inventae quadrata figurae datae repraesentantium cubos eiusdem figurae datae repraesentare *(a)* possint *(b)* fortasse possint, sed hanc suspicionem nunc excutere non vacat, quod facile foret; neque *(aa)* ea regula *(bb)* hoc quadratorum repraesentantium interventu opus est, cum methodo generali semper haberi possint repraesentantes applicatae. *Dazu am Rande (nachträglich gestr.) großes* ℛ *(2)* Ne *L*

adiciemus, quod eadem opera methodum nostram confirmat, et hanc [suspicionem] refutat.

$a^2x = y^3$. Hinc $y^6 = a^5x$ aequatio paraboloeidis homogenae omnium x^2, nam $x = \frac{y^3}{a^2}$. Ergo $x^2 = \frac{y^6}{a^4}$, homogenea huic: $x = \frac{y^6}{a^5}$. Qualibus exemplis, in quibus summa omnium x^2 methodo vulgari ac facili, sed ipsis peculiari haberi potest, elegans nostrae methodi confirmatio praebetur.

Sed et in hoc exemplo $x^3 = \frac{y^9}{a^6}$ quare et summa omnium x^3 haberi hoc loco potest; eadem homogenea figurae planae aequationis huiusmodi: $\frac{y^9}{a^8} = x$. Videamus an eadem figura sic inventa, etiam quadratis figurae homogeneae praecedentis, cuius aequatio $x = \frac{y^6}{a^5}$ homogenea sit, minimum $x^2 = \frac{y^{12}}{a^{10}}$, homogenea huic $x = \frac{y^{12}}{a^{11}}$, id ergo falsum deprehenditur.

Quare methodo universali a me hoc loco aperta, applicatarum cuiuscunque paraboloeidis cuiuscunque gradus potestates in summam colligendi, difficultate omni ad figuras planas homogeneas, ubi post demonstrationes nostras nulla est, id est quadraturam parabolarum revocata, possumus, opinor esse contenti.

Et vero cum Wallisius ipse quem nullus in hoc genere facile praeverterit non nisi primanos, secundanos, tertianos, etc.; subprimanos, subsecundanos, subtertianos, etc.; et singulorum, quadratos, cubos, aliasque potestates; ac horum denique omnium (demtis tamen quibusdam) reciprocos in summam colligendi, tradiderit tantum rationem; facile agnosci potest, quanta nunc accessione haec scientia augeatur; ubi cuilibet speciei serierum ab ipso traditae, infinitae aliae a me adduntur. Nam, si ille secundanos dedit, ego secundano-tertianos, secundano-quartanos, secundano-quintanos, etc. Si tertianos, ego tertiano-quartanos, tertiano-quintanos, tertiano-sextanos, etc. (idem est de subsecundano-tertianis; horumque omnium potestatibus) adicio. Ac proinde cum ille non

1 suspicionem *erg. Hrsg.* 20 serierum *(1)* infinite aliae | propemodum *erg.* | a me *(2)* ab *L*

15 Et vero: eine ähnliche Aussage bezüglich Wallis macht Leibniz bereits in N. 34; s. o. N. 34, S. 574 Z. 2 f. — s. a. oben S. 632 Z. 4–6.

nisi simplices exhibuerit, ego infinities infinitos addo, qui uno quoque simplicium cum caeteris omnibus distincte complicato, surgunt.

Et nunc vero etiam ad reciprocorum, quibus hyperboloeides constant, dimensiones transire placet.

39_2. PARS SECUNDA. DE HYPERBOLOEIDUM QUADRATURA

Hyperboloeides omnium graduum generumque quadrare,
excepta tantum earum prima, sive hyperbola ipsa.

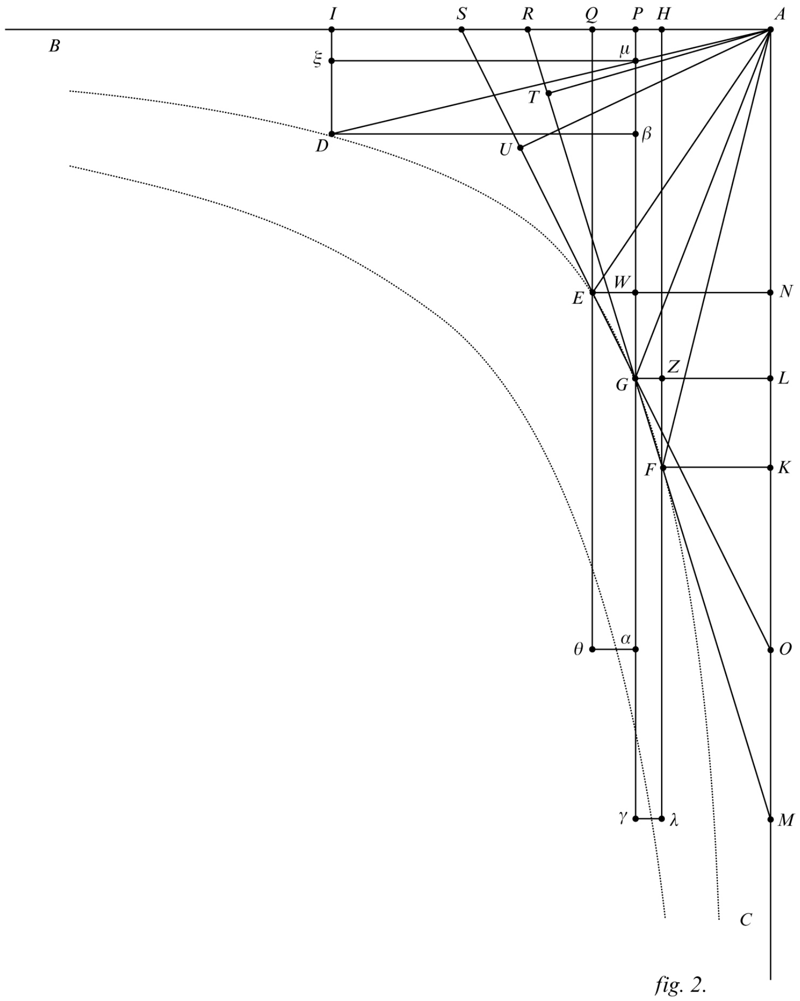


fig. 2.

Sunto in fig. 2. rectae AB. AC. in infinitum productae, versus B. vel C. angulum in A constituentes rectum; et curva DEF eius naturae, ut versus B. vel C. continuata magis magisque ad rectas expositas accedat, non tamen nisi infinito ab A intervallo eas attingat; ut proinde si puncta B. et C. loca concursus esse intelligantur, rectas AB. vel AC. necesse sit esse longitudine infinitas, non quod eis nulli sint termini, sunt enim aliae etiam versus easdem partes, longiores seu quae ultra B. et C. procurrant, quod hoc loco ostendere nihil attinet (quanquam mire faciat, ad declarandam infiniti naturam falsis notionibus involutam), sed quod termini B. C. sint intervallo ab A dissiti, quod sit quolibet a nobis assignabili maius. Et has ob causas rectae AB. AC. asymptoti appellantur, quod nomen postea ipsi spatio longitudine infinito $BDEFCA$. utrinque, id est versus B. pariter et C. infinito, vel etiam portioni eius $BDEFH$ aut $CFHA$ ab altera parte infinitae, communicatum est.

Caeterum asymptotos habent conchoeis, cissoeis, item quam ego angulorum figuram, seu hyperbolam falsam appellare soleo, quod insigni plane proprietate eadem cum angulis proportione per applicatas secetur; aliaeque infinitae, sed inprimis hyperbole atque hyperboloeides, de quibus hoc loco solis dicendum est: et quarum haec est proprietas generalis, ut sumto curvae puncto quolibet, ut D. vel F. potestas quaedam certa abscissae, ut AI. vel AK. ducta in potestatem quandam certam applicatae DI. vel AK. certae potestati lineae cuiusdam invariatae, ac proinde eidem semper, vel quadrato, vel cubo, vel surdesolido, etc. pro curvae natura aequetur.

Quemadmodum ergo in paraboloeidibus, ita et in hyperboloeidibus (quae ex elementorum paraboloeides constituentium reciprocis conflantur) agnosci debent tum gradus curvarum, tum in gradu quolibet genera varia. Nam prout potestas rectae invariatae: quadratum, cubus, quadrato-quadratum etc. est, hyperboloeidem quoque quadraticam, cubicam, quadrato-quadraticam, appellare licet; sed prout abscissae atque applicatae potestates varie complicantur, hinc in eodem gradu genera multa existere possunt.

Sed ut verbis parcatur tabulam exponere operae pretium est, qualem paraboloeidum dedimus, ubi primum admonuerimus, perinde ut illic, rectam invariatam a nobis appellari *(a)*, asymptoto parallelam abscissamve inde a puncto concursus seu centro asymptotorum

sumtam *(x)*, eidem vero perpendicularem sive applicatam *(y)*.
Atque ita eas primum ad paraboloeidum exemplum ordinemus.

[*Tabelle, s. S. 646*]

Sed haec tabula, etsi continua in speciem, indiget tamen reformatione. Semper enim species quaevis speciei alteri eiusdem gradus, permutatis y et x coincidit, sive homogenea est; ita y^2x et $x^2y = a^3$. homogeneae sunt, nec est cur altera potius quam altera simplex, aut quadratiformis appelletur. Sane et quae uni asymptotae parallela est, alteri est applicata, ideoque non est cur altera potius quam altera, abscissa potius quam applicata appelletur. Sumta portione ab utraque parte finita aut infinita, omnia quae de x aut y dici possunt, manifeste permutantur. Sumto spatio ab una parte infinito, ab altera finito, ut *FEDBIH*. fateor rectam *BH* infinitam, instar axis, et rectam *HF* instar basis considerari posse, quae ubilibet finiat. Sed compensatur haec consideratio, cum primum animadvertitur istud spatium velut alterius figurae *BDEFCA* portionem recta axi (pro quo in spatio utrinque infinito alterutram asymptotorum assumere licet) *CA* parallela *FH* ac per consequens ad basin *AB* abscissam, intelligi posse. Quare aliter ordinandae sunt hyperboloeidum species, et quoniam paraboloeidum reciprocis constant elementis, collationem instituere operae pretium videtur.

Exempli causa, paraboloeidi quadrato-quadraticae simplici hanc aequationem tribuo: $y^4 = a^3x$. erit $y = R\,④\,a^3x$. et posito $a = 1$. et $x = 1$. vel 2. vel 3. vel 4. etc. erit series ipsorum y in numeris:

1 f. (y). | Denominationes autem, ut in paraboloeidibus sumsimus ab $\underline{x}$. potius quam ab $\underline{a}$. ac paraboloeidem cuius haec aequatio est $y^4 = ax^3$. quadrato-quadraticam, quidem, ob y^4, sed ob x^3 cubiformem, neglecto a. appellavimus; et $y^4 = a^3x$. simplicem, ob x. nulla potestate affectam; *erg., streicht Hrsg.*, ita hoc loco denominationem ab y. potius quam ab a. sumimus; ac hyperboloeidem, cuius aequatio $a^4 = yx^3$. simplicem appellamus. Cum enim alterutra eligenda esset; x. potius eximenda visa est, quoniam naturalius est x. quam y. constituere abscissam; abscissae autem progressionis arithmeticae intelliguntur, ac proinde ipsi a. uniformi, propiores, saltem enim crescunt uniformiter, quod minime faciunt applicatae. Quod si nondum satisfacit, rationem mox aliam subiciemus, eamque convincentem. *erg. u. gestr.* | Atque *L* 15 ac per ... AB *erg. L* 17 f. videtur. | Si quis hanc dispositionem atque nomenclaturam nostram, velut arbitrariam, pertinacius impugnat, ei opinor satisfactum erit, ubi *(1)* quas ego hyperbolas nomine *(2)* hyperboloeides, ut a me appellantur, paraboloeidum cognominum reciproca habere elementa ostendero. At pro paraboloeidum dispositione ac nomenclatura, satis illa ipsa inde surgentis harmoniae concinnitas perorabit: *gestr.* | Exempli *L*

3 *Tabelle*: zum Aufbau und den Ergänzungen s. u. S. 648 Z. 15–18 sowie S. 649 Z. 24 f.

[Tabula Hyperboloeidum]

<u>Hyperboloeides</u>					<u>Paraboloeides respondentes</u>
quadratica seu hyperbola communis reciproca trianguli		$a^2 =$	yx	....	$a^0x = y$
cubica	quadratiformis reciproca para– bolae communis	$a^3 =$	y^2x	....	$ax = y^2$
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^2		
quadrato– quadratica	cubiformis	$a^4 =$	y^3x	....	$a^2x = y^3$
	quadratiformis		y^2x^2	$*$ (vel $a^2 = yx$)	$a^0x^2 = y^2$
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^3		
surdesolida seu quadrato – cubica	$\square^{\text{to}}$ $\square^{\text{ti}}$formis	$a^5 =$	y^4x	....	$a^3x = y^4$
	cubiformis		y^3x^2	....	$ax^2 = y^3$
	$\boxed{\text{quadratiformis}}$		y^2x^3		
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^4		
cubico – cubica	$\square^{\text{to}}$ cubiformis	$a^6 =$	y^5x	....	$a^4x = y^5$
	$\square^{\text{to}}$ $\square^{\text{ti}}$ formis		y^4x^2	$*$ (vel $a^3 = y^2x$)	$a^2x^2 = y^4$
	cubiformis		y^3x^3	$*$ (vel $a^2 = yx$)	$a^0x^3 = y^3$
	$\boxed{\square^{\text{ti}} \text{ formis}}$		y^2x^4	$*$ (vel $a^3 = yx^2$)	
	$\boxed{\text{simplex}}$		yx^5		

1 Tabula Hyperboloeidum *erg. Hrsg.*

$$R\,④\ 1. \qquad R\,④\ 2. \qquad R\,④\ 3. \qquad R\,④\ 4. \qquad \text{etc.}$$

Contra erit $x = \dfrac{y^4}{a^3}$, eodemque modo posito $a = 1.$ et $y = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. etc. erit series ipsorum x in numeris:

$$1 \qquad 16 \qquad 81 \qquad 256$$

Sumtis iam hyperboloeidibus quadrato-quadraticis duabus, altera cuius aequatio est: $a^4 = yx^3$, altera cuius aequatio est: $a^4 = y^3x$, videamus utra harum potius paraboloeidis alicuius simplicis reciproca dici mereatur; reducta ad numeros serie elementorum.

Ac primum ob aequationem $a^4 = yx^3$, erit $y = \dfrac{a^4}{x^3}$, et posita $a = 1.$ et $x = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. erit series omnium y in numeris

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{64} \qquad \text{etc.}$$

Patet ergo elementa haec paraboloeidis, verum non quadraticae, sed cubicae simplicis reciproca esse.

Eodem modo $x = R\,③\ \dfrac{a^4}{y}$. hinc series omnium x in numeris:

$$\frac{1}{R\,③\ 1} \qquad \frac{1}{R\,③\ 2} \qquad \frac{1}{R\,③\ 3} \qquad \frac{1}{R\,③\ 4} \qquad \text{etc.}$$

Unde intelligi potest, quam in tabula nominaveram: hyperboloeidem quadrato-quadraticam simplicem cuius aequatio: $a^4 = yx^3$, esse paraboloeidis cubicae simplicis cuius aequatio: $y^3 = a^2x$, reciprocam.

Nunc alteram quoque hyperboloeidem quadrato-quadraticam aequationis $a^4 = y^3x$, quae sola priori controversioni de simplicitate movere posset, examinemus. In ea $y = R\,③\ \dfrac{a^4}{x}$, eritque series omnium y in numeris:

$$R\,③\ 1 \qquad R\,③\ 2 \qquad R\,③\ 3 \qquad R\,③\ 4$$

Habemus ergo seriem omnium y hyperboloeidis quadrato-quadraticae istius, homogeneam seriei omnium x hyperboloeidis quadrato-quadraticae prioris. Et contra hoc loco series omnium x seriei omnium y prioris, homogenea est; nam hoc loco $x = \dfrac{a^4}{y^3}$, id est in numeris:

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{8} \qquad \frac{1}{27} \qquad \frac{1}{64} \qquad \text{etc.}$$

Non est ergo cur hae duae species distinguantur, aut cur altera prae altera simplex vocetur, cum curva utriusque eadem sit.

Iam ut species hyperboloeidum distinctius habeantur, ex paraboloeidibus reciproca earum elementa sunt indaganda.

Ita in prima seu communi parabola elementa axi parallela, seu omnia (x) sunt:

$$1 \qquad 4 \qquad 9 \qquad 16$$

horum reciproca:

$$\frac{1}{1} \qquad \frac{1}{4} \qquad \frac{1}{9} \qquad \frac{1}{16} \qquad \text{etc.}$$

Unde aequatio: $x = \dfrac{a^3}{y^2}$. vel $y^2x = a^3$.

Elementa basi parallela, seu omnia (y) sunt:

$$Rq\ 1 \qquad Rq\ 2 \qquad Rq\ 3 \qquad Rq\ 4$$

quorum reciproca

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{1}{Rq\ 2} \qquad \frac{1}{Rq\ 3} \qquad \frac{1}{Rq\ 4}$$

Unde aequatio: $\sqrt{\dfrac{a^3}{x}} = y$, sive $y^2x = a^3$.

Igitur p a r a b o l a e q u a d r a t i c a e , reciproca est h y p e r b o l o e i s c u b i c a. Quod mirum videri non debet, quoniam h y p e r b o l a q u a d r a t i c a seu communis, non parabolae communi, sed t r i a n g u l o , quod iure omnium paraboloeidum primum intelligi potest, reciproca habeat elementa.

P a r a b o l o e i s c u b i c a quadratiformis, aequationis $y^3 = ax^2$, elementa habet radices quadratas ex numeris cubis, vel radices cubicas ex numeris quadratis; i l l a r u m reciproca

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{1}{Rq\ 8} \qquad \frac{1}{Rq\ 27} \qquad \frac{1}{Rq\ 64} \qquad \text{etc.}$$

unde aequatio: $Rq\ \dfrac{a^5}{x^3} = y$. vel $y^2x^3 = a^5$.

H a r u m , radicum inquam cubicarum ex numeris quadratis, reciproca:

$$\frac{1}{R③\ 1} \qquad \frac{1}{R③\ 4} \qquad \frac{1}{R③\ 9} \qquad \frac{1}{R③\ 16}$$

Unde aequatio: $R③\ \dfrac{a^5}{x^2} = y$, vel $y^3x^2 = a^5$.

Ergo paraboloeidi cubicae quadratiformi, [hyperboloeides] surdesolida quadratiformis, vel quod idem est cubiformis, reciproca est.

Atque ut semper ex data aequatione paraboloeidis, aequationem hyperboloeidis reciprocae brevissime investigemus:
Esto aequatio paraboloeidis $y^3 = ax^2$. et ex y vel x eligatur utrumlibet, et si placet minori potestate affectum, ut hoc loco x. Ergo $x = Rq\,\dfrac{y^3}{a}$, et invertendo $Rq\,\dfrac{a}{y^3}$, quod ut possit esse $=$ alicui x, seu lineae, per a multiplicandum, donec ad debitam dimensionem assurgat, hoc loco $\dfrac{a^5}{y^3}$, $Rq = x$. vel $\dfrac{a^5}{y^3} = x^2$, quod ab initio statim fieri poterat, extractione radicis omissa; nam aequatio paraboloeidis data convertatur in aliam, cuius unum latus continet, potestatem datam alterutrius variabilium (y vel x) solam, alterum fractionem, cuius denominator sit alterius variabilium potestas data, numerator potestas, invariabilis a, prout natura novae aequationis postulat, aucta. Unde patet potestatem linearum variabilium non mutari, at exponentem ipsius a novum summam exponentium x et y debere aequare, quorum antea tantum differentiam aequaverat; differentia autem inter summam et differentiam $a+b-a+b$ est minor terminus duplicatus. Ergo inventam habemus

„ regulam expeditam et generalem aequationem paraboloeidis datae mutandi in
„ aequationem hyperboloeidis reciprocae, si a ponatur ab uno latere aequationis expo-
„ nente eius duplo minoris variabilium exponente, aucto; contra data aequatione hy-
„ perboloeidis, datur aequatio paraboloeidis respondentis, si ab exponente a detraha-
„ tur exponens variabilium minoris, et maioris variabilium potestas ab uno aequatio-
„ nis latere, caetera ab altero collocentur. Vel brevius, retento exponente literae x et
„ y. ipsius a exponens erit differentia eorum.

Et secundum hanc regulam calculatas paraboloeides respondentes, margini hyperboloeidum in tabulam adiciemus, unde apparet sane fieri non posse, ut hyperboloeidum et paraboloeidum gradus sibi respondeant, quoniam aliqua hyperboloeis cubico-cubica habet cubicam paraboloeidem sibi respondentem, et contra una hyperboloeis surdesolida habet respondentem sibi paraboloeidem quadrato-quadraticam. Quare hyperboloeides nomina, quae imposuimus retinere possunt; sed quando eadem hyperboloeis diversa

1 paraboloeides *L ändert Hrsg.* 22 f. Vel ... eorum. *erg. L*

habet nomina, quod scilicet tantum literarum x et y permutatione varietur, retinebit maius. Ita hyperboleis surdesolida: quadrato-quadratiformis et simplex eadem est, sed nomen quadrato-quadratiformis retinebit, quoniam paraboloeis cui reciproca est, quadrato-quadratica est, ac proinde hyperboloeidis gradum ab exponente literae a. speciem ab exponente literae x vel y utra maior est, determinari.

Quaestio hoc loco obiter institui potest, quid illis seriebus faciendum sit, quae sane fractionum habent formam, sed in quibus numerator non minus ac denominator continue crescit, ut si series sit:

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{2}{Rq\ 2} \qquad \frac{3}{Rq\ 3} \qquad \frac{4}{Rq\ 4} \qquad \text{etc.}$$

cuius aequatio est $\dfrac{ax}{\sqrt{ax}} = y$. vel $\dfrac{a^2x^2}{ax} = y^2$. vel $ax = y^2$. Unde apparet hanc seriem ad parabolam communem reduci.

Esto alia:

$$\frac{1}{Rq\ 1} \qquad \frac{2}{Rq\ 8} \qquad \frac{3}{Rq\ 27} \qquad \frac{4}{Rq\ 64} \qquad \text{etc.}$$

aequatio $\dfrac{x^{\cdot\cdot}}{Rq\ x^3} = Rq\ \dfrac{a^4x}{x^3} = y$. vel $a^4x = y^2x^3$. vel $a^4 = y^2x^2$. vel $a^2 = yx$. Hanc ergo manifestum est reduci ad hyperbolam communem.

Idemque de caeteris speciebus omnibus iudicandum est, sublata enim irrationalitate alterum ex $x^{\cdot\cdot}$ destruitur. Et divisio alicuius potestatis sive radicis per aliam, gignit potestatem aliquam vel radicem; ut: $\dfrac{3}{Rq\ 3} = Rq\ 3$. quia $3 = Rq\ 3 \frown Rq\ 3$.

Atque his ita de hyperboloeidum gradibus speciebusque, praelibatis, ad dimensiones ascendemus, usi perinde ut in paraboloeidibus, ratione productae ad abscissam, quae hoc quoque loco invariata est ac constans in eadem specie figurae. Et vero dudum a doctissimis viris, qui de maximis ac minimis, ac tangentium ducendarum ratione scripsere observatum est[:] sumta spatii concavi hyperboloeidis cuiuslibet, applicata qualibet asymptoto uni parallela, et a curvae puncto G ad alteram usque asymptoton producta, ut GL. fore abscissam AL ad productam LM (productam inquam ab L usque ad punctum M, in quo GM tangens curvae in G asymptoto AC occurrit), ut est exponens potestatis ipsius abscissae x vel AL. ad exponentem potestatis ipsius applicatae y vel GL.

---

15 reduci: in Wirklichkeit ergibt sich die quadratische Hyperbel $a^3 = y^2x$. Die Bezeichnung $x^{\cdot\cdot}$ bei der Rationalisierung ist mnemotechnischer Natur.

Cumque in hyperbola communi cuius aequatio $a^2 = xy$. exponentes isti sunt aequales, erunt rectae quoque AL et LM aequales. At in hyperboloeide cubica $a^3 = y^2x$, cum exponens y sit 2. et exponens x sit 1. etiam LM ipsius AL dupla erit. Idem est si applicata assumatur EN. abscissa AN. producta NO. tangens EO.
Notandum autem a b s c i s s a s hoc loco intelligi non a vertice sed a basi, et p r o d u c t a s non ultra verticem, sed trans applicatam.

Nunc tres intelligantur esse applicatae EN. GL. FK. quarum distantiae NL. LK. sint infinite parvae. Constat tangentem per duarum applicatarum distantiae infinite parvae extrema transire intelligi posse. Ea enim est natura tangentis, ut duas eiusdem curvae applicatas, nisi distantiae infinite parvae, ac quae pro eadem haberi possint, non attingat. Igitur tangentem GM ponamus transire per F, et tangentem EO per G. Iamque intelligamus spatium constare ex infinitis numero trapeziis ut $ENLG$; et $GLKF$ latitudinis infinite parvae; et curvam ipsam ex rectis numero infinitis, magnitudine infinite parvis, ut tangentium scilicet portionibus inter duas applicatas proximas interceptas velut polygonorum irregularium lateribus compositam; ex punctis curvae F. G. E. demittantur rectae perpendiculares in basin FH. GP. EQ. ac tangentibus quoque usque ad basin productis, MFG in R, et OGE in S. Ex puncto A. centro seu concursu asymptotorum demittantur perpendiculares in tangentes productas, quae occurrant in punctis T. U, tangentibus productis ut $MFGTR$, $OGEUS$. Denique puncta ut W. vel Z. quibus duorum punctorum curvae proximorum, tangentem communem habentium, ut E et G (vel G et F) rectae, ut EN et GP (vel GL et FH) ex uno quidem a basi remotiore G (vel F) in basin AB, ex altero ab axe remotiore E (vel G) in axem AC perpendiculares se intersecant.

Habebimus triangula rectangula EWG (vel GZF), quorum latus unum ut WG (vel FZ) est differentia abscissarum EQ, GP (vel GP. FH) aequalis NL (LK) distantiae applicatarum EN. GL (GL. FK) et latus alterum idem est inverso modo si applicatas abscissis permutes; EW (GZ) differentia applicatarum EN, GL (GL. FK) aequalis QP (PH) distantiae abscissarum vel intervallorum a basi EQ. GP (GP. FH). Basis autem seu hypotenusa, sit latus polygoni infinite parvum, seu portio tangentis inter duas applicatas abscissasve intercepta EG (GF).

Manifestum est autem triangulum AUO (ATM), intervallo tangentis a centro A. nempe AU (AT), portione tangentis OU (MT), et summa abscissae productaeque, AO

15 irregularium *erg. L* 28–30 Basis ... (GF). *erg. L*

(AM) comprehensum, esse simile triangulo EWG (GZF), et angulum EGW (GFZ) esse angulo UOA (TMA) aequalem. Unde sequitur ut est AU (AT) ad EW (GZ) ita esse AO (AM) ad EG (GF) ac proinde rectangulum ex AU in EG (AT in FG), rectangulo ex AO in EW, vel QP (AM in GZ, vel PH) aequari.

His ita positis sumatur portio curvae quantacunque $DEGF$ divisa in latera numero infinita, magnitudine infinite parva ut EG. GF. et ex puncto A ducantur ad horum laterum terminos, rectae AD, et post infinitas intermedias AE. AG. AF.

Manifestum est, totum sectorem concavum $ADEGFA$ infinitis triangulis AFG. AGE. etc. compleri. At vero haec eadem triangula duplicata aequari basibus eorum, id est tangentium portionibus EG vel GF in altitudines, id est tangentium intervalla AU, vel AT ductis, manifestum est.

Vicissim vero ostensum paulo ante, rectangula AU in EG, vel AT in GF, rectangulis AO in QP. vel AM in PH. aequari, ergo triangulum AGE, vel AFG duplicatum rectangulo AO in QP, vel AM in PH aequabitur.

Describantur rectangula haec, rectis AO in $P\alpha$ vel $Q\theta$, et AM in $H\lambda$ vel $P\gamma$ translatis, et basibus QP et PH impositis. Quod si idem fieri intelligatur in quolibet curvae $DEGF$ puncto, quod in punctis E. G. F. factum est, infinita numero rectangula eiusmodi, basi IH imposita, constituent spatium curvilineum concavum $ID\theta\lambda H$, sectori concavo $ADEGFA$, duplicato, id est omnibus illis triangulis numero infinitis ut AFG, AGE, etc. sectorem complentibus, duplicatis; aequale.

Manifestum est autem curvam $D\theta\lambda$ esse eiusdem speciei cum priori $DEGF$. quoniam enim applicatae sunt proportionales, seu λH ad FH, ut θQ ad EQ. figurae erunt homogeneae, duae autem figurae planae homogeneae sunt eiusdem speciei, nec nisi laterum rectorum, si qua habent, magnitudine differunt, uti ellipsis et circulus eadem certe aequatione possunt exprimi.

Datur ergo ratio spatii $IDEGFH$, ad spatium $ID\theta\lambda H$, quae scilicet applicatarum respondentium, sive quae abscissarum, ad summas ex abscissis et productis. Rationem sum-

24 differunt, *(1)* ac ut obiter dicam, similes sunt, *(2)* uti *L*

15–20 Bei der Konstruktion der Hilfskurve für die Transmutation weist Leibniz dem Punkt D unberechtigterweise eine Sonderrolle zu, so dass die Hilfskurve in seiner Handzeichnung wie die Ausgangskurve durch D läuft. Der Fehler beeinflusst die folgenden Betrachtungen nur unwesentlich.

mae ad abscissam vel exponentis a ad exponentem x, appellemus $\rightmoon$. quae in hyperbola communi $= \frac{2}{1}$. Quare spatium $\rightmoon \frown IDEGP =$ sectori concavo $ADEGA$ duplicato, seu $\rightmoon \frown IDEGP = 2 \quad ADEGA$.

Quoniam vero $IDEGP$ est aequale his duobus, trapezio $ID\mu P$, et sectori concavo μDEG, simul sumptis; ac eodem modo $ADEGA$ est aequale his duobus; triangulo $A\mu G$, et eidem sectori concavo μDEG, simul sumtis, ideo

$$\rightmoon \frown ID\mu P + \rightmoon \frown \mu DEG = 2\ A\mu G + 2\ \mu DEG.$$

Et quia in hyperbola communi $\rightmoon = 2$, ideo in ea aequatio ista sic interpretanda est:

$$2\ ID\mu P + 2\ \mu DEG = \ 2\ A\mu G + 2\ \mu DEG.$$

Unde cum $2\ \mu DEG$ utrinque destruatur, manifestum est in hyperbola communi aequationem propositam nihil conferre ad spatii curvilinei quadraturam, neque aliud inde sequi, quam

$$2\ ID\mu P = 2\ A\mu G \text{ vel } \ ID\mu P = A\mu G.$$

Unde, si utrique addatur triangulum μPA, fient duo triangula vel etiam, si duplicentur, $AID = APG$, vel rectangulum AID aequale rectangulo ALG. Quae nota est hyperbolae proprietas, omnia scilicet rectangula sub abscissa et applicata, ubicunque in spatio asymptoto assumtis, inter se, ac proinde quadrato cuidam certo ac perpetuo aequalia esse seu $a^2 = xy$, insigni documento veritatis tam eleganti harmonia demonstrationum comprobatae.

At vero in caeteris hyperboloeidibus omnibus (praeter eas quae ad communem revocantur, qualis est: $a^6 = x^3y^3$), quadraturam spatii curvilinei haberi necesse est. Ut enim ad aequationem propositam

$\rightmoon \frown ID\mu P + \rightmoon \frown \mu DEG = 2\ A\mu G + 2\ \mu DEG$ vel $\rightmoon\ ID\mu P - 2\ A\mu G = 2\ \mu DEG - \rightmoon\ \mu DEG$ redeamus, patet inde fieri

$$\frac{\rightmoon\ ID\mu P - 2\ A\mu G}{\rightmoon - 2} = \mu DEG, \text{ et } \ ID\mu P + \frac{\rightmoon \frown ID\mu P - 2\ A\mu G}{\rightmoon - 2} = IDEGP$$

1 appellemus *(1)* β *(2)* $\rightmoon$. *L* 2 Quare *(1)* ratio *(a)* quoque spatii IDEGFH *(b)* IDEGP ad sectorem concavum dabitur, $= \frac{2\beta}{1}$. Ac proinde spatium *(2)* spatium *L* 23 + 2μDEG *(1)* redeamus, vel $\rightmoon$ est maior quam 2, vel minor, si maior erit *(2)* quam sic polien *(3)* vel *L*

24 inde fieri: anstelle von $\rightmoon - 2$ müsste es umgekehrt $2 - \rightmoon$ heißen. Der Fehler wirkt sich bis zum Ende des Stückes aus. — Im Zuge der anschließenden Rechnungen unterlaufen Leibniz weitere Flüchtigkeitsfehler, so dass er lediglich stellenweise richtige Zwischenergebnisse erreicht.

seu $$\frac{\rightmoon \frown 2\ ID\mu P - 2\ ID\mu P - 2\ A\mu G}{\rightmoon - 2} = IDEGP$$

id est spatio hyperboloeidis ad quadrandum proposito. Q.E.F.

Ut autem $ID\mu P$ et $A\mu G$ comparemus, recta $P\mu$ appelletur $= b$. recta $\mu G = c$. $PG = b + c$. et $PA = d$. $PI = e$. et $AI = d + e$. erit $\bigtriangledown^{\text{lum}}\ P\mu A = \frac{bd}{2}$. et $A\mu G = \frac{cd}{2}$. et $APG = \frac{bd + cd}{2}$.

Porro $ID = \frac{P\mu \frown AI}{PA} = \frac{bd + be}{d} = b + \frac{be}{d}$. Et constat $ID\mu P$ ex rectangulo $P\xi$, et triangulo $D\xi\mu$. Rectangulum autem $P\xi = be$, et quia $D\xi = ID - P\mu = b + \frac{be}{d} - b = \frac{be}{d}$. erit $D\xi\mu = \frac{be^2}{2d}$. Ergo $ID\mu P = be + \frac{be^2}{2d}$ vel $\frac{2dbe + be^2}{2d}$. Ergo per aequationem supra positam:

$$\frac{\dfrac{\rightmoon\, dbe + \rightmoon\, be^2}{2d} - \dfrac{cd}{2}}{\rightmoon - 2}, \text{ seu } \frac{\cancel{2}\,\rightmoon dbe + \cancel{2}\,\rightmoon be^2 - \cancel{2}cd^2}{\underset{2}{\cancel{4}}d\,\rightmoon - \underset{2}{\cancel{4}}d} = \mu DEG.$$

Positoque $\pi d = b$. fiet: $\frac{\rightmoon be + \rightmoon\pi e^2 - cd}{2\,\rightmoon - 2} = \mu DEG$.

et posito $2\,\rightmoon - 2 = \delta$. fiet: $\frac{\rightmoon be + \rightmoon\pi e^2 - cd}{\delta} = \mu DEG$.

Addatur utrobique $P\mu A = \frac{bd}{2}$. fiet: $\frac{\rightmoon bde + \rightmoon be^2 - cd}{2d\,\rightmoon - 2d} \genfrac{}{}{0pt}{}{+}{\times} \frac{bd}{2} = IDEGP$.

Ergo $\frac{2\,\rightmoon bde + 2\,\rightmoon be^2 - 2cd^2 + 2\,\rightmoon bd^2 - 2bd^2}{4d\,\rightmoon - 4d} = IDEGP$.

Posito $\rightmoon = 3$. erit: $\frac{\overset{3}{\cancel{6}}bde + \overset{3}{\cancel{6}}be^2 - \cancel{2}cd^2 + \overset{2}{\cancel{4}}bd^2}{\underset{4}{\cancel{8}}d} = IDEGP$.

Detrahatur utrobique rectangulum $DP =$ rectang. $P\xi$ $(= be)$ + rectang. $D\xi\mu$ $\left(\frac{be^2}{d}\right)$.

15 Posito ... IDEGP. *erg. L*

Residuum cognitorum hoc rectangulo detracto aequabitur spatio $DEG\beta$. Posito iam ☽ $= 3$, erit

$$\cancel{6bde} + \cancel{6be^2} - 2cd^2 + 6bd^2 - \underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{12}}dbe + \cancel{4dbe} - \underset{\underset{2}{\cancel{8}}}{\cancel{12}}be^2 + \cancel{4be^2}$$

In omnibus his aequationibus non determinatur utrum altero maius, seu utrum subtrahens an subtrahendum, nunc enim unum, nunc alterum maius. Fiet autem hoc loco:

$$\frac{6bd^2 - 2cd^2 - 2dbe - 2be^2}{12d - 4d}.$$

(Si D ponatur B. seu recta AD infinita seu coincidens ipsi AB. necesse est spatium $BDEGP$ aequari 2 ☽ $\frown BP$, quoniam recta BP infinite longa quoddam exhibet trapezium infinite longum, quale istud $ID\mu P$.)

Porro ad contrahendam aequationem adhibenda est figurae aequatio, in qua $a^{(\beta+\delta)} = x^\beta y^\delta$. sumendo scilicet β et δ pro exponentibus incognitis. Porro PA vel d potest cogitari ut x. quemadmodum et AI vel $d+e$. contra PG seu $b+c$. item ID seu $b+\dfrac{be}{d}$ possunt sumi pro y. Ergo: $PA^\beta \frown PG^\delta = AI^\beta \frown ID^\delta$. seu $d^{\beta} \frown \llcorner b+c \lrcorner^{\delta} = \llcorner d+e \lrcorner^{\beta} \frown \llcorner b+\dfrac{be}{d} \lrcorner^{\delta}$. Posito iam $\delta = 1$. et $\beta = 2$. erit:

$$d^2b + d^2c = bd^2 + be^2 + 2bde, + bed + \frac{be^3}{d} + 2be^2.$$

Ergo $$\cancel{d^3b} + d^3c = \cancel{bd^3} + 3be^2d + \overset{3}{\cancel{2}}bd^2e + \cancel{bed^2} + be^3 + \cancel{2be^2d}.$$

vel $$d^3c - 3be^2d + 3bd^2e = be^3. \text{ vel: } \frac{d^3c}{3e^2d + 3d^2e + e^3} = b.$$

Quod in aequatione superiori ad $IDEGP$ in locum ipsius b substitui potest. Fiet in exemplo hyperboloeidis $a^3 = xy^2$. fiet inquam:

$$\frac{3d^4ec + \overset{2}{\cancel{5}}e^2d^3c - \cancel{3e^2d^3c} - 3d^4ce - e^3cd^2 + 2d^5c}{12e^2d^2 + 12d^3e + 4e^3} = IDEGP.$$

7 est *(1)* | *(a)* rectam *(b)* ID fieri infinite parvam, et ideo *erg.* | spatium BDEGP aequabitur *(2)* spatium *L* 10 *(1)* Porro PA $\frown$ PG seu d $\frown \llcorner$b + c seu db + dc = a^2 = *(2)* Porro *L*

40. DE FUNCTIONIBUS PLAGULAE QUATTUOR.
August 1673

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept mit Zusätzen: LH 35 VIII 3 Bl. 1–8. 4 Bog. 2°. 7 $\frac{1}{2}$ S. Bl. 2 vor dem Beschreiben unten beschnitten (Abschnitt ca 23,5 cm x 14,0 cm). Geringe Textverluste durch Randschäden (insbesondere Bog. 1), im Wesentlichen an Hand der Sicherheitsverfilmung (April 1967) behoben. Überschriften, Datierung, Bogennummerierung sowie Gesamttitel sukzessive ergänzt. Textfolge: Bl. 1 r° (Haupttext), Bl. 1 v° oben (bis S. 662 Z. 7), Bl. 1 r° (Randtext), Bl. 2 v°, Bl. 1 v° unten (ab S. 666 Z. 12), Bl. 2 r° sowie zwei Zusätze auf Bl. 1 v° in Zusammenhang mit dem zweiten Beispiel (S. 660 Z. 19 – S. 661 Z. 5) = N. 40_1; Bl. 3 und 4 = N. 40_2; Bl. 7 und 8 = N. 40_3; Bl. 5 und 6 = N. 40_4. (Reihenfolge von Teil 3 und 4 durch Kustode gesichert.)
Cc 2, Nr. 575

1673. August.

M e t h o d u s t a n g e n t i u m i n v e r s a seu D e f u n c t i o n i b u s.

De locis locorum inveniendis, seu de applicatis loci cuiusdam dati
functionem in alio loco, qui quaeritur, facientibus.
Seu de inveniendo loco, in quo applicatae loci dati, faciunt
functionem propositam.
Est haec methodus methodo tangentium opposita.

---

14 I n p a r t e 2^{da} e s t m i r a b i l i s o b s e r v a t i o d e e x p r e s s i o n i b u s, t a n g e n t i u m p e r i n f i n i t a s r e p l i c a t i o n e s, i t e m p a r t e [3^{tia}].

22 4^{ta} *L ändert Hrsg.*

---

14 Eine ausführliche Behandlung des Inhalts gibt D. Mahnke, *Neue Einblicke*, 1926, S. 43–59.

40_1. PLAGULA PRIMA

Pars prima

Methodus nova investigandi tangentes linearum curvarum ex datis applicatis, vel contra applicatas ex datis productis, reductis, tangentibus, perpendicularibus, secantibus.

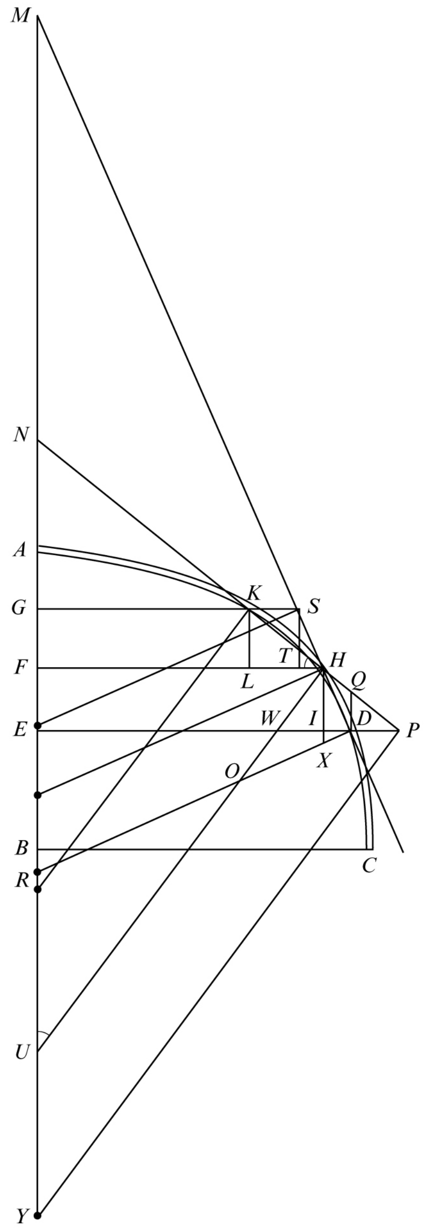
Esto figura curvilinea $ABCDA$ in qua relatio applicatae ED ad abscissam AE aequatione quadam nobis cognita explicatur: id enim utique necesse est, si modo figurae natura nobis nota est. Quod si figura geometrica non est, ut cycloeis, nil refert tamen, tractabitur enim ad geometricae exemplum fingendo rectarum cum curvis ex quibus factae sunt notam nobis esse comparationem; nec ideo minus tangens sive geometrica sive ageometrica ducetur, prout figura natura patitur.

Intelligatur abscissa AE dividi in partes aequales infinitas, quales sunt EF. FG. easque proinde infinite parvas, constat figuram intelligi posse compositam ex infinitis trapeziis quales sunt $EFHD$ et $FGKH$. Et curva ADC intelligi poterit constare ex infinitis lineis rectis velut lateribus, quae scilicet portiones sint tangentium, duas applicatas proximas (seu distantia infinite parva a se invicem remotas) iungentium; qualis recta est HD. portio tangentis MD. per puncta H. D extrema applicatarum FH et ED intervallo infinite parvo $\underline{EF}$ distantium, transeuntis; qualis item est KH. portio tangentis NH. per K et H extrema puncta applicatarum sibi proximarum GK. FH transeuntis.

Iam manifestum est triangula HID et MED. vel KLH et NFH. esse similia, ergo $\dfrac{ME}{ED} = \dfrac{HI}{ID}$. Iam $ID = ED - FH$. Ergo $ME = \dfrac{HI \frown ED}{ED - FH}$. Inventa autem ME, inventa est tangens, cum non nisi rectam MD duci opus sit, ex puncto M invento, ad punctum D datum.

Rem exemplo comprobemus, ut appareat an ad usum transferri possit.

2 Pars prima *erg. L* 12 f. patitur. *(1)* Intelligatur figura ex infinitis parallelogrammis | aeque altis *erg.* | constare, et curva ex infinitis | numero *erg.* | rectis infinite parvis, quorum parallelogrammorum unum intelligatur esse EFGH. Eritque recta EF. vel GH. infinite parva, eademque erit infinitesima rectae AE. abscissae. Cum autem parallelogram *(2)* Intelligatur *L* 14 f. infinitis *(1)* parallelogrammis *(2)* trapeziis *L*



[*Fig. 1*]

Esto infinite parva $EF = b$. recta $AE = \xi b = x$. ipso ξ exprimente numerum infinitum portiuncularum b. Figura autem intelligatur esse parabola, in qua applicata est $\sqrt{ax}$ (a posito latere recto, et x abscissa). Erit $\sqrt{\xi ba} = ED$. et quia AF. abscissa applicatae FH. est $\xi b - b$. erit $FH = \sqrt{\llcorner \xi ba - ba \lrcorner}$ et $ID = ED - FH$. erit $\sqrt{\xi ba} - \sqrt{\llcorner \xi ba - ba \lrcorner}$. Et ME erit $= \dfrac{\sqrt{}_q\ \xi ba}{\sqrt{\xi ba} - \sqrt{\xi ba - ba}}$.

Porro ratio ipsius a ad x seu ξb data est, ea intelligatur esse $\dfrac{1}{\beta}$ fiet

$$ME = \frac{\sqrt{}_q\ \xi b^3 \frac{\xi b}{\cancel{\beta}}}{\sqrt{\xi b \frac{\xi b}{\cancel{\beta}}} - \sqrt{\xi b \frac{\xi b}{\cancel{\beta}} - \frac{b^2 \xi}{\cancel{\beta}}}} \qquad \frac{\xi b^2}{\xi b - \sqrt{\xi^2 b^2 - b^2 \xi}} \qquad \frac{b^2}{b - \sqrt{b^2 - \frac{b^2}{\xi}}}$$

$$ME\xi b - \sqrt{\xi^2 b^2 ME^2 - b^2 \xi ME^2} = \xi b^2.$$

$$\text{Ergo}\quad \underbrace{ME^2\xi^2b^2 + \xi^2b^2ME^2}_{2ME^2\xi^2b^2} - b^2\xi ME^2 - 2\sqrt{\xi^4b^4ME^4 - b^4\xi^3ME^4} = \xi^2b^4\ .$$

$$2ME^2\xi^2b^2 \qquad - b^2\xi ME^2 - \xi^2b^4 = 2\sqrt{}\ .$$

Ergo cum $b^2\xi ME^2 - \xi^2b^4$ tuto negligi, velut infinities minora quam $2ME^2\xi^2b^2$. fiet:

$$4ME^4\xi^4b^4 = 2, \frown\ \xi^4b^4ME^4 - b^4\xi^3ME^4.$$

Male[,] ergo ξ^2b^4, etc. reici non debuerant, quanquam caeteris infinities minora, quadremus, qualia sunt, fiet:

$$\overset{2}{\cancel{4}}ME^4\xi^4b^4 - \underset{/\!/}{\overset{2}{\cancel{4}}}ME^4\xi^3b^4 - 4ME^2\xi^4b^6 + b^4\xi^2ME^4 + 2b^6\xi^3ME^2 + \xi^4b^8$$
$$= \cancel{2\xi^4b^4ME^4} - \underset{/\!/}{\cancel{2b^4\xi^3ME^4}} \qquad 0.$$

Ponatur $ME = \delta\xi b$. fiet:
$2b^8\xi^8\delta^4 - 2b^8\xi^7\delta^4 - 4b^8\xi^6\delta^2 + b^8\xi^6\delta^4 + 2b^8\xi^5\delta^2 + \xi^4b^8 = 0.$

8 *(1)* Ponatur ME $= \llcorner\sqrt{}_q\delta\lrcorner\ \xi$b. Ergo *(a)* ME$\xi^2$b^2 – EM *(b)* $\sqrt{\delta}, \frown\ \xi^2$b^2 – $\sqrt{}$ *(aa)* dξ^3b^3 – dξ^2b^3 = ξb^2. Ergo $\delta\xi^4$b^4 – d *(bb)* $\delta\xi^3$b^3 – $\delta\xi^2$b^3 = ξb^2. *(2)* MEξb *L*

12 Auf der rechten Seite müsste konsequent statt des Faktors 2 vielmehr der Faktor 4 stehen. Bei der nachfolgenden Korrektur bleibt dieser Fehler stehen; er beeinträchtigt die Rechnungen bis S. 660 Z. 2 und ist die Ursache für Leibniz' anschließende Bemerkung.

Nota b non est numerus, sed linea. ξ est numerus infinitus. δ est numerus finitus quaesitus. $2b^8\xi^8\delta^4 + b^8\xi^6\delta^4 + 2b^8\xi^5\delta^2 + \xi^4 b^8 = 2b^8\xi^7\delta^4 + 4b^8\xi^6\delta^2$.
Sed non video quomodo hinc veniatur ad solutionem. Imo videtur esse haec aequatio impossibilis, examinanda ergo omnia denuo.

Breviter res eo redit: Recta ED, applicata, divisa per ID, differentiam ab ipsamet et applicata praecedente, dat rectam ME.

$$\frac{\sqrt{a\xi b}}{\sqrt{a\xi b} - \sqrt{\llcorner a\xi b - ab\lrcorner}} = ME.$$

$$\begin{array}{llcccl} \text{Ergo} & \sqrt{\cancel{a}\xi b} & = & ME \frown \sqrt{\cancel{a}\xi b} & - & ME\sqrt{\llcorner \cancel{a}\xi b - \cancel{a}b\lrcorner}. \\ & & -1 & & = & \\ & & & ME \frown \sqrt{\xi b} - \sqrt{\xi b} & = & ME \frown \sqrt{\llcorner \xi b - b\lrcorner}. \end{array}$$

Ergo $\cancel{ME^2\xi b} + \xi b - 2ME\xi b = \cancel{ME^2\xi b} - ME^2 b$.
$2ME\xi b - \xi b = ME^2 b$. Ergo $2ME\xi b - \xi b = ME^2$. seu omittendo ξb et quoniam $AE = \xi b$. erit $2ME \frown AE = ME^2$. Ergo $2AE = ME$. quod erat demonstrandum. Idemque in parabola verissimum esse aliunde notum est.

Hinc intelligi potest puncta in geometricis esse velut numeros, dividere rectam per rectam infinite parvam esse aliquo numero multiplicare aut dividere.

Hinc apparet quam difficile futurum sit ex dato AM et AE invenire ED, $\langle - \rangle$ enim nec ED sumi possunt, nec satis patet an sufficiat sumere bina AM.

$$\frac{\dfrac{\cancel{a^2}\ \ 1}{\sqrt{\llcorner 2ax - x^2\lrcorner}}}{\dfrac{\cancel{a^2}\ \ 1}{\odot\ \sqrt{\llcorner 2ax - x^2\lrcorner}} - \dfrac{\cancel{a^2}\ \ 1}{☽\ \sqrt{\llcorner 2ax - \cancel{2ab} - x^2 - \cancel{b^2} + \cancel{2xb}\lrcorner}}} = ME.$$

---

19 $x - b, \square = x^2 + b^2 - 2xb$.

15–18 Hinc intelligi ... sumere bina AM. *erg. L*

---

19 Zur Vernachlässigung der mit b behafteten Glieder, s. u. S. 661 Z. 6 ff.

Ergo $\dfrac{1}{\mercury\ \sqrt{2ax-x^2}} = \dfrac{ME}{\odot} - \dfrac{ME}{\rightmoon}$. Ergo $1 = \dfrac{ME \frown \mercury}{\odot} - \dfrac{ME \frown \mercury}{\rightmoon}$.

$\mercury = \odot$. Ergo $\dfrac{ME \frown \mercury \frown \cancel{\odot} - ME \frown \cancel{\mercury} \frown \rightmoon}{\cancel{\odot} \frown \rightmoon} = 1$. Ergo $ME \frown \odot - ME \frown \rightmoon = \rightmoon$. Ergo $ME \frown \sqrt{2ax-x^2} = \rightmoon + ME \frown \rightmoon$. Ergo $ME^2 \frown \odot^2 = \rightmoon^2 + ME^2\,\rightmoon^2 + 2\,\rightmoon^2 ME$. Ergo $ME^2 \frown \odot^2 - \rightmoon^2 - ME^2\,\rightmoon^2 = 2\,\rightmoon^2 ME$. Ergo $+ME^4\odot^4 - 2\odot^2 ME^2\,\rightmoon^2 - 2ME^4\odot^2\,\rightmoon^2 + \rightmoon^4 + 2\,\rightmoon^4 ME^2 + ME^4\,\rightmoon^4 = 2\,\rightmoon^2 ME, \square$.

Non est tutum ipsius infinite parvi b multiplos ab initio reicere, aliaque fieri enim potest, ut eorum cum aliis compensatione, in alium plane statum veniat aequatio. Illud tamen utiliter a Wallisio, quem in eadem incidisse video, admonitum est omnes terminos in quibus habetur b^2 posse reici[,] item eos qui neque b habent, neque in b ducentur, quippe aequales utrinque prodituri.

1 f. $\dfrac{\mathrm{ME} \frown \mercury}{\rightmoon}$. *(1)* $\dfrac{\mathrm{ME} \frown \mercury \frown \odot - \mathrm{ME} \frown \mercury \frown \rightmoon}{\odot \frown \rightmoon} = 1$. Ergo $\mathrm{ME} \frown \mercury \frown \odot - \mathrm{ME} \frown \mercury \frown \rightmoon = \odot \frown \rightmoon$. Ergo $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot \frown \rightmoon}{\mercury \frown \odot - \mercury \frown \rightmoon}$. Iam $\mercury = \odot$. ergo: *(a)* $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot \frown \rightmoon}{\odot^2 - \odot \frown \rightmoon}$.

Nebenrechnung:

$$\begin{array}{rrrrrrrrrrl} \odot \frown \rightmoon = & 2ax & - & 2ab & - & x^2 & - & b^2 & + & 2xb & \\ & & & & & & & 2ax & - & x^2 & (2ax - x^2 \\ \hline & -\ 2ax^3 & + & 2abx^2 & + & x^4 & + & x^2b^2 & - & 2x^3b & \\ & -\ 2ax^3 & - & 4a^2xb & + & 4a^2x^2 & - & 2ab^2 & + & 4ax^2b & \end{array}$$

$\sqrt{\ } + x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3 \boxed{-2x^3 + 6ax^2 - 4a^2x + x^2 - 2a} = \odot \frown \rightmoon$.

$2ax - x^2 = \odot^2$.

Ergo $\mathrm{ME} = \dfrac{\sqrt{x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3}}{2ax - x^2 - \sqrt{x^4 + 4x^2a^2 - 4ax^3}} = \mathrm{ME} = \dfrac{\sqrt{x^2 + 4a^2 - 4ax}}{2ax - x - \sqrt{x^2 + 4a^2 - 4ax}}$. seu $\mathrm{ME} = \dfrac{x - 2a}{}$ *(b)* $\mathrm{ME} = \dfrac{\odot \frown \rightmoon}{\odot^2 - \odot \frown \rightmoon}$. Ergo $\dfrac{1}{\mathrm{ME}} = \dfrac{\odot^2 - \odot \frown \rightmoon}{\odot \frown \rightmoon}$. Ergo $\dfrac{1}{\mathrm{ME}} = \dfrac{\odot}{\rightmoon} - 1$. *(2)* $\mercury = \odot$. *L*

3 $\mathrm{ME} \frown \rightmoon$. Ergo *(1)* $\cancel{\mathrm{ME}^2 2ax} - \cancel{\mathrm{ME}^2x^2} = 2ax - 2ab - x^2 - b^2 + 2xb + \cancel{2\mathrm{ME}^2ax} - 2\mathrm{ME}^2ab - \cancel{\mathrm{ME}^2x^2} - \mathrm{ME}^2b^2 + 2\mathrm{EM}^2xb$. Ergo $2ax - 2ab - x^2 - b^2 + 2xb - 2\mathrm{ME}^2ab - \mathrm{ME}^2b^2 + 2\mathrm{EM}^2xb = 0$. *(2)* $\mathrm{ME}^2 \frown \odot^2$ *L*   9 qui neque *(1)* a *(2)* b habent *L*

---

2 Ergo ... = 1.: Auf der linken Seite der Gleichung müsste das Vorzeichen vertauscht werden. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.   8 a Wallisio: *Epitome binae methodi tangentium.* In: *Philosophical Transactions* VII Nr. 81 vom 25. März/4. April 1672, S. 4011. Leibniz paraphrasiert, s. insbesondere Z. 9 (Variante) und S. 662 Z. 8, wo Leibniz die Wallis'sche infinitesimale Einheit *a* nennt.

Breviter: Wallisius alia licet via, aliisque ratiocinandi loquendique modis, in eandem ante me methodum incidit. Etsi ego id minime observassem, donec non constituissem tantum, sed et iam in parabola confirmassem, et video parabolae exemplo et Wallisium usum, quippe admodum expedito.

Sed magna iam quaestio est an hac methodo datis intervallis tangentium aut perpendicularium ab applicata in altitudine sumtis, inveniri possint applicatae. Hic puto assumi debere duo intervalla pro una applicata, ut antea duae applicatae pro una tangente.

⟨Iam⟩ $\dfrac{a}{b}$ [=] $\dfrac{NF}{KL=1} = \dfrac{FH}{LH}$. $\dfrac{ME}{HI=b=1} = \dfrac{FH+ID}{ID} = \dfrac{FH}{ID} + \dfrac{ID}{ID}$ (= 1). $ME \frown ID = FH\ (+ID)$. $NF \frown LH = FH$. Ergo $ME \frown ID(+ID) =\ NF \frown LH$.

Ergo $\dfrac{ME}{NF} = \dfrac{LH}{ID}$. Inventa ergo est ratio LH ad ID.
Ergo et ID ad $IP = ID$ ad $LH = ME :$ ad $NF :$
Ergo data applicata una GK, aliaque $FL + LH$. dabitur tertia $ED = GK + LH + ID$.

Porro DQ dabitur absolute, quam $\dfrac{DQ}{HI} = \dfrac{DP}{IP}$. cognitis, datur iam HI. quippe 1, ergo datur $DQ = \dfrac{DP}{IP}$. Iam $\dfrac{MN}{QD} = \dfrac{MH}{HD} = \dfrac{ME}{HD} = \dfrac{ED}{ID}$ cognita. $\dfrac{ED}{ID} = \dfrac{ME}{HI} = ME$. nota est, item $\dfrac{FH}{LH} = NF$. Ergo nota $\dfrac{\frac{ED}{ID}}{\frac{FH}{LH}}$ seu $\dfrac{ED \frown LH}{FH \frown ID} = \dfrac{ME}{NF}$. Quae dividantur per

---

10 *Dazu:* male

14 *Unter dem zweiten* $\dfrac{ED}{ID}$: $\left(\dfrac{ED}{ID} = ME\right)$

8 = *erg. Hrsg.* 8 = $\dfrac{\mathrm{FH}}{\mathrm{ID}} + \dfrac{\mathrm{ID}}{\mathrm{ID}}$ (= 1) *erg. L* 9 (+ID) *zweimal erg. L*

8–663,7 Die folgende Betrachtung enthält mehrere Fehler bzw. Verschreibungen. Den Hauptfehler nennt Leibniz selbst; er versucht zunächst zu verbessern, begnügt sich dann aber mit bloßen Vermerken.

11 ME: bedeutet hier $\dfrac{1}{ME}$.

notum $\frac{LH}{ID}$. fiet nota tandem ratio $\frac{ED}{FH} = \frac{ME}{NF}$. ac proinde constructio applicatarum, ex data ratione p r o d u c t a r u m.

Ut rectam EM productam, ita rectam ER r e d u c t a m appellare possis, rectam RM secantem, RD radium, EB sinum complementi.

Hac methodo inverso modo investigare queas tangentem, datis applicatis, in quibus nota primum $\frac{ED}{FH}$. et $\frac{ED}{ID}$. et $\frac{FH}{LH}$. Ergo et $\frac{LH}{ID} = \frac{ME}{NF}$.

Eodem modo ex datis ER caetera investigabuntur.

⊙ Vera methodus ex data producta inveniendi applicatam.

Sunto duo latera inassignabilia curvae, sibi proxima KH. HD. ⟨− − −⟩ duo tangentes in H se secantes NH. MD. tresque applicatae, ad totidem duorum laterum extrema puncta K. H. D. ⟨descriptae⟩ GK. FH. ED. ex quibus FH attingit tangentem utramque in puncto intersectionis earum H. Reliquae duae applicatae producantur, ab una tangente ad alteram, GK. donec tangenti MH occurrat in S. et ED producatur, donec tangenti NH producto occurrat in P.

Iam suppono notam esse rectam AG eiusque infinitesimam $GF = a = \langle b \rangle = FE$ vel $HI = 1$. est enim unitas constructionis. Suppono et notam esse rectam FN vel GN non minus ac EM. Nam ex cognita progressione seu loco productarum, quaeritur locus applicatarum seu figura ipsa. Constat etiam, quemadmodum ST est $= HI$, ita TH esse $= ID$, et $SH = HD$.

Cumque sit: $\frac{LH}{FH} = \left[\frac{1 = KL}{NF}\right]$. erit $(LH) = \frac{FH}{NF}$. et eodem modo $\frac{ED}{ME} = (ID)$. Porro $IP = LH$ (quia $KL = HI$, unde et $KH = HP$). Ergo $(DP =) LH - ID = \frac{FH}{NF} - \frac{ED}{ME}$. Ergo posita FH applicata velut cognita, cuius iam sequens ED indaganda

---

1 *Zu* ratio: inutiliter[,] bis utimur eadem aequatione[,] seu $\frac{ME}{NF} \times \frac{NF}{ME} = 1$.

15–22 *Daneben, durch Trennstrich abgesetzt:* $\frac{3}{1} - \frac{3}{5} = a$. $3 = a \frown \llcorner 1 - 5 \lrcorner$. *(!)* $a = \frac{12}{5}$. $\frac{12}{5} \frown 1 - 5$ fit $\frac{12}{5} - 12$.

3 Ut rectam *(1)* AM *(2)* EM *L* 20 $\frac{1 = \mathrm{ST}}{\mathrm{MF}}$ *L ändert Hrsg.*

est, constat esse $\dfrac{EP}{EN} = \dfrac{FH}{FN}$. seu $EP = \dfrac{EN \frown FH}{FN}$. et ED esse $EP - DP$. erit

$$ED = \frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{NF} + \frac{ED}{ME}.$$

Ergo $$ED - \frac{ED}{ME} = \frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{NF} = \frac{ME \frown ED}{ME} - \frac{ED}{ME}.$$

Ergo $$\frac{\dfrac{EN \frown FH}{FN} - \dfrac{FH}{NF}}{1 - \dfrac{1}{ME}} = \frac{EN - 1 \frown \dfrac{FH}{FN} \frown ME}{ME - 1} = ED.$$

Utile est autem ipsam $[FH]$ applicatam datam, supponere aequalem ipsi $[AF]$ abscissae, ad inchoandum applicatarum calculum, quoties aequationem figurae, seu calculum applicatarum quaerimus.

Figurae sunt loci applicatarum. Alioquin fieri potest ut v. g. circulus sit locus applicatarum hyperbolae si considerentur ut chordae, hyperbola vel ellipsis locus applicatarum trianguli si considerentur ut reductae, parabola locus applicatarum parallelogrammi, si functionem reductae facere intelligantur.

Videndum an sint curvae, in quibus nunquam contingit, ut applicata aliqua sit abscissae aequalis vel maior. Nam si aliqua maior est, etiam aliqua aequalis est, cum certum sit semper aliquas esse minores; quare aequalis aliqua inter maiores et minores.

Sed ut aequationem coeptam absolvamus, datur ratio EN ad ME. ergo ME appellemus βEN. Datur et ratio FN ad ME. ergo idem ME alias appellabimus γFN. Fiet ergo aequatio haec ex praecedente:

$$\frac{EN \frown FH}{FN} - \frac{FH}{FN} = \frac{\beta EN \frown ED}{\gamma FN} - \frac{ED}{\gamma FN}.$$

ergo $EN \frown FH - FH = \dfrac{\beta EN \frown ED}{\gamma} - \dfrac{ED}{\gamma}$. et $\dfrac{EN \frown FH - FH}{\dfrac{\beta EN}{\gamma} - \dfrac{1}{\gamma}} = ED$.

14 *Über* aliquas:

5 ipsam *(1)* ED *(2)* EH *L ändert Hrsg.* 5 AE *L ändert Hrsg.* 9 vel ellipsis *erg. L*

8 Alioquin: Zum Kreis s. o. S. 660 Z. 19; zu Hyperbel und Ellipse vgl. N. 35 S. 584 Z. 10 f.

Sed his ambagibus non est opus, sufficit ex aequatione superiore dicere:

$$\frac{\dfrac{EN \frown FH}{FN} - \dfrac{FH}{FN}}{1 - \dfrac{1}{ME}} = ED.$$

Unde notari potest, quoties ex aliis linearum in figura data functiones facientium generibus assumtis, applicatae quaeruntur, unam semper applicatam ponendam velut assumtam, et sequentem velut quaesitam. Quodsi enim ex una quadam applicata assumta proxime sequens aut antecedens determinari potest figura geometrice, id est per omnia puncta describi ac determinari potest.

Unum annotandum est, antequam hinc abeamus, ipsam DP $(= LT = KS)$, item ipsam QD et QP esse ipsis infinite parvis, ut HI, infinities minores. Nam cum triangula MNH et DQH sint similia, erit $QD = \dfrac{MN \frown HD}{MH}$. Iam MN est linea infinite parva eiusdem dimensionis cum FE. Saepe enim fit, ut MN sit $= FE$. ut in parabola, aut proportionale, ut in paraboloeidibus aut hyperboloeidibus; semper ut sit eiusdem dimensionis. Et certe si MN esset linea finita, seu assignabilis, non posset intelligi NH et MD eiusdem puncti tangentes esse, quod tamen supponimus, et si id punctum rursus cogitatione in partes, quibus certe non caret, discernamus. Lineam autem infinite parvam MN per aliam lineam infinite parvam eiusdem dimensionis HD multiplicari at per infinities maiorem seu assignabilem MH dividi, est eam reddi infinities infinite parvam, seu subcubicam. HD autem infinite parvam eiusdem dimensionis cum MN patet, quia est eiusdem dim. cum HI. quod ostendo, quia $ME : ID :: MH : HD$ [*sic!*]. Iam si

3 in figura … facientium *erg.* *L* 10 $\dfrac{\mathrm{MN} \frown \mathrm{HD}}{\mathrm{MH}}$. *(1)* ⟨at⟩ *(2)* aliquot *(3)* infinite parvo, | ut MN *nicht gestr.* | *(a)* id enim suppono esse *(b)* homo *(4)* Iam *(a)* punctum *(b)* MN *L* 18 seu *(1)* subquadraticam *(2)* subcubicam *L*

18 subcubicam: In der Variante steht richtiger subquadraticam, genauer handelt es sich um Unendlichkleine zweiter Ordnung. 19 quod ostendo: Der Beweisversuch geht fehl, die Aussage hingegen ist richtig.

QD infinities infinite parva, ergo talia erunt etiam QP et DP quae eiusdem dimensionis, quia sunt proportionales lineis eiusdem dimensionis, nam $\frac{QD}{HI} = \frac{QP}{HP} = \frac{DP}{IP}$. Sunt autem lineae HI. HP. IP. eiusdem dimensionis, quia lineis NE. NP. EP. quas eiusdem dimensionis, quippe assignabiles finitas esse, ex constructione constat, sunt proportionales, nam $\frac{HI}{NE} = \frac{HP}{NP} = \frac{IP}{EP}$. Regula autem quod quantitates quantitatibus eiusdem dimensionis proportionales sint eiusdem dimensionis inter se, manifesta, aut certe facilis demonstratu est.

Notabilis est haec doctrina de l i n e a r u m d i m e n s i o n i b u s. Sunt enim lineae variarum dimensionum, prout sunt inassignabiles infinitae, aut infinite parvae. Sunt enim quae quadratis cubis etc. Sunt contra quae radicibus quadraticis cubicisque linearum finitarum assignabilium comparantur.

Invenimus (vide pag. seq. versam sub signo ⊙) modum ex datis p r o d u c t i s inveniendi applicatas. Nunc operae quoque pretium est invenire applicatas ex datis r e d u c t i s. Facilis autem processus est priore invento, fere enim tantum pro punctis N et M substituuntur puncta R et U, ducta perpendiculari RD ad tangentem MD et perpendiculari UH ad tangentem $\langle NH \rangle$. Quare utile erit praecedentem processum hoc loco relegere, et ea tantum notare in quibus hic variatur, ne bis eadem dicere necesse sit.

---

1 *Zu QD auf der Gegenseite, gestr.:*

$$\frac{ER}{ED}$$

$EP = FH \frown \frac{EY}{FR}$. $QD = \frac{DP = LH - ID}{LH}$. Ergo $QD = 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}$. Idem $QD = NE \frown \frac{DP = EP - ED}{EP}$. Ergo $QD = NE \frown \llcorner 1 - \frac{ED \frown FR}{FH \frown EY} \lrcorner = 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}$. Ergo $\frac{ER}{\cancel{ED} \frown LH} = ED^2 \frown \frac{FR}{FH \frown EY}$. seu $\frac{ER \frown FH \frown EY}{LH \frown FR} = ED^2$. et quia $LH = \frac{FU}{FH}$. fiet: $\frac{ER \frown FH^2 \frown EY}{FU \frown FR} = ED^2$.

---

12 vide: s. o. S. 663 Z. 8.

Igitur, cum $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ KLH sit simile $\bigtriangledown^{\text{lo}}$ HFU. erit: $LH = \dfrac{FU}{FH}$. et $ID = \dfrac{ER}{ED}$. et $DP = \dfrac{FU}{FH} - \dfrac{ER}{ED}$.

((Iam assumo FH velut notam, et invenio $EW = \dfrac{FH \frown EU}{FU}$. Iam $WI = \dfrac{EW}{EU}$. Ergo $WI = \dfrac{\dfrac{FH \frown EU}{FU}}{EU}$. Ergo $WI = \dfrac{FH}{FU}$. Porro $WI \frown IP = 1$. et $IP = ID + DP$. ergo $WI \frown ID + WI \frown DP = 1$. Ergo $\dfrac{FH \frown ER}{FU \frown ED} + 1 - \dfrac{FH \frown ER}{FU \frown ED} = 1$. Recte id quidem sed nullo fructu, cum sit aequatio inter eadem, nota tamen est calculi veri. Porro cum cognitae sint rectae FH et FU. cognita etiam erit recta HU. sed de ea non est cur laboremus.))

Ducatur recta PY parallela HU. Cum sit $KH = HP$. erit $RU = RY$. et ob triangula similia HFU et PEY, fiet

$$EP = \frac{FH \frown EY}{FR} = FH + LH = FH + \frac{FU}{FH}.$$

et
$$ED = EP - DP = \frac{FH \frown EY}{FR} - \frac{FU}{FH} + \frac{ER}{ED}.$$

((Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH}$. Ergo $ED^2 - ER = \dfrac{FH \frown EY \frown ED}{FR} - \dfrac{FU \frown ED}{FH}$. ($ED^2 = \dfrac{ED \frown FH \frown EY}{FR} - \dfrac{ED \frown FU}{FH} + ER$.) Ergo $ED^2 - \dfrac{ED \frown FH \frown EY}{FR}$ [+] $\dfrac{ED \frown FU}{FH} = ER$. Eadem $ED = FH + ID$. et $ID = \dfrac{ER}{ED}$. Ergo $ED = \dfrac{ER}{ED} + FH$. Ergo $ED^2 = ER + FH \frown ED$. Habemus ergo

$$\cancel{ER} + FH \frown ED - \frac{ED \frown FH \frown EY}{FR}\ [+]\ \frac{ED \frown FU}{FH} = \cancel{ER}.$$

5 = 1. *(1)* ergo $FH^2 = FU^2$. seu FH = FU. quod est absurdum, errorem ergo calculo inesse necesse est. Ergo *(2)* Recte *L*   11 f. $\frac{FU}{FH}$. | An ergo breviter: si applicata cognita per suam reductam dividatur, habebitur differentia eius a proxime maiorem. Eodem modo fere breviter de reducta, ut adeo aliis ambagibus non sit opus, si modo unam applicatarum velut cognitam assumere licet. *gestr.* | et *L*
14+17 *Vorzeichen ändert Hrsg. zweimal*

11 In der ersten Teilgleichung der Kette müsste es im Nenner anstatt von FR vielmehr FU heißen. Das Versehen wirkt sich bis S. 671 Z. 9 aus.

Nullum hinc, potius hoc consideremus: $HX = RU \frown \dfrac{HO}{[OU]}$. sed nihil hoc ad rem.))

Tandem cogitemus ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ sim. HIP et QDP esse

$$QD = \frac{\overset{\displaystyle \frac{ER}{ED}}{\overline{DP = LH - ID}}}{LH} = 1 - \frac{ER}{ED \frown LH}.$$ Iam assumta NE pro cognita, ideo ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia NEP et QDP fiet:

$$QD = \frac{NE \frown \llcorner DP = EP - ED}{EP} = NE - \frac{ED \frown NE}{EP = FH + LH}.$$

Ergo $1 - \dfrac{ER}{ED \frown LH} = NE - \dfrac{ED \frown NE}{FH + LH}$. (seu $NE - \dfrac{ED \frown NE \frown FR}{FH \frown EY}, + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$.) vel $NE - \dfrac{ED \frown NE}{FH + LH} + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$. et quia $ED = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{ER}{ED}$. seu $c + \dfrac{ER}{ED}$. ideo $\dfrac{ED \frown NE}{FH + LH} = \dfrac{c \frown NE + NE \frown \dfrac{ER}{ED}}{FH + LH}$ seu $g + \dfrac{h}{ED}$. ⟨ut brevitatis⟩ causa facio ⟨$c.\,g.$⟩ h. in cognitarum locum substitutis.

Iam ergo: $NE - g - \dfrac{h}{ED} + \dfrac{ER}{ED \frown LH} = 1$. Ergo $\dfrac{ER}{ED \frown LH} - \dfrac{h}{ED} = 1 + g - NE$. Ergo $\dfrac{1}{ED} = \dfrac{1 + g - NE}{\dfrac{ER}{LH} - h}$. Ergo denique $ED = \dfrac{\dfrac{ER}{LH} - h}{1 + g - NE}$. $Q.\,E.\,F.$

Quod si recedere, id est ex applicata data proxime minorem quaerere velimus, patet GK facile haberi, cum sit $FH + LH$. quae cognita sunt. Eodem modo GS ex inventa aut data ED innotescit, nam differentia inter ED et GS perinde innotescit, ut LH differentia inter FH et GK[,] vel aliter etiam sed longiori ambage, supposita scilicet non tantum ED sed et FH cognita, data enim ED pariter et FH datur EP. est autem $DP = KS$. quod addatur ad GK iam notam ex posita sola FH. (Idemque aliter si ab ED subtrahatur bis ID, seu 2 ID, quia $ID = HT$. fiet GS vel $FH - ID = GS$.) Ex his intelligi potest, cum duplici modo inveniatur GS. partim ex posita sola ED. partim ex positis ED et FH simul. Hinc si ipsa ED incognita intelligatur, patet aequationem haberi ad ipsam ED

1 HU *L ändert Hrsg.* 8 $\dfrac{\text{ER}}{\text{ED}}$. *(1)* Ergo haec omnia $\frown$ per LH $\smile$ ER = *(2)* seu *L*

inveniendam utilem, supposita ea velut cognita, et ipsa GS bis investigata. Quod statim comprobemus.

Cum cognita sit ER posita etiam ED velut cognita, habemus etiam $EM = \dfrac{ED^2}{ER}, -2 = GM$. Iam ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ similia MGS et MED. erit

$$GS = \frac{ED \frown MG}{ME} = \frac{ED \frown \dfrac{ED^2}{ER} - 2\ ED}{\dfrac{ED^2}{ER}} = \frac{ED^2 - 2\ ER}{ED} = ED - \frac{2\ ER}{ED} = GS.$$

Unde illud tantum sequitur $ED - GS = \dfrac{2\ ER}{ED} = 2\ ID$ ac proinde $ID = \dfrac{ER}{ED}$. (Quod iam ante habuimus, ut pateat veritas calculi, et resolutio aequationis huius in priorem.)

Inventa iam ID. datur FH. qua tamen nondum in hac aequatione usi sumus. Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = FH$. Sed quia ED hoc modo replicatur in se ipsam et quidem partim per multiplicationem partim per divisionem, ideo nondum hinc absoluta aequatio est. Nam si sic fuisset $ED - \dfrac{ED}{ER} = FH$. habuissemus aequationem $ED = \dfrac{FH}{\left[1 - \dfrac{1}{ER}\right]}$. et tali methodo paulo ante cum ex productis applicatas investigaremus, usi sumus. Nunc vero porro eundum est.

Iam $GS = GK + KS$. Et $GK = \dfrac{FH \frown NG}{NF}$. Ergo

$$\overbrace{ED - \frac{2\ ER}{ED}}^{GS} - \frac{FH \frown NG}{NF} = KS = DP; + ID \left(= \frac{ER}{ED}\right) = LH = \frac{FU}{FH}.$$

Ergo $ED - \dfrac{ER}{ED} = \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{FH \frown NG}{NF}$.

((Ergo $ED^2 - ER = \dfrac{FU \frown ED}{FH} + \dfrac{FH \frown NG \frown ED}{NF}$. quia autem $FH = ED - \dfrac{ER}{ED}$. erit

11 1 − ER *L ändert Hrsg.*

14–671,7 Im Folgenden versucht Leibniz zweimal, die Größe ED zu bestimmen. Dies gelingt nicht, da Leibniz die (unrichtige) Ausgangsgleichung von S. 667 Z. 12 bzw. S. 668 Z. 12 zugrundelegt, und beidemale zusätzliche Rechenfehler hinzukommen.

$$\frac{FU \frown ED}{FH} = \frac{FU \frown ED}{ED - \dfrac{ER}{ED}} = \underset{\odot}{\frac{FU}{1 - \dfrac{ER}{ED^2}}}.\ \text{et}\ \frac{FH \frown NG \frown ED}{NF} = \underset{\text{☽}}{\frac{ED^2 \frown NG - ER \frown NG}{NF}}.$$

Ergo $ED^2 = ER + \odot +$ ☽. Ergo $ED^2 - \dfrac{FU}{1 - \dfrac{ER}{ED^2}} - \dfrac{ED^2 \frown NG}{NF} = ER\ [-]\ \dfrac{ER \frown NG}{NF}$.))

Iam ex inventa supra aequatione $\dfrac{ER}{ED = \dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{ER}{ED}} = \dfrac{ER}{ED}$. Sed haec nondum satis proclivia ad reductionem, nisi invertas.

$$(\text{☿})\ \frac{\dfrac{FH \frown EY}{FR} - \dfrac{FU}{FH}}{ER} + \frac{\left(\dfrac{ER}{ED}\right)}{ER}\ \ \frac{1}{ED} = \frac{1}{(\text{♃})\ \dfrac{FU}{FH} + \dfrac{FH \frown NG}{NF}, -ED}.$$

seu $\text{☿} + \dfrac{1}{ED} = \dfrac{1}{\text{♃} - ED}$. multiplicatis omnibus per ED fiet: $\text{☿} \frown ED + 1 = \dfrac{ED}{\text{♃} - ED}$. Ergo $\text{☿} \frown ED \frown \text{♃} - \text{☿} \frown ED^2 + 1 = ED$. sed nulla ex his reductio.

Unde patet si eadem data paulo aliter tractentur omnem saepe reductionem impediri, quae alias facilis est. Quod in regulas fortasse cogi posset, sed quas hactenus apud neminem invenio. Ratio huius rei esse videtur, inter caetera, quod per binomia dividere non possumus ut de extractione radicum nihil dicam. Videndum an quadratura hyperbolae, et constructio logarithmorum geometrica huic malo remedium afferant.

Sed nos hoc loco inventa solutione possumus esse contenti. Tantum h et g explicabimus in aequatione supra inventa. Ergo:

3 + *L ändert Hrsg.* 4 *(1)* Quam aequationem reducemus ut ante pro ED *(2)* Iam *L* 4 $\frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{ED}}$. *(1)* Iam $\mathrm{ED} - \frac{\mathrm{ER}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{ED}^2 - \mathrm{ER}}{\mathrm{ED}}$. *(2)* Sed *L*

$$ED = \frac{\dfrac{ER}{\dfrac{FU}{FH} = LH} - \dfrac{NE \frown ER}{FH, \frown LH \left(= \dfrac{FU}{FH}\right)}}{1 + \dfrac{\dfrac{FH \frown EY \frown EN}{FR} - \dfrac{FU \frown EN}{FH}}{\cancel{FH}, \frown LH \left(\dfrac{FU}{\cancel{FH}}\right)}}$$

$$= \frac{\dfrac{ER \frown FH}{LH} - \dfrac{NE \frown ER \frown \cancel{FH}}{\cancel{FH} \frown FU}}{\underbrace{1 + \dfrac{FH \frown EY \frown EN}{FR \frown FU} - \dfrac{EN}{FH}}_{\dfrac{FR \frown FU + FH \frown EY \frown EN}{FR \frown FU} + \dfrac{EN}{FH}}}$$

$$= \frac{\dfrac{ER \frown FH \frown FU - NE \frown ER \frown LH}{LH \frown FU = \dfrac{FU^2}{FH}}}{\dfrac{FR \frown FU \frown FH + FH^2 \frown EY \frown EN + EN \frown FR \frown FU}{FR \frown FU \frown FH}}$$

$$= \frac{ER \frown FH^2 \frown FU \frown FR - NE \frown ER \frown LH \frown FR \frown FH}{FR \frown FU^2 + \underbrace{FH \frown EY \frown EN \frown FU} + \dfrac{EN \frown FR \frown FU^2}{FH}}$$

Hoc videtur tuto reici posse, cum divisio per ipsum faciat nimis parvum, at divisio per reliqua producit differentiam duorum planorum proximorum, id est lineam.

Nota producta ex lineis per lineas assignabilem differentiam habentes divisis, eiusdem sunt dimensionis cum differentiis linearum inassignabilibus.

[*Zusätze auf Bl. 1v^o*]

Zusatz 1:

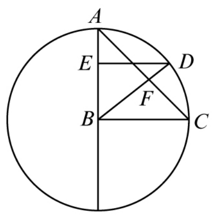
Nota si qua figura describi non possit geometrice ut figura sinuum circuli aut figura sinuum parabolae ad arcum, possint tamen omnes eius portiones abscissae quadrari. Tunc hac ipsa methodo tangentium etiam descriptio eius geometrica, seu ductus eius tangentium applicatarumque omnium inveniri potest, descripta earum figura quadratrice, et ductis lineis datis functionem obtinentibus; ergo hae omnes applicatae duci poterunt.

Praecaeteris utile est methodum adhibere in qua functionem facientes sunt applicatarum partes. Ex hac autem geometrica hoc modo mechanicarum alioquin linearum descriptione quadratura curvilinearum ex quibus pendent sequitur.

Quod si aliqua abscissarum portionum tantum quadrari potest, ut in cycloeide (exemto semicirculo) seu figura arcuum, portio sectione per medium abscissa, aut altera cuius quadraturam invenit Hugenius, etiam illa pars tantum describi poterit, id est recta inveniri poterit, arcui quadrantis aequalis, non arcubus omnibus, ex istius quidem figurae quadratura.

Zusatz 2:

An si logarithmi construi possint geometrice ex data ratione partium possit inveniri ratio totorum, v. g. $\dfrac{a}{x}$ et $\dfrac{a}{y}$ datis invenire $\dfrac{a}{x+y}$. Seu si sit $\dfrac{a}{a+b}$, an haec fractio possit a binomio liberari. Quod videtur sequi ex quadratura hyperbolae. Sufficit autem a binomio ⟨liberari⟩ aut in plures numero fractiones resolvi, dummodo eae non sint numero infinitae, nec ulla ⟨fractionum⟩ binomio ⟨affecta⟩.



[*Fig. 2*]

Datur ratio $\dfrac{ABDA}{ABCD} = \dfrac{AFB + BFDA}{ABC + ADCA}$. Datur et ratio $\dfrac{AFB}{ABC}$. Sed nondum tamen datur ratio $AFDA$ ad $ADCA$, nam si daretur[,] eadem ratione porro concluderem addendo $A[B]F$ ad $AFDA$ et ABC ad $ADCA$, cum nota sit ratio $A[B]F$ ad ABC et, ex

18–673,2 E *L ändert Hrsg. viermal*

4 in cycloeide: s. N. 17 S. 344 Z. 2 – S. 346 Z. 2 sowie Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 79 (*HO* XVIII S. 205); vgl. auch *LSB* III, 1 N. 29 (Leibniz für [Huygens?], vermutlich Sommer 1674) S. 115 f. und N. 30 (Leibniz an Oldenburg, 15. VII. 1674) S. 119 f.

hypothesi $AFDA$ ad $ADCA$, ideo etiam notam fore

$$\frac{A[B]F + AFDA = A[B]DA}{ABC + ADCA = ABCD}.$$

Data autem ratione alicuius segmenti seu noti sectoris, ad circulum, datur et ratio segmenti ad suum sectorem, et proinde quadratura eius sectoris seu circuli ex his positis daretur.

Definita tamen res est fateor. Satis enim patet ex datis partium rationibus determinari et rationes totorum. Quod statim experiri licet, quoties in numeris dantur, ex illis enim possumus colligere quantitatem totorum.

Quod si hoc unum ad Gregorii a. S. Vincentio quadraturam desiderabatur, et ex hyperbolae quadratura effici potest, ⟨daretur nobis⟩ quadratura circuli ex nota hyperbolae quadratura. ⟨Sed omnium⟩ portionum abscissarum ⟨quadratura⟩ non ideo daretur ⟨—⟩ sectione angulorum universali ⟨—⟩.

9 hoc unum: s. Chr. Huygens, *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli … Quibus subiuncta est* Ἐξέτασις *cyclometriae … Gregorii a S. Vincentio*, 1651 (*HO* XI S. 281–337, insbesondere S. 319–329).

40_2. PLAGULA SECUNDA

August. 1673.

Methodus tangentium inversa seu De functionibus. Pars 2^{da}

Ostendi folio de functionibus, id est parte prima (ubi figuram inspice) ED, applicatam quaesitam, data FH praecedente, datisque duabus productis FN et EM inveniri posse.

Exempli causa: Esto locus productarum, triangulum, et producta $2x$. posita x abscissa AF. erit $AE = x+1$. et $ME = 2x+2$. FH esto y. $EF = FG$ etc. $= 1$. erit $EN = FN + 1 = 2x+1$. $FM = 2x+1$.

Aequatio autem illic inventa est haec: $ED = \dfrac{EN - 1. \frown \dfrac{FH}{FN}, \frown ME}{ME - 1.}$.

Caeterum semper verum est EN esse $= FN + 1$. quaecunque sit figurae species, fiet ergo: $EN - 1. = FN + 1. - 1. = FN$. et $EN - 1. \frown \dfrac{FH}{FN} = FN \frown \dfrac{FH}{FN} = FH$. fietque $ED = \dfrac{FH \frown ME}{ME - 1.} = \dfrac{FH \frown ME}{FM} = \dfrac{y \frown 2x+2}{2x+1.} = y \frown 1 + \dfrac{1}{2x+1.} = y + \dfrac{y}{2x+1.}$. differentia: $\dfrac{y}{2x+1.} = \dfrac{ED \frown 1}{[EM]}$.

$\sqrt{ax+a}, -\sqrt{ax} = \dfrac{\sqrt{ax}}{2x+1}$. Ergo $ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x} = \dfrac{ax}{4x^2 + 1 + 4x}$.

12–15 NB. ex his intelligitur frustra introductam duplicem tangentem, cum ea rursus e medio tollatur.

5 functionibus, | *(1)* quod inscriptum Methodus tangentium inversa seu de functionibus. August. 1673. *(2)* id est parte prima *erg.* | (ubi *L* 12 *(1)* quae ex hypothesi assumti trianguli | valorumque FN et ME *erg.* | reformata, dabit: *(2)* Caeterum *L* 15 FM *L ändert Hrsg.*

16–675,18 In den folgenden beiden Rechnungen begeht Leibniz einige Flüchtigkeiten (z. B. sollte es ab S. 675 Z. 12 anstelle von $\dfrac{a^2}{16x}$ durchweg $\dfrac{a^2}{16x^2}$ heißen), diese haben aber keinen Einfluss auf die Schlussbemerkung.

Ergo $2ax + a - \dfrac{ax}{4x^2+1+4x} = 2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$, quadrataque utraque aequationis parte: $4a^2x^2+4a^2x - \dfrac{4a^2x^2}{4x^2+1+4x} + a^2 - \dfrac{2a^2x}{4x^2+1+4x} = 4a^2x^2+4a^2x$. Reiectisque utrobique $4a^2x^2+4a^2x$, fiet: $a^2 = \dfrac{4a^2x^2-2a^2x}{4x^2+1+4x}$, fietque $\cancel{4x^2a^2} + a^2 + 4xa^2 = \cancel{4a^2x^2} - 2a^2x$, $a^2 + 6a^2x = 0$. Quod cum sit absurdum, hinc dignosci potest, errorem alicubi in calculo latere. Imo minime, ut post dicetur.

Si simpliciter ex data MG, GS, ST, invenire velimus FH, ita procedi potest, cum sit $\dfrac{TH}{ST} = \dfrac{GS}{MG}$, erit $TH = \dfrac{GS \frown ST}{MG}$, positaque $GS = y$, $ST = 1$, et $MG = 2x$, fiet: $TH = \dfrac{y}{2x}$, differentia ipsius y ab applicata sequente. Quod an verum sit statim experiri possumus in parabola. Posita $GS = y = \sqrt{ax}$, et FH esse $\sqrt{ax+a}$, erit $\sqrt{ax+a} - \sqrt{ax} = \dfrac{y}{2x} = \dfrac{\sqrt{ax}}{2x}$, et quadrata aequatione[:] $ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2+a^2x} = \dfrac{y^2}{4x^2} = \dfrac{ax}{4x^2} = \dfrac{a}{4x}$. Ergo $2ax + a - \dfrac{a}{4x} = 2\sqrt{a^2x^2+a^2x}$, ergo quadrata rursus aequatione: $4a^2x^2 + 4a^2x - a^2 + a^2 - \dfrac{a^2}{2x} + \dfrac{a^2}{16x} = 4a^2x^2+4a^2x$. Ergo $\dfrac{a^2}{16x} - \dfrac{a^2}{2x} = 0$, vel $\dfrac{a^2}{16x} = \dfrac{a^2}{2x}$, vel $2a^2x = 16a^2x$, seu $14a^2x = 0$. Quod absurdum, et tamen error in calculo latere non potest. Dicendum ergo, sufficere aequationem dimensionum altiorum, minoribus neglectis. Ea vero semper reperta est, nempe $4a^2x^2+4a^2x = 4a^2x^2+4a^2x$, inferiora ergo ut $\dfrac{a^2}{2x}$, item $\dfrac{a^2}{16x}$, aliaque similia, quae scilicet ad eandem dimensionem non ascendunt, reicienda sunt. Cuius rei ratio est, quod ipsa hypothesis, quod scilicet in parabola sit $MG = 2x = 2AG$, simili reiectione nata demonstrataque est.

Tota iam quaestio est, quomodo ex datis ID, seu differentiis duarum applicatarum (huc enim semper redit constructio), ipsae inveniri queant applicatae. Posita enim applicata minore y. differentia eius a maiore sequente est $\dfrac{y}{MG}$, ac proinde invenienda est

---

2 An fortasse quae velut inutilia reicimus ad haec ipsa problemata solvenda inservire possent.

figura, cuius ordinatarum series haec v. g.:

$\frac{y}{2}$, posita x minima $=$ 1, et posita y applicatarum minima, inde $\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\frac{y}{2}}{4}}$, deinde $\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\frac{y}{2}}{4},+\frac{\frac{\frac{y}{2}}{4}}{6}}$, atque ita in infinitum, ita ut problema propositum solvere, sit invenire eiusmodi seriei summam.

Termini ipsi quorum summa quaeritur, seu differentiae sunt hoc loco: $\frac{y}{2}+\frac{y}{8}+\frac{y}{48}+\frac{y}{384}$ etc, vel $\frac{y}{1}\ \frac{y}{4}\ \frac{y}{24}\ \frac{y}{192}$ etc, vel divisis omnibus per 4 seriem hanc $\frac{y}{1}\ \frac{y}{6}\ \frac{y}{48}$ et ita porro. Si x posita fuisset $\frac{1}{2}$, $2x$ fuisset 1, et habuissemus seriem

$$\frac{y}{1}\quad\frac{y}{2}\quad\frac{y}{6}\quad\frac{y}{24}\quad\frac{y}{[120]}\ \text{etc.}$$

Eiusmodi ergo seriei sane admirabilis, semperque variantis, ut nec in aequationem revocari possit, summa iniri potest, ope parabolae, scilicet in infinito, ita enim crescunt differentiae inter parabolae applicatas, scimus enim primam seu minimam eius applicatarum. Sed et differentiarum harum series iniri potest, si y seu prima assumta ponatur esse linea assignabilis. Atque ita habemus modum aequationes explicandi serierum replicatarum in se ipsum, ut hoc loco $\frac{y}{MG}$, quando scilicet y explicatur per x et aliud y praecedens. Sed ubi in seriem res reducta est, y est semper eadem.

---

1 In hyperbola primus terminus est $a^2 = y$. a quo decrescitur, in parabola $\sqrt{a}$, a quo crescitur.

8 125 *L ändert Hrsg.*

---

1 Bei der Berechnung der Reihe verwendet Leibniz irrtümlich die Ordinatendifferenz anstelle der Ordinaten (s. aber unten z. B. S. 683 Z. 7 f.), zudem sind die Umformungen der Reihe nicht ganz korrekt. Die Schlussfolgerungen sind aber im Wesentlichen richtig. Insbesondere erkennt Leibniz den fundamentalen Zusammenhang seiner Reihe mit der der reziproken Fakultäten.

Hoc modo infinitae aliae series haberi possunt, ut si MG ponatur $x + \dfrac{xq^2}{q^2 + x^2}$, etc., aliisque modis infinitis.

Sed ut datae seriei summa reperiatur, idem est cum problemate, ex dato loco functionum invenire locum ordinatarum.

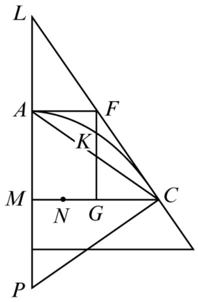


fig. 1.

$AM = x$. $MC = y$. $PC = s$. $PA = v$. $PM = v - x$.
$PC^2 = MC^2 + PM^2, = MC^2 + \underbrace{PA, -AM,}\square$, vel $s^2 = y^2 + v^2 + x^2 - 2vx$.

Ponatur iam $v = \dfrac{a}{2} + x$. erit $v^2 = \dfrac{a^2}{4} + x^2 + ax$. et $2vx = ax + 2x^2$.

fiet: $s^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{4} + x^2 + ax + x^2 - ax - 2x^2$. fietque $s^2 = y^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Quod statim ab initio poterat sine ambagibus dici.

$\dfrac{y^2}{\sqrt{ax}} = \dfrac{x^3}{a^2}$, ergo $\dfrac{y^4}{ax} = \dfrac{x^6}{a^4}$, vel $\dfrac{y^4}{x} = \dfrac{x^6}{a^3}$, vel $y^4 = \dfrac{x^7}{a^3}$, contra $y^4a^3 = x^7$. Unde fit $4y^4a^3 = 7x^6l$, eritque $l = \dfrac{4y^4a^3}{7x^6}$.

$ax^2 - a^3 = y^3$, vel $ax^2 = y^3 + \cancel{a^3}$, unde $2axl = 3y^3 + \cancel{a^3}$, vel $l = \dfrac{3y^3}{2ax}$.

12–678,1 $\frac{3y^3}{2ax}$. *(1)* $\frac{x^2a}{2a^2 + y^2} = l$. reddatur, fiet: $2a^2l + y$ *(2)* $\frac{y^2a}{2a^2 + 2x^2}$ *L*

---

10 Unde fit: l bezeichnet hier und im Folgenden die nach dem Sluse'schen Verfahren bestimmte Subtangente.

$\dfrac{y^2a}{2a^2+2x^2}=l.\qquad \dfrac{2y^2a^2+2y^2x^2}{x^2a}$ [*Formel bricht ab*]

Videtur regressus functionum problema esse quod pertineat ad algebram illam mirabilem, reflexam in se ipsam de qua et alibi monui. V. g. invenire aequationem, quae certo quodam modo tractata, producat aliquid datum. V. g. aequationem invenire, loci cuiusquam naturam exprimentem, in quo differentia inter duo semiquadrata applicatarum, sit data.

Esto l data: $\dfrac{y^2a}{a^2+x^2}=l$. $\dfrac{\dfrac{2y^2a}{2}}{a^2+\dfrac{3x^2}{3}}=l$, fiet $la^2+\dfrac{3lx^2}{3}$, et restituto x in locum l, abiectisque exponentibus multiplicantibus, fiet: $a^2x+\dfrac{x^3}{3}=\dfrac{y^2a}{2}$. Atque ita exemplum habemus data functione inveniendi figuram, quod facit, ut nec de reliquis desperem.

Difficultatem mihi pati videtur regula Slusiana quoad regressum in certae cuiusdam speciei aequationibus: v. g. in hyperbola $y^2=x^2-a^2$. Reiecto a^2 ab aequatione caeterisque ut iubet factis, fiet: $2y^2=2xl$. fietque $\dfrac{2y^2}{2x}=l=\dfrac{y^2}{x}$, positoque $y^2=x^2-a^2$, fiet: $l=x-\dfrac{a^2}{x}$. Quod videtur utique verissimum, sed regressus in his difficilis, videtur tamen agnosci posse quoniam non potest y^2 esse $=x^2$, fieret enim locus linea recta, contra hypothesin, regressus hic foret difficillimus. Eligenda nimirum aequatio, quae hoc modo tractata sibi ipsi consentiat. In eo etiam regressus difficilis, quod bis saepe ponendi termini, iidem, qui se non debent mutuo tollere, sed alter eorum abici.

Nota[:] Non tantum hac methodo summae serierum quarundam sane mirabilium haberi possunt, sed et notari potest, figuram ipsam, cuius applicatarum differentia quaeritur, esse aequalem illis differentiis in numeros arithmeticae progressionis ductis.

Item hoc enuntiandi modo figurae omnes paraboloeides fiunt harmonicae, item omnes hyperboloeides.

6 f. data. Invenire l. esto l. data invenienda = *L ändert Hrsg.* 16 f. In eo . . . abici. *erg. L*

3 alibi monui: s. z. B. *LSB* VI,3 N. 41 S. 408.

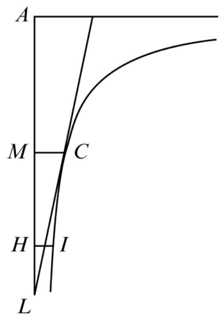


fig. 2.

Est semper in hyp. $AM = ML = x$. Ergo in hyperbola erit

$$\frac{y}{1} \quad a^2 \qquad \frac{y}{2} \quad a^2 - 1 \qquad \frac{y}{6} \quad a^2 - 2 \qquad \frac{y}{24} \qquad \frac{y}{[120]} \qquad \text{etc.}$$

Ergo hyperbola et parabola omnesque hyperboloeides ac paraboloeides hoc quidem modo[,] si istae series in distantias ipsas, seu x ducantur[,] videntur homogeneae esse; imo res exactius investiganda. Sequeretur enim inde esse ut sinus angulorum contingentiae; seu ut minimas applicatas. Sed haec accuratius rimanda. Latet enim in his quiddam mirabile.

Minima omnium applicata in hyperbola infinite abest. Sed nihil refert, si cum parabola conferri non potest, poterit conferri cum hyperboloeide altiori, quarum omnium quadratura habetur.

Inspice hic figuram 1. Ducatur AF parallela MC, et FG parallela AM. F autem est in tangente LC. Summa omnium AF ad AM applicatarum aequatur segmento $AKCA$ duplicato, ut alibi demonstratum est. Igitur summa omnium GC aequatur triangulo AMC. Haec alibi a me inventa ac demonstrata, convertere hoc loco tentemus in rem nostram.

13 *Zur Variante:* rectius mox

2 a^2, a$^2 - 1$, a$^2 - 2$ *erg. L* 2 125 *L ändert Hrsg.* 4 si istae ... ducantur *erg. L* 8 cum *(1)* paraboloeide *(2)* hyperboloeide *L* 13 AMC | duplicato *gestr.* |. Haec *L*

Quaeritur figura, cuius producta ML, sit semper dupla AM, seu $2x$. Manifestum est applicata aliqua posita y, eius differentiam ab applicata sequenti esse $\dfrac{y}{2x}$. Quare minima applicata posita y, erit pene minima $y + \dfrac{y}{2x}$, et posita abscissa x, minima $= 1$, erit pene minima applicata: $y + \dfrac{y}{2}$. Iam posita MC applicatarum minima $= y$. et $AM = 1$. erit $AF = \dfrac{y}{2}$. et $GC = \dfrac{y}{2}$. Porro alibi a me demonstratum est omnium $\dfrac{MG}{2} = \dfrac{AF}{2}$ summam aequari segmento $AKCA$. Ergo posito $NG = \dfrac{AF}{2}$. summa omnium NC aequabitur triangulo AMC. Ergo hoc loco

$$\underbrace{GC = \frac{y}{2} \ + \ NG = \frac{y}{4}}_{NC} \quad = \frac{3y}{4}.$$

ductum in $AM = 1$. seu $\dfrac{3y}{4} \frown x = x$ in $NC = \dfrac{3}{4}y$. triangulo.

9 seu *(1)* $\frac{3\mathrm{y}}{4} \frown 1 = \mathrm{AMC} = \frac{\mathrm{y}}{2} \frown 1$ *(2)* $\frac{3\mathrm{y}}{4} \frown \mathrm{x} =$ *(a)* $\mathrm{AMC} = \frac{\mathrm{y}}{2} \frown \mathrm{x}$ *(b)* x in *L*

7 hoc loco: Leibniz unterscheidet nicht hinreichend zwischen oberer Grenze und Integrationsvariabler; er erhält daher einen Widerspruch, der einen Neubeginn erzwingt.

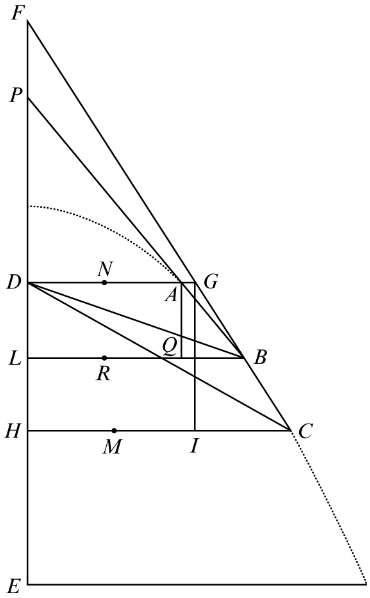


fig. 3.

Si sit polygonum quotcunque laterum AB. BC. etc. sumtaque directrix ad quam latera omnia referantur DE. Ducatur tangens CBF quae rectam DA ipsi DE perpendicularem productam secet in G. Recta $DG = HI$, applicata ad HL, aequatur triangulo DBC duplicato, ut alibi demonstratum est, et ideo HI dimidiata in M, ducta in LH, seu rectangulum LHM triangulo DBC aequatur. Eodem modo $LDN = DAB$.

Data iam $LD = AQ$, et DP, quaeritur $DA = LQ$, et QB.

Esto $LD = x$. $DP = p$. $DA = y$. erit $QB = \dfrac{yx}{p}$. Sed ad ipsam y cognoscendam opus foret alia adhuc aequatione; sed cuius ego principium invenio nullum. Verum est quidem summam omnium RB posita [$2RQ = LQ$.] semper aequari triangulo. Sed non video quid inde duci queat, tentandum tamen.

9 RQ = 2LQ *L ändert Hrsg.*

Esto quaedam recta sumta pro applicata $= b$. positaque minima $x = \xi$. fiet $\frac{b\xi}{p} = b - y$. posito y esse applicatam sequentem quae quaeritur. Erit $b - \frac{b\xi}{p} = y$. positoque $\xi = 1$. et $p = 2x$. fiet $b - \frac{b}{2x} = y$. Iam fiat $DG = g$. patet esse $\frac{DG = g}{DF = x} = \frac{LB = b}{LF = p = 2x}$. fiet $g = \frac{bx}{p}$. hoc loco $= \frac{b}{2}$. et $LR = \frac{b}{4}$. Eritque $QB = \frac{b}{2}$, et $RB = \frac{3}{4}b$, et erit summa omnium $RB = \frac{bx}{2}$.

(At si, sumta sit non b, sed proxime minor nempe $y = b - \frac{b}{2x}$, erit pro x ponendum $x - 1$, et pro p ponendum $2x - 2$, et pro $\frac{yx}{p}$ fiet $b - \frac{b}{2x}, \frown \frac{x-1}{2x-2} = \frac{b}{2} - \frac{b}{4x}$. Subtrahatur ab $y = b - \frac{b}{2x}$, restat $\frac{b}{2} - \frac{b}{4x}$, cui addatur prioris dimidium $\frac{b}{4} - \frac{b}{8x}$, fiet: $\frac{3b}{4} - \frac{5b}{8x} = DG$.)

At summa omnium RB, demta ultima RB, seu demta $\frac{3}{4}b$, aequatur $y \frown \frac{x-1}{2} = b - \frac{b}{2x} \frown \frac{x-1}{2}$. seu $\frac{b \frown x}{2} - \llcorner b - \frac{b}{2x}, \frown x - 1, \lrcorner = \frac{3}{4}b$. sive $\frac{x}{2} - \llcorner 1 - \frac{1}{2x}, \frown x - 1\lrcorner = \frac{3}{4}$. Ita evanescit b et cum eo calculus. Si relinquas $\frac{b \frown x}{2} - \llcorner y \frown x - 1\lrcorner = \frac{3}{4}b$, vel $\frac{bx}{2} - \frac{3}{4}b = y \frown x - 1$, vel $y = \dfrac{\frac{b \frown x}{2} - \frac{3}{4}b}{x - 1} = y$. Ergo $\dfrac{\frac{x}{2} - \frac{3}{4}}{x - 1} = \frac{y}{b}$. Unde nihil novi sed idem fit quod supra $y = b - \frac{b}{2x}$.

8 $-\frac{5b}{8x}$ *(1)*, et ducatur in $x - 1$, fiet: $\frac{3bx}{4} - \underbrace{\frac{5b}{8} - \frac{3b}{4}} + \frac{5b}{8x} = \frac{xy}{2}$. *(2)* $=$ DG.) *L*

1–13 Die folgende Betrachtung leidet unter unklarer Bezeichnungsweise, vor allem die Z. 6–8, welche Leibniz deshalb auch eingeklammert, d. h. aus dem laufenden Text herausgenommen hat. Außerdem enthält sie verschiedene Ungenauigkeiten, insbesondere wiederholt Leibniz in Z. 10 den vorherigen Rechenfehler.

Esto in fig. 2. portio hyperbolae vel hyperboloeidis cuiusdam $MCHI$. maxima applicata assumta $MC = m$. minima assumta $HI = h$. $AM = c$ (vel etiam $AH = AM + MH = c + x$). et semper $AM = ML$. erit differentia inter duas quaslibet applicatas proximas $\dfrac{y}{c+x}$, et quia $y = \dfrac{a^2}{c+x}$, fiet differentia inter duas applicatas proximas $\dfrac{a^2}{c^2+x^2+2cx}$. Unde patet differentias duplicem in modum exprimi posse, vel per modum loci, vel terminis semper in se reflexis, ut si nesciremus esse $y = \dfrac{a^2}{c+x}$.

Prima y nota est, nempe (1) m, fiet (2) $m + \dfrac{m}{c+x}$ proxime maior, (3) $\dfrac{m+\dfrac{m}{c+x}}{c+x}$, (4) $\dfrac{m+\dfrac{m}{c+x}}{c+x}$ *(!)*, vel potius erunt differentiae:

7 *Zu* nempe *am Rande:*

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{m}{} + \cfrac{m}{c+x}}{} + \cfrac{m+\cfrac{m}{c+x}}{c+x}}{\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots} + \cfrac{\cdots\cdots}{c+x}$$

3 = ML. | eritque differentia inter duas quaslibet applicatas proximas c + x *streicht Hrsg.* | erit *L*

7–684,4 Die mnemotechnische Darstellung der Folge ist in sich konsequent, nicht aber die explizite Ausrechnung. Setzt man, wie Leibniz, $c + x = g$ sowie $m = m_o$, ergibt sich für das allgemeine Glied $m_n = \dfrac{m_o\,(g+1)^n}{g^n}$ und für die Differenz $m_n - m_{n-1} = \dfrac{m_o\,(g+1)^{n-1}}{g^n}$. Der Fehler wirkt sich bis zum Ende von Teil 2 aus.

$$\frac{m}{c+x} \qquad \frac{m}{c^2+x^2+2cx} \qquad \frac{m}{c^3+3cx^2+3c^2x+x^3} \qquad \text{etc.}$$

$$\text{Vel} \quad m \quad \frac{mc+mx+m}{c+x} \quad \boxed{\frac{mc+mx+m}{c+x} + \frac{\frac{mc+mx+m}{c+x}}{c+x} \quad \text{vel}}$$

$$\frac{\llcorner mc+mx+m, \frown c+x \lrcorner + mc+mx+m}{c^2+x^2+2xc}$$

seu posito $c+x=g$, fiet: $m \quad \dfrac{mg+m}{g} \quad \dfrac{mg^2+mg+m}{g^2} \quad \dfrac{mg^3+mg^2+mg+m}{g^3}$

Memorabilis haec est observatio, si qua unquam: applicatas hyperbolae ita crescere: Et quoniam idem manet m, eo omnia possunt dividi, atque ipsum omitti, salva seriei ratione. Quoniam autem x semper crescit, arithmetica progressione, etiam g semper arithmetica ratione descrescere putandum est.

Fietque series haec:

$$\begin{array}{llll}
\frac{a^2}{c} \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots 1 \frown m & 1 = m.\ \text{id est, omnia ducunda in } m & & \odot \\
\frac{a^2}{c-1} \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{g+1}{g} \frown m & (g = c - x = c - 1.\ \text{quia } x \text{ hic } = 1.) & = 1 + \frac{1}{g} & \\
\frac{a^2}{c-2} \ldots\ldots\ldots \frac{g^2+g+1}{g^2} \frown m & (g = c-2.\ \text{quia } x = 2.) & = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} & \\
\frac{a^2}{c-3} \ldots\ldots \frac{g^3+g^2+g+1}{g^3} \frown m & (g = c-3.) & = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} & \\
\frac{a^2}{c-4} \ldots \frac{g^4+g^3+g^2+g+1}{g^4} \frown m & (g = c-4.) & = 1 + \frac{1}{g} + \frac{1}{g^2} + \frac{1}{g^3} + \frac{1}{g^4} & \\
\text{etc.} & & &
\end{array}$$

10–15 *Zum Schema:* Error

4 *(1)* Ecce ergo regulam progressionis[:] semper m, ducta in potestatem aliquam ipsius c + x, et aucta eadem m, ducta in potestatem proxime inferiorem ipsius c + x, divisaque per potestatem *(2)* seu *L*

Seriei huius ut fiat additio:

$$\begin{array}{llllll}
1 & & & & & \\
 & \dfrac{2g+1}{g} & & & & \\
\dfrac{g+1}{g} & & \dfrac{3g^2+2g+1}{g^2} & & & \\
 & \dfrac{g^2+g+1}{g^2} & & \dfrac{4g^3+3g^2+2g+1}{g^3} & & \\
 & & \dfrac{g^3+g^2+g+1}{g^3} & & \dfrac{5g^4+4g^3+3g^2+2g+1}{g^4} & \\
 & & & \dfrac{g^4+g^3+g^2+g+1}{g^4} & &
\end{array}$$

et ita in infinitum.

Sed sciendum est hanc additionem decipere, nisi caveamus, quoniam scilicet g semper mutat valorem, resumenda ergo

$$1+\frac{g+1}{g}=\frac{2g+1}{g}$$

$$\frac{2g+1}{g}+(2)\frac{g^2+g+1}{g^2}=\frac{2g(2)g^2+(2)g^2,,+g(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}=$$

$$=\frac{3g(2)g^2+(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}$$

$$\frac{3g(2)g^2+(2)g^2+g(2)g+g}{g(2)g^2}+(3)\frac{g^3+g^2+g+1}{g^3}=$$

$$=3g(2)g^2(3)g^3+(2)g^2(3)g^3+g(2)g(3)g^3$$

Sed haec prolixiora, sufficit ergo repraesentatio sub signo $\odot$

Caeterum ne labamur, aut potius ne supra forte lapsi simus, resumendus est calculus.

11–15 Die geklammerten Zahlen des Schemas bezeichnen Indices, sie stellen einen der frühesten Versuche Leibniz' zu einer Indexschreibweise dar; s. dazu E. Knobloch, *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672–1676)*, 1978, S. 29–31.

$$m \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$m+\frac{m}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{} + \frac{m+\dfrac{m}{g}}{g} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\overline{} + \frac{m+\dfrac{m}{g}+\dfrac{m+\dfrac{m}{g}}{g}}{g}\ldots..$$

$$\ldots..\ m$$

$$\ldots..\ \frac{mg+m}{g}$$

$$\ldots..\ \overline{} + \frac{mg+m}{g(2)g} = \frac{\overbrace{mg^2(2)g+mg^2+mg(2)g+mg}^{☿}}{g^2(2)g}$$

$$\ldots..\ ☿ + \frac{☿}{(3)g} = \frac{\begin{array}{c} mg^4(2)g^2(3)g+mg^4(2)g^2,,+mg^4(2)g(3)g+mg^4(2)g,,+ \\ +mg^3(2)g^2(3)g+mg^3(2)g^2,,+mg^3(2)g(3)g+mg^3(2)g \end{array}}{g^4(2)g^2(3)g}$$

Patet ergo supra fuisse erratum, diversis $\underline{\underline{g}}$ inter se confusis.

Summam huius seriei inire est hyperbolam quadrare; ut tamen inde tentemus approximationes derivare in summam inquirendum est.

Ponatur autem $g=c-x$. vel $c-2x$. vel $c-3x$. ac decrescere semper g eo usque donec plane evanescat. Tunc manifestum est unumquemque terminum per idem g multiplicari per quod dividitur, seu toties poni quot in g sunt unitates; ac proinde

---

1+4 *Neben den g der Hauptnenner jeweils:*
Dazu am Rande: g simplex $= c \mp x$. g nominator binomii significat $c \mp 2x$. trinomii $c \mp 3x$. etc.

$$mg \quad + \quad m \quad + \quad m+\frac{m}{g} \quad + \quad m+\frac{m}{g}+\frac{m+\dfrac{m}{g}}{g} \quad \text{etc.} \qquad \text{vel}$$

$$2mg-m \quad + \quad \frac{m}{g} \quad + \quad \frac{m}{g}+\frac{m+\dfrac{m}{g}}{g} \quad \text{etc.}$$

aequari summae omnium, ac proinde ipsi spatio hyperbolae asymptoto. Atque hoc iterum repeti potest, nisi quod notandum g quod abicitur hoc modo fore maius unitate numero repetitionum termini a quo abicitur. Si iterum repetitur postea abiectio, g erit debito maior binario. Semper autem quoties abiectio fit, toties addi potest mg. Sed g est minor unitate quam proxima ante (Caeterum quod omnium maxime notandum, summa ipsa differentiarum inter applicatas: $m \quad \dfrac{m}{g} \quad \dfrac{m+\dfrac{m}{g}}{g}$ etc. esse $= a^2$ seu ipsi asymptoto.), fiet summa

$$mg, \frown g, +\frac{m}{g} \frown 1+\frac{m}{(2)g} \frown 2 \text{ etc.}$$

Id alias peculiari tabula accuratius deducendum.

---

1 f. 1) restat mg
2) .... $+m$
3) .... $+m+\dfrac{m}{g}$
4) .... $+m+\dfrac{m}{g}+\dfrac{m+\dfrac{m}{g}}{g}$
etc.
Summa omnium applicatarum.
Sed semper appropinquari ad hanc summam potest si ista multiplicatio per g continuetur.

40_3. PLAGULA TERTIA

August ⟨1673⟩

Pars [III$^{\text{tia}}$]

Methodi tangentium inversae et de functionibus.

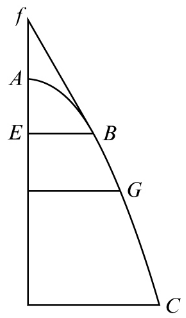
Regressus an haberi possit a tangentibus, aut aliis functionibus ad ordinatas, quaestio est magna.

Exempli gratia[:]

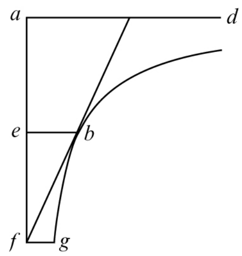
$ax = y^2$, unde fit $al = 2y^2 = 2ax$. Ergo $l = 2x$. Data ergo hac aequatione $l = 2x$, multiplicetur utrumque per a, fiet $al = 2xa$ etc. Si sit $l = x$. $al = ax$.

$a^2 = yx$. Ergo $yx = yx$. Ergo $yl = yx$.

Res est accuratissime investiganda, per canones aequationum, ut appareat quot modis aliquid produci possit ex aliis aequationibus, et quaenam postea ex illis eligi debeat. Est quaedam ipsius analyseos analysis. Sed in qua profecto consistit apex scientiae humanae, in hoc quidem genere rerum.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Si sit parabola, $ABGC$. et spatium hyperbolae asymptoton $adbgf$. ita ut minima seu prima parabolae sit punctum, prima seu maxima hyperbolae sit infinita seu asymptotos. Ante omnia minimae atque maximae applicatarum investiganda quantitas. Nimirum in

3 IV$^{\text{ta}}$ *L ändert Hrsg.* 9 ax. | Ergo ax = ax. a = a. *gestr.* | *L* 10 yx. | $\frac{\mathrm{a^2y}}{\mathrm{xy}}$ = l. Ergo $\mathrm{a^2y = x^2y}$. *gestr.* | *L* 16 adbgf. *(1)* sumanturque in utraque ordinatae duae, EB, FG, et *(2)* ita *L*

parabola, ob $ax = y^2$, posita x minima $= \frac{1}{2}$, fiet $\frac{a}{2} = y^2$, et $y = \sqrt{\frac{a}{2}}$. In hyperbola, ob $a^2 = yx$, posita x minima $= 1$, fiet $a^2 = y$.

Sumatur abscissa in parabola $\underline{AE}$, eiusque dupla in hyperbola $\underline{ae}$. indeque ducta applicata $\underline{EB}$, vel $\underline{eb}$. ad abscissam perpendiculari ad punctum B vel b. ducatur tangens $\underline{Bf}$. vel $\underline{bf}$. quae axi seu directrici assumtae occurant in f. Constat in parabola $\underline{Ef}$ esse $= 2\underline{AE}$, et in Hyperbola $\underline{ef}$ esse $= \underline{ae}$. et quoniam in hypothesi nostra semper $\underline{ae}$ duplum est $\underline{AE}$, erit $\underline{Ef} = \underline{ef}$.

Porro alibi demonstratum est, differentiam inter duas applicatas proximas seu infinite parvo dissitas intervallo esse, *applicatam* alterutram in minimam x ductam, et per *productam* suam divisam. Ideoque cum utrobique producta sit x, et in parabola minima x sit $\frac{1}{2}$, in Hyperbola minima x sit 1. hinc ut a prima applicata ordiamur, series differentiarum in parabola haec erit:

$$0 \qquad \sqrt{\frac{a}{2}} \qquad \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}\;\frac{1}{2}}{1} \qquad \frac{\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\sqrt{\frac{a}{2}}\;\frac{1}{2}}{1}\;\frac{1}{2}}{2}$$

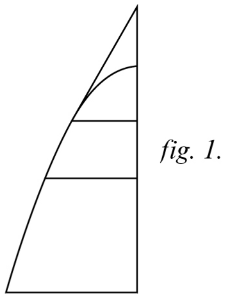
$$0 \qquad \sqrt{\frac{a}{2}} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1}}{2} \qquad \frac{\frac{1}{2}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1} + \frac{\frac{1}{4}\sqrt{\frac{a}{2}} + \frac{\frac{1}{8}\sqrt{\frac{a}{2}}}{1}}{2}}{3} \qquad \text{etc. in infinitum.}$$

$$0 \qquad \boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{2}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{4}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{8}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} \qquad \frac{1}{6}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{12}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{24}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}} + \frac{1}{48}\boxed{\sqrt{\frac{a}{2}}}$$

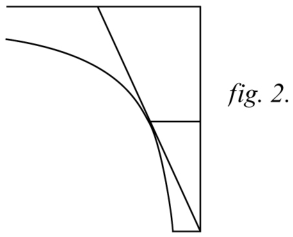
Si sit hyperbola, pro $+$ adhibendum $-$. fietque[:]

$$a^2 \qquad \frac{a^2}{1} \qquad \frac{a^2 - \frac{a^2}{1}}{2} \qquad \frac{a^2 - \frac{a^2}{1} - \frac{a^2 - \frac{a^2}{1}}{2}}{3}$$

8 Porro: s. o. N. 40_1 S. 660 Z. 5 f.



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Si sumatur non asymptotos ut fig. 2. sed axis hyperbolae, vid. fig. 1. pro directrice, applicata omnium minima sic habebitur[:] $2ax + x^2 = y^2$, vel $\sqrt{2a+1} = y$. cum in parabola sit $\sqrt{a} = y$. In circulo erit $\sqrt{2a-1} = y$. Porro $2al \mp 2xl = 2y^2$, fiet $l = \dfrac{y^2}{a \mp x} = \dfrac{2ax + x^2}{a \mp x} = x + \dfrac{ax}{a \mp x}$.

Ergo posita $\sqrt{2a \mp 1} = y$, fiet:

$$y \qquad \frac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} + \dfrac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2}}{6a \mp 3} \qquad \text{etc.}$$

Quoniam autem differentiae in distantias a vertice 1. 2. 3. 4. ... ductae dant summam complementi figurae, hinc[:]

$$y \qquad \frac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{2a \mp 1} \qquad \frac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1} + \dfrac{y + \dfrac{y \frown a \mp 1}{2a \mp 1}}{4a \mp 2}}{2a \mp 1}$$

Complementum circuli aut hyperbolae latus rectum transverso aequale habentis ad quadratum circumscriptum.

2 *(1)* An fortasse comparatio *(2)* Si L

6 fiet: Die Nenner in der Folge sind bis auf den Nenner des zweiten Gliedes unrichtig: anstelle von $2an \mp n$ müsste es jeweils $2an \mp n^2$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent weiter.

Inventum hoc est universalissimum, cuiusque ope progressio ordinatarum cuiuscunque figurae exhiberi potest geometrice infinita serie numerorum rationalium, ita ut habeatur methodus universalis, exhibendi quadraturas arithmeticas, prorsus exactas, et mechanicas quantumlibet geometricis propinquas, usui cuilibet suffecturas; data figura quacunque.

Hoc autem in qualibet figura succedere cuilibet manifestum est, quia in qualibet figura $\underline{l}$ exprimi potest fractione quam nulli ingrediuntur termini irrationales. At inquies interdum si alterutram indeterminatarum eleminare velis, non poteris carere terminis irrationalibus. Respondeo non esse necessariam hanc eliminationem, etsi quando fieri potest salva rationalitate, utilis sit. Quoniam enim ipsa y non variatur, contenti enim prima sumus, quam cognitam suppono. Caetera omnes ex ipsa pariter et x analytice componuntur. Opus autem est ad hunc calculum y primam assumere non minimam maximamque applicatarum, finitam, aut infinite parvam quoties illa non potest explicari, nisi per irrationalitatem; sed potius aliquam finitam, assumtam, pro arbitrio. Imo nil refert aliquando etsi eligas minimam vel maximam applicatarum, licet irrationales; quoniam statim eliminari potest, omnibus per eam divisis; quoties scilicet illa ex valore ipsius $\underline{l}$ eliminari potuit.

Quadratura arithmetica est aream figurae exacte ac geometrice exhibere infinita serie numerorum rationalium. Geometrica ac plane perfecta est quadratura, quoties finita magnitudine exacte exhiberi potest area; denique mechanica est cum area finita exhiberi potest magnitudine, cuius differentia a vera tam parva est, ut in praxi negligi possit.

Quadratura circuli arithmetica a nemine ante me data est, mechanica, quae ad partes quoque eius geometrice designabiles extendatur, ita absoluta.

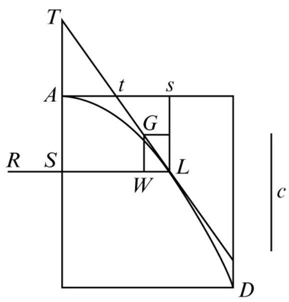
Hactenus de arithmetica figurata tam multa post Diophantum scripta sunt, sed ita ut ultra quadrata, cubos, etc. tum trigona, pentagona, pyramides etc. breviter ultra figuras rectilineas itum non sit. At parabolam, hyperbolam, quod parum est, imo circulum et ellipsin repraesentare in numeris, et quidem non per approximationem sed exacte ac geometrice, imo generaliter omni figurae geometrice arithmeticam respondentem exhibere rationalem (nam irrationalem cuilibet facile quivis exhibuerit); res fortasse a nemine ne

15 aliquando *erg. L* 18 est *(1)* exhibere infinitam seriem *(2)* aream *L* 20 exacte *erg. L*
23 f. Quadratura ... extendatur, *(1)* a tabulis ⟨—⟩ *(2)* ita (*a*) per (*b*) absoluta. *später erg. L*

sperata quidem aut suspicione libata est. Adeo ut etiamnum plerisque impossibilem visum iri, non dubitem.

Vieta numerosam aequationum omnium resolutionem et expressionem mechanicam absolvit, et mathematicam practicam ingenti beneficio sibi aeternum devinxit. Restabat quadratura figurarum omnium arithmetica, et mechanica areae cuiusque expressio, sed methodo facili et universali. Huius ego problematis maximi, si quod aliud in geometria, si ad usum vitae inventa exigantur, detectionem mihi arrogare possum.

Sed hinc videtur sequi aliquid absurdum; nimirum seriem aliquam terminorum inter se asymmetrorum posse exprimi serie terminorum rationalium, homogenea. Exempli causa sinus circuli rectos seu ordinatas nemo negabit esse saepe sinubus versis, sive abscissis asymmetros. Sed credibile est portiones abscissas saepe esse abscissis asymmetras. Hoc tamen loco dicitur eas serie numerorum rationalium explicari. Sed respondendum est primum resolutione in minima facta rationalia ab irrationalibus differe non nisi magnitudine infinite parva; deinde considerandum est terminum cuiuslibet seriei (non infinite parvum) explicari aliis terminis infinitis in dimensiones usque infinite parvas usque extenuatis.



[*Fig. 5*]

Sit curva LD, cuius sinus (id est ordinata normalis) SL, abscissa AS, tangens TL, triangulum characteristicum GWL. Sique fiat ut ST ad SL, vel GW ad WL, ita recta quaedam constans alterius cuiusdam figurae eiusdem axis sinum respondentem

2 f. dubitem. *(1)* Stevinus *(2)* Vieta *(a)* numerosam aequationum omnium resolutionem primus absolvit *(b)* mechanicam aequationum omnium resolutionem absolvit *(c)* numerosam *L* 4 mathematicam *(1)* mechanicam ingenti *(2)* practicam *L* 10 saepe *erg. L*

(respondentem inquam[,] id est eiusdem abscissae) SR, portio quaelibet ab altera figura abscissa per sinum eius, aequabitur rectangulo SL in c.

Cuius rei demonstratio haec est perfacilis: $\frac{TS}{SL} = \frac{GW}{WL}$ vel $\frac{g}{w}$ per constructionem; $= \frac{c}{RS = r}$ ex hypothesi, ergo $cw = rg$. Quod rerum harum intelligentibus sufficit ad demonstrationem.

Exemplo utamur, si figura sit parabola erit $ST = 2x$, posita $AS = x$, et $SL = \sqrt{ax}$, erit $\frac{g}{w} = \frac{2x}{\sqrt{ax}} = \frac{c}{r}$. Ergo $r = \frac{c\sqrt{ax}}{2x} = y$, fiet: $2yx = c\sqrt{ax}$, vel $4y^2x^2 = c^2ax$, vel $4y^2x = b^3$. Hyperbola cubica, cuius proinde habetur quadratura. Quare omnium figurarum haberi potest quadratura, quarum sinus sunt ad rectam quandam constantem, ut sunt sinus alterius cuiusdam figurae cognitae ad suam tangentem; seu ratio sinuum trianguli characteristici figurae cognitae.

Contra si complementum parabolae sumatur, cuius applicata Ls, abscissa As, tunc producta st ita habetur: $ax = y^2$, unde $ax = 2yp$, unde fit $\frac{ax}{2y} = p$, vel $\frac{y^2}{2y} = \frac{y}{2}$. Est ergo $As = 2ts$. Sed nec opus erat ista quaeri; sufficit esse sL ad st, ut g ad w, vel $\frac{y^2}{a}$ ad $\frac{y}{2} = \frac{g}{w} = \frac{\cancel{2}x}{\sqrt{ax}} = \frac{\cancel{2}y^2}{ya}$. Ergo $\frac{xay}{y^2\sqrt{ax}} = 1$. Quod est verissimum. Tantum ergo sine novo calculo inverti sufficit superiorem, et duplicem ei valorem accommodari.

12 si *(1)* supplemen *(2)* com *(3)* supplementum *(4)* complementum *L*

$\frac{g}{w} = \frac{2r}{\sqrt{ax}} = \frac{c}{r}.$ Ergo $r = \frac{c\sqrt{ax}}{2x}$, unde locus hic: $4x^2y^2 = \underbrace{c^2ax}_{b^3}$, vel locus: $xy^2 = a^3$.

H y p e r b o l a c u b i c a.

———— $= \frac{r}{c}.$ Ergo $r = \frac{2cx}{\sqrt{ax}}$. Unde locus hic: $y^2ax = 4c^2x^2$, vel locus hic: $y^2 = ax$.

P a r a b o l a i p s a .

— $= \frac{2y}{a} = \frac{c}{r}.$ Ergo $r = \frac{ca}{2y}$. Unde locus hic: $yx = a^2$. H y p e r b o l a .

———— $= \frac{r}{c}.$ Ergo $r = \frac{2yc}{a}$, unde locus: $ax = ya$. T r i a n g u l u m .

Ergo semper duplex tantum locus, $\frac{g}{w} = \frac{c}{r}$, et $\frac{g}{w} = \frac{r}{c}$, ita ut semper c sit differentiae abscissarum proportionalis.

Si figura data sit hyperbola, et axis sit asymptotos, aequatio est: $a^2 = yx$. Unde $yl = xy$. Ergo $l = x$, vel $yx = xl$, ergo $l = y$. Ergo $\frac{g}{w} = \frac{x}{\frac{a^2}{x}} = \frac{x^2}{a^2}$. Idemque est etsi y assumas, substituto tantum y in locum x. Hinc duplex sufficit constructio, loco quadruplicis:

$\frac{g}{w} = \frac{x^2}{a^2} = \frac{c}{r}.$ Ergo $r = \frac{ca^2}{x^2}$. Unde locus: $x^2y = a^3$. H y p e r b o l a c u b i c a.

— $= \frac{y^2}{a^2} = \frac{r}{c}.$ Ergo $r = \frac{cx^2}{a^2}$. Unde locus: $ay = x^2$. P a r a b o l a.

Si pro axe spatii assumatur ipse hyperbolae axis, aut basis ei perpendicularis, aequatio est (sumta hyperbolae specie in qua latus rectum transverso aequale): $ax + x^2 = y^2$.

---

4 *Zu* P a r a b o l a i p s a : Error ut mox dicetur.

5 *Zur linken Seite:* $x = \frac{y^2}{a} \times \frac{y}{2}$ fiet $\frac{2y}{a}$.

Zu H y p e r b o l a : Imo e r r o r quoniam si y arithmetice crescit, tunc, r erit applicata hyperbolae, sed ipsae GW quibus applicatur erunt inaequales. Sin y est $= \sqrt{ax}$, fiet $y = \frac{a^2}{\sqrt{ax}}$, $y^2 = \frac{a^4}{ax}$, et $y^2x = a^3$, ut supra.

6 *Zu* T r i a n g u l u m , *gestr.:* Error, ut paulo ante.

Sed ut calculi similis repetitionem vitemus, et circulum (vel ellipsin) et hyperbolam simul complectamur, fiet aequatio: $2ax \mp x^2 = y^2$.

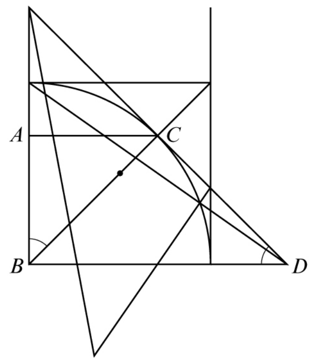
Sed antequam huc veniamus, subit animum experiri aliquid quod circa parabolam tentare obliti sumus, aequatio ibi fuit $ax = y^2$. Unde si abscissa est x, seu cum directrix est axis, fit $al = 2y^2$. Ergo $l = \dfrac{2y^2}{a}$, eritque ratio $\dfrac{g}{w}$, vel $\dfrac{l}{y} = \dfrac{al}{2y^2}$, quod fieri potest $= \dfrac{r}{c}$, unde fieret $\dfrac{alc}{2y^2} = r$. Sed inde non potest fieri locus, quia sic una tantum habetur incognitarum in aequatione, nisi ea explicetur. Sed si explicetur incidemus in loca iam exposita. Nihil ergo praetermissum fuit.

Ut ergo ad circulum (vel ellipsin) et hyperbolam nunc pergamus, duplex ineundus valor ipsius p. Primum ex x abscissa, deinde ex y abscissa.

Ex x ita: $2ax \mp x^2 = y^2$, unde fit $2ap \mp 2xp = 2y^2$, vel $p = \dfrac{y^2}{a \mp x} = \dfrac{2ax \mp x^2}{a \mp x}$. Sed si x sit abscissa, fiet: $2ax \mp 2x^2 = 2yp$, vel $p = \dfrac{ax \mp x^2}{y}$. Iam ut pro x substituamus eius valorem, considerandum est, esse $2ax \mp x^2 \mp a^2 = y^2 \mp a^2$, atque ideo $a^2 + x^2 \mp 2ax = a^2 \mp y^2$, ergo $\left.\begin{array}{r} a \mp x = \\ \\ x \mp a = \end{array}\right\} \sqrt{a^2 \mp x^2}$.

14–16 NB. Haec dubitatio alio signo exprimenda.

5 eritque: Die anschließende Rechnung ist nicht konsequent durchgeführt, die Schlussfolgerung bleibt davon unberührt.



[*Fig. 6*]

Et si subsistamus intra quadrantem circuli, quia tunc x, sinus versus, nunquam maior fit quam a, radius, possumus tuto dicere: $a \mp x = \sqrt{a^2 \mp y^2}$ et $\mp x = \sqrt{a^2 \mp y^2} - a$, vel $x = \mp \sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a$. Ergo $x^2 = + \underset{\odot}{2a^2} \mp y^2 \boxed{+a^2} - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}$, $x^2 = 2a^2 \mp y^2 - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}$, ergo $p = \dfrac{\mp a\sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a^2 + 2a^2 \mp y^2 - 2a\sqrt{a^2 \mp y^2}}{y}$. Ergo iuxta primum ipsius p valorem erit: $\dfrac{g}{w} = \dfrac{2ax \mp x^2}{a \mp x, \frown \sqrt{2ax \mp x^2}} = \dfrac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{a \mp x} = \dfrac{c}{r}$. Ergo $\dfrac{ca \mp cx}{\sqrt{2ax \mp x^2}} = r = y$. Unde locus talis: $2y^2ax \mp y^2x^2 = c^2a^2 + c^2x^2 \mp 2c^2ax$. Ergo $y^2 = \dfrac{c^2a^2 + c^2x^2 \mp 2cax}{2ax \mp x^2}$, vel $y = \dfrac{a - x, \frown c}{\text{sinus} \begin{cases} \text{circuli} \\ \text{hyperbolae} \end{cases}}$.

Positoque $c = a$, et aequalitate resoluta in proportionem, fiet $\dfrac{y}{a} = \dfrac{a - x \text{ sinus compl.}}{\text{sin. rect.}}$, seu in circulo, figura proxime adiecta, $\dfrac{CD = r}{BC = a} = \dfrac{AB = a - x}{AC = \text{sin. rect.}}$. Quod est verissimum, et exhibet nobis quadraturam tangentium complementi.

---

1 [*Fig. 6*]: Die Figur hat Leibniz an einer freien Stelle des Randes ergänzt; sie ist mittels eines Verbindungsstriches mit dem Wort figura in Z. 10 verbunden.

$\frac{y}{p} \quad \frac{\sqrt{2ax \mp x^2}}{} \frown \frac{a \mp x}{2ax \mp x^2}$ fiet $\frac{a \mp x}{\sqrt{2ax \mp x^2}}$. Unde patet quod hic dicitur idem esse, quod differentias invenire applicatarum, divisa qualibet per eius tangentem productoque per rectam constantem c vel a multiplicato.

Iuxta posteriorem valorem ipsius p erit in circulo

$$\frac{g}{w} = \frac{\mp ay\sqrt{a^2 \mp y^2} \mp a^2 y}{3a^2 - y^2 - 3a\sqrt{a^2 \mp y^2}} = r$$

cuius figurae habetur quadratura hoc modo, sed ipsius r constructio investiganda.

1–3 $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{p}}$ . . . multiplicato. *erg. L*

4 erit in circulo: Bei der Berechnung von r fasst Leibniz die Doppelvorzeichen nicht richtig zusammen; außerdem hat er nicht völlig zu Ende gerechnet. Richtig sollte es heißen: $r = \frac{a^2y - ay\sqrt{a^2 - y^2}}{y^2 - a^2 + a\sqrt{a^2 - y^2}}$.

40_4. PLAGULA QUARTA

August. 1673

Pars [quarta]

Methodi tangentium inversae seu de functionibus

Si sit figura $\dfrac{a^3}{a^2+y^2} = x$, fiet $a^3 = a^2x + y^2x$, unde fiet ad p habendam assumta primum x abscissa: $-2y^2x = a^2p + y^2p$, et $p = \dfrac{2y^2x}{a^2+y^2}$, et quia $y^2 = \sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}}$, fiet $\dfrac{2xa\sqrt{ax-x^2}}{a^2+a\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}}} = p$, et quia $\dfrac{g}{w} = \dfrac{p}{y}$, $\dfrac{g}{w} = \dfrac{2ax\sqrt{ax-x^2}}{a^2\sqrt{\dfrac{a^3x-a^2x}{x}} + a \frown \dfrac{a^3x-a^2x}{x}} = \dfrac{c}{r}$, et erit $r = c\cancel{a} \frown \dfrac{a\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{a^3-a^2x}{x}}{2\cancel{a}x\sqrt{ax-x^2}} = \dfrac{ca\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{ca^3-ca^2x}{x}}{2x\sqrt{ax-x^2}}$, vel

$r = y \quad = \dfrac{a^2\sqrt{\dfrac{a^3-a^2x}{x}} + \dfrac{a^4-a^3x}{x}}{2x\sqrt{ax-x^2}}$, vel

3 tertia *L ändert Hrsg.* 6 $\dfrac{2y^2x}{a^2+y^2}$, | quod est memorabile, unde posi *gestr.* | et *L* 7 f. $\dfrac{c}{r}$, *(1)* vel multiplicata functione per x, r = $ca^3\sqrt{ax-x^2} + ca^2 \frown \llcorner a - x$ *(2)* et erit *L*

5–700,9 In direkter Fortsetzung von Teil 3 versucht Leibniz weitere Beispiele zu behandeln, kommt aber aufgrund von Rechenfehlern sowie unklarer Bezeichnungsweise kaum zu schlüssigen Ergebnissen.

$$y^2 = \frac{a^4 \frown \dfrac{a^3 - a^2x}{x} + \dfrac{a^8 + a^6x^2 - 2a^7x}{x^2} \;\Big|\; + \;\; 2a^2\sqrt{\dfrac{a^3 - a^2x}{x}} \frown \dfrac{a^4 - a^3x}{x}}{\boxed{4x^2 \frown \llcorner ax - x^2 \lrcorner} \qquad\qquad \boxed{4x^2 \frown \llcorner ax - x^2 \lrcorner}}$$

$$4x^2y^2ax - 4x^4y^2$$

$$- \;\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots =$$

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} = x. \text{ Ergo } \frac{\dfrac{a^6}{a^4+y^4+2a^2y^2} = x^2}{\dfrac{2y^2x}{a^2+y^2} = p} = \frac{\dfrac{a^6}{a^2+y^2}}{2y^2x = \dfrac{2y^2 \frown a^3}{a^2+y^2}} = \frac{a^6}{2y^2a^3} = \frac{a^3}{2y^2}.$$

$\dfrac{a^3}{y^2} = x$. Ergo $a^3 = y^2x$. Unde si fiat: $\cancel{y^2}x = 2ylx = y^2x$, fiet $2l = x$, vel $l = \dfrac{x}{2} = p$.

Iam $\dfrac{y^2}{\frac{x}{2}} = \dfrac{2a^3}{x^2}$. Unde res sequitur memorabilis in hyperboloeide cubica reductas esse figuras homogeneas. Quod me credere facit, peculiarem aliquem huius figurae usum esse.

---

8 *Dazu am Rande:* $\dfrac{a\sqrt{\dfrac{a^3}{x}}}{\dfrac{x}{2}} = y, \quad \dfrac{4a^5}{x^3} = y^2.$

$\dfrac{a^4}{y^3} = x$. Ergo $a^4 = y^3x$, unde si fiat $\cancel{y^3}x = 3y^2lx = y^3x$, et $p = \dfrac{x}{3}$. Iam $y = \sqrt{③}\ \dfrac{a^4}{x}$, et $\dfrac{y^2}{p} = \dfrac{\sqrt{③}\ \dfrac{a^8}{x^2}}{\dfrac{x}{2}} = e = 2\sqrt{③}\ \dfrac{a^8}{x^5}$, vel $e^3 = \dfrac{a^8}{x^5}$, unde locus $y^3x^5 = a^8$.

Paraboloeis: $a^2x = y^3$. Ergo $a^2p = 3y^3 = 3a^2x$, ergo $p = 3x$. $y = \sqrt{③}\ a^2x$, et $\dfrac{y^2}{p} = \dfrac{\sqrt{③}\ a^4x^2}{3x} = e$. Ergo $\sqrt{③}\ a^4x^2 = 3ex$, et $a^4x^2 = 27e^3x^3$, fietque locus: $a^4 = y^3x$.

$ax^2 - x^3 = y^3$, est momentum [quadratorum] sinuum circuli, ex vertice. $2axp - 3x^2p = 3y^3$. Ergo $p = \dfrac{3y^3}{2ax - 3x^2} = \dfrac{3ax^2 - 3x^3}{2ax - 3x^2} = \dfrac{3ax - 3x^2}{2a - 3x}$, hoc dividatur $y = \dfrac{\sqrt{③}\ ax^2 - x^3 \frown 2a - 3x}{3ax - 3x^2} = \dfrac{ax^2 - x^3 \frown 8a^3 - 36a^2x + 54ax^2 - 27x^3}{}$ [*bricht ab*]

$\dfrac{a^2}{\sqrt{ax}} = y$, fiet $a^2 = y\sqrt{ax}$, et $a^4 = y^2ax$, et $a^3 = y^2x$.

---

1 *Dazu am Rande:* $\dfrac{ay}{p} = \dfrac{a\ \sqrt{③}\dfrac{a^4}{x}}{\dfrac{x}{2}} = y, \quad 2a\ \sqrt{③}\dfrac{a^4}{x} = yx$. Ergo $\dfrac{8a^{\cancel{5}\,7}}{\cancel{x}} = y^3x^{\frac{2}{\cancel{3}}}$.

[*sic!*]

8

$$\begin{array}{l}
2a \;-\; 3x \\
\underline{2a \;-\; 3x} \\
4a^2 + 9x^2 - 12ax \\
\underline{\qquad 2a \;-\; 3x} \\
\qquad\qquad 36 \\
8a^3 + 18x^2a - \cancel{24}a^2x - \cancel{12a^2x} - 27x^3 + 36ax^2
\end{array}$$

1 $\cancel{y^3}$x = *(1)* 2y²lx = y³x, et p = $\frac{x}{2}$ *(2)* 3y²lx *L* 6 quadratorum *erg. Hrsg.*

Aequatio curvae quam Cartesius post conicas simplicissimam putat, lib. 2 pag. 37. haec affertur:

$$y^3 - 2ay^2 - a^2y + 2a^3 = axy. \quad \text{vel} \quad x = \frac{y^2}{a} - 2y - a + \frac{2a^2}{y}.$$

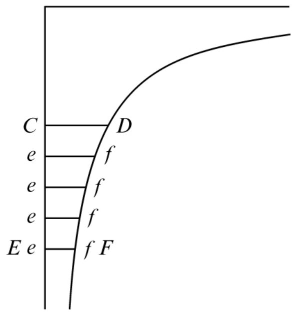
Sed si hoc est, tantum nascetur ex [compositione] in unum quatuor aliarum linearum, ordinatae rectanguli, ordinatae trianguli, ordinatae parabolae, et ordinatae hyperbolae. Ita conchoeis ex ordinata circuli et hyperbolae ad asymptoton, componitur.

Ait Cartesius lineas altiorum graduum potius a mechanica quam geometria fore repudiandas, ob difficilem earum descriptionem. Id nimis verum est: etsi enim excellens sit earum contemplatio ob pulchritudinem admirandae rerum harmoniae, fatendum est tamen usum mechanicum non respondere. Quare illud utile futurum est, modum investigare quo linea quaelibet altior, ex ordinatis inferiorum composita intelligi possit. Sed quoniam descriptiones eiusmodi non fierent nisi per puncta, cogitavi an non vocata in subsidium optica, descriptae separatim inter se iungi possint. Idque duabus datis facile fieri potest, si oblique aspiciantur, ut non possit agnosci inter eas intervallum. Atque ita etiam in chartam aliam oblique reflecti possunt, *où ils passent pour chefs, à present, comme les cadets dans un pays estranger ne brisent plus leurs armes*. Et ita iam transferri possunt in situm perpendicularem, prout inspiciuntur. Et his rursus alia addi figura. Ita ut optice sine ullo motu, nec per puncta describi possint.

Statica mea, novae scilicet librae genere adhibito, figura data quaelibet secari potest in quavis ratione data. Unde sequitur, descripta figura angulorum, posse ope huius instrumenti angulum secari in quavis ratione data: non per puncta nec arithmetice; sed geometrice, ita ut etiam exhiberi possint huius instrumenti ope partes irrationales inter se.

4 comparatione *L ändert Hrsg.* 10 est, *(1)* | efficere *streicht Hrsg.* |, ut l *(2)* modum *L*

1 Cartesius: *Geometria*, *DGS* I S. 37 f. 7 Ait Cartesius: s. insbesondere den Beginn des 2. Buches der *Géométrie*, *a. a. O.* S. 17.



[*Fig. 1*]

Eadem methodo iam facile habentur quotcunque mediae proportionales. Sed quod attinet medias proportionales quotcunque, idem rectius fieri potest figura logarithmorum sive harmonica, id est hyperbola vera, ut angulorum sectio, falsa. Ita quoniam, ut ex inventis a Gregorio a S. Vincentio constat, $CDef$ sunt ut logarithmi arithmetice proportionalium CE. Sumta ergo portione eiusmodi spatii hyperbolici $CDEF$, statim per staticam in ea exhiberi potest constructio logarithmorum geometrica; sectioque rationis, et inventio quotcunque mediarum proportionalium.

Potest ergo in eiusdem tabulae orichalcinae una facie describi figura angulorum, seu hyperbola falsa, et in altera figura logarithmorum sive hyperbola vera. Si maior sit tabula plures aliae figurae utiles inscribi possent, quod usum haberet ad plura problemata simul solvenda. Solutio autem plurium problematum simul, usum haberet admirabilem, ad solvenda quaedam problemata, quae alioquin superare videntur vires humanas, neque redigi posse in aequationem. Imo si non realiter at saltem optice plures simul figurae delineari possent in eadem tabula, si aliquid illuminans, simul descenderet, figuramque in ea describens. Ita plura simul solvi possent problemata in illa.

Archimedes videtur staticae usum introduxisse in geometriam, non tantum ob contemplationem centrorum gravitatis, atque inde manantes solidorum ac superficierum revolutione genitorum mensuras; sed et quod eius ope problemata infinita solvi posse viderentur sine calculo: exempli causa, manifestum est aream cuiuslibet figurae haberi posse, si prisma habeatur ei aequiponderans; neque opus est, ut alias foret, figuram datam in

21 si *(1)* cylinder *(2)* prisma *L*

4 f. ex inventis a Gregorio: *Opus geometricum*, 1647, S. 594–597. Auf diese Stelle spielt Leibniz S. 703 Z. 30 noch einmal an.

massam quandam informem atque inde in prisma vel cubum redigere, ut eius amplitudo habeatur. Cum ope ponderum duplicata quodammodo, ac bis habeatur diversarum figurarum; quarum statim datur comparatio.

Sed maximae difficultates in praxi obiectae sunt; primum quod ponderare corpora incommodum, quoties magna sunt; deinde quod ponderatis etiam corporibus, exacta non potest haberi mensura; sed velut cum figurae per puncta describuntur; intervalla negliguntur; quaeriturque additis ablatisque ponderibus donec attingatur vera; quod si more Archimedis immergere corpora liquori, atque ita liquorem ponderare velis; patet cum multis esse difficultatibus conflictandum. Denique ad corpora non nisi homogenea ponderanda adhiberi statica potest. Ac quod duas attinet primam ac postremam, eas nec a me sublatas fateor, nec a quoquam tolli posse arbitror.

Sed et ideo staticae geometricae usum esse quoque debere arbitror; non ad quarumlibet figurarum datarum areas metiendas, cum plerumque neque ponderari possint, neque sint homogeneae; verum ad metiendas atque dividendas figuras quasdam in corporibus quibusdam ad eam rem commodis, a nobis pro arbitrio assumtis, quae deinde pro instrumentis servire possint.

Atque si his limitibus vota nostra includantur, superest tantum media incommoditas; quae vero ope bilancis meae autometrae [superatur], quae sibi ipsi aequipondium definit. Ita ergo instrumenta duo statim elaborari possunt, quorum ope possint anguli ac ratio in data ratione secari, at pro aliis figuris innumeris modulus velut quidam constitui, unde eas proportionaliter dimetiamur. Cum proportionalis ista divisio postea ope opticae fieri possit. Sed etsi figura data non sit modulo similis, modo sit eiusdem speciei, alius praesto est plerumque calculus, quo ad eum redigatur, ut in circulo, et ellipsi, hyperbola circulari et alia quavis.

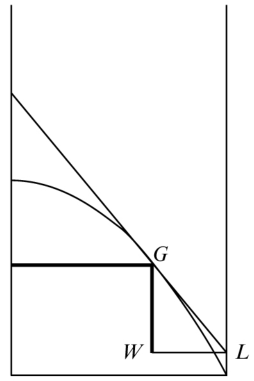
Quod attinet duo illa instrumenta, quibus anguli ac ratio secentur, fateor utrumque etiam sine statica ope chordarum flexibilium absolvi posse. Nimirum si arcus circuli et arcus parabolae in rectas extendantur. Etsi quoad arcum parabolae res paulo sit difficilior, quoniam is non quadrilineo hyperbolico, sed ipsi hyperbolae proportionalis est.

Quoniam tamen elegantissima visa est demonstratio figurarum geometricarum quarum altera a Gregorio a S. Vincentio, altera a me inventa est, quarum illa rationi, haec angulo syntomos est; dignissimas putavi quae afferrentur.

1 in *(1)* quadratum redigere; ut eius area *(2)* prisma *L* 14 quasdam *(1)* in eam rem commodas, a nobis pro arbitrio assumtas *(2)* in *L* 18 superatur *erg. Hrsg.*

Porro data qualibet figura fieri potest figura segmentorum, item figura arcuum, cuius ope tum segmenta eius tum curvae in data ratione secari possint.

Nota: tabulas eiusmodi aquae immergendas posse ex ligno esse, orichalco obducto.



[*Fig. 2*]

Duae quaestiones: una de invenienda descriptione curvae ex eius elementis, altera de invenienda figura ex datis differentiis, altera redigi potest in eandem.

Quoniam semper elementum curvae GL intelligi potest $Rq.$ ex $GW^2 + WL^2$ vel $l = \sqrt{g^2 + w^2}$, et quia g^2 semper eadem, tunc fiet $l = \sqrt{\alpha^2 + w^2}$.

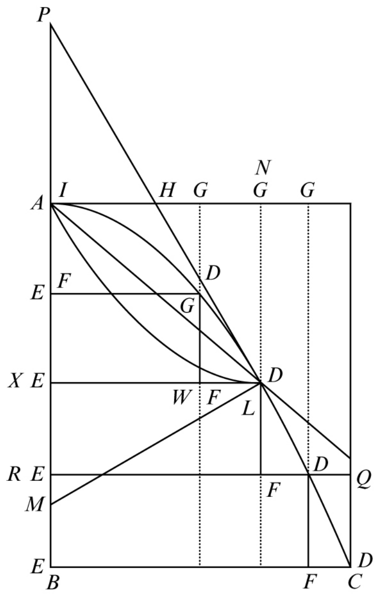
Data ergo v. g. $\dfrac{a}{x} = w$. fiet: $\sqrt{\alpha^2 + \dfrac{a^2}{x^2}} = GL$ vel l. eaque aequatio progressionem ipsorum GL exprimet. Potest et posita $\alpha = 1$. exprimi $\sqrt{1 + \dfrac{a^2}{x^2}}$. Sed et a significare potest 1. Sed et a posito $= 1$. erit $\alpha = \dfrac{a}{a}$, ergo $= 1$. tantum inferioris dimensionis, fietque $\sqrt{1 + \dfrac{1}{x^2}}$. Quaerenda ergo est descriptio huius curvae.

Contra[:] quaestio de invenienda curvae descriptione ex datis elementis, in alteram reduci potest. Posito enim eius elementa esse $\dfrac{\sqrt{ax + x^2}}{a}$, vel $\dfrac{\sqrt{x + x^2}}{1}$. ut curvae paraboli-

13 Contra: Die Berechnung des Bogenelements der Parabel und der Reihe der Differenzen ist fehlerhaft. Die bedeutsame Schlussfolgerung bleibt davon unberührt.

cae[,] subtrahenda $\sqrt{1}$. vel 1. fiet w differentia, eaque ergo erit $\sqrt{\sqrt{x+x^2}-a^2}$ vel $\sqrt{\sqrt{2}-a^2}$. $\sqrt{\sqrt{6}-a^2}$. [etc.]

Hinc intelligi potest, fere totam doctrinam de methodo tangentium inversa revocabilem videri ad quadraturas.



[*Fig. 3*]

Esto figura quaelibet orthogonia $ABCDA$, ductisque applicatis quotcunque ED, ad abscissas AE arithmetice crescentes, et signatis FD applicatarum differentiis; manifestum est ductis FG in FD, seu ductis differentiis applicatarum in abscissas, momentum hoc differentiarum esse complementum figurae datae ad rectangulum isoparallelum.

Sunto exempli causa differentiae istae: $\frac{x^2}{a^2}$, ducantur in x, fiet $\frac{x^3}{a^2}$. Quaeritur progressio ipsarum ED continue descrescentium, nam, unam ex ipsis pro arbitrio assumtam pono, id est figura talis, cuius summa summae omnium $\frac{x^3}{a^2}$ complemento sit ad rectan-

2 etc. *erg. Hrsg.*

gulum factum ex maxima AE assumta, nempe AB, in maximam ED assumtam, nempe BE.

Si vel hoc solum problema solvi posset, data producta invenire figuram haberetur tetragonismus universalis. Cum enim data sit figura cuius summa quaeritur $\frac{x^2}{a}$, ac proinde differentia applicatarum figurae quaerendae $\frac{x^2}{a^2} = WD$, et constat esse $GW = \frac{a}{a} = 1$, fiet $\frac{PX}{XD} = \frac{\frac{a}{a}}{\frac{x^2}{a^2}} = \frac{[a^2]}{x^2}$. Imo ergo erratum, neque enim ita datur [PX, sed tantum ratio], seu trianguli figurae characteristici natura.

Ita ergo duo habemus, p r i m u m triangulum figurae characteristicum, d e i n d e figuram quaesitae complentem. Tentandum an ex his erui possit figura, accedentibus aequationibus, et methodo tangentium Cartesiana, Huddeniana, Slusiana.

Porro rectanguli GFD, altitudo est $x = GF$, latitudo $\frac{x^2\beta}{a^2}$, et area $\frac{x^3\beta}{a^2}$. Dividatur per $DF = \beta$, fiet eius longitudo $\frac{x^3}{a^2}$, latitudo β, unitas scilicet constructionis ut dictum est. Quod si iam figurae huius $\frac{x^3}{a^2}$ quadratura haberi potest, utique caetera videntur haberi, puto tamen non semper. Ut si sit $\frac{a\beta}{x}$, ductis omnibus in x, fiet $a\beta$. At a ductam

---

3 f. *Über* data producta *und* tetragonismus *jeweils:* male

6 a *L ändert Hrsg.* 6 $\frac{\mathrm{PX}}{\mathrm{XD}}$, sed tantum eorum ratio *L ändert Hrsg.* 7 f. natura. *(1)* Ecce ergo problema: *(2)* Ita *L*

---

10 methodo tangentium: DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I S. 40–50. HUDDE, *De reductione aequationum*, *DGS* I S. 433–439 (insbesondere S. 436) sowie *De maximis et minimis*, *DGS* I S. 507–516; s. a. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, *DGS* I S. 255 f. De Sluse veröffentlichte seine Methode zuerst in den *Philosophical Transactions* VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/73, S. 5143–47 und VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059.

in x vel AB esse semper quadrabilem constat. Cumque et data sit BC, ergo datur quadratura omnium ED, unde et ipsa videntur dari debere. Quod alias examinabimus.

D a t i s p r o d u c t i s i n v e n i r e a p p l i c a t a s , est invenire seriem, quae ad differentias suas ⟨rationem⟩ habeat datam, datur enim PE, et GW, at $\frac{PE}{GW} = \frac{ED}{WL}$.

Eodem casu datur $\frac{PA}{AE}$, vel $\frac{PA}{PE} = \frac{AH}{ED}$. Datur ergo ratio rescissae AH ad applicatam ED. Ergo et dimidiae rescissae $\frac{AH}{2}$ ad applicatam ED, seu $\frac{IH}{2ED}$. Ergo et $\frac{ED - \frac{IH}{2}}{ED} = 1 - \frac{IH}{2ED}$. Ergo et ratio applicatarum ad $ED - \frac{IH}{2}$, quarum summa semirectangulo sub abscissa et applicata aequatur. Sed ex datis partium rationibus, rationes totorum, vel contra, nemo collegerit cognitis hactenus artibus.

Breviter[:] semper datur GW, semper datur AE, hoc loco datur et PE, ergo datur et PA. Sed et datur ratio AH ad ED, nempe rescissae ad applicatam, item $\frac{ED}{WL}\left(= \frac{PE}{GW}\right)$ applicatae ad differentiam.

$\frac{a}{a-b}\ \frac{b}{b-c}\ \frac{c}{c-d}$. Ergo datur et $\frac{a-b}{a}$ etc. $= 1 - \frac{b}{a}$. etc. Datur ergo ratio applicatae datae ad sequentem. Unaque ex illis prima scilicet qualibet pro arbitrio assumta, dantur caeterae omnes.

Ergo ex datis productis datur series figurae. Etsi inde aequationem reperire figurae naturam exprimentem, nondum fortasse sit in promtu. Sed illud tamen adhuc excutiendum an prima assumi possit pro arbitrio, et hoc loco puto posse.

---

2 *Zu* dari debere: Imo nondum res datur.

9 f. artibus. | De caetero est $\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ED}} = \frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EM}}$. datur ergo $\frac{\mathrm{ED}}{\mathrm{EM}}$. item $\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ED}}$. ergo datur et $\frac{\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{ED}}}{\frac{\mathrm{EM}}{\mathrm{ED}}}$. ergo et $\frac{\mathrm{PE}}{\mathrm{EM}}$. *Absatz*. Patet porro ex his *(1)* data ratione *(2)* datis productis dari et reductas. *gestr.* | Breviter *L*

At si d i f f e r e n t i a e WL datae sint, seu quod idem est, si data sint trianguli characteristici latera rectum angulum comprehendentia, quia data $\dfrac{GW}{WL}$, tunc non potest prima applicata assumi pro arbitrio, quia prima est omnium differentiarum summa.

Porro datur et differentia productae et abscissae ad rescissam, seu differentia inter has duas rationes[:] productae ad rescissam, et abscissae ad rescissam, seu

$$\frac{PE-AE}{AH}=\frac{PA}{AH}=\frac{GW}{WL}=\frac{PE}{ED}=\frac{PA+AE}{ED}=\frac{ED}{EM}.$$

Porro cum detur $\dfrac{PE}{ED}$, dabitur et $\dfrac{ED}{PE}$, datur et $\dfrac{ED}{EM}$, dabitur ergo et $\dfrac{\;\frac{ED}{PE}\;}{\frac{ED}{EM}}$, ergo et $\dfrac{PE}{EM}$ seu $\dfrac{PA+AE}{EM}$.

NB. Si dantur WL, datur ut paulo ante ostensum $\dfrac{PE}{EM}=\dfrac{\frac{ED}{WL}=\frac{a}{a-b=e}}{\frac{a^2-b^2}{2}}=\beta$ $\dfrac{1}{\beta}\quad\dfrac{\;\frac{a^2-b^2}{2}\;}{\frac{a}{a-b}}$. Ergo ductis omnibus in $a-b$, fiet:

$$\frac{a^3-ba^2-ab^2+b^3}{2a}=\frac{1}{\beta}.\qquad \frac{2}{\beta}=\frac{a^2}{\cancel{2}}-\frac{ba}{\cancel{2}}-\frac{b^2}{\cancel{2}}+\frac{b^3}{\cancel{2}a}=ea-b^2+\frac{b^3}{a}.$$

---

7 $\dfrac{PE}{1}=\dfrac{ED}{WL}$.

11

$$\begin{array}{l} a-b^2\\ a-b\\ \hline -b^2a+b^3+a^3\\ -ba^2 \end{array}$$

9–709,3 NB. … NB. *erg. L*

---

9 $EM=\dfrac{a^2-b^2}{2}$: Dies ist ein Näherungswert; vgl. dazu S. 710 Z. 19.

H a e c a e q u a t i o e x a m i n a n d a.

Vel quia $a = b + e$, fiet: $\dfrac{2}{\beta} = eb + e^2 - b^2 + \dfrac{b^3}{b+e}$, vel

$2b + 2e = \cancel{eb^2\beta} + 2e^2b\beta + \cancel{e^2b\beta} + e^3\beta - \cancel{b^3\beta} - \cancel{b^2e\beta} + \cancel{b^3\beta}$. NB.

$$\begin{array}{ccccccccccccccc} a & & b & & c & & d & & a^2 & & b^2 & & c^2 & & d^2 \\ & a-b & & b-c & & c-d & & & & a^2-b^2 & & b^2-c^2 & & c^2-d^2 & \\ & e & & f & & g & & & & & & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccc} a - b \frown a - b = a^2 + b^2 - 2ab, -a^2 + b^2 & = & 2b^2 - 2ab,, & & \\ & & [2] \frown \llcorner b^2 - ab \lrcorner & = & 2 \frown \llcorner b^2 - a^2 + ae \lrcorner \\ & & /\backslash & & \\ & & a^2 - ae & & \end{array}$$

Ergo differentia inter differentiarum quadrata, et differentias quadratorum, est, differentia inter quadratum termini posterioris, et rectangulum terminorum, duplicata, seu est differentia inter quadrata terminorum inversa (seu differentia quadratorum directa a nihilo subtracta), rectangulo termini prioris in differentiam, aucta; summa duplicata.

Esto quadratum differentiae e^2, differentia inter quadrata terminorum $a^2 - b^2 = h^2$, erit $b^2 - a^2 = 0 - h^2 = 0 - a^2 + b^2 = b^2 - a^2$, erit ergo $e^2 - h^2 = 2 \frown \llcorner 0 - h^2 + ae \lrcorner$ seu

$$\begin{array}{c} /\backslash \\ a^2 - b^2 \end{array}$$

7–10 *Nebenrechnungen:*

[*Gültig*]

$$\begin{array}{ll} & \begin{array}{r} + \quad a - b \\ - \quad a + b \\ \hline \end{array} \\ -a^2 + ba & + ba - b^2 \qquad -a^2 - b^2 + 2ba \end{array}$$

$$\frac{a^2 - \cancel{b}^2 + \cancel{2b}^2 - 2b^2 + b^2}{a-b} = a + b + \frac{b^2 - 2b^2}{a-b} = a + b - \frac{2b^2}{a-b}.$$ [*sic!*]

[*Gestrichen*]

$$\frac{a^2 - b^2 + 2ba - 2ba}{+a - b} = -a + b.$$

8 -2 *L ändert Hrsg.*

$\frac{e^2-h^2}{2} = ae - h^2$, vel $e^2 - h^2 = 2ae - 2h^2$, eritque $e^2 = 2ae - h^2$. Ac proinde $e^2 - 2ae = -h^2$. Ergo $a^2 + e^2 - 2ae =$[$a^2 - h^2$]. Ergo $\overset{a-e}{\underbrace{e-a}_{\mp a \mp e}} = \sqrt{[a^2-h^2]}$, ergo $\mp e = \mp a + \sqrt{[a^2-h^2]}$. Sed de his alias.

Nunc observo, data laterum orthogoniorum trianguli characteristici ratione triangulum characteristicum plene dari, quia semper unum eius latus GW datur. Cumque detur et WL, dabitur et GL. Ergo in alio quolibet triangulo, quod characteristico simile est, dato unico latere dabuntur omnia. Ergo triangulum DNH penitus dabitur, quia unum eius latus DN datum est, datur ergo HD, et NH. Ergo cum summa omnium AH semper aequetur segmento duplicato; ideo summa omnium HN semper aequatur trilineo concavo $AXLFA$ vel $ANLGA$ [duplicato]. Figurae ergo quaesitae etsi adhuc ignotae reperiri potest hoc modo aequivalens. Assumta et pro arbitrio qualibet RQ invariabili, dabuntur semper et RP, et PQ. Ideo patet problema illud alibi a me propositum, data qualibet figura reperire curvam ὁμότομον, pendere ex illo problemate, datis differentiis reperire summas.

N B. cum sit $\frac{GW}{WL} = \frac{DE}{EM}$, patet esse ut unitas constructionis ad differentias, ita applicatas ad differentias semiquadratorum, vel ut unitas ad ordinatas, ita differentias ad differentias semiquadratorum, vel $\frac{1}{a} = \frac{a-b}{\frac{a^2-b^2}{2}}$, eritque $1 = \frac{2a^2-2ba}{a^2-b^2}$. Sed haec non absolute quidem vera[,] tamen in arithmetica infinitorum.

---

14 f. Datis differentiis invenire summas, et datis reductis invenire figuram, semper eodem redit.

3+4 $a^2 + h^2$ *L ändert Hrsg. dreimal.* 11 duplicato *erg. Hrsg.*

---

12 qualibet RQ: In seiner Handzeichnung hat Leibniz RQ auf eine bereits vorhandene Strecke gelegt. Damit Q auch auf die Tangente zu liegen kommt, müsste RQ näher an die Basis BC gelegt werden. 13 alibi a me propositum: vgl. dazu N. 39_1 S. 621 f. (Scholion zu Prop. 2.).

41. EX DATIS TANGENTIBUS INVENIRE FIGURAM
[Herbst 1673]

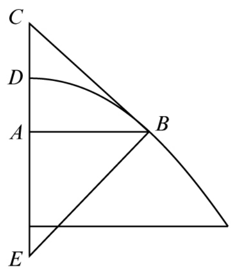
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1. Bl. 180–181. 1 Bog. 2°. 4 S. Spätere Ergänzungen und Zusätze in verändertem Duktus seitlich und oben auf Bl. 180 v°, 181 r°, 182 v°. Cc 2, Nr. 625

Datierungsgründe: In einem Gespräch, das nach der Entstehung des infinitesimalen Dreiecks vermutlich im Sommer 1673 stattfand (s. *LSB* III, 2 S. 933; *LMG* III S. 73), hat Huygens Leibniz die Lektüre der *Géométrie* Descartes' zusammen mit den Kommentaren von Fr. v. Schooten sowie der einschlägigen Studien von de Sluse empfohlen. Eine Frucht dieser Lektüre ist das vorliegende Stück, in welchem Leibniz die Tangentenmethode Descartes' rezipiert. Aufgrund des Wasserzeichens des Papiers ist die Studie nach N. 40 vom August 1673 anzusetzen.

Grandis illa quaestio:

ex datis tangentibus invenire figuram sive ordinatas etiam replicari potest, ita ut data aliqua aequatione, quaeratur figura cuius tangentium tangentes aequationem habeant datam.

Regula de tangentibus investigandis breviter rememoranda est:



[*Fig. 1*]

16 Regula | Slusii *gestr.* | de *L*

16 Regula: s. dazu N. 6. Die Streichung des Namens ist darauf zurückzuführen, dass Leibniz — wohl durch Mitteilungen Huygens' — mittlerweile Zweifel an der Priorität von de Sluse bekommen hatte. Vgl. dazu J. E. Hofmann, *Leibniz in Paris*, 1974, S. 72–74; s. a. Huygens an Oldenburg, 27. Sept. 1672 (*HO* VII N. 1912, S. 228–229 = *OC* IX N. 2066, S. 247–251).

Esto curvae ordinata $[AB,]$ tangens BC. Quaeritur AC, ex data BC. Ante omnia aequatio figurae ordinatarum AB ad abscissas $[DA]$, rationem explicans ita poliatur, ut non nisi duae restent quantitates incognitae: $AB = y$. et $DA = x$. Termini incogniti a fractionibus ac surdis liberentur. Aequatio iam hac ratione inventa ita formetur, ut ab uno latere omnes termini ponantur ipsa x, ab altero omnes ipsa y affecti. Quod si idem terminus utroque affectus est, utrobique ponatur, ita quasi alterubi non esset positus. Qui neque y neque x habent omittentur. Hoc facto cuilibet termino praefigatur numerus tot unitatum, quot graduum est potestas quae terminum incognitum eius lateris afficit. Denique in latere ipsius x. unus x mutetur in $p = AC$. Aequatio ita reformata ipsius $p = AC$. quantitatem dabit.

Ipsa y per productam p dividatur erit $\dfrac{y}{p} = \dfrac{b}{a}$, posito $\dfrac{b}{a}$ = differentiae ipsarum y, seu posito ipsas y esse ipsarum b quadratrices. Exempli causa:

$2ax - x^2 = y^2$. Ergo $2ap - 2xp = 2y^2$. sive $p = \dfrac{y^2}{a-x} = \dfrac{2ax - x^2}{a-x}$. Ergo

$$\frac{y}{p} = \frac{\sqrt{2ax - x^2}}{\sqrt{2ax - x^2}, \frown \sqrt{2ax - x^2}} \frown a - x = \frac{a-x}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Sed nimis longae fuerint hae ambages ex datis differentiis quaerere summas, seu figuram, rectius ducta perpendiculari BE, utemur ipsis AE.

Quaeritur ergo problema:

data AE invenire figuram.

Insistamus in hunc finem methodo Cartesiana, ubi ellipsin proponit in exemplum, et ex AB invenit AE, nos tentabimus postea regressum. Ita autem ille.

Esto $DA = y$. $AB = x$. $DE = v$. $EB = s$. Ergo $AE = v - y$, ideoque $AE^2 = v^2 - 2vy + y^2$, et $EB^2 = s^2 = v^2 - 2vy + y^2 + x^2$. Et quia in ellipsi $x^2 = ry - \dfrac{r}{q}y^2$, unde tollendo x^2, fit:

1 AB, *erg. Hrsg.* 2 ordinatarum ... rationem explicans *erg. L* 2 CA *L ändert Hrsg.* 6 f. Qui ... omittentur. *erg. L*

19 methodo Cartesiana: *Geometria*, *DGS* I S. 40 f. u. 45 f. In S. 713 Z. 9 unterläuft Leibniz ein Vorzeichenfehler, der aber S. 713 Z. 11 korrigiert wird. Bei dem Versuch das Problem umzukehren vergisst Leibniz in seiner Schlussgleichung (S. 714 Z. 1) das Glied $+\dfrac{r^2}{4}$. Mit dem Fehler wird später (ab S. 716 Z. 24) konsequent weitergerechnet.

$$\begin{array}{llll} -\dfrac{r}{q} & y^2 + & r\,y + & v^2 = 0, \\ +\,1 & & -\,2v & -\,s^2 \end{array}$$

et ut y^2 ab omni alio liberetur fiet:

$$y^2 \quad \frac{+r-2v}{-\dfrac{r}{q}+1}y \quad \frac{+v^2-s^2}{-\dfrac{r}{q}+1} = 0.$$

Iam posito EB esse perpendicularem seu minimam, aequatio proposita duas habebit radices aequales. Ideoque ponendo $y = e$. eandem habebit formam aequatio, quam illa quae fit ducendo in se $y - e$. Unde $y^2 - 2ye + e^2$. Cumque haec aequatio eandem habet formam cum priore, et unus terminus sit idem, erunt reliqui quoque aequales.

Ergo $\dfrac{+r-2v}{-\dfrac{r}{q}+1}\cancel{y} = 2\cancel{y}e$. Ergo $+r - 2v = -\dfrac{2er}{q} + 2e$. $\quad -2v = -\dfrac{2er}{q} + 2e - r$. sive $2v = \dfrac{2yr}{q} + r - 2y$. sive $v = \dfrac{yr}{q} + \dfrac{r}{2} - y$.

Credo me per errorem invertisse, debet enim esse: $v = y - \dfrac{r}{q}y + \dfrac{r}{2}$. vel $\begin{array}{l} +1 \\ -\dfrac{r}{q} \end{array} y + \dfrac{r}{2}$.

Iam inverso modo cognita v, ignotaque x, quaeritur quomodo inveniri queat x. Resumenda aequatio prior: $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$, pro v ponatur eius aequivalens. Iam

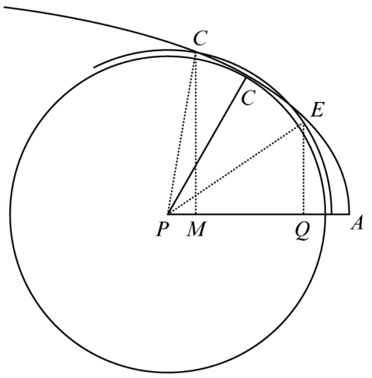
$$v^2 = \begin{array}{l} +\,1 \\ -\,\dfrac{2r}{q} \\ +\,\dfrac{r^2}{q^2} \end{array} y^2 \;\; \begin{array}{l} +\,r \\ -\,\dfrac{r^2}{q} \\ \end{array} y + \frac{r^2}{4}, \quad \text{et} \quad -2vy = \begin{array}{l} -\,2 \\ +\,\dfrac{2r}{q} \end{array} y^2 - ry.$$

$$
\begin{array}{lrlrl}
\text{Ergo fiet: } s^2 = x^2 & \cancel{+1} & y^2 & +r & y, \\
 & /\!/ \; \cancel{-\dfrac{2r}{q}} & & -\dfrac{r^2}{q} & \\
 & +\dfrac{r^2}{q^2} & & -r & \\
 & \cancel{+1} & & & \\
 & \cancel{-2} & & & \\
 & /\!/ \; \cancel{+\dfrac{2r}{q}} & & & \\
\text{sive} \qquad s^2 = x^2 & +\dfrac{r^2}{q^2} & y^2 & -\dfrac{r^2}{q} & y.
\end{array}
$$

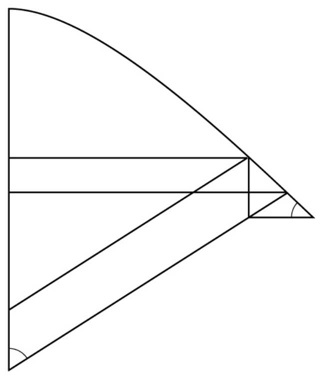
Et haec aequatio $s^2 = x^2 + \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y$ non minus determinata est, ac illa qua Cartesius utebatur supra relata, cum ex x et y ipsam v vel s quaerebat. Sublata enim x restabant in aequatione tres indeterminatae: $s.\ v.\ y$. Ita nos ex v et y datis quaerentes x et s, elisa iam v per aequationem quam de ea habebamus, ad y, habemus indeterminatas restantes $s.\ x.\ y$.

Iam vestigiis Cartesii presse insistemus: verbis ipsius eius fin. pag. 43 et pag. 44 *Geom.* relatis, mutatis mutandis. Cuius et figuram hic adscribimus:

13 vestigiis Cartesii: Im Folgenden zitiert Leibniz bis auf wenige unwesentliche stilistische Änderungen wörtlich die Betrachtungen von S. 43 Z. 2 v. u. bis S. 45 Z. 21 und versucht, sie (s. die Klammereinschübe) auf das umgekehrte Problem zu übertragen, hat aber keine großen Hoffnungen auf Erfolg (s. u. S. 716 Z. 23).



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

Descripto circulo ex centro P qui curvam in punctis C et E secet ex quibus in PA demittantur perpendiculares CM, EQ. iunctis radiis PC, PE inter se aequalibus.

Ita ergo ille[:] Postquam ergo invenimus talem aequationem non ea utemur ad cognoscendas quantitates x vel y. quae hic datae sunt quia punctum C (non minus quam M) est datum, sed ad inveniendam quantitatem v vel s. quae quaesitum punctum P determinant. Ego contra: non utemur ea ad cognoscendas quantitates v et y quae hic datae sunt quia punctum P (non minus quam M) est datum sed ad inveniendam quantitatem x vel s. quae quaesitum punctum C determinant.

In quem finem (pergit Cartesius) considerari debet, si punctum P (substitue C) tale est quale desideratur quod circulus cuius id ipsum est centrum (substitue, quod circulus, cuius centrum est P) quique per punctum C transit tangat ibidem curvam lineam CE neque eam secet. Sed quod si idem punctum P propius aut remotius sumatur a puncto A (hic substitui etiam, puto potest[:] sed quod si punctum C aliud a vero assumatur), circulus hic non solum in puncto C. sed et in alio quodam puncto E curvam CE sit secturus.

Deinde considerandum est quoque, quando hic circulus curvam CE secat, aequatio per quam quantitas x vel y vel quaedam alia similis (substitue: per quam quantitas v vel y vel quaedam alia similis) quaeritur supponendo PA, et PC. seu s, v (quaesitas: substitue x, s seu CM, seu EQ et AQ vel AM) cognitas necessario duas contineat radices inaequales. (Hic iam substitutio incipit difficilis reddi, ac cessat inversio, igitur continuabimus tantum exscribere verba autoris.)

Nam si e. g. circulus hic secet curvam CE in punctis C et E ac ducatur EQ parallela ipsi CM nomina quantitatum indeterminatarum x et y, aeque bene convenient lineis EQ et QA atque ipsis CM et MA. existente $PE = PC$. propter circulum. Adeo ut quaerendo lineas EQ et QA per PE et PA quae tanquam cognitae supponuntur eandem habituri simus aequationem quam si quaererentur CM et MA per PC et PA. Unde liquido constat ipsius x vel y valorem fore duplicem, hoc est aequationem duas admissuram radices quae sint inaequales, quarum quidem una futura est CM altera EQ, si fuerit x quam quaerimus: aut quarum una futura est MA, altera QA, si fuerit y quae quaeritur. (Videtur etiam in nostra inquisitione dici posse, assumto puncto C vero, tunc valorem ipsius EP, et CP. fore aequalem, ac proinde si ope aequationis a nobis inventae, ex data x et y quaeratur s, aequationem habere duas radices aequales.) Verum equidem est, quod cum punctum E non ad eandem curvae partem reperitur cum puncto C una tantum harum radicum sit vera, altera falsa, sed quo haec puncta C et E sibi invicem sunt propiora, eo differentia inter has radices est minor, quae denique omnino aequales futurae sunt, si bina haec puncta in unum punctum cadant, hoc est si circulus qui per C transit curvam ibidem tangat nec omnino secet:

Praeterea considerandum quod aequatio in qua duae sunt radices aequales necessario eandem formam habeat ac si in seipsam multiplicetur quantitas quam velut incognitam supponimus, multata quantitate cognita sibi aequali: et denique haec ultima summa si non tot dimensiones habeat quot praecedens, rursus per aliam summam totidem quot alteri desunt dimensiones habentem, sic ut separatim aequatio inter singulos unius atque singulos alterius terminos haberi possit.

(Haec iam imitari tentabimus; etsi vix putem hic successurum.[)]]

Aequatio nostra est: $$\frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y \begin{matrix}+x^2\\ -s^2\end{matrix} = 0.$$

Unde fieri potest $$y^2 - \frac{\frac{r^2}{q}}{\frac{r^2}{q^2}}y \; \frac{+x^2 - s^2}{\frac{r^2}{q^2}} = 0,$$

vel $$y^2 - qy + \frac{q^2x^2 - q^2s^2}{r^2} = 0.$$

Conferatur cum aequatione eiusdem formae, $y^2 - 2ey + e^2 = 0$, fiet $q = 2e$. Quod est

23 etsi *(1)* difficile sit *(2)* vix *L*

absurdum, cum q sit determinata, e indeterminata. Malum ergo in eo est quod indeterminatae in se invicem non sunt ductae.

Aequatio est $x^2 = s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y$, sive $x = \sqrt{s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y}$.

Sumatur alia x paulo maior priore, $x+\beta$, fiet $x^2+2\beta x+\beta^2 = s^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y$. Sed nihil hinc.

An ergo per y. fiat: $\frac{r^2}{q^2}y^2 = s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q}y$, et pro altero y substituatur $y+\beta$, fiet $\frac{r^2}{q^2}y^2 + \frac{2r^2\beta}{q^2}y + \frac{r^2}{q^2}\beta^2 = s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q}y$.

Totum artificium est, ita effingere aequationem, ut aliqua inde sequatur destructio mutua, inde enim nova haberetur aequatio.

Aequatio ipsius v, nihil aliud nos docet, quam terminum qui in aequatione quaesita ipsum v multiplicabit.

E. g. in proposito exemplo, ubi aequatio haec

$$\begin{array}{cccc} y^2 & \dfrac{+\,r\,-2v}{-\frac{r}{q}+1}y & \dfrac{+\,v\,-\,s^2}{-\frac{r}{q}+1} & =\ 0 \\ y^2 & -2ye & +e^2 & =\ 0 \end{array}$$

datur valor ipsius v, ad y. Ergo vicissim si caeteris non datis, detur tantum valor ipsius v ad y aequationis illius quaesitae unus terminus quodammodo fingi potest.

$$s^2 - x^2 - \frac{r^2}{q^2}y^2 - \frac{r^2}{q}y = 0.$$

8–16 *Daneben später ergänzt:* Ope geometriae series quoque arithmeticae sive finitae sive infinitae inibuntur. E. g. pro his: $\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$ etc. multum productis, summa haberi potest per appropinquationem scilicet ope quad. hyp.

17 *Neben der Gleichung großes* NB.

---

3 Aequatio: Hier unterläuft Leibniz ein Übertragungsfehler: bei konsequenter Rechnung müsste $\frac{r^2}{q}y$ Plus als Vorzeichen haben. Der Fehler vererbt sich weiter.

Cum tres sint quantitates indeterminatae, manifestum est locum esse solidum. Is ergo locus solidus ponatur descriptus. Eligatur iam aliquis locorum planorum hunc solidum componentium, qui residuae problematis conditioni satisfaciat; residua autem problematis conditio est, ut $\underline{s}$ hoc modo inventa, sit minima omnium, quae ex puncto P. quo $s = \underline{PC}$ rectam pro mensura assumtam, in qua ipsae y assumuntur, secat, ad loci huius plani terminationem seu curvam CE duci possint. Sive, ut data positione AP, indefinita, sumtaque pro arbitrio magnitudine ipsarum $AM = y$, et $PC = s$. sumatur ipsa $MC = x$ talis, ut ipsa CP fiat omnium possibilium minima, id est, ut alia aliave x assumtis, ipsa s fiat maior.

Nescio an hoc ita dici debeat[:] Habemus aequationem quae nos doceat, data x, et y, quanta futura sit s. Superest alia praeterea conditio, quae nos doceat, ipsam x talem assumendam, ut si alia x eodem modo ex alia y composita assumatur, ipsa s sit minima quae ad earum terminationes ex puncto P duci possit. Unde apparet quod est difficillimum, non ipsam x sed regulam aliquam ipsas x inveniendi ex datis y quaeri, quae proposito satisfaciat. Quae regula nec semper aequatio erit.

Non negligenda tamen quae hic de loco solido observata sunt. Forte enim sequitur solidi inventi sectionem quandam per quoddam planum qualiscunque ea sit proposito satisfacere. Quod si demonstrari posset, hinc consequentias alias rursus duceremus, nimirum si data esset aequatio ipsarum v, eam in aliam quandam transmutaremus eiusmodi naturae, ut ipsarum v, summa aliquando, haberi possit, uti videmus contingere in certis quibusdam segmentis cycloeidis. Idem forte comminisci liceret semper, quo facto aliquas saltem rectas loci plani quaesiti ex solidi sectione inveniendi haberemus; atque ita rursus posset fortasse ipsum illud planum determinari ope unius eiusmodi rectae inventae aut plurium.

Adde aliud artificium; adhibeatur alia quaedam figura aliarum v. ut alicubi vel etiam aliquo demto additoque, semper summa earum summae priorum aequalis sit, atque huius

2 iam *(1)* aliqua indeterminatarum eiusmodi ut *(2)* aliquis *L* 13 possit *(1)* . Sed haec conditio *(2)* vel ipsam x talem assumendam *(3)* . Unde *L* 14 sed | aequationem sive *erg. u. gestr.* | regulam *L*

21 segmentis cycloeidis: vgl. dazu *LSB* III, 1 N. 29 S. 115 f. sowie Huygens, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 69 (*HO* XVIII S. 205); s. a. N. 17 S. 344 Z. 2 – S. 346 Z. 2.

locus solidus itidem describatur: Videndum est an horum duorum, imo quia id quoque comminisci licet, plurium quoque locorum solidorum intersectio communis quaesitum nobis patefaciat. Videndumque an alibi se intersecare possint, sive an aliud habere possint planum commune, quam quaesitum. Et quod si duo possint, certe tria, 4, 5, etc., possumus enim habere eiusmodi loca solida ad propositum facientia quotlibet; unam eandemque intersectionem communem habere non poterunt, nisi unicam. Nimirum: inter aliqua plana cuiuslibet est aliquod quod proposito satisfacit, seu quod continet omnes x ad rem aptas; ita enim arbitror sequi ex dictis, etsi supersit dubitandi ratio quaedam; nondum enim forte demonstratum est omnes x ad rem pertinentes in aliquod loci solidi planum cadere, idque axi assumto perpendiculare. Nimirum puncta omnia, quae ipsis C aequivalere queant, erunt in ipsius solidi superficie. Est ergo l o c u s a d s u p e r f i c i e m omnes x, seu ex punctis in axem demissae perpendiculares aequationi (scilicet seclusa illa conditione, quae in aequationem redigi non potest), satisfaciunt. Sit alia quaedam figura aliarum v, quarum summa vel semper (e. g. in figura segmentorum si quid ipsi addatur item sufficit convexa concavis comparari), vel aliquo modo pure (ut in fig. segmentorum tota, aut cissoeide tota, aliterve), vel semper pure (ut ni fallor certo quodam figurae genere a me inventum) datae aequetur; huius quadratricis puncta C itidem superficiei solidi cuiusdam alia quadam ratione describendi, continebuntur. Punctum C quod quae-

1–3 *Dazu später ergänzt:* Nota doctrinam serierum convergentium a Iac. Gregorio stabilitam, hoc quoque loco utilem esse posse, ad intersectiones sive per aequationem, sive per numerum exprimendas.

15 item ... comparari *erg. L*

19 doctrinam serierum convergentium: vgl. dazu *LSB* VII, 3 N. 20 [Spätes Frühjahr – Sommer 1673] S. 249 f.

sito cuidam, ubi scilicet aliquando aequales sunt duae summae, satisfaciat, erit in harum duarum superficierum intersectione communi.

Sed duae superficies istae se secare possunt multis locis, et quolibet loco intersectio communis erit linea: hic primum ex variis locis excludi poterunt alieni a re praesenti, ope appropinquationum, quodam velut dioristicae genere, sed, ut in ipsa linea intersectionis communi punctum quaesitum plene definiatur, adhibeantur rursus aliae v (retento scilicet semper eodem axe, et ipsis y et s. arithmetice seu continue proportionaliter inter se, et secum ipsis uniformiter crescentibus) sygnotae, quarum scilicet locus solidus eodem plane modo describatur; necesse est hunc locum solidum, rursus priorem in multis locis secare; et quidem, in loco per dioristicen appropinquationum iam definito. Cumque trium superficierum intersectio communis sit punctum, ita tandem punctum habebimus. Et quoniam methodus a me ostensa est, cuilibet figurae quotlibet alias sygnotas exhibendi, hinc ad eandem solutionem infinitis modis pervenire poterit, semperque idem reperietur punctum intersectionis; ut adeo hanc methodum etiam examen sui secum ferre, manifestum sit.

Unde sequitur quadraturas esse universaliter loquendo, p r o b l e m a t a a d s u p e r f i c i e m quemadmodum inventiones rectarum curvis aequalium, vel contra, centra gravitatis, sectiones curvarum in qualibet data ratione. Unde patet etiam logarithmorum constructionem geometricam per loca ad superficiem fieri posse. Unde porro sequitur, eas [curvas] quarum longitudo per rectam curvae aequalem determinatur, sive

---

2 *Nach* intersectione communi *später ergänzt:*
Sequi videtur sufficere figuras omnino duas isometros, sive quae aliquando data aequali altitudine sint aequales. Nihilominus enim tertia habebitur determinatio ab ipsa y determinata. Nimirum planum ad axem duorum locorum solidorum communem perpendiculare ipsam y abscindat. Punctum quo planum hoc per duorum locorum solidorum intersectionem communem transit, erit quaesitum. Ideo sufficit a nobis adhiberi ipsum circulum, et figuram angulorum, sumto utrobique quadrante, seu figura ad quadrantem aequali, et y posito = radio.

19 rectas *L ändert Hrsg.*

---

12 sygnotas: zur Terminologie s. a. *LSB* VII, 3 N. 23 [Herbst 1673] S. 264–270.

per fila, amplius [mechanicas censendas]; sed mechanicam debere videri determinationem punctorum appropinquatoriam, et descriptionem figurarum per puncta seu discontinuam.

Interea tamen per accidens evenit, ut saepe numero quadraturae per solas lineas sive aequationes duarum quantitatum indeterminatarum definiri queant, tunc nimirum quando constans quaedam ratio est tangentium ad abscissas; aut cum pro arbitrio, eiusmodi figuras comminiscimur.

Videndum item an diversis eiusmodi aequationibus inter se comparatis, quarum una e. g. ipsam x explicat cum v, sunt ordinatae circuli, altera cum ordinatae figurae segmentorum; sumendoque y arbitrariam talem, ut in uno constituat totum e. g. semicirculum, in altero altitudo sit figurae segmentorum portionis semicirculo aequalis; necesse est ipsam x esse aequalem utrobique. Atque ita videtur determinari problema, atque alterutra ex duabus indeterminatis x vel y elidi.

Sed nova tamen videtur nasci difficultas ex eo quod etsi x diversarum illarum aequationum sint aequales, tamen $\underline{s}$ sint inaequales, neque cognitae inter se rationis. Equidem verum est esse cognitam rationem v ad $\underset{..}{v}$, et $x = \underset{..}{x}$, et esse $s^2 = x^2 + v^2$, vel $\underset{..}{s}^2 = x^2 + \underset{..}{v}^2$. Ergo

$$\left[\frac{\underset{..}{s}^2}{s^2}\right] = \frac{x^2 + \underset{..}{v}^2}{x^2 + v^2} = 1 + \frac{\underset{..}{v}^2}{x^2} - \left[\frac{v^2}{x^2 + v^2} + \frac{v^2 \underset{..}{v}^2}{x^2 \frown x^2 + v^2}\right].$$

satis apparet non ideo haberi $\underset{..}{s}^2$ ad s^2. Frustra ergo s resolvitur in x et v, neque inde aliquid amplius discitur. Unde apparet nondum ex his dari rationem deprimendi haec problemata, et ex superficiariis reddendi linearia.

13–20 *Dazu später ergänzt:* Etsi ex duarum istarum aequationum collatione non possit problema reduci ad duas incognitas, quia tamen hoc modo intersectione determinatur penitus punctum aliquod quaesitum, geometrice; poterit ea determinatio postea calculo exhiberi, et rectae ex puncto in axem perpendiculariter demissae quaesitae valor, analytice opinor enuntiari.

1 mechanicam censendam *L ändert Hrsg.* 17 $\frac{s^2}{\underset{..}{s}^2}$ und $\frac{v^2 - \underset{..}{v}^2 v^2}{x^2 + v^2}$ *L ändert Hrsg.*

15 $\underset{..}{v}$. $\underset{..}{x}$: Zu dieser Bezeichnung vgl. N. 51₃ S. 821 Z. 12.

Idem est si quotcunque eiusmodi aequationes congerantur, quia etsi earum omnium x sint aequales; esse tamen ipsas $\underline{s}$ iterum novas. Quoniam tamen hinc novam quandam conditionem innotescere patet, hinc mirum non est, si superficierum saltem intersectionibus problema resolvatur. Equidem si plures adhuc aliae accedant aequationes, identicae sunt fateor et ex eodem principio ductae. Utiles sunt tamen, contra quam prima fronte videri possit. Equidem fateor si semel omnes problematis conditiones inclusae sint aequationi, alias omnes esse supervacuas (nisi forte ad reductiones), sed hoc loco non potuimus unquam conditionem problematis residuam plene in aequationem redigere, unde aliquot conditionibus eiusmodi semiplenis utendum est.

Superest quaerere modum describendi aliquam superficiem curvam aequatione quadam tres indeterminatas quantitates habente expressam; neque enim id a Cartesio explicatum est. Id optime opinor[:] fingi potest planum quoddam rectae cuidam velut axi affixum descendere, atque interim ex aequationis legibus crescere atque decrescere. Sed non est hoc commodum praxi.

[*Spätere Zusätze*]

[*Zusatz 1*]

Examinandum in numeris quantum intersit terminus maximus seu basis an vero altitudo in aequales partes divisa intelligatur.

Loco reductarum aliae quaedam functiones quoque ad quadraturas inveniendas serviunt. Et quas facilius ad numeros transferas.

Si geometrica ad numeros tranfers, error est aliquis, sed qui nunquam est maior termino maximo in unitatem, seu intervallum terminorum ducto. Ideoque utile est assumere intervallum terminorum minus unitate, fractionem nempe talem, ut maximus terminus in eum ductus sit tamen valde exiguus. Imo nihil prodest ni fallor haec suppositio, cum omnia eodem proportione reveniant.

5 ductae *(1)* , sed faciliorem tamen usum reddunt; ac aequationem quod alioqui ea obtineri nequeat facilius *(2)* . Utiles *L* 12 opinor[:] *(1)* fieri potest fingendo *(2)* fingi *L*

0		1		4		9		16	16		25		36		49		64
	1		3		5		7			9		11		13		15	
	0		3		20		63			144		275					
	1		12		45		112			225		396					

$$\begin{array}{r} 16\\ 7\\ \hline 112 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 16\\ 112\\ 32\\ \hline 144 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 112\\ 45\\ 12\\ 1\\ \hline 170 \end{array}\ \text{NB.} \qquad \begin{array}{r} 86\\ 2\\ \hline 172 \end{array}\ \text{NB.} \qquad \begin{array}{r} 3\\ 20\\ 63\\ 144\\ 275\\ \hline 405 \end{array}\ \textit{(!)} \qquad \begin{array}{r} 170\\ 225\\ 396\\ \hline 791 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 405\\ 2\\ \hline 810\\ 791\\ \hline 19 \end{array}$$

Vide quam parum haec duo producta distent a duplis. Haec ultra indaganda, ductis terminis in suas differentias, summaque earum tum cum aliis, tum cum semiquadrato termini maximi.

[*Zusatz 2*]

$v = \sqrt{4ay - 4y^2}$. duplus sinus circuli

$v = \dfrac{\left[\frac{1}{2}\right] a^2}{\sqrt{ay - y^2}}$. dupla ordinata figurae angulorum

$v = \dfrac{[a]y}{\sqrt{ay - y^2}}$ vel $\dfrac{[a]\sqrt{y}}{\sqrt{\llcorner a - y \lrcorner}}$. [dupla] ordinata figurae segmentorum.

Eligatur y eiusmodi, ut portio in una quaque figura abscissa sit aequalis, nimirum quadrans, unde figura segmentorum dimidia, licet infinite longa assumenda; imo potius omnis duplae.

15 *(1)* $\mathrm{x} = \sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}$ *(2)* $\mathrm{v} =$ *L* 16 *(1)* $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ *(2)* $\mathrm{v} = \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ *L ändert Hrsg.* 17 *(1)* $\mathrm{x} = \dfrac{\mathrm{ay}}{\sqrt{2\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ | vel $\dfrac{\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{y}}}{\sqrt{\llcorner 2\mathrm{a} - \mathrm{y} \lrcorner}}$ *erg.* | *(2)* $\mathrm{v} = \dfrac{2\mathrm{ay}}{\sqrt{\mathrm{ay} - \mathrm{y}^2}}$ vel $\dfrac{2\mathrm{a}\sqrt{\mathrm{y}}}{\sqrt{\llcorner 2\mathrm{a} - \mathrm{y} \lrcorner}}$ ordinata *L ändert Hrsg.*

Hinc iam si valores v in aequationem $s^2 = x^2 + v^2 - 2vy + y^2$ inserantur,

fiet: $s^2 = x^2 + 4ay - \overset{3}{\cancel{4}}\,y^2 - \sqrt{16ay^3 - 16y^4}$.

vel $s^2 = x^2 + 4ay - 3y^2 - 4y\sqrt{ay - y^2}$.

vel $s^2 - x^2 - 4ay + 3y^2 = [-]\ 4y\sqrt{ay - y^2}$.

vel $\dfrac{s^2 - x^2}{4y} - a + \dfrac{3}{4}y = [-]\sqrt{ay - y^2}$.

vel $$\frac{s^4 - 2s^2x^2 + x^4}{16y^2} \quad \frac{-as^2 + ax^2}{2y} \quad \frac{+\dfrac{3}{16\ \cancel{4}}s^2\cancel{y} - \dfrac{3}{16\ \cancel{4}}x^2\cancel{y}}{\cancel{4}\cancel{y}}\ [2] + a^2$$
$$-\frac{3}{2}ay + \frac{9}{16}y^2 = ay - y^2.$$

fiet: $\dfrac{s^4 - 2s^2x^2 + x^4}{16} \quad \dfrac{-as^2y + ax^2y}{2} + \left[\dfrac{3}{8}\right] s^2y^2 - \left[\dfrac{3}{8}\right] x^2y^2 + a^2y^2 - \left[\dfrac{5}{2}\right] ay^3 + \dfrac{25}{16}y^4 = 0.$

Eodem modo et caetera v investigari possunt et horum locorum ad superficiem intersectio communis dabit punctum, ex qua demissae ad axem y perpendicularis quadratum dimidium aequabitur semicirculo, modo y assumatur in omnibus aequalis, ipsa nempe diameter. Id enim ad leges harum constructionum pertinet; ut figurae aequales eiusdem sunt altitudinis, ita ut eadem sit y ac determinata. Unde illud quoque.

4 f. $-$ *erg. Hrsg. zweimal* 6 2 *erg. Hrsg.* 8 $+\frac{3}{16}s^2y^2 - \frac{3}{16}x^2y^2 + a^2y^2 - \frac{1}{2}ay$ *L ändert Hrsg.*

42. PRIMA CIRCULI QUADRATURA
[Herbst 1673]

Datierungsgründe: Die beiden Stücke dieser Nummer bildeten zunächst eine Einheit. Dies beweisen die Bogenmarkierungen sowie der kustodengesicherte Textübergang. Später hat Leibniz den Zusammenhang aufgehoben und N. 42_1 nach Umarbeitung des Schlusses, unter Beibehaltung der Markierung (1) dem eigentlichen Haupttext (Druck in einem späteren Band der Reihe VII) Cc 2, Nr. 1233A Bog. (2) u. (4) sowie Cc 2, Nr. 563 = Bog. [(3)] vorangesetzt. Hierbei ist N. 42_1, wie insbesondere die Nummerierung von Figuren und Theoremen auf Bog. (2) zeigt, durchaus selbständig geblieben. Die Entdeckung der Kreisreihe selbst ist auf Herbst 1673 anzusetzen. Dies ergibt sich aus dem Wasserzeichen des verwendeten Papiers (belegt: Nov. 1673), der Notation sowie dem vorläufigen Bericht am Jahresende 1673 an Huygens, der ihm daraufhin einschlägige Literatur mitgegeben hat (s. *HO* XX, S. 388; vgl. auch *LSB* III, 1 S. LIV–LV). — Weiterhin gibt es dafür ein spätes Selbstzeugnis (Leibniz an Conti, *LBG* S. 278), in welchem Leibniz als Zeit der Entdeckung der Kreisreihe „ungefähr Ende 1673“ angibt.

42_1. REDUCTIO GEOMETRICA

Überlieferung: *L* überarbeitetes Konzept: LH 35 II 1 Bl. 89–90. 1 Bog. 2°. 4 S. Zahlreiche Änderungen und Ergänzungen. Auf Bl. 89 r° ca 7 cm breiter Rand für die Figuren (dort auch das ebenfalls ergänzte Lemma). Bogenmarkierung.
Cc 2, Nr. 1233A tlw.

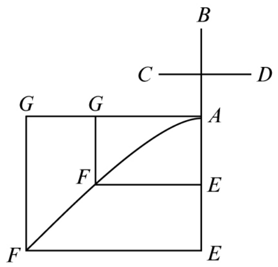


fig. 1.

19 *fig. 1.*: Entsprechend dem ursprünglichen Ansatz, s. die Variante, stellt fig. 1 eine Hyperbel dar; sie dient gleichzeitig als Paradigma für die Parabel.

Esto f i g u r a 1. FAE. et recta quaedam constans AB. abscissa quaelibet AE, applicata quaelibet EF.

Si iam $FE^2 = EB \frown AB$ vel $AE \frown AB + AB^2$. ideo ponendo $FE = y$. $AE = x$. et $BA = a$. fiet aequatio $y^2 = ax + a^2$.

Unde sequitur: $y^2 - a^2 = ax$. ac denique $\dfrac{y^2 - a^2}{a}$ vel $\dfrac{y^2}{a} - a = x$. Est autem $x = FG$. applicata trilinei concavi. Ideo cum summa omnium x facile iniri possit, habebitur et area FGA. et figurae FAE quadratura. Unde intelligi potest curvam esse parabolicam.

At si curva sit hyperbolica, et AB sit latus transversum, aequale CD. lateri recto, erit per 21. 1$^{\text{mi}}$ *Conicorum* $EF^2 = AE \frown BE = BE^2 + AB \frown AE$. sive $y^2 = x^2 + ax$. Ostensum est autem alibi (vid. P. Fab. *Synops.* pag. 80. 184. 293. Tab. 1. fig. 18.) esse aliam quandam rectam constantem quam vocabo $\dfrac{a}{\beta}$, et alias quasdam rectas $\dfrac{x}{\delta}$ arithmetica progressione incedentes, quibus assumtis, retentoque y^2 applicatae hyperbolae quadrato, haec oriatur aequatio: $y^2 = \dfrac{x^2}{\delta^2} - \dfrac{a^2}{\beta^2}$.

Conferantur hae duae aequationes, fiet:

$$\frac{x^2}{\delta^2} - \frac{a^2}{\beta^2} = x^2 + ax. \text{ sive } \frac{x^2}{\delta^2} - x^2 - ax = \frac{a^2}{\beta^2}.$$

Quaestio hoc loco fieri potest an non tetragonismus circuli ex tetragonismo hyperbolae pendeat et vicissim, ob cognationem aequationum. Nam ut in circulo $y^2 = ax - x^2$. ita in hyperbola $y^2 = ax + x^2$.

1 Esto *(1)* hyperbola FAE. cuius latus rectum CD. transversum AB. *(a)* altitudo *(b)* abscissa *(2)* f i g u r a 1. FAE. et recta *(a)* quaelibet *(b)* quaedam constans *L* 3 AB^2. | per *(1)* 20. *(2)* 21. 1$^{\text{mi}}$ Conicorum *erg. u. gestr.* | ideo *L*

---

9 erit: Apollonios, *Conica*, I. 21. S. dazu die Variante zu Z. 3 sowie Fr. v. Schooten, *Commentarii*, *DGS* I S. 212 f. 10 vid. P. Fab.: s. N. 1.

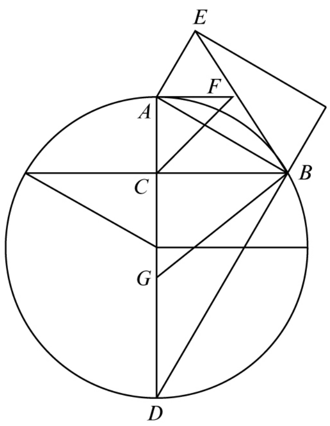


fig. 2.

Ducta in circulo fig. 2. chorda AB, cuius $\square$ est ax (posita $AC = x$. et $AD = a$.), ducitur $AE = AC = x$. perpendicularis ad AB. iunctaque recta BE erit applicata hyperbolae ad axem.

Contra ducta $AF = AC$. et iuncta FC. erit $FC^2 = 2x^2$. et $CG = CF$. erit iuncta $BG = BE$. applicata hyperbolae. Nam $GB^2 = CB^2 + CG^2$.

Iam $CB^2 = ax - x^2$. et $CG^2 = 2x^2$. erit $GB^2 = ax - x^2 + 2x^2 = ax + x^2$.

Deinde in circulo $y^2 = a^2 - x^2$. in hyperbola vero $y^2 = x^2 - a^2$.

(Nota tamen quod ita crescunt x in circulo, quando applicatae decrescunt, cum in hyperbola simul decrescant.)

Dividantur $\dfrac{ax - x^2}{\dfrac{ax}{\beta\cancel{\delta}} + \dfrac{x^2}{\cancel{\delta^2}}}$. Videndum an eadem semper ratio, utcunque augeatur minuaturve x. quod non est. Sumatur a utrobique idem, solo x posito diverso. Et postea sumatur $\dfrac{2xa - 4x^2}{\dfrac{2xa}{\beta} + 4x^2}$ vel $\dfrac{ax - 2x^2}{\dfrac{ax}{\beta} + 2x^2}$. Videndum an haec ratio eadem cum priore. At certum est non esse. Alioquin figurae forent homogeneae.

At ego aliam reperi rationem sane admirabilem demonstrandi quadraturam circuli ex data hyperbolae quadratura et vicissim.

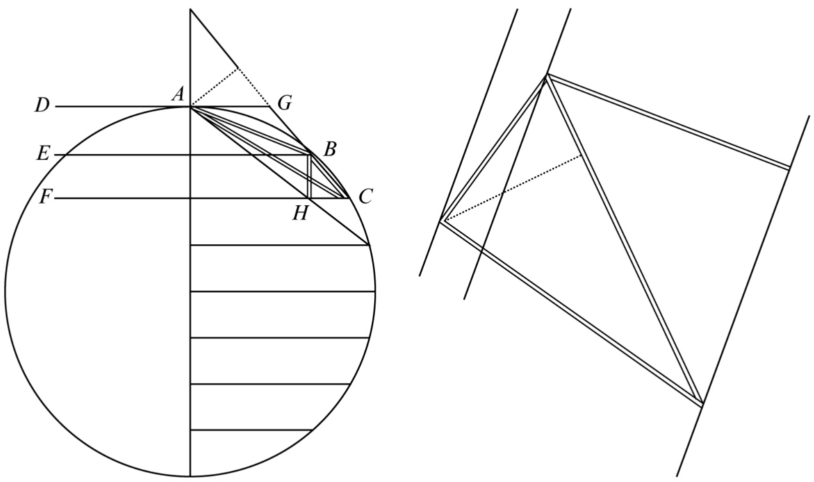
10+12 Neben δ wäre hier auch β zu streichen gewesen. 15 vicissim: s. N. 44.

Esto in fig. 3. [*Figur s. S. 729*] circulus centro A. radio AB. quadrans circumferentiae BCD. et ex quolibet puncto in eo assumto C. ducatur tangens CE. donec scilicet radio AB producto occurrat in E. Eadem rectae BF, parallelae AD. occurret in F. Ad rectam EFC agatur ex B normalis. Denique ex C demittatur in AB perpendicularis CH.

In hoc diagrammate manifestum est ante omnia $BF = CF$. Addo iam esse etiam $BG = BH$. Ducta enim ex B in AC perpendiculari BI. ea utique ipsi EC parallela est (quia utraque est ad eandem AC perpendicularis), ergo $BG = CI$. Iam $CI = BH$. Ergo et $BG = BH$. Quod autem $CI = BH$. constat ob circuli uniformitatem, sed et nullo negotio demonstrari potest. Triangula rectangula AIB et AHC similia sunt, ob angulum non rectum BAC communem. Iam $AC = AB$. ergo et $AI = AH$. Ergo etiam $AC - AI$ seu CI erit $= AB - AH$ seu BH. Nunc AB vocemus a. et $BH = BG = CI$ vocemus x. et $HC = BI$, y. Iamque investigemus rectam BF. Quod ut fiat compendiosius, considerandum est, triangula FGB et AHC esse similia, et angulum BAC = angulo BFG. Manifestum enim est angulum EBG esse = angulo BAC. at angu-

---

729,1 *Zu* fig. 3.:



---

1 fig. 3.: Zunächst hat Leibniz nur den auf den folgenden Text (bis S. 734 Z. 7) bezogenen Teil von fig. 3. gezeichnet. Erst dann hat er die Figur um den die Zissoide betreffenden Teil ergänzt. S. a. die Erl. zu S. 734 Z. 11.

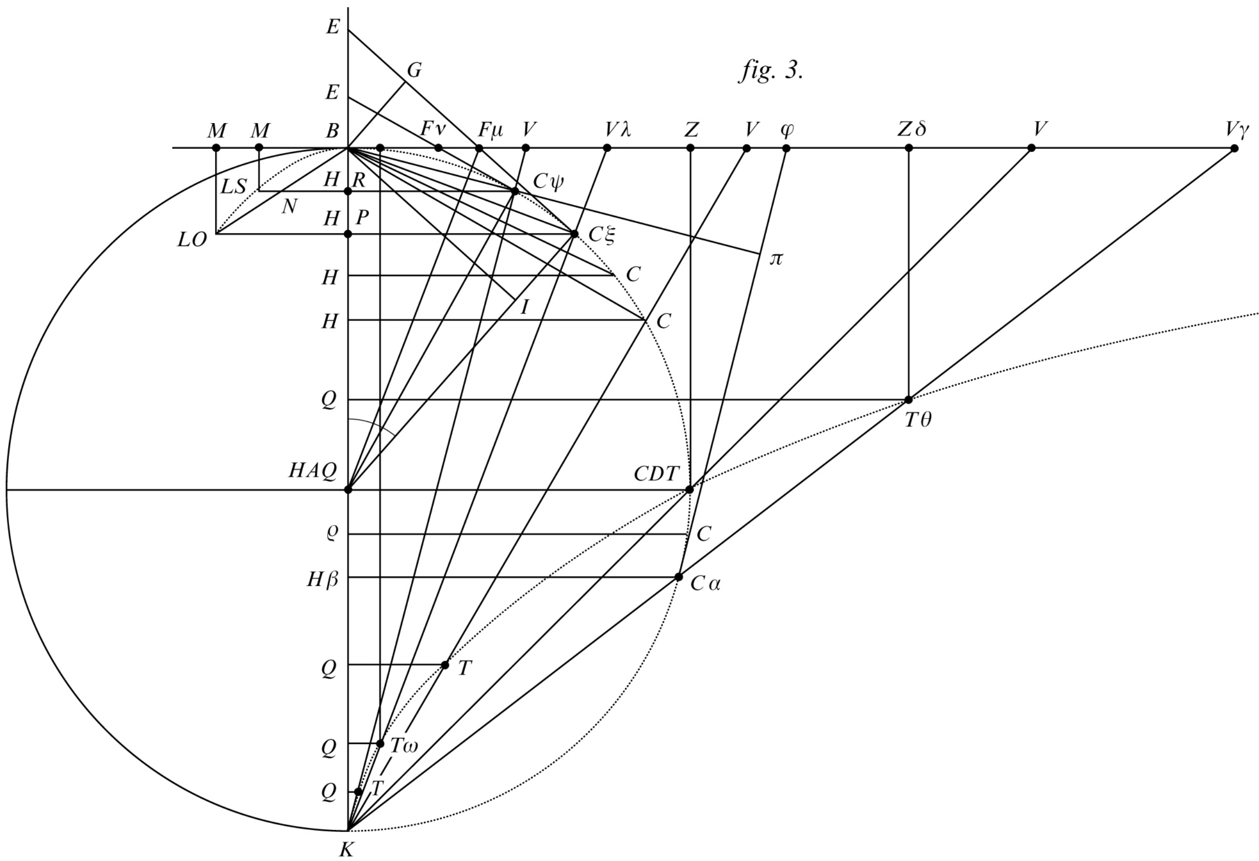


fig. 3.

Lemma: Si per trianguli tres angulos $A. B. C.$ totidem transeant rectae parallelae $DA.\ EB.\ FC$ et latus aliquod velut BC producatur, dum DA parallelae anguli oppositi A productae si opus est occurrat in G, rectangulum sub intervallo AG dicti anguli oppositi A a puncto occursus G et BH intervallo $EB.\ FC$ parallelarum duorum reliquorum angulorum $B. C.$ aequatur triangulo proposito ABC duplicato.

lo EBG aequalem esse angulum BFG patet. Ergo

$$BF : AC :: BG : HC.\ \text{ac proinde}\ BF = \frac{AC \frown BG}{HC}\ \text{sive}\ \frac{ax}{y}.$$

Nunc punctum arcus circuli AC quodlibet unum post alterum appellemus C. eodemque plane modo tractari cogitemus, similiterque punctis aliis ad priora respondentibus easdem literas $H. E. F.$ etc. demus, ac denique omnes ac singulas BF transferamus in HL. ac in punctis H respondentibus ipsi BA ordine ad perpendiculum applicemus. Orietur figura quaedam curvilinea $BLLH$. Cuius ut indagemus naturam, abscissae eius, quae eadem cum circulari est BH. relinquamus appellationem x, applicatam HL appellemus recepto more y. Atque ideo confusionis vitandae causa priori $y = HC$. substituamus eius definitionem, quae est, ex natura circuli: $\sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}$. Ac proinde cum antea dixerimus $BF = \dfrac{ax}{y}$. nunc dicemus $BF = HL = y = \dfrac{ax}{\sqrt{\llcorner 2ax - x^2 \lrcorner}}$. Unde sequitur

$$HL^2 = y^2 = \frac{a^2x^2}{2ax - x^2}.$$

Nunc inverso modo quasi cognita y quaeramus ipsam x. Id est loco figurae $BLLH$ consideremus $BLLM$ figurae $BLLH$ supplementum ad rectangulum BL; sumtisque abscissis BM. quae applicatis LH prioris figurae aequales sunt, ac proinde y vocari possunt, quaerantur $ML = BH = x$. Ac proinde ut ante x assumtae sunt progressionis arithmeticae, et y quales natura figurae dare potest, ita nunc contra y velut cognitis et arithmeticae progressionis assumtis, quaeratur x.

Quod antequam fiat obiter annoto, figuram $BLLH$ esse convexam, et $BLLM$ concavam.

Nam ut confusio vitetur literarum, maior LH appelletur OP. et minor LH appelletur SR. Iamque ducta recta OB. quae ipsi SR productae si opus est, occurrat in puncto N. aio istam SR esse maiorem quam NR. ac proinde non esse opus ut SR producatur ad occursum, quod ita demonstro[:]

Cum sit $BR : [BP] :: NR : OP$. ratio ista $\left[\dfrac{BP}{BR}\right]$ appelletur β. ac OP divisa per β dabit NR, quae an maior minorve sit quam SR ita ex calculo patebit: $OP = \dfrac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}$. quae divisa per β dabit $NR = \dfrac{ax}{\sqrt{2\beta^2 ax - \beta^2 x^2}}$. At SR habebimus

24 BO *sowie* $\dfrac{\mathrm{BR}}{\mathrm{BO}}$ *L ändert Hrsg.*

ex OP si in SR pro $[BP] = x$. substituamus $BR = \dfrac{x}{\beta}$, fiet $SR = \dfrac{\dfrac{ax}{\beta}}{\sqrt{\dfrac{2ax}{\beta} - \dfrac{x^2}{\beta^2}}} = \dfrac{ax}{\sqrt{2\beta ax - x^2}}$. Restat ergo ut videamus utrum maius sit: $2\beta^2 ax - \beta^2 x^2$, an vero $2\beta ax - x^2$. Et vero cum β sit numerus maior unitate, et a maior quam x. ideo a appellabo γx. fiet: $2\beta^2\gamma x^2 - \beta^2 x^2$, item $2\beta\gamma x^2 - x^2$, divisis omnibus per x^2, fiet: $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. Quorum utrum altero maius sit nova quaestio est.

Ac primum ponamus $\beta = \gamma$. id est $[BR : BP :: BP : a]$. fiet $2\gamma^3 - \gamma^2$. item $2\gamma^2 - 1$. Manifestum est $2\gamma^3 - \gamma^2 - \gamma^2 + 1 = 2\gamma^3 + 1 - 3\gamma^2$. [esse maius quam 0.] Et vero si $\gamma = \beta$ est 2 aut maior quam 2. (Imo et si paulo minor, sed haec subtilius hoc loco determinare nihil attinet.)

Sin $\beta = \gamma + \delta$. tunc $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. ita poterunt enuntiari: $2\gamma^3 + \delta^2\gamma + 2\delta\gamma^2 - \gamma^2 - \delta^2 - 2\gamma\delta$. item $2\gamma^2 + 2\delta\gamma - 1$. Ergo videndum an sit maior quam 0, haec quantitas:

$$2\gamma^3 + \underset{\theta}{\cancel{\delta^2\gamma}} + 2\delta\gamma^2 - \cancel{2\gamma\delta} + 1 - 3\gamma^2 - \cancel{\delta^2} - \overset{4}{2}\delta\gamma.$$

Manifestum est δ^2 esse minus quam $\delta^2\gamma$. et differentiam esse θ. Tandem manifestum est $2\gamma^3$ esse maiorem quam $3\gamma^2$ si γ sit 2 aut maior (vel etiam paulo minor) quo casu et $2\delta\gamma^2$ maior vel aequalis $4\delta\gamma$.

His ergo casibus SR maior quam NR.

Si γ est maior quam β. erit $\beta = \gamma - \delta$. et $2\beta^2\gamma - \beta^2$. item $2\beta\gamma - 1$. ita poterunt enuntiari: $2\gamma^3 + \delta^2\gamma - 2\delta\gamma^2 - \gamma^2 - \delta^2 + 2\gamma\delta$. item $2\gamma^2 - 2\delta\gamma - 1$. Videndum ergo an sit maior quam

---

15 $\dfrac{5}{4}$ $\quad \dfrac{25}{16} \frown 3 = \dfrac{75}{16}$. $\quad \dfrac{125}{64} \frown 2 = \dfrac{250}{64}$.

1 BO *L ändert Hrsg.* 6 BR : BO :: BO : a *L ändert Hrsg.* 7 esse maius quam 0. *erg. Hrsg.*

10–733,5 Die zweite und die dritte Abschätzung sind nicht fehlerfrei. Bei der 2. Abschätzung vernachlässigt Leibniz bei den Gliedern $\delta^2\gamma$ und $2\delta\gamma^2$ den zusätzlichen Faktor 2, was aber lediglich eine Vergröberung bedeutet. Bei der 3. Abschätzung kommt zu diesen noch ein wesentlicher Übertragungsfehler hinzu, so dass die 3. Abschätzung nur vermeintlich gelingt.

0 haec quantitas:

$$2\gamma^3 + \underset{\theta}{\cancel{\delta^2\gamma}} + \cancel{2\gamma\delta} + 1 - 3\gamma^2 - \cancel{\delta^2} - \cancel{2\delta\gamma}.$$

Unde rursus intelligitur, si γ sit maior quam 2, SR esse maiorem quam NR.

Generaliter ergo dici potest, si $\dfrac{a}{x}$ maior quam 2. erit $\dfrac{SR}{NR}$ maior quam 1.

At si BH maior fiat dimidia AB. contingere tandem necesse est, ut figura ex convexa concava fiat. Punctum autem flexus contrarii exacte definire, hoc loco nihil attinet.

Haec obiter tantum attulisse iuvabit, ut appareat rem eo redire, ut quaerantur duae rectae SR et NR facili calculo, dividendo basin figurae PO per β. posita β ratione altitudinis figurae BP ad abscissam datam BR. quo pacto habebitur NR; ac in eadem PO, pro x substituendo $\dfrac{x}{\beta}$ habebitur SR. Suppono autem ipsam PO. aequatione quadam omnia figurae puncta ad altitudinem BP referente, cognitam. Inventae SR et NR comparentur, facileque constabit ex regulis, quae de determinatione, et limitibus aequationum extant, utra alia quove casu maior sit minorve. Nam si perpetuus est vel excessus vel defectus, figura concava aut convexa est, sin aliquis limitibus continetur, duobus pluribusve flexibus contrariis figura constabit.

Ac nunc quidem ad aequationem nostram

$$y = \frac{ax}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

redeamus. Ac nunc quidem ipsas x. seu LM. applicatas trilinei concavi $BLLM$, quaeremus. Nimirum eliminata surditate, fiet: $y^2 = \dfrac{a^2x^2}{2ax - x^2}$. et reformata fractione habebimus: $2y^2ax - y^2x^2 = a^2x^2$, divisisque omnibus per x. erit: $2y^2a - y^2x = a^2x$. sive $2y^2a = a^2x + 2y^2x$, ac denique

$$\frac{2y^2a}{a^2 + 2y^2} = x.$$

13 constabit ex regulis: vgl. dazu Fl. Debeaune, *De limitibus aequationum*, *DGS* II S. 117–152.
20 f. habebimus: Leibniz hat anstelle von y^2x^2 irrtümlich $2y^2x^2$. Er rechnet mit dem falschen Wert konsequent bis zum Schluss des Stückes weiter. Im Laufe der Überarbeitung werden lediglich die beiden ersten Formeln bereinigt und der Fehler am Rande, s. S. 737 Z. 1, zusätzlich vermerkt.

Ergo progressio elementorum ML figuram $BLLM$ componentium ab asymmetria liberata est, sunt enim eius applicatae x inter se invicem ut numerus ad numerum; et infinita serie numerorum rationalium exacte possunt exhiberi.

Sed ne quis operam in figura hac nova pervestiganda nos lusisse putet: ostendendum nunc est idem beneficium in circulum inde redundare. Quam in rem praeclarum invenimus theorema, quod nunc breviter exponere ac demonstrare operae pretium est.

Aio igitur figuram $BLLH$ aequari segmento circuli $BCCB$ duplicato.

Cuius demonstrationem habeo pulcram admodum, sed quae generalior est, quam opus sit in rem praesentem; suffecerit ergo veritatem theorematis nostri, quanquam obliquo nonnihil itinere obtinuisse.

Quam in rem figura cissoeidis $BKTTZ$ ubilibet terminata, aut etiam longitudine infinita semicirculo generatori BDK ita imposita intelligatur, ut basis cissoeidis cum diametro circuli eadem sit BK, asymptotos autem cissoeidis ad basin perpendicularis utcunque producta BZ, semicirculi extremum B tangat. Applicatae autem cissoeidis, asymptoto parallelae, sive rectae ex punctis curvae cissoeidis, T, in diametrum demissae, TQ, transferantur in ipsam asymptoton, ibique inde a basi assumtae intelligantur, ut BZ. Iamque recta KTV ex altero semicirculi extremo K per T usque ad asymptoton producatur, cui occurrat in V.

Constat ex natura cissoeidis, hanc rectam KTV, arcum semi-circuli ABC in puncto aliquo C ita secare, ut VT sit aequalis ipsi KC. Unde sequitur, CH. sinum in diametrum BAK demissum aequari ipsi VZ.

1 componentium *(1)* surditate liberat *(2)* ab asymmetria *L* 11 rem *(1)* inspiciatur figura cissoeidis (alibi a me delineata) AIKC *(a)* , eiusque applicatae cuilibet ad circulum perpendiculari in asymptoto CF (extremum C semicirculi generatoris | eandem cum cissoe *erg. u. gestr.* | ABC tangente) | inde a C *erg.* | assumtae, addatur KH *(aa)* aequalis ED sinui circuli, ad asymptoton parallelo, ex puncto E, quo in *(bb)* vel ED sinus circuli demissus in diametrum AC ex circumferentiae circuli puncto E, quo recta ex puncto cissoeidis I in extremum *(b)* . Cuius asymptotos utcunque producta sit CF, *(aa)* basis, *(bb)* et cissoeis ipsa quae circulo *(2)* figura *L* 21 ipsi *(1)* KH. | ac proinde si perpetuo ad applicatam *(a)* cycloe *(b)* cissoeidis sinus respondens adiciatur, inde fieri BV. *gestr.* | *(2)* VZ. *L*

1 asymmetria: zur Terminologie vgl. Fl. Debeaune, *De natura aequationum*, *DGS* II S. 115.
11 *Zur Variante*: Die in der Variante angesprochene Figur ist Fig. 4 von N. 34. Leibniz hat zunächst diese Figur benützt, dann aber gemerkt, dass er damit nicht weiterkommt; er hat daraufhin fig. 3. entsprechend erweitert und im stehengebliebenen Text Z. 11–21 die Bezeichnungen angepasst.

Exempli causa cum sit $\gamma\theta = \alpha K$ erit etiam $\gamma\delta = \alpha\beta$. Quoniam triangula $\gamma\delta\theta$ et $\alpha\beta K$ similia sunt. Igitur si rectae BZ, verbi gratia $B\delta$ addatur sinus CH, v. g. $\alpha\beta$. (aequalis intervallo ZV, v. g. $\delta\gamma$) fiet inde recta BV, v g. $B\gamma$. At vero recta BV. verbi gratia $B\lambda$, quam tangentem falsam appellare soleo, quod scilicet secans, quae ei occurrit KV, v. g. $K\lambda$. non ex centro A, sed opposita circuli extremitate, educitur; est nostrae BF, initio propositae, verbi gratia ipsius $B\mu$ dupla. Quod ita demonstro:

BF est $= FC$, verbi gratia $B\mu$ est $= \mu\xi$, nam utraque circulum tangit, quare $A\mu$ arcum $B\xi$ bisecat. Quare BF sive HL, v. g. $B\mu$ sive OP vel i n t e r v a l l u m puncti in circumferentia designata, a tangente alterius puncti, in ipsiusmet puncti prioris tangente assumtum: est t a n g e n s c a n o n i c u s arcus inter duo puncta intercepti dimidiati.

T a n g e n t e m autem c a n o n i c u m id est canonis mathematici calculo comprehensum, appello, ut a tangente quolibet, utcunque limitato, aut producto discernam, eum scilicet, qui cum radio et s e c a n t e aliquo (quem eodem iure c a n o n i c u m voco) triangulum rectangulum constituit. Idque commodius videtur, quam nomina usu recepta cum magno geometra Francisco Vieta prorsus immutare.

I n t e r v a l l u m quoque inter lineam et lineam vel lineam et punctum intelligi potest vel simpliciter, quo casu est perpendicularis intercepta, vel ita ut in alia recta assumi cogitetur, cuius tunc portio est. Sed haec obiter.

Hinc vero, ut pergamus, sequitur rectam $A\mu$ esse rectae $K\lambda$ parallelam, sive angulum $BA\mu$ esse angulo $BK\lambda$ aequalem. Est enim angulus $BA\mu$ dimidius anguli $BA\xi$. at angulus $BK\lambda$. qui est ad circumferentiam, est etiam dimidius anguli $BA\xi$ qui est ad centrum, super arcu eodem [$B\xi$]. Cum ergo anguli $BA\mu$ et $BK\lambda$ sint aequales, erunt triangula μBA et λBK similia, cumque latus BK sit duplum lateris homologi BA, etiam recta $B\lambda$ erit dupla rectae $B\mu$. sive tangens canonicus semiarcus dati, erit tangens canonicus falsus arcus dati dimidiatus.

Eaedem demonstrationes vim habent, etsi punctum unum ab altero plus quam quadrante distet, id est etsi arcus BC sit maior quadrante, ut si punctum C sit α, sinus $\alpha\beta$, tangens $\alpha\varphi$, distantia eius seu perpendicularis ex puncto B in tangentem $B\pi$. Quam dico aequalem esse $B\beta$ abscissae, nam $B\varphi = \alpha\varphi$. et ob arcus circuli uniformitatem, perinde est, sive perpendicularem ducas ex una extremitate arcus B in alterius extremitatis α tangentem $\alpha\varphi$, quae perpendicularis est $B\pi$, sive ex altera extremitate α

3 f. Bλ, *(1)* quam cissoeidis falsae, sive sinu circuli auctae applicatam *(2)* quam *L* 9 puncti, | plus quam quadrante non distantis, *gestr.* | in ipsiusmet *L* 11 f. id est . . . comprehensum *erg. L* 15 cum *(1)* summo g *(2)* magno *L* 22 Bμ *L ändert Hrsg.* 26–736,5 Eaedem demonstrationes . . . accommodari posse. *erg. L*

ad alterius extremitatis B tangentem $B\varphi$ perpendicularem ducas, quae est abscissae $B\beta$ aequalis.

Porro cum etiam angulus $BA\alpha$ sit anguli $BK\alpha$ duplus, manifestum est, ut verbis parcam, eandem prorsus demonstrationem, quam supra dedimus, arcui quadrante maiori accommodari posse.

Ex his ita demonstratis deduco, summam omnium BF bis sumtam figuram $BLLH$ duplicatam a cissoeidis parte respondente, sive eundem arcum circuli generatoris BC. v. g. $B\xi$ habente, spatio scilicet trilineo $KT\omega QK$ differre summa sinuum CH, sive spatio circulari $BCCH$. exempli gratia $BC\xi PB$.

At vero constat, ostensum est ab eximiis nostri temporis geometris, spatium illud cissoeidale aequari triplo segmento $BC\xi B$ arcus generantis $BC\xi$, trianguli segmento subtensi $B\xi P$ area prius ab illis detracta. Hinc sequitur summam omnium BV (seu 2 BF) aequari quadruplo, et BF duplo segmento $BC\xi B$.

Nam $KT\omega QK$ + $BC\xi PB$ = 2 $BLLH$.

/\ /\

$3\,BC\xi B - \cancel{B\xi P}$ $BC\xi B + \cancel{B\xi P}$

Ergo $BLLH =$ 2 $BC\xi B$.

Fateor equidem potius ex theoremate nostro mensuram cissoeidis demonstrari debere, imo alibi demonstratum esse, sed malui tamen nunc quidem hanc rationem inire.

Cum ergo iam ostensum sit summam omnium LH. seu figuram $BLLHB$ aequari duplici segmento $BCCB$. at vero dudum supra sit demonstratum, differentiam figurae $BLLH$. a rectangulo BL. quod vocemus b^2 seu trilineum $BLLMB$, esse summam omnium $x = \dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. sequitur segmentum circuli duplicatum esse b^2- summ. omn. $\dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. ac proinde segmentum esse

6 deduco, *(1)* figuram omnium BF, sive figuram BLLH *(a)* aequari cycloeidi ab eodem circuli *(b)* a cissoeide eundem circu *(2)* summam *L* 10 ab *(1)* eximio geometra Ioh. Wallisio *(2)* eximiis *L* 19 imo ... esse *erg. L*

10 ostensum est: vgl. dazu J. Wallis, *Mechanica*, 1670–71, S. 531–533, 754–759 (*WO* I S. 904 bis 910).

$$= \frac{b^2}{2} - \text{summ. omn. } \frac{y^2 a}{a^2 + 2y^2}.$$

eiusque, aut potius figurae ei aequalis, elementa crescere in ea semper ratione quae est numeri ad numerum.

Quae progrediendi ratio ut numeris explicetur, debet a supponi = numero infinito, at $y = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. etc. cum repraesentet ipsas abscissas seu BM arithmetice crescentes. Sed ut in numeris finitis series repraesentetur, ponatur a vel radius BA divisus in centum partes aequales, qualibus ipsae BM abscissae uniformiter crescunt. Quod si tabulam ad usum condere vellemus, posset BA divisa cogitari in partes 1 000 000. Nunc vero posita, ut dixi $a = 100$, et $y = 1.$ vel 2. vel 3. vel 4. etc. series haec erit omnium $\frac{y^2 a}{a^2 + 2y^2}$[:]

$$\frac{1}{102} \quad \frac{4}{108} \quad \frac{9}{118} \quad \frac{16}{132} \quad \frac{25}{150} \quad \frac{36}{172} \quad \frac{49}{198} \quad \frac{64}{228} \quad \frac{81}{262} \quad \frac{100}{300} \quad \text{etc.}$$

quae ducta in 100 dabit:

$$\frac{100}{102} \quad \frac{400}{108} \quad \frac{900}{118} \quad \frac{1600}{132} \quad \frac{2500}{150} \quad \frac{3600}{172} \quad \frac{4900}{198} \quad \left[\frac{6400}{228}\right] \quad \frac{8100}{262} \quad \frac{100,00}{300} \quad \text{etc.}$$

summam omnium $\frac{y^2 a}{a^2 + 2y^2}$.

Nunc intelligatur recta BF. vel ei respondens ab altera parte BM. dividi in partes aequales infinitas FF. vel MM. et in diametro BK designentur totidem respondentes HH (etsi inter se inaequales), ductis scilicet FC tangentibus et CH sinubus. Iungantur

1 NB. error calculi in sequentibus: non erat dicendum $\frac{y^2 a}{a^2 + 2y^2}$, sed $\frac{2y^2 a}{a^2 + y^2}$.

13 $\frac{6400}{228}$ *erg. Hrsg.* 15 *(1)* Ut si *(2)* Nunc intelligatur diameter BK. divisa in partes aequales *(a)* infinitas *(b)* quantitate sive finitas sive infinitas *(c)* sive finitas, sive infinitas *(d)* numero infinitas BH. HH. HH. etc. ut v. g. BH. vel RP. | vel $\rho\beta$ *erg.* | et ex punctis divisionis applicatae perpendiculares seu sinus HC. usque ad circumferentiam eductae intelligantur | ut in punctis C. occurrant *erg.* | v. g. Pξ. $\beta\alpha$. Denique ducantur totidem BC. *(3)* Nunc *L*

9 series haec: Bei konsequentem Rechnen müsste in den Nennern der folgenden Brüche 10 002, 10 008, 10 018 etc. stehen.

quaelibet proxima puncta C per rectas CC, qualis recta est v. g. $\psi\xi$. Recta CC producatur, dum occurrat ipsi BV in F, v. g. $\xi\psi$ producta incidat in V. et cum HH, v. g. RP. sit infinite parva, FC, v. g. $V\psi$ circulum tanget: dixi triangulum, duabus BC proximis, et una CC comprehensum duplicatum, aequari rectangulo $HH \frown BF$, v. g. triangulum $B\psi\xi$ duplicatum aequari rectangulo RBM, idemque de aliis omnibus triangulis ac rectangulis respondentibus dici posse, unde manifestum est, qua ratione series numerorum rationalium huc queat applicari. Nam triangula BCC, sive elementa segmentorum per triangula BCC continue adiecta in alia segmenta crescentium sunt inter se, ut numeri rationales. Quod ostendo, nam cum in rectangulo MH semper BM, y. quippe arithmetice crescentes seu figurae $BMMH$, et LM, quippe $x = \dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$, sint rationales, erunt et rectangula comprehensa, quantitates rationales a quibus si series infinita numerorum rationalium subtrahatur, erit et residuum rationale. Residuum autem $BLLH$ segmento aequale est. Quare quantitas segmentorum circuli infinita serie numerorum rationalium explicari potest. Et triangula BCC ex hac constructione orta latitudinis infinite parvae, sive segmentorum continue crescentium elementa erunt inter se velut numerus ad numerum.

Quod ut facilius exhibeatur calculo, consideranda sunt duo, a l t e r u m quod diximus, semper rectangulum LHH, seu $LH \frown HH$, v. g. $SR \frown RB$ (vel $OP \frown PR$), esse

7–17 applicari. *(1)* Sed quoniam elegans admodum atque utilis haec consideratio est, placet eam distincte exequi. *(a)* Esto *(b)* Ponatur MM = 1. erit BM = y = 1. vel 2. vel 3. vel 4. etc. | ML = BH semper est $\dfrac{2\mathrm{y}^2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+2\mathrm{y}^2}$. *erg.* | At a. perpetuo constans aequalis est numero infinito. Posita iam BH, hoc loco BR. infinite parva seu = HH. manifestum est triangulum BCC. inter B. et ψ. cadere nullum, eiusque valorem proinde esse 0. seu nullum. Eodem modo posito BM = y. esse infinite parvam, seu = MM = 1. erit ML, seu BH, hoc loco BR vel MS = $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+2}$, quae applicata MS. ducta in portionem altitudinis, cui applicatur aequalem 1. seu unitatem constructionis (neque enim aliter applicatae velut lineae in calculum spatiorum venire possent, nisi hoc modo, ut ridiculo utar verbo, rectangularisarentur), dabit idem $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+2}$, ut proinde imposterum ea multiplicatio subticeri possit. Rectangulum autem MLH erit hoc loco, y esse infinite parvam = MM = 1. etiam: $\dfrac{2\mathrm{a}}{\mathrm{a}^2+2}$, et cum subtracto *(2)* | Nam ... numerum. | Quod calculo ostendam. Minima BM esto = 1. erit minimum rectangulum $\dfrac{2\mathrm{y}^2\mathrm{a}}{2\mathrm{y}^2+\mathrm{a}^2}$. quod si calculatur MM = 1. *gestr.* | *erg.* | Quod L

triangulo duplicato BCC, v. g. $B\psi\xi$, aequale; a l t e r u m , quod nunc admonendum est, rectangulum eiusmodi LHH v. g. $SR \frown RB$ (aut $OP \frown PR$), fieri ex $BM = y = LH$. v. g. SR (vel OP arithmetica progressione crescentibus, ut 1. 2. 3. 4. etc.) ducto in HH, v. g. BR, differentiam inter ipsam $x = BH = ML$ assumtam, v. g. BR et inter praecedentem, quae erit 0. assumatur pro x, ipsa recta RB, nempe omnium x prima, unde differentia inter RB et 0 tunc erit ipsa RB. Quod si recta assumta $BH = ML = x$. sit alia a prima, velut si sit BP. tunc HH erit hoc loco RP, differentia inter BR, nempe x sive BH vel ML praecedentem, et BP, nempe x sive BH, aut ML, praesentem sive assumtam. Hinc facilis redditur calculus, tantum enim, computata ipsarum $x = \dfrac{2y^2a}{2y^2+a^2}$, serie, prout scilicet terminus y continue alius atque alius arithmetica progressione assumitur; sumendae sunt earum differentiae, et in ipsas y numeros scilicet progressionis arithmeticae ducendae, et habebuntur duplicatae areae triangulorum BCC (v. g. $B\psi\xi$) ex quibus segmenta circuli conflantur ac quibus velut elementis (applicatarum loco) crescunt.

$BM.\ \ y\ =$	1	2	3	4	5
$ML.\ \ x\ =$	$\dfrac{2a}{a^2+2}$	$\dfrac{8a}{a^2+8}$	$\dfrac{18a}{a^2+18}$	$\dfrac{32a}{a^2+32}$	$\dfrac{50a}{a^2+50}$
$\bigtriangledown^{\text{la}}\ BCC$		$8-2, \frown \dfrac{5}{3} = 10$	$18-8, \frown 3$		
	$\dfrac{2a}{a^2+2}$	$\dfrac{10a^3}{a^4+10a^2+16}$	$\dfrac{30a^3}{a^4+26a^2+144}$	$\dfrac{56a^3}{a^4+50a^2+576}$	$\dfrac{90a^3}{a^4+82a^2+1600}$
		/\	/\		
		$a^2+2, \frown a^2+8$	$a^2+8 \frown a^2+18$		
		/\	/\		
		$a^4+8a^2+2a^2+2 \frown 8$	$a^4+18a^2+8a^2+18 \frown 8$		
Segmenta $BCCB$					

12 duplicatae *erg. L*

18 $\bigtriangledown^{\text{la}}$ BCC: Bei konsequentem Rechnen hätten die Werte für die Teildreiecke (abgesehen von dem falschen Wert für das zweite Teildreieck) noch durch 2 geteilt werden müssen.

Posita ergo unitate, linea infinite parva, et a numero infinito, series qualem cepi in infinitum continuata segmenti cuiuslibet circularis, ex quibus maximum est semicirculus, mensuram dabit. Sed quoniam nec series infinitae absolvi, nec numeri infiniti exprimi possunt; ideo ut ista quam sunt pulchra demonstratu, tam fiant usu expedita, docere operae pretium est, quomodo hinc duci possint appropinquationes ad veram circuli mensuram omnibus hactenus inventis commodiores. Quod adeo verum est, ut ausim dicere, nihil inde a temporibus Archimedis maioris ad cyclometriam momenti repertum. Tantum ergo numerus a, infiniti loco assumendus est maximus, ita enim, quanto ille assumetur maior, tanto exactius mensura circuli eiusve partium exhibita referet veram. Deinde arte quadam, quam mox exponam series hoc loco exposita in aliam commutanda est, quae nos continuandi opere absolvat.

Ars autem illa in eo consistit, ut elementa segmentorum, ad elementa hyperbolae revocemus, quod hactenus potuit nemo; quoniam elementa hyperbolae rationalibus numeris exacte exprimi possunt, quod huc usque frustra in circulo tentatum est.

Sed ut haec praestemus resumenda est aequatio nostra naturam progressionis segmentorum exhibens, $x = \dfrac{2y^2a}{a^2+2y^2}$. Potest autem in numeratore huius fractionis, $2y^2a$, omitti a, cum enim a sit perpetuo eadem, summa per eam multiplicari potest, ut nihil opus sit repeti sigillatim, fiet ergo $\dfrac{x}{a} = \dfrac{2y^2}{2y^2+a^2}$. eam vero quantitatem aio aequalem esse huic: $1 - \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$. Nam $1 - \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$ est aequalis huic: $\dfrac{a^2+2y^2-a^2}{a^2+2y^2}$, quae est $= \dfrac{2y^2}{2y^2+a^2}$. Ergo $1 - \dfrac{x}{a} = \dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$. Quare superest ut summam tantum omnium $\dfrac{a^2}{a^2+2y^2}$ inveniamus.

739,19–24 *Nebenrechnungen:*

$8a^3 + \cancel{16a} - 2a^3 - \cancel{16a}$

$10a^3$ [*sic !*]

$$\begin{array}{rrrrr} & & 32 & & \\ & & 18 & & \\ & & \overline{256} & & \\ 16 & 14 & & 18 & 32 \\ 9 & 4 & 32 & 5 & 5 \\ \hline 144 & 56 & 576 & 90 & 1600 \end{array}$$

Quam in rem considerandum est, si qua sit aequatio, talis $\frac{a^2}{a+y}$ = applicatae, posita y abscissa continue crescente, a vero recta supposita constante, figuram ex his applicatis conflatam esse hyperbolicam. Nos ut in nostra aequatione a $2y^2$ binarium multiplicantem amoliamur, pro $\frac{a^2}{a^2+2y^2}$ faciemus $\frac{\frac{a^2}{2}}{\frac{a^2}{2}+y^2}$. Unde licebit substituere $\frac{b^2}{b^2+y^2}$, modo scilicet meminisse velimus tunc b^2 aequivalere $\frac{a^2}{2}$, seu pro b intelligendum $\frac{a}{\sqrt{2}}$. Quod si ergo aequatio sit $\frac{b^2}{b+y}$. posita b recta constante; spatium, ut dixi hyperbolicum erit. Sed non opus est ut hyperbolam quaeramus cum hyperboloeis cubica locus sit omnium $\frac{a^3}{a^2+2y^2} = x$. Erit enim $a^3 = a^2x + 2y^2x$. Quae aequatio ut reducatur ad simpliciorem, methodo quam ad exemplum regulae in conicis aequationibus reducendis a summo viro Ioh. Wittio traditae in altiori hac expertus sum, fiat $y^2 = z^2 - \frac{a^2}{2}$, et erit $a^3 = a^2x + 2z^2x - \frac{2a^2x}{2}$. sive $a^3 = 2z^2x$. quam hyperboloeidis cubicae formulam esse manifestum est, cuius datur quadratura. Quod si huc usque nihil erratum est, pro tetragonismo mechanico quaesito, habebimus verum.

7–13 *Zum ergänzten Schlussabschnitt in anderem Duktus:* Error

6–13 erit. | Nunc ut ad *gestr.*; Sed non ... habebimus verum. *erg.* | *L*

9 exemplum regulae: s. J. de WITT, *Elementa curvarum linearum*, *DGS* II S. 304–306.

42_2. SOLUTIO ANALYTICA

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 161–162. 1 Bog. 2°. 3 S. Gestrichene Bogenmarkierung. Auf Bl. 162 r° neben der Hauptrechnung verschiedene Zusätze in anderem Duktus. — Auf Bl. 162 v° Gesprächsaufzeichnung: Leibniz u. Ozanam mit nachträglichen Notizen von Leibniz; weitere zugehörige Notizen auf Bl. 161 r° u. Bl. 161 v° sowie auf LH 35 XII 2 Bl. 160 v° (vgl. dazu N. 48).
Cc 2, Nr. 561 tlw.

Ut ad comparationem spatii circularis et hyperbolici vel hyperboloeidis veniamus, animadvertendum est, quod $b+y \frown y-b$ vel $b+y \frown b-y = [y^2-b^2$ vel $b^2-y^2]$. Nam

$$\begin{array}{rl} & b \quad +y \\ & \underline{y \quad -b} \\ & -b^2 - \cancel{by} \\ +\cancel{by} + y^2 & \end{array} \qquad \text{et} \qquad \begin{array}{l} b \quad +y \\ \underline{b \quad -y} \\ b^2 + yb - yb - y^2 = b^2 - y^2. \end{array}$$

Ergo si applicata hyperbolica $\dfrac{b^2}{b+y}$ multiplicetur per $\dfrac{a}{b-y}$, fiet: $\dfrac{b^2a}{b^2-y^2}$.

Iam $\dfrac{b^2a}{b^2-y^2} - \dfrac{b^2a}{b^2+y^2} = \dfrac{b^4a+y^2b^2a-b^4a+y^2b^2a}{b^2-y^2 \frown b^2+y^2} = \dfrac{2y^2b^2a}{b^4-y^4} = z$.

Ergo $\dfrac{b^4-y^4}{y^2b^2} = \dfrac{a}{z}$. [Ergo] $\dfrac{b^4}{y^2b^2} - \dfrac{y^4}{y^2b^2} = \dfrac{b^2}{y^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{a}{z}$. Multiplicatis omnibus per b^2, fiet: $\dfrac{b^4}{y^2} - y^2 = \dfrac{ab^2}{z}$, rursusque multiplicatis omnibus per y^2, fiet $b^4-y^4 = \dfrac{ab^2y^2}{z}$, ac multiplicatis omnibus per z, fiet: $b^4z - y^4z = ab^2y^2$, sive $z = \dfrac{ab^2y^2}{b^4-y^4}$ $\quad b^4z = ab^2y^2 + y^4z$.

Si $\dfrac{b^2a}{b^2+y^2} = x$. erit $\dfrac{b^2+y^2}{b^2} = \dfrac{a}{x}$. et $b^2+y^2 = \dfrac{ab^2}{x}$.

8 *(1)* Nunc ut ad comparationem *(a)* circuli *(b)* spatii circularis et hyperbolici | vel hyperboloeidis *erg.* | veniamus, considerandum est = *ursprünglicher Beginn* *(2)* Ut *L* 9 quod *(1)* $\mathrm{b+y \frown b-y = b^2+y^2}$. *(2)* $\mathrm{b+y \frown y-b}$ vel $\mathrm{b+y \frown b-y}$ = | $\mathrm{b^2+y^2}$ vel $\mathrm{y^2-b^2}$ *ändert Hrsg.* |. Nam *L* 12+14 $\mathrm{b^2-y^2}$. *(1)* Ergo si applicata hyperbolica: $\dfrac{\mathrm{b^2}}{\mathrm{b+y}}$, dividatur per $\mathrm{y-b}$ productum erit *(2)* Ergo *L* 16 Ergo *gestr. L, erg. Hrsg.*

$$\frac{b^2+y^2}{b^2-y^2} \qquad \frac{b^2-y^2}{b+y} = b-y. \qquad b^2+y^2 \frown b^2-y^2 = b^4-y^4. \qquad \frac{\dfrac{b^2a}{b^2-y^2}}{\dfrac{b^2a}{b^2+y^2}} = \frac{b^2+y^2}{b^2-y^2}.$$

$\dfrac{b^2-y^2}{b^2+y^2}$. Iam $\dfrac{b^2}{b^2+y^2} = 1-\dfrac{y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $\dfrac{b^2-y^2}{b^2+y^2} = 1-\dfrac{2y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $2-\dfrac{2y^2}{b^2+y^2}$ sive $\dfrac{b^2-y^2}{b^2+y^2}+1 = \dfrac{2b^2}{b^2+y^2}$ sive $\dfrac{b^2-y^2}{b^2+y^2} = \dfrac{2b^2}{b^2+y^2}\ -1$.

$\dfrac{b^2+y^2}{b+y} = b+y-\dfrac{2by}{b+y}$.

$\dfrac{2by}{b+y} = \dfrac{b}{b+y} \frown 2y$. Iam ostensum $\dfrac{b}{b+y} = 1-\dfrac{y}{b+y}$. Ergo $\dfrac{2by}{b+y} = 2y-\dfrac{2y^2}{b+y}$. Ergo $\dfrac{b^2+y^2}{b+y} = b+y-2y+\dfrac{2y^2}{b+y} = b-y+\dfrac{2y^2}{b+y}$.

$\dfrac{2y^2}{y+b} = \dfrac{2y^2+2by-2by}{y+b} = 2y-\dfrac{2by}{y+b}$.

Ostensum est $\dfrac{2by}{b+y} = 2y-\dfrac{2y^2}{b+y}$. Eodem iure idem $= 2b-\dfrac{2b^2}{b+y}$. Ergo $\cancel{2}y-\dfrac{\cancel{2}y^2}{b+y} = \cancel{2}b-\dfrac{\cancel{2}b^2}{b+y}$. sive $y+\dfrac{b^2}{b+y} = b+\dfrac{y^2}{b+y}$.

$\dfrac{2y^2}{b+y} = x$. daret $2y^2 = bx+yx$. erit $y = z+\dfrac{b}{2}$. fiet:

---

3 *Unter* $\dfrac{2b^2}{b^2+y^2}$ *umrahmt und gestrichen:* $2-\dfrac{2y^2}{b^2+y^2}$. Ergo $\dfrac{b^2-y^2}{b^2+y^2} = 1-\dfrac{2y^2}{b^2+y^2}$, habuimus.

10 +yx. | vel $y^2 = \dfrac{bx+yx}{2}$. sive $y = \sqrt{\dfrac{bx+yx}{2}}$. sive $2y^2-bx+$ *gestr.* | erit *L*

---

10 fiet: Die folgenden Betrachtungen sind fehlerhaft. Leibniz erkennt dies und beendet sie S. 745 Z. 6 mit „Imo potius“.

$$2z^2 + \cancel{\frac{b^2}{4}} + \cancel{\frac{bz}{2}} - \cancel{xz} - \cancel{\frac{bz}{2}} = \cancel{bx}.$$

$$2y^2 + \cancel{2b^2} + by \quad - xy + \cancel{\frac{xb}{2}} \qquad \frac{bx}{2}$$

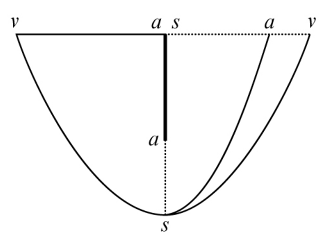
$$\frac{7}{4}b^2$$

$\frac{7b^2}{4} = bx + xy - by$. locus est hyperbole, vid. de Wit pag. 281. ubi simile exemplum.

Resumta ergo $\frac{b^2}{b^2+y^2} = 1 - \frac{x}{a}$. et multiplicata per $b+y$ utroque aequationis termino fiet: $\dfrac{b^2}{b - y + \dfrac{2y^2}{b+y}} = b + y - \dfrac{bx - yx}{a}$.

$$\frac{a^3}{a^2 + 2y^2} = x.$$

Ergo $a^3 = a^2x + 2y^2x$. vel $\frac{a^3}{x} - a^2 = \cancel{2}y^2$. Extrahenda ergo radix ex $\frac{a^3}{x} - a^2$. Iam $\frac{a^2}{x}$ applicatam parabolae *(!)* appellemus v. fietque $v - a, \frown a, \sqrt{\ } = s$.



[*Fig. 1*]

Ponatur $y = z - \frac{a}{2}$. Ergo $2y, yx = 2yzx - \cancel{2}yax$. Ergo $a^3 = 2yzx - yax + a^2x$.

8 $y^2 = z^2 - a^2$.

11 $z = y + \frac{a}{2}$. $z^2 = y^2 + \frac{a^2}{4} + \cancel{2}ya$.

4 vid.: de WITT, *Elementa linearum curvarum*, *DGS* II, S. 281.

$$a^3 + yax = 2yzx + a^2x.$$

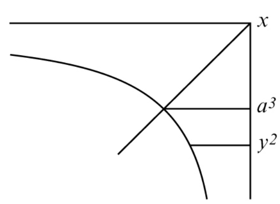
$$a^3 + \cancel{2}zax - \frac{\cancel{a^2x}}{\cancel{2}} = 2z^2x - \cancel{azx} + \frac{\cancel{2a^2x}}{\cancel{2}} + \frac{a^2x}{2}.$$

$$a^3 + \cancel{2yax} + \cancel{a^2x} = \cancel{2yax} + y^2x + \frac{\cancel{a^2x}}{\cancel{4}} + \frac{3a^2x}{4}.$$

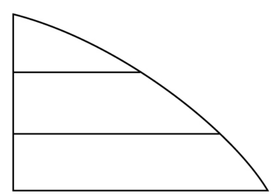
Imo potius.

Ut reducatur haec aequatio, si fieri potest: $a^3 = a^2x + 2y^2x$. fiat: $y^2 = z^2 - \frac{a^2}{2}$. et fiet: $a^3 = \cancel{a^2x} + 2z^2x - \cancel{a^2x}$. seu $a^3 = 2z^2x$. Unde intelligitur locum quaesitum esse hyperboloeidem cubicam.

Notabilis est haec reducendi methodus, quam ad exemplum regulae a summo viro Ioh. Wittio in aequationibus conicis reducendis traditae, in hac altiori sum expertus.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$$a^3 = a^2 + 2y^2, \frown x. \quad a^2 = \frac{a^2 + 2y^2}{a} \frown x. \quad a^2 = ax + \frac{2y^2x}{a}. \quad \frac{a^2}{a + \frac{2y^2}{a}} = x.$$

$y^2 = 2a - x^2$. Ponatur $x = z + 2a$, fiet $x^2 = zx + 2ax$. Ergo $y^2 = \cancel{2ax} - zx + \cancel{2ax}$.

8 seu *(1)* $\frac{a^3}{x} = 2z^2$. Nunc reducenda iterum $z^2 = y^2 + \frac{a^2}{2}$. *(2)* a^3 *L* 11+13 expertus. *(1)* Ponatur $y = z - \frac{a}{\text{Rq } 2}$, fiet $a^3 = a^2x - 2$ *(2)* a^3 *L*

---

10 ad exemplum: de WITT, *Elementa linearum curvarum* l. II, *DGS* II, S. 242–340; insbesondere S. 255, 280 f., 304–306.

fiet: $y^2 = 0 - zx$. Quod est absurdum. Ponendum ergo potius $2a - z = x$. fiet $x \frown x = 2ax - zx = x^2$. atque ideo $y^2 = 2ax - 2ax + zx = y^2 = zx$. Quod verissimum et notabile est, est enim arcus circuli locus mediarum proportionalium inter duas incognitas, seu continue variabiles.

Atque haec quidem occasionem praebent cogitandi de reducendis locis, in quibus nulla est linea cognita, ad locos in quibus aliqua est. Uti hoc loco, uti $y^2 = zx$, reducamus ad aliquam aequationem in quam recta quaedam cognita sive invariabilis ingrediatur, faciemus: $a = x + z$. vel $z = a - x$. fiet $y^2 = ax - x^2$. Unde sequitur circulum esse locum duarum mediarum proportionalium. Sciendum est autem ex duabus illis, quarum media proportionalis quaeritur, semper alteram crescere alteram decrescere, et quidem uniformiter, unde recta aequalis utrisque statui potest.

Quodsi quaerantur duae mediae proportionales, ut $y^3 = z^2x$. ponatur rursus $a = z + x$. seu $z = a - x$. et fiet $y^3 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$. Quae non potest ultra reduci, nam quoniam scilicet altera incognitarum quantitatum, y. est in se tantum ducta, non etiam in alteram incognitam. Et si quis reducere vellet, ad aequationem solas incognitas continentem deveniret.

Ita exhibere possumus omnes figuras, quae sunt loca mediarum proportionalium, sive radicum quadratarum, cubicarum, quadrato-quadraticarum, ex rectangulis planis, solidis altiorumque dimensionum, quae duae tantum rectae ingrediuntur.

Notabile est vero etsi hae figurae sint ipsarum mediarum proportionalium, seu radicum loca; esse tamen alias curvas, plerumque uno gradu simpliciores, quibus ex rectangulo aliquo solido, aut altiore radices extrahi queant; ita duarum mediarum proportionalium locus est aequationis $y^3 = x^3 - 2ax^2 + a^2x$. et tamen possunt duae mediae proportionales inveniri loco aequationis simplicioris per parabolam, hyperbolen, ellipsin. Quod et Cartesius recte observavit, et ni fallor curvae illae gradu continue crescentes quas instrumento ex regulis mobilibus composito describere ingeniose docet. Illae ipsae sunt, quas hoc loco expono.

8 faciemus: *(1)* z = a + x. cum enim ambae cogitentur. *(2)* a *L* 12 f. z + x. |seu z = a − x. *erg.*| et fiet *(1)* $y^3 = a^2x + x^3 - 2ax^2$. Quae aequatio ut contrahatur *(2)* y^3 *L* 15 ad *(1)* locum *(2)* aequationem *L* 18 rectangulis, *(1)* prismatis *(2)* parallelepipedis, aliis *(3)* planis *L* 23 aequationis *erg. L*

25 ni fallor: Descartes, *Geometria*, *DGS* I, S. 67–69 sowie S. 19–23.

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\dfrac{\cancel{a^2}}{a^2+y^2}}{\dfrac{\cancel{a^2}}{a^2+2y^2}} \qquad \dfrac{\dfrac{1}{a^2+y^2}}{\dfrac{1}{a^2+2y^2}} = \dfrac{a^2+\beta y^2}{a^2+y^2} = 1 + \dfrac{\beta-1\lrcorner \frown y^2}{a^2+y^2} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad /\backslash \\ \text{Pro 2. vel 3. vel 4. etc. pone } \beta. \qquad\qquad\qquad 1-\dfrac{a^2}{a^2+y^2} \end{array}\right\}$$

Ergo $\dfrac{a^2+\beta y^2}{a^2+y^2} = \cancel{1}+\beta-\dfrac{\beta a^2}{a^2+y^2}-\cancel{1}+\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$.

$$\frac{9}{9+a^2} = \frac{9+a^2-a^2}{9+a^2} = 1-\frac{a^2}{a^2+9}.$$

$$\frac{9}{9+1} = \frac{9}{10} = \frac{9+1-1}{9+1} = 1-\frac{1}{10}. \qquad \frac{11}{11+1} = \frac{11}{12} = \frac{11+1-1}{11+1} = 1-\frac{1}{12}.$$

$$\frac{9}{9+1} \;\overline{\underline{\times}}\; \frac{11}{11+1} \qquad \frac{\cancel{99}+9 \text{ --- } \cancel{99}+11}{9+1\frown 11+1} = \frac{11-9}{9+1\frown 11+1}.$$

$$\frac{1}{1000,000+1} \;\overline{\underline{\times}}\; \frac{4}{1000,000+4} \qquad \frac{4000,000+\cancel{4} \text{ --- } 1000,000+\cancel{4}}{1,000\ [\textit{bricht ab}]}$$

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 28 & & & & \\
 & & & & & 7 & & & \\
36 & \text{———} & & & 21 & \text{———} & & 756 & \\
 & 11 & \cdots & & & 6 & \cdots & & 66 \\
25 & \text{———} & & & 15 & \text{———} & & 375 & \\
 & 9 & \cdots & & & 5 & \cdots & & 45 \\
16 & \text{———} & & & 10 & \text{———} & & 160 & \\
 & 7 & \cdots & & & 4 & \cdots & & 28 \\
9 & \text{———} & & & 6 & \text{———} & & 54 & \\
 & 5 & \cdots & & & 3 & \cdots & & 15 \\
4 & \text{———} & & & 3 & \text{———} & & 12 & \\
 & 3 & \cdots & & & 2 & \cdots & & 6 \\
1 & \text{———} & & & 1 & \text{———} & & 1 & \\
 & 1 & \cdots & & & 1 & \cdots & & 1 \\
0 & \text{———} & & & 0 & \text{———} & & 0 &
\end{array}$$

---

7 f. Leibniz rechnet so, dass er ein positives Resultat erhält. Die größeren Minuszeichen haben zusätzlich Klammerfunktion.

$$\frac{6a^2\beta^2}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4}\ \underline{\times}\ \frac{15a^2\beta^2}{a^4+13a^2\beta^2+36\beta^4}$$

$$6a^6\beta^2\ +\ \overset{78}{6 \frown 13}\ a^4\beta^4 + \overset{216}{6 \frown 36}\ a^2\beta^6 \lrcorner + 15a^6\beta^2 + \overset{75}{15 \frown 5}\ a^4\beta^4 + \overset{60}{15 \frown 4}\ a^2\beta^6$$

$$21a^6\beta^2 \qquad 152a^4\beta^4$$

[*Rechnung bricht ab*]

$$\frac{1\beta^2}{a^2+\beta^2}\ \ \underline{\overset{+}{\times}}\ \ \frac{4\beta^2}{a^2+4\beta^2} = \frac{\overset{5}{\overbrace{a^2\beta^2 + \overset{8}{\overbrace{4\beta^4 + 4\beta^4}} + 4a^2\beta^2}}}{a^4+5a^2\beta^2+4\beta^4}\ \ \underline{\overset{+}{\times}}\ \ \frac{9\beta^2}{a^2+9\beta^2}$$

$$= \frac{9\beta^2a^4+45a^2\beta^4+36\beta^6 \mid + \mid 5a^4\beta^2+8a^2\beta^4+45a^2\beta^4+72\beta^6}{a^6+5a^4\beta^2+4a^2\beta^4 \mid + \mid 9\beta^2a^4+45a^2\beta^4+36\beta^6} \text{ seu}$$

$$\frac{14a^4\beta^2+98a^2\beta^4+108\beta^6}{a^6+14a^4\beta^2+49a^2\beta^4+36\beta^6}\ \underline{\overset{+}{\times}}\ \frac{16\beta^2}{a^2+16\beta^2}$$

$$= 16\beta^2a^6 + \overset{224}{14 \frown 16}\, a^4\beta^4 + 784a^2\beta^6 + 576\beta^8 \mid + \mid$$

[*Rechnung bricht ab*]

11–14 *Nebenrechnungen:*

	16	49	36
	14	16	16
45	64	294	216
53	16	49	36
98	224	784	576

1–6 In den Zählern sollte es anstelle von $6a^2\beta^2$ vielmehr $5a^2\beta^2$ und anstelle von $15a^2\beta^2$, wie ursprünglich richtig, $13a^2\beta^2$ heißen. Anstelle von $152a^4\beta^4$ sollte $153a^4\beta^4$ stehen.

$$\frac{y^2}{y^2+a^2}=\frac{y^2+a^2-a^2}{y^2+a^2}\ \not{f}=1-\frac{a^2}{a^2+y^2}.$$

$$\frac{a^2}{y^2+a^2}=\frac{\cancel{a^2}+\dfrac{\cancel{a^4}}{\cancel{y^2}}-\dfrac{a^4}{y^2}}{\cancel{y^2}+\cancel{a^2}}\ \not{f}\ \frac{a^2}{y^2}-\frac{a^4}{y^4+a^2y^2}$$

$$=\frac{a^4+\dfrac{a^6y^2}{y^4}-\dfrac{a^6y^2}{y^4}}{y^4+a^2y^2}=\ \not{f}\ \frac{a^4}{y^4}-\frac{a^6}{y^6+a^2y^4}\ \text{etc.}$$

$$=+\frac{a^2}{y^2}-\frac{a^4}{y^4}+\frac{a^6}{y^6}-\frac{a^8}{y^8}\ \text{etc.}=\frac{a^2}{a^2+y^2}.$$

At vero $\dfrac{y^2}{y^2+a^2}=1-\dfrac{a^2}{a^2+y^2}=$ ut sequitur.

$$\frac{y^2}{a^2+y^2}=\frac{\cancel{y^2}+\dfrac{y^4\cancel{a^2}}{a^2}-\dfrac{y^4\cancel{a^2}}{a^2}}{\cancel{a^2}+y^2}=\frac{y^2}{a^2}-\frac{y^4}{a^4+y^2a^2}$$

$$=\frac{y^4+\dfrac{y^6}{a^2}-\dfrac{y^6}{a^2}}{a^4+y^2a^2}=\frac{y^4}{a^4}-\frac{y^6}{a^6+y^2a^4}$$

$$=\frac{y^6+\dfrac{y^8a^4}{a^6}-\dfrac{y^8}{a^2}}{a^6+y^2a^4}=\frac{y^6}{a^6}-\frac{y^8}{a^8+y^2a^6}\ \text{etc.}$$

ergo $\dfrac{y^2}{a^2+y^2}=\dfrac{y^2}{a^2}-\dfrac{y^4}{a^4}+\dfrac{y^6}{a^6}-\dfrac{y^8}{a^8}$ etc.

Est autem $y=\beta$. 2β. 3β. etc. omittaturque a velut $=1$. Maxima $y=\dfrac{a}{\gamma}$.

$$y\left\{\begin{array}{c}\beta\\ 2\beta\\ 3\beta\\ 4\beta\\ \ \end{array}\right.\quad\frac{y^2}{a^2y^2}\quad\left\{\begin{array}{ccccccc}\beta^2 & & \beta^4 & & \beta^6 & & \beta^8\\ 4\beta^2 & & 16\beta^4 & & 64\beta^6 & & 256\beta^8\\ 9\beta^2 & (-) & 81\beta^4 & (+) & 729\beta^6 & (-) & 6561\beta^8\\ 16\beta^2 & & 256\beta^4 & & 4096\beta^6 & & 65536\beta^8\\ \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.} & & \text{etc.}\end{array}\right\}\ \text{etc.}$$

$$\frac{\dfrac{a^3}{3\gamma^{\cancel{3}}}}{a^2}-\frac{\dfrac{a^5}{5\gamma^{\cancel{5}}}}{a^4}+\frac{\dfrac{a^7}{7\gamma^{\cancel{7}}}}{a^6}-\frac{\dfrac{a^9}{9\gamma^{\cancel{9}}}}{a^8}.$$

Multiplicatis omnibus per a, fiet:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
\frac{a^2}{3\gamma} & - & \frac{a^2}{5\gamma} & + & \frac{a^2}{7\gamma} & - & \frac{a^2}{9\gamma} & [+\frac{a^2}{11\gamma} & - & \frac{a^2}{13\gamma} & + & \frac{a^2}{15\gamma} & - & \frac{a^2}{17\gamma}] & \text{etc.}\\
 & \frac{2a^2}{15} & & & & \frac{2a^2}{63} & & & \frac{2a^2}{143} & & & & \left[\frac{2a^2}{255}\right] & & \\
\frac{a^2}{3\beta} & & & & \frac{a^2}{7\beta} & & & \frac{a^2}{11\beta} & & & & & & &
\end{array}$$

749,12–750,4 *Nebenrechnungen (tlw. fortlfd.):*

$$\begin{array}{rrrrcrr}
16 & 256 & 4096 & 729 & & 13 & 16\\
\underline{16} & \underline{16} & \underline{16} & \underline{9} & & \underline{11} & \underline{15}\\
96 & 1536 & 24576 & 6561 & & 13 & 80\\
\underline{16} & \underline{256} & \underline{4096} & & & \underline{13} & \underline{16}\\
256 & 4096 & 65536 & & & 143 & 240
\end{array}
\qquad \frac{2a^2}{15} \underline{\times} \frac{2a^2}{16} = \frac{2a^2}{240}$$

$$\frac{1}{3\gamma^3} \overset{+}{\underset{-}{\times}} \frac{1}{7\gamma^7} + \frac{1}{11\gamma^{11}}$$

$$\frac{1}{3000} + \frac{1}{70{,}000{,}000} + \frac{1}{\underset{7\quad 3}{1100000000000}} \text{ fiet 11 } [\textit{Rechnung bricht ab}]$$

2 f. *Darüber:* Nota hyperboloeidis cubicae.

2 f. $+\frac{a^2}{11\gamma} \ldots -\frac{a^2}{17\gamma}$ *sowie* $\frac{2a^2}{255}$ *erg. Hrsg.*

749,10–751,5 Wegen der Streichungen bzw. Vernachlässigung der Exponenten von γ in den S. 749 Z. 17 und S. 751 Z. 4 sind die Ergebnisse nicht mehr textkonform. Diese unzulässigen Vereinfachungen wirken sich aufgrund der neuen Setzungen S. 751 Z. 6 nicht auf das Hauptergebnis ⊙ aus. 6 In der Nebenrechnung unterläuft Leibniz ein Flüchtigkeitsfehler: er hätte mit 17 anstelle von 16 und mit a^2 anstelle von $2a^2$ rechnen müssen.

Ut has duas summas comparemus, pro $\dfrac{a^2}{3\gamma}$ dicendum $\dfrac{a^2}{2\gamma+1\gamma}$. pro $\dfrac{a^2}{5\gamma} = \dfrac{a^2}{3\gamma+2\gamma}$. pro $\dfrac{a^2}{7\gamma} = \dfrac{a^2}{4\gamma+3\gamma}$ [*Text bricht ab*]

Si fuisset $\dfrac{y}{a+y}$, ut in hyperbola, habuissemus, multiplicatis omnibus per a:

$$\frac{a^3}{2\gamma a} - \frac{a^4}{3\gamma a^2} + \frac{a^5}{4\gamma a^3} - \frac{a^6}{5\gamma a^4} \quad \text{etc.}$$

$$\text{seu} \qquad \frac{a^2}{2\gamma} - \frac{a^2}{3\gamma} + \frac{a^2}{4\gamma} - \frac{a^2}{5\gamma}$$

Sed posito $a = 1$. et maxima $y = b$. erunt producta omnium

$$\frac{y^2a}{a^2+y^2} = \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{7}b^7 - \frac{1}{9}b^9 \text{ etc.} \quad \odot$$

Posito iam $\dfrac{y}{a+y}$, in hyperbola, fiet:

$$\frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{3}b^3 + \frac{1}{4}b^4 - \frac{1}{5}b^5$$

a quo si subtrahatur $\odot$ restabit:

$$\frac{1}{2}b^2 - \frac{2}{3}b^3 + \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{6}b^6 - \frac{2}{7}b^7 + \frac{1}{8}b^8 + \frac{1}{10}b^{10}$$

vel potius ob $\dfrac{a}{a+y}$ fiet

$$1 - \frac{1}{2}b^2 + \frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{1}{5}b^5$$

6 y = b. | minor quam a *gestr.* | erunt *L*

13+752,3 Anstelle von 1 müsste genauer b stehen.

a quo si subtrahatur:

$$\frac{1}{3}b^3 - \frac{1}{5}b^5 + \frac{1}{7}b^7 - \frac{1}{9}b^9 \text{ etc.} \quad \text{vel} \quad \odot \quad \text{restabit:}$$

$$1 - \frac{1}{2}b^2 - \frac{1}{4}b^4 + \frac{2}{5}b^5 - \frac{1}{6}b^6 - \frac{1}{8}b^8 + \frac{2}{9}b^9 \text{ etc.}$$

[*Zusätze*]

$$\begin{array}{ccccc}
\frac{1}{3} & \frac{1}{8} & \frac{1}{15} & \frac{1}{24} & \frac{1}{35} \\[4pt]
\frac{1}{4} & \frac{1}{9} & \frac{1}{16} & \frac{1}{25} & \frac{1}{36} \\[4pt]
\frac{1}{3+1} & \frac{1}{8+1} & \frac{1}{15+1} & \frac{1}{24+1} & \left[\frac{1}{35+1}\right] \\[4pt]
\frac{1}{4-1} & \frac{1}{9-4} & \frac{1}{16-9} & \frac{1}{25-16} & \frac{1}{36-25}
\end{array}$$

$$\frac{1}{4-1} \overset{+}{\times} \frac{1}{9-4} = \frac{9-\cancel{4}+\cancel{4}-1}{36-16-9+4} \;\Big|\; \frac{8}{15}$$

$$\frac{1}{9-4} + \frac{1}{16-9} = \frac{16-4}{144-81-64+36} \;\Big|\; \frac{12}{35}$$

$$\frac{1}{9-4} = \frac{1-\frac{4}{9}+\frac{4}{9}}{9-4} = \frac{1}{9} + \frac{4}{81-36}.$$

10 *Nebenrechnung (tlw. fortlfd.):*

$$\begin{array}{r} 81 \\ 64 \\ \hline 145 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 144 \\ 36 \\ \hline 180 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 180 \\ 145 \\ \hline 35 \end{array}$$

7 $\frac{1}{35+1}$ *erg. Hrsg.*

$$\begin{array}{lllll}
\frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} & & \text{etc.} & & \frac{1}{3} \quad \frac{1}{5} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{9} \\[2ex]
\frac{1}{4} + \frac{1}{6} = \frac{6+4}{24} & \Big| \frac{10}{24} & \overset{2}{\lceil\!\smile} & \frac{5}{24} & \frac{1}{3} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{5} = \frac{5+3}{15} \quad \frac{8}{15} \ \overset{2}{\lceil\!\smile} \ \frac{4}{15} \\[2ex]
\frac{1}{6} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{8} = \frac{8+6=14}{48} & & \overset{2}{\lceil\!\smile} & \frac{7}{48} & \frac{1}{5} \overset{+}{\underline{\times}} \frac{1}{7} = \frac{7+5}{35} \quad \frac{12}{35} \ \overset{2}{\lceil\!\smile} \ \frac{6}{35}
\end{array}$$

$\frac{4}{15} + \frac{5}{24} + \frac{6}{35} + \frac{7}{48}$ etc. auferatur $\frac{1}{15} + \frac{1}{24} + \frac{1}{35} + \frac{1}{48}$ fiet $\frac{1}{5} \quad \frac{1}{6} \quad \frac{1}{7} \quad \frac{1}{8}$ etc.

$\frac{ya^2}{y^2 - \beta^2} = x$. Datur autem $\frac{a^3}{y^2 - \beta^2} = x$. Ergo $\frac{a^2}{y^2 - \beta^2} = \frac{x}{a}$. quae posita y certa magnitudinis linea ipsi $\frac{a^2}{y^2}$ aequantur. Quorum cylinder $\frac{ya^2}{y^2}$, fiet $\frac{a^2}{y}$ momento omnium xa.

43. DIFFERENTIAE FIGURAE CIRCULO HOMOGENEAE RATIONALIS [Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 284. 1/5 S. auf Bl. 284 r° oben. Überschrift ergänzt. — Auf dem übrigen Blatt, mittels Trennstrich abgesetzt N. 44. Cc 2, Nr. 608 tlw.

Datierungsgründe: Von den beiden Stücken auf dem Bogen wurde N. 43 zuerst niedergeschrieben und dürfte kurz vor N. 44 entstanden sein. Die Verwendung des Begriffs functio im Titel von N. 44 sowie das Wasserzeichen des Papiers bedingen eine Abfertigung nach N. 40 vom August 1673.

Differentiae figurae circulo homogeneae rationalis

$$\frac{a^3}{a^2+y^2} - \frac{a^3}{a^2+y^2+1+2y} = \cancel{a^3} + \cancel{y^2a^3} + a^3 + 2ya^3 - \cancel{a^3} - \cancel{y^2a^3}$$

$$\frac{2ya^4}{a^4+2a^2y^2+y^4} = x, \quad \text{vel} \quad 2ya^4 = a^4x + 2a^2y^2x + y^4x, \quad \text{vel} \quad \frac{2y}{x}a^4 = a^4 + 2a^2y^2 + y^4,$$

vel $\quad a^2\sqrt{\dfrac{2y}{x}} = a^2 + y^2.$

Haec figura est quadrabilis. Ergo et figura cuius differentiae sunt

$$\frac{a^4}{a^4+2a^2y^2+y^4},$$

seu cuius differentiae sunt quadratis seu momento ipsarum $\dfrac{a^2}{a^2+y^2}$ homogeneae, est quadrabilis. Eius enim figurae complementum aequipollet differentiis in abscissas y ductis, seu

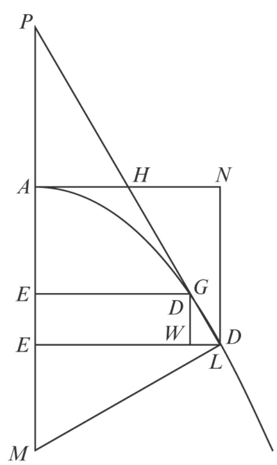
$$\frac{ya^4}{a^4+2a^2y^2+y^4}.$$

44. VARIA CIRCA FUNCTIONES TANG. INVERS. QUAD. CIRC. ET HYPERB. EX SE INVICEM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 284. $1\frac{4}{5}$ S. auf Bl. 284 v° und Bl. 284 r° unterer Teil. Überschrift ergänzt. — Auf Bl. 284 r° oben, mittels Trennstrich abgesetzt N. 43. Cc 2, Nr. 608 tlw., 614

Datierungsgründe: s. N. 43.

V a r i a c i r c a f u n c t i o n e s t a n g. i n v e r s. Q u a d. c i r c. e t h y p e r b. e x s e i n v i c e m e t a l i a s f i g u r a s e x i p s i s



[*Fig. 1*]

Figura proposita esto parabola, cuius vertex A. abscissa ex quo $AE = x$, applicata $ED = y = \sqrt{ax}$, posito a latere recto, et posita EE infinitesima seu unitate constructionis $= 1$. Tunc differentia inter duas applicatas proximas non nisi ipsa EE distantes erit $\sqrt{ax+a} - \sqrt{ax}$. Quod si figura aliqua cogitetur differentiis applicatarum parabolae homogenea, eius applicatae erunt: $a\sqrt{ax+a} - a\sqrt{ax} = y$, vel utroque quadrato:

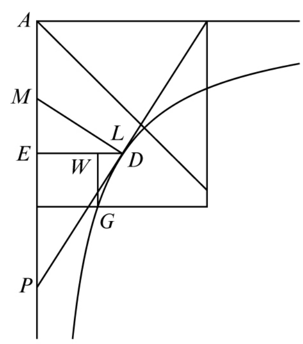
$ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x} = \dfrac{y^2}{a^2}$, seu $2ax + a - \dfrac{y^2}{a^2} = 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x}$, et utraque parte quadrata

$$4a^2x^2 + 4a^2x - \frac{4xy^2}{a} + a^2 - \frac{2y^2}{a^2} + \frac{y^4}{a^2} = 4a^2x^2 + 4a^2x,$$

vel $\cancel{4a^4x^2} + \cancel{4a^4x} - 4xy^2a + a^4 - \cancel{2y^2a} + y^4 - \cancel{4a^4x^2} - \cancel{4a^4x} = 0$, fiet: $4xy^2a = a^4 + y^4$,

vel $4x = \dfrac{a^4 + y^4}{y^2a} = \dfrac{a^3}{y^2} + \dfrac{y^2}{a}$, vel $\dfrac{4x}{a} = \dfrac{a^4 + y^4}{y^2a^2}$.

Ecce ordinatas ad basin figurae, cuius ordinatae ad axem sunt homogeneae differentiis parabolae.



[*Fig. 2*]

Applicatae hyperbolae sunt: $\dfrac{a^2}{x}$, differentiae[:] $\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{x+1} = \dfrac{a^2x + a^2 - a^2x}{x^2 + x} = \dfrac{a^2}{x^2}$.

Datis differentiis $\dfrac{a^2}{x^2}$ inverso modo quaeritur figura cuius sint eae differentiae.

Posito ergo $GW = 1$, et $WL = \dfrac{a^2}{x^2}$, erit $\dfrac{GW}{WL} = \dfrac{1}{\frac{a^2}{x^2}} = \dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{PE}{ED} = \dfrac{ED}{EM}$, ergo $\dfrac{ED}{PE}$ erit

6 f. Ecce ... parabolae. *erg. L*

3 Anstelle von $\dfrac{y^4}{a^2}$ müsste es $\dfrac{y^4}{a^4}$ heißen; der Fehler pflanzt sich weiter fort.

$\dfrac{a^2}{x^2}$, ergo $\dfrac{\dfrac{ED}{PE}}{\dfrac{ED}{EM}}$ erit: $\dfrac{\dfrac{a^2}{x^2}}{\dfrac{x^2}{a^2}} = \dfrac{\dfrac{1}{PE}}{\dfrac{1}{EM}} = \dfrac{EM}{PE} = \dfrac{a^4}{x^4}$.

Iam dudum constat esse $PE = \dfrac{ED}{WL} = \dfrac{y + \dfrac{a^2}{x^2}}{\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{yx^2}{a^2} + 1$, posito scilicet y esse ordinatam figurae quaesitae, nam $\dfrac{PE}{GW}$ vel $\dfrac{PE}{1} = \dfrac{ED}{WL}$.

Praeterea alibi a me demonstratum est, EM esse = differentiam inter semiquadrata duarum figurae quaesitae ordinatarum, seu inter semiquadratum de $y + \dfrac{a^2}{x^2}$ et semiquadratum de y, seu inter $\dfrac{y^2 + \dfrac{a^4}{x^4} + \dfrac{2ya^2}{x^2}}{2}$ et $\dfrac{y^2}{2}$[,] $= \dfrac{a^4}{2x^4} + \dfrac{ya^2}{x^2}$, ergo $\dfrac{PE}{EM}$ erit:

$$\frac{\dfrac{yx^2}{a^2} + 1}{\boxed{\dfrac{a^4}{2x^4}} + \dfrac{ya^2}{x^2}} = \left[\frac{x^4}{a^4}\right], \text{ sive reiectis inutilibus: } \frac{\dfrac{\cancel{y}x^2}{a^2}}{\dfrac{\cancel{y}a^2}{x^2}} = \left[\frac{x^4}{a^4}\right].$$

Unde patet aequationem esse identicam ac verissima quidem esse assumta, sed unde nihil novi detegatur.

Applicata circuli $\sqrt{2ax - x^2}$, alia $\sqrt{2ax + 2a - x^2 - 1 + 2x}$, differentia inter eas est: $= \dfrac{y}{a}$. Ergo

---

7 *Nebenrechnung, umrahmt:*

$$\text{sive } \frac{\dfrac{yx^2 + a^2}{a^2}}{\dfrac{a^4x^2 + 2ya^2x^4}{2x^6}} \text{ sive } \frac{2yx^8 + 2a^2x^6}{a^6x^2 + 2ya^4x^4} \times \frac{a^4}{x^4}$$

2 Iam *(1)* aliunde *(2)* dudum *L* 7 $\dfrac{a^4}{x^4}$ *L ändert Hrsg. zweimal*

4–6 Das ergibt sich z. B. ohne weiteres aus N. 27 S. 499 Z. 1–12 . 10–758,7 Die Rechnungen dieses Abschnitts sind fehlerhaft; sie werden ergebnislos abgebrochen.

$$\frac{y^2}{a^2} = \qquad 2ax - x^2 + \overset{\odot}{2a}x + 2a - x^2 - 1 + 2x$$

$$-\sqrt{4a^2x^2 + 4a^2x - 2ax^3 - 2ax + \overset{\text{☽}}{4}ax^2 \mid -2ax^3 - 2ax^2 + x^4 + x^2 - 2x^3},$$

seu $a^2\odot - y^2 = \text{☽}a^2$, et utraque parte in se ducta, fiet

$$\cancel{4a^2x^2} - \overset{16}{\overset{\cancel{8}}{\cancel{4}}}ax^3 + \overset{16}{\cancel{8}}a^2x^2 + \overset{24}{\cancel{8}}a^2x - \cancel{4ax^3} - \overset{8}{\cancel{4}}ax + \overset{8}{\cancel{8}}ax^2, +\cancel{x^4} - \overset{\cancel{8ax^3}}{\cancel{4ax^3}} - \cancel{4ax^2} + \overset{4}{\cancel{2}}x^4$$

$$+\overset{4}{\cancel{2}}x^2 - \overset{8}{\cancel{4}}x^3, +\cancel{4a^2x^2} + \cancel{8a^2x} - \cancel{4ax^3} - \cancel{4ax} + \cancel{8ax^2}, +4a^2 - \cancel{4ax^2} - 4a + \cancel{8ax}, +\cancel{x^4}$$

$$+\cancel{2x^2} - \cancel{4x^3}, +1 \ \langle -4x + 4x^2 \rangle$$

$[=]$ $\;-16ax^3 + 16a^2x^2 + 24a^2x + 8ax^2 + 4x^4 + 4x^2 - 8x^3 + 4a^2 - 4a$ [*bricht ab*]

Differentiae alia etiam via brevius haberi possunt, cum enim sit $PE = p = \dfrac{ED = y}{WL}$, erit $WL = \dfrac{ED}{PE}$. Cumque in circulo aequatio sit $2ax + x^2 = y^2$, erit PE sic habenda: $2ap + 2xp = 2y^2$, seu $PE = p = \dfrac{\cancel{2}y^2}{\cancel{2}ap + \cancel{2}xp} = \dfrac{y^2}{a+x} = \dfrac{2ax + x^2}{a+x} = PE$, et $ED = \sqrt{2ax + x^2}$, ergo WL erit $=$

$$\frac{\sqrt{\llcorner 2ax + x^2 \lrcorner} \frown a + x}{\sqrt{2ax + x^2} \frown \sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x}{\sqrt{2ax + x^2}} = \frac{a + x \frown a + x}{2a + x \frown x} = \frac{a^2 + 2ax + x^2}{2ax + x^2}$$

$$= \frac{a^2}{2ax + x^2} + 1 = WL.$$

Habetur ergo quadratura figurae: $\dfrac{a^3}{2ax + x^2} = \dfrac{a^3}{\llcorner 2a + x \lrcorner \frown x}$.

Iam alibi a me demonstratum est, differentias, in distantias a vertice, hoc loco x, ductas complemento figurae aequari. Ergo $\dfrac{a^3 \frown x}{\llcorner 2a + x \lrcorner \frown x} = \dfrac{a^3}{2a + x}$, cylinder figurae $\dfrac{a^2}{2a + x}$,

---

12 *Über dem dritten Ausdruck, umrahmt:* Hic incipit error. *Zusätzlich am Rande ein großes* NB.

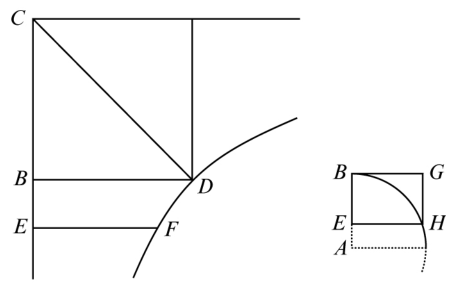
14 Error

---

8 Differentiae ... haberi possunt: Die Rechnungen der folgenden Abschnitte bis zum Ende des Stückes hin sind fehlerhaft und werden schließlich nicht mehr weitergeführt. Auf verschiedene dieser Fehler weist Leibniz selbst hin, hält jedoch an der falschen Grundannahme von Z. 9 fest.

addito semper x aequatur trilineo concavo circulari, seu portionis circularis, sinu verso, recto, et arcu contentae; complemento ad rectangulum isoparallelum, sub sinu verso nimirum et recto comprehensum.

Huius figurae quadruplum ordinatam habet: $\dfrac{4a^2}{2a+x}$, positoque $b = 2a$, fiet ordinata $\dfrac{b^2}{b+x}$, at hanc constat esse ordinatam hyperbolae asymptoto parallelam, cuius quadratum constans est b^2.



[*Fig. 3*]

Ergo posito hyperbolam describi, latere recto et transverso aequalibus, cuius semilatus transversum CD, et semiquadratum eius $\dfrac{CD^2}{2}$, cuius latus $BD = b = 2a$, ita ut CD sit $\sqrt{8a^2}$[;] posito inquam hyperbolam describi latere recto et transverso aequalibus $= [2]\sqrt{8a^2}$, manifestum est eius ordinatas ad asymptoton CE, ipsa $BD = 2a = b$ minores ut EF, esse $\dfrac{b^2}{b+x} = \dfrac{4a^2}{2a+x}$, posita ipsam $x = BE$ arithmetice crescentem, esse aequalem sinui verso portionis circularis datae, et a radio circuli dati AB; his inquam positis (assumendo EB ita parvam ne sit maior ipso radio $AB = a$) huius hyperbolici spatii $FEBDF$ quarta pars ipsis x seu semiquadrato ipsius BE aucta erit portionis circularis $BEHB$ ad rectangulum BEH complemento, nempe trilineo $BGHB$ aequalis.

1 addito semper x *erg. L*   11 2 *erg. Hrsg.*   15 ipsis x seu semiquadrato ipsius BE aucta *erg. L*

Habetur ergo non tantum quadratura circuli, ex data quadratura hyperbolae, sed et nunc indiscriminatim quadratura hyperbolae ex data circuli quadratura, vel contra, differentiis quadrabilibus inter earum portiones inventis.

Longe ergo praestat hoc inventum alteri, ubi quadratura hyperbolae in se reflexa opus erat ad dimensionem circuli habendam.

Ac iam nunc videndum an aliqua inde duci lux possit, collata utraque dimensione, quod suo loco experiemur.

Saltem id nobis praestat inventum duplex, ut mutua harmonia confirmata a calculi erroribus immunia esse intelligantur.

Imo falsa sunt ista unde a loco quem et notavi in margine per NB., error autem ex eo, quod differentiarum $\dfrac{a+x}{\sqrt{2ax+x^2}}$ quadrata assumsi pro ipsis. Rectiora sunt quae signo $\odot$ notata.

$\odot$

$\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}} = y$. Ergo $a^4 = 2axy^2 + x^2y^2$, vel: $a^2 + \dfrac{a^4}{y^2} = 2ax + x^2 + a^2$. Ergo $\sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{y^2}} = x + a$, et $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}} = \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{2a}{x}+1}}$, $\dfrac{a^2}{\dfrac{2a}{x}+1} = y^2$, unde fit: $a^{\cancel{2}}x = 2\cancel{a}y^2$, seu hyperbola.

Ergo $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$ pendet ex quadratura hyperbolae; vel contra quadratura hyperbolae ex illa.

Seu[:] $\sqrt{a^2 + \dfrac{a^4}{y^2}} = a + x$, vel $\sqrt{\dfrac{y^2+a^2}{y^2}} \frown a = a + x$,

---

1–3 *Dahinter, interlinear:* Imo prior vera, haec falsa.

2 et *(1)* vicissim *(2)* nunc indiscriminatim *L* 15 x + a *(1)* , vel sic: $a^4 + a^2y^2 = 2$ *(2)* , et *(a)* $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}}$, est figura segmentorum, atque ideo pendet a quadratura circuli. Ergo $\dfrac{a^2}{\sqrt{2ax+x^2}}$ pendet ab eadem. *(b)* $\dfrac{xa}{\sqrt{2ax+x^2}}$ *L*

vel $\sqrt{\underset{a+y \frown a-y}{y^2+a^2}} \frown \frac{a}{y} = a+x,$

vel $\underset{z}{\underset{\wedge}{a+y}} \frown \underset{\cancel{z-2y}}{\underset{\wedge}{a-y}}, \frown \frac{a^2}{y^2} = \underset{x}{\underset{\wedge}{a+x}} \frown \underset{x}{\underset{\wedge}{a+x}}.$

$$a^2+y^2 \frown \frac{a^2}{y^2} = x^2, \text{ vel } a^4+y^2a^2 = x^2y^2, \text{ vel } a^4 = x^2y^2 - y^2a^2, \text{ vel } \frac{a^4}{y^2} = x^2 - a^2.$$

$$\sqrt{a^2+\frac{a^2}{y^2}} = x, \text{ vel } a^2y^2+a^4 = x^2y^2. \text{ vel } \frac{y^4}{4} + a^2y^2 + a^4 = x^2y^2 + \frac{y^4}{4}.$$

Ergo *(!)* $a^2+y^2 = \sqrt{x^2y^2+\frac{y^4}{4}}$, vel $\frac{a^2}{y}+y = \sqrt{x^2+y^2}$. Ecce figuram cuius chordae sunt applicatae spatii hyperbolici applicatis rectanguli auctae. Divisisque omnibus per y, fiet: $\frac{a^2}{y^2}+1 = \sqrt{\frac{x^2}{y^2}+1}$, vel omnibus in se ductis $\frac{a^4}{y^4}+\frac{2a^2}{y^2}+\cancel{1} = \frac{x^2}{y^2}+\cancel{1}$, fietque: $\frac{a^4}{y^2}+2a^2 = x^2$. Ergo quadrata omnium x^2 quadrari possunt.

Cumque sit et $\frac{a^4}{x^2-a^2} = y^2$, consideretur et $y = \frac{x^2a}{x^2-a^2}$, nam hac cognita cognoscitur et prior. Ergo $x^2y - a^2y = x^2a$, seu $x^2y - x^2a = a^2y$, fietque $x^2 = \frac{a^2y}{y-a}$. Sed haec nunc ut aliena mittamus.

45. DE QUADRATURA CIRCULI ET HYPERBOLAE ET ALIIS CURVIS INDE PENDENTIBUS

[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 6 Bl. 12–13. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 12 r° u. 13 v°. 3 Zusätze außerhalb des Haupttextes. Überschrift, deren 2. Teil sich auf *LSB* VII, 3 N. 22 bezieht, erg. — Auf dem übrigen Bogen *LSB* VII, 3 N. 22.
Cc 2, Nr. 1237, 1238

Datierungsgründe: Das Stück ist, wie der direkte Bezug zu Beginn von Teil 1 und Teil 2 sowie die Fortsetzung der Figurenzählung zeigen, eine selbständige Fortsetzung der bisher frühesten bekannten Studie zur Kreisreihe (Cc 2, Nr. 563 u. 1233A Bog. 2–4), die auf den Herbst 1673 zu datieren ist, und dürfte kurz nach dieser Studie entstanden sein. Es ist etwas später als N. 44 anzusetzen, da die dort nicht zum Tragen gekommene falsche Zerlegung $a^2 + y^2 = (a + y)(a - y)$ hier ausgiebig verwendet wird. Außerdem bilden die Wasserzeichen der verwendeten Papiere ein Paar.

De quadratura circuli et hyperb. et aliis curvis inde pendentibus, et utrum duae illae a se invicem quod hic asseritur. Item progressionis harmonicae differentiae.

14–17 *Über dem Titel:*
$\frac{x^3}{a} = y^2$. $x + 1 \frown x + 1 \frown x + 1 = x^2 + 2x + 1 \frown x + 1 = \frac{\cancel{x^3} + 3x^2 + 3x + 1}{a} - \cancel{\frac{x^3}{a}} = \frac{3x^2}{a}$.
Applicatae parabolae quadraticae sunt reductae applicatae cubicae compositae.

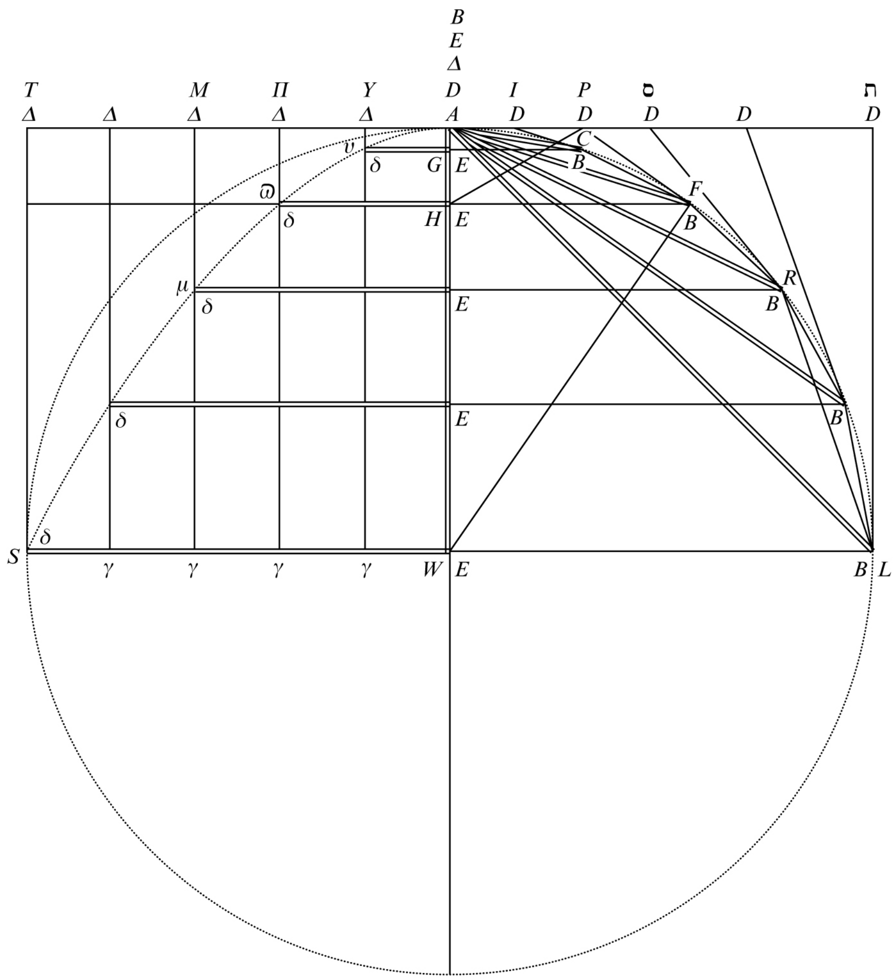


fig. 4.

1 fig. 4. *erg. Hrsg. nach LH 35 II 1 Bl. 87 v°* (*= Cc 2, Nr. 1233A Bog. 2*)

1 *fig. 4*: Die Kurve $\delta\delta\delta$ ist in der Handzeichnung eine Parabel; sie dient Leibniz als Paradigma für die anderen aus der Figur abgeleiteten Kurven.

[*Teil 1*]

Inspice figuram 4[tam] *Dissertationis de arithmetico circuli tetragonismo* figuramque $A\delta SW$. Ostensum est, posito $AE = x$, et $E\delta = y$, fore $y = \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$, vel $\sqrt{\dfrac{x^2a^2}{2ax - x^2}} = \sqrt{\dfrac{xa^2}{2a - x}}$, et aequatio figurae erit $2ay^2 = xa^2 + xy^2$, seu $x = \Delta\delta = \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$, posita $A\Delta = y$. Divisisque omnibus per $2a$, fiet $\dfrac{y^2}{a^2 + y^2}$.

Ante omnia autem tangentem curvae nostrae investigare operae pretium est, et primum posita x abscissa, fiet $4ay^2 - 2xy^2 = la^2 + ly^2$, fietque

$$l = \frac{4a - 2x}{a^2 + y^2} \frown y^2 = \frac{4a - 2x}{a^2 + 2ax - x^2} \frown 2ax - x^2.$$

Sed quoniam summa omnium l, in differentias ipsarum y, id est ipsi AT seu y velut abscissae, applicatarum, aequatur figurae, ideo potius in aequatione $\dfrac{4a - 2x}{a^2 + y^2} \frown y^2$, pro x substituamus eius valorem, fiet:

$$l = \frac{4a - \dfrac{4ay^2}{a^2 + y^2} \frown y^2}{a^2 + y^2}, \text{ vel } l = \frac{4ay^2}{a^2 + y^2} - \frac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4},$$

et iam $\dfrac{4ay^2}{a^2 + y^2}$ pendet ex q. circ. ergo et $\dfrac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$.

Figura ex his composita aequatur figurae $A\delta STA$ complemento figurae segmentorum, vel

---

9–765,1 *Daneben am Rande:*

Nota si istius $\dfrac{ya}{a^2 + y^2}$ *summae quadratura pendet a quadratura huius* $\dfrac{y^2}{a^2 + y^2}$.

$ya^2 = a^2x + y^2x, \;\; ya^2 - y^2x = a^2x, \;\; y \frown a^2 - xy = a^2x.$

13 et iam ... $\dfrac{4ay^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$. *erg. L*

---

8 $2ax - x^2$: Leibniz setzt hier irrtümlich den Kreis ein, der Fehler wirkt sich nicht weiter aus.

$$l = \frac{4a^3y^2 + \cancel{4ay^4} - \cancel{4ay^4}}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = \frac{4a^3y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}.$$

Divisisque omnibus per $2a$, fiet $\dfrac{2a^2y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$, quaeratur $\dfrac{a^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$, item $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$. His omnibus inter se iunctis fiet $\dfrac{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = 1$, et iunctae omnes eiusmodi applicatae his aequationibus homogeneae rectangulum complebunt.

Iam $\dfrac{2a^2y^2}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ pendet ex quadratura circuli, $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ etiam ex ea pendet. Idem ita in aliam formam commutari potest, si ponatur $a^2 + y^2 = z^2$, vel $y^2 = z^2 - a^2$, et $y^4 = z^4 - 2z^2a^2 + a^4$, fiet

$$\frac{y^4}{z^4} = \frac{z^4 - 2z^2a^2 + a^4}{z^4} = 1 - 2\frac{a^2}{z^2} + \frac{a^4}{z^4},$$

ergo haec figura $\dfrac{y^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4}$ aequalis istis simul, restat figura $\dfrac{a^4}{a^4 + 2y^2a^2 + y^4} = \dfrac{a^4}{z^4}$, sed $z = \sqrt{a^2 + y^2}$. Porro $\dfrac{a^2}{z^2} = \dfrac{a^2}{a^2 + y^2}$ etiam pendet ex quadratura circuli, restat ergo tantum $\dfrac{a^4}{z^4}$, quae etiam pendet ex circuli quadratura, ut vel hinc patet.

2–4 *Daneben am Rande:*
Fortasse imposterum utilis erit etiam tabula pro logarithmis logarithmorum ipsis numeris logarithmicis sumtis pro naturalibus.

5 f. $\dfrac{\mathrm{y}^4}{\mathrm{a}^4 + 2\mathrm{y}^2\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^4}$ *(1)* , erit a *(2)* | etiam ... Idem *erg.* | ita *L* 9 $\dfrac{\mathrm{y}^4}{\mathrm{a}^4 + 2\mathrm{y}^2\mathrm{a}^2 + \mathrm{y}^4}$ *(1)* quadrari potest *(2)* aequalis *L*

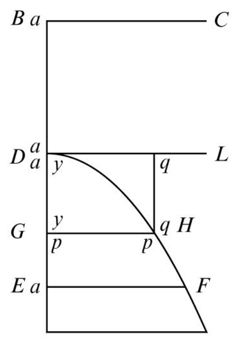


fig. 5.

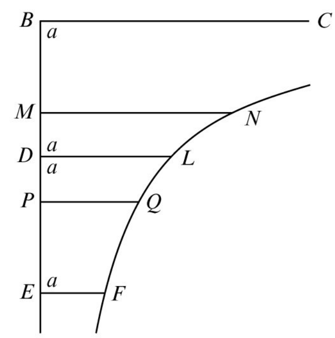


fig. 6.

Porro notandum est $a^2 + y^2$, aequari $a + y \frown a - y$, appellato ergo $a + y = m$, et $a - y = n$, erit $m - n = 2y$, et $mn = z^2$.

$$a + 1 \frown a - 1 \qquad a + 2 \frown a - 2 \qquad = a^2 + ya - ya + y^2$$

$\dfrac{a^3}{m \frown n} = p$, vel $\dfrac{a^3}{a + y, \frown a - y} = p$. Ergo $\dfrac{a^3}{n} = pm$, vel $\dfrac{a^3}{m} = pn$, seu $\dfrac{a^3}{a + y} = pa - py$. Ergo p in m, seu applicatarum $\underline{p}$ momentum ex axe librationis BC est cylinder hyperbolae, at si $BD = DE = a$, momentum applicatarum ex EF axe librationis est etiam cylinder hyperbolicus sed alio modo assumtus.

Hinc intelligitur et EF esse infinitam sive asymptoton, quoniam $a - y$, seu n, ibi fit infinite parva, divisore autem infinite parvo, dividendus fit infinite magnus. Priore modo cum momentum ex BC, tunc asymptotos hyperbolae momento homogeneae est in BC, posteriore modo cum momentum est ex EF, tunc et hyperbolae asymptotos est in EF.

---

1 Error est[:] $a + y, \frown a - y$ dat $a^2 - y^2$.

4 f. Contra $\dfrac{a^3}{n} = pm$, seu $\dfrac{a^3}{a - y} = pa + py$, ergo differentia inter istos duos cylindros hyperbolicos est $2py$, seu momentum ex DL duplicatum.

---

1 Porro: Leibniz hat erst im Nachhinein gemerkt, dass seine Zerlegung von $a^2 + y^2$ falsch ist. Der Fehler beeinflusst sämtliche Überlegungen bis zum Ende von Teil 1.

Ex his sequitur data quadratura hyperbolae utriusque, dari rectam ipsi [EF] vel BC parallelam, quae $DEFD$ statice bisecat, seu per centrum gravitatis eius transit: ea ponatur esse GH. Notam enim eam esse ex datis, patet. Nam distantiae axis aequilibrii GH, ab axe librationis BC vel EF, sunt ut momenta.

Posita enim ipsa figura, seu tota area $= \aleph^2$, tunc momentum eius ex EF, erit $\aleph^2 \frown EG$, et ex BC, erit $\aleph^2 \frown BG$, ergo momenta erunt ut distantiae. Momentorum ergo ratio nota est, ex posita hyperbolae quadratura, et distantiarum, ergo et axis aequilibrii GH. Iam momentum figurae ex DL, erit $\aleph^2 \frown DG$, at idem = cyl. hyp. $\dfrac{a^3}{n}$ demto $\aleph^2 \frown BD$, seu $\aleph^2 \frown a$, ergo $\aleph^2 \frown DG + \aleph^2 \frown BD$ $(= a)$, vel $BG \frown \aleph^2$, seu cylinder figurae sub $BG =$ cylindro hyperbolico seu omnibus $\dfrac{a^3}{a-y}$. Quod erat inveniendum.

Ecce quadratura, circuli ex data hyperbolae quadratura, non contra. Et certe credibilius, si unquam hanc priorem inventum iri.

Quando y nunquam assurgit ad a, ut quando resecta minor radio, cylinder hyperbolicus est finitae longitudinis.

Similis indagatio fieri potest momento sumto ex EF quae conferenda.

[*Teil 2*]

Inspice fig. 4 *Diss. de circuli per rescissas dimensione*, in ea omnes $ED = y =$ resectis $= \dfrac{xa}{\sqrt{2ax - x^2}}$. Ergo omnes x vel $\Delta\delta = \dfrac{2ay^2}{a^2 + y^2}$ pendent ex q. circ.

Quadrata omnium ED sunt $\dfrac{x^2a^2}{2ax - x^2} = \dfrac{xa^2}{2a - x} = ya$. Unde fit aequatio $xa = 2ay - xy$ vel $xa + xy = 2ay$, unde fit $x = \dfrac{2ay}{a+y}$, ergo homogenea est haec figura momento hyperbolici cuiusdam spatii ultra vel cis $a = DL$ (vid. fig. 6. hic) sumti ut $LDMNL$ vel $LDPQL$, ex ipsa DL. Iam momentum posterioris $LDPQL$ ex DL, a momento ex BC asymptoto, quod est a in DP, differt cylindro ipsius $LDPQL$. Posterior autem $LDPQ$ respondet ipsi $\dfrac{2a^2y}{a+y}$ ut $LDMNL$ ipsi $\dfrac{xa^2}{2a-x}$ quae ab a^2 differt ipsi $\dfrac{a^3}{2a-x}$ atque ideo etiam cylindro hyperbolici spatii. Ergo quadrata omnium ED pendent semper ex q. hyp.

1 EC *L ändert Hrsg.*

At quadrata omnium $\Delta\delta$ (fig. dict. 4.) seu $\dfrac{y^4}{1+2y^2+y^4}$ pendent ex q. circ. ut ostensum est, sed et quadrata omnium $\delta\gamma$ (dict. fig. 4.) quae sunt

$\dfrac{1}{1+2y^2+y^4}$ $\left(\dfrac{4a^6}{a^4+2y^2a^2+y^4}\right)$ quoniam $\delta\gamma$ sunt $\dfrac{2a^3}{a^2+y^2}$.

Si $\Delta\delta$ in $A\Delta$ distantias a vertice ducantur fiet: $\dfrac{2ay^3}{a^2+y^2}$, momento eorum ex AW quod perinde ex quadratura hyperbolae pendet, eodem modo $\gamma\delta$ in distantias ab S, in dicta fig. 4.

Fit $\dfrac{ya^3}{y^2+a^2} = x$. Ergo figura homogenea $ya^2 = y^2x + a^2x$, vel $ya^2 - yyx = a^2x$, vel $y = \dfrac{x}{a^2-yx}$.

$ya - y^2\dfrac{x}{a} = ax$. Ergo $ya - y^2\dfrac{x}{a} - \dfrac{a^2}{2\dfrac{x}{a}}\left(\dfrac{a^3}{2x}\right) = ax - \dfrac{a^3}{2x}$, vel: $\dfrac{a^3}{4x} - ax = \dfrac{a^3}{4x} + y^2\dfrac{x}{a} - ya$, sive $\sqrt{\dfrac{a^3}{4x} - ax} = \mp\, y\sqrt{\dfrac{x}{a}} \mp\!\!\!\!\pm \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{x}{a}}}$ quod ipsis in se multiplicatis patet, fit enim $y^2\dfrac{x}{a} + \dfrac{a^2}{4\dfrac{x}{a}}\left(\dfrac{a^3}{4x}\right) - ya$, ergo

$$y = \frac{\sqrt{\dfrac{a^3}{4x} - ax} \mp \dfrac{a}{2\sqrt{\dfrac{x}{a}}}}{\mp\sqrt{\dfrac{x}{a}}} = \sqrt{\mp\frac{a^4}{4x^2} \mp\!\!\!\!\pm a^2} + \frac{a^2}{x}.$$

Ecce rursus hyperbolicum spatium, restat ergo $\sqrt{\mp\dfrac{a^4}{4x^2} \mp\!\!\!\!\pm a^2}$ inquirendum, ponatur $= y$, fiet $y^2 = \mp\dfrac{a^4}{4x^2} \mp\!\!\!\!\pm a^2$, sive $4y^2x^2 = \mp a^4 \mp\!\!\!\!\pm a^2x^2$ vel $4y^2x^2 \mp a^2x^2 = \mp a^4$, fit

---

12 Auf der rechten Seite der Beziehung müsste es genauer $\mp\sqrt{\dfrac{a^4}{4x^2} - a^2}$ heißen. Die Vorzeichenproblematik kommt wegen der späteren Festlegungen nicht zum Tragen. 14 Anstelle von $\mp\!\!\!\!\pm\, a^2x^2$ müsste es $\mp\!\!\!\!\pm\, 4a^2x^2$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Versehen konsequent bis S. 769 Z. 10 weiter.

$$\frac{\mp\, a^4}{4y^2 \mp a^2} = x^2, \quad \text{sive sic potius } x = \frac{a^2 \frown \sqrt{\mp 1}}{\sqrt{4y^2 \mp a^2}}.$$

NB. hic methodum extrahendi radicem ex dubiis.

Item quod non sit opus signis aliis dubitationis praeter $\mp$ et $\overline{\mp}$ ne ad eos quidem casus ubi ignoratur utrum alteri praeponendum cum sit unum ex illis $+$ alterum $-$. Posito hic $\mp$ seu signum ipsius $\dfrac{a^4}{4x^2}$ significare $+$, et hoc loco constare puto $\mp$ esse $+$ in $\sqrt{\mp \dfrac{a^4}{4x^2} \overline{\mp}\, a^2}$, et $\overline{\mp}$ esse $-$, quia x hoc loco semper minor quam a.

Iam $\sqrt{4y^2 + a^2} = z^2$, seu $4y^2 + a^2 = z^2$, ista $\sqrt{4y^2 + a^2}$ applicata est hyperbolae. Hinc puto si priora iungantur sequi istam $\dfrac{a^2}{\sqrt{4y^2 + a^2}}$ pendere ex quadratura hyperbolae, sive si $\dfrac{x}{a} = \dfrac{a}{\sqrt{4y^2 + a^2}}$, sive si a media proportionalis inter applicatam hyperbolae et applicatam alterius figurae.

Nota de aequationibus in se replicatis v. g. $ya^2 - yyx = a^2x$, vel $y = \dfrac{a^2x}{a^2 - yx}$, unde fit

$$y = \frac{a^2x}{\dfrac{a^4 - a^2yx - [a^2x^2]}{a^2 - yx}} = y = \frac{a^4x - a^2yx^2}{a^4 - a^2yx - [a^2x^2]}.$$

Tentandum an hinc duci queat approximatio.

$$\frac{a^3}{y^2 + a^2} = x. \text{ Ergo } a^3 = y^2x + a^2x, \text{ vel } \frac{a^3}{x} - a^2 = y^2.$$

Ecce momentum supplementi figurae 5^{tae}.

Et $y = \sqrt{\dfrac{a^3}{x} - a^2}$, et $yx = \sqrt{a^3x - a^2x^2}$, vel $\dfrac{yx}{a} = \sqrt{ax - x^2}$.

Ecce momentum omnium q (vid. fig. 5.) praecise aequale portionis circularis cylindro. Conferendae inter se hae duae figurae altera segmentis altera sinubus homogenea.

---

1 *Daneben am Rande:* NB.

13 *1. Formel:* a^2x^3 *L ändert Hrsg.; 2. Formel:* ax^3 *L ändert Hrsg.*

46. DE CURVIS VEL FIGURIS SYNTOMOIS
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 243. L-förmiges Randstück (Außenmaße 18 bzw. 24 cm; Breite jeweils 6-7cm; Innenkante teils gerissen, teils geschnitten; Reste abgetrennten Textes an der Innenseite) eines Bl. 2°, beidseitig beschrieben.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für den Zeitraum August 1673 bis Juni 1674 belegt; es ist identisch mit dem Wasserzeichen von *LSB* VII, 3 N. 26, S. 300–314. Überdies bestehen enge Bezüge zu dem nächst der Notiz von S. 300 als erstes auf den Bogen geschriebenen und mittels Trennstrichs vom übrigen Text abgesetzten Teil 4, S. 312–314. Aus inhaltlichen Gründen dürfte N. 46 vor Teil 4 entstanden sein. Daraus ergibt sich die mutmaßliche Datierung. — Weiterhin bestehen Bezüge zu dem späteren Stück *LSB* VII, 3 N. 38_{11}, S. 475–483 (insbesondere S. 479–481) vom Oktober 1674.

$\dfrac{\sqrt{ax+x^2}}{a}$, $\square$, $= \dfrac{ax+x^2}{a^2} = \dfrac{x}{a} + \dfrac{x^2}{a^2}$, subtrahatur ab ea 1, fiet $\sqrt{\dfrac{ax+x^2-a^2}{a^2}}$. Iam figurae huius $\sqrt{\dfrac{ax+x^2-a^2}{a^2}}$ summa, si iniri potest, summarum istarum series dabit figuram cuius curva hyperbolae syntomos. Fiat autem $\sqrt{ax+x^2-a^2} = y$. Ergo $y^2 = ax+x^2-a^2$. et $a^2 + \dfrac{a^2}{4} + y^2 = ax + x^2 + \dfrac{a^2}{4}$. Ergo $\sqrt{\dfrac{5a}{4} + y^2} = \left[\dfrac{a}{2}\right] + x$. rescindatur $\left[\dfrac{a}{2}\right]$, fiet $\dfrac{5a^2}{4} + y^2 = x^2$. Ecce ipsam hyperbolam hoc modo sibi syntomon seu spatio suo. Et hinc probe notandum, hic per exiguas mutatiunculas fieri posse varias figuras syntomos, ut modo parabolicam curvam, modo hyperbolicam hyperbolae esse syntomon.

Pro circulo[:] ut habeamus curvam cuius elementa crescant ut sinus circuli, primum, ipsa curvae elementa crescent sic: $\dfrac{\sqrt{2ax-x^2}}{a} = \sqrt{\dfrac{2ax-x^2}{a^2}}$, ab horum quadrato

13 *(1)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ax} - \dfrac{\mathrm{x}^2}{4}}}{\mathrm{a}}$ quadretur, fiet *(2)* $\dfrac{\sqrt{\mathrm{ax}+\mathrm{x}^2}}{\mathrm{a}}$ *L* 13 $+\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^2}$, *(1)* hinc habetur modus inveniendi *(a)* figuram quam propo *(b)* curvam quae eadem cum hyperbola *(2)* subtrahatur *L* 14 summa *(1)* iniri potest, ergo *(2)*, si *L* 15 syntomos. *(1)* Eodem modo quaeram curvam *(a)* circu *(b)* circuli sinubus syntomon; $\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2$, *(2)* Fiat *L* 16 et *(1)* posito $+ = - -$ vel $2\mathrm{a}^2$ *(2)* a^2 *L* 16 f. a *L ändert Hrsg. zweimal*

$\dfrac{2ax - x^2}{a^2}$ subtrahatur quadratum unitatis: $\dfrac{a^2}{a^2}$, residui radix: $\sqrt{\dfrac{2ax - x^2 - a^2}{a^2}}$ est series differentiarum figurae quae circulo syntomos; eae differentiae ergo: $\dfrac{\mp a \mp x}{a} = \mp 1 \mp \dfrac{x}{a}$. Harum ergo summa circulo syntomos.

Iam: $1+1+1+1$ etc. et $1+2+3+4$ etc., summae semper $\dfrac{x^2}{2}$. Habemus ergo curvam parabolicam sinubus circuli syntomon, at eadem etiam hyperbolae syntomos; hinc rursus nova videtur methodus oriri, circa circuli et hyperbolae comparationem.

$$\mp x \mp \frac{x^2}{2}.\ \text{Iam} \mp \frac{x}{a} \mp \frac{x^2}{2a^2} = \frac{y}{a},\ \text{vel } 2ax - x^2 = 2ya,\ \text{fiet } 2ax - x^2 - a^2 = 2ya - a^2,$$

ergo $a - x$, vel $x - a = \sqrt{2ya - a^2}$, seu $z = \sqrt{na}$.

An forte c u r v a p a r a b. a basi secta videtur circulo, ab axe secta hyperbolae syntomos. Quod foret maximi momenti.

$$\sqrt{ax+a} - \sqrt{ax} = \frac{y}{a}.\ \text{Ergo } \frac{y^2}{a^2} = ax + a + ax - 2\sqrt{a^2x^2 + a^2x}.\ \text{Ergo } 2ax + a - \frac{y^2}{a^2} =$$

$2\sqrt{a^2x^2 + a^2x}$, ambobus quadratis:

$$4\cancel{a^2x^2} + 4\cancel{a^2}x - \frac{4y^2x}{a} + a^2 - \frac{2y^2}{a} + \frac{y^4}{a^4} = 4\cancel{a^2x^2} + 4\cancel{a^2}x.$$

Et rejectis nimis parvis, fit: $-\dfrac{4y^2x}{a} + x^2 = 0$. seu $\dfrac{4y^2}{a} = x$. seu $4y^2 = ax$. seu $y = \dfrac{\sqrt{ax}}{2}$. Unde sequitur differentias applicatarum parabolae ad axem esse ipsismet dimidiatis homogeneas quae est memorabilis proprietas; ad tangentes.

Iam quia $y^2 = \dfrac{ax}{4}$. huic addatur a^2, fiet: $\sqrt{\dfrac{ax}{4a^2} + \dfrac{a^2}{a^2}}$ latus curvae parabolicae ad axem relatae.

---

9 f. *Späterer Zusatz:* est error

2 quae circulo syntomos *gestr. u. wieder gültig gemacht L* 6 f. comparationem. | Ergo summa ista ax *gestr.* | $\mp$ x $\mp$ $\dfrac{x^2}{2}$ *L* 8 f. $\sqrt{na}$. *(1)* Ergo c u r v a p a r a b. *(a)* aequaliter divisa per *(b)* per *(2)* An *L*

---

2 ergo: Die folgende Radizierung ist unzulässig; dies wirkt sich bis Z. 8 aus. 14 fit: Anstelle von x^2 müsste es a^2 heißen; Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent bis zum Schluss des Stückes weiter.

Contra $\dfrac{y^2+2y+1-y^2}{a} = \dfrac{x}{a}$. Ergo $\dfrac{2y}{a} = \dfrac{x}{a}$. seu $2y = x$. Ergo differentiae applicatarum trilinei parabolici sunt triangulo homogeneae. Earum quadratum $\dfrac{4y^2}{a^2} = \dfrac{x^2}{a^2}$. addatur $\dfrac{a^2}{a^2} = 1$. fiet $\sqrt{\dfrac{4y^2+a^2}{a^2}}$ latus eiusdem curvae parabolicae, sed ad basin relatae.

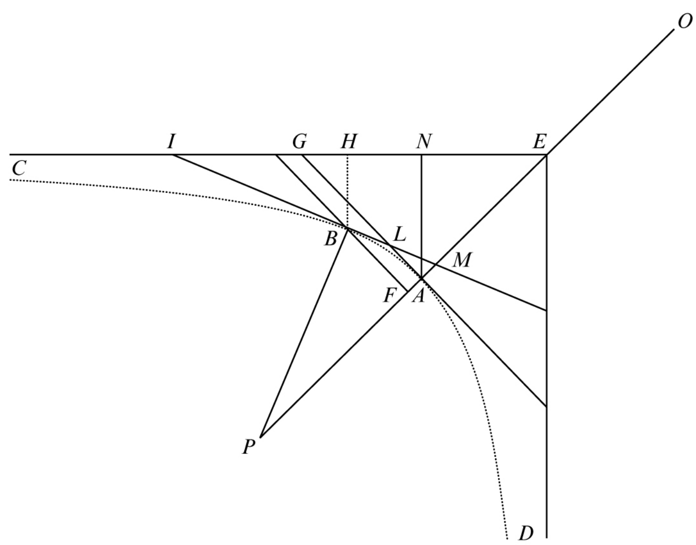
Ponatur ea differentia esse: $1 - \dfrac{y}{a}$. erit eius $\square = \dfrac{a^2+y^2-2ya}{a^2}$, vel: $2ya - y^2 - a^2$, addatur a^2, fiet $\dfrac{\sqrt{2ya-y^2}}{a}$. Ecce ergo applicatam circuli. Confirmatio paulo ante demonstratorum.

47. DE HYPERBOLAE RESECTA
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 321–322. 1 Bog. 2°. 4 S. Zahlreiche Korrekturen u. Ergänzungen sowie nachträgliche Bemerkungen am Rande. Leichte Beschädigungen an den Außenrändern, Abschabungen u. Tintenfraß. Dadurch stellenweise geringfügiger, aber größtenteils behebbarer Textverlust.
Cc 2, Nr. 560

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt. Bezüge in Notation bzw. Terminologie bestehen zu N. 51_3 (datiert: Ende 1673) und zu *LSB* VII, 3 N. 24 vom Herbst 1673. Inhaltlich setzt das Stück die auf Herbst 1673 zu datierende Kreisquadratur voraus.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

Esto curva hyperbolica ABC. cuius vertex A. centrum E. asymptoti EC. ED. diameter EAF. latus transversum OA. semilatus transversum AE. eique aequale semilatus rectum AG. ordinata ad diametrum FB. ex puncto curvae ordinata ad curvam BH. abscissa ex diametro AF. et ex asymptota HE.

Positaque $H\dot{I} = HE$. erit $\dot{I}B$ tangens quae producatur, dum occurrat diametro coniugatae in L. et ipsi diametro in M. erit resecta AL. et intervallum tangentis a centro in asymptota IE. at intervallum eiusdem a vertice in diametro erit AM. perpendicularis ex vertice in asymptoton AN. PB secans curvam ad angulos rectos.

Iam ut ad calculum accedamus, constat[:]

(1) $IH = HE$.

(2) $GA = EA$. ex hypothesi, ideo $AN = EN$.

(3) $\square BHE = AN^2 = a^2$.

(4) $\square OFA = FB^2$.

(5) $\bigtriangledown MFB :: \bigtriangledown^{\text{lo}} MAL$.

(6) Ergo per 5. resecta $AL = \dfrac{FB \frown AM}{FM} = \dfrac{FB \frown LM}{BM} =$

$$\text{(per 4.) } \sqrt{OFA,} \frown \frac{LM}{BM} = \sqrt{OFA,} \frown \frac{AM}{FM}.$$

(7) Et quia $OF = OA + AF$. et $OA = 2AE$. et $AE = \sqrt{2AN^2} = \sqrt{2a^2}$.

(8) et posito $FA = x$. et $FB = y$. et $AO = b$.

(9) ideo erit $AO = b = 2\sqrt{2a^2} = \sqrt{8a^2}$.

(10) et $FB^2 = y^2 = b + x, \frown x = bx + x^2 = \sqrt{8a^2x^2} + x^2$.

Et $y^2 + \dfrac{b^2}{4} = x^2 + \dfrac{b^2}{4} + bx$. Ergo $\sqrt{y^2 + \dfrac{b^2}{4}} = x + \dfrac{b}{2}$. et $\sqrt{y^2 + \dfrac{b^2}{4}} - \dfrac{b}{2} = x$.

abiectoque $\dfrac{b}{2}$ quod semper idem potest dici: $y^2 + \dfrac{b}{4} = t^2$. si $t = x - \dfrac{b}{2}$.

(11) Posito item $EH = w$. $HB = z$.

(12) erit per 3. $wz = a^2$, et $HB = z = \dfrac{a^2}{w}$.

(13) Est autem $FP = \dfrac{AG \frown FE}{AE}$. per ea quae habet Auzutus apud Schoten. in lib. 2.

6 HE. | ex natura hyperbolae in univ *gestr.* | (2) GA = *L* 17 f. Et ... x − $\frac{\text{b}}{2}$. *erg.* *L*

5–778,8 Im Folgenden versucht Leibniz mehrmals die resecta zu bestimmen, scheitert aber aufgrund von Rechenfehlern und ungeeigneten Substitutionen. Dies gilt auch für das als richtig angesehene Schlussergebnis.

Cartes *Geom.* p. 245. Et quia hoc loco $AG = AE$. erit $FP = \dfrac{AE \frown FE}{AE} = FE$, sive $FP = x + \dfrac{b}{2}$.

(14) Et ob angulos rectos PBM et BFM. erit $FB^2 = FM \frown FP$. ergo $FM = \dfrac{FB^2}{FP} = \dfrac{bx + x^2}{x + \dfrac{b}{2}}$.

(15) Et $AM = \dfrac{bx + x^2}{x + \dfrac{b}{2}} - x = \dfrac{bx + x^2 - x^2 - \dfrac{bx}{2}}{x + \dfrac{b}{2}} = \dfrac{\dfrac{bx}{2}}{x + \dfrac{b}{2}} = \dfrac{bx}{2x + b}$.

(16) Et ideo per 15. iuncta 6. erit AL resecta

$AL = \underbrace{\sqrt{bx + x^2}}_{FB} \frown AM\ \dfrac{b\cancel{x}}{2\cancel{x} + \cancel{b}} \smile FM\ \dfrac{b\cancel{x} + x^{\cancel{2}}}{\cancel{x} + \dfrac{\cancel{b}}{\cancel{2}}}$. sive $AL = \dfrac{\sqrt{b^3x + b^2x^2}}{2b + 2x}$. et

$AL^2 = \dfrac{b^3x + b^2x^2}{4b^2 + 4x^2 + 8bx}$ et $\dfrac{4AL^2}{b^2} = \dfrac{bx + x^2}{b^2 + x^2 + 2bx}$.

Ponatur $\dfrac{4AL^2}{b} = m$, fiet: $\dfrac{mb^2 + mx^2 + 2mbx}{b} = bx + x^2$,

$$mb^2 + mx^2 + 2mbx = b^2x + x^2b.$$

! ! !

Pro x ponatur $m + f$. habebimus

---

9 *In Höhe der Lesart am Rande:*

$$\begin{array}{ccccc} & 2 & & 2 & \\ 5 & & 7 & & 9 \\ & 2 & & 2 & \\ \dfrac{7}{12} & & \dfrac{9}{16} & & \dfrac{11}{20} \end{array}$$

9 f. $\mathrm{bx} + \mathrm{x}^2$, *(1)* fiat $\mathrm{f} = \mathrm{b} + \mathrm{x}$, habebimus: $\dfrac{\mathrm{mbf} + 2\mathrm{mbx}}{\mathrm{b}} = \mathrm{fx}$. *(a)* et pro $\mathrm{f} + \mathrm{x}$ sumto g. habebimus *(b)* et pro $\mathrm{f} + \mathrm{x}$ sumto g. fiet *(c)* seu $\dfrac{\mathrm{mb} + 2\mathrm{mb}}{}$ *(d)* $\mathrm{mbf} + \mathrm{mfx}$ ⟨autem⟩ $= \mathrm{bx} + \mathrm{x}^2$ *(2)* Ponamus $\mathrm{f} = \mathrm{b} + \mathrm{x}$. habebimus: $\dfrac{\mathrm{mb}^2 + \mathrm{mx}^2 + 2\mathrm{mbx}}{\mathrm{b}} = \mathrm{fx}$ *(3)* mb^2 *L*

$$\cancel{mb^2} + mx^2 + \cancel{2}mbx = \cancel{b^2m} + f^2m \quad \lrcorner + x^2b = x\cancel{mb} + fxb.$$

$$\begin{array}{ccccc} /\backslash & & /\backslash\ /\backslash & & /\backslash \\ x-f & & x-m\ \ x-f & & m+f \\ x^3-x^2f & & & & \end{array}$$

Potius pro $x = f - 2b$[:]

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + xb. \qquad \left.\frac{mb^2}{x}\right| + mf = bf - b^2.$$

$$\begin{array}{ccc} /\backslash & & /\backslash \\ f-2b & & bf - \cancel{2}b^2 \\ mf - \cancel{2mb} & & \end{array}$$

Pro $bf - b^2$, ponatur cf. scilicet c posita constante fiet $\dfrac{mb^2}{x} + mf = cf$. sive $mb^2 + mfx = cfx$, vel $mb^2 = cfx - mfx$. Ponendoque $fx = g^2$, fiet $mb^2 = cg^2 - mg^2$. sive denique $c - m$ posita h, fiet: $mb^2 = hg^2$, et $hg^2 = y^3$, ut nunc literis Cartesianis enuntiemus, [*bricht ab*]

Alia methodo tentemus idem, ut appareat veritas:

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx + 2mb = \underbrace{b^2 + xb}_{ib}. \quad \text{posito } i = b + x.$$

$$\left.\frac{mb^2}{x}\right| + mx = \underbrace{ib - 2mb}_{lb}. \quad \text{posito } l = \underbrace{i - 2m}_{b+x-2m}.$$

---

10 Error[:] c ita non est constans, potius $b - f = g$. fiet $= gb.$*(!)* fiet: $mb^2 + mfx = gbx$.

5 f. $x = f - 2b$[:] *(1)* $\left.\dfrac{mb^2}{x}\right| + mx \quad + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + xb.$ $\qquad \dfrac{mb^2}{x} = 0 - b^2$. seu $b^2 + \dfrac{mb^2}{x} = 0$.

$$\begin{array}{ccc} /\backslash & & /\backslash \\ f-2b & & \cancel{mf} - \cancel{2}b^2 \\ \cancel{mf} - \cancel{2mb} & & \end{array}$$

sive [*bricht ab*] ergo error in calculo, nam x sumi f − 2b nil prohibet et tamen sequitur absurdum. *(2)* $\dfrac{mb^2}{x}$ *L* 12–14 enuntiemus, | fiet: $xa^2 - y^3$ *gestr.* | Alia *L*

Iamque habebimus $mb^2 + mx^2 = lbx$. Ponamus $b^2 + x^2 = n^2$. fiet $mn^2 = \underset{\substack{\wedge \\ b+x-2m}}{l}bx$, fiet $mn^2 = b^2x + bx^2 - 2mbx$.

$$b^2x + x^2b - 2mbx = mn^2 = \cancel{p^3}. \qquad n^2 = b^2 + x^2.$$

$$n^2x + n^2b - 2mbx = mn^2. \qquad x + b = i.$$

$n^2i - 2mbx = mn^2$. seu $n^2i - mn^2 = 2mbx$. $i - m = q$. fiet $qn^2 = 2mbx$. $y^2 = 2x^2a$.

$$\frac{mb^2}{x}\Big| + m\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{f-2b}_{mf-\cancel{2mb}}}}{x} + \cancel{2mb} = \cancel{b^2} + \underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{f-2b}_{bf-\cancel{2}b^2}}}{x}b. \qquad x = f - 2b.$$

$$\frac{mb^2}{x} + mf = bf - b^2. \qquad \text{sive}$$

$$\frac{mb^2}{x} = bf - mf - b^2. \qquad \text{Et posito } n = b - m, \text{ fiet}$$

$$\frac{mb^2}{x} = nf - b^2. \qquad \text{vel}$$

$$\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{b-n}_{b^3-\cancel{b^2n}}}}{m}b^2 = n\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{x+2b}_{\underset{\substack{\wedge \\ \underbrace{g^2-b^2}_{ng^2-\cancel{nb^2}}}}{nx^2} + 2nxb}}}{f}x - b^2x.$$

$b^3 - b^2n = nx^2 + 2nxb$. $b^3 - bbn - 2xbn = nx^2$. posito $b + 2x = h$, fiet $b^3 - hbn = nx^2$.

1 *(1)* Iam $\frac{\mathrm{mb}}{\mathrm{x}}$ posito n. erit $\frac{\mathrm{mb}^2}{\mathrm{x}} = \mathrm{nb}$. fietque $\mathrm{mx} = \mathrm{lb} - \mathrm{nb}$. *(2)* Iamque *L* 19 nx^2. *(1)* Iam $\frac{\mathrm{b}^3}{\mathrm{n}} - \mathrm{b}^2 - \mathrm{x}^2 - \mathrm{xb} = 0$. *(2)* posito *L*

Resecta $AL = \dfrac{FB \frown AM}{FM}$. $FB = \sqrt{bx + x^2}$. $AM = \dfrac{bx}{2x+b}$. $FM = \dfrac{bx + x^2}{x + \dfrac{b}{2}}$.

$$\frac{AM}{FM} = \frac{b\cancel{x}}{2x+b} \times \frac{b\cancel{x} + x^{\cancel{2}}}{\dfrac{b}{2} + x} = \frac{2b}{2x+b} \times \frac{b+x}{b+2x} = \frac{2b}{b+2x}.$$

Ergo $AL = \sqrt{bx + x^2} \frown \dfrac{2b}{2x+b}$. et ordinata ducta in $\dfrac{2b^2}{2x+b}$, seu $\sqrt{bx+x^2}, \frown \dfrac{2b^2}{2x+b}$ seu ordinatae hyp. ad diam. in ordinatas alterius hyp. ad asympt. dabit cylindrum resectae. Ergo

$$AL^2 = bx + x^2 \frown \frac{4b^2}{4x^2 + b^2 + 4xb} = m^2.$$

Ergo fiet aequatio figurae haec:

$$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^3x + 4b^2x^2.$$

Invenimus ut dixi aequationem resectarum hyperbolae ex diametro coniugata esse hanc: posita abscissa hyperbolae x. latere recto b. resecta autem posita m.

$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^2x^2 + 4b^3x.$

$xb + x^2$

$$m^2b^2 + \llcorner \underbrace{x^2 + xb}_{[z^2]} \lrcorner \frown 4m^2 = \llcorner \underbrace{x^2 + xb}_{[z^2]} \lrcorner \frown 4b^2 \lrcorner$$

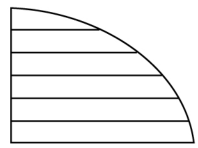
---

11 *Ergänzung:* $x = f - \dfrac{b}{2}$. Ergo $f^2 + \dfrac{b^2}{4} - fb = x^2$. et $xb = bf - \dfrac{b^2}{2}$. Ergo $x^2 + xb = f^2 - \dfrac{b^2}{2}$. fiet $\cancel{m^2b^2} + 4m^2f^2 - \dfrac{\cancel{4}m^2b^2}{\cancel{2}} = 4b^2f^2 - 2b^4$.

1–8 Resecta AL ... $4b^3x + 4b^2x^2$. *erg. L* 11 f. $4b^3x$. | $b + x = r, xr$ *bricht ab, streicht Hrsg.* | xb *L* 13 z^2 *gestr., erg. Hrsg.* 13–779,1 $4b^2 \lrcorner$ *(1)* fiet: $m^2b^2 + 4m^2z^2 = 4b^2z^2$. Et ponendo $4z^2 + b^2 = w^2$, *(2)* si *(a)* $b + x =$ *(b)* sit $m^2 = -\dfrac{b^2}{4} - xb + t^2$. ergo $4m^2x^2$ erit $m^2b^2 + 4m^2xb + t^2$. et habebimus: $m^2t^2 = 4b^2x^2 + 4b^3x$. vel $\dfrac{m^2t^2}{b^2} = 4x^2 + 4bx$. *(aa)* vel $m^2 =$ *(bb)* vel fiat *(3)* eritque *L*

9–779,8 Mit Invenimus beginnt Bl. 321 v°. Leibniz überträgt das Ergebnis von Bl. 321 r° hierher und rechnet damit konsequent weiter. Jedoch ist in der Ergänzung ein neuer Fehler enthalten.

eritque $\quad m^2 = \dfrac{4b^2z^2}{b^2+4z^2}$. et $\quad z^2 = \dfrac{m^2b^2}{4b^2-4m^2}$.



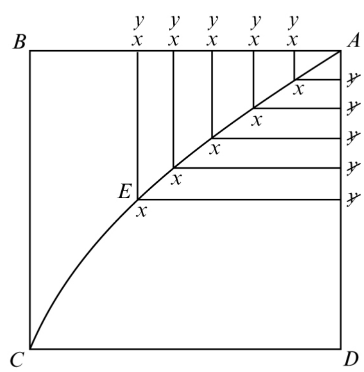
[*Fig. 2*]

Et si tam omnium m^2, quam omnium z^2 centrum gravitatis haberi potest, habebitur momentum eius figurae ab utroque latere.

Vera haec, sed mutant locum.

At si ex $a^3 = a^2x + y^2x$, ponendo $a^2 + y^2 = z^2$, facias $a^3 = z^2x$, fient applicatae x aequales cubo parametri, non per abscissae [y^2] quadratum diviso, sed diviso per quadratum abscissae alio quadrato auctum.

[*Teil 2*]



[*Fig. 3*]

1 $\quad b^2 + 4z^2 \frown m^2 = 4b^2z^2. \quad m^2 + \dfrac{4m^2z^2}{b^2} = 4z^2.$

3 f. habebitur *(1)* centrum gravitatis figurae *(2)* momentum *L* 7 x^2 *L ändert Hrsg.* 7 f. diviso per *(1)* cuiusdam radicis ex *(2)* quadratum abscissae *L*

10 [*Fig. 3*]: Der Figur liegt paradigmatisch für ein allgemeines Kurvenstück ein Parabelbogen mit je x und y als unabhängiger Variablen zugrunde. Das Gleiche gilt für die Fig. der Ergänzung auf S. 782.

Aequatio figurae sit $y^2a = y^2x + a^2x$.

Ergo $y^2a - y^2x = a^2x$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^2x}{a-x}$. Ergo $\dfrac{y^2}{a^2} = \dfrac{x}{a-x}$.

Iam $\dfrac{x}{a-x} = 1 - \dfrac{a}{a-x}$, quibus ductis in a, fiet $a - \dfrac{a^2}{a-x} = \dfrac{y^2}{a}$, et rursus ductis omnibus in a, fiet $a^2 - \dfrac{a^3}{a-x} = y^2$.

Ergo ad summam omnium y^2 habendam opus est cylindro hyperbolae, nam $\dfrac{a^2}{a-x}$ vel saltem $\dfrac{\gamma \frown a^2}{a-x}$ applicata hyperbolae est. Ergo momentum figurae $AECD$ ex axe AD pendet ex quadratura hyperbolae.

At ductis omnibus x in y. habetur momentum omnium x ex eodem axe AD, seu momentum figurae $AECB$ ex axe AD. complementi figurae $AECD$. Ergo summa rectangulorum yx etiam ex quadratura hyperbolae habetur.

Iam cum sit $x = \dfrac{y^2a}{y^2+a^2}$. erit $xy = \dfrac{y^3a}{y^2+a^2}$. Ergo si qua sit figura huius aequationis: $\dfrac{y^3}{y^2+a^2} = x$, vel $y^3 = y^2x + a^2x$. ea pendet ex quadratura hyperbolae, cum haec nostra initio posita: $\dfrac{y^2a}{a^2+y^2} = x$, vel haec $\dfrac{a^3}{a^2+y^2}$, pendeat ex quadratura circuli.

Sed ut ad primam aequationem $y^2a = y^2x + a^2x$. redeamus[:] His ita positis ducto

---

11–13 *Daneben großes* NB.

14 $+y^2x = a^3$. fiat $a = b - y$. erit $a^2 = b^2 + y^2 - 2by$. et $a^2x = b^2x + y^2x - 2byx$. fiet: $b^2x + y^2x - 2byx + y^2x = a^3$. sive $b^2x + 2y^2x - 2byx = a^3$.

---

1 Aequatio: Im Folgenden bezeichnet Leibniz den Parameter der betreffenden Kurve mit a. Gleichzeitig dient a als Dimensionsgröße, um von Fall zu Fall Dimensionsgleichheit herzustellen. Die Variablen x und y werden ohne nähere Unterscheidung gleichberechtigt behandelt; außerdem werden sie bei Neuansätzen und Zerlegungen unverändert weiter verwendet. 3 Iam: Auf der rechten Seite sollten die Vorzeichen umgekehrt sein. Das Versehen hat keine Auswirkungen auf die folgende Quadraturaussage. 13 pendeat: N. 42_1 S. 740 Z. 15–21 .

y in $a-x$, fiet $ay-yx$. Et quia $y=\sqrt{\dfrac{a^2x}{a-x}}$. hoc ducto in $a-x$, vel in $\sqrt{a^2+x^2-2ax}$ fiet $ay-yx=\sqrt{\dfrac{a^2x \frown \llcorner a-x \lrcorner \frown a-x}{a-x}}$. sive $ay-yx=\sqrt{a^3x-a^2x^2}$. Quorum summa erit momentum figurae $AECD$ ex basi CD. pendetque ex summa omnium x^2. ut mox dicam. Interim figura huic rectangulorum progressioni homogenea, est $\dfrac{\sqrt{a^3x-a^2x^2}}{a}=y$. sive eius aequatio: $\sqrt{a^3x-a^2x^2}=ya$. et $a^3x-a^2x^2=y^2a^2$. sive $ax-x^2=y^2$. Unde patet ipsum circulum seu sinuum aream esse figuram homogeneam momento huius figurae $AECD$ ex basi CD.

Sed ut ad primam aequationem $y^2a=y^2x+a^2x$ initio propositam, redeamus[:] Cum hoc modo sit $\dfrac{y^2a}{y^2+a^2}=x$. erit $\dfrac{y^4a^2}{y^4+a^4+2y^2a^2}=x^2$. Quae proinde semiquadratorum ab x summa, a cylindro rectanguli AC ablata, relinquit momentum figurae $AECD$, ex basi summae sinuum homogeneum.

Caeterum ut his x figuram quaeramus homogeneam ponendum est: $\dfrac{y^4a}{y^4+a^4+2y^2a^2}=x$.

$\left(=1-\dfrac{a^4+2ya^3}{y^4+a^4+2y^2a^2}.\right)$ $y^4a=y^4x+a^4x+2y^2a^2x$.

Sed si ponatur $\dfrac{a^5+2y^2a^3}{y^4+a^4+2y^2a^2}$ aequatio separari potest in duas ob binomium numeratorem, quae omnia pendent ex tetrag. circ. et fiet primum $\odot$ $\dfrac{a^5}{y^4+a^4+2y^2a^2}=x$. Ergo

---

a^2x. si $a-x=f$. fiet $y^2x=a^2f$. fiet: $y^2a-y^2f=a^2f$. Ergo $y^2=\dfrac{a^2f}{a-f}$.

$\wedge$

$a-f$

5–7 Unde reperta iam alia methodo exhibendi figuram rationalem homogeneam circulo poterimus priorem per resectas dissimulare; modo ex praesente idem demonstremus.

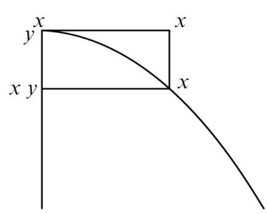
6 seu sinuum aream *erg.* *L* 9 proinde *(1)* quadratorum *(2)* semiquadratorum *L* 15 quae … circ. *erg.* *L*

$$\frac{a^4}{y^4+a^4+2y^2a^2} = \frac{x}{a}.\text{ et } \frac{a^2}{y^2+a^2} = \sqrt{\frac{x}{a}},\text{ et } \frac{a^3}{y^2+a^2} = \sqrt{xa}.$$

Cum prima aequatio fuerit $\dfrac{y^2a}{y^2+a^2} = x$, fiat $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = \dfrac{xa}{y}$. Excogitanda est alia, cuius momentum seu y in x. sit huic aequationi homogeneum. Si ergo aequatio ea sit: $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$, momentum omnium ex vertice, seu xy erit $\dfrac{y^2a^2}{y^2+a^2} = xy$, homogenea aequatio huic $\dfrac{y^2a}{y^2+a^2} = x$.

Ergo figurae huius momentum ex vertice $\dfrac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. necesse est ex q u a d r a t u r a c i r c u l i dependere, nam homogenea eius ex ea dependet; et vicissim hac figura quadrata circuli quadratura habebitur: fiet ergo $ya^2 = y^2x + a^2x$.

2–5 *Hierzu späterer Zusatz:*



$x \sqcap \dfrac{ya}{y^2+a^2}$. $xy \sqcap \dfrac{y^2a}{y^2+a^2}$. $y^2 + a^2 \sqcap \dfrac{ya}{x}$.
Unde $y^2 - \dfrac{a^2}{x}y + \dfrac{a^4}{[4]x^2} \sqcap \dfrac{a^4}{[4]x^2} - a^2$.
unde $y - \dfrac{a^2}{[2]x} \sqcap \sqrt{\dfrac{a^4}{[4]x^2} - a^2}$. ductisque omnibus in x.

6 f. *Darüber:* Error

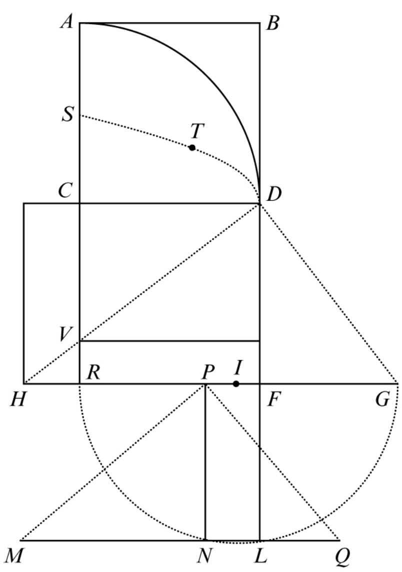
1 f. $\sqrt{\mathrm{xa}}$. | Ergo posita figura quadam aequationis huius ⊙. chordarum eius a summo ad exitum baseos seu curvam ductarum summa, pendet a quadratura circuli, seu figura resectarum circuli. Mensura autem eiusmodi chordarum est utilis ad trochoeides curvae revolutione genitas mensurandas. Ita figurae resectarum circuli chordae sunt $\mathrm{x}^2 + \mathrm{a}^2$ *gestr.* | *(1)* Quod si ab initio data sit haec aequatio: $\dfrac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{x}}{\mathrm{a}-\mathrm{x}}$. *(2)* Cum *L* 11 f. 2 *bzw.* 4 *erg. Hrsg.*

2–785,6 Die in diesen Abschnitten enthaltenen Überlegungen sind nicht immer exakt genug durchgeführt, insbesondere beachtet Leibniz die gegenseitige Abhängigkeit von analytischer Rechnung und geometrischer Darstellung nur ungenau.

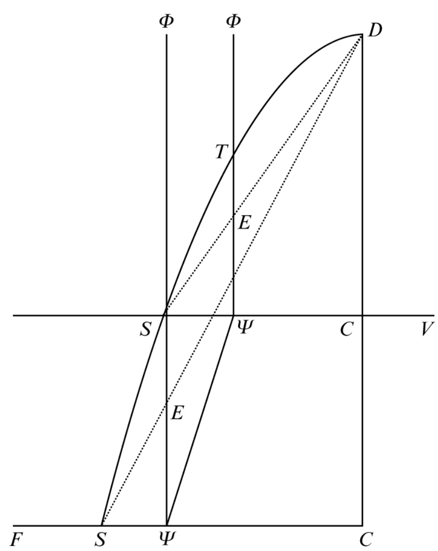
At datur omnium yx, seu omnium x momenti ex vertice summa datis omnibus x^2. Est autem $\frac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. Ergo $\frac{y^2a^6}{y^4+a^4+2y^2a^2} = x^2$. Quorum si summa posset haberi, rursus tetragonismus haberetur.

Figura illis homogenea est $\frac{y^2a^5}{y^4+a^4+2y^2a^2} = x = 1 - \frac{2y^4a^3+2a^7}{y^4+a^4+2y^2a^2}$. quae omnia a circuli quadratura pendent.

Paulo ante: $\frac{ya^2}{y^2+a^2} = x$. Ergo $\frac{y}{y^2+a^2} = \frac{x}{a^2}$. Ergo et invertendo $\frac{y^2+a^2}{y} = \frac{a^2}{x}$. et $y + \frac{a^2}{y} = \frac{a^2}{x}$. Et $y = \frac{a^2}{x} - \frac{a^2}{y}$. et $y^2 = \frac{a^2y}{x} - a^2$. huic figurae homogenea est $\frac{y^2}{a} = \frac{ay}{x} - \frac{a^2}{a}$. fiet $\frac{y^2x}{a} = ay - ax$, vel $\frac{y^2}{a} + a = \frac{ay}{x}$. Et si $\frac{ay}{x} = z$. erit $\frac{y^2}{a} + a = z$.



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]

---

4 f. *Dazu interlinear:* error

6 $\frac{a^2}{x}$ | $= y + a + \frac{a^2}{x}$. *streicht Hrsg.* | et *L*

Sit curva eius naturae, ut posita $AC = x$. et $CD = y$. ipsius y quadratum per $a = FG$. latus rectum divisum, sive rectangulum HD. latus $HF = \frac{y^2}{a}$. posito HDG angulo recto, seu $FD^2 = HFG$. aequetur $\frac{ay}{x} - a$. Ut ergo habeatur $\frac{ay}{x}$ primum habenda est media proportionalis inter a et y. Posito scilicet $FG = a$. et ei addito FR fiet RG; et sumto eius medio I, si circulus IRG describatur, erit FL media proportionalis eiusque $\square = FL^2 = ay$. Quod quadratum FL^2 ut dividatur per x. ducatur LM $=$ et parallela FH. et abscindatur $MN = AC = x$. et si ⟨in⟩ N perpendiculariter erigatur NP. ductaque MP et perpendiculari ad MP, versus rectam ML. nempe PQ. [debet recta LQ esse $=$ $FG = a$. $NQ - LQ$ aequalis esse ipsi FH.] et NQ erit $\frac{ay}{x} = z$. et aequatio fiet: $\frac{y^2}{a} + a = z$. vel $\frac{y^2}{a} = z - a$. Et $z - a = NL$. posito w fiet $y^2 = wa$. Ergo $z - a = NL = w$. posito $=$ CS. seu applicato ad C. eodem ubique fieri intellecto, curva STD erit parabolica, cuius si altitudo CD et ordinata CS. latus rectum sit LQ.

Quodsi parabolae $CSTD$ addatur rectangulum DCV. posita $CV = LQ = a$. erit $VCS = NQ = \frac{ay}{x}$. et patet locum omnium $\frac{ay}{\langle x\rangle}$ esse parabolicum.

Quodsi locus omnium $\frac{ay}{x}$ sit curva parabolica, et omnium y recta, qualis erit locus omnium x ⟨ad⟩ $z = \langle\frac{ay}{x}\rangle$? Erit $x = \frac{ay}{z}$, id est invenienda est quae sit ad a. ut y est ad x, qualis in ⟨fig. 2.⟩ est $E\Psi$. Et ut talis figura describatur, imaginanda constans para-

8 f. nempe PQ. | debet recta ... ipsi FH. *gestr., erg. Hrsg.* | *(1)* Porro cum NQ $= \frac{\mathrm{ay}}{\mathrm{x}} = \mathrm{z}$. si omnes NQ. applicentur ⟨ad⟩ CD. locus erit *(a)* triangulum. *(b)* ob aequationem parabola. Nam *(aa)* si ab $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} + \mathrm{a} = \mathrm{z}$ abiciatur a. recta quod ⟨non mutat⟩ locum, fiet *(bb)* fiat $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} = \mathrm{z} - \mathrm{a}$. et $\mathrm{z} - \mathrm{a} = \mathrm{w}$, fiet $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} = \mathrm{w}$. et $\mathrm{y}^2 = \mathrm{wa}$. Ergo locus omnium NQ ad CD, in C. applicatarum erit parabola. *(2)* Porro cum $\mathrm{z} = \frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} + \mathrm{a} = \mathrm{HG}$. si omnes HG applicentur ad CD. ut posito CS $=$ HG. locus seu curva DTS erit parabola. Nam fiat $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} = \mathrm{z} - \mathrm{a}$. et $\mathrm{z} - \mathrm{a} = \mathrm{w} = \mathrm{NL}$, fiet $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a}} = \mathrm{w}$. et $\mathrm{y}^2 = \mathrm{wa}$. Ergo locus omnium NL $=$ FH. ad CD, in C. applicatarum erit parabola. *(3)* Iam quia z $=$ *(4)* et NQ *L* 11 f. cuius ... sit LQ. *erg. L*

bola, eiusque extremis S. semper chorda tensa applicanda quae quanto magis descendis producatur. Sitque CSF mobilis indefinita ad angulos invariabiles in CD. quae manu descendente in chorda deprimitur. Sit et alia indefinita $\Psi\Phi$ in ea fixa ipsi CD immobili parallela cuius cum chorda SD intersectiones describent curvam quaesitam. Et haec methodus reducendi loca utilis est ad faciles curvarum in plano descriptiones, suppositis scilicet aliis inferioris gradus iam descriptis.

Imo NB. fig. 2. ista nonnihil corrigenda, deberet enim Ψ semper cadere in SC. Nota interim obiter tractari debere etiam de locis linearum non ad rectas, sed curvas ordinatim, id est parallele inter se, applicatarum. Omnia Ψ puto cadent in lineam rectam, ideo si angulus SCD fieret obliquus, angulus $S\Psi\Psi$ posset fieri rectus.

[*Teil 3*]

Invenimus aequationem resectae hyperbolicae hanc:

$$4m^2x^2 + m^2b^2 + 4m^2xb = 4b^3x + 4b^2x^2.$$

seu $$m^2b^2 + \underbrace{x^2 + xb,}\frown 4m^2 = \underbrace{x^2 + xb,}\frown 4b^2.$$

Positoque $x = f - \dfrac{b}{2}$. fiet $x^2 = f^2 + \dfrac{b^2}{4} - fb$. et $xb = bf - \dfrac{b^2}{2}$. Ergo $x^2 + xb = f^2 + \dfrac{b^2}{4} - \dfrac{b^2}{2} + bf - bf$. seu $x^2 + xb = f^2 - \dfrac{b^2}{4}$.

Ergo $$\cancel{m^2b^2} + 4m^2f^2 - \cancel{b^2m^2} = 4b^2f^2 - b^4.$$

Ergo aequatio figurae rescissae hyperbolae est

$$4m^2f^2 = 4b^2f^2 - b^4. \quad \text{sive} \quad 4x^2y^2 = 4a^2y^2 - a^4.$$

Quam ultra reduci posse non puto, nisi mutata linea recta ad quam referantur.

---

12 *Darüber:* NB. ⟨Multi⟩plicari potest fractio aliqua per quadratum, si simul numerator multiplicetur, et nominator dividatur per radicem.

2 angulos *(1)* rectos *(2)* invariabiles *L* 3 ea *(1)* ad angulos rectos *(2)* fixa *L* 7 fig. 2. *erg.* *L* 20 recta *erg.* *L*

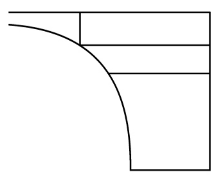
---

12 Invenimus: Hiermit beginnt Bl. 322 v°. Leibniz nimmt das (unrichtige) Ergebnis der Gegenseite (s. o. S. 778 Z. 8) wieder auf.

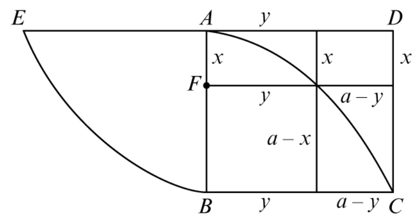
Ergo $4x^2y^2 + a^4 = 4a^2y^2$. Ergo $a^4 = 4a^2y^2 - 4x^2y^2$. Ergo

$$\frac{a^4}{4a^2 - 4x^2} = y^2. \ \text{ et } \ x^2 = \frac{4a^2y^2 - a^4}{4y^2}.$$

Porro $\sqrt{4x^2y^2} = 2xy = \sqrt{\llcorner 4a^2y^2 - a^4 \lrcorner}$. sive $\dfrac{2xy}{a} = \sqrt{4y^2 - a^2}$. et $\dfrac{2x}{a} = \sqrt{\dfrac{4y^2 - a^2}{y^2}} = \sqrt{4 - \dfrac{a^2}{y^2}}$, sive $\dfrac{4x^2}{a^2} = 4 - \dfrac{a^2}{y^2}$. $\dfrac{4x^2}{a^2} + \dfrac{a^2}{y^2} = 4$. Ergo $\dfrac{4x^2y^2 + a^4}{a^2y^2} = 4$.



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

Sed ut redeam ad priora[:] dixi esse $\dfrac{2xy}{a}\ \sqrt{4y^2 - a^2}$.

Unde apparet summae omnium xy homogeneam esse lineam hyperbolicam, in qua $x = \sqrt{y^2 - a^2}$. sive $x^2 = y^2 - a^2$.

Quadrata omnium x^2 aequantur a^2 [$-$] $\dfrac{a^4}{4y^2}$. ideo in summam redigi possunt quia $\dfrac{a^3}{y^2}$ est quantitas applicatae hyperboloeidis cubicae, cuius datur quadratura. Ergo et momenti complementi $ADCA$ ex AD.

Quadrata omnium $y^2 = \dfrac{a^4}{4a^2 - 4x^2}$ = momento fig. $ABCA$ ex AB.

Omnia x ducta in suas y abscissas $= \dfrac{\sqrt{4y^2 - a^2}, \frown a}{2}$ seu momentum complementi ex AB. Quod cum detur ex data hyperbolae quadratura, etiam omnia y^2. momentum figurae ipsius ex AB, dabitur.

Datur autem et area figurae totius ex quadratura hyperbolae, cuius segmento aequatur.

9 + *L ändert Hrsg.*

5 [*Fig. 7*]: Leibniz hat die Figur zunächst allgemein gezeichnet, die speziellen Maßbestimmungen sind erst später hinzugekommen.

Positis iam $AB = BC = a$. quaeramus iam quadrata et momenta ipsarum $a - x$ et $a - y$.
Quadrata autem omnium $a-x$ sunt a^2+x^2-2ax. opus ergo tam a^2 cognito, tam omnibus x^2 cognitis, tam quadratura figurae, ad quadrata omnium $a - x$. seu momentum figurae $ABCA$ ex BC.
Quadrata vero omnium: $a-y$ sunt a^2+y^2-2ay. opus est ad hoc momentum complementi ex CD cognoscendum tantum quadratura figurae.
Tandem multiplicentur $a - y \frown a - x$. fiet: $a^2 - ax - ay + yx$. Et quia yx non nisi alio y iam praecognito explicari potest, ideo assumta y vel $a - y$ pro cognita, summa omnium ay erit $\bigtriangledown^{\text{lum}}$ et summa omnium ax erit complementi figurae cylinder. Cumque summa omnium yx pendeat ex quadratura hyperbolae, ideo momentum quoque omnium $a - x$ ex CD. seu figurae $ABCA$ ex CD. ex quadratura hyperbolae pendebit.

Illud interea sufficit nobis didicisse figuram cuius applicata sit $\dfrac{a^3}{a^2 - x^2}$ pendere ex quadratura hyperbolae.
At vero $\dfrac{a^3}{a^2 + x^2}$ pendere ex quadratura circuli alibi ostensum est.

Subtrahatur alterum ab altero, fiet $\dfrac{a^5 - a^3x^2 + a^5 + a^3x^2}{a^4 + x^4} = \dfrac{2a^5}{a^4 + x^4}$. Sed sciendum est istud x in uno crescere, in altero decrescere, positoque incrementa unius esse

---

9 f. *Daneben großes* NB.

16 *Zu* fiet *am Rande:* Si $-\dfrac{a^3}{a^2 + x^2} + \dfrac{a^3}{a^2 - x^2}$, fiet: $\dfrac{a^5 + a^3x^2 - a^5 + a^3x^2}{a^4 - x^4} = \dfrac{2a^3x^2}{a^4 - x^4} = y$.

19 Si *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2 - \mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^3} = \dfrac{1}{\mathrm{y}} = \dfrac{2\mathrm{x}^2}{\mathrm{a}^3}$. ergo $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{a}^3}{2\mathrm{x}^2}$. *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2} - \dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2}$, fiet: $\dfrac{\mathrm{a}^5 - \mathrm{x}^2\mathrm{a}^3 - \mathrm{a}^5 - \mathrm{x}^2\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^4 + \mathrm{x}^4} =$ *(3)* $-\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2 + \mathrm{x}^2}$ *L*

---

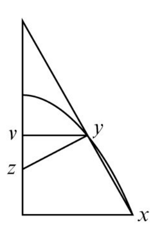
15 alibi: s. o. Erl. zu S. 780 Z. 13. 16 Subtrahatur: Die folgende Betrachtung ist verfehlt. Leibniz bemerkt dies in S. 788 Z. 7 selbst. Zunächst glaubt er, eine Verbesserung des Nenners in Z. 16 (er ändert dort zweimal $a^4 + x^4$ in $a^4 - x^4$) würde genügen, erkennt dann, dass dies nicht ausreicht, und berechnet die gesuchte Differenz in der Anmerkung zu Z. 16 neu.

aequalia decrementis alterius, erit terminus ex eiusmodi contrariis x conflatus semper idem. Subtractio autem duorum terminorum x contrarium habentium non est facienda simpliciter, sed notandum aliquid relinqui quod et determinari potest. Hinc cum circulus sit: $ax - x^2 = y^2$. et hyperbola $ax + x^2$. hactenus utrobique crescit: Imo NB. utile est consulto, inversas iungere figuras, praesertim ubi x dividit, ita enim divisor fiet perpetuo constans. Ita posito in $\dfrac{a^5 - a^3x + a^5 + a^3x}{a^4 + x^4}$ aliud ex x augeri aliud minui continue eadem quantitate, erit x^4 semper eadem. Imo male et falso.

$6 \frown 0$	$10 \frown 0$	0		
			9	
$5 \frown 1 = 5$	$9 \frown 1$	9		2
			7	
$4 \frown 2 = 8$	$8 \frown 2$	16		2
			5	
$3 \frown 3 = 6$ *(!)*	$7 \frown 3$	21		
			3	
	$6 \frown 4$	24		
			9	
	$5 \frown 5$	15 *(!)*		
			9	
	$4 \frown 6$	24		
			3	
	$3 \frown 7$	21		

---

2 f.



$$\frac{\bullet}{y} = \frac{y - \ddot{y}}{z}$$

ut in hyp.

$$\frac{x}{a^2} = \frac{\dfrac{a^2}{x} - \dfrac{a^2}{x+1}}{\xi}.$$

---

23 Die Figur ist durch Tintenfraß geschädigt, es konnten daher nicht alle Punktbezeichnungen ermittelt werden.

Nam ut ex schemate patet, reapse crescet decrescetque productum ex duobus uniformiter sed contrarie variantibus, sed ita, ut differentiae eorum uniformiter crescant fiantque numeri quasi triangulares.

Haec iam observatio usum habere potest ingentem. Ponatur ut in figura, eadem figura sibi inverso apponi, patet summam esse figurae duplum, et inde aliquando lux ad novas series inveniendas haberi potest.

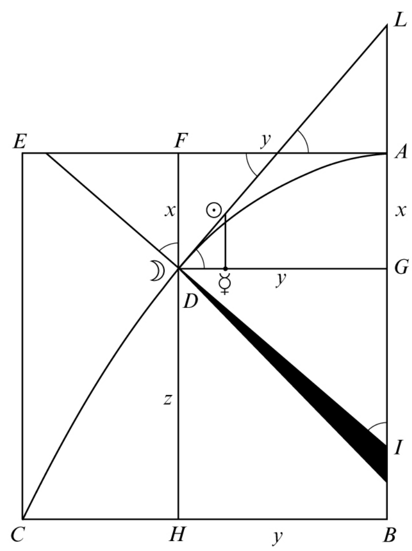
Fiat enim $\frac{a^2}{x}$ applicata figurae, sumta x ex altitudine, erit $\frac{a^2}{a-x}$ altitudo figurae, sumta x ex basi. Addantur $\frac{a^2}{x} + \frac{a^2}{a-x}$ fit $\frac{a^3\ [-]\ a^2x + a^2x}{ax - x^2} = y$. posito scilicet x in priori sumi pro AF, in posteriori pro FB. ita enim x ubi puncto notatum est decrescit et in x^2 crescit pariter et decrescit.

8 + *L ändert Hrsg.*

48. DE CALCULO REDUCTARUM NECNON MOMENTORUM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 159–160. 1 Bog. 2°. 3 S. — Auf Bl. 160 v° Notizen in Zusammenhang mit dem Gespräch Leibniz u. Ozanam, LH 35 XII 2 Bl. 162 v° (vgl. dazu N. 42_2).
Cc 2, Nr. 561 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück nimmt mehrfach direkten Bezug auf N. 47, dürfte also kurz danach entstanden sein.



[*Fig. 1*]

Esto figura $ABCDA$, cuius complementum ad rectangulum AC, sit $AECDA$. et aliqua complementi applicata FD, abscissa AF. posita $AF = y$. et $FD = x$. Esto ea natura figurae, ut sit $y^2a = y^2x + a^2x$. Et $x = \dfrac{y^2a}{a^2 + y^2}$. at $y^2 = \dfrac{a^2x}{a - x}$.

10 Esto figura: Leibniz legt der Figur einen allgemeinen Kurvenbogen zugrunde.

Summa omnium x. seu area figurae pendet ex quadratura circuli, et summa omnium y^2, vel GD^2, seu momentum figurae $ABCDA$ ex AB duplicatum pendet ex quadratura hyperbolae, ut alibi ostendi.

Idem $x = a - \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$, vel $a - x = \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$. Atque ita ordinatae HD, si appellentur nunc z. et BH maneant y, erit $z = \dfrac{a^3}{a^2+y^2}$. Summa omnium x^2, pendet ex quadratura circuli, ut alibi ostendi.

Posita β infinitesima, subtrahantur a se invicem duo y^2 proxima.

$$\frac{a^2x + a^2\beta}{a - x - \beta} - \frac{a^2x}{a-x} \text{ fiet } \frac{\cancel{a^3x} + a^3\beta - \cancel{a^2x^2} - \cancel{a^2\beta x} - \cancel{a^3x} + \cancel{a^2x^2} + \cancel{a^2x\beta}}{\underset{-2xa}{a^2 - \cancel{xa} - \cancel{\beta a} - \cancel{xa}} + x^2 + \cancel{x\beta}} = 2e.$$

fiet $\dfrac{a^3}{a^2 + x^2 - 2xa} = 2e$. posita $e = GI$. intervallo tangentis.

Ergo $\dfrac{a^4}{a^2+x^2-2xa} = 2ea = w^2$. Ergo $w = \dfrac{a^2}{a-x}$. Ergo w applicata est hyperbolae quae est $\dfrac{b^2}{a-x}$. vel $\dfrac{\gamma a^2}{a-x}$, et cylinder omnium $2e$ qui quadrari potest, aequatur quadratis ordinatarum hyperbolae ad asymptotam.

Dividatur y^2 per e, fiet $\dfrac{a^2x}{a-x} \times \dfrac{a^3}{2a^2+2x^2-4xa}$, fiet $\dfrac{2a^4x + 2a^2x^3 - 4a^3x^2}{a^4 - a^3x} = GL$. Sed quia GL non ad x. sive AG, sed ad y. sive AF applicanda est, ideo pro x substituatur

7 Posita ... proxima. *erg.* *L* 11 f. hyperbolae | quae est $\dfrac{b^2}{a-x}$. vel $\dfrac{\gamma a^2}{a-x}$ *erg.* |, et cylinder omnium 2e | qui quadrari potest *erg.* |, aequatur *L*

3 alibi ostendi: s. N. 47, S. 780 Z. 6 f. 6 alibi ostendi: s. N. 45 Teil 1.

eius valor. Et quia $x = \dfrac{y^2a}{a^2+y^2}$, eo substituto fiet:

$$GL = \frac{2a^5\dfrac{y^2}{a^2+y^2} + 2a^5\dfrac{y^6}{y^6+3y^4a^2+2y^2a^4+a^6} - 4a^5\dfrac{y^4}{y^4+2y^2a^2+a^4}}{a^4 - a^4\dfrac{y^2}{a^2+y^2}}.$$

cuius figurae summa pendet ex circuli quadratura, seu ex quadratura figurae propositae $ABCDA$.

Nunc figuram propositam ponamus esse resectarum hyperbolae, erit aequatio eius $4x^2y^2+a^4-4a^2y^2 = 0$. ut alibi ostendimus, ergo $a^4 = 4a^2y^2-4x^2y^2$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^4}{4a^2-4x^2}$. et $4x^2y^2 = 4a^2y^2 - a^4$. Ergo $x^2 = \dfrac{4a^2y^2-a^4}{4y^2}$.

---

1 f. *Nebenrechnungen:*

$$\begin{array}{l} a^2+y^2 \\ \underline{a^2+y^2} \\ a^4+y^4+2a^2y^2 \\ \quad\;\; \underline{a^2+\;\;y^2} \\ \quad\;\; y^6+\underset{3}{\cancel{2}}a^2y^4+a^6+2y^2a^4 \end{array}$$

$$x^3 = \frac{y^6a^3}{y^6+3y^4a^2+2y^2a^4+a^6}$$

7 *Dazu spätere Ergänzung:* $= a^2 - \dfrac{a^4}{4y^2} - a^2 + \dfrac{a^4}{4y^2+4\beta^2+8\beta y}$ fiet: $\dfrac{2a^4y}{16y^4}$, vel $\dfrac{\cancel{2}a^4}{\underset{8}{\cancel{16}}y^3}$.

---

1 fiet: In der Nebenrechnung vergisst Leibniz jeweils den Summanden y^2a^4. Der Fehler geht in die Hauptrechnung ein. 5 erit aequatio: Leibniz übernimmt den (unrichtigen) Wert aus N. 47, S. 785 Z. 19 und rechnet damit konsequent weiter. 16 Leibniz rechnet fortlaufend. Im Nenner des 2. Bruches stand zunächst irrtümlich $2\beta y$. Mit diesem Wert hat Leibniz konsequent weitergerechnet, dann das Versehen bemerkt, aber nur beim ersten Vorkommen verbessert.

Quaeratur $x^2 - x^2$, duorum x proximorum, fiet

$$\frac{4a^2y^2+4a^2b^2+8a^2by-a^4}{4y^2+4b^2+8yb}+\frac{-4a^2y^2+a^4}{4y^2}\ \text{sive}$$

$$\frac{\cancel{16a^2y^4}+\cancel{16a^2b^2y^2}+32a^2by^3-\cancel{4y^2a^4}-\cancel{16a^2y^4}-\cancel{16b^2a^2y^2}-32y^3a^2b+\cancel{4y^2a^4}+[4b^2a^4]+8yba^4}{16y^4+\cancel{16b^2y^2}+[\cancel{32y^3b}]}$$

fiet $\dfrac{8ya^4}{16y^4}$ $\dfrac{ya^4}{2y^4}$ seu $\dfrac{a^4}{2y^3} = GI$. si permutatis x et y. ponatur $AG = y$. et $GD = x$.

$$\frac{a^2}{x}+\frac{a^2}{x+b}=\frac{a^2x+a^2b+a^2x}{x^2+xb}\ \text{unde fiet,}\ \frac{2a^{[2]}x}{x^2}=\frac{2a^{[2]}}{x}.$$

Ac proinde intelligi potest non dari in his regressum, ac posse quidem statim differentias datis differentibus, at non series differentiarum, datis differentis inveniri.

Quid tamen si faciamus: $\dfrac{a^2}{x}+\dfrac{a^2}{x-b}$, hoc nihil profuerit, nam res eodem redit.

Et ratio est, quoniam cum summae tantum, non differentiae indagentur, nihil tollitur, atque ideo denique abiectis iis quae termino b affecta sunt, res redit ad priora.

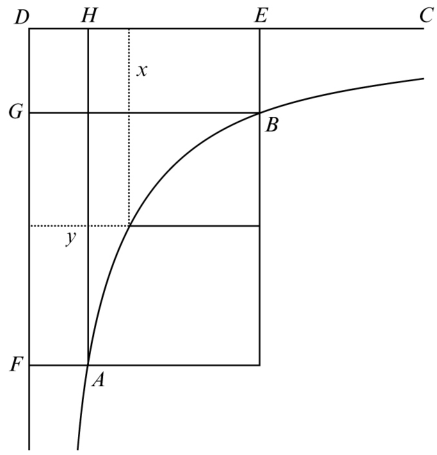
1–4 Inter calculandum omitti possunt termini quos non ingreditur b. et quos ingreditur b^2 aut altior potestas.
Imo interdum, ut exemplis sequentibus patet ingredi potest altior b potestas. Scilicet si statim ab initio intret. At abiciendae sunt potestates eius minima primum proveniente altiores.

2 $y+b,\frown\square = y^2+b^2+2yb$.

3 *Zähler: (1)* $\mathrm{4b^2a^4}$ *(2)* $\mathrm{8b^2a^4}$ *L ändert Hrsg.*; *Nenner:* $\cancel{\mathrm{4y^3b}}$ *L ändert Hrsg.* 4 fiet *(1)* $\dfrac{\mathrm{32a^2y^3+8ya^4}}{\mathrm{16y^4}}$ $\dfrac{\mathrm{4a^2y^3+ya^4}}{\mathrm{2y^4}}$ seu $\dfrac{\mathrm{2a^2}}{\mathrm{y}}+\dfrac{\mathrm{a^4}}{\mathrm{2y^3}}$ = GI. si permutatis x et y. ponatur AG = y. et GD = x. Cuius figurae quadratura rursus ex quadratura tam hyperbolae quam hyperboloeidis $\dfrac{\mathrm{a^4}}{\mathrm{y^3}}$ pendet. Hoc loco vero nova ratione habetur, atque ita duplicem habemus hyperbolae tetragonismum; *(2)* $\dfrac{\mathrm{8ya^4}}{\mathrm{16y^4}}$ *L*
5 *Exponenten erg. Hrsg.*

---

4 *GI*: genauer müsste es $\frac{1}{2}GI$ heißen.



[*Fig. 2*]

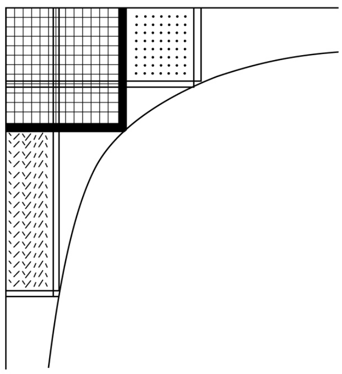
Hyperbola ABC. asymptoti DE, DF. Et $x = \frac{a^2}{y}$. et $y = \frac{a^2}{x}$. Spatium quinquilineum $BEDFAB$.

Habetur momentum omnium y ex DF, sunt enim $\frac{a^4}{2x^2}$, item omnium x ex DE, sunt enim $\frac{a^4}{2y^2}$. Quorum series homogenea seriei applicatarum ad asymptoton hyperboloeidis cubicae, $\frac{a^3}{y^2}$ vel $\frac{a^3}{x^2}$.

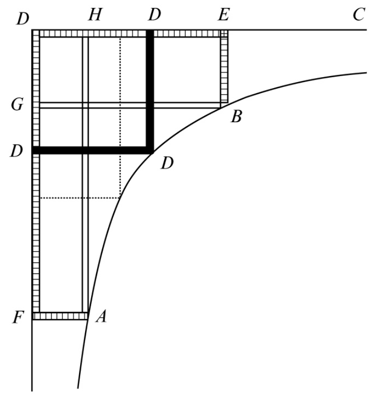
Rectangulum xy est $\frac{a^2 y}{y} = a^2$. vel $\frac{a^2 x}{x} = a^2$.

6 $\frac{a^3}{y^2}$ vel $\frac{a^3}{x^2}$: Leibniz übersieht hier, dass die quadratische — von ihm als hyperboloeis cubica bezeichnete — im Gegensatz zur gewöhnlichen Hyperbel nicht symmetrisch bezüglich x und y ist. Dementsprechend legt Leibniz den Fig. 3 und 4 eine gewöhnliche Hyperbel zugrunde.

Unde sequitur hyperboloeidis cubicae quadratura. Quod ita ostendo:



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

$\frac{a^2}{x+\beta} - \frac{a^2}{x} = a^2x - a^2x + \frac{\beta a^2}{x^2}$. homogenea huic $\frac{a^3}{x^2}$. Hinc intelligi potest quantitatem curvae haberi posse, quae hyperboloeidibus cubicis homogenea est, et ita summas eiusmodi etiam subtractione linearum non tantum quadratorum haberi posse.
Nota ut solida figuris ita et lineae curvae figuris homogeneae sunt. Et in eo consistit Heuratii methodus quadrandi curvas, quibus sunt homogeneae lineae quadrabiles.

$a^2 - x^2 = y^2$. Ergo $a^2 - x^2 - \beta^2 + 2\beta x. - a^2 + x^2$ restat $2x$.

1 quadratura. *(1)* | Posito enim DF = f. etiam DE = e. *erg.* | *(a)* duplum *(b)* dimidium enim omnium xy = $\frac{\mathrm{fa}^2}{2}$ *(c)* duplum enim omnium xy *(aa)* modo ad f. modo ad e; *(bb)* = f2a^2. seu 2a^{2}f. quadratis omnium x *(aaa)* ad basin *(bbb)* ad DE. et | 2ae *erg.* | omnium y ad DF. applicatis aequatur. Ergo si ABC sit curva hyperboloeidis cubicae, *(aaaa)* summa *(bbbb)* area spatii quinquilinei foret *(2)* Quod *L*

1 ostendo: Neben und unterhalb der Fig. 3 und 4 hat Leibniz reichlich Platz für die zugehörige Rechnung gelassen, diese dann aber nicht mehr ausgeführt. 3 Leibniz ändert die Reihenfolge, um eine positive Größe zu erhalten. Vgl. dazu auch S. 798 Z. 9. 7 methodus: H. van Heuraet, *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*, *DGS* I, S. 517–520. 8–796,3 bei der Berechnung der Subnormalen vernachlässigt Leibniz jeweils den Exponenten von y. Auch der Zahlenfaktor bei x^2 wird nicht mitpotenziert.

$a^3 - x^3 = y^3$. Ergo $y^2 = \dfrac{a^3 - x^3}{y}$. Iam $x + \beta$. cubice dat $x^3 + 3x^2\beta + 3x\beta^2 + \beta^3$, fiet ergo $\dfrac{3x^2}{y}$. et posito pro y $\sqrt{(3)}\,a^3 - x^3$, fiet: $\dfrac{3x^2}{\sqrt{(3)}\,a^3 - x^3} = y$, sive $\dfrac{3x^6}{a^3 - x^3} = y^3$, sive $y^3a^3 - x^3y^3 = 3x^6$.

$\sqrt{a^2 - x^2 - \beta^2 + 2\beta x}, -\sqrt{a^2 - x^2} = \gamma$. sive si $\gamma a = y$, erit:

$\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2} - \sqrt{a^4 - x^2a^2} = y$.

Ergo

$$2a^2 - 2x^2 - \beta^2 + 2\beta x - 2\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2 - a^2x^2 + x^4 + \beta^2x^2 - 2\beta x^3} = \gamma^2.$$

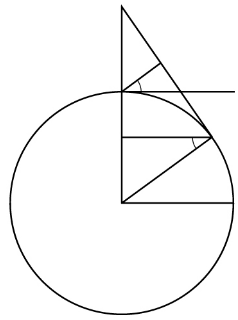
Ergo

$$2a^2 - 2x^2 - \beta^2 + 2\beta x - \gamma^2 = 2\sqrt{a^4 - x^2a^2 - \beta^2a^2 + 2\beta xa^2 - a^2x^2 + x^4 + \beta^2x^2 - 2\beta x^3}.$$

$\cancel{4a^4} - \cancel{8x^2a^2} - \cancel{4a^2\beta^2} + \cancel{8a^2\beta x} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2\beta^2} - \cancel{8x^3\beta} + \beta^4 - 4\beta^3x + 4\beta^2x^2 + \gamma^4 - 4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + 2\beta^2\gamma^2$ [$-$] $4\beta x\gamma^2 = \cancel{4a^4} - \cancel{4x^2a^2} - \cancel{4\beta^2a^2} + \cancel{8\beta xa^2} - \cancel{4a^2x^2} + \cancel{4x^4}$ [+] $\cancel{4\beta^2x^3} - \cancel{8\beta x^3}$. Ergo $\cancel{\beta^4} - \cancel{4\beta^3x} + 4\beta^2x^2 + \cancel{\gamma^4} - 4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + \cancel{2\beta^2\gamma^2}$ [$-$] $\cancel{4\beta x\gamma^2} = 0$. sive $4x^2 + 4x^2\gamma^2 = 4a^2\gamma^2$, sive $\cancel{4}x^2 + \cancel{4}a^2\gamma^2 - \cancel{4}x^2\gamma^2$, sive $\gamma^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$. sive $\gamma = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$, sive $\gamma a = y = \dfrac{xa}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. id est resecta circuli, cum ita sit $\dfrac{y}{a} = \dfrac{x}{\sqrt{\llcorner a^2 - x^2 \lrcorner}}$. et alibi a me demonstratum sit resectam esse ad radium, ut sinus versus x ad rectum $\sqrt{a^2 - x^2}$.

2 $\frac{3x^2}{y}$. | Ecce | rursus *gestr.* | quadraturam *(1)* hyperbolae *(2)* parabolae *gestr.* | et *L* 11 f. *Vorzeichen ändert Hrsg.* 12 $= 0$. | Quod si β. et γ. ponantur non infinite parvae *gestr.* | sive *L*

14 resecta circuli: Genauer müsste es dann im Nenner $\sqrt{2ax - x^2}$ heißen. Leibniz bemerkt den Irrtum S. 797 Z. 4–7. 14 f. alibi a me demonstratum: in Cc 2, Nr. 1233A [Bog. 2] = LH 35 II 1 Bl. 87 v° oben, Theorema II.



[*Fig. 5*]

At vero figura segmentorum segmento circuli aequalis est, quod si ergo calculus iste sibi constat, habetur tetragonismus. Ergo $\dfrac{\sqrt{a^4 - x^2a^2}}{2}$ figurae resectarum, et $\dfrac{\sqrt{a^4 - x^2a^2}}{4}$ segmenti circuli area est. Sed errorem necesse est latere in calculo, posito enim $x = a$. ut in quadrante, fieret $\dfrac{\sqrt{a^4 - a^4}}{4}$ quod absurdum.

Imo contra. Rectissimus est calculus, nam x ex ipso centro computatur, et continue crescit, et quando fit $= a$. evanescit quantitas. Sed hoc modo γ non est rescissa.

Resumamus calculum:

$\cancel{4a^4} - \cancel{8a^2x^2} - \cancel{4a^2\beta^2} + \cancel{8a^2\beta x} - 4a^2\gamma^2 + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2\beta^2} - \cancel{8x^3\beta} + 4x^2\gamma^2 + \beta^4 - 4\beta^3x +$ $[2]\beta^2\gamma^2 + 4\beta^2x^2 - 4\beta x\gamma^2 + \gamma^4 = \cancel{4a^4} - \cancel{4x^2a^2} - \cancel{4\beta^2a^2} + \cancel{8\beta xa^2} - \cancel{4a^2x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4\beta^2x^2} - \cancel{8\beta x^3}$.

Ergo $-4a^2\gamma^2 + 4x^2\gamma^2 + \cancel{\beta^4} - \cancel{4\beta^3x} + \cancel{[2]\beta^2\gamma^2} + 4\beta^2x^2 - \cancel{4\beta x\gamma^2} + \cancel{\gamma^4} = 0$.

Abiciantur ea quae duabus dimensionibus quantitatum assignabilium minora sunt, sive in quibus tres sunt aut ultra inassignabilium potestates, ut β^4, item β^3x, item $\beta^2\gamma^2$, item $\beta x\gamma^2$, item γ^4, restat $-\cancel{4}a^2\gamma^2 + \cancel{4}x^2\gamma^2 + \cancel{4}\beta^2x^2 = 0$. sive $x^2\gamma^2 + x^2\beta^2 = a^2\gamma^2$, vel $a^2\gamma^2 - x^2\gamma^2 = x^2\beta^2$, vel $\gamma^2 = \dfrac{x^2}{a^2 - x^2}$, sive $\gamma = \dfrac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}}$. Et posito $\gamma a = y$, fiet $y = \dfrac{xa}{\sqrt{a^2 - x^2}}$.

Ergo posita x minima $= \beta$, fiet $y = \dfrac{a}{a}$. et posita x maxima, ita ut non nisi inassignabiliter differat ab a. erit $y = a^2$. ac proinde infinite longa, sive asymptotos.

6 f. Imo ... rescissa. *erg. L* 10 f. 2 *erg. Hrsg.*

Caeterum y hoc loco resecta non est, quia x est non sinus versus, sed complementum eius ad radium. Ergo sinu verso posito x. pro x nostra, substituendum erit $a - x$, fiet:

$$y = \frac{a^2 - xa}{\sqrt{a^2 - a^2 - x^2 + 2ax}}.\ \text{sive}\ y = \frac{a^2 - xa}{\sqrt{2ax - x^2}}.$$

Et figura ex ipsis y hoc modo conflata quadrari aliunde potest, cum aequetur sectori duplicato demto segmento duplicato.

Nunc et figurae angulorum tangentes investigemus:

$$y^2 = \frac{a^4}{2ax - x^2}.\ \text{Fiet:}\ \frac{a^4}{2ax + 2a\beta - x^2 - \beta^2\ [-]\ 2\beta x} - \frac{a^4}{2ax - x^2},$$

inverte

unde fiet:

$$\frac{\cancel{2a^5x} + 2a^5\beta - \cancel{a^4x^2} - \cancel{a^4\beta^2}\ [-]\ 2a^4\beta x - \cancel{2a^5x}\ [+]\ \cancel{a^4x^2}}{4a^2x^2 + \cancel{4a^2x\beta} - 2ax^3 - 2\cancel{ax\beta^2}\ [-\cancel{4ax^2\beta}]\ - 2ax^3 - \cancel{2a\beta x^2} + x^4 + \cancel{\beta^2x^2} + \cancel{2\beta x^3}}$$

$-4ax^3$

fiet: $\dfrac{2a^5\ [-]\ 2a^4x}{4a^2x^2 - 4ax^3 + x^4} = y$. Talis ergo figura quadrari potest.

Resumamus $\dfrac{a^2}{\sqrt{[2]ax - x^2}}$, et ergo $y^2 = \dfrac{a^4}{2ax - x^2}$. Ergo $2y^2ax - y^2x^2 = a^4$. Ergo $a^4 - 2y^2ax = y^2x^2$. Ergo $x^2 = \dfrac{a^4}{y^2} - 2ax$.

Ergo duorum x^2 proximorum differentia: $\dfrac{a^4}{y^2} - \cancel{2ax} - \dfrac{a^4}{y^2 + \beta^2 + 2y\beta} + \cancel{2ax}$, fiet:

---

16 Nota reiectionem termini ax, quasi non adesset.

7–13 *Vorzeichen ändert Hrsg.* 11 $+2\mathrm{ax}^2\beta$ *L ändert Hrsg.* 14 Resumamus | figuram priorem, *(1)* $\dfrac{\mathrm{x}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{x}^2}}$, et ergo $\mathrm{y}^2 = \dfrac{\mathrm{x}^2}{\ }$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}}$, *ändert Hrsg.* | et *L*

14–799,1 Die Berechnung von x^2 enthält einen Vorzeichenfehler, die Bildung der Ableitung ist unzulässig.

$$\frac{\cancel{a^4y^2} + \cancel{a^4\beta^2} + 2a^4y\beta - \cancel{a^4y^2}}{y^4 + \cancel{y^2\beta^2} + \cancel{2y^3\beta}} = \frac{2a^4y}{y^4} = \frac{2a^4}{y^3}.$$

Eodem modo resecta hyperbolae dat reductam $\dfrac{a^4}{2y^3}$, vide supra sub fine paginae quae retrovertendo occurrit.

$\dfrac{a^3}{Rq\ xa} - \dfrac{a^3}{Rq\ xa + \beta a} = y$. Ergo $= \dfrac{Rq\ \beta a^7}{xa}$ vel si dividatur per $Rq\ a$. fiet $\dfrac{Rq\ a^4}{xa}$, vel $\dfrac{a^2}{xa}$, vel $\dfrac{a}{x}$.

Sed sciendum hoc modo, ut haberi possit geometrice $Rq\ a$, intelligendum esse $a =$ non lineae sed rectangulo cuidam constanti v. g. ac.

Imo forte, error in calculo nam $\dfrac{a^2 Rq\ \overline{xa + \beta a} - a^2 Rq\ xa}{x\cancel{a}} = y$. Ergo

$$\frac{a^6, \frown\ xa + \beta a + xa - 2\sqrt{x^2a^2 + \beta a^2 x}}{x^2a^2} = y^2.$$

Quod si irrationalitatem eliminare volemus, haud dubie in x^2 divisorem et hyperboloeidem velut cubicam rursus incidemus.

2 supra: s. o. S. 792 Z. 7. (In Wirklichkeit berechnet Leibniz wie oben S. 793 Z. 4 den doppelten Wert.) 10 haud dubie: Genauer ergibt sich eine Kurve der Gestalt $y^2x^3 = A^5$.

49. AD FIGURAM SEGMENTORUM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 93–94. 1 Bog. 2°. 2 S. auf Bl. 93 v° und 94 r°. — Auf dem übrigen Bogen *LSB* VII,3 N. 23 S. 264–270.
Cc 2, Nr. 559

Datierungsgründe: Das Stück nimmt Bezug auf N. 47, liegt also etwas später als dieses.

In omni figura constat ex alibi a me demonstratis, applicatam divisam per productam dare differentiam applicatarum.

Esto applicata y. producta p. erit differentia applicatae datae a proxime maiore $= \dfrac{y}{p}$.

In hyperbola, cum applicata y sit $= \sqrt{ax+x^2}$, erit $y^2 = ax + x^2$, et ut habeatur producta fiet: $2y^2 = ap + 2xp$, vel $\dfrac{2ax+2x^2}{a+2x} = p$, et $\dfrac{y}{p} = \dfrac{\sqrt{ax+x^2}}{2ax+2x^2} \frown a+2x$, vel $\dfrac{2y}{p} = \dfrac{1}{\sqrt{ax+x^2}} \frown a+2x = \dfrac{a+2x}{\sqrt{ax+x^2}}$.

Ergo figurae huius, in qua aequatio est: $\dfrac{a^2+2xa}{\sqrt{ax+x^2}} = y$, quadratura haberi potest.

Quam ut per partes examinemus patet $\dfrac{a^2}{\sqrt{ax+x^2}} = y$, dare $\dfrac{a^4}{ax+x^2} = y^2$, unde fit: $a^4 = axy^2 + x^2y^2$, vel $\dfrac{a^4}{y^2} = ax + x^2$, vel $\dfrac{a^4}{y^2} + \dfrac{a^2}{4} = ax + x^2 + \dfrac{a^2}{4}$, vel $\sqrt{\dfrac{a^4}{y^2} + \dfrac{a^2}{4}} = \left[\dfrac{a}{2}\right] + x$.

---

10 Idem plane in circulo alibi.

14 Est homogenea curvae hyperb.

15 a *L ändert Hrsg.*

---

7 ex alibi a me demonstratis: s. N. 40 S. 660 Z. 5 f. 17 in circulo alibi: z. B. N. 40 S. 697 Z. 1–3.

Sumta iam aequatione hac: $\sqrt{\dfrac{a^4}{y^2}+\dfrac{a^2}{4}}=x$ (omisso $\left[\dfrac{a}{2}\right]$, quia constante vel posito $\left[\dfrac{a}{2}\right]+x=x$), potest rursus dici: $\dfrac{a^4}{y^2}+\dfrac{a^2}{4}=x^2$, sive $\dfrac{a^2}{y}=\sqrt{x^2-\dfrac{a^2}{4}}$, vel $\dfrac{y}{a^2}=\dfrac{1}{\sqrt{x^2-\dfrac{a^2}{4}}}$, vel $y=\dfrac{a^2}{\sqrt{x^2-\dfrac{a^2}{4}}}$, unde $y^2=\dfrac{a^4}{x^2-\dfrac{a^2}{4}}$, vel $x^2y^2-y^2\dfrac{a^2}{4}=a^4$, vel $x^2=\dfrac{a^4}{y^2}+\dfrac{a^2}{4}$, vel $x=\sqrt{\dfrac{a^4}{y^2}+\dfrac{a^2}{4}}$.

Ergo in hanc tandem figuram superior aequatio reducitur: $\dfrac{a}{\sqrt{ax+x^2}}=y$.

Iam altera: $\dfrac{2xa}{\sqrt{ax+x^2}}=y$, dabit $\dfrac{x^2a^2}{ax+x^2}=y^2$, sive $\dfrac{xa^2}{a+x}=y^2$, ac proinde $xa^2=y^2a+xy^2$. Ergo $xa^2-xy^2=y^2a$, vel $x=\dfrac{y^2a}{a^2-y^2}$, unde $\dfrac{y^2}{a-\dfrac{y^2}{a}}=x$, vel $ay^2=xa^2-xy^2$, vel ob $\dfrac{y^2}{a^2-y^2}=\dfrac{x}{a}=+1-\dfrac{a^2}{a^2-y^2}$.

5 Idem in circulo faciendum.

7 Est figura segmentorum.

1 f. (omisso a, quia constante | vel posito a + x = x *erg.* |) *L ändert Hrsg.*

8 $\dfrac{x}{a}$: In der hinteren Beziehung müssten die Vorzeichen der beiden Glieder vertauscht sein.

Iam $\dfrac{a^3}{a^2-y^2} = x$ ni fallor alibi ostensum ex quadratura hyperbolae pendere: vel $a^2x - y^2x = a^3$, vel $a^2x - a^3 = y^2x$, vel $a^2 - \dfrac{a^3}{x} = y^2$. vel $1 - \dfrac{1}{x} = y^2$, vel $y = \sqrt{1-\dfrac{1}{x}} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}}$.

Ut productam huius figurae habeamus, fiet: $a^2x - y^2x = 2y^2x$, ac proinde $a^2p - y^2p =$
$p \quad p$
$2y^2x$, vel $p = \dfrac{2y^2x}{a^2-y^2}$, et pro y^2 substituto aequivalente, fiet:

$$\frac{2a^2x - a^3}{a^2 - a^2 + \dfrac{a^3}{x}} = \frac{2a^2x^2 - a^3x}{a^3} = \frac{2x^2}{a} - x.$$

Iam fiat ut p ad y, seu ut $\dfrac{2x^2}{a} - x$ ad $\sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}}$, ita $p - x$ ad z. vel $\dfrac{2x^2}{a} - 2x$ ad z. fietque $\sqrt{a^2-\dfrac{a^3}{x}} \frown \dfrac{\dfrac{2x^2}{a} - 2x}{\dfrac{2x^2}{a} - x} = \sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}} \frown 1 - \dfrac{x}{\dfrac{2x^2}{a} - x}$,

---

1 $\dfrac{a^3}{a^2+y^2} = x. \quad a^3 = a^2x + y^2x.$

$$\left.\begin{array}{r} \sqrt{\dfrac{a^3}{x} - a^2} = y \\[2ex] \sqrt{a^2 - \dfrac{a^3}{x}} = y \end{array}\right\} \text{pro} \begin{array}{l} \text{circ.} \\[2ex] \text{hyperb.} \end{array}$$

Ergo in circ. x est minor, in hyp. hoc loco maior quam a.

10 *(1)* Idem in circulo *(2)* $\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2+\mathrm{y}^2}$ *L*

---

1 alibi ostensum: s. N. 47 S. 787 Z. 13 f. 7 In dem ersten Ausdruck müsste es im Zähler statt $-a^3$ vielmehr $-2a^3$ heißen. Leibniz rechnet mit dem Fehler konsequent bis S. 803 Z. 11 weiter.

vel $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{\frac{2x}{a} - 1}$, vel $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}$.

Atque horum summa aequalis segmento duplicato summae omnium $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}$. Ergo dimidiata illorum summa aequalis segmento huius, ergo summa differentiarum inter $\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}$, et $\frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}}{2}$, aequalis semper triangulo post absectum segmentum residuo, vel

$$\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} - \frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2} + \frac{\frac{a}{2}\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a} \quad \text{quadrabiles.}$$

Ergo si $\frac{\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}} + \frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a}}{2}$ est $= y$, erit summa omnium y quadrabilis.

Alterutra ergo horum quadrata etiam altera quadrata erit.

Inquiramus tantum in $\frac{a\sqrt{a^2 - \frac{a^3}{x}}}{2x - a} = y$, fiet $\frac{a^2 \frown a^2 - \frac{a^3}{x}}{4x^2 + a^2 - 4xa} = y^2$, vel $a^4x - a^5 = 4x^3y^2 + a^2xy^2 - 4x^2ay^2$, sed haec nimis prolixa.

Per partes ergo, erit: $\frac{a^4}{4x^2 + a^2 - 4xa} = \frac{a^2}{2x - a}$, quae est applicata hyperbolae, et $\frac{a^4 \frown \frac{a}{x}}{}$

[*bricht ab*]

10 $-4x^2ay^2$, *(1)* consideremus primum: $\frac{a^4}{}$ *(2)* sed *L*

11 erit: Leibniz fasst die Zerlegung quadratisch auf und zieht sofort die Wurzel, ohne das Ganze genauer hinzuschreiben.

Sumamus $\frac{a^3}{a^2-y^2} = x$, fiet: $a^3 = a^2x - y^2x$, sive $2yp\cancel{x} = a^2\cancel{x} - y^2\cancel{x}$. eritque $p = \frac{a^2}{2y} - \frac{y}{2}$. Iam fiat ut x ad p, ita z ad $p-y$, $\frac{x}{p} = \frac{z}{p-y}$, ergo $z = \frac{px-xy}{p}$, et quia $x = \frac{a^3}{a^2-y^2}$, fiet $x - \frac{ya^3}{a^2-y^2, \frown \frac{a^2}{2y} - \frac{y}{2}} = x - \frac{2y^2a^3}{a^4 - 2ya^2 + y^4}$.

Caeterum hic in genere notandum est, quod antea non observaveram[:]

Quoniam semper est $\frac{x}{p} = \frac{z}{p-y}$, fore $z = x - \frac{xy}{p}$, et quia $\frac{z}{2} = \frac{x - \frac{xy}{p}}{2}$ summa aequatur segmento figurae, ergo summa ipsarum $x - \frac{x - \frac{xy}{p}}{2} =$ triangulo, sive $x - \frac{x}{2} + \frac{xy}{2p} =$ triangulo $= \frac{x}{2} + \frac{xy}{2p}$.

Ergo in omni figura si sit y abscissa, x applicata, p producta, semper summa omnium $\frac{x}{2} + \frac{xy}{2p}$ erit quadrabilis.

Atque hac methodo habetur a p p r o x i m a t i o g e n e r a l i s pro figuris omnibus quodammodo metiendis. Istud excedens enim $\frac{xy}{2p}$, rursus eodem modo, quasi x esset, tractari potest, et rursus eius dimidium, cum alio quodam adiecto quadrabile habebitur; quod adiectum, eodem item modo tractandum; atque ita quamdiu libuerit, quod si iam unum horum aliquando quadrabile habeatur; aut etiam quadrabile fingatur, vel quando diu satis continuatio facta est, negligatur; caetera omnia quadrata intelligentur, possunt haec referri ad inscripta et circumscripta.

---

1 Figura segmentorum hyperb.

3 *Nebenrechnung:* $\frac{a^4}{2y} - \frac{ya^2}{2} - \frac{a^2y}{2} + \frac{y^3}{2} = \frac{a^4 - 2ya^2 + y^4}{2y}$.

1 $-y^2x$, | $y^2 = a^2 - \frac{a^3}{x}$ *gestr.* | *(1)* sive $2y^2x = a^2p - y^2p$, vel $p = \frac{2y^2x}{a^2-y^2}$, et quia $y^2 =$ *(2)* sive *L*

5 f. summa *und* summa ipsarum *erg. L* 11 Istud *(1)* superfluum *(2)* excedens *L* 13 libuerit, *(1)* omnium $\frac{x}{2}$ cum ultimo superfluo summa, ipsi primo x ae *(2)* quod si *L*

Forte et ex aliquot prioribus series sequentium sine calculo facile inveniri atque ea summandi modus haberi potest.
Contra ubi notae iam figurarum quadraturae, ut in paraboloeidibus et hyperboloeidibus, aliisque hinc viceversa ex data figurae quadratura habetur infinitarum eiusmodi serierum summa.
Caeterum in paraboloeidibus et hyperboloeidibus id non opus, ubi eadem semper manet figurae species. At in aliis innumeris figuris quadrabilibus, quae mea methodo quadrantur, idem utiliter experiri licet.

Redeo ad aliam quam supra incepi approximationem generalem.

Ante omnia supra demonstratum est, semper $\frac{ay}{p}$ summari posse, posita y applicata, p producta, a constante.

Ita si sit $a^2 = yx$, fiet $yx = yp$, et $x = p$, fietque $\frac{y}{p} = \frac{\frac{a^2}{x}}{p} = \frac{a^2}{x^2}$[;] et in parabola: $ax = y^2$, seu $ap = 2y^2 = 2ax$, ergo $p = 2x$, ergo $\frac{a\sqrt{ax}}{2x} = y$, quadrabile: sive $\frac{a^3x}{4x^2} = y^2$, sive $\frac{a^3}{4x} = y^2$[;] ecce rursus hyperbolam cubicam $ax = y^2$. Unde $ax = 2yp$, ergo $\frac{ax}{2y} = p = \frac{\cancel{a}\frac{y^2}{\cancel{a}}}{2y} = p = \frac{y}{2}$. Iam $\frac{y^2a}{2ay} = \frac{y}{2}$. Ecce hic d i f f e r e n t i a e p r o d u c t i s h o m o g e n e a e.

$a^2 = xy$, et $p = x$, et posito $x = 1$, fiet $a^2 = y$, atque inde ordiri possumus: $\frac{y}{p} = \frac{a^2}{1}$, et posito $x = 2 = p$, fiet: $\frac{a^2}{2}$, et postea $\frac{a^2}{\frac{\frac{1}{2}}{3}}$, et postea $\frac{a^2}{\frac{\frac{\frac{1}{2}}{3}}{4}}$, et ita porro,

atque ita fiet: $\frac{a^2}{1}$ $\frac{a^2}{2}$ $\frac{a^2}{6}$ $\frac{a^2}{24}$ etc.

---

12 Genauer müsste es $yx = -yp$ und $x = -p$ heißen. Leibniz vernachlässigt das Vorzeichen, da er p als einfache Strecke ansieht.

Imo potius:

sunt p: 1. 2. 3. 4. 5. 6. etc. et

y primum est $\frac{a^2}{1}$, ergo differentia eius a 2^{do} erit $\frac{a^2}{2}$. Ergo

y secundum erit $\frac{a^2}{2}$, eius differentia a tertio erit $\frac{a^2}{6}$, ergo

y tertium erit $\frac{a^2}{3}$, cuius differentia a quarto erit $\frac{a^2}{12}$, ergo

quartum erit $\frac{a^2}{4}$ etc.

Quod supra de approximationibus per continua triangula, id sic illustrabitur. Ponatur prima applicata y, applicata primae figurae segmentorum $\frac{y}{2}$,

$\underbrace{\frac{y}{2}+\frac{\beta}{2}}_{=\,bx}$ applicata secundae figurae segmentorum,

applicata tertiae figurae segmentorum: $\underbrace{\frac{\beta}{4}+\frac{\gamma}{2}}_{cx\,=\,\text{earum summae}}$

et applicata quartae figurae segmentorum erit: $\underbrace{\frac{\gamma}{4}+\frac{\delta}{2}}_{dx}$, et quintae $=\underbrace{\frac{\delta}{4}+\frac{\epsilon}{2}}_{=\,ex}$.

Hinc posito summam omnium $\frac{\epsilon}{2}$ vel inveniri, vel potius quod est universalius tuto negligi posse[,] fiet summa omnium $\frac{\delta}{4}=ex$, et $2ex=$ summ. $\frac{\delta}{2}$, et

$dx-2ex$ erit $=$ summae omnium $\frac{\gamma}{4}$, et

$cx-2dx+4ex=$ summae omnium $\frac{\beta}{4}$, et

$bx-2ex+4dx-8ex$, aequatur summae omnium $\frac{y}{2}$.

12–16 Ecce rursus modum de figuris in alias resolvendis.

13 et 2ex = summ. $\frac{\delta}{2}$, *erg. L*

Ecce methodum inveniendi appropinquationes universalem, et exactam methodo ⟨per⟩ polygona, inscripta vel circumscripta, si universaliter rem aestimes, longe commodiorem. Est autem ipsa b, vel c, vel d, vel e semper applicata maxima figurae segmentorum assumtae, seu cuius abscissa est maxima x, vel altitudo figurae quadrandae.

50. CURVA QUAM P. BERTHET OSANNAE PROPOSUERAT
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 107–108. 1 Bog. 2°. — A: Bl. 108 v° oberer Rand 4 Z. verworfene, fragmentarische Notiz. — B: Bl. 107 r° oben 1/3 S. u. Bl. 108 v° 1 S. Überschrift erg. Rest des Bogens leer. Textfolge: Bl. 107 r° = Teil 1; Bl. 108 v° = Teil 2–4. Teil 1 stammt von Ozanam, alles Übrige von Leibniz; die einzelnen Teile sind jeweils deutlich im Duktus voneinander unterschieden.
Cc 2, Nr. 1112

Datierungsgründe: Die Datierung ergibt sich aus dem Schreiben von Leibniz an Bertet von Anfang Nov. 1675 (= *LSB* III, 1 N. 68 S. 308–310). Es beginnt mit dem auf das vorliegende Stück bezogenen Satz: „Il y a plus de 2 ans que Mons. Osannam me parla d'une ligne que vous aviez imaginée."

A.

Annotat Hugenius pag. 80. curvam cuius evolutione hyperbola (circularis) describitur, eius naturam fore, ut cubus ab $x^2 - y^2 - a^2$ sit $= 27x^2y^2a^2$.

$x^2 - y^2 - a^2.\ \square = x^4 - 2x^2y^2 - 2x^2a^2, +y^4 + 2y^2a^2 + a^4,, \frown x^2 - y^2 - a^2.$

$x - \sqrt{x + \dfrac{x^2}{a}} =$ [*Formel bricht ab*]

B.

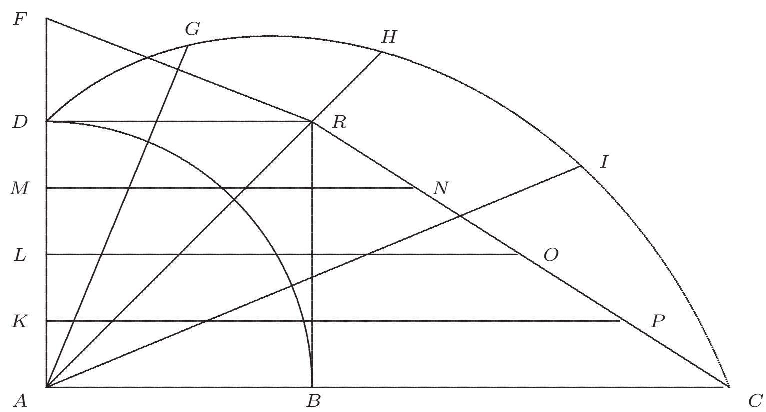
Curva quam P. Berthet Osannae proposuerat
Osanna mihi
cuius tangentem, aream et alia dedi.

[*Teil 1*]

[Ozanam]

---

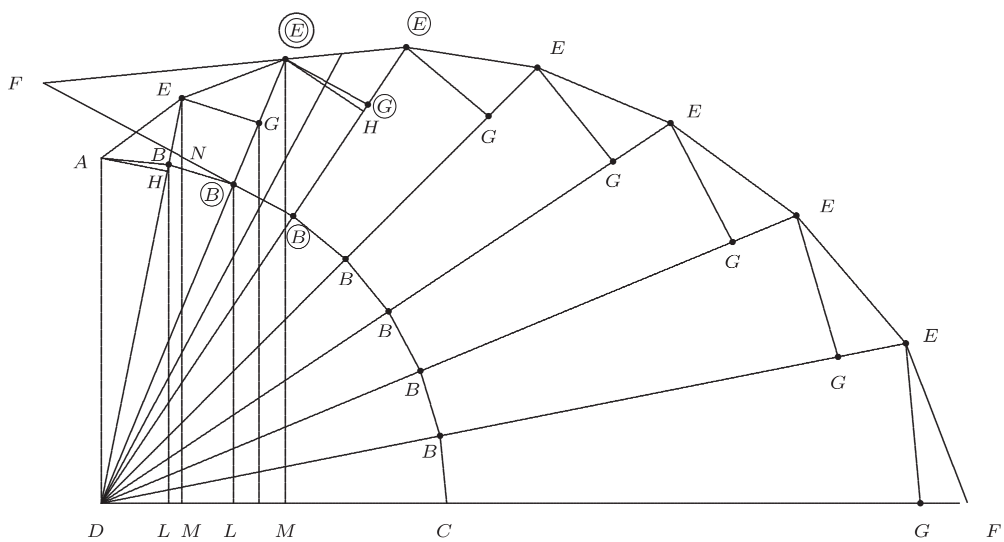
13 Annotat Hugenius: *Horologium oscillatorium*, 1673, Teil 3 Satz 10 S. 79–81 (*HO* XVIII S. 220 bis 225). Die Notiz ist als Erstes auf den Bogen geschrieben worden. Offenbar wollte Leibniz das Huygens'sche Ergebnis weiter untersuchen, hat dieses Vorhaben aber nicht ausgeführt und den Bogen anderweitig verwendet. In Leibniz' Handexemplar finden sich an der betreffenden Stelle Tintenspuren sowie eine Marginalie; vgl. dazu N. 2.



[*Fig. 1 (Ozanam)*]

$AC, AB :: AB, DF$
$KP \infty AI \quad LO \infty AH \quad MN \infty AG$
$DR \infty AD$

[*Teil 2*]



[*Fig. 2, tlw. Blindzeichnung*]

Sit arcus circuli ABC. sumtisque in eo punctis quotlibet B. ex centro D ductus radius DB, producatur, eousque dum portio extra circumferentiam producta BE, aequetur arcui AB. tandem per omnia puncta E, transire intelligatur curva cochleiformis AEF.

Modus hanc curvam describendi hic est: sit linea rigida DF indefinite producta ex centro D ac circa illud centrum mobilis; inde filum arcui circuli ABC rigido, circumplicatum intelligatur, quod in C si placet fixum in A liberum sit. Ac linea rigida DF in DC constituta, filum ita semper aperiatur, ut ipsi DF regulae coincidat, eamque ipsa sui apertura ab A versus C propellat, stylus filo in A alligatus in plano curvam AEF describet.
Idem efficitur, si duo sint motores, unus qui lineam rigidam circumagat, alter qui filum ad lineam rigidam quantum potest extendat.

Huius curvae ut inveniamus tangentes, intelligantur ductae circuli chordae infinite parvae, AB, BB, etc. BC. atque his parallelae a radio producto in radium productum ducantur rectae infinite quoque parvae EG. Iam ex ipsis BB una aliqua, ut BB intelligatur producta ut libet versus A in F[,] ipsa BF tangens erit circuli Iam ponatur FE tangens curvae cochleiformis[,] ergo triangula FBE et EGE erunt similia quia EG et FB parallelae. Ergo ut est EG ad GE ita est EB ad BF quaesitam. Est autem GE seu BB ad GE ut DB vel DA ad DG. Ergo etiam BE ad BF erit ut DA ad DG.
Regulam ergo tangentium ad hanc curvam ducendarum habemus hanc, puncto in ea dato ut E[,] inde ducatur ad D centrum circuli generatoris recta ED quae arcum circuli datum secet in B[,] ductoque circuli tangente BF, si fiat ut ED radius arcu circuli

12 intelligantur *(1)* ductae circuli chordae *(2)* ducta circuli velut polygoni infinitanguli, latera *(3)* ductae *L* 14 Iam *(1)* sumta ex chordis BB una BB *(2)* ex *L* 15 versus A *(1)* | usque in F *erg.* | quae utique tangens *(2)* in F *L* 15 circuli. *(1)* Manifestum est | si FE sit tangens curvae cochleiformis *erg.* | triangula FBE et EGE esse *(2)* Iam *L* 17 quia ... parallelae *erg. L* 17 ut est EG | data *gestr.* | ad GE ita est EB | data *gestr.* | ad *L* 18 seu BB *erg. L* 18–20 GE ut *(1)* DG ad DA *(2)* DB vel DA ad DG. | Ergo ... ad DG. *erg.* | Regulam *L* 22 ut *(1)* EB ad *(2)* DA ad *(3)* radius circuli ad ED radium producta auctum, ita *(4)* ED radius *L*

4–9 Neben dem Text hat Leibniz begonnen, einen entsprechenden Mechanismus zu entwerfen, den Versuch aber sofort abgebrochen. — Zur mechanischen Erzeugung der Kurve s. a. *LSB* III, 1 S. 308 f.

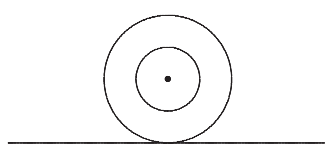
extenso auctus ad DB radium ita BF ad EB circulum extensum[,] erit iuncta FE curvae tangens.
Quando autem tangens est ipsi DC parallela, punctum contactus erit figurae vertex.

Ut ipsius curvae longitudinem indagemus ducenda est perpendicularis ex E in DG[,] patet triangulum EGH semper esse simile quaecunque sint puncta E et G. quia angulus EGD vel EGH semper idem, et angulus EHG etiam semper idem quia rectus. Cumque EG semper crescant arithmetica proportione, etiam EH et HG semper arithmetice crescent. Ex omnibus autem EH, primum est AH, cuius magnitudinem investigabimus si aream trianguli ADB quod vocemus z^2. dividamus per semiradium $\frac{a}{2}$, fiet $\frac{z^2}{\frac{a}{2}} = \frac{2z^2}{a}$. Et sequens ita habebitur, ut a ad $a+1$, ita $\frac{2z^2}{a}$ ad sequentem, fiet: $\frac{2z^2}{a} + \frac{2z^2\beta}{a^2}$ posito β esse unitatem. Ergo differentiae omnium EH arithmetice crescentium erunt $\frac{2z^2}{a^2}$. Iam si subtrahatur $\square AH$ a $\square^{\text{to}}AB$, fiet $\sqrt{1-\frac{4z^4}{a^2}}$ et ut a ad $a+1$ ita $\sqrt{1-\frac{4z^4}{a^2}}$ ad sequentem.

a^2+2a+1, inde $\sqrt{\dfrac{a^2-4z^4+2a-\dfrac{8z^4}{a}+1-\dfrac{4z^4}{a^2}}{a^2}}$

vel: $\sqrt{1-\dfrac{4z^4}{a^2}-\dfrac{8z^4}{a^3}-\dfrac{4z^4}{a^4}+\dfrac{2}{a}+\dfrac{1}{a^2}}$

11–13 *Daneben:*



1 ita *(1)* BE producta ad *(2)* BF ad *L* 3 Quando ... vertex. *erg. L* 4 indagemus *(1)* cogitandum est latus AB, vel BB aequale ipsi GE esse non latus inscriptum seu chordam sed circumscriptum seu ta *(2)* ducenda *L* 6 vel EGH *erg. L* 13 f. sequentem *(1)* | id est *nicht gestr.* | $1-\frac{4z^4}{a^2}+\frac{1}{a}-\frac{4z^4}{a^3}$. *(a)* Et differ *(b)* dabit scilicet quadr. BH. *(2)* . a^2 *L*

cuius differentia a $\sqrt{1-\frac{4z^4}{a^2}}$ semper eadem cum per eam sequentes AH arithmetice crescant: Tantum ergo per numeros naturales continue multiplicanda est. Tandem additis EH, HG quadratis habebitur quadr. E E cuius radices sunt elementa curvae.

[*Teil 3*]

Aequatio huius figurae naturam explicans ita investigabitur. Ex punctis E dimittantur ordinatae ad DC, nempe EM. et ex punctis B, sinus BL. et DL positis $= x$. et $BL = y$., quia $DB = a$. eidem semper erit $y = \sqrt{a^2 - x^2}$. et eodem modo EM posito v, et DM posito ξ, fiet $v^2 = DE^2 - DM^2$, et quia DE est $= a + \beta$, posito β esse arcum AB respondentem, fiet: $DE^2 = a^2 + \beta^2 + 2a\beta$. fietque aequatio haec[:]

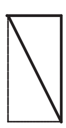
$$v \text{ vel } ME = \sqrt{a^2 + \beta^2 + 2a\beta - \xi^2}.$$

vel brevius MN sinu circuli in rectam ME incidente, vocato z, eius quadratum z^2, erit aequale $a^2 - \xi^2$, vel $DN^2 - DM^2$, ergo[:]

$$ME \text{ erit } = \sqrt{z^2 + \beta^2 + 2a\beta}.$$

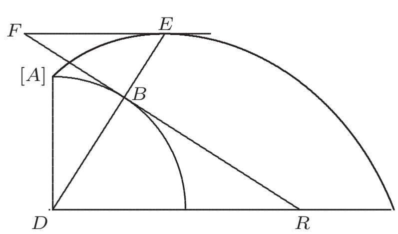
Ergo haberi quoque possunt quadrata omnium ME, sive solidum figurae circa axem DG, revolutione genitum.

Definiendum ex his punctum, ubi maxima figurae latitudo.



a	b	(1)	ab
$a + \alpha$	$b + \beta$	(2)	$ab + a\beta + \alpha b + \alpha\beta$
$a + 2\alpha$	$b + 2\beta$	(3)	$ab + 2a\beta + 2\alpha b + 4\alpha\beta$

[*Teil 4*]



[*Fig. 3*]

22 A *erg. Hrsg.*

Maxima curvae altitudo est, ubi tangens FE basi parallela est. Producatur FB in R. ubi occurrat basi, triangula EBF et DBR similia sunt. Ergo:

$$\frac{EB}{BF} \text{ sive } \frac{AD}{AD+BE} \sqcap \frac{AD}{BR}.$$

Ergo cum tangens complementi aequatur arcui et radio simul, radius productus occurrit curvae vertici.

1 Maxima curvae altitudo: Teil 4 steht in direktem Zusammenhang mit dem Schreiben an Bertet (s. *LSB* III, 1 S. 310) und dürfte daher im November 1675 entstanden sein.

51. DE ELEMENTIS FIGURARUM.
[Herbst] – Ende 1673

Die in dieser Nummer zusammengefassten Teilstücke stehen in lockerem sachlichen Zusammenhang; sie befinden sich alle auf dem gleichen Bogen.

Die Notiz N. 51_1 ist unter dem Eindruck der Sendung Oldenburgs vom 20. IV. 1673 (= *LSB* III, 1 N. 13) entstanden, die Leibniz noch im selben Monat erhalten, aber erst nach und nach durchgearbeitet hat. Sie zeigt einen anderen Duktus als die übrigen Teilstücke und ist als erste auf den Bogen geschrieben worden.

In dem Konzept N. 51_2 beginnt Leibniz eine Konstruktionsaufgabe zu behandeln. Eine verwandte Fragestellung tritt in N. 51_3 auf, so dass N. 51_2 als Vorstudie dafür angesehen werden darf, außerdem ist der Duktus dem von N. 51_3 sehr ähnlich.

Das Hauptstück N. 51_3 ist datiert.

Das Wasserzeichen des Bogens ist ab August 1673 belegt.

Daraus ergibt sich die Datierung.

51_1. DE ARTE DIGNOSCENDI FIGURARUM NATURAM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 1/3 S. auf Bl. 251 v° oben. Auf dem übrigen Bogen N. 51_2 u. 51_3.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

Opus est arte quadam dignoscendi ex figura quadam oblata, quaenam sit natura eius. Hoc optime fiet, si directrice adhibita tabulae innumeris quadratis plenae applicetur, numerus quadratorum, ordinatam dabit, progressio numerorum aequationem figurae, saltem circiter. Unde tabulas fieri utile erit, quae numerorum seriebus explicent figurarum naturas, a latere recto appellato 1. (sed 1. infinito), v. g.

$$x = \frac{y^2}{a}.\ \text{fiet:}\quad 1.\ \ 4.\ \ 9.\ \ 16.\ \ \text{et ita porro.}$$

Sed saepe non statim ex numeris dignosci potest, ex qua nascuntur aequatione series, quoniam sunt aequationes quaedam valde compositae. Hinc quae Collinius de interpolationibus.

---

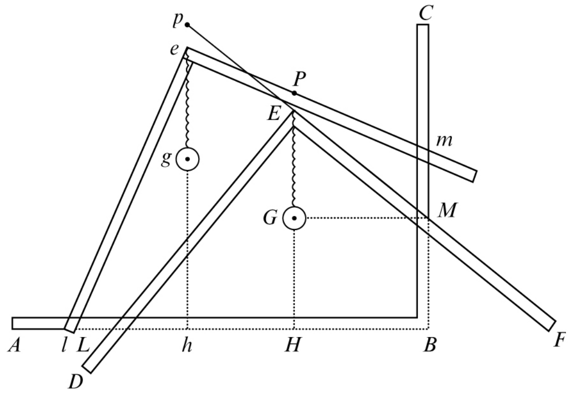
27 Collinius: s. dazu *LSB* III, 1 S. 58 f. u. 68 sowie *LSB* VII, 3 N. 21 S. 252.

Nota: si figura ipsa quadrato imponi non potest, poterit imago eius repraesentatione optica. Operae pretium est hoc modo exacte definiri figuram doliorum vinariorum, aliorumque quorum usus publice introductus est, ut exacta eorum mensurandorum ratio stabiliatur. Adde quae Andersonus ni fallor textor, in diario Anglico de figuris geometricis cum vasis comparatis. Ita examinandae volutae quae in architectura veterum reperiuntur, qualis est Ionica, de qua disputatur, ut ad earum veram constructionem accedatur; idem de aliis architecturae ductibus, columnarumque formis. Iam hac arte examinari possunt figurae physicae, ut motus proiectorum, aliaque innumera; ut figura vera lentium naturalium, quas oculo indidit natura, ubi quidam nescio quid hyperbolicum sibi observare videntur.

51_2. DE CERTO PROBLEMATE GEOMETRICO
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* fragmentarisches Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 2/5 S. auf Bl. 250 v°. Rest der Seite leer. Auf dem übrigen Bogen N. 51_1 u. 51_3.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

4 Adde: s. die Besprechungen von R. Anderson, *Stereometrical propositions*, 1668, und Ders., *Gaging promoted. An appendix to Stereometrical propositions*, 1669, in den *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 39 vom 21. Sept./1. Okt. 1668, S. 785–787 und Bd IV, Nr. 47 vom 10./20. Mai 1669, S. 960.



[*Fig. 1, tlw. Blindzeichnung*]

Datis duabus normis rigidis, altera immobili ABC cuius crus AB horizonti parallelum, alterum crus BC ei perpendiculare, altera vero mobili DEF ex cuius angulo E perpendiculum [EG] mobile, filo dependeat: mobilem ita collocare ut si unum crus DE, rectam AB secet alicubi in L, alterumque crus EF rectam BC secet in M, tunc MB sit ipsi GH distantiae ponderis ex filo EG pendentis ab horizontali GH aequalis.

Manifestum est rectam EG esse constantem ac datam a, de caetero rectam BH appellemus x et EH y, erit $GH = MB = y - a$. Ob triangula similia EGM, LHE, manifestum est esse $LH = \dfrac{ya}{x}$. sive $\dfrac{LH}{a} = \dfrac{y}{x}$.
Cumque nulla alia conditio in problemate praescripta sit patet y et x pro arbitrio sumi posse (Ideo et MB pro arbitrio sumetur, pendet enim ex y, quia $= y - a$.), tantumque

2–4 ABC *(1)* , altera vero mobili DEF, ita ut AB sit horizonti parallela, cuius unum *(a)* latus *(b)* crus *(2)* | cuius . . . perpendiculare *erg.* | , altera vero mobili DEF | ex cuius . . . perpendiculum | EF *ändert Hrsg.* | mobile . . . unum *erg.* | crus *L* 5 secet | alicubi *erg.* | in L, *(1)* alterumque vero *(2)* | tunc *erg. u. gestr.* | alterumque crus *L* 7 f. BH | = HB *erg.*, *streicht Hrsg.* | appellemus *L* 11 (Ideo . . . y − a.) *erg. L*

1 [*Fig. 1*]: In seiner Handzeichnung hat Leibniz zunächst den Punkt e (und die zugehörigen Linien) ganz dicht beim Punkt E gezeichnet; er hat dann aber bemerkt, dass die Zeichnung unübersichtlich wird, und e weiter von E abgerückt.

fieri debere LH ad a ut est y ad x. vel sumtis pro arbitrio punctis M et E. iunctaque EM, inde erectam et perpendicularem ad EM daturam punctum L quaesitum.

Sed quid si aliqua circumstantia addita, nonnihil augeatur problematis difficultas. Nimirum punctum L sumendum esse tale, ut si postea aliud eius loco sumatur ultra citraque, ut distantiae ab L utcunque exiguae, eodemque modo intelligantur ductae le, et em. et $eg = EG$, et $mB = gh$, ut inquam, tunc punctum E sit citra rectam em, et punctum e citra rectam ME, productam si opus est, seu ut recta HE sit minor recta HP. et he minor recta hp. posita p cadere in EM, et P in em, productas si opus est.

51_3. DE INVENIENDA CURVA EX ELEMENTIS SUIS.
Ende 1673

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 250–251. 1 Bog. 2°. 1 1/2 S. und 1 Sp. Durch Kustoden gesicherte Reihenfolge: Bl. 250 r°, Bl. 251 v° unten (ab S. 821 Z. 9), Bl. 251 r° (ab S. 823 Z. 5). Überschrift u. Datum ergänzt. Auf dem übrigen Bogen N. 51_1 u. 51_2.
Cc 2, Nr. 607 tlw.

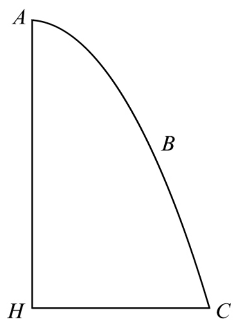
1673 fin.

De invenienda curva cuius data est elementorum progressio, deque aliis circa functiones.

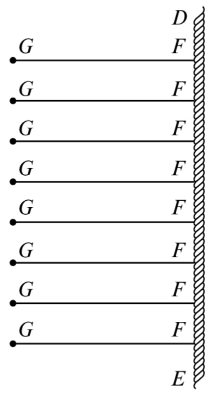
Problema geometriae practicae a me inventum est admirabile. Data specie cuiuslibet figurae planae, curvae aut solidae praeparare instrumentum aliquod sive baculum, sine ullo calculo, cuius ope portio quaedam eiusdem figurae positione data, ac in materia ipsa designata, mensurari, cum alia qualibet comparari, et portio ab ea in data ratione abscindi possit.

Modus hic est. Data specie figura datur utique et aequatio eius, datur ergo et aequatio curvae ei homogeneae, quare et modus describendi curvam ei homogeneam.

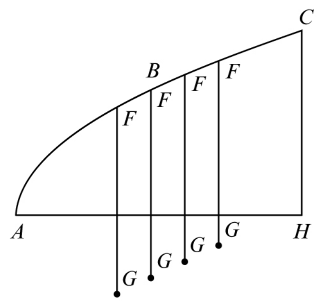
1 f. Vel ... quaesitum. *erg. L* 3 addita *erg. L* 6 mB = gh, *(1)* at *(2)* neque *(3)* | ut inquam, tunc *erg.* | punctum *L* 18 Data *(1)* qualibet curva *(2)* specie *L*



(*fig. 1.*)



(*fig. 2.*)



(*fig. 3.*)

Qua descripta, instrumento ad eam rem apto; ponatur curva homogenea descripta esse ABC.

Esto filum quoddam DE vel chorda praeparata, quae omnibus aeque figuris adhiberi potest, divisa in partes v. g. 1000 aequales, quantum scilicet ad praxin sufficere posse iudicatur. Ex punctis divisionis F. F. exeant totidem baculi rigidi, FG, sed in F chordae filo alligatus quilibet, ut scilicet sint circa eam flexiles.

Haec chorda curvae in tabula descriptae ABC superimponatur, ita ut ei congruat, et ne rursus exeat, collae cuiusdam genere fieri potest, item si curva intelligatur impressa tabulae planae ex materia factae, quae modo mollis modo dura esse potest, in fossae modum.

Tabula plana in eo situ iam locetur, ut planum sit horizonti perpendiculare, et recta AH quaelibet quae scilicet directrix est ad quam omnia curvae puncta referuntur sit horizonti parallela.

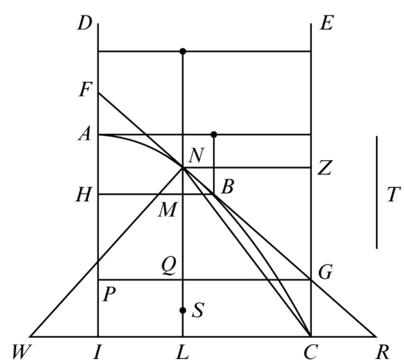
Manifestum est baculos omnes ob gravitatem naturalem fore horizonti perpendiculares et parallelos inter se, atque ita pro ordinatis haberi posse, quibus portiones altitudinis portionibus curvae aequalibus respondentes designentur.

Potest iam alius quidam baculus in usum scilicet figurae ad mensurandum propositae praeparandus applicari in AH, longitudinis quanta est figurae mensurandae altitudo,

2 homogenea *erg. L* 7 f. flexiles. *(1)* Sed omnes infixi sunto baculo alio rigido. Hi eos transverse secant, ut maneant semper *(2)* Haec 10 planae ... factae *erg. L* 12 plana *erg. L*

eidem scilicet axi vel directrici comparatae. Et posito baculum illum ex ipsa applicatione notis quibusdam sive maculis distingui; ita iam instrumentum erit praeparatum. Cuius ope eiusdem figurae abscindi poterunt, quando lubuerit, partes quotlibet maxima certitudine, quod alioquin aut difficillimo calculo, aut incertissima divinatione faciendum esset. Praeparatus semel baculus v. g. pro hyperbola, poterit servire omni hyperbolae simili, ope instrumenti proportionum; vel augentis, ac diminuentis, inprimis si id sit opticum. Sed et poterit alii v. g. hyperbolae licet dissimili adhiberi exiguo calculo adhibito, quo regula statim semel in universum praescribi potest, quomodo baculus pro una figurae eiusdem seu eandem aequationem habentis specie paratus, serviat omnibus.

Explicanda tantum ratio est, inveniendi figuram curvae, cuius elementorum progressio aequatione data est, seu modum illam describendi.



(*fig. 4.*)

Quod ut fiat inspice figuram 4. ubi curva ABC et duae quaelibet parallelae DA, EC. curvae occurrentes, et quaelibet curvae tangens producatur utrinque dum occurrat utrique, ut FBG tangens curvam in B.

Aio figuram, cuius ordinatae sint omnes FG, ad FAI, applicatae in locis H, ubi perpendiculariter ordinatae respondentes HB applicatae sint, esse curvae datae homogeneam, et syntomon, seu aequisecabilem.

At dato loco omnium FG invenire curvam ABC non paulo difficilior quaestio est, pertinetque ad magna illa problemata de invenienda curva ex datis functionum locis.

Imo erravi, FG applicanda non in H, sed in L. Nam ob triangula similia FPG, et NMB. erit PG in NB aequalis FG in MB. Et cum PG sit semper eadem, erit superficies cylindrica, cuius basis ABC, altitudo $PG = IC$ aequalis figurae omnium FG perpendiculariter applicatarum in L.

Ex his patet data curva ABC non esse difficile invenire figuram seu locum omnium FG. At contra data figura invenire curvam, patet problema esse satis difficile.

Esto e. g. FG ordinata parabolae, $\dfrac{y^2}{a}$. PG esto a. Patet MB posita $= 1$. fore $LC = QG$. applicatam trianguli, atque ideo notam, ac proinde cum sit $\dfrac{FG}{NB} = \dfrac{PG}{MB}$, fore

$$NB = \frac{MB \frown FG}{PG} = \frac{1 \frown \dfrac{y^2}{a}}{a} = \frac{y^2}{a^2}.$$

Eodem modo et NG facile habetur, quoniam $\dfrac{NG}{QG} = \dfrac{FG}{PG}$. vel

$$NG = \frac{FG \frown QG}{PG} = \frac{y^3}{a^2}.$$

posita $QG = LC$ abscissa, $= y$.

Habita iam NG et QG utique habetur NQ ob angulum NQG rectum. Deest tantum recta $QL = GC$.

Porro cum detur $NG = BG$. dabitur et FB, ac proinde et $HB = IL = a - y$. Imo habetur et FH.

Iam ut NL inveniamus fiat $LM = x$ ad $LR = l$, ut est $x + NM$ ad $l + MB = 1$. Ipsam NM, quippe notam vocabo γ, erit $\dfrac{x+\gamma}{l+1} = \dfrac{x}{l}$.

Ergo $\dfrac{x}{l+1} = \dfrac{x}{l} - \dfrac{\gamma}{l+1}$, seu $\dfrac{\gamma}{l+1} = \dfrac{x}{l} - \dfrac{x}{l+1}$, seu $x = \dfrac{\gamma}{l+1}$.

Caeterum cum reliqua problematis solutio difficillima sit, et ex analysi indivisibilium pendeat, eam hoc loco absolvere inutile est, cum alibi methodum exposuerim generalem, problemata eiusmodi de c u r v a r u m f u n c t i o n i b u s , absolvendi.

5 esto a. *(1)* NB appelletur y. et MB vocetur β. *(2)* Patet *L* 13 f. Imo ... FH. *erg. L*

17 seu: genauer müsste es $x = \gamma l$ heißen. 20 de c u r v a r u m f u n c t i o n i b u s : Anspielung auf N. 40.

Unum tantum annotandum est[:] data descriptione curvae ABC dari semper quadraturam omnium NQ. aequantur enim triangulo CNL duplicato cum summa omnium CG vel LQ segmento $NBCN$ duplicato aequetur.

Posito FG esse applicatam hyperbolae $= \sqrt{4x^2+a^2}$ curva ABC erit parabolica. $NG = \dfrac{\sqrt{4y^2+a^2} \frown y}{a} = \dfrac{\sqrt{4y^3+a^2y^2}}{a}$. *(!)* addatur eius $\square = \dfrac{4y^3+a^2y^2}{a^2}$ ad y^2, fiet $\sqrt{\dfrac{4y^3}{a}+2y^2} = NQ$. Figura ergo cuius haec aequatio est, quadrari potest.

Eadem methodo credo investigari posse quadraturam aliorum paraboloeidum aequationis compositae ut $\sqrt{\dfrac{y^4}{a^2}+\dfrac{y^3}{a}} = x$. unde fit $\dfrac{y^4}{a^2}+\dfrac{y^3}{a} = x^2$. sive $x^2a^2 = y^4+y^3a$.

Fig. 4.

$IL = x$. $NQ = n$. $NL = y$. $QL = y-n$. eiusque dimidium $SL = SQ = \dfrac{y-n}{2}$, et $SN = n+\dfrac{y-n}{2} = \dfrac{n+y}{2} = SQ+QN$.

Iam facta $\dfrac{x\underset{\cdot\cdot}{y}+\beta\underset{\cdot\cdot}{y}}{\cancel{2}} - \dfrac{xy}{\cancel{2}} = \dfrac{y+n}{\cancel{2}}$ vel $\underset{\cdot\cdot}{y} \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{x+\beta}{1} = y \frown \genfrac{}{}{0pt}{}{x+1}{\beta} + n$. Ergo $\underset{\cdot\cdot}{y} - y = \dfrac{n}{x+1}$.

Quod et ex figura patet quia $\dfrac{GQ = CL}{QN} = \dfrac{BM = 1 = \beta}{MN = \underset{\cdot\cdot}{y} - y}$. Ergo $\underset{\cdot\cdot}{y} - y = \dfrac{n = QN \frown 1}{CL = x}$.

Unde iam theorema memorabile ducimus: ipsam n per abscissam divisam dare differentias applicatarum, ac proinde figuram omnem cui homogeneae sunt n per abscissas x divisae, esse quadrabilem. Ergo hac methodo rursus tot habentur novae quadraturae quot sunt figurae datae, seu quot sunt variae NQ.

2 duplicato *erg. L* 12 facta *(1)* ny *(2)* $\frac{\mathrm{xy}}{2}$ *(3)* $\frac{\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{x}}\ \underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}}{2}$ – *(4)* $\frac{\mathrm{x}\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}+\beta\underset{\cdot\cdot}{\mathrm{y}}}{\cancel{2}}$ *L* 13 Quod ... $\frac{\mathrm{n = QN} \frown 1}{\mathrm{CL = x}}$. *erg. L*

1 annotandum est: von dem Dreieck CNL ist noch ein Segment $NBCN$ abzuziehen. 6 NQ: bei konsequenter Rechnung würde sich $\frac{2}{a}y^2$ ergeben. 12 Iam facta: $\underset{\cdot\cdot}{y}$ bezeichnet den Funktionswert an der Stelle $x+dx$.

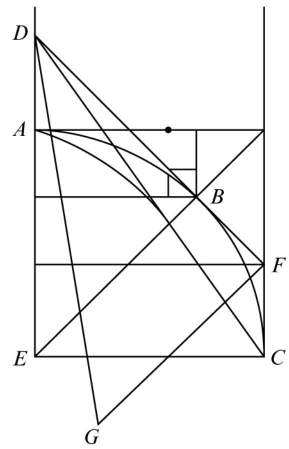
Quod si figura reperiri posset, cuius n, esset a. seu recta quaedam constans, haberetur quadratura hyperbolae, forent enim differentiae $\dfrac{a}{x}$. Quare ad veram hyperbolae quadraturam habendam solvendum est hoc problema:
figuram reperire eius naturae, ut si ex puncto aliquo C in axe CI sumto perpendicularis erigatur CE, et ex quolibet puncto in curva sumto ducatur tum NL ordinata ad axem ipsi CE parallela, tum tangens NG quae rectae CE occurrat in G, et inde abscindat rectam GC, cui si aequalis sumatur ordinatae portio QL, residua NQ sit semper aequalis uni eidemque rectae datae T.
Hoc problema certe videtur facilius, videtur saltem, quam si ita proponeretur, quadrare hyperbolam, aut figuram invenire, cuius applicatarum differentiae sint homogeneae applicatis spatii hyperbolici ad asymptoton, vel figuram invenire, in qua producta sit ad applicatam ut recta quaedam constans ad applicatam ad hyperbolae asymptoton.

Eadem methodo procedendum est in aliis figuris quae ad quadrandum proponuntur. Nimirum figura generalis eousque ductis lineis transformanda est, donec lineae quaedam ducantur, et in triangulum characteristicum simile ingrediuntur, aut si non lineae, rectangula, cubi, etc. ex quibus applicatae figurae propositae facile nascantur, ut hoc loco x. unde tantum figura quaeritur in qua NQ sit a.

$$\frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}}=y.\ \text{Ergo}\ \frac{a^4}{a^2+x^2}=-y^2.\ \text{Ergo}\ a^4 \underset{-}{=} a^2y^2 \underset{=}{+} x^2y^2.\ \text{Ergo}\ \frac{a^4}{y^2}+a^2=x^2.$$

1 cuius *(1)* segmenta *(2)* n, esset *(a)* hyperbola cubica: *(b)* a. seu *L* 4 naturae, *(1)* ut sumto in axe eius *(a)* utcunque producto RI, puncto C, ex quo *(b)* CI, puncto C, ubi curva axem attingit, *(2)* ut si ex CI *(3)* ut si ex puncto C in axe CI sumto, ubi curva CNA axem CI attingit *(4)* ut *L* 5 sumto *(1)* tangens ducatur quae *(2)* ducatur *L* 18 | $\left.\dfrac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}\right|$ *streicht Hrsg.* | $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{x}^2}}$ *L* 18 $=\mathrm{x}^2$ | $=\mathrm{a}^4+\mathrm{a}^2 \frown \mathrm{y}^2+\dfrac{\mathrm{y}^4}{4}=$ *gestr.* | *L*

18 Die analytische Beziehung in Z. 18 ist mit einem Vorzeichenfehler behaftet; ihr geometrisches Pendant hingegen ist korrekt und gilt unabhängig von dem in der Figur gezeichneten Spezialfall allgemein. — Die Betrachtung wird nicht weiter fortgesetzt, dadurch bleiben einige Elemente der Figur unerklärt.



(*fig. 5.*)

Ergo si in figura 5. adiecta sit ABC quadrans circuli, et ad punctum B tangens BD. secans ED. et EC radius, vel EB, vel EA. iuncta DC erit x. et quia $DF = ED$. posito $FG =$ et parallela ad EB erit $DG = DC = x$.

Adde pag. versae finem ibique inspice fig. 4.

Ut iam problema illud de differentiis hyperbolae homogeneis solvere saltem tentemus, esto $NQ = a$. $CL = GQ = x$. $NL = y$. $GC = QL = y - a$. Et quia $\frac{GQ}{NQ}$ seu $\frac{x}{a} = \frac{LR = p}{NL = y}$. erit $p = \frac{yx}{a} = LR$. Ductaque ex curva perpendiculari NW [esto LW] $= e$. Quoniam $NL = y$. media proportionalis inter p et e, fiet $\frac{y^2}{p} = e = \frac{y^2}{\frac{yx}{a}} = \frac{ya}{x}$.

et $WN = w = \sqrt{NL^2 + LW^2} = \sqrt{e^2 + y^2} = \sqrt{\frac{y^2a^2}{x^2} + y^2}$.

et $w^2 = \frac{y^2a^2}{x^2} + y^2$. vel $w^2x^2 = y^2a^2 + y^2x^2$, vel $w^2x^2 - y^2 \begin{matrix} a^2 \\ x^2 \end{matrix} = 0$.

in qua aequatione duae sunt verae radices aequales. Sed duae sunt quoque quantitates

1–4 fig. 5 *sowie* Ergo si . . . = x. *erg. L*   8 esto LW *erg. Hrsg.*   12 verae *gestr. u. wieder erg. L* incognitae vel indeterminatae, nec altera in alterius locum substitui potest, cum aequatio illa, quae relationem ipsius x ad y exprimat, quaeratur.

$$\frac{\overset{ZN^2}{x^2}\;\overset{NM}{\dfrac{a}{\wp}}}{2} = \frac{xa}{2}.$$ quae si applicata ad ipsam unitatem constructionis intelligantur, fiet $\dfrac{x^2}{2}\;\dfrac{a}{2} = \dfrac{ax^2}{4}$ momentum trianguli $CBNZC$ ex CZ. Momentum vero rectanguli $CLNZ$, fiet $\dfrac{x^2y}{2}$. posita $\wp$ maxima $= CL$. a qua si auferatur momentum figurae ipsius $CLNBC$ restabit utique momentum trilinei quod supra. Momentum autem figurae habebitur, ductis $NL = y$, in x, fiet $\overset{CL^2y}{x^2y}$ – summa omnium $\overset{\wp\ \text{variab.}\ y}{xy} = \overset{aCL^2}{\dfrac{ax^2}{4}}$.

At figuram talem invenire difficillimum haud dubie problema est, non minus quam propositum, quodque etiam pendet ex hyperbolae quadratura. Et memorabilia sunt eiusmodi problemata, quoniam iis similia nunquam hactenus proposita sunt.

Sed si y per suum valorem exprimamus, vereor ne aequatio fiat eiusdem cum eodem, tentandum tamen[:]

$y = \dfrac{y-a}{2}+$ differentia inter $\dfrac{xy}{2}$ et $\dfrac{\ddot{x}y - \ddot{y}}{2}$ per x seu $\dfrac{yx - ax + x^2y - x^2\ddot{y} + x\ddot{y}}{2}$. Ergo

$$\frac{ax^2}{4} - x^2\;y = \text{summa omnium}\ \underbrace{yx - ax + x^2y - x^2\ddot{y} + x\ddot{y}}_{2xy-ax}\ .$$

Atque ita habemus problemata quae in quadraturis fundantur, seu quae magnitudine quorundam spatiorum locum determinant, uti communia magnitudine rectarum.

Differentiae in abscissas ductae, conflant spatium ut $NZCBN$. Id ergo spatium hoc loco aequatur a in CL ducto, cum rectangulum QMB (quia QN et QM non differunt)

3 ZN² NM *erg. L* 6 posita $\wp$ maxima = CL. *erg. L* 8 CL² y; $\wp$ variab. y; a CL² *erg. L*

4 $\wp$ ist die laufende Variable mit der oberen Grenze x. 14 f. Ergo: bei konsequentem Rechnen müssten die Vorzeichen auf der linken Seite vertauscht werden. x und y bezeichnen hier die oberen Grenzen.

aequetur rectangulo ZNM. Ergo ipsa ZC in partes aequales infinitas divisa, natura figurae complementi haec est, ut area eius semper aequetur rectae datae $a = NQ = 1$, in applicatam ZN ductae.

$$\frac{a}{a} + b = ba, \text{ vel } a + ba = ba^2, \text{ vel } 1 + b = b,$$
$$\text{vel } 1 = ba - b, \text{ vel } b = \frac{1}{a-1}.$$

Ergo terminus huius seriei primus est (1). secundus $\left(\frac{1}{a-1}\right)$. tertius c, et erit $1 + \frac{1}{a-1} + c = ca$. $1 + \frac{1}{a-1} = ca - c$. Ergo

$$\frac{1 + \frac{1}{a-1}}{a-1} = c.$$

Fit ergo series applicatarum haec:

$$1 \quad \boxed{\frac{1}{a}} \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{1}{a^2}} \quad \boxed{\frac{1}{a} + \frac{2}{a^2} + \frac{1}{a^3}}$$

Nam pro $a - 1$ puto substitui tuto posse a simpliciter, repetitis semper prioribus omnibus et per a divisis.
Imo male.

1 ZNM. *(1)* applicatae ergo complementi huius NZCBN, ipsi ZC parallelae, seu complementa ipsarum NL ad basin, sunt: differentiae inter duo ax proxima, ea autem *(a)* est ax + a − ax *(b)* est a si sci *(2)* Ergo *L* 2 complementi *erg. L*

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit der betreffenden Stücknummer genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Diese Nummerneintragungen sind zur Unterscheidung von den Seitenangaben mit einem Stern versehen. Im übrigen wird nach Seiten zitiert. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur genannt, wenn sie stärker voneinander abweichen. Kursivdruck weist auf den Petitteil hin.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur; es ist zweigeteilt. Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, sind einschließlich ihrer modernen Ausgaben im ersten Teil verzeichnet. Neuere Literatur erscheint im zweiten Teil. Unter LEIBNIZ wird neben seinen eigenen Schriften zusätzlich die für diesen Band relevante Leibniz-Korrespondenz erfasst. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern ausgezeichnet sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einen bestimmten Titel zuzuordnen ist. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf den Petitteil hin.

SCHRIFTEN DER LEIBNIZZEIT

1. *A c t a Eruditorum*. Leipzig 1682 ff.: Jan. 1705: S. *5*.
2. ANDERSON, R.
   1. *Stereometrical propositions*. London 1668: S. *815*.
   Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III Nr. 39 vom 21. Sept./1. Okt. 1668 S. 785 bis 787: S. 815.
   2. *Gaging promoted*. An appendix to stereometrical propositions. London 1669: S. *815*.
   Rez.: *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 47 vom 10./20. Mai 1669, S. 960: S. 815.
3. ANGELI, St. degli, *De infinitorum spiralium spatiorum mensura, opusculum geometricum*. Venedig 1660: S. *574*.
4. APOLLONIUS v. Perga, *Conica*: S. 50. 726.
5. ARCHIMEDES
   1. *De lineis spiralibus*: S. *217*. *221*.
   2. *Dimensio circuli*: S. *189*. *334*.
   3. *Quadratura parabolae*: S. *336*.
6. AYNSCOM, Fr.-X., *Expositio ac deductio geometrica quadraturarum circuli R. P. Gregorii a S. Vincentio*. Antwerpen 1656: S. 549. *550*.

– BARTHOLINUS, E. [Hrsg.] s. SV. N. 16,2.

7. BROUNCKER, W., *The squaring of the hyperbola, by an infinite series of rational numbers, together with its demonstration*. In: *Philosophical Transactions*, Bd III Nr. 34 vom 23. April/3. Mai 1668, S. 645–649: S. *596*.
8. CARDINAEL, S. H., *Hondert geometrische questien met hare solutien*. Amsterdam [1612]: S. 229.
9. CAVALIERI, B.
   1. *Directorium generale uranometricum*. Bologna 1632: S. 229.
   2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647: S. *60*.

– CLERSELIER, Cl. de [Hrsg.] s. SV. N. 11,2.

10. DEBEAUNE, Fl., *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. E. Bartholinus. In: SV. N. 16,2 Tl II S. 49–152: S. *733*.

– DEPREZ, G. [Hrsg.] s. SV. N. 33,9.

11. DESCARTES, R.
   1. *La géometrie*. Leiden 1637 u. ö. [auch in *DO* VI S. 367–485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria* hrsg. von Fr. v. Schooten in SV. N. 16,1 S. 1–118; 2. Ausg. in SV. N. 16,2 Tl I S. 1–106

[Marg.]: S. *307*. 415. 585. 595. 701. *706*. *711*. *712*. 714. 722.

2. *Lettres*. [Hrsg. Cl. de Clerselier]. 3 Bde. Paris 1657–67; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae*. Amsterdam 1668–82: S. *595*.

– Dettonville, A. [Pseud.] s. Pascal.

12. Euklid, *Elemente*: S. 88. 191. 597. 619.

13. Fabri, H.,
1. *Opusculum geometricum de linea sinuum et cycloide, auctore Antimo Farbio* [Honoré Fabri]. Rom 1659: S. 16. 103. *183*. *222*.
2. *Synopsis optica*. Lyon 1667 [Marg.]: S. 440.
3. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum; De linea sinuum et cycloide; De maximis et minimis, centuria; et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: N. 1*. S. *60 f*. 89. 103. *109*. *167*. *170*. *183*. *222*. *291*. *348*. 570. 726.

14. Faille, J.-Ch. de la, *Theoremata de centro gravitatis partium circuli et ellipsis*. Antwerpen 1632: S. 52.

15. Galilei, G., *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638; Nachdr.: Brüssel 1966; [auch in *GO* VIII S. 39–318 u. *GO* I S. 187 bis 208]: S. *105*.

16. *Geometria*
1. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune ... in linguam latinam versa et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten. Leiden 1649. [Darin: Descartes, R., SV. N. 11,1; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 119–161; Schooten, Fr. v., SV. N. 40,1; Ders., *Additamentum*. S. 295 bis 336.]
2. *Geometria*, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, postea autem una cum notis Florimondi de Beaune ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten ... Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus ... exornata. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]: S. 532. *584*. *585*. [In Tl I: Descartes, R., SV. N. 11,1; Debeaune, Fl., *In geometriam Renati des Cartes notae breves*, S. 107–142; Schooten, Fr. v., SV. N. 40,1; Ders., *Appendix de cubicarum aequationum resolutione*. 2. Aufl., S. 345–368; Hudde, J., SV. N. 21; Heuraet, H. v., SV. N. 19. In Tl II: Schooten, Fr. v., *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati des Cartes*. Hrsg. E. Bartholinus. 2. Aufl., S. 1–48; Ders., SV. N. 40,2; Debeaune, Fl., SV. N. 10; Witt, J. de, SV. N. 46.]

– Gregorius, a S. Vincentio s. Saint-Vincent.

17. Gregory, J.
1. *Vera circuli et hyperbolae quadratura*. Padua 1667; Nachdr. ebd. 1668 [Marg.]: S. *260*.
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 33 vom 16./26. März 1667/68, S. 641 bis 644: S. *229*.
2. *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *325*.
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III, Nr. 35 vom 18./28. Mai 1668, S. 685–688: S. *325*.
3. *Exercitationes geometricae*. London 1668 [Marg.]: S. *14*. *48*. 92. *259*. *260*. *338*. 340. *402*. 417.

18. Guldin, P., [Centrobaryca.] *De centro gravitatis trium specierum quantitatis continuae* [libri IV]. 2 Bde. Wien 1635–1641: S. *106*. *160*. *272*. *333*.

19. Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In SV. N. 16,2 Tl I S. 517–520 [Marg.]: S. *337*. *795*.

20. Hobbes, T., *Opera philosophica*. Amsterdam 1668: S. *58*.

21. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 16,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. *585*. *706*.

22. Huygens, Chr.
1. *Theoremata de quadratura hyperboles, ellipsis et circuli ex dato portionum gravitatis centro, quibus subiuncta est ἐξέτασις cyclometriae cl. viri Gregorii a S. Vincentio*. Leiden 1651; [auch in *HO* XI S. 281–337]: S. *340*. *673*.
2. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654; [auch in *HO* XII S. 113–181]: S. 14.
3. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; Nachdr. London 1966; [auch in *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: N. 2*. 9^*_1. 11*. S. *73*. *75*. 77. 107. *108*. 145. *158*. *209*. *211*. 213. 215. 220. 223. *337*. *338*. *436*. 509. *515*. *519*. *530*. *539*. *595*. 615. *623*. *672*. *718*.

23. Kinner, G. A. von Löwenthurn, *Elucidatio geometrica problematis Austriaci*. Prag 1653: S. *549*.

24. Leibniz, G. W.
S c h r i f t e n :
1. *Vorarbeiten zur Theoria motus abstracti*. Erste Fassung. Frühjahr 1670 – Winter 1670/71(?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 2 N. 38_5 S. 176–186]: S. *57*.
2. *Aus und zu Galileis Discorsi*. Herbst 1672 bis Winter 1672/73. Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 11 S. 163–168]: S. *105*.
3. *Trigonometria*. Ende 1672 – Anfang 1673(?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 2 S. 4]: S. *409*.
4. *Data basi, altitudine et summa laterum invenire triangulum*. Ende 1672 – Anfang 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 4 S. 31–36]: S. *19*.
5. *Mathematica*. Ende 1672 – Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 106 S. 653–674]: S. *14*. *19*. *89*.
6. *De figuris similibus*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_1 S. 60–70]: S. *90*.
7. *De sectore circuli*. Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 6_4 S. 79–83]: S. *83*.
8. *De progressionibus intervallorum tangentium a vertice*. April – Mai 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 17 S. 202–227]: S. *89*. *421*.
9. *De geometria seu potius algebra mechanica*. Frühjahr – Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 8 S. 104–108]: S. *19*.
10. *Characteristica geometrica. De lineis et angulis*. Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 1 N. 9 S. 104–119]: S. *5*.
11. *De arithmetica infinitorum perficienda*. Frühjahr – Sommer 1673 (?). Ms. [Gedr.: *LSB* VI, 3 N. 41 S. 407–409]: S. *678*.
12. *De locis intersectionum opa serierum*. Spätes Frühjahr–Sommer 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 20 S. 249 f.]: S. *719*.
13. *De methodi quadraturarum usu in seriebus*. Aug. – Sept. 1673. Ms. [Gedr: *LSB* VII, 3 N. 21 S. 251–254]: S. *814*.
14. *Progressionis harmonicae differentiae*, Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 22 S. 255–263]: S. *762*.
15. *Progressio figurae segmentorum circuli aut ei sygnotae*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 23 S. 264–270]: S. *720*. *800*.
16. *De serie differentiae inter segmentum quadrantis et eius fulcrum*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 24 S. 271–281]: S. *773*.
17. *De appropinquatione circuli per seriem I*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 26 S. 300–314]: S. *770*.
18. *De serierum summis et de quadraturis pars nona*. Oktober 1674. Ms. [Gedr.: *LSB* VII, 3 N. 38_{11} S. 475–483]: S. *770*.
19. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae cuius corollarium est trigonometria sine tabulis*. Ende 1675 – Herbst 1676. Ms. Hrsg. E. Knobloch. Göttingen 1993 [= Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse. Dritte Folge N. 43]: S. *574*.
20. *Isaaci Newtoni tractatus duo, de speciebus et magnitudine figurarum curvilinearum*. In: *Acta Eruditorum*, Jan. 1705. S. 30–36: S. *3*.

B r i e f e :

21. Leibniz an Fogel, 24. Jan. 1671. [Gedr.: *LSB* II, 1 N. 38 S. 77–78 (1. Aufl.), S. 126–128 (2. Aufl.)]: S. *57*.

22. Oldenburg an Leibniz, Sendung vom 20. April 1673; Auszug von Leibniz, Frühjahr 1675. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 1 N. 13 S. 49 bis 79; ohne Auszug mit engl. Übers. in *OC* IX S. 549–570]: S. *267*. *493*. *814*.

23. Leibniz für Huygens (?), Sommer 1674. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 29 S. 114–117]: S. *346*. *594*. *672*. *718*.

24. Leibniz an Oldenburg, 15. Juli 1674. [Gedr.: u. a. in: *LSB* III, 1 N. 30 S. 118–121, mit engl. Übers. in: *OC* XI S. 42–47]: S. *346*. *672*.

25. Leibniz für Huygens, Okt. 1674. [Gedr.: *LSB* III, 1 N. 39 S. 141–169]: S. *592*.

26. Leibniz an Tschirnhaus, Ende Dez. 1679. [Gedr. u. a. in: *LSB* III, 2 N. 372 S. 921–941]: S. *711*.

27. Leibniz an Jacob Bernoulli, April 1703. [Gedr.: *LMG* III S. 66–73]: S. *711*.

28. Leibniz an Conti, 9. April 1716. [Gedr. u. a. in: *LBG* S. 274–282]: S. *725*.

25. Leotaud, V., *Examen circuli quadraturae*. Lyon 1654: S. *229*.

26. Magini, G. A., *Primum mobile duodecim libris contentum … ac praeterea magnus trigonometricus Canon … ac magna primi mobilis Tabula*. Bologna 1609: S. *176*. *229*.

27. Mercator, N., *Logarithmotechnia … Huic etiam iungitur M. A. Riccii Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. London 1668 [Marg.]; Nachdr.: Hildesheim 1975: N. 3_1^*. S. *595*.
Rez. s. SV. N. 45,3.

28. Mersenne, M., *Novarum observationum physico-mathematicarum tomus III.* Paris 1647: S. *51*. *549*.

29. Meynier, H. de, *Les nouvelles inventions de fortifier les places*. Paris 1626: S. *548*.

30. Monconys, B., *Journal des voyages*. Hrsg. G. de Monconys sieur de Liergues. 3 Tle. Lyon 1665–1666: S. *167*.

– Monconys, G. de [Hrsg.] s. SV. N. 30.

31. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum sive conicorum operis … libri primus et secundus*. Paris 1631. — *Libri quatuor priores*. ebd. 1639 u. ö.: S. *519*.

32. Nonancourt, Fr. de, *Euclides logisticus*. Löwen 1652 [Marg.]: S. *549*.

33. Pascal, Bl.
1. [Anonym] *Histoire de la roulette*. [Paris 1658]; lat. Fassung u. d. T. *Historia trochoidis*. [Paris] 1658; [auch in *PO* VIII S. 181–223]: S. 137.
2. *Lettres de A. Dettonville* [Bl. Pascal] *contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*. Paris 1658–59; Nachdr. London 1966; [auch in *PO* Bde VIII-IX]: S. *366*. *597*.
3. *Lettre à Monsieur de Carcavy*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* VIII S. 325–384]: N. 10_1^*. S. *96*. *145*. *146*. *156*. *209*. *287*. *322*.
4. *Traité des trilignes rectangles et de leurs onglets*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 3–45]: N. 19*. S. *96*. *155*. 210. 211. *334*.
5. *Propriétez des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 46–59]: S. *187*.
6. *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 60–104]: N. 10_2^*. 12*. S. 112. *115*. *210*. *222*. 397. *583*.
7. *Traité général, de la roulette*. In SV. N. 33,2; [auch in *PO* IX S. 116–133]: S. *147*. 397.
8. *Lettre à Monsieur Hugguens de Zulichem*. In SV. Nr. 33,2; [auch in *PO* IX S. 187–201]: S. 534.
9. *Traité du triangle arithmétique avec quelques autres petits traitez sur la mesme matière*. Hrsg. G. Deprez. Paris 1665 [Marg.]; [auch in *PO* III S. 433–593, 341–367, 311 bis 339]: S. 632.

34. Pell, J., *Controversiae de vera circuli mensura anno 1644 exortae inter Christianum*

Severini, Longomontanum ... et Ioannem Pellium ... pars prima [mehr nicht ersch.]. Amsterdam 1647: S. *394*.

35. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.:
— 16./26. März 1667/1668: S. *229.*
— 23. April/3. Mai 1668: S. *596.*
— 18./28. Mai 1668: S. *325.*
— 17./27. August 1668: S. 271. 304. *337.*
— 21. Sept./1. Okt. 1668: S. 815.
— 11./21. Jan. 1668/1669: S. *279.*
— 25. März/4. April 1669: S. *91*. 271.
— 10./20. Mai 1669: S. 815.
— 25. März/4. April 1672: S. *661.*
— 14./24. Oktober 1672: S. *278. 337.*
— 20./30. Januar 1672/1673: S. *70. 706.*
— 23. Juni/3. Juli 1673: S. *706.*

36. Proclus, D., *In primum Euclidis elementorum librum commentarii*: S. 607.

37. Ricci, M., *Exercitatio geometrica de maximis et minimis*. Rom 1666. Nachdr. zus. mit N. Mercator, *Logarithmotechnia*. London 1668 [Marg.] u. Hildesheim 1975: N. 3_2^*.

38. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647 [Marg.]: S. *162. 229. 325. 329. 337. 548–550. 702.*

39. Sarasa, A. A. de, *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno Minimo propositi*. Antwerpen 1649 [Marg.]: S. *51. 548. 549. 581. 622.*

40. Schooten, Fr. v.
1. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 16,1 S. 162–294. 2. Aufl. in SV. N. 16,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *307.* 415. 504. *509.* 532. 585. *706. 711. 726.* 774.
2. *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten. In SV. N. 16,2 Tl II S. 341–420: S. *394.*
3. [Hrsg.] s. SV. N. 16,1; 16,2; 46.

– Schooten, P. v. [Hrsg.] s. SV. N. 40,2.

41. Sluse, R. Fr. W. de
1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659. 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. 91. 271.
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd IV Nr. 45 vom 25. März/4. April 1669, S. 903 bis 909: S. *91.* 271.
2. *An extract of a letter from the excellent Renatus Franciscus Slusius ... to the publisher ... concerning his new and easie method of drawing tangents to all geometrical curves*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII Nr. 90 vom 20./30. Jan. 1672/1673 S. 5143–5147; Nachtrag *a. a. O.* Bd VIII Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673 S. 6059: N. 6*. S. *706.*

42. Statius, P. Papinius, *Thebais*: S. *203.*

– Sybrandt, Hansz. s. Cardinael.

43. Tacquet, A., *Opera mathematica*. Antwerpen 1669 u. 1707: S. *279.*
Rez.: *Philosophical Transactions* Bd III N. 43 vom 11./21. Jan. 1668/69, S. 869–876: S. *279.*

44. Torricelli, Ev., *De dimensione parabolae*. In: *Opera geometrica*. Florenz 1644. Tl II S. 17–84; [auch in *TO* I, 1 S. 102–162]: S. *336.* 337.

45. Wallis, J.
1. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: *Operum mathematicorum pars altera*; [auch in *WO* I S. 355–478]: S. *550. 574. 632.*
2. *Tractatus duo, prior de cycloide ... posterior ... de cissoide*. Oxford 1659 [Marg.]; [auch in *WO* I S. 489–569]: S. *360.*
3. *Logarithmotechnia Nicolai Mercatoris: discoursed of in a letter ... to the Lord Viscount Brouncker ...* In: *Philosophical Transactions* Bd 3 N. 38 vom 17./27. Aug. 1668, S. 753–759: S. *337.*
4. *Mechanica: sive de motu, tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–1671; [auch in *WO* I S. 570–1063]: S. *61. 360.* 574. *575. 621. 632. 736.*
5. *Epitome binae methodi tangentium*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII N. 81 vom 25. März/4. April 1672, S. 4010–4016: S. *360.*

661.

6. *Nonnulla de centro gravitatis hyperbolae*. In: *Philosophical Transactions* Bd VII N. 87 vom 14./24. Okt. 1672, S. 5074 f.; [auch in *WO* I S. 928 f.]: S. *278. 337.*

46. WITT, J. de, *Elementa curvarum linearum*. Hrsg. Fr. v. Schooten. In: SV. N. 16,2 Tl II S. 153–340: S. *502. 741.* 744. *745.*

47. Child, J. M., *The early mathematical manuscripts of Leibniz*. Chicago u. London 1920: S. *114.*

48. Fellmann, E. A., *Die mathematischen Werke von Honoratus Fabry*. In: *Physis* I (1959) S. 5 bis 54: S. *3. 170. 570.*

49. Gerhardt, C. I., *Leibniz und Pascal*. In: *Sitzungsberichte* der Kgl. Preuß. Akademie der Wissenschaften zu Berlin, 1891, S. 1053–1068: S. *114.*

50. Hofmann, J. E., *Leibniz in Paris. 1672–1676. His growth to mathematical maturity*. Cambridge 1974: S. *70. 377. 632. 711.*

51. Knobloch, E., *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672–1676)*. In: *Leibniz à Paris (1672–1676)*. Symposion à Chantilly du 14 au 18 Nov. 1976. Bd I S. 3–43 = *Studia Leibnitiana Supplementa* Bd XVII. Wiesbaden 1978; russ. u. d. T. *Rukopisi Lejbnica 1672–1676 gg.* In: *Istoriko-matematičeskie Issledovanija* 24 (1979) S. 258 bis 309: S. *685.*

52. Mahnke, D., *Neue Einblicke in die Entdeckungsgeschichte der höheren Analysis*. In: *Abhandlungen* der Preuß. Akademie der Wissenschaften. Phys.-math. Klasse, Jahrgang 1925, Nr. 1. Berlin 1926: S. *115. 358. 495. 620. 656.*

53. Pasini, E., *La nozione di infinitesimo in Leibniz: tra matematica e metafisica*. Diss. Turin 1985/1986: S. *256.*

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' termini technici erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XVIII–XXII. Deren Reichhaltigkeit und Ausdifferenzierung spielt im vorliegenden Band eine entscheidende Rolle, was bei der Aufnahme von Sachwörtern zu berücksichtigen war. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet. Verzeichnet wird nach Nummern und Seiten, wobei erstere zur besseren Unterscheidung zusätzlich mit einem Stern versehen sind. Nummernangaben erfolgen dann, wenn ein ganzes Stück einem bestimmten Sachwort zuzuordnen ist. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER, *Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 35	II 1	Bl. 89–90	N. 42_1	LH 35	II 1	Bl. 321–322	N. 47
		Bl. 93–94	N. 49			Bl. 323–324	N. 22
		Bl. 95–96	N. 39		V 6	Bl. 12–13	N. 45
		Bl. 135–136	N. 38		VIII 2	Bl. 5	N. 18
		Bl. 138–139	N. 39		VIII 3	Bl. 1–8	N. 40
		Bl. 140	N. 39		VIII 30	Bl. 107–108	N. 50
		Bl. 141–143	N. 23			Bl. 150	N. 6
		Bl. 194	N. 33		XII 1	Bl. 13	N. 4
		Bl. 201–204	N. 9			Bl. 38	N. 19
		Bl. 229–232	N. 26			Bl. 180–181	N. 41
		Bl. 239	N. 37			Bl. 266–267	N. 30
		Bl. 242–245	N. 27		XII 2	Bl. 69	N. 24
		Bl. 250–251	N. 39			Bl. 113	N. 8
		Bl. 252–253	N. 16_1			Bl. 125–126	N. 7
		Bl. 254–255	N. 31			Bl. 129–130	N. 5
			N. 32			Bl. 159–160	N. 48
		Bl. 256	N. 36			Bl. 161–162	N. 42_2
		Bl. 261–262	N. 17		XIII 1	Bl. 353–354	N. 29
		Bl. 263–264	N. 34			Bl. 359–360	N. 28
		Bl. 265–266	N. 35			Bl. 379–380	N. 25
		Bl. 267–268	N. 20		XIII 3	Bl. 243	N. 46
			N. 21			Bl. 250–251	N. 28_1
		Bl. 284	N. 43				N. 28_2
			N. 44				N. 28_3
		Bl. 285–290	N. 12		XIV 2	Bl. 70–71	N. 11
			N. 13		XV 1	Bl. 18–23	N. 10
		Bl. 293–296	N. 15	Leibn. Marg.	7,1		N. 1
		Bl. 297–298	N. 16_2	Leibn. Marg.	70		N. 2
		Bl. 299–300	N. 16_3	Ms IV 377			N. 3
		Bl. 301–304	N. 16_4				
		Bl. 312–313	N. 17				
		Bl. 314	N. 14				

Cc-2-Konkordanz

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Die ersten vier hier aufgeführten Stücke werden im *Catalogue critique* 2 nicht erfasst. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass mindestens ein Teil des bezeichneten Stückes in diesem Band nicht abgedruckt ist.

Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.	Cc 2 Nr.	N.
—	1	549	29	608	44	639	5
—	3	550 A, B	20	609	7	641	30
—	25	551	21	610	7	642	19
—	46	552	36	611	7	692	39
500	8	555 B	39	612	34	693	37
542A, B	2	555 C, D	23	613	35	695	22
544	10	559	49	614	44	696	27
545A	14	560	47	616	6	697	26
545B	17	561 tlw.	42_2	617	12	817	4
546	16_1		48	618	13	883	31
547	15	564	9	619	11		32
	16_2	575	40	620	33	905	18
	16_3	607	51_1	625	41	1112	50
	16_4		51_2	635 A, B	39	1233 A tlw.	42_1
	17		51_3	636	24	1237	45
548	28	608	43	638	38	1238	45

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stückes vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

In dem vorliegenden Band wird lediglich auf zwei nicht edierte, inhaltlich zusammengehörige Handschriften Bezug genommen. Es sind dies (nach Cc2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet):

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
563	35 II 1	Bl. 240–241	*725. 762.*
1233 A	35 II 1	Bl. 87–92	*725. 762. 763. 796.*

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

L	Leibniz, eigenhändig
LiH	Leibniz' eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen und Eingriffe des Herausgebers (ursprüngliche Form im Variantenapparat). Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz
$\boxed{\quad\quad\quad}$	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a. a. O.	am angegebenen Ort
Aufl.	Auflage
Ausg.	Ausgabe
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
CJR	Corpus Juris Reconcinnatum (vgl. *LSB* VI, 2 S. XXI f.)
Ders.	Derselbe
ebd.	ebenda
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
ggf.	gegebenenfalls
Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)
Hs.	Handschrift
im Allg.	im Allgemeinen
Jh.	Jahrhundert
LH	HANNOVER, *Niedersächs. Landesbibl.* Leibniz-Handschriften
Marg.	Marginalie(n)

Ms.	Manuskript
N., Nr.	Nummer
Nachdr.	Nachdruck
NB.	nota bene
r°	recto
S.	Seite
s.	siehe
s. a.	siehe auch
s. o.	siehe oben
Sp.	Spalte
s. u.	siehe unten
SV.	Schriftenverzeichnis
s.v.a.	siehe vor allem
Tl(e)	Teil(e)
tlw.	teilweise
u. a.	und andere, unter anderem
u. d. T.	unter dem Titel
Übers.	Übersetzung
u. ö.	und öfter
usf.	und so fort
v.	von, vor
vgl.	vergleiche
v°	verso
Z.	Zeile
zus.	zusammen
♃	destilletur, distilletur

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

Cc 2 *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676).* Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924.

DGS *Geometria, a Renato Descartes anno 1637 gallice edita ... in latinam linguam versa et commentariis illustrata opera atque studio Francisci a Schooten.* 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 16,2).

DO Descartes, R., *Oeuvres.* Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972.

GO Galilei, G., *Opere.* Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929–1939 u. ö.

HO Huygens, Chr., *Oeuvres complètes.* Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

LBG *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LMG *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1962 u. 1971.

LSB Leibniz, G. W., *Sämtliche Schriften und Briefe.* Hrsg. von der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Berlin — Im Erscheinen.

MCW Mersenne, M., *Correspondance.* Hrsg. C. de Waard u. a. 16 Bde. Paris 1931–1986.

OC Oldenburg, H., *The Correspondence.* Hrsg. A. R. Hall u. M. Boas Hall. 13 Bde. Madison [usw.] 1965–1986.

PO Pascal, Bl., *Œuvres.* Hrsg. P. Boutroux u. a. 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

TO Torricelli, E., *Opere.* Hrsg. G. Loria u. G. Vassura. 4 Bde (5 Tle). Faenza 1919–1944.

WO Wallis, J., *Opera mathematica.* 3 Bde. Oxford 1693–1699 [Marg.]; Nachdr.: Hildesheim 1972.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im einzelnen erklärt sind. Bei einigen Zeichen sind zusätzlich die Autoren angegeben, von denen Leibniz sie wahrscheinlich kennengelernt hat. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XXIX–XXXI.
Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. Cajori, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. Cajori, *A history of mathematical notation*, Bd. 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
$\vert$	Kürzung eines Bruches
$\overset{2}{\vert}$	Kürzung durch 2
ʄ	facit
$a \smile b$	Summe (Kolumnen)
$\overset{\frown}{a}$	Differenz (Kolumnen)
$\square$	Quadrat
x^{β}	allgemeine (reelle) Potenz
$\surd$, Rq	Quadratwurzel
Rq, Rqq …	iterierte Quadratwurzel
$\surd(3)$, $\surd c$	Kubikwurzel
$\surd n$, $\surd(n)$	n-te Wurzel
$\sqcap$	gleich
aequ.	gleich
∞	gleich
$\sqcap$	größer als
$\sqcap$	kleiner als
$a : b :: c : d$	geometrische Proportion
$a - c \infty b - d$	arithmetische Proportion
$\bigtriangledown MFB ::$	
$\bigtriangledown^{lo} MAL$	ähnlich
$\circ$	Platzhalter Vorzeichen
$\bullet$	Platzhalter Term
$\Vert$	Zusammenfassung
$x^{\cdot\cdot}$	laufende Variable
	laufende Variable mit oberer Grenze x
$\underset{a}{\underset{\smile}{x}}$	obere Grenze
23	Substitution
$\underset{..}{y}$	Funktionswert an der Stelle $x + dx$
$\underset{\cdot}{D}\underset{\cdot}{X}$	alle DX
$\mathbb{X}$	alle x
a	alle a
Ozanam:	
∞	gleich
$a, b :: c, d$	Proportion