GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

SÄMTLICHE
SCHRIFTEN UND BRIEFE

HERAUSGEGEBEN
VON DER

BERLIN-BRANDENBURGISCHEN
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
UND DER
AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN

SIEBENTE REIHE

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

SIEBENTER BAND

Copyright
Inhaltsverzeichnis

2019

GOTTFRIED WILHELM
LEIBNIZ

MATHEMATISCHE SCHRIFTEN

HERAUSGEGEBEN
VON DER

LEIBNIZ-FORSCHUNGSSTELLE HANNOVER
DER AKADEMIE DER WISSENSCHAFTEN
ZU GÖTTINGEN
BEIM LEIBNIZ-ARCHIV DER
GOTTFRIED WILHELM LEIBNIZ BIBLIOTHEK
HANNOVER

SIEBENTER BAND
1673 – 1676

KURVEN, CONSTRUCTIO AEQUATIONUM,
MÉTHODE DE L'UNIVERSALITÉ

Copyright
Inhaltsverzeichnis

2019

LEITER DES LEIBNIZ-ARCHIVS: MICHAEL KEMPE

BEARBEITER DIESES BANDES
UWE MAYER · SIEGMUND PROBST · ACHIM TRUNK
UNTER MITARBEIT VON REGINA STUBER

INHALTSVERZEICHNIS

VERZEICHNISSE

VORWORT

Der siebente Band von Leibniz' mathematischen Schriften umfasst die Aufzeichnungen und Studien aus den Jahren 1673 bis 1676, die sich mit verschiedenen Themen zu Kurven befassen. Den größten Teil machen Untersuchungen zur geometrischen Lösung algebraischer Gleichungen aus (*constructio aequationum*), darin vor allem Versuche zu einer allgemeinen Lösung des Problems, die kürzeste Linie von einem beliebigen Punkt zu einer Kegelschnittkurve zu finden (*minima ad conicam*). Um die speziellen Lösungen für die verschiedenen Kurven und die Vielzahl der auftretenden Fälle reduzieren zu können, führt Leibniz eine allgemeine Kegelschnittgleichung mit Doppelvorzeichen (*signa ambigua*) und bei Bedarf infinitesimalen Koeffizienten ein und entwickelt eine allgemeine Methode zur Verwendung von Mehrfachvorzeichen (*méthode de l'universalité*). Diese Methode bietet einen innovativen Ansatz, um Probleme der Geometrie in maximaler Allgemeinheit lösen zu können, und stellt eine — wenngleich auch komplizierte — Alternative zu dem später sich entwickelnden Koordinatensystem mit zwei Achsen und negativen Koordinaten dar. Das Exempel dieser Methode mit universalem Anspruch zeigt nicht nur, dass Leibniz der mathematischen Notation eine große Bedeutung beimisst, sondern liefert zugleich auch ein anschauliches Beispiel für das Leibniz'sche Programm universaler Zeichenbildung im Rahmen einer *ars characteristica*, womit sich von hier aus der Bogen von der Mathematik zur Philosophie schlagen lässt. Weitere Themen sind Studien zu Kegelschnitten, darunter Exzerpte von 1676 aus den Handschriften von Pascal, und Überlegungen zu Koordinatentransformationen. Hinzu kommen Untersuchungen zu speziellen Kurven und zur Konstruktion transzendenter Kurven sowie Aufzeichnungen von Gesprächen mit Ozanam, Roberval und Tschirnhaus. Von den 72 Texten des Bandes waren nur neun bisher ganz oder teilweise im Druck zugänglich, insgesamt weniger als ein Fünftel des Umfangs.

Dr. Uwe Mayer (bis Juni 2013) bearbeitete die Stücke N. 16, 43, 49_1, 49_3, 62–65, 72, Dr. Achim Trunk (seit November 2013) die Stücke N. 2, 7–15, 17, 23–30, 45–47, 56, 57, 59, 61, 66, 67, 69, Dr. Siegmund Probst nach Abschluss der Nachkatalogisierung der mathematischen Manuskripte ab Mai 2014 die übrigen Stücke. Die Schlussredaktion (einschließlich Datierungen, Einleitung und Sachverzeichnis) wurde von Herrn Probst und Herrn Trunk durchgeführt. Die übrigen Verzeichnisse erstellte Dr. Regina Stuber. Herr Mayer hat den Band abschließend durchgesehen.

Unter Verwendung der für einen Teil der Texte vorliegenden Vorarbeiten von Herrn Christopher Ray'onaldo und Frau Jule Schwarzkopf hat Frau Manuela Mirasch-Müller mit Hilfe des Satzprogrammes TEX die Druckvorlagen erstellt, ebenso besorgte sie den Umbruch mit bewährter Kompetenz und Sorgfalt. Ihr sei für diese anspruchsvolle Tätigkeit herzlich gedankt.

Der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen danke ich für die finanzielle Unterstützung unserer Arbeit und der Leitungskommission der Göttinger und der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften für die stete Betreuung der Belange der Editionsstelle.

Der Ltd. Direktorin Frau Anne May und den Mitarbeiterinnen und Mitarbeitern der Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek Hannover ist für die hilfreiche Unterstützung und gute Zusammenarbeit zu danken. Bei der Bearbeitung konnten gelegentlich Transkriptionen von Herrn Prof. Dr. Conrad Müller (Hannover) aus den 30er und 40er Jahren des 20. Jahrhunderts zum Vergleich herangezogen werden. Für Hinweise ist Herrn Dr. Davide Crippa (Paris/Prag) und Herrn Dr. Paolo Rubini von der Berliner Arbeitsstelle der Leibniz-Edition zu danken.

Der Satz des Bandes ist vom Leibniz-Archiv mit Hilfe des von Herrn John Lavagnino und Herrn Dominik Wujastyk entwickelten und von Herrn Prof. Dr. Herbert Breger auf die Leibniz-Ausgabe erweiterten TEX-Makropakets EDMAC erstellt worden. Mein besonderer Dank gilt Herrn Dr. Uwe Mayer für seinen kompetenten und engagierten EDV-Einsatz in der Pflege und Weiterentwicklung des Makropakets sowie der Konzeption neuerer Makropakete. Die Figuren wurden mit den Programmen WINGEOM und WINPLOT von Herrn Richard Parris (Phillips Exeter Academy, Exeter, NH) erstellt und in TEX weiter bearbeitet. Für die sehr gute, unkomplizierte Zusammenarbeit bei der Drucklegung danke ich dem Verlag De Gruyter, namentlich Frau Dr. Serena Pirrotta und Herrn Tim Vogel. Der Verlag hat wieder eine pdf-Datei zum Ausdruck erhalten. Seit Oktober 2015 standen Teile des Bandes in unkorrigierter Fassung im Internet. Auf die Konkordanzen und Kumulierungen im Internet (https://leibnizedition.de) sei verwiesen.

Hannover, April 2019 Michael Kempe

EINLEITUNG

Nolo errationum mearum vestigia describere, quanquam id quoque profecto usus habiturum esset non contemnendos, nisi prolixitas deterreret.

Leibniz 1674

Der vorliegende Band enthält die Studien, Entwürfe und Aufzeichnungen des Zeitraums von 1673 – 1676 zu Kurven, soweit sie nicht wegen der Einbettung in andere Zusammenhänge in früheren Bänden der Reihe VII abgedruckt wurden (z. B. VII, 1 N. 30, 31, 109, 110, 113, 131, 132, 136, 138; VII, 2 N. 3, 25, 26; VII, 3 N. 37). Sie lassen sich hauptsächlich gliedern in Texte zur *Constructio aequationum*, darin häufig zum Problem der *Minima ad conicam*, dann zur *Méthode de l'universalité* und zu diversen Themen, Kurven betreffend. Wegen der engen inhaltlichen Verflechtung eines großen Teils dieser Texte werden sie nicht in die einzelnen Themengebiete unterteilt, sondern in durchgehend chronologischer Reihenfolge abgedruckt.

Die Texte des Bandes wurden zu 72 Hauptnummern zusammengefasst, von denen nur elf von Leibniz selbst datiert wurden (N. 33, 44, 49, 51, 54, 56, 58, 59, 61, 69, 71). Mehr als 80 % des Textumfangs sind Erstdrucke, lediglich neun Stücke (N. 10, 11, 43, 56, 61, 62, 63, 65, 72) waren bisher ganz oder teilweise im Druck zugänglich. Den größten Anteil daran haben die beiden Entwürfe zur *Méthode de l'universalité*, die Louis Couturat 1903 publiziert hat. Weitere fünf bisher gedruckte Stücke gehören zu den Aufzeichnungen, die Leibniz und Tschirnhaus aus und zu den Papieren von Pascal angefertigt haben.

Eine chronologische Gliederung der Texte des Bandes ergibt folgendes Bild: Seit dem Frühjahr 1673 arbeitet sich Leibniz in die Methoden der modernen Algebra ein (III, 1 N. 9; VII, 1 N. 109 und N. 110). Aus der Aufzeichnung N. 1 geht hervor, dass er damals auch von Huygens' Studien zu den geometrischen Verfahren der Gleichungslösung, der *Constructio aequationum*, Kenntnis erhalten hat. Leibniz macht bis zum Frühjahr 1674 (N. 1–9) erste Erfahrungen auf diesem Gebiet, speziell mit der Lösung sogenannter solider Probleme, die eine geometrische Konstruktion von Gleichungen bis zum 4. Grad mittels Kegelschnitten erfordern. Hierzu gehört auch das Problem der *Minima ad conicam*, der Konstruktion der kürzesten Strecke, die von einem beliebigen Punkt der Ebene an eine

Kegelschnittkurve führt. Leibniz diskutiert es wohl erstmals im Herbst 1673 im Laufe eines Gesprächs mit Ozanam (N. 3). Die konkrete Problemstellung, eine allgemeine Lösung für beliebige Kegelschnitte zu finden, geht möglicherweise auf eine Unterhaltung mit Carcavy zurück (vgl. N. 23 u. N. 43 sowie die Studie *De Minima ad Conicam a puncto dato ducenda pars I* vom 29. Mai (8. Juni) 1678; LH 35 XI 6 Bl. 1–2), den auch Ozanam noch in einem 1678 gedruckten Flugblatt mit seiner (allerdings unzureichenden) eigenen Lösung als Aufgabensteller nennt (*Probleme: Tirer d'un point donné, sur la circonference d'une Section Conique donnée, une perpendiculaire*; vgl. LH 4 V 10 Bl. 64+67). Um eine für alle Kegelschnitte gültige Lösung zu erarbeiten, verwendet Leibniz zunächst Doppelvorzeichen. Damit entwickelt er schrittweise eine allgemeine Kurvengleichung für die Kegelschnitte. Die Studien bis zum Frühjahr 1674 umfassen etwa ein Zehntel des Bandes.

Ab Mai 1674 erweitert Leibniz seine Überlegungen auf eine allgemeine Methode mit Doppel- und Mehrfachvorzeichen, die *Méthode de l'universalité* (s. u. den Abschnitt (2) der Themenschwerpunkte). Diese Entwürfe und die daran anschließenden Untersuchungen und Ansätze in französischer wie lateinischer Sprache zu umfassenden Abhandlungen mit Darstellung der Methode und beispielhaften Problemlösungen, an denen Leibniz bis Anfang 1675 arbeitet, sind letztlich Fragment geblieben und machen etwa zwei Drittel des Bandes aus (vgl. dazu auch VII, 1 N. 113, 131, 132, 136, 138; VII, 2 N. 3, 25, 26; VII, 3 N. 37). Zwei Handschriften, auf die in N. 5 und N. 7 verwiesen wird, wurden nicht aufgefunden. Aus dem weiteren Berichtszeitraum des Bandes befassen sich mit diesen Themen nur noch kurze Notizen (N. 60) sowie die umfangreiche Studie N. 69 vom 4. Juni 1676 (vgl. auch VII, 1 N. 30, dat. 5. Juni 1676). Mit dem Problem der *Minima ad conicam* verwandt sind Untersuchungen zu ähnlichen und zu ähnlich gelagerten bzw. parallelen Kurven, die so definiert sind, dass die Normalen zur einen Kurve auch zur anderen normal sind und der durch die Normalenabschnitte festgelegte Abstand konstant ist. Sie stammen von Herbst 1673 bis Mitte 1674 (N. 3, 4, 6) sowie vom Herbst 1675 (N. 53, 54).

Ab Dezember 1674 untersucht Leibniz verschiedene Möglichkeiten, algebraische und transzendente Kurven zu konstruieren. Seine theoretischen Überlegungen zu geeignet kombinierten Bewegungen versucht er mehrfach auch in Entwürfe zu neuen Instrumenten für die praktische Konstruktion umzusetzen (N. 44, 47, 49, 51, 52, 56, 67, 70; vgl. dazu auch VII, 1 N. 31). Nachdem Leibniz in Anlehnung an Sluse bereits in einigen Studien zur *Constructio aequationum* mit schiefwinkligen Achsenpaaren bei Kegelschnitten (N. 18, 20, 22, 29, 30, 39, 40, 41) sowie bei der Wurfparabel (N. 44) operiert hat, befasst er sich ab 1675 auch mit Polarkoordinaten (N. 49, 55, 59, 68), der Berechnung der Koordinaten bei Änderung des Koordinatensystems (N. 50, 55) sowie krummlinigen Koordinatenachsen (N. 68). Ende November 1675 versucht Leibniz sich beim Vergleich von Kreis und Hyperbel an einer geometrischen Darstellung imaginärer Größen (N. 58; vgl. dazu auch VII, 1 N. 61 u. 62; VII, 5 N. 52). Allgemeinerer Natur sind Überlegungen zur Charakterisierung von Kurven durch geometrische Örter vom Ende des Jahres 1675 (N. 59). Ab Januar 1676 entstanden sind Exzerpte und Notizen aus und zu dem Nachlass von Pascal zu Kegelschnitten und zu Desargues (N. 61, 62, 63, 64, 65, 72), darunter zwei Aufzeichnungen aus Gesprächen mit Tschirnhaus. Für eine Kurve, die Ozanam in einem Gespräch im April 1675 charakterisiert, erfindet Leibniz einen Konstruktionsmechanismus (N. 51). Seine fehlerhafte Kurvenskizze lässt vermuten, dass er nicht erkannte, dass damit zwei Hyperbeläste beschrieben werden. Weitere Studien zu speziellen Kurven von Herbst 1675 bis Mitte 1676 befassen sich mit den cartesischen Ovalen (N. 57), der Logarithmus- bzw. Exponentialkurve (N. 66, 67) sowie der *Curva hastaria* (einer Konchoide, N. 71).

Quellen

Nach den mündlichen Mitteilungen von Huygens (N. 1) war wie so oft zunächst die zweite Auflage der lateinischen Ausgabe der *Géométrie* von Descartes mit den angehängten Kommentaren und Zusätzen von Schooten und anderen eine wichtige Quelle für Leibniz (auf sie entfallen im gesamten Band etwa 60 Verweise). Dies betrifft speziell die Ausführungen zur *Constructio aequationum* (N. 5, 7). Die Arbeiten von Schooten (insgesamt etwa 20 Verweise) diskutiert Leibniz auch im Fall der Mehrfachvorzeichen (N. 7, 10, 11) und der Frage der Koordinatentransformationen (N. 50, 55, 59). Darüber hinaus nennt er die Behandlung der Kegelschnitte von de Witt (N. 43) und die Tangentenmethoden von Descartes und Hudde (N. 3, 4, 35). Ähnlich wichtig sind die Quellen zu den Tangentenmethoden von Fermat und Sluse (N. 4, 35, 36). Im damit zusammenhängenden Bereich der Methoden der Gleichungslösungen und der Anwendung der Algebra auf die Geometrie erwähnt Leibniz Viète, Girard und wieder Descartes (N. 23), bei einzelnen Fragen auch de Beaune und Dulaurens (N. 7). In einer Abwägung der Vorteile algebraischer gegenüber geometrischer Beschreibungen bei der Kurvenkonstruktion führt Leibniz den Versuch eines Beweises des Parallelenaxioms durch Fabri an (N. 56).

Ab Mitte 1674 rezipiert Leibniz eingehend die Methoden für die Lösung solider Probleme aus dem *Mesolabum* von Sluse, wie ein langes Exzerpt von 14 Druckseiten (N. 16) und etwa zehn weitere Verweise zeigen (vgl. auch VII, 1 N. 129–131, 134, 138, 145). In seinen Überlegungen zu der von Sluse verwendeten charakteristischen Eigenschaft des Rechtecks, das den Kegelschnitten einbeschrieben wird, weist Leibniz auf die Vorgeschichte des einschlägigen Sehnensatzes in der Kegelschnittlehre seit Euklid hin (N. 42). Die Ausführungen über die Klassifizierung geometrischer Probleme bei den antiken Autoren stützen sich wohl auf die Darstellung bei Viète.

Die Anwendung der *Méthode de l'universalité* auf das Problem der *Minima ad conicam* bedingt, dass Leibniz wiederholt auf die Ansätze von Desargues und Pascal zu einer universalen Kegelschnittlehre eingeht (N. 10, 11, 14, 23, 37, 42, 43), anfangs wohl noch ohne Kenntnis der Originalquellen, wie seine Paraphrase der Kritik von Huret vermuten lässt (N. 10). Erst im letzten Jahr seines Parisaufenthalts erlangt er Einblick in die einschlägigen Papiere aus dem Nachlass von Pascal (N. 61, 62, 63, 64, 72), darunter auch in das *Brouillon project* von Desargues (N. 65). Beim Problem von Pappos verweist er auf Descartes und Pascal als seine Quellen (N. 49 u. N. 62). Bei seinen Überlegungen zu ähnlichen Kurven setzt sich Leibniz mit dem Begriff der Ähnlichkeit bei Apollonios auseinander (N. 6) und nennt auch eine Konstruktionsmethode bei Stevin (N. 54).

Bezüglich der Infinitesimalmathematik verweist Leibniz wie sonst auch meist auf die Namen der archimedischen Traditionslinie von Cavalieri über Guldin, Fermat, Saint-Vincent, Wallis und Huygens (N. 10). Im einzelnen nennt er die Resultate zu den Flächen unter der Hyperbel bei Saint-Vincent (N. 49), die Interpolationsmethode von Wallis (N. 49), spezielle Ergebnisse zu Folgen und Quadraturen von Pascal und Barrow (N. 49) sowie die Kreisapproximationen von Snellius und Huygens (N. 49). Leibniz erwähnt Pascal zur Geschichte der Zykloide (N. 44) und Galilei bei der Wurfparabel (N. 44). Quellen für die Behandlung der Logarithmuskurve sind Gregory und Pardies (N. 49), weitere spezielle Kurven sind die Ovale von Descartes (N. 57). Im Fall der Hyperbel kommt auch die technische Anwendung zur Sprache: Erwähnt werden das Instrument zur Herstellung hyperbolischer Linsen von Ott (N. 33 u. N. 43) und die diesbezüglichen Vorschläge von Hooke und von Wren (N. 43). Neben den gedruckten Quellen führt Leibniz mündliche Mitteilungen von Huygens (N. 1), Carcavy (N. 23 u. N. 43), Perrault (N. 33) und Roberval (N. 48) an. Außerdem finden sich jeweils zwei Aufzeichnungen von Gesprächen mit Ozanam (N. 3 u. N. 51) und mit Tschirnhaus (N. 61 u. N. 62). Von eigenen Arbeiten erwähnt Leibniz Manuskripte zur Transzendenz von Quadratrix und Logarithmuskurve sowie zur Kreis- und Hyperbelquadratur (III, 1 N. 39; VII, 3 N. 38; VII, 5 N. 26), zu Quadraturmethoden (VII, 3 N. 43; VII, 4 N. 27; VII, 5 N. 27), zur parabolischen Trochoide (VII, 3 N. 38) und weiteren Trochoiden (VII, 5 N. 18), zur Tangentenmethode (VII, 5 N. 7), zur

Exponentialgleichung bei der Winkelteilung im Kreis (III, 1 N. 96) und zum algebraischen Instrument (Cc 2, Nr. 815 u. 816; Druck in Band VII, 8).

Themenschwerpunkte

(1) *Constructio aequationum*

Bei seinen Überlegungen, wie die Methoden der Algebra perfektioniert werden könnten, wird Leibniz, wohl angeregt durch Huygens (N. 1), auf die Methode der *Constructio aequationum* aufmerksam. Diese operiert traditionell mit Geraden, Kreisen und Kegelschnitten, um algebraische Gleichungen bis zum 4. Grad zu lösen (*Problema solidum*), seit Descartes verstärkt auch mit höheren Kurven für Gleichungen höheren Grades (*Problema sursolidum*). In der zweiten Auflage der lateinischen Übersetzung der *Géométrie* mit ihren Kommentaren und ergänzenden Abhandlungen, die Leibniz seit dem späten Frühjahr 1673 intensiv studiert, findet er dafür reichlich Beispiele. Es fehlen jedoch sowohl eine allgemeine Methode wie eindeutige Kriterien für die Ermittlung der einfachsten Lösungskonstruktionen: Sind kürzere Konstruktionen mit höheren Kurven längeren Konstruktionen mit einfacheren Kurven vorzuziehen oder umgekehrt (VII, 1 N. 110 S. 687)?

Das Ziel von Leibniz ist, jedes *Problema solidum* mit Hilfe eines beliebig vorgegebenen Kegelschnitts sowie eines Kreises oder (in einfacheren Fällen) einer Geraden zu lösen (N. 7), den Spezialfall des Schnittes einer Parabel mit einer Geraden behandelt er in VII, 1 N. 110.

Durch die Lektüre der Methoden der *Constructio aequationum* im *Mesolabum* von Sluse, aus dem er ausführliche Exzerpte anfertigt (N. 16), wird Leibniz dazu angeregt, Untersuchungen dazu anzustellen, welche Modifikationen der Übergang von rechtwinkligen zu schiefwinkligen Koordinatenachsen in den Gleichungen des Schnitts von Kreis und Kegelschnittkurven bewirkt (N. 18, 20, 22, 29, 30). Außerdem versucht er, einen dort verwendeten Sehnensatz (Apollonios, *Conica*, III, 17) in seine Argumentation einzubauen (N. 19, 27, 30). Ab N. 31 ist die daraus gewonnene Proportionalgleichung fester Bestand seiner Darstellungen (N. 38, 39, 40, 42, 43). Leibniz stellt aus den umfangreichen Studien bis Ende 1674 schließlich nur eine ausführliche einleitende Zusammenfassung her (N. 43), in der er auf detaillierte Rechnungen und Konstruktionen verzichtet. Die zuvor von ihm behandelten Beispiele führt er nicht systematisch in einer Abhandlung zusammen. Möglicherweise hat Leibniz Ende 1674 die weitere Bearbeitung des Themas zugunsten der ihm erfolgversprechender scheinenden Entwicklung seines Gleichungsinstruments aufgegeben (vgl. III, 1 N. 96 S. 655 f.). Kurz befasst er sich mit einigen Beispielen, in denen er aus vorgegebenen Gleichungen Konstruktionsvorschriften entwickelt (N. 56). Danach greift er das Thema erst wieder in der Studie *Nova de constructionibus* vom 4. Juni 1676 (N. 69) auf.

(a) *Minima ad conicam*

Ein Problem aus dem Gebiet der *Constructio aequationum*, nämlich die Konstruktion der Normale von einem beliebigen Punkt der Ebene an eine beliebige Kegelschnittkurve, scheint Leibniz besonders interessiert zu haben und ist der Ausgangspunkt für seine weiteren Untersuchungen. Das Problem geht auf Apollonios von Perge zurück. Dieser forderte analog, den kleinsten Abstand des Punktes zu dem Kegelschnitt zu ermitteln; daher spricht man auch vom Problem der *Minima ad conicam*. Offenbar wurde Leibniz von Carcavy die Aufgabe gestellt (vgl. N. 23 u. 43), das Problem allgemein für alle Kegelschnitte zu lösen. Leibniz stuft es als außergewöhnlich schwierig ein und diskutiert es wohl erstmals im Herbst 1673 in einem Gespräch mit Ozanam (N. 3). Er versucht zunächst zwischen Herbst 1673 und Mitte 1674, das Problem mit einer Verallgemeinerung zu lösen: Er möchte zur gegebenen Kurve eine weitere Kurve bestimmen, die so definiert ist, dass die Normale zu jedem laufenden Punkt der Kurve auch Normale zu den laufenden Punkten der Ausgangskurve ist (N. 3). Eine solche Kurve nennt er ähnlich gelagert (N. 4), da er sich bewusst ist, dass diese Definition nicht äquivalent ist mit der von ähnlichen Kegelschnittkurven bei Apollonios (N. 6). Im Oktober 1675 wird er diese Überlegungen wieder aufgreifen (N. 53 u. N. 54).

Leibniz setzt Tangentenrechnungen für die Lösung des Problems ein, indem er nacheinander die Fälle Parabel, Hyperbel und Ellipse behandelt (N. 4), und findet bald heraus, dass die allgemeine Lösung durch eine Gleichung 4. Grades dargestellt werden kann (N. 5 S. 35). In der Folge arbeitet er an der Entfaltung der Lösung auf die einzelnen Fälle und an deren konstruktiver Darstellung (N. 7, 9, 14, 15). Im Anschluss an die Lektüre des *Mesolabum* von Sluse (N. 16) und die dadurch angeregten weiteren Untersuchungen zur *Constructio aequationum* untersucht Leibniz, ob seine Gleichung 4. Grades für die Lösung des Problems der *Minima ad conicam* durch geschickten Einsatz verschiedener Tangentenmethoden (N. 34, 35, 41) oder anderer Mittel wie die Verwendung paralleler Kurven (N. 36) weiter vereinfacht werden kann.

Leibniz befasst sich ab Juni 1678 wieder mit dem Problem der *Minima ad conicam*, nachdem er das Flugblatt Ozanams vom 14. Mai 1678 erhalten hat (vgl. III, 2 N. 175 S. 458).

(b) Allgemeine Kegelschnittgleichung

Leibniz kommt bei seiner Verallgemeinerung zugute, dass er etwa seit Mitte 1673 Doppelvorzeichen verwendet, um Fallunterscheidungen nach Möglichkeit erst am Ende einer Rechnung durchführen zu müssen (N. 2). Ursprünglich setzt er diese vor allem für eine gemeinsame Gleichung von Kreis und Hyperbel in seinen Untersuchungen zur arithmetischen Quadratur dieser Kurven ein und formt dann diese Gleichung durch Verallgemeinerung der Koeffizienten schrittweise zu einer allgemeinen Kegelschnittgleichung um: Leibniz verwendet seit dem Sommer 1673 die Kreisgleichung $2ax - x^2 = y^2$, manchmal auch ohne den Faktor 2 in der Form $ax - x^2 = y^2$ (VII, 4 N. 27 u. N. 34). In derselben Zeit erscheinen bei ihm auch die Ellipsengleichung $2ax - \frac{a}{t}x^2 = y^2$ (VII, 4 N. 30) und die Hyperbelgleichung $2ax + x^2 = y^2$ (VII, 4 N. 35). Im August 1673 vereinigt er die Gleichungen für Kreis und Hyperbel mit einem Doppelvorzeichen zu der Form $2ax \mp x^2 = y^2$ (VII, 4 N. 40_3). Im Schlussabschnitt von N. 4 verwendet er eine einzige Gleichung (wieder ohne den Faktor 2) für Hyperbel und Ellipse, $y = \sqrt{rx \mp \frac{rxx}{t}}$, und fügt nach weiteren Rechnungen hinzu, dass im Fall der Parabel die Terme mit den Doppelvorzeichen wegfallen. Schließlich führt er in N. 5 den Ausdruck $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 = y^2$ explizit als allen Kegelschnitten gemeinsame Gleichung ein. Eine ausführliche Erläuterung seiner allgemeinen Kegelschnittgleichung gibt Leibniz in §§ 43–45 von N. 10, in § 53 beseitigt er die Mehrfachvorzeichen aus der Gleichung durch Quadrieren und gibt so eine allgemeine Charakterisierung der Kegelschnitte ohne Amphibolien. Im Oktober 1674 versucht er, eine Darstellung zu geben, die für alle Typen von Kegelschnittkurven gültig ist und eine Konstruktion durch ein Instrument ermöglicht (N. 33).

(2) Die *Méthode de l'universalité*

Als *Méthode de l'universalité* bezeichnet Leibniz das von ihm entwickelte Regelwerk zur Bildung und Verwendung von Doppel- oder Mehrfachvorzeichen (vgl. S. XXVIII). Diese von ihm *signa ambigua* oder *signes ambigus* genannten Zeichen apostrophiert er entsprechend auch als die Instrumente der Methode. In zwei längeren, im Mai oder Juni 1674 verfassten Konzepten (N. 10 u. N. 11, beide *Méthode de l'universalité* betitelt) versucht er sich an einer umfassenden Darstellung des neuen Ansatzes. Andere Stücke liefern Vorüberlegungen (N. 2 u. N. 8), Nebenarbeiten (N. 12 u. N. 13) oder Nachbemerkungen (N. 45 u. N. 46) zu diesen beiden methodologischen Hauptschriften; zwei weitere präsentieren die Methode anhand eines ausgewählten Beispiels (N. 14 u. N. 15).

Leibniz sieht als wesentlichen Nutzen seiner neuen Methode, die er als Teil der *ars characteristica* betrachtet, dass mit ihrer Hilfe in einem einzigen Arbeitsgang allgemeine Lösungen für mehrere Fälle gefunden werden können, von denen jeder andernfalls einer gesonderten Behandlung bedürfe (N. 10). Dies illustriert er in N. 11 anhand eines einfachen geometrischen Beispiels. Er betrachtet eine Gerade, auf der zwei fest gewählte Punkte B und C sowie ein beweglicher Punkt A liegen, wobei A drei verschiedene Positionen einnehmen kann: diesseits von B, zwischen B und C oder jenseits von C. Will man die Länge der Strecke AC über die der beiden Strecken AB und BC ausdrücken, ergibt sich im ersten Fall die Gleichung $AC = +AB + BC$, im zweiten $AC = -AB + BC$ und im letzten $AC = +AB - BC$. Verwendet man nun ein Symbol, das im ersten Fall $+$, im zweiten Fall $-$ und im dritten Fall $+$ bedeutet und ein weiteres mit der Bedeutung „erster Fall $+$, zweiter Fall $+$, dritter Fall $-$“, zwei *signa ambigua* also, so können diese drei Fälle in einer einzigen Gleichung festgehalten werden. Diese eine Gleichung schreibt Leibniz mit den von ihm erfundenen Symbolen als $AC \sqcap {}^{+}\!\!\dagger AB \; {}^{+}\!\!\ddagger BC$; sie kann weiteren Umformungen unterzogen werden und zu einem allgemeinen Ergebnis führen, das sich wieder in gesonderte Ergebnisse für die drei ursprünglichen Fälle aufspalten lässt.

Leibniz’ Bedarf an Doppelvorzeichen ergibt sich letzten Endes aus seiner geometrisch geprägten Betrachtungsweise: Viele mathematische Fragen, mit denen er sich befasst, sind geometrische Probleme, andere Fragen werden in solche übersetzt, so dass die gesuchten Größen geometrisch konstruiert werden können und sich in einer Figur beispielsweise als Länge der Abszisse eines bestimmten Punktes ablesen lassen. Bei Strecken und ihren Längen handelt es sich jedoch um Größen, die an sich nicht negativ sein können. Zwar erörtert Leibniz in N. 11 die Möglichkeit, dass Streckenlängen negativ sind, so im Falle einer Strecke, die sich aus zwei mit negativen Vorzeichen versehenen Teilstrecken zusammensetzt, und erklärt, das negative Vorzeichen besage in diesem Falle, dass es sich um eine der angenommenen Richtung entgegengesetzt orientierte Größe handele. Er verfolgt diesen Weg aber nicht konsequent weiter, sondern hält grundsätzlich an der Auffassung von notwendigerweise positiven Streckenlängen fest. Indem er jedoch Größen über Streckenlängen definiert, denen er ein Doppelvorzeichen voranstellt, können jene sowohl positive als auch negative Werte annehmen und etwa bei der Beschreibung von Kurven durch Gleichungen prinzipiell die gleiche Funktion erfüllen wie moderne Koordinaten.

Die Reichweite dieser Methode illustriert ein anderes Beispiel: In dem Stück *Circulus descriptus* (N. 47) konstruiert Leibniz einen Kreis, der um einen Betrag b, der kleiner als sein Radius a ist, in Richtung der x-Achse verschoben ist. Bei der Aufstellung einer allgemeinen Gleichung für die Kreispunkte ergibt sich nun die erwähnte Schwierigkeit: Da die Ordinate x eines jeden Punktes auf dem Kreis wie auch seine Abszisse y für die Länge einer Strecke stehen, dürfen sie keine negativen Werte annehmen. Der Kreisbogen kann daher nur abschnittweise beschrieben werden: Für Punkte mit einer Ordinate auf der einen Seite des Ursprungs lautet die Gleichung $(x-b)^2+y^2=a^2$, für solche, deren Ordinate auf der anderen Seite des Ursprungs liegen, lautet sie dagegen $(x+b)^2+y^2=a^2$. Mit Hilfe eines Doppelvorzeichens lässt sich dies in einer Gleichung $(x$ ŧ $b)^2+y^2=a^2$ zusammenfassen und in sich gegebenenfalls anschließenden algebraischen Umformungen jeweils in einem behandeln. Die *Méthode de l'universalité* bündelt also verschiedene Fälle in einer Formel oder Gleichung und erlaubt so ihre gemeinsame Behandlung, was einen wesentlichen Fortschritt gegenüber zeitgenössischen Ansätzen darstellt, in welchen eine getrennte Behandlung erforderlich ist. Im erst danach sich schrittweise durchsetzenden, ausgebauten Koordinatensystem mit zwei Achsen und Koordinaten, die auch negative Werte annehmen können, lässt sich allerdings das Beispiel des verschobenen Kreises einfacher mit $(x-b)^2+y^2=a^2$ beschreiben und behandeln. Leibniz' *Méthode* ist umständlicher und schwieriger als dieses zu handhaben, doch stellt sie einen einsatzfähigen Ersatz bereit. Ihre umfassenden Einsatzmöglichkeiten in geometrischer Algebra und analytischer Geometrie rechtfertigen für Leibniz wohl auch die nicht weiter begründete, ambitionierte Benennung als *Méthode de l'universalité* (oder *Méthode des universels*, so in N. 14).

Nun hatten andere Mathematiker bereits vor Leibniz das Bedürfnis, zwei Fälle, die sich nur durch ihre Vorzeichen unterscheiden, in einer einzigen Formel oder Gleichung auszudrücken, und manche schufen dafür eigene Zeichen. So kennt Leibniz etwa das noch heute geläufige, wahrscheinlich von William Oughtred eingeführte Zeichen $\pm$ und seine Umkehrung $\mp$. Sie bleiben die einzigen Doppelvorzeichen, die Leibniz in seinen späteren Publikationen zur Mathematik verwendet; auch in der brieflichen Kommunikation mit anderen Mathematikern beschränkt er sich in der Regel auf diese beiden Zeichen. Die Symbole Schootens sind ihm ebenfalls bekannt. Jener erläutert in seinem Kommentar zu Descartes' *Geometria* die Zeichen ɤ und ȣ, von denen das eine „+ oder −“ bedeutet und das andere dessen Umkehrung darstellt. Leibniz erwähnt diese Symbole in N. 10 und bemängelt, Schooten habe sie lediglich drei oder vier Mal benutzt und dies auf eine Weise, die erkennen lasse, dass er sich weder der besonderen Anwendungen solcher Zeichen noch der hierfür geltenden Regeln ausreichend bewusst gewesen sei.

Symbole wie diese, die lediglich zwei Fälle voneinander unterscheiden, bezeichnet Leibniz in der *Méthode de l'universalité* als „einfache“ Doppelvorzeichen (*signes simples*).

Seit 1673 arbeitet auch er mit solchen einfachen Vorzeichen. Die beiden von ihm erdachten Zeichen $\mp$ und $\overline{\mp}$ haben die gleichen Bedeutungen wie Schootens Symbole. Offensichtlich bildet Leibniz das Symbol $\mp$, indem er die Zeichen $+$ und $-$ ineinanderschiebt, und gelangt zu dessen Umkehrung, indem er ein weiteres $-$ als Merkmal der Negation in das erste Zeichen hineinschiebt. Beim Einsatz dieser Symbole in seiner mathematischen Praxis zeigt sich anfangs, dass Leibniz noch nicht alle Folgerungen durchdacht hat. So muss er in dem auf Herbst 1673 zu datierenden Stück N. 3 an einer Stelle, um ein Quadrat zu bilden, das Symbol $\mp$ mit sich selbst multiplizieren. Er verschmilzt hierzu die beiden Doppelvorzeichen mit dem Multiplikationszeichen zum neuen Symbol $\overset{\frown}{\mp\mp}$. Doch schnell bemerkt er, dass man sich diese Symbolbildung sparen kann. In einer Nebenbetrachtung zu Stück N. 5 vergewissert er sich der Ergebnisse von Multiplikationen und Divisionen von Doppelvorzeichen mit $+$ oder $-$ sowie von Doppelvorzeichen untereinander. Seine Aufstellung zeigt, dass die Multiplikation zweier Doppelvorzeichen stets ein $+$ oder ein $-$ ergibt, dass etwa $\overset{\frown}{\overline{\mp}\mp} = -$ gilt, womit eigene Symbole überflüssig sind.

Leibniz möchte aber auch mehr als zwei Fälle in einer Formel zusammenfassen können. Hierzu benötigt er komplexere Zeichen, die er auf der Grundlage der beiden einfachen Doppelvorzeichen zu bilden trachtet. Die ersten komplexen Doppelvorzeichen entwickelt er in der kurzen Notiz N. 8, die er vielleicht noch im Dezember 1673, vielleicht auch erst im Mai 1674 niederschreibt. Hier erläutert er vier neue Doppelvorzeichen, mit deren Hilfe sich jeweils drei Fälle unterscheiden lassen: das Symbol $+\!\!\mp$, welches für „$+$ oder $\mp$“ (sprich: „im einen Fall $+$, im anderen entweder $+$ oder $-$“) steht, $-\!\!\overline{\mp}$ als sein Gegenteil sowie die auf gleiche Weise durch Zusammenschieben eines $+$ oder $-$ mit einem einfachen Doppelvorzeichen gebildeten Symbole $+\!\!\overline{\mp}$ und $-\!\!\mp$. Zusammen mit den beiden Grundzeichen bilden diese vier zusammengesetzten Doppelvorzeichen (oder *signes composés*, wie Leibniz solche Zeichen später nennt) ein erstes System aus einfachen und komplexen *signa ambigua*. Ein praktischer Einsatz der zusammengesetzten Zeichen dieses ersten Systems ist allerdings nicht bekannt. Zwar verwendet er in N. 7, das sich auf demselben Papierbogen wie N. 8 findet, tatsächlich zusammengesetzte Vorzeichen — womöglich zum ersten Mal überhaupt in seiner mathematischen Praxis (ein anderer Kandidat hierfür ist eine Nebenbetrachtung in N. 5). Und als deren Bausteine fungieren die einfachen Zeichen $\mp$ und $\overline{\mp}$, die Grundzeichen des ersten Systems also. Die komplexen Zeichen werden jedoch nach geringfügig anderen Regeln gebildet, welche Leibniz erst in der *Méthode de l'universalité* ausformuliert und die charakteristisch für ein zweites System von Doppelvorzeichen sind. Es liegen hier also Übergangsformen zwischen dem ersten und dem zweiten System vor. Dass Leibniz sein erstes System in der Praxis nicht gebraucht, ist dabei nicht in mangelnder Funktionstüchtigkeit begründet. Vielmehr hat er zwischenzeitig andere, weiterreichende Ideen zur Gestaltung und zum Einsatz von Doppelvorzeichen entwickelt.

Diese neuen Ideen formuliert Leibniz wohl im Mai oder Juni 1674 in der ersten der beiden mit *Méthode de l'universalité* betitelten Schriften, in N. 10. Er nennt hier auch die Motivation, solche Zeichen systematisch zu entwickeln. Den Ausgangspunkt stellt das Problem der *Minima ad conicam* dar. Entscheidend ist für Leibniz dabei die Forderung, das Problem für alle Arten an Kegelschnitten (er unterscheidet derer fünf) und für alle möglichen Positionen des Punktes (hier geht er von sieben unterschiedlichen Kategorien aus) mit einer einzigen, in allen fünf mal sieben unterschiedlichen Fällen gleichermaßen durchführbaren geometrischen Konstruktion behandeln zu können. Die gesuchte allgemeine Lösung besteht also in einer geometrischen Konstruktion; eine Übersetzung des Problems in eine algebraische Gleichung (oder mehrere) und deren Lösung stellen dabei nicht mehr und nicht weniger als einen unumgänglichen Zwischenschritt dar. Leibniz' Ziel ist es nun, das Problem mit Hilfe von *signa ambigua* zu lösen. Das Problem soll dabei als Test der neuen Methode dienen, so wie umgekehrt die Methode unerlässlich ist, um eine allgemeingültige Lösung für das Problem zu finden.

In seinen Überlegungen zu dem Problem geht Leibniz von seiner allgemeinen Kegelschnittgleichung $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 = y^2$ aus, bei der sich die verschiedenen Kegelschnitte nicht nur durch die Werte unterscheiden, die die Parameter a und q annehmen, sondern auch durch die Interpretation des einfachen Doppelvorzeichens $\ddagger$ als $+$ oder $-$. Um die Lage des gegebenen Punktes bezüglich des Kegelschnitts zu beschreiben, sind jedoch weitere Fallunterscheidungen zu treffen, zu deren Beschreibung einfache Doppelvorzeichen nicht mehr ausreichen. Leibniz' Lösungsversuch setzt nämlich an den Eigenschaften der gesuchten, durch den gegebenen Punkt verlaufenden Normalen auf den Kegelschnitt an. Ihre Steigung lässt sich mit Hilfe der Abszissen und Ordinaten des gegebenen Punktes und des gesuchten Fußpunktes der Normalen wiedergeben. Diese Strecken sind prinzipiell positiv, und somit ist die Steigung, je nach Lage des gegebenen Punktes, über das Verhältnis von Summen oder Differenzen dieser Abszissen und Ordinaten auszudrücken. Es lassen sich dabei drei Fälle unterscheiden, abhängig davon, in welchem, modern gesprochen, Quadranten des Koordinatensystems der gegebene Punkt liegt. Die Gleichungen für diese drei Fälle unterscheiden sich nur in ihren Vorzeichen; sie lassen sich daher in einer einzigen Gleichung ausdrücken, indem man Mehrfachvorzeichen, die drei Fälle unterscheiden können, einsetzt. Eben diese Zeichen entwickelt Leibniz und präsentiert sie in der *Méthode*. Mit Hilfe seiner Doppel- und Mehrfachvorzeichen kann er das Problem also allgemein für alle Kegelschnitte und alle Positionen des gegebenen Punktes mathematisch formulieren und in einem einzigen Durchgang behandeln.

Doch die Frage nach den Doppelvorzeichen verselbständigt sich: Bald sucht Leibniz auch losgelöst von dem Apollonischen Problem nach sinnvollen Regeln, nach denen solche Zeichen für drei oder noch mehr Fälle zu bilden und einzusetzen sind. Im ersten grundlegenden Konzept zur *Méthode de l'universalité* (N. 10) entwickelt er nicht nur das bereits erwähnte zweite System aus einfachen und zusammengesetzten Doppelvorzeichen, sondern auch noch ein drittes. Im zweiten Konzept (N. 11) präsentiert er beide erneut, streicht dann aber den Abschnitt zum dritten System und formuliert an dessen Stelle ein weiteres, viertes. Zu einem fünften gelangt er ein halbes Jahr später, und ein sechstes erprobt er vier Jahre nach der Niederlegung der *Méthode*. Alle diese Systeme sind wesentlich ausdifferenzierter als das erste (vgl. hierzu auch die Übersicht unter *Notation und Rechentechnik*).

Das zweite System, welches Leibniz in N. 10 darstellt, übernimmt zunächst die einfachen Doppelvorzeichen ǂ und ⧧ aus dem ersten System und wendet für die Bildung zusammengesetzter Symbole wie ⁺ǂ aus + und ǂ nur geringfügig abgewandelte Regeln an. Noch während der Arbeit am Konzept ersetzt Leibniz jedoch das negierte einfache Zeichen ⧧ durch ein neues Zeichen, ǂ̲, das sich aus dem Symbol ǂ ergibt, indem man an seinen Fuß einen (meist etwas länger gezogenen) Querbalken anfügt. Bereits in N. 7 negiert er zusammengesetzte Zeichen auf diese Weise; in der *Méthode* erhebt er sie zum allgemeinen Bildungsprinzip negierter Zeichen. Um aber das Zeichen ⁺ǂ̲, die Negation von ⁺ǂ, von dem aus + und ǂ̲ zusammengesetzten Doppelvorzeichen zu unterscheiden, wird bei letzterem der Längsstrich über den unteren Querbalken hinaus verlängert, so dass das Zeichen ⁺‡ entsteht. Dessen Negation wiederum ist ⁺‡̲. Dieses Symbol kann seinerseits zum Bestandteil eines noch weiter zusammengesetzten Zeichens werden; dies deutet Leibniz an, indem er den Längsbalken erneut verlängert und so den Baustein ⁺⫵ erzeugt. Ein entsprechendes Symbol schreibt er jedoch nicht einmal beispielshalber auf. Mit solchen zusammengesetzten Zeichen höherer Ordnung, also Symbolen, die ihrerseits *signes composés* als Bestandteile haben, ließe sich eine im Prinzip beliebige Anzahl an Fällen simultan behandeln; Leibniz setzt solche Zeichen aber nirgends ein. Die Behandlung der mathematischen Probleme, welche ihn um die Jahresmitte 1674 interessieren, bedarf ihrer nicht. Sie kommt sogar ohne die von Leibniz in N. 10 festgehaltenen *signa* *ambigua* für vier Fälle, (ǂ)ǂ und (ǂ)≢, aus. (Der Grund dafür, dass drei Fälle genügen, ist, dass in Leibniz' Ansatz der gegebene Punkt im Problem der *Minima ad conicam*, modern gesprochen, nur in dreien der vier Quadranten des Koordinatensystems liegen kann.)

Eine weitere Neuheit, die Leibniz in N. 10 einführt, ist die Unterscheidung zwischen „homogenen", „korrespondierenden" und „heterogenen" Zeichen. Wenn in einer Rechnung mehrere Doppelvorzeichen auftreten, können sich diese entweder aufeinander beziehen oder unabhängig voneinander sein. Wenn aus der Interpretation eines Zeichens als + oder − auch die Interpretation des anderen Zeichens als + oder − eindeutig folgt, spricht er von *signes homogenes*, von homogenen Zeichen also. Bei diesen handelt es sich dementsprechend entweder um zwei identische Zeichen oder um ein Zeichen und seine Negation, etwa +ǂ und +ǂ̲. Sie haben denselben Ursprung. Ebenfalls denselben Ursprung haben die korrespondierenden Zeichen, *signes correspondants*. Bei ihnen folgen, wenn das eine Zeichen auf + oder − festgelegt ist, auch beide Fälle des anderen Zeichens, wobei diese aber noch doppeldeutig sein können. Ein Beispiel ist das Paar +† und +ǂ: Steht +† für +, so kann +ǂ für + oder − stehen; steht +† dagegen für −, hat +ǂ die eindeutige Bedeutung +. Schließlich gibt es auch noch Symbole, die voneinander unabhängig sind, bei denen also die Unterscheidung der Fälle nicht die gleiche Ursache hat. Hier kann man aus der Ausprägung des einen Zeichens keine Informationen über die Ausprägung des anderen gewinnen. Solche Zeichen nennt Leibniz *signes heterogenes*, also heterogene Zeichen. Er unterscheidet sie durch Klammerung. Während er in N. 7 hierzu einfache und mehrfache Klammern verwendet, fordert er in N. 10, stets nur eine einzige Klammer zu setzen und die gedachte Anzahl der Klammern durch eine Zahl vor dem Symbol anzuzeigen (wie es etwa das Symbol (3ǂ) zeigt). Zudem legt er fest, dass diese Klammern oben durch einen Verbindungsbalken abzuschließen seien. Diese Regeln befolgt Leibniz aber nicht dauerhaft; bald kehrt er zur Notation ohne Balken zurück und schreibt die mehrfachen Klammern meist wieder aus.

Ebenfalls in N. 10 entwickelt Leibniz ein drittes System zur Erzeugung komplexer Doppelvorzeichen. Seine Besonderheit besteht darin, dass es mit lediglich zwei Sonderzeichen, nämlich den aus dem zweiten System übernommenen Grundzeichen ǂ und ǂ̲ auskommt. Bei einer Verwendung der Symbole im Buchdruck wäre dies ein wichtiger Vorteil gegenüber dem zweiten System mit seiner Fülle an ausgefallenen Sondertypen. Alle Zeichen des dritten Systems werden nach einem Schema gebildet: In einer oben durch einen Balken geschlossenen Klammer stehen eine Ziffer, dann eines der beiden

Grundzeichen, dann wieder eine Ziffer. Das Grundzeichen signalisiert, dass es sich um ein Mehrfachvorzeichen handelt; um welche Ambiguität es sich handelt, wieviele Fälle also unterschieden werden und wie sie ausgeprägt sind, legt die Zahl rechts des Grundzeichens fest. Die Zahl links des Grundzeichens teilt mit, mit welchen anderen Zeichen das Zeichen korrespondiert; *signes homogenes* oder *correspondants* haben hier also dieselbe Zahl stehen, *signes heterogenes* unterschiedliche. Handelt es sich bei einer dieser Zahlen um eine 1, lässt Leibniz sie oft einfach weg. Diese Regeln führen zu Formen wie $(\overline{3 \mp 2})$, $(\overline{3 \underline{\mp} 2})$ oder $(\overline{2\mp})$. Die Ziffer rechts des Grundzeichens liefert allerdings keinen inhaltlichen Aufschluss über die Ambiguität, sondern es werden einfach die Doppelvorzeichen in der Reihenfolge ihres Auftretens innerhalb einer Gruppe korrespondierender Zeichen durchnummeriert. Das Zeichen $(\overline{3 \mp 2})$ etwa gehört einer dritten Gruppe von Doppelvorzeichen an und ist das zweite unter ihnen. Liegt die direkte Umkehrung eines bereits verwendeten Zeichens vor, so wird diesem keine neue rechtsstehende Nummer zugeteilt, sondern stattdessen das Grundzeichen im Zentrum durch das andere ersetzt. Die Zeichen spiegeln somit auch nicht wider, ob sie nun zwei oder drei (oder noch mehr) Fälle bündeln. Schließlich will Leibniz auch im dritten System nicht auf die Möglichkeit verzichten, so wie im ersten oder zweiten System zwei verschiedene Hierarchieebenen, Fälle und Unterfälle, zu unterscheiden. Das Symbol $\left(\overline{3(\overline{4 \mp 2})2}\right)$ dient ihm als Beispiel; seine keineswegs intuitiv erfassbare Aussage lautet: „im ersten Fall −, im zweiten Fall wie das Gegenzeichen des zweiten Symbols der dritten Gruppe (also im ersten Unterfall −, im zweiten Unterfall +, im dritten Unterfall +)“. Diese Informationen lassen sich nicht am Zeichen ablesen, sondern sind an jenen Stellen zu beschaffen, an denen die Zeichen eingeführt werden.

Auch im zweiten Konzept zur *Méthode* (N. 11) gibt Leibniz eine Einführung in das dritte System, doch dann streicht er den gesamten Abschnitt. In der Praxis setzt Leibniz das dritte System, obwohl es durchaus funktionstüchtig ist und sich mit ihm auch mehr als drei Fälle gleichzeitig behandeln lassen, niemals ein. Sicherlich weist es den Schwachpunkt auf, dass die Nummerierung der Ambiguitäten willkürlich erfolgt, so dass die Betrachtung eines isolierten Zeichens keinen Anhaltspunkt liefert, welche Fälle es mit welchem Vorzeichen versieht. Die Symbole des dritten Systems sind auch durch ihren gleichförmigen Aufbau wenig suggestiv; ihre Betrachtung liefert keine Anschauung, welche Idee hinter ihnen steckt. Leibniz, dem es stets ein Anliegen ist, „sprechende“ Symbole zu entwickeln, mag sich hiermit wohl nicht dauerhaft zufrieden geben.

An die Stelle des dritten Systems tritt im zweiten Konzept zur *Méthode* das vierte. Dieses kommt völlig ohne Sonderzeichen aus, da Leibniz jetzt Buchstaben des griechischen Alphabets verwendet. Buchstaben vom Anfang des Alphabets stehen jeweils für ein $+$, solche von seinem Ende für ein $-$, und Mehrfachvorzeichen werden gebildet, indem die Buchstaben in der entsprechenden Reihenfolge hintereinander geschrieben und eingeklammert werden. Korrespondierende Mehrfachvorzeichen erkennt man daran, dass sie aus bestimmten Buchstabenpaaren bestehen, aus α und ω, aus β und ψ oder aus γ und φ. Leibniz ruft das Alphabet also von seinen beiden Enden gegenläufig ab, ähnlich, wie es Descartes mit den Buchstaben des lateinischen Alphabets als Bezeichnungen für bekannte und für unbekannte Größen getan hatte. Die Klammern verhindern eine Verwechslung der Mehrfachvorzeichen mit Koeffizienten oder Variablen. Die Symbole $(\overline{\alpha\omega})$ und $(\overline{\beta\psi})$ sind also voneinander unabhängige einfache Doppelvorzeichen, die Zeichen $(\overline{\omega\alpha})$ und $(\overline{\psi\beta})$ ihre Negationen. Die zusammengesetzten Zeichen gliedert Leibniz in N. 10 durch ein Komma, welches zwei Fälle, einer darunter doppeldeutig und der andere eindeutig, voneinander abgrenzt, etwa $(\overline{\alpha, \alpha\omega})$. In seiner späteren Praxis entfällt dieses Komma. Die Notation mit Komma spiegelt zwei Hierarchieebenen (Fälle und Unterfälle) wider, so wie dies auch die zusammengesetzten Zeichen im ersten und zweiten System tun. Die Notation ohne Komma dagegen siedelt alle drei Fälle auf ein und derselben Ebene an. Diesem noch einfacheren Ansatz gibt er künftig meist den Vorzug.

Das vierte System erlaubt es auch, vier Fälle gemeinsam zu betrachten; in N. 36 verwendet Leibniz Zeichen wie $(\alpha\alpha\alpha\omega)$, $(\alpha\omega\omega\alpha)$ oder $(\omega\omega\alpha\alpha)$. Theoretisch könnte er die Betrachtung auf noch mehr Fälle ausweiten; die Herkunft der behandelten Probleme aus der analytischen Geometrie führt allerdings dazu, dass die Unterscheidung von vier Fällen in der Regel das Maximum darstellt. Leibniz setzt das System umgehend auch in seiner mathematischen Praxis ein. So findet sich diese Notation (allerdings noch nicht ganz fehlerfrei angewendet) in dem wahrscheinlich im Juni 1674 entstandenen Stück VII, 1 N. 41. Er entwickelt das System auch weiter. So kürzt er etwa in N. 36 $(\alpha\alpha\alpha\omega)$ mit $(\alpha^3\omega)$ ab und setzt dann an seine Stelle (β), und aus $(\alpha\alpha\omega\omega)$ wird zunächst $(\alpha^2\omega^2)$ und dann (γ). Auch in dem aus dem September 1674 stammenden Stück VII, 1 N. 125 findet sich eine Innovation. Leibniz geht mitten in dieser Untersuchung zu der Notation mit griechischen Buchstaben über. Zur Erläuterung setzt er zunächst das Symbol $\overline{+}$ mit $(\alpha\omega)$ gleich und $\overline{\pm}$ mit $(\omega\alpha)$, das einmal geklammerte Grundzeichen $(\overline{+})$ mit $(\beta\psi)$ und sein eingeklammertes Gegenzeichen $(\overline{\pm})$ mit $(\psi\beta)$. Anschließend führt er für die Buchstabenkombination $(\alpha\omega, \psi\beta)$, mit der die Multiplikation von $(\alpha\omega)$ mit $(\psi\beta)$ gemeint ist, die

Kurzschreibweise (λ) ein. Er gelangt von diesem Zeichen dann zu dem Doppelvorzeichen $(\lambda, +)$ und durch Vertauschung der beiden Fälle zu $(+, \lambda)$. Nach wenigen Zeilen lässt er die Kurzschreibweise allerdings wieder fallen und erprobt stattdessen die Notationen $(\alpha\omega, \psi\beta, \mu\mu)$ und $(\alpha\omega, \psi\beta, \alpha\alpha)$, verwirft sie ebenfalls und entscheidet sich schließlich für die Schreibweise $(\alpha\omega, \psi\beta, +)$. Diese Vorgehensweise mag unnötig kompliziert sein; sie zeigt aber, dass Leibniz die *Méthode de l'universalité* nicht als mit der Niederschrift der beiden zentralen Konzepte N. 10 und 11 abgeschlossen betrachtet, sondern bestrebt ist, sie fortlaufend weiterzuentwickeln.

In dem Stück *De quadraturis per summis ordinatarum* (VII, 5 N. 29), das wahrscheinlich auf Dezember 1674 oder Januar 1675 zu datieren ist, verwendet Leibniz zunächst zusammengesetzte Zeichen aus dem zweiten System, um dann mit den Worten *sic clarius* zu jenen des vierten Systems zu wechseln. Auch wenn er also die Darstellung mittels griechischer Buchstaben für klarer als die Sonderzeichen des zweiten Systems hält, so will er das zweite System dennoch nicht vollständig durch das vierte ersetzen; vielmehr sieht er eine Verwendung nach Bedarf vor. In N. 11 weist Leibniz dem zweiten und dem vierten System unterschiedliche Einsatzbereiche zu: Die einfachen Doppelvorzeichen sollen vorzugsweise mit den Symbolen † und ‡, die zusammengesetzten mittels der Buchstabennotation des vierten Systems ausgedrückt werden. Als wesentlichen Vorteil der Notation mittels griechischer Buchstaben führt er hier an, dass die oft mehrfache Klammerung heterogener Symbole entfällt; stattdessen sind lediglich verschiedene Buchstaben des griechischen Alphabets zu wählen. In der Tat setzt Leibniz sowohl das zweite als auch das vierte System zum Lösen mathematischer Probleme ein. Während sich der Gebrauch des zweiten Systems dabei ungefähr auf die zweite Hälfte des Jahres 1674 beschränkt, bleibt das vierte System auch über den Jahreswechsel hinaus im Einsatz. Wann Leibniz es zum letzten Mal verwendet, ist noch nicht bekannt.

Die etwas barock anmutenden Symbole des zweiten Systems ersetzt Leibniz Ende 1674 durch schlichtere und geradlinigere Zeichen, von denen die Symbole †, +, ǂ oder ⧺ eine Auswahl darstellen. Mit ihrer Hilfe lassen sich im Prinzip beliebig viele Fälle unterscheiden. Dieser Wechsel ist in dem Heiligabend 1674 verfassten Stück *De trochoeidibus et relationibus reductarum ad ordinatas* (VII, 5 N. 18) zu beobachten. Hier verwendet Leibniz zunächst die Grundzeichen des zweiten Systems. Mitten im Stück aber wird eine Unterscheidung von drei Fällen erforderlich, und diese nimmt er vor, indem er ohne weitere Umstände zwei Doppelvorzeichen des neuen, fünften Systems einsetzt; ⁺† wird dabei stillschweigend durch ǂ ersetzt und ⁺‡ durch ‡. Im weiteren Verlauf des Stückes sind sodann vier Fälle gemeinsam zu betrachten, und auch hier bedient sich Leibniz neuer Doppelvorzeichen, nämlich der Symbole ⧧, ⧧, ⧧ und ⧧. Er erläutert die neuen Symbole nicht; ihre Verwendung scheint für ihn entweder selbstverständlich oder selbsterklärend zu sein. Der Übergang zur Verwendung der neuen Symbole ist also, soweit es die zusammengesetzten Symbole anbelangt, Weihnachten 1674 offenkundig bereits vollzogen. Dass die älteren zusammengesetzten Symbole nach Dezember 1674 noch einmal eingesetzt werden, lässt sich nicht belegen.

Leibniz führt das fünfte System nicht in einer weiteren programmatischen Schrift ein. Doch liefern manche Stücke Hinweise auf seine Genese. So finden sich in dem auf Dezember 1674 datierten Stück *De descriptionibus curvarum* (N. 44) nicht nur die einfachen Doppelvorzeichen des fünften Systems, † und ⸸, sondern mit den Symbolen ‡ und ‡ auch Vorformen zusammengesetzter Zeichen. Diese unterscheiden sich von den bald darauf kanonisierten Formen des fünften Systems dadurch, dass sie jeweils zwei der Querbalken mit Hilfe einer weiteren Linie verbinden. Dieser Verbindungsstrich gliedert die Zeichen: Die durch ihn verbundenen beiden Querbalken bilden zusammen den (doppeldeutigen) ersten Fall, der untere Querbalken den (eindeutigen) zweiten Fall. Das Symbol ‡ bedeutet also „im ersten Unterfall des ersten Falles −, im zweiten Unterfall des ersten Falles +; im zweiten Fall +“. In seinen Exzerpten aus Mariottes *Du choc des corps* (VIII, 2 N. 50), die ebenfalls aus dem Dezember 1674 stammen dürften, kann sogar unmittelbar verfolgt werden, wie Leibniz das fünfte aus dem zweiten System ableitet. Er hält fest, die Notation müsse neu gestaltet werden, startet mit dem Zeichen ⁺†, ersetzt es zunächst durch die Übergangsform ⁺† und gelangt schließlich zur Form ‡. Die Übergangsform ⁺† findet sich ausschließlich in diesem Stück und an dieser Stelle; sie spiegelt Leibniz’ Einfall wider, ein Minus durch einen halben Querbalken auszudrücken. Diese Darstellungsweise wird — gemeinsam mit der geradlinigen Anordnung der Fälle an einem senkrechten Balken — für das fünfte System charakteristisch. Im selben Stück identifiziert Leibniz auch die Symbole des vierten Systems mit jenen des fünften: $(\alpha\alpha\omega)$ setzt er mit ⧧ gleich, $(\alpha\omega\alpha)$ mit ⧧.

Die Form ‡ entspricht dem später bevorzugten Symbol ⧧ bis auf eine Besonderheit: Bei ihr ist der mittlere Querbalken näher an den unteren als den oberen gerückt, wogegen das Symbol ⧧ gleiche Abstände der Querbalken aufweist. Doch sind die Form ‡ und analog gestaltete Zeichen, etwa Symbol ‡, nicht lediglich Ausdruck eines Übergangsstadiums, sondern Leibniz setzt sie bisweilen auch in der Praxis ein, etwa in VII, 1 N. 96 von April 1676. Tatsächlich lassen sich die beiden Symbole ‡ und ⧧ zwei unterschiedlichen

Varianten des fünften Systems zuordnen. Wie bereits im vierten, so gibt es nämlich auch im fünften System zwei Teil- oder Subsysteme, von denen das eine zwei Hierarchieebenen widerspiegelt und das andere alle Fälle auf derselben Ebene ansiedelt. Das eine gibt also zwei Fälle wieder, einen darunter mit Unterfällen, das andere beliebig viele gleichrangige Fälle. Die Besonderheiten, die die Unterscheidung zweier Hierarchieebenen mit sich bringt, reflektiert Leibniz ebenfalls in VIII, 2 N. 50 — etwa, dass Symbole wie ‡ sich in einfache Doppelvorzeichen umwandeln lassen, wenn man unter Beibehaltung der Reihenfolge der Fälle ihre Aufteilung in die beiden Hauptfälle ändert, und dass umgekehrt einfache Zeichen zusammengesetzten entsprechen. Zur Behandlung mathematischer Probleme verwendet er aber wesentlich häufiger das andere Subsystem, bei dem alle Fälle auf der gleichen Ebene angesiedelt sind.

Im erwähnten, an Heiligabend 1674 verfassten Stück VII, 5 N. 18 bedient sich Leibniz also der zusammengesetzten Zeichen des fünften Systems, verwendet jedoch weiterhin die einfachen Doppelvorzeichen des zweiten Systems. Dass aber auch die einfachen Zeichen des fünften Systems noch im Jahr 1674 aus der Taufe gehoben werden, zeigt etwa das auf Dezember 1674 datierte Stück *Calculus elasticus* (VIII, 1 N. 54), in dem er die Symbole † und ‡ gebraucht. Auch in einem weiteren Stück aus dem Dezember 1674 (Cc 2, Nr. 816; Druck in VII, 8), in welchem er seinen kurz zuvor erfundenen *Constructor* (ein Instrument zur Lösung von kubischen Gleichungen) erläutert, setzt er ein Grundzeichen des fünften Systems ein. In einer gestrichenen Textvariante findet sich dort sogar ein Symbol, das ein abweichender erster Entwurf für solch ein Doppelvorzeichen sein könnte. Dagegen operiert Leibniz in Stücken aus dem November und selbst aus dem Dezember 1674 noch mit den einfachen Zeichen des zweiten oder vierten Systems. Es ist daher anzunehmen, dass er das gesamte fünfte System, die einfachen wie die zusammengesetzten Zeichen, im Dezember 1674 entwickelt. Doch verwendet er auch im Jahr 1675 gelegentlich noch die alten einfachen Zeichen (so in VII, 5 N. 22 aus dem Januar und in VII, 3 N. 44_1 u. 44_2 aus dem März sowie in N. 59 vom Jahresende). Möglicherweise ist Leibniz an den Gebrauch der einfachen Zeichen des zweiten Systems zu sehr gewöhnt, um sie direkt auszutauschen. Oder er ist mit diesen Symbolen eigentlich zufrieden und kann sich, anders als bei den zusammengesetzten Zeichen des zweiten Systems, nicht gleich dazu durchringen, sie zu ersetzen. Am Ende entscheidet er sich aber doch für ein System aus einem Guss.

Das fünfte System erfüllt die Anforderungen, die Leibniz an wissenschaftliche Symbole stellt, weitestgehend: Die Bildung der Zeichen folgt wenigen, sehr einfachen Regeln, die Symbole sind leicht zu schreiben und ihre Bedeutung ist mit einem Blick zu erfassen, wobei sie aber dennoch geeignet sind, komplexe Sachverhalte auszudrücken — konkret: drei, vier oder mehr Fälle zu unterscheiden und ihre simultane rechnerische Behandlung zu erlauben. An diesen Kriterien gemessen, kommt das fünfte System dem Ideal sehr nahe. Und in der Tat kommentiert Leibniz in seinen Exzerpten aus Mariotte (VIII, 2 N. 50), zweifellos sei die neue Notation die natürlichste von allen. In seiner verbleibenden Zeit in Paris setzt er dementsprechend das fünfte System öfters ein. Datierte Stücke mit einfachen Zeichen dieses Systems liegen etwa aus dem Juni und Juli 1676 vor (VII, 6 N. 23 u. N. 32). Doch arbeitet er offenbar auch in späteren Jahren noch mit dem System. Das jüngste Stück mit (einfachen) Doppelvorzeichen des fünften Systems, von dem wir bislang wissen, eine Beilage zu einem Brief an Denis Papin (III, 5 N. 76), stammt aus dem Mai 1692. In welchem Umfang er diese Symbole in der Hannoverschen Zeit in seinen einschlägigen Arbeiten einsetzt, lässt sich derzeit noch nicht beurteilen.

Alle bis hierhin betrachteten Systeme an *signa ambigua* entwickelt Leibniz während seines Aufenthalts in Paris, so wie auch die allermeisten bekannten Handschriften, in denen er sie einsetzt, aus dieser Zeit stammen. Doch beschäftigt ihn die Frage nach dem besten System an Doppelvorzeichen nach seiner Übersiedelung nach Hannover 1676 weiterhin. Obwohl er mit dem fünften System eine überzeugende Antwort gefunden hat, ersinnt er einen neuen, sechsten Ansatz. In diesem drückt er die Aussage „erster Fall +, zweiter Fall +, dritter Fall −“ durch die Ziffernkombination 113 aus. Das Prinzip ist dabei also das gleiche wie im vierten System, nur verwendet er jetzt Ziffern anstelle von griechischen Buchstaben. So steht nun eine 1 für + und eine 3 (oder eine andere Ziffer, die nicht + bedeutet) für −. In dem Stück *Ex puncto dato minimam ducere ad conicam datam* (LH 35 XII 1, Bl. 217; Druck in einem späteren Band der Reihe), verfasst im Juni 1678, unterscheidet er jeweils vier Fälle mit Hilfe der Ziffernkombinationen 1121, 1122, 1211 und 2211 und identifiziert sie zudem mit den entsprechenden Zeichen des fünften Systems.

Mit dem sechsten System arbeitet Leibniz in vier Schriften zum Problem der *Minima ad conicam*, von denen drei aus dem Juni 1678 stammen (LH 35 XI 6, Bl. 1–2; LH 35 XII 1, Bl. 210–211; ebd., Bl. 217) und eine undatiert ist (Cc 2, Nr. 851; Druck jeweils in einem späteren Band der Reihe). Erneut ist also die Entwicklung eines Systems von Doppelvorzeichen motiviert durch die Behandlung dieses Problems. Womöglich ist das sechste System allerdings älter als Juni 1678; Leibniz erläutert es in der erstgenannten dieser vier Handschriften nicht nur, sondern spricht auch von einer üblichen Methode, die er schon oft mit Gewinn angewendet habe. Ob er hiermit das sechste System oder doch ganz allgemein die Verwendung von *signa ambigua* meint, muss offen bleiben. Das neue System bietet Vorteile wie etwa seine leichte Schreib- oder Druckbarkeit und das Potential, eine beliebige Anzahl an Fällen zugleich zu behandeln. Andererseits ist, anders als bei der reinen Symbolschreibweise etwa des fünften Systems, eine Verwechslung der durch Ziffernkombinationen dargestellten Doppelvorzeichen mit echten Zahlen möglich. Wieweit Leibniz diese Vor- und Nachteile schriftlich reflektiert und ob er mit dieser Notation weiter arbeitet, ist noch nicht untersucht.

Die *Méthode de l'universalité* fasst also Regeln zusammen, nach welchen *signa ambigua* gebildet und eingesetzt werden sollen. Sie liefert einen innovativen Ansatz, um geometrische Probleme in größtmöglicher Allgemeinheit behandeln zu können, auch wenn das später entwickelte, ausgebaute Koordinatensystem mit zwei Achsen und negativen Koordinaten eine viel einfachere Herangehensweise hierfür bietet. Leibniz entwirft mehrere in sich geschlossene und funktionstüchtige Systeme aus solchen Regeln und Symbolen. Die einzelnen Systeme haben unterschiedliche Vor- und Nachteile, über die er teils schriftlich, teils nur aus seinen Folgerungen erkennbar nachdenkt. Die Bedeutung, die Leibniz diesen Symbolen zuspricht, spiegelt den hohen Stellenwert wider, den er ganz allgemein Fragen der mathematischen Notation beimisst. Besonders bemerkenswert ist, dass er die *signa ambigua* weder in seinen einschlägigen Veröffentlichungen einsetzt noch in seiner Korrespondenz in nennenswertem Umfang verwendet, so dass die gesamte Methode dauerhaft Privatwissen bleibt.

(3) Andere Themen

(a) Programmatische Studien und Aussagen

Neben den programmatischen Studien zur *Méthode de l'universalité* (N. 10, 11, 14, 15, 23) und zur *Constructio aequationum* (besonders N. 31 u. N. 43) sind vor allem zwei Untersuchungen zu Methoden der Kurvenkonstruktion hervorzuheben (N. 44 u. N. 49): Sie gehören zu den Texten aus dem Zeitraum von Herbst 1674 – Frühjahr 1675, in denen Leibniz seine 1673 begonnene Kritik (vgl. VII, 4 N. 16 u. N. 33) an der Klassifizierung der Kurven bei Descartes wieder aufnimmt und an einer Definition geometrischer Kurven arbeitet, die in bestimmten Fällen auch transzendente Kurven einschließt (vgl. VII, 3 N. 38 u. 39; VII, 5 N. 26; III, 1 N. 46). In N. 44 von Dezember 1674 unterscheidet Leibniz zwischen kontinuierlicher und punktweiser Darstellung von Kurven, die er als Kriterium für eine geometrische bzw. mechanische Konstruktion verwendet. Er weist darauf hin, dass in manchen Fällen, wie bei den Kegelschnitten, die punktweise Konstruktion durch eine kontinuierliche ersetzt werden kann, nicht aber in Fällen wie der Logarithmuskurve oder der Quadratrix. Insoweit stimmt Leibniz mit Descartes überein, doch anders als dieser lässt er auch die Erzeugung einer Kurve aus ihren Tangenteneigenschaften als geometrisch zu, selbst wenn diese Kurve nicht durch eine algebraische Gleichung dargestellt werden kann. Weiter differenziert werden diese Überlegungen in N. 49 von Januar 1675, wo Leibniz versucht, die Verwendung transzendenter Kurven in der Geometrie unter Einbeziehung eines Kriteriums der Sparsamkeit zu rechtfertigen: Geometrische Probleme sollen immer mit den einfachsten Mitteln exakt gelöst werden, zunächst mit Geraden und Kreisen, dann mit Kegelschnitten, dann mit höheren algebraischen Kurven und — wo diese nicht ausreichen — schließlich mit transzendenten Kurven.

Ende 1675 sieht Leibniz noch immer größere Defizite in der Theorie der geometrischen Örter sowie der davon abhängigen Methode der *Constructio aequationum* und kündigt seine späteren Untersuchungen zur *Analysis situs* an: Die Beschränkung auf Gleichungen, die auf der Beziehung von Ordinaten zu Abszissen beruhen, sei oft unnatürlich und tue den geometrischen Figuren Gewalt an. Außerdem würden bei der Anwendung der Algebra auf die Geometrie nur die Größen, nicht aber die Lage behandelt, wofür er nach einer Lösung suchen werde (N. 59 S. 562).

(b) Spezielle Kurven

In einigen Studien untersucht Leibniz spezielle Kurven und behandelt dabei auch Möglichkeiten, sie instrumentell zu konstruieren: So überlegt er sich einen Mechanismus für die Erzeugung von Kreisen durch ein rotierendes Pendel (N. 47), einen weiteren für eine ihm noch unbekannte Kurve, die Ozanam charakterisiert hat (N. 51), die Konstruktion der Logarithmuskurve aus einem beweglichen Parallelogramm (N. 67), oder er untersucht Kurven, die wie die Konchoide aus dem Kreis und rotierenden oder verschiebbaren Linealen erzeugt werden können (N. 70, N. 71). Weitere Beispiele sind die punktweise Konstruktion der Parabel aus Kreissehnen (N. 52) oder die Cartesischen Ovale (N. 57). Am Beispiel der analogen Gleichungen von Kreis und Hyperbel, die nur durch Verwendung imaginärer Größen ineinander überführt werden können, überlegt sich Leibniz, dass eine eigene Klasse imaginärer Größen gebildet werde könnte, die durch Potenzierung reelle Größen ergeben (N. 58).

(c) Mitteilungen, gemeinsame Gesprächsnotizen, Exzerpte und Anmerkungen

In N. 1 erwähnt Leibniz aktuelle Forschungen von Huygens zur *Constructio aequationum*, in N. 33 von Oktober 1674 im Zusammenhang mit Instrumenten zur Konstruktion von Kegelschnitten eine nicht näher bestimmte Information von Perrault zum Kreis. Die Aufgabenstellung, eine allgemeine Lösung des Problems der *Minima ad conicam* für alle Kegelschnittkurven zu finden, hat offenbar Carcavy in einem Gespräch formuliert (vgl. N. 23 u. N. 43). Das Problem diskutiert Leibniz wohl erstmals in einer Unterredung mit Ozanam im Herbst 1673 (N. 3). Außerdem stellt Ozanam ihm im April 1675 die Aufgabe, eine bestimmte Kurve zu konstruieren, wofür Leibniz einen Konstruktionsmechanismus entwirft (N. 51). In einer Aufzeichnung (N. 48) befasst sich Leibniz mit einer Mitteilung von Roberval zu Fehlern in der *Géométrie* von Descartes. Leibniz hat am 4. Juni 1675 erstmals einige geometrische Handschriften aus dem Nachlass von Pascal erhalten (vgl. III, 1 N. 53), Papiere zu den Kegelschnitten folgten nach Dezember 1675 (vgl. III, 1 N. 74). In zwei Gesprächsaufzeichnungen von Januar 1676 (N. 61 u. N. 62) sind Diskussionen mit Tschirnhaus über Inhalte der nachgelassenen Handschriften von Pascal zu den Kegelschnitten überliefert, vor allem zum *Hexagrammum mysticum*, mit dem dieser insbesondere das Problem von Pappos lösen konnte. Die inhaltliche Rezeption ist darüber hinaus durch eine weitere Aufzeichnung aus einem Gespräch mit Tschirnhaus belegt (VII, 1 N. 26). Außerdem ist eine Aufzeichnung zu Polarkoordinaten und krummlinigen Koordinaten (N. 68) auf denselben Träger geschrieben wie Notizen eines Gesprächs mit Tschirnhaus vom 27. Mai 1676 (VII, 5 N. 80). In einer Abschrift von Pascals *Generatio conisectionum* fügt Leibniz einige Korrekturen und Ergänzungen ein (N. 63). Er folgert aus der projektiven Methode von Pascal, dass Sätze, die im und über den Kreis gefunden werden, auf die anderen Kegelschnitte übertragen werden können. Darüber hinaus sieht er darin für die *Analysis situs* einen möglichen Ansatz, der durch Betrachtung der optischen Formänderungen von Figuren durch Bewegungen oder andere Veränderungen über die Kegelschnitte hinaus weiter verfolgt werden könne (N. 62). Auf dem Druck des *Essay pour les coniques* von Pascal (vgl. N. 64) notiert er sich aus dem *Brouillon project* von Desargues die abschließenden Ergebnisse zur Perspektive, zur Konstruktion von Sonnenuhren und zum Steinschnitt (N. 65). Vor der Rückgabe der ausgeliehenen Papiere hat Leibniz noch eine skizzenhafte Beschreibung der Manuskripte zu den Kegelschnitten angefertigt (N. 60; vgl. III, 1 N. 90).

Terminologie

Leibniz definiert im Band eine Reihe von Begriffen, hinzu kommen die Definitionen aus der Abschrift der *Generatio conisectionum* von Pascal (N. 63). Alle sind im Sachverzeichnis unter dem Eintrag Definition aufgeführt.

(1) Gleichungen

Leibniz benennt die Gleichungen nach aufsteigendem Grad als *linearis*, *secundi gradus* bzw. *plana* oder *quadratica*, *tertii gradus* oder *cubica*, *quarti gradus* oder *quadratoquadratica*. Eine *aequatio solida* kann 3. oder 4. Grades sein, entsprechend der traditionellen Klassifizierung der geometrischen Probleme als *problemata plana*, *solida* oder *sursolida*. Eine Gleichung für den Ansatz mit unbestimmten Koeffizienten heißt *assumtitia*, *collatitia* oder *factitia*.

(2) Konstruktionen

Leibniz unterscheidet nicht immer streng zwischen der Charakterisierung und der Konstruktion von Kurven und verwendet dafür sowohl *constructio* wie *descriptio* bzw. *construction* und *description*. In Anlehnung an Descartes unterscheidet Leibniz zwischen geometrischer und mechanischer Konstruktion: Erstere ist kontinuierlich exakt möglich, letztere nur punktweise. Anders als Descartes ist Leibniz davon überzeugt, dass nicht nur algebraische, sondern auch bestimmte transzendente Kurven geometrisch konstruiert werden können, da er auch die Erzeugung aus Tangenteneigenschaften als geometrisch akzeptiert, wenn kein einfacheres Verfahren ausreicht.

(3) Kurven

Für Kurven verwendet Leibniz sowohl *curva* wie *figura* oder *linea* bzw. *courbe*, *figure* und *ligne*. Die Ordinate bezeichnet er mit *applicata* oder *ordinata* bzw. *appliquée* oder *ordonnée*. Kurvengleichungen können als *aequatio* oder *locus* benannt werden, z. B. *aequatio ad hyperbolam*, *locus ad sectionem conicam*, eine Geradengleichung kann mit *locus ad lineam rectam* oder mit *locus est triangulum* charakterisiert werden, die zugehörige Ordinate entsprechend mit *applicata trianguli*.

(4) Zahlen und Größen

Für Zahlen, Werte, Wurzeln oder allgemeiner für eine Größe (*grandeur*, *magnitudo*, *quantitas*) verwendet Leibniz folgende Bezeichnungen: eine positive heißt *affirmativa*, *positiva* bzw. *positive*, *vera* bzw. *vraie*; eine negative *falsa* bzw. *fausse*, *negativa* bzw. *negative*, *nihilo minor* bzw. *moindre que rien*; eine rationale *rationalis*; eine irrationale *irrationalis* bzw. *inexprimable* oder *surda* bzw. *sourde*; eine reelle *realis* bzw. *réelle* oder *possibilis*; eine imaginäre *imaginaria* oder *impossibilis*; eine endliche *assignabilis* oder *finita*; eine unendliche *infinita* bzw. *infinie*; eine unendlich kleine nennt er *infinite parva* bzw. *infiniment petite*.

Zur Notation: Doppel- und Mehrfachvorzeichen

Die Leibniz'sche Notation basiert im wesentlichen auf Vorbildern aus der mathematischen Literatur seiner Zeit, insbesondere auf der Symbolverwendung in Descartes' *Geometria*. Doch Leibniz bleibt nicht bei dieser stehen, sondern zeigt sich im Umgang mit Symbolen ausgesprochen kreativ. Er experimentiert mit unterschiedlichen Schreibweisen und erfindet einzelne Symbole und ganze Systeme von Symbolen neu (vgl. auch S. XLVI–LIII). Während insbesondere seine Schreibweise zur Infinitesimalrechnung die mathematische Notation bis heute prägt, sind die ebenfalls von ihm ersonnenen Doppel- und Mehrfachvorzeichen dagegen nicht nur heute ungebräuchlich, sondern selbst zeitgenössischen Mathematikern völlig unbekannt.

Leibniz verwendet solche Doppelvorzeichen, um mehrere Fälle, die sich lediglich durch ihre Vorzeichen voneinander unterscheiden — Terme, Formeln oder Gleichungen —, mit einem einzigen Ausdruck wiedergeben zu können. Er bezeichnet diese Zeichen als *signa ambigua*, auf französisch entsprechend als *signes ambigus*. Dabei entwickelt er mehrere voneinander unabhängige Zeichensysteme, mit welchen auch mehr als zwei Fälle gleichzeitig wiedergegeben werden können (zur Genese dieser Systeme vgl. S. XXIII bis XXXVI). Vier davon verwendet er tatsächlich in seiner mathematischen Praxis.

(1) Das erste System

Die ersten *signa ambigua* entwirft Leibniz im Verlauf des Jahres 1673 (vgl. VII, 1 N. 110 u. VII, 4 N. 30). Das Zeichen $\mp$ bedeutet dabei „im einen Fall $+$, im anderen $-$", während das Zeichen $\overline{\mp}$ die Negation des ersten Zeichens ist. Es bedeutet also „genau dann $-$, wenn $\mp$ für $+$ steht, und genau dann $+$, wenn $\mp$ für $-$ steht". Symbole wie diese, die lediglich zwei Fälle unterscheiden, bezeichnet Leibniz als einfache Doppelvorzeichen (*signes simples*). Die beiden Symbole kennt man bislang nur aus undatierten Stücken; dass sie wohl vom Sommer 1673 bis zum Frühjahr 1674 in Gebrauch sind, lässt sich aus inhaltlichen Kriterien und der Wasserzeichenanalyse schließen. Ein Beispiel:

$$\mp \sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2 q}{a}} \;\overline{\mp}\; q \quad \text{(N. 5)}$$

Auf der Grundlage dieser beiden einfachen Doppelvorzeichen entwickelt Leibniz in der wohl aus dem ersten Halbjahr von 1674 stammenden Notiz N. 8 ein komplexeres System. Hierzu schreibt er ein einfaches Doppelvorzeichen rechts neben ein $+$ oder $-$ und verbindet dieses dann mit dem (von oben gezählt) zweiten Querbalken des Doppelvorzeichens. Die auf diese Weise zusammengesetzten Symbole unterscheiden zwei Fälle, von denen der zweite wiederum in zwei Unterfälle gegliedert ist. Das Symbol +⩲ etwa setzt sich aus + und ⩲ zusammen und bedeutet „im einen Fall +, im anderen Fall entweder + oder –“. In seiner Praxis setzt Leibniz die zusammengesetzten Zeichen (*signes composés*) des ersten Systems allerdings niemals ein. Das Beispiel:

+ vel ⩲ esto +⩲, et ejus contrarium seu – vel ⋕ erit –⋕ et – vel ⩲ erit –⩲ et ejus contrarium erit +⋕. (N. 8)

(2) Das zweite System

Wahrscheinlich im Mai oder Juni 1674 ersetzt Leibniz das negierte einfache Doppelvorzeichen ⋕ durch $\pm$. Das neue Doppelvorzeichenpaar $\mp$ und $\pm$ verwendet er bis März 1675 regelmäßig, danach sporadisch. „Heterogene“ (also gleich gestaltete, jedoch aus voneinander unabhängigen Gleichungen stammende und somit nicht aufeinander bezogene) Doppelvorzeichen unterscheidet er durch ein- oder mehrfache Klammerung voneinander, wobei er letztere gelegentlich auch durch eine einfache Klammerung mit Nummerierung ausdrückt. In den ersten Monaten verbindet Leibniz die Klammern oft oben durch einen Balken. Beispiele:

$2a \mp \frac{2a}{q}\odot \sqcap b \pm \frac{2a}{q}♀$ (N. 42)

$(\mp)\, by \mp y^2 \sqcap (((\mp)))\, v^2((\mp))\, cv$ (N. 17)

$(\mp)\, by \mp y^2(3\pm)\, v^2((\pm))\, cv \sqcap 0$ (N. 17)

Ponatur $(\overline{\pm}) \sqcap \mp$ si placet, … (N. 29)

Das neue Doppelvorzeichenpaar verwendet Leibniz nun, um *signa ambigua* zu bilden, welche drei oder vier Fälle zusammenfassen. Diese Mehrfachvorzeichen setzt er aus verschiedenen Bestandteilen — einfachen Vorzeichen, Doppelvorzeichen, Negationsbalken, Balkenverlängerungen, offenen oder geschlossenen Klammern — zusammen. Die Regeln hierfür hält er in der *Méthode de l'universalité* I (N. 10), verfasst wohl im Mai oder Juni 1674, fest. Aus + und $\mp$ etwa bildet er das Symbol ${}^{+}\!\mp$, welches in Worten ausgedrückt bedeutet: „im einen Fall +, im anderen Fall entweder + oder –“. Auch hier gibt es also zwei Hierarchieebenen. Ist die Reihenfolge der beiden Fälle vertauscht, schreibt Leibniz dies als $\mp^{+}$. Das Symbol ${}^{+}\!\pm$ dagegen stellt die Negation von ${}^{+}\!\mp$ dar, bedeutet also „immer dann –, wenn ${}^{+}\!\mp$ für + steht, und immer dann +, wenn jenes Zeichen für –

steht“. Eine solche Umkehrung wird stets durch einen etwas längeren Querbalken am Fuße des Zeichens ausgedrückt. Damit dieses Symbol von jenem unterschieden werden kann, das sich aus einem + und einem ‡ zusammensetzt, wird bei letzterem der senkrechte Hauptbalken verlängert; es entsteht so das Zeichen ⁺‡. Symbole, die sich aus zwei Doppelvorzeichen zusammensetzen, sind ebenfalls vorgesehen, etwa $\overline{(ǂ)}ǂ$. Auch bei den zusammengesetzten Doppelvorzeichen wird die Unabhängigkeit oder „Heterogenität“ von Symbolen durch Klammerung ausgedrückt. Die zusammengesetzten Zeichen des zweiten Systems verwendet Leibniz bis Ende 1674. Beispiele:

$$\sqrt{c^2 - d^2} = ((\mp))\, y\, ((\text{⁺ǂ}))\, e \quad (\text{N. } 7)$$

$$AC \sqcap \text{⁺†}BC\ \text{⁺ǂ}\ AB \quad (\text{N. } 14)$$

$$EBYH \text{ est } \frac{(\text{⁺†}) \ \text{‡}\ fqda\, (\text{⁺ǂ})\, aq^2d}{a^2\ ǂ\ 2aq + q^2} \quad (\text{N. } 15)$$

$$\frac{d}{y}\,\overline{(\text{⁺‡})}\, 1 \sqcap \frac{\overline{(\text{⁺†})}\dfrac{q}{a} f\,\overline{(\text{⁺ǂ})}\ \overline{ǂ\,\dfrac{q}{a} z\ \text{‡}\ \dfrac{q^2}{a}}}{z} \quad (\text{N. } 29)$$

$$\ldots \text{ unde fiet } \text{⁺†}z\ \text{†⁺}\ \frac{bq}{c}\ \text{‡⁺}\ e \quad (\text{N. } 21)$$

(3) Das dritte System

Ebenfalls in der *Méthode de l’universalité* I (N. 10), also wohl im Mai oder Juni 1674, entwirft Leibniz ein weiteres, drittes System komplexer Doppelvorzeichen. Dieses kommt mit nur zwei Sonderzeichen, den aus dem zweiten System übernommenen Grundzeichen ǂ und ‡, aus. Alle Zeichen des dritten Systems weisen den gleichen Aufbau auf: In ihrem Zentrum steht eines der beiden einfachen Doppelvorzeichen, und sie werden stets von einer oben durch einen Balken geschlossenen Klammer eingefasst. Die Zeichen des dritten Systems werden in der Reihenfolge ihres Auftretens durchnummeriert, wobei die Nummer in der Klammer rechts des Grundzeichens steht. Diese Zahl legt fest, um welche Ambiguität es sich handelt — wieviele Fälle also unterschieden werden und wie diese ausgeprägt sind. Anders als bei den Zeichen des zweiten Systems lassen sich diese Informationen nicht an den Symbolen selbst ablesen, man muss sie sich vielmehr an jener Stelle beschaffen, an der das Zeichen eingeführt wird. Liegt die Negation eines bereits verwendeten Zeichens vor, so wird diesem keine neue Nummer zugeteilt, sondern sein Grundzeichen durch das andere ersetzt. Stammen die Ambiguitäten aus voneinander unabhängigen Gleichungen, so steht auch links des Grundzeichens eine Zahl, welche mitteilt, mit welchen anderen Zeichen das Zeichen korrespondiert; heterogene Doppelvorzeichen sind also durch verschiedene Ziffern markiert. Handelt es sich bei einer der Ziffern um eine 1, kann sie auch weggelassen werden.

Diese Regeln führen zu Formen wie $(\overline{2 \mp 1})$. Das Symbol bezeichnet das erste Doppelvorzeichen, das aus einer zweiten Gruppe an Gleichungen hervorgeht. In einem von Leibniz formulierten Beispiel steht es für „im ersten Fall $-$, im zweiten Fall $+$, im dritten Fall $+$“. Mit Symbolen wie diesem lassen sich zwei, drei oder mehr Fälle bündeln. Doch sieht Leibniz auch in diesem System die Möglichkeit vor, die Fälle nochmals in Unterfälle zu gliedern. Diese sollen mit Zeichen wie $(\overline{3(\overline{4 \mp 1})2})$ wiedergegeben werden. Es bezeichnet das erste Doppelvorzeichen, das aus einer vierten Gruppe von nur durch ihre Vorzeichen unterschiedenen Gleichungen hervorgeht, in denen außer $+$ und $-$ auch das Zeichen $(\overline{3 \mp 2})$ oder sein Gegenstück auftreten. Auch in der *Méthode de l'universalité* II (N. 11) gibt Leibniz eine Einführung in das dritte System, streicht dann jedoch den entsprechenden Abschnitt. In der Praxis setzt er dieses System niemals ein. Beispiele:

[P]osons le cas qu'il y ait trois equations ambigües dans nostre calcul, sçavoir:

$$\begin{array}{lcccc} & \text{Equat. 1} & & \text{Equat. 2} & \text{Equat. 3} \\ & a \sqcap \left\{ \begin{array}{l} + b - c \\ + \cdots + \cdots \end{array} \right. & \textit{item} & d \sqcap \left\{ \begin{array}{l} - e + f \\ + \cdots - \cdots \\ + \cdots + \cdots \end{array} \right. & g \sqcap \left\{ \begin{array}{l} - i + k - l - m \\ + i - k + l - m \\ - i - k + l + m \end{array} \right\} \end{array}$$

Leur expression pourra estre telle:

$a \sqcap b\,(\overline{\mp})\,c \quad d \sqcap (\overline{2\mp})\,e\,(\overline{2 \mp 2})\,f \quad g \sqcap (\overline{3\mp})\,i\,(\overline{3 \mp 2})\,k\,(\overline{3 \pm 2})\,l\,(\overline{3 \mp 3})\,m$

... Enfin posons qu'il y ait encore une 4 ^{me} equation

$$n \sqcap \left\{ \begin{array}{cccc} (\overline{3 \mp 2}) & p & - & q \\ + & p & (\overline{3 \pm 2}) & q \end{array} \right\}$$ dont l'ambiguité est une soubs-distinction alors son expression pourra estre:

$n \sqcap (\overline{3(\overline{4 \mp 1})2})\,p\,(\overline{3(\overline{4 \mp 2})2})\,q$ (N. 10)

(4) Das vierte System

Wohl im Juni 1674 entwickelt Leibniz in der *Méthode de l'universalité* II (N. 11) ein viertes System komplexer *signa ambigua*. Das System basiert auf der Verwendung griechischer Kleinbuchstaben; seine Grundidee besteht darin, anstelle der Zeichen $+$ und $-$ Buchstaben des griechischen Alphabets zu verwenden und miteinander zu kombinieren. Buchstaben vom Anfang des Alphabets stehen dabei jeweils für $+$, solche von dessen Ende für $-$, wobei ω die Negation von α ist, ψ die von β und φ jene von γ (das χ lässt Leibniz aus). Doppelvorzeichen werden gebildet, indem die Fälle der Reihe nach notiert und durch eine (anfangs in der Regel oben durch einen Balken geschlossene) Klammer eingefasst werden. Den Grundzeichen ǂ und ‡ entsprechen somit die Kombinationen $(\alpha\omega)$ und $(\omega\alpha)$. Sind die Zeichen „heterogen“, also voneinander unabhängig, so wird dies durch die Wahl der im Alphabet benachbarten Buchstaben ausgedrückt: $(\beta\psi)$ steht somit für (ǂ), $(\gamma\varphi)$ für ((ǂ)). Für die Berechnungen in den Stücken des vorliegenden Bandes benötigt Leibniz allerdings nur das Paar α und ω.

Mit diesem System kann Leibniz im Prinzip beliebig viele Fälle zusammenfassen. Für das Symbol ⁺ǂ zum Beispiel schreibt er zunächst $(\alpha, \alpha\omega)$, später lässt er das Komma, welches die beiden Fälle der oberen Hierarchieebene voneinander trennt, fort. Zu diesen Zeichen entwickelt Leibniz auch noch Kurzschreibweisen. Statt $(\alpha\alpha\alpha\omega)$ schreibt er etwa $(\alpha^3\omega)$, was er dann noch weiter mit (β) abkürzt. Dieses vierte System setzt er ab Juni 1674 in seiner mathematischen Praxis ein. Beispiele:

$$x \sqcap \frac{y^2}{2a}\,\overline{(\omega\alpha)}\,\frac{\not d}{\not d}\,\frac{x^2}{2q} \qquad y^2 \sqcap 2ax\,\overline{(\alpha\omega)}\,\frac{a}{q}x^2 \quad \text{(N. 29)}$$

$$\overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,afy\ \ \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,axy\ \ \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,\frac{a}{q}fyx\ \ \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,x^2y\ \sqcap\ 2ad^2\ \overline{(\alpha\omega)}\,\frac{a^2d}{q}x^2\ \overline{(\alpha\omega)}\,\frac{2a^2d}{q}x$$
$$+\frac{a^2}{q^2}x^2 - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,2a^2y - \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,\frac{2a^2}{q}xy - \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,axy - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,\frac{a}{q}x^2y \quad \text{(N. 29)}$$

$$(\alpha\omega\omega\alpha)\,f + (\alpha\alpha\alpha\omega)\,x \sqcap GY \quad \text{(N. 36)}$$

pro $(\alpha^3\omega)\,x$ ponemus $(\beta)\,x$, pro $(\alpha^2\omega^2)\,y$ fiet $(\gamma)\,y$ (N. 36)

$$(\alpha\alpha\omega)\,x^2\,(\alpha\omega\alpha)\,bx \sqcap (\beta\beta\psi)\,ax\,(\beta\psi\beta)\,ca \quad \text{(VII, 5 N. 29)}$$

(5) Das fünfte System

Ein weiteres, mithin fünftes System an Mehrfachvorzeichen ersinnt Leibniz im Dezember 1674 (N. 44; VIII, 1 N. 54). Die beiden einfachen Doppelvorzeichen † und ǂ ersetzen die Zeichen ǂ und ‡. Nach dem gleichen Muster wie die einfachen werden auch zusammengesetzte Doppelvorzeichen gebildet: Jedes Symbol weist einen senkrechten Hauptbalken auf, und die einzelnen Fälle werden durch Querbalken wiedergegeben, die von oben nach unten angeordnet sind. Dabei steht ein halber Querbalken links des senkrechten Hauptbalkens für ein $-$, ein durchgezogener ganzer Querbalken für ein $+$. Ganz am Anfang unterscheidet Leibniz auch hier zwei Hierarchieebenen voneinander, indem er die Unterfälle eines Falles noch miteinander verbindet, so dass sich etwa ‡ oder ‡ ergibt, oder indem er unterschiedlich große Abstände zwischen den Querbalken wählt. Sehr bald verzichtet er hierauf und damit auch auf die Unterscheidung von Fall und Unterfall und schreibt einfach $\mp$ oder $\mp$. Eine Erweiterung auf beliebig viele Fälle ist ohne weiteres möglich, ein Einsatz für vier Fälle mit Symbolen wie etwa $\mp$ tatsächlich belegt. Die Vorzeichen dieses Systems verwendet er während seines weiteren Paris-Aufenthalts und darüber hinaus noch viele Jahre später. Beispiele:

Sit $a \mp \frac{a}{q}x \sqcap \omega$ fiet $x \sqcap \mp \frac{q}{a}\omega \mp q$ (N. 69)

fiet aequatio $\mp 2cz + c^2 \sqcap c^2 \mp 2cx + x^2$. et extrahendo radicem: $\sqrt{c^2 \mp 2cz} \sqcap \mp c \mp x$. (N. 44)

$r \sqcap \mp b \mp c$ (VIII, 2 N. 50)

pro $\mp$ scribemus $\mp$ pro $\mp$ scribo $\mp$ pro $\mp$ scribo $\mp$ pro $\mp$ scribo $\mp$ (N. 15)

$TD \sqcap \mp TA \mp AD$, $EL \sqcap \mp EC \mp CL$. (VII, 5 N. 18)

(6) Das sechste System

Ein sechstes System entwickelt Leibniz schließlich nach seiner Übersiedlung nach Hannover. Er arbeitet mit ihm in mehreren Stücken, die aus dem Juni 1678 stammen (so in LH 35 XI 6 Bl. 1–2 und in LH 35 XII 1 Bl. 210–211; Druck jeweils in einem späteren Band der Ausgabe). Auch in einem nach jenen entstandenen, undatierten Stück (LH 35 XII 2 Bl. 38–39), das einen Zusatz zu N. 9 darstellt, findet sich diese Notation.

Das System beruht auf dem Einsatz von Ziffern. Für + steht nun die 1 und für − eine beliebige andere Ziffer, etwa die 3. Das einfache Grundzeichen für „entweder + oder −“ wäre also beispielsweise durch die Ziffernkombination 13 wiederzugeben, seine Umkehrung durch 31. Die Aussage „erster Fall +, zweiter Fall +, dritter Fall −“ wird entsprechend durch die Zahlenkombination 113 ausgedrückt, welche gleichbedeutend ist mit der Notation $(\alpha\alpha\omega)$ im dritten oder dem Zeichen $\mp$ im fünften System. Auch im sechsten System lassen sich beliebig viele Fälle zusammenfassen. So bündelt Leibniz in einem weiteren aus dem Juni 1678 stammenden Stück (LH 35 XII 1 Bl. 217) jeweils vier Fälle mit Hilfe von Zahlenkombinationen wie 1121 oder 2211. Er führt diese ein, indem er sie mit den entsprechenden Zeichen des fünften Systems identifiziert. Über welchen Zeitraum hinweg und in welchem Umfang Leibniz diese Notation verwendet, ist noch nicht näher untersucht. Beispiele:

$EP \overset{(10)}{\text{aequ}} +131\,e + 113\,x + 113\,a + 113\,\frac{a}{q}x$ (LH 35 XI 6 Bl. 1–2)

ǂ. et (ǂ) aequ. ǂ et ((ǂ)) aequ. ǂ. et ((ǂ)) aequ. ǂ (LH 35 XII 1 Bl. 217)
1122 1211 1121 2211

Zur sonstigen Notation und Rechentechnik

(1) Vergleichszeichen

Leibniz bedient sich einer Reihe unterschiedlicher Vergleichszeichen, die er auch als *copulae* bezeichnet. So setzt er im vorliegenden Band neben vermutlich selbst entwickelten Symbolen für „größer als“ und „kleiner als“ sechs verschiedene Gleichheitssymbole ein, vier davon sporadisch, zwei hingegen regelmäßig, wobei der Gebrauch des einen durch den des anderen abgelöst wird.

In einem einzigen Stück im Band (N. 15) verwendet er das Ozanam'sche Gleichheitszeichen $\sim$ (dort aber durchgängig). In einer gemeinsamen Gesprächsaufzeichnung mit Ozanam (N. 3) gebraucht bemerkenswerterweise nur jener das Zeichen. Etwas häufiger ist das cartesische Symbol $\propto$ anzutreffen (durchgängig in N. 10, achtmal in N. 9 sowie zweimal in N. 15). Wird es in einem Stück eingesetzt, das zudem in französischer Sprache abgefasst ist, deutet dies darauf hin, dass Leibniz den Text zu publizieren beabsichtigt. In drei Stücken (N. 3, 19 und 69) setzt Leibniz $⨍$ als Gleichheitszeichen ein. Es handelt sich hierbei um ein stilisiertes *f* als Abkürzung von *facit*. Außer im ersten der genannten Stücke steht es nur in Nebenbetrachtungen. Lediglich in einer einzigen Nebenbetrachtung in einem Stück (N. 69) findet sich schließlich das Kürzel *aequ.*, das Leibniz in der Pariser Zeit überhaupt nur selten verwendet.

In der überwiegenden Mehrzahl der Stücke dieses Bandes hingegen bedient sich Leibniz entweder des heute gebräuchlichen Gleichheitszeichens $=$ oder des stilisierten Waagebalkens mit zwei gleich großen Gewichten $\sqcap$, eines wohl von ihm selbst erdachten Symbols. In einem nicht vor dem 30. Dezember 1673 verfassten Stück (VII, 6 N. 2_3) verwendet er noch das heute gebräuchliche Zeichen, während der Waagebalken in einem Stück (VII, 1 N. 41), in welchem er im Juni 1674 erarbeitete Ergebnisse festhält, in Erscheinung tritt. Offensichtlich entscheidet sich Leibniz in der Zwischenzeit für einen Wechsel des Gleichheitssymbols. Es ist davon auszugehen, dass er diesen Wechsel eher am Ende der in Frage stehenden Periode vornimmt, nachdem er mit anderen Zeichen experimentiert hat (d. h. mit dem cartesischen $\propto$ in N. 10 und mit Ozanams $\sim$ in N. 15). Dokument des Übergangs ist N. 17, in welchem er überwiegend den stilisierten Waagebalken einsetzt, aber sporadisch auch noch das moderne Gleichheitssymbol. Ein vergleichbares Übergangsstück (VII, 5 N. 5) stammt wohl aus dem Sommer 1674.

In Ungleichungen verwendet Leibniz die vom stilisierten Waagebalken abgeleiteten Symbole $\sqcap$ für „größer als“ — das größere Gewicht befindet sich auf der linken Seite — und $\sqcap$ für „kleiner als“. Beispiele:

$$\frac{y \text{ ou } XY}{a \text{ ou } PY} \sim \frac{d \text{ ou } DF}{DP \text{ ou } \sqrt{d^2 + f^2 (^{+}\ddagger) 2fa + a^2}} \quad \text{(N. 15)}$$

$$2ax \ddagger \frac{a}{q} x^2 \infty y^2 \quad \text{(N. 10)}$$

$$\frac{2x^2 + 2ax}{-2x + a} \not{f} - x + \frac{3ax}{-2x + a} \quad \text{(N. 3)}$$

$$-gl - 2a \ddagger \frac{eca}{q} \text{ aequ. } 0 \quad \text{(N. 69)}$$

$$v^2 + y^2 (8\ddagger) \frac{c^2}{4} - \frac{b^2}{4} = 0 \quad \text{(N. 17)}$$

$$v^2 + y^2 \ddagger \frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4} \sqcap 0 \quad \text{(N. 17)}$$

[I]bi vero observatio fit memorabilis, ... si $q \sqcap \frac{b}{2}$ aequationem fore ad Ellipsin, si $q \sqcap \frac{b}{2}$ ad Hyperbolam, si denique $q \sqcap \frac{b}{2}$ ad Parabolam. (N. 16)

$\sqcap \; \sqcap \; \sqcap$ v o c o c o p u l a s (N. 45)

(2) Multiplikation und Division

Als Multiplikationszeichen benutzt Leibniz das Symbol $\frown$, als Teilungszeichen das korrespondierende Symbol $\smile$. Multiplikation über Kreuz zeigt er gelegentlich mit dem Symbol $\times$ an. Divisionen stellt er oft in Bruchschreibweise dar. Für schriftliche Divisionen verwendet Leibniz das in seiner Zeit übliche, heute jedoch in Vergessenheit geratene Verfahren der Überwärtsdivision. Bei diesem entsteht Schritt für Schritt ein typisches Streichungsmuster. Beispiele:

$a \frown b$ ou ab	signifie a multiplié par b
$a \smile b$ ou $\frac{a}{b}$	signifie la division de a, par b *item* la raison de a, à b dont a soit l'antecedent, b le consequent (N. 11)

$$y^2 = \frac{x^3a - y^3a - yb^3}{y^2} \times \frac{y^4 + y^3a + yb^3}{x^2a} = l \quad \text{(N. 3)}$$

$$\begin{array}{ccc} & 1 & \\ \cancel{1} & \cancel{7} & \\ \cancel{2} & \cancel{3} & 8 \\ \cancel{3} & \cancel{2} & \cancel{2} \\ \cancel{1} & \cancel{9} & \cancel{9} \\ & \cancel{1} & \end{array} \;\fint\; 16\frac{18}{19} \quad \text{(N. 19)}$$

Im letztgenannten Beispiel teilt Leibniz 322 schriftlich durch 19. Er schreibt hierzu den Divisor 19 linksbündig unter den Dividenden 322 und überschlägt, wie oft der Divisor in der direkt über ihm stehenden Zahl 32 vollständig enthalten ist. Dies ist einmal der Fall, und so schreibt er das Zwischenergebnis 1 rechts neben das Gleichheitszeichen $\fint$. Anschließend multipliziert er die erste Stelle des Divisors, also 1, mit dem Zwischenergebnis 1, zieht das Produkt 1 von der ersten Stelle des Dividenden, also 3, ab und notiert die Differenz 2 über dieser. Die beiden „verbrauchten“ ersten Stellen 1 und 3 streicht er schräg durch. Die nun gültige dreistellige Zahl 222 liest man über eine Stufe hinweg. Mit der zweiten Stelle des Divisors, also 9, verfährt er analog: Er multipliziert sie mit dem Zwischenergebnis 1 und zieht das Produkt 9 von der gestuft direkt und links oberhalb von der zweiten Stelle des Divisors stehenden zweistelligen Zahl 22 ab. Die Differenz 13 schreibt er direkt (also wieder gestuft) über diese Zahl 22, die er dann ebenso wie die zweite Stelle des Divisors 9 streicht. Zusammen mit der nicht gestrichenen letzten Stelle des Dividenden, also 2, ergibt sich als gültige, gestuft geschriebene Zahl die 132.

Sodann schreibt er den Divisor 19 um eine Stelle nach rechts verschoben direkt (also gestuft) unter das Schema und überschlägt, wie oft dieser in der nicht gestrichenen Zahl 132 vollständig enthalten ist. Das ist sechsmal der Fall, und so schreibt er das Zwischenergebnis 6 rechts neben das erste Zwischenergebnis 1. Nun multipliziert er die erste Stelle des Divisors, also 1, mit dem zweiten Zwischenergebnis 6 und zieht das Produkt 6 von der zweistelligen Zahl 13, die gestuft direkt und links oberhalb von der ersten Stelle des Divisors steht, ab. Er schreibt die Differenz 7 über die zweite Stelle der 13 und streicht diese Zahl ebenso wie die erste Stelle des Divisors. Jetzt ist 72 die gültige, nicht gestrichene Zahl. Schließlich multipliziert er das zweite Zwischenergebnis 6 mit der zweiten Stelle des Divisors, also mit 9, und zieht das Produkt 54 von der nicht gestrichenen Zahl 72 ab. Die Differenz 18 schreibt er über die 72 und streicht diese ebenso wie die zweite Stelle des Divisors. Da die verbleibende Zahl 18 kleiner als der Divisor 19 ist, gelangt er zum Endergebnis, indem er dies als Bruch $\frac{18}{19}$ ausdrückt und ganz rechts zu dem ganzzahligen Anteil des Ergebnisses, zur 16 also, hinzufügt.

(3) Behandlung von Brüchen

Um die Kürzung eines Bruches anzuzeigen, verwendet Leibniz manchmal das Symbol $\overset{5}{\ulcorner}$, wobei der Bogen mit der Ziffer, die den Kürzungsfaktor wiedergibt, oder auch nur die Ziffer weggelassen werden kann. Doppelbrüche markiert er oft durch einen doppelten Bruchstrich. Gelegentlich lässt Leibniz bei der Addition zweier Brüche das Zeichen + aus und deutet die Operation statt dessen durch einen leicht vergrößerten Abstand an. Auch das Gleichheitszeichen kann hierbei entfallen und durch einen vergrößerten Abstand ersetzt werden. Beispiele:

$$\frac{\dfrac{-19-16}{\cancel{8}}}{\dfrac{20}{\cancel{8}}} \quad [=] \quad -\frac{35}{20} \ulcorner -\frac{7}{4} \quad (\text{N. } 9)$$

$$-\frac{\dfrac{35 \frown 2}{8}}{-3} \left(\frac{-70}{-24}\middle| + \frac{35}{12}\right), \frown 1 \qquad \frac{-5}{5-12, = -7} \; [=] \; \frac{\cancel{12}}{7} \frown \frac{35}{\cancel{12}} = 5 \quad (\text{N. } 9)$$

$$1+ \quad \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$$

(4) Klammerung

Um Ausdrücke zusammenzufassen, verwendet Leibniz verschiedene Klammerformen. Neben Rundklammern von recht unterschiedlicher Gestalt benutzt er etwa geschweifte Klammern. Diese können senkrecht oder waagrecht angeordnet sein. Halbklammern setzt er entweder nur am Ende des zusammenzufassenden Ausdrucks oder auf beiden Seiten. (Die einseitigen Halbklammern werden im Band mit einem , wiedergegeben, die beidseitigen mit ⌞ und ⌟.) Alle Klammern können auch mehrfach gesetzt werden. Oft verwendet er auch, um einen Ausdruck als zusammengehörig zu markieren, das *vinculum*, also den Klammerbalken. Umgekehrt dienen um 90 Grad gedrehte Spitzklammern der Aufschlüsselung oder Erläuterung von Termen. Beispiele:

$$\left(\text{ǂ}\,\frac{2r}{t}\mu \sqcap \text{⁺ǂ}\,\frac{2r}{t}\sqrt{-\frac{d^2}{2}-rc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}-e\right)w\,\text{ǂ}\,\frac{r}{t}w^2 \sqcap v^2 \quad (\text{N. } 26)$$

$$v^2\ \frac{\left\{\begin{matrix}+2\beta^2\cancel{g}\\ -bm\cancel{g}\end{matrix}\right.}{g^{\cancel{2}}}\ v \sqcap \frac{\left\{\begin{matrix}-\beta^4\\ +bm\beta^2\\ +b^3p\end{matrix}\right.}{g^2}\ \frac{-nb^2}{g^2}\ y \qquad (\text{N. } 25)$$

$$MG = KG\,((\mp))\,\underbrace{KM = ED} = y\,((\mp))\,c \quad (\text{N. } 7)$$

$$\frac{b}{a}xy+cy+ad,\llcorner\,\text{ǂ}\,\frac{a}{q}x^2-y^2\lrcorner\frown[\pm]\frac{ad}{q}\sqcap 0 \quad (\text{N. } 29)$$

$$(\text{⁺ǂ})\,f\ \text{ǂ}\,(\text{⁺ǂ})\,q,,\frac{q}{-a\pm q}\text{"}\frown(\text{⁺ǂ})\,1-\frac{\langle da\rangle}{\rangle\,((\text{⁺ǂ})\,da\,\llcorner\llcorner -a\pm q\lrcorner\frown y\lrcorner)} = \text{ǂ}q+x \quad (\text{N. } 9)$$

$$e \sqcap [-]\frac{\sqrt[3]{ac^2}}{2}\frown\overline{1+\sqrt{-3}} \quad (\text{N. } 71)$$

$$\left(\mp\right)\overline{\mp\sqrt{\frac{aq^2\mp y^2q}{a}}\ \text{ǂ}\ q}\,(\text{ǂ})\,b = DK \quad (\text{N. } 7)$$

$$-y^2 \sqcap v^2 + \underbrace{f^2}_{-\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{4}} \qquad (\text{N. } 17)$$

(5) Potenzen und Wurzeln

Potenzen gibt Leibniz in der Regel mit Hochzahlen wieder. Ein einem Term voran- oder nachgestelltes Quadrat □ zeigt dessen Quadrierung an. Dieses Schema kann auf beliebige Potenzen erweitert werden, indem der jeweilige Exponent in einen quadratischen oder rechteckigen Rahmen geschrieben wird.

Wurzeln drückt Leibniz ursprünglich aus, indem er den in einen Kreis geschriebenen Wurzelexponenten vor den Radikanden setzt und diesem Ausdruck noch ein R (für *radix*) voranstellt. Seit Frühsommer 1673 kennzeichnet er Wurzeln durch das moderne Wurzelzeichen. Häufig lässt er bei diesem den Balken weg. Bei höheren Wurzeln kann der Wurzelexponent auf die moderne Weise geschrieben werden, er kann aber auch — so in den Stücken des vorliegenden Bandes — nach Stevin'schem Vorbild in einen Kreis hinter das Wurzelzeichen gesetzt werden. Beispiele:

$\llcorner\Box\ \text{ǂ}\!\!\!/\ \not\oint(+x)\ \text{ǂ}\ \sqrt{\dfrac{aq^2\ \text{ǂ}\ y^2q}{a}}\ \text{ǂ̲}\!\!\!/\ \not\oint\lrcorner \frown \Box\overline{({}^{+}\text{ǂ})\,da+y\gamma} = \dfrac{aq^2\ \text{ǂ}\ y^2q}{a}, \frown d^2a^2\,({}^{+}\text{ǂ})\,2day\gamma+y^2\gamma^2$ (N. 9)

$\boxed{2}\,\overline{y-b}+\boxed{2}\,\overline{\dfrac{r}{a}\overline{y-b}} \sqcap z^2$ (N. 69)

$a+b, \Box$, signifie le quarré de $a+b$
$a+b, \boxed{3}$, en signifie le cube (N. 13)

$\dfrac{3}{R③2}=\delta^2$ (N. 4)

Ergo $x=\sqrt{}③a^2b$. (Quod si ducatur in a^2b, vel $\sqrt{}③a^6b^3$, fiet $\sqrt{}③a^8b^4=x^4$, vel $\sqrt{}③a^2b^4=\dfrac{x^4}{a^2}$.) (N. 4)

$\female \sqcap \sqrt{④\dfrac{\male}{\text{ת}}} \frown \sqrt{\dfrac{\male\text{ג}^2}{\text{ת}}}$ (N. 31)

(6) Wiederholung und Auslassung von Termen

Bestehen die Koeffizienten von Polynomen etc. aus einer Summe, schreibt Leibniz die Summanden in der Regel untereinander. Fallen in einem Ausdruck Terme aus, welche normalerweise zu erwarten wären, markiert Leibniz nach Descartes'schem Vorbild ihre Position mit einem Sternchen $*$. Treten dagegen einzelne Terme oder größere Formelbestandteile mehrfach auf, ersetzt er sie häufig ab der zweiten Nennung durch einen oder mehrere Punkte, wobei die Ausdehnung des ersetzten Terms simuliert werden kann. Beispiele:

$$\begin{array}{llllllll}
\text{ǂ}\ a^2 & y^4 & {}^{+}\text{ǂ}\ \text{ǂ̲}\ 2da^2 & y^3 & \text{ǂ̲}\ 2q^2af & y^2 & {}^{+}\text{ǂ̲}\ 2da^3q & y+d^2a^3q \sqcap 0 \\
+\ 2aq & \cdot\cdot & {}^{+}\text{ǂ̲}\ 2daq & \cdot\cdot & -\ qaf^2 & \cdot\cdot & {}^{+}\text{ǂ}\ \text{ǂ̲}\ 2dq^2a^2 & \cdot\cdot \\
\text{ǂ}\ q^2 & \cdot\cdot & & & \text{ǂ}\ 2\,q^2a^2 & \cdot\cdot & & \\
 & & & & +\ a^3q & \cdot\cdot & & \\
 & & & & \text{ǂ}\ d^2a^2 & \cdot\cdot & &
\end{array}$$
(N. 14)

$y^4\ *\ bmy^2 \sqcap -b^2ny+b^3p$ (N. 25)

Mais PF ou $\sqrt{f^2\,({}^{+}\text{ǂ})\,2af+a^2}$, peut valoir

$$\begin{array}{lclcl}
+ & AF\sim f & ({}^{+}\text{ǂ}) & AP\sim a \\
({}^{+}\text{ǂ}) & \ldots\ldots\ldots\ldots & + & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
- & \ldots\ldots\ldots\ldots & ({}^{+}\text{ǂ̲}) & \ldots\ldots\ldots\ldots \\
({}^{+}\text{ǂ̲}) & \ldots\ldots\ldots\ldots & - & \ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}$$
(N. 15)

(7) Streichungen

Die Aufhebung eines Terms im Verlauf einer Umformung zeigt Leibniz an, indem er diesen schräg durchstreicht, ihn einklammert oder mit einem abgerundeten Rahmen umgibt. (Umrahmungen können allerdings auch der Hervorhebung dienen; zur Unterscheidung von den Streichungen werden diese im Band eckig wiedergegeben.) Werden auf den beiden Seiten einer Gleichung jeweils mehrere Terme durch Umrahmung aufgehoben, ordnet Leibniz gelegentlich die sich entsprechenden durch Strichbündel einander zu. Beispiele:

$$\ldots \sqcap \cancel{e^2} \frown 16d^4a^2 \frown \boxed{1+\frac{x}{q}\,\square}\; 1+\frac{2x}{q}+\frac{x^2}{q^2} \quad \text{(N. 36)}$$

$$\left(\frac{a^2}{\frac{a}{q}} = \frac{a^2q}{a} = \right) aq + \frac{a}{q}x^2 \mp \left(\frac{2ax\sqrt{\frac{a}{q}}}{\sqrt{\frac{a}{q}}}\right) 2ax \quad \text{(N. 5)}$$

$$2az + \boxed{2ab}\,, \mp\frac{a}{q}z^2 \mp 2\frac{a}{q}bz \boxed{\mp\frac{a}{q}b^2} \quad \begin{matrix}(16)\\ \sqcap \\ \text{in locum}\\ \text{aeq. 1}\end{matrix} \quad \underbrace{\varphi^2 - 2\varphi\delta + \delta^2}_{\boxed{2ab}\ \boxed{\mp\frac{a}{q}b^2}} \quad \text{(N. 69)}$$

(8) Homogene Gleichungen und fortlaufende Gleichungsketten

Viele Gleichungen schreibt Leibniz in Anlehnung an Viète homogen. Bisweilen rechnet er fortlaufend; er bildet also Gleichungsketten, indem er, ohne die linke Seite der Gleichung zu verändern oder das Gleichheitszeichen zu streichen, an ihrer rechten Seite eine Operation durchführt und deren Ergebnis nach einem zweiten Gleichheitszeichen notiert. Somit besteht trotz des Gleichheitszeichens die ursprüngliche Identität nicht mehr. Beispiele:

$x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx + a^3p \sqcap 0$ (N. 38)

$\alpha - f, \frown 2\alpha$, fit: $2\alpha^2 - 2\alpha f. - \alpha^2 - f^2 + 2\alpha f$. Fiet $\alpha^2 - f^2$ (N. 3)

$b \sqcap y, \frown +b - y \sqcap yb - y^2$ (N. 57)

Im letztgenannten Beispiel rechnet Leibniz zunächst $b \sqcap y, +b - y$, ergänzt dann auf der rechten Seite das Symbol $\frown$ und berechnet nun $y, \frown +b - y \sqcap yb - y^2$.

(9) Indizes

Kann ein Punkt in einer Figur unterschiedliche Positionen einnehmen, unterscheidet Leibniz diese bisweilen durch Kardinalzahlen, die er der Bezeichnung des Punktes voranstellt. Diese entsprechen den modernen nach- und tiefgestellten Indizes. Beispiel:

[E]t à l'egard des lieux du point donné, D, il est manifeste, que ce lieu peut tomber ou en $1D$ au dessus du sommet de la ligne sçavoir au dessus du poinct A, ou en $2D$ vis a vis du dit sommet, ou en $3D$, entre le sommet et le poinct B, où la perpendiculaire doit rencontrer la courbe; ou en $4D$, dans la courbe même, de sorte que les points D et B alors reviennent à un seul, ou en $5D$, entre la courbe ABC, et l'Axe AF, ou en $6D$ dans l'axe même, ou enfin en $7D$ de l'autre costé de l'axe. (N. 11)

(10) Weitere neue Notationen

Wohl im April 1676 verwendet Leibniz mit $\backsim$ ein neues Symbol für die Ähnlichkeit von Dreiecken. Ob er es auch andernorts einsetzt, ist bislang nicht bekannt. Das Beispiel:

$ABD \backsim TMN$ (N. 66)

Im gleichen Stück entwickelt er schrittweise eine neue Notation für die eindeutige Zuordnung bestimmter geometrischer Größen zueinander. Er geht von einer Kurve aus, auf der ein Punkt D mit der Ordinate y liegt. Wird an diese Kurve eine Tangente angelegt, die jene eben in D berührt, so bezeichnet Leibniz den Tangentenabschnitt zu y (also den Abstand zwischen D und dem Schnittpunkt der Tangente mit der x-Achse) als $y^{\boxed{t}}$. Die Abszisse des Punktes D bezeichnet er auf analoge Weise mit $y^{\boxed{x}}$. Um Platz für einen etwaigen Exponenten zu schaffen, verwendet er hierfür auch die Schreibweise $\overset{\boxed{x}}{y}$. Ob Leibniz diese Notation — die man modern gesprochen als eine Schreibweise für Funktionen bezeichnen könnte und die er selbst als besonders leistungsfähig einschätzt — in seinem weiteren Werk verwendet, ist noch nicht geklärt. Beispiele:

$EG \sqcap FG^{\boxed{t}}$

$DN \sqcap e^{\boxed{x}} - y^{\boxed{x}}$

$DG \sqcap \sqrt{\llcorner e^2 - 2ey + y^2 + \overset{\boxed{x}}{e}{}^2 - 2\,\overset{\boxed{x}}{e},\overset{\boxed{x}}{y} + \overset{\boxed{x}}{y}{}^2 \lrcorner}$ (alle aus N. 66)

Zu den im Band auftretenden mathematischen Symbolen siehe auch S. 674 f.

Siegmund Probst Achim Trunk

ZUR TEXTGESTALTUNG

In der Textgestaltung werden die Grundsätze befolgt, die in den Vorworten zum fünften Band der Reihe I und zum sechsten Band der Reihe VI entwickelt wurden. Insbesondere gilt:

1. Jedes unbetitelte Stück erhält eine Überschrift in der Sprache des Stückes.

2. Die Groß- und Kleinschreibung lateinischer Texte wird normalisiert. Ebenso werden *i* und *j* sowie *u* und *v* vereinheitlicht. Vollständige Sätze werden mit einem Punkt abgeschlossen. Jeder Satzanfang wird groß geschrieben. Akzente fallen weg. Bei französischen Texten wird das Schriftbild beibehalten, jedoch werden Akzente dort ergänzt, wo Missverständnisse entstehen können.

3. Die Leibnizsche mathematische Notation wird grundsätzlich beibehalten. Bei schwankender Bezeichnung von Strecken und Größen wird nach dem Mehrheitsprinzip vereinheitlicht. Aufgrund des Konzeptcharakters der meisten Stücke treten häufig Flüchtigkeiten auf. So fehlen gelegentlich Wurzelbalken, Klammern, Multiplikationszeichen, besonders oft aber Pluszeichen. In solchen Fällen wird nach sonstigem Leibnizschen Gebrauch stillschweigend ergänzt (bei stärkeren Eingriffen mit Dokumentation im Apparat). Leibniz neigt dazu, in seinen Konzepten auch einfachste numerische Rechnungen wie $11 \times 11, 18 \times 3$ schriftlich auszuführen. Solche Nebenrechnungen werden nicht abgedruckt. Rechenfehler werden grundsätzlich im Apparat angezeigt. Ausnahme: Verschreibungen im Rechengang; diese werden stillschweigend verbessert.

4. Die Leibnizsche Interpunktion wird bewahrt. Hinzugefügte Zeichen werden — abgesehen von den in Punkt 2 und 3 genannten Fällen — in eckige Klammern gesetzt. Es ist anzumerken, dass bei Leibniz ein Komma oder auch ein Semikolon oft die Funktion hat, eine längere Phrase vor der Verbindung mit dem zugehörigen Prädikat zusammenzufassen.

5. Die Leibnizschen Zeichnungen werden möglichst genau nach der Vorlage und mathematisch korrekt wiedergegeben. Linien in Blindtechnik, die also nur im Papier eingedrückt oder eingeritzt sind, werden im Druck gekennzeichnet.

Weitere Einzelheiten zur Textgestaltung siehe unter SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN.

ZUR VARIANTENGESTALTUNG

Auch die Variantengestaltung erfolgt gemäß den Regeln der Ausgabe. Die Variante ist durch Zeilenangabe sowie vorderen und hinteren Anschluss eindeutig mit dem Haupttext verknüpft. Einer dieser Anschlüsse kann insbesondere bei Rechentexten fehlen. Streichungen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt, Ergänzungen durch bloße Angabe des hinzugefügten Textes dargestellt. Bei Korrekturen kennzeichnen vorgesetzte Ziffern *(1)*, *(2)*, *(3)* ... und Buchstaben *(a)*, *(b)*, *(c)* ... *(aa)*, *(bb)*, *(cc)* ... die Stufen der Gedankenentwicklung. Kleinere Streichungen bzw. Ergänzungen innerhalb der einzelnen Stufen werden zwischen senkrechte Striche gesetzt. Jede nachfolgende Stufe hebt die vorhergehende auf. Nachgestellte Siglen (in diesem Band meist *L*) bezeichnen den Textzeugen, welchem die Variante entnommen ist.

In den Varianten werden Wortlaut und Zeichensetzung grundsätzlich nicht berichtigt, auch nicht bei offensichtlichen Fehlern. Abbrechende Wörter werden nicht vervollständigt. In der letzten Korrekturstufe werden aus dem Text übernommene Abschnitte durch Pünktchen abgekürzt wiedergegeben.

KURVEN, CONSTRUCTIO AEQUATIONUM, MÉTHODE DE L'UNIVERSALITÉ 1673–1676

1. DE PROBLEMATIS MORE VETERUM CONSTRUENDIS
[Frühjahr – Herbst 1673 (?)]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 I 18 Bl. 11. 1 Streifen 11,4 × 1,4 cm. 1 S. auf Bl. 11 v°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat sich seit dem Frühjahr 1673 intensiv mit verschiedenen Lösungsmethoden für algebraische Gleichungen befasst (vgl. III, 1 N. 9; VII, 1 N. 109 und N. 110). Die vorliegende Notiz scheint in die Anfangszeit seiner Studien zur *constructio aequationum* zu gehören.

Mons. Hugens est apres pour establir quelque chose de compositione Mathematica seu de problematis per Algebram solutis more veterum Geometrarum construendis, saepe fit ut problemata breviter constituantur Geometrice etsi longa sit eorum aequatio.

---

8 *Hugens*: vgl. VII, 1 N. 109 S. 677.

2. SIGNA AMBIGUA PRIMA
[1673 – erste Hälfte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 57. Fragment von unregelmäßiger Gestalt, oben Risskante, an den drei anderen Seiten beschnitten, Größe etwa 11 × 11 cm. 5 Z. auf Bl. 57 r°, Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 863 I

Datierungsgründe: Das hier verwendete Doppelvorzeichen ⩱ als Negation von ∓ (welches für das moderne ± steht) findet sich in drei Stücken, die die Hrsg. auf Frühjahr – Sommer (?) 1673 (VII, 1 N. 110), Sommer 1673 (VII, 4 N. 30) sowie auf Ende 1673 – Mitte 1674 (VII, 3 N. 26) datieren. In einem Stück aus dem Juni 1674 (VII, 1 N. 41) verwendet Leibniz bereits das Symbol ⩲ als Gegenstück zu ∓. Die Verwendung des modernen Gleichheitszeichens deutet ebenfalls auf einen Zeitraum bis spätestens Juni 1674.

a	=	*b*		∓	*a*		⩱	
				–	*b*			
				⩱	*ab*			
⩱	*a*	⩱	*y*	=	*d*			
		⩱	*y*	=	*d*	⩱	*a*	

16 ⩱ a ⩱ *(1)* b = y *(2)* y = d *L* 17 *(1)* ⩱ — *(2)* ⩱ *(a)* y *(b)* | $\sqrt{}$y *ändert Hrsg.* | = *L*

17 ⩱ *a*: Das *a* weist oben und links eine Umrahmung auf, wie sie Leibniz für die Quadrierung verwendet, rechts und unten verläuft die Schnittkante des Fragmentes eng am *a*.

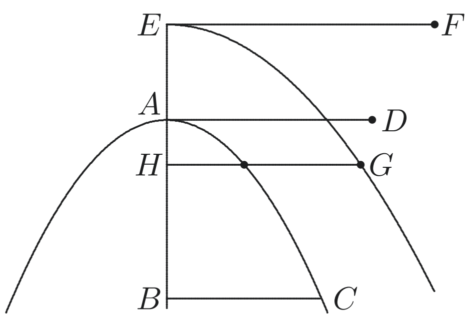
3. PERPENDICULARIS AD PARABOLAM
[Herbst 1673]

Überlieferung: *LuO* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Ozanam): LH 35 XII 2 Bl. 159 bis 162. 2 Bog. 2°. Teil 1 u. 2: 1 S. auf Bl. 162 v°. Ca $\frac{1}{6}$ S. auf Bl. 161 v°. Teil 3 u. 4: 1 S. auf Bl. 160 v° u. 3 Z. auf Bl. 161 r°. Vermutlich sind die Notizen von Ozanam und die Fig. 1 bis 8 von Teil 1 sowie die Rechnungen von Teil 2 während des Gesprächs niedergeschrieben worden. Die weiteren Notizen von Leibniz sind später hinzugekommen. — Auf dem Rest des Trägers VII, 4 N. 42_2 u. VII, 4 N. 48.
Cc 2, Nr. 561 tlw.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt. Das vorliegende Stück dürfte ebenso wie die auf denselben Träger geschriebenen VII, 4 N. 42_2 und VII, 4 N. 48 im Herbst 1673 entstanden sein.

[*Teil 1*]

[*Ozanam*]

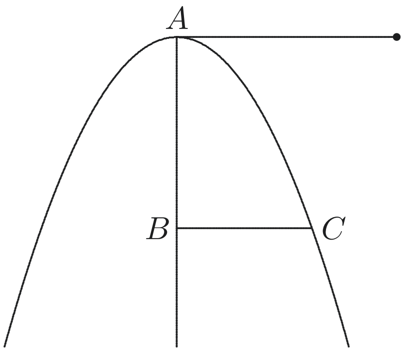


[*Fig. 1*]

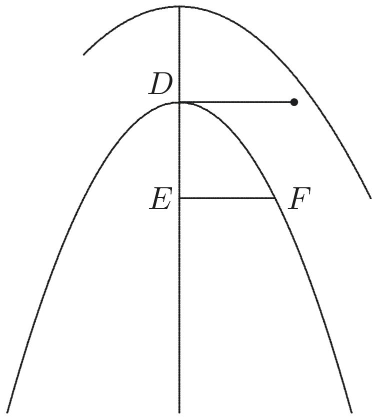
$$AD \sim a$$
$$AB \sim b$$
$$BC \sim \sqrt{ab}$$
$$EH \sim x \sim \sqrt{\frac{bc2}{a}}$$
$$HG \sim c$$
$$EF \sim \sqrt{\frac{c2a}{b}}$$
$$AD, AB :: HGq, EHq$$

$$\sqrt{ab}, a, ca$$
$$\sqrt{\frac{c2a2}{ab}}$$
$$\sqrt{\frac{c2a}{b}}$$
$$\sqrt{\frac{c2ax2}{b}} \sim c2$$
$$c2ax2 \sim bc4$$
$$ax2 \sim bc2$$
$$x2 \sim \frac{bc2}{a}$$
$$a, b :: c2, x2$$

[*Leibniz*]

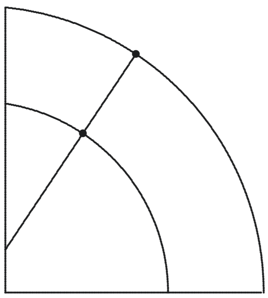


[*Fig. 2*]

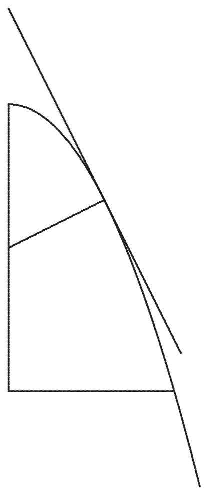


[*Fig. 3*]

[*Leibniz oder Ozanam*]



[*Fig. 4*]

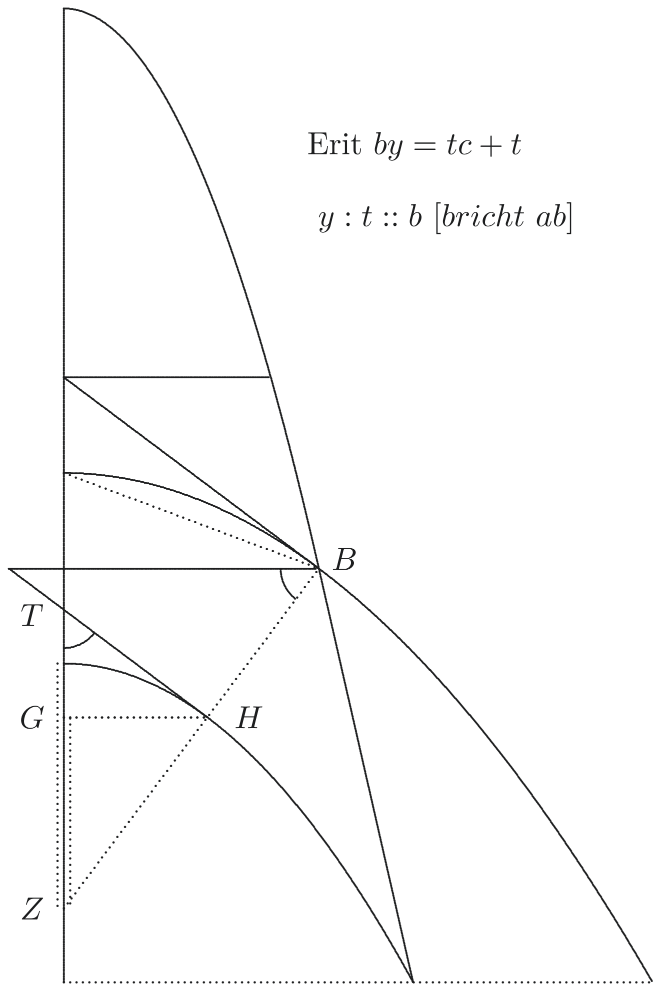


[*Fig. 5*]

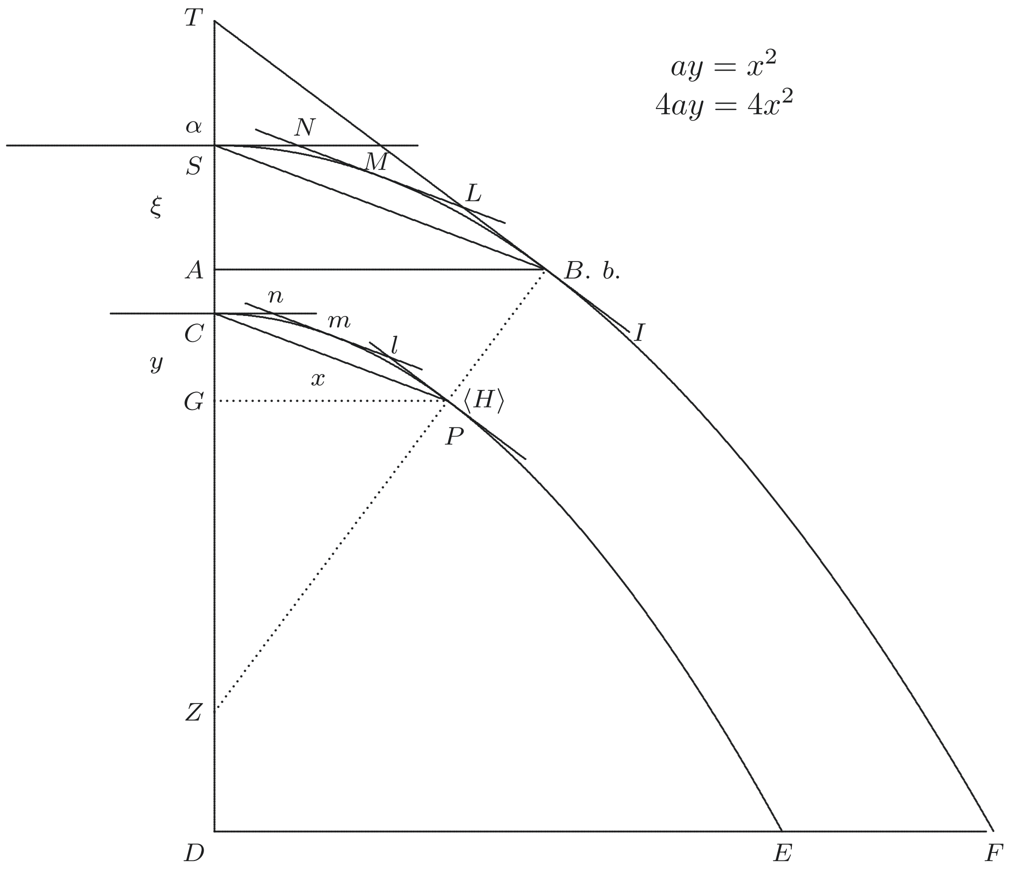
[*Leibniz*]

Erit $by = tc + t$

$y : t :: b$ [*bricht ab*]



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

$CD = a$. $AB = b$. $AC = c$. $AZ = z$. $\alpha D = \alpha$. latus quaesitae $= D\alpha$. $\alpha A = \alpha - a - c$. Ergo $AB^{[2]}$ erit $= \alpha - a - c, \frown \alpha = \alpha^2 - a\alpha - c\alpha$. $\alpha^2 - a\alpha - c\alpha = b^2$. Fiat $a + c = f$. habebimus $\alpha^2 - f\alpha = b^2$.

1 *Neben Fig. 7:* jam assumtis αA, AB, et AD, velut cognitis, inde elicietur AZ methodo Tangentium Cartesii. *gestr. L* 3 $-\mathrm{c}\alpha$ | $\alpha^2 - \mathrm{a}\alpha - \mathrm{c}\alpha$ *gestr. u. wieder gültig gemacht* | $= \mathrm{b}^2$ *(1)* ponatur *nicht gestr. (2)* fiat *L* 4–9,1 α^2 | + *ändert Hrsg.* | $\mathrm{f}\alpha = \mathrm{b}^2$ | $\alpha^2 = \mathrm{f}\alpha + \mathrm{b}^2$. *(1)* Esto *(a)* $\mathrm{f} + \mathrm{b} =$ *(b)* $\mathrm{f} = \mathrm{g} - \mathrm{b}$, erit $\mathrm{g}^2 -$ *(2)* Esto $\alpha^2 =$ *(3)* $\alpha^2 + \frac{\mathrm{f}^2}{4} + \mathrm{f}\alpha = \mathrm{b}^2 + \frac{\mathrm{f}^2}{4}$ Ergo $\alpha + \frac{\mathrm{f}}{2} = \sqrt{\mathrm{b}^2} + \frac{\mathrm{f}^2}{4}$ $\alpha = \sqrt{\mathrm{b}^2 + \mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2 - 2\mathrm{ac}} + \frac{\mathrm{a} - \mathrm{c}}{2}$ *gestr.* | Si *L*

5 methodo Tangentium: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, *DGS* I, 1659 S. 40–49.

Si curva sit Circulus erit $\alpha A \frown \alpha D - \alpha A^2 = b^2$ et $\alpha A \frown \alpha D = \alpha - a - c, \frown \alpha = \alpha^2 - f\alpha$ a quo auferatur $\alpha A^2 = \alpha^2 + f^2 - 2\alpha f$ erit $\alpha^2 - f\alpha - \alpha^2 - f^2 + 2\alpha f$. seu $\alpha f - f^2 = b^2$. Ergo $\alpha = \dfrac{b^2 + f^2}{f} = \dfrac{b^2}{f} + f$.

Imo sic: $\alpha - f, \frown 2\alpha$, fit: $2\alpha^2 - 2\alpha f. - \alpha^2 - f^2 + 2\alpha f$. Fiet $\alpha^2 - f^2 = b^2$. sive $\alpha = \sqrt{b^2 + f^2}$. Hinc patet in circulo prima statim operatione hoc modo inveniri quod quaeritur.

Parabolae similes sunt ut lat. recta, at non in aliis Conicis. Si sit $\dfrac{x}{\sqrt{xa}} = \dfrac{z}{\sqrt{zb}}$. Ergo $\dfrac{x^2}{xa} = \dfrac{z^2}{zb}$. Ergo $\dfrac{x^2}{z^2} = \dfrac{xa}{zb}$. Ergo $\dfrac{x}{z^2} = \dfrac{a}{zb}$ Ergo $\dfrac{x}{z} = \dfrac{a}{b}$.

$\dfrac{x^2}{xa} = \dfrac{z^2}{zb}$. Ergo $\dfrac{x}{a} = \dfrac{z}{b}$.

$\dfrac{x}{\sqrt{2ax - x^2}}$ $\dfrac{z}{\sqrt{2bz - z^2}}$. $\dfrac{x}{\sqrt{ax + x^2}}$ $\dfrac{z}{\sqrt{bz + b^2}}$. Ergo $\dfrac{x^2}{ax + a^2} = \dfrac{z^2}{bz + b^2}$. Ergo $x^2bz + x^2b^2 - axz^2 - a^2z^2 = 0$. Fiat $z = x\gamma$. fiet $x^3b\gamma + x^2b^2 - ax^3\gamma^2 - a^2x^2\gamma^2$.

---

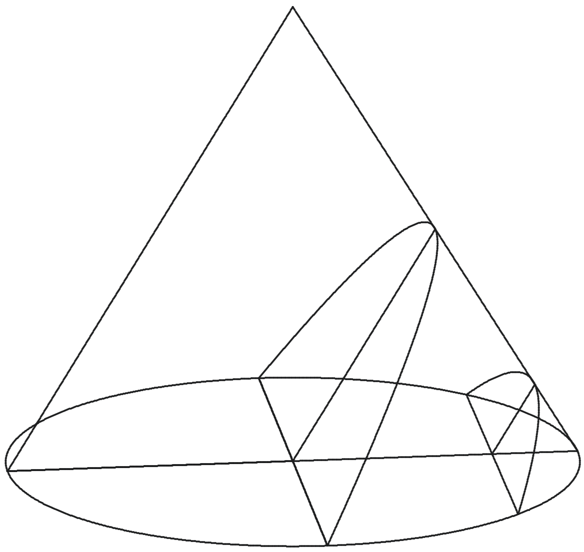
3 *Nebenbetrachtung:* $\alpha = f + h$.

---

8 f. $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{z}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ | invento jam qvodammodo latere recto figurae qvaesitae fiat ut latus rectum qvaesitum αD ad latus rectum datum CD. ita applicata figurae qvaesitae AB. ad applicatam qvaesitam figurae datae GH. Jamqve assumto GH. velut invento invenietur per proprietatem figurae et CG ab eadem *gestr.* | $\frac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{xa}} = \frac{\mathrm{z}^2}{\mathrm{zb}}$ *L* 9 f. $\frac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} = \frac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}$ *(1)* qvoniam si *(2)* Ergo figurae similes sunt ut latera recta, nam in duabus ejusdem figurae *(a)* aeqvationibus *(b)* terminis aeqvatis, si aliqvi demto uno sunt proportionales etiam qvi restant erunt. *(3)* $\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{2\mathrm{ax} - \mathrm{x}^2}}$ *L* 12 $\alpha = \mathrm{f} + \mathrm{h}$ | $\underset{\substack{\wedge \\ \mathrm{f}^2 + \mathrm{h}^2 + 2\mathrm{fh}.}}{\alpha^2} - \mathrm{f}\alpha = \mathrm{b}^2$ *gestr.* | *L*

---

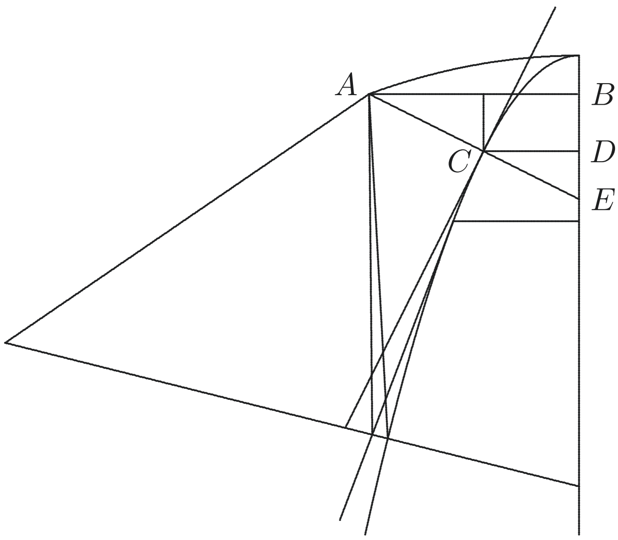
1 Circulus: Richtig wäre $\alpha A(2\alpha D - \alpha A) = b^2$. Leibniz setzt in Z. 4 korrekt neu an. 4 sic: Leibniz berechnet fortlaufend $(\alpha - f)[2\alpha - (\alpha - f)] = b^2$.



Investiganda est Hyperbolae quoque resecta.

[*Fig. 8*]

[*Zusatz auf Bl. 161 v°*]

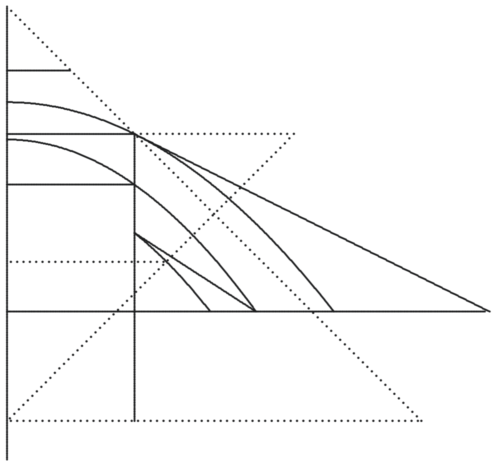


[*Fig. 9*]

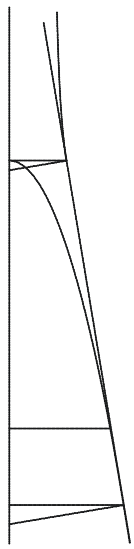
$AB = b$. $BE = r$. $CD = q$. Ea autem q. exprimatur ex natura figurae seu aequatione, cum sit ordinata. Inventa jam ratione q ad DE, inventa etiam erit ratio AB. ad BE.

1 f. Investiganda ... resecta: vgl. Teil 4 sowie VII, 4 N. 47.

nec alia re opus est quam ut curva priori similis axis ejusdem per punctum A cogitetur transire.



[*Fig. 10*]



[*Fig. 11*]

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{r} 325 \\ \underline{987} \\ [1]312 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 432 \\ \underline{28} \\ 3456 \\ \underline{864} \\ [12]096 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 432 \\ \underline{2} \\ 864 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 999 \\ 866 \\ \underline{158} \\ [2]023 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 999 \\ \underline{9} \\ 8991 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 999999 \\ 999999 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \cancel{1}9 \\ \cancel{3}\cancel{3}0 \fint 2 \\ \cancel{1}\cancel{2}0 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 90 \\ 35 \\ 24 \\ \underline{39} \\ \underline{[1]88} \\ 90 \\ 5 \\ 4 \\ \underline{9} \\ 108 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 278 \\ \underline{9} \\ 188 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 653 \\ \underline{25} \\ 3265 \\ \underline{1306} \\ 16325 \end{array}$$

[*Teil 3*]

$a^3 + b^3 = x^3$. Ergo $\sqrt{③ a^3 + b^3} = x$. $a^3 + b^3 - x^3 = 0$.

$a^3 = x^3$. Ergo $\frac{a^2}{1} = \frac{x^3}{a}$. Ergo $a = \sqrt{\frac{x^3}{a}}$, vel $\frac{a}{x} = \sqrt{\frac{x}{a}}$. Ergo $\sqrt{\frac{xa^2}{x^2a}} = \sqrt{\frac{x^2}{a^2}}$ erit $= \frac{x}{a}$.

$a^3 + b^3 = x^3$. Jam $\sqrt{③ a^3 + b^3}$ [*bricht ab*]

Ergo $a^2 + \frac{b^3}{a} = \frac{x^3}{a}$. Manifestum est autem facile haberi posse a^2, facile etiam haberi $\frac{b^2}{a}$, rectam in plano, quae habita ducetur in b. hoc rectangulum ipsi a^2, addatur; habebimus $a^2 + \frac{b^3}{a}$. Quod rectangulum si in rectam a ducemus, prisma habebimus cubo x^3 aequale.

[*Zusatz auf Bl. 161 r^o, quer geschrieben*]

$a^3 + b^3 = x^3$. $\frac{a^3}{b} + b^2, \frown b$.

$y^4 + y^3a + yb^3 = x^3a$ et $f = 3x^2la$. Ergo

$$y^2 = \underbrace{\frac{x^3a - y^3a - yb^3}{y^2}}_{p} \times \frac{y^4 + y^3a + yb^3}{x^2a} = l$$

$fy^6 + fy^5a + fy^3b^3 = x^5a^2, -\ y^3x^2a^2 - yb^3x^2a$

$f - x = p$.

[*Teil 4*]

$$\frac{ax + x^2}{\frac{a}{2} - x} = \frac{2ax + 2x^2}{a - 2x} = \frac{2x^2 + 2ax}{-2x + a} ⨍ -x + \frac{3ax}{-2x + a}$$

$$\frac{3ax}{a - 2x} ⨍ 3x \text{ [\textit{bricht ab}]}$$

---

12 Ergo: Die folgende Bestimmung der Subtangente l und der Subnormale p unter Verwendung des Ansatzes $y^2 = pl$ statt $x^2 = pl$ ist fehlerbehaftet.

$$\frac{2x^2 - ax + ax}{-2x + a} \fint - x + \frac{ax}{a - 2x}$$

$$\frac{2x^2}{a - 2x} + \frac{2ax}{-2x + a} \qquad\qquad \frac{2x^2 + 2ax}{a - 2x}$$

$$/\backslash$$

$$\frac{2ax - 4x^2 + 4x^2}{a - 2x} \fint \overbrace{2x + \frac{6x^2}{a - 2x}}$$

$$\frac{6x^2 - 3xa + 3xa}{-2x + a} \fint - 3x \, \frac{+3xa}{-2x + a}$$

$$\frac{xa - x^2}{\frac{a}{2} - x} \text{ vel } \frac{2xa - 2x^2 - 2x^2 + 2x^2}{a - 2x} \mid 2x \,[+]\, \frac{2x^2}{a - 2x}$$

$$\frac{2x^2}{a - 2x} = \frac{2x^2 - xa + xa}{-2x + a} = -x\frac{+xa}{a - 2x}.$$

Ergo fit $x + \dfrac{xa}{a - 2x}$.

$$\frac{xq}{q \mp 2x} \fint x - \mp \frac{2x^2}{q \mp 2x}.$$

$$a\cancel{x} \mp x^{\cancel{2}} = \cancel{x}f + \frac{\cancel{x}af}{a - 2x} - x^{\cancel{2}} - \frac{x^{\cancel{2}}a}{a \mp 2x}$$

$$a \mp \cancel{x} = f + \frac{af}{a - 2x} - \cancel{x} - \frac{xa}{a \mp 2x}$$

$$a - f = a \frown \frac{f - x}{a - 2x}.\ a - f \frown a - 2x = a \frown f - x.\ a^2 - \cancel{fa} - \cancel{2}ax + 2xf = 2af - \cancel{ax}.$$

$$a^2 - ax + 2xf = 2af.\ \ 2af - a^2 = 2xf - ax.\ \frac{2af - a^2}{2f - a} = x = a.$$

$$ax \mp \frac{a}{q}x^2 = xf + \frac{xqf}{q \mp 2x} - x^2 - \frac{x^2q}{q \mp 2x} \text{ seu}$$

12 f. $-\cancel{ax}$ *(1)* $\cancel{2}x\cancel{f} = \dfrac{2af - a^2}{2f} = a - \dfrac{a^2}{2f}$ | Ergo $\dfrac{x}{a} = 1 - \dfrac{a}{2f}$ *nicht gestr.* | *(2)* a^2 *L*

11 $\mp \cancel{x}$: Leibniz setzt nun $-$ für $\mp$.

$$a \mp \frac{a}{q}x = f + \frac{qf}{q \mp 2x} - x - \frac{xq}{q \mp 2x}$$

$$aq \mp ax = fq + \frac{q^2 f}{q \mp 2x} - xq - \frac{xq^2}{q \mp 2x}.$$

$$aq^2 \underbrace{\mp 2xaq \mp xaq}_{\mp 3xaq} \Cap 2ax^2 = \underbrace{fq^2 \mp 2xfq + q^2 f}_{2fq^2} - \underbrace{xq^2 \overline{\mp} 2x^2q - xq^2}_{2xq^2}.$$

Unde fit pro circulo:

$a^2 - \cancel{3}xa = 2fa - 2xf \cancel{-2xa}$. $a^2 + 2xf = 2fa + xa$. Ergo $a^2 + 2xf - 2fa = xa$. Ergo $a^2 - 2fa = xa - 2xf$, sive $\dfrac{a^2 - 2fa}{a - 2f} = a = x$.

$$d - \sqrt{ax \mp \frac{a}{q}x^2} = \frac{x + \dfrac{xq}{q \mp 2x}}{\sqrt{ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}} \frown x - f.$$

$$d\underbrace{\sqrt{ax \mp \frac{a}{q}x^2}}_{y} = ax \mp \frac{a}{q}x^2, + x + \frac{xq}{q \mp 2x} \frown x - f = \frac{2xq \mp 2x^2 \cancel{\mp xq}}{q \mp 2x} \frown x - f =$$

$$[2]xq \mp 2x^2 \frown \frac{x - f}{q \mp 2x}.$$

$$d^2 \frown \underbrace{a\cancel{x} \mp \frac{a}{q}x^{\cancel{2}}}_{y^2} = \underbrace{a^2x^{\cancel{2}} \Cap \frac{a^2}{q^2}x^{\cancel{4}3} \mp \frac{2a^2x^{\cancel{3}2}}{q}}_{y^4} + 4x^{\cancel{2}}q^2 \Cap \underbrace{4x^{\cancel{4}3} \mp 4x^{\cancel{3}2}q \frown \frac{\overset{\odot}{x^2 + f^2 - 2xf}}{\underset{\rightmoon}{q^2 \Cap 4x^2 \mp 4qx}}}_{x \frown x^2 + f^2 - 2xf \frac{+3xq^2}{\rightmoon} \frown \frac{\odot}{4}}$$

$$+2ax^{\cancel{2}}q \mp 3\cancel{2}ax^{\cancel{3}2} \mp \cancel{ax^3} \Cap \frac{a}{q}x^{\cancel{4}3}$$

9 $= \dfrac{2xq \mp 2x^2 \cancel{\mp xq}}{q \mp 2x} \frown x - f$: Leibniz formt nur den Abschnitt rechts des Kommas der vorhergehenden Summe um. Die folgende Rechnung enthält Unstimmigkeiten.

$$d \frown \sqrt{ax+x^2} = ax + 2x^2 + \frac{x^2a - fxa}{a+2x} - fx.$$

$$a^2x + \cancel{2x^2a} + \cancel{2x^2a} + 4x^3 + x^2a - \cancel{fxa} - \cancel{fxa} - 2fx^2$$

$$a^2\cancel{x} + 4x^{\cancel{3}2} + \underbrace{x^{\cancel{2}}a - 2fx^{\cancel{2}}}_{x^{\cancel{2}}g} = d \frown \underbrace{\sqrt{ax+x^2}}_{\sqrt{\frac{a}{x}+1}}$$

$$\frac{d^2a}{x} + d^2 = a^4 + 8a^2x^2 + 2a^2gx + 16x^4 + 8gx^3 + g^2x^2$$

4. DUO PROBLEMATA
[Herbst 1673]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 70–71. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 562

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1673 belegt. N. 4 greift die Problemstellungen von N. 3 auf und dürfte kurz danach entstanden sein.

Problema: I.
Ex puncto extra curvam dato ducere perpendicularem ad curvam

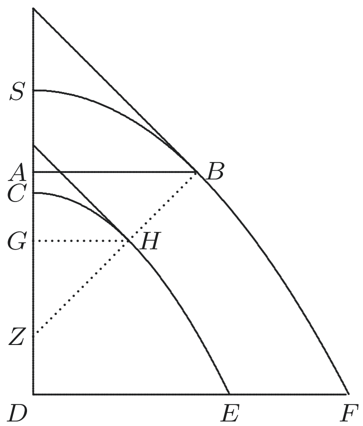
Sumatur quantacunque portio curvae CHE, quam recta BH. quaesita ex puncto dato B. ducta ad angulos rectos in H secare debet et ex duobus punctis extremis C

10–17,1 *Nebenbetrachtung:* $FP = AF - AX + XP$

9 ducere *(1)* secantem *(2)* perpendicularem *L* 10 curvae | CHF *ändert Hrsg.* | *(1)* per qvam secantem *(2)* qvam recta *(a)* perpendicularis *(b)* BH. *L* 11 rectos *(1)* ducta, transire *(2)* in H *L* 11–17,1 C et D *L ändert Hrsg.*

---

10 curvae: Leibniz bezieht sich vermutlich auf Fig. 7 von N. 3. Die folgende Skizze gibt die in N. 4 verwendeten Elemente der Figur wieder:



12 $FP = AF - AX + XP$: vgl. N. 5 Fig. 1; AX und XP müssen aber dasselbe Vorzeichen haben.

et E. ducantur rectae CD. ED quae non curvam ante quam se invicem secent in D. Inde ducatur alia curva SBF, per punctum datum B transiens, ejusdem naturae, similisque ac similiterque posita priori, ut DC, DE. productis si opus est, dum curvae secundae occurrant; illa in S, et haec in F. Sit SD ad DF ut CD ad DE. Curvam autem ejusdem naturae similemque ac similiter positam datae ducere, quae transeat per punctum datum docebitur problemate sequenti. Jam ex puncto dato B. curvae secundae ducatur BZ perpendicularis ad curvam, aliqua methodo Tangentium nota, a Cartesio vel Fermatio, vel Huddenio, vel Slusio tradita[,] quae producta si opus est, curvae datae ad angulos rectos occurret in H. Quod facile demonstratu est, si curvam quamlibet ex infinitis Polygoni cujusdam infinitanguli licet irregularis lateribus conflatam cogites. Ut opus non sit verba perdere in re manifesta.

Problema II

Curvam ejusdem cum data natura similemque ei ac similiter positam ducere, quae transeat per punctum datum.

Caeteris ut ante positis, quaeritur modus ducendi curvam SBF; Quod ut fiat ex dato ejus puncto B. ducatur ad axem SD. ordinata AB. ipsi DF. parallela. Quae AB proinde etiam datur. Caeterum punctum quaesitum H curvae datae, quo recta ex puncto B. ducta ad angulos rectos secaretur; ponatur jam inventum et ex curva CHE. ad axem CD. ducatur ordinata GH. ipsi AB. parallela. Tres jam conditiones implendae sunt, prima ut utraque AB. et GH. sit applicata curvae cujus natura sive aequatio abscissarum ad applicatas relationem exhibens, data est; altera ut sit eadem ratio abscissarum quaesitarum SA, CG. quae est applicatarum AB, datae et GH quaesitae.

1 rectae *(1)* concurrentes in puncto qvolibet *(2)* CD. ED *L* 1 f. in | E *ändert Hrsg.* | inde *(1)* per punctum B. *(a)* transire *(b)* ducantur ali *(2)* ducatur *L* 10 licet irregularis *erg. L* 19 parallela. *(1)* Duae *(2)* Tres *L* 22 AB, *(1)* GH. *(a)* Posita *(b)* Ergo abscissa SA = (ξ) *(2)* datae *L*

8 tradita: Leibniz bezieht sich wohl auf R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–49, zu Fermat auf die Darstellung in Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255, auf J. Hudde, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516, sowie auf R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059).

T e r t i a , ut sint similiter positae. Ergo abscissa SA, facilioris calculi causa, appellata (ξ), et abscissa $CG = (x)$ et parametro, sive latere recto curvae CHE datae, ac proinde etiam dato, appellato (a); et latere recto curvae quaesitae appellato (φ). applicata autem data AB. appellata (b) et quaesita GH. (y) manifestum est applicatam ex abscissa et latere recto assumtis vel contra construi posse ex conditione prima; et ideo cum a. et b. sint datae, non nisi ξ et x, vel ξ et y vel φ et x vel φ et y desiderari. Binis enim a et b datis, si binae adhuc assumantur ex diversis curvis etiam construentur binae quae restant. Et eligi potest combinatio earum quae calculo tractabiliores sunt, prout natura figurae ostendit. Eligamus hoc loco quaslibet, v. g. φ. et x. velut quaerendas. Constructae jam intelligantur omnes sex ex assumtis a. b. φ. x. ex conditione prima seu natura figurae. Jam ex conditione secunda quod scilicet applicatae abscissis sint proportionales habebitur inter eas aequatio, sed nondum satis definita. Cum enim duae sint rectae ignotae x. et φ. ex quibus caeterae habentur, ideo duabus etiam aequationibus in unam denique junctis opus est ad habendam plenam problematis solutionem. Habebitur autem aequatio plene definita tertia quoque conditione impleta, quae postulat non tantum, ut curvae sunt similes, sed ut sunt similiter quoque positae id est, ut SA. AC. CD. cadentibus in unam rectam, sit SD ad DF ut CD ad DE. Habita SA per valorem aequatione praecedenti ei assignatum, et DF ex positis valoribus ipsius SD et φ. (aequatione praecedenti inventis) per naturam figurae, nova inde aequatio exurgat, qua problema solvitur.

3 f. appellato *(1)* (α) *(2)* (φ). | applicata ... (y) *erg.* | manifestum *L* 5 f. posse *(1)*, constructae ergo intelligantur qvoniam ratio applicatarum eadem est qvam abscissarum ex conditione secunda, perveniemus ad aeqvationem | qvae cum indefinita sit, determinabitur per conditionem tertiam. *erg.* | qva reducta et SA abscissa $= \xi$ et latus rectum α. curvae qvaesitae invenientur; *(a)* dato *(b)* invento autem latere recto unaqve abscissa SA, et | data dudum *erg.* | una applicata, ejus nimirum abscissae AB describi potest curva. *(2)* ex ... nisi *(a)* α. et x *(aa)* qvaeri *(bb)* desiderari *(b)* ξ et x, | vel ξ et α, *gestr.* | vel ξ et y vel α. et x. vel α et y vel x et y. *(c)* φ, et x desiderari *nicht gestr.* *(d)* ξ et *L* 7 adhuc *(1)* inveniantur etiam sumtum habebitur et sem⟨per⟩ invenientur *(2)* assumantur *L* 12 f. x. et | α. *ändert Hrsg.* | | ex ... ideo *erg.* | duabus *L* 14 solutionem. | Modum autem eliciendi aeqvationes praestat. *gestr.* | Habebitur *L* 18 et | α. *ändert Hrsg.* | (aeqvatione *L*

Exemplis rem declarare operae pretium est, ac primum in P a r a b o l a . Cujus aequatio posita abscissa $\left\{\begin{matrix} x \\ \xi \end{matrix}\right\}$ applicata $\left\{\begin{matrix} y \\ b \end{matrix}\right\}$ est $\left\{\begin{matrix} xa = y^2 \\ \xi\varphi = b^2 \end{matrix}\right\}$. Ideo CG posita x erit $GH = y = (\sqrt{xa}.)$ et AB posita b, erit $SA = \xi = \frac{b^2}{\varphi}$ eritque ut x ad $\frac{b^2}{\varphi}$, ita $\sqrt{xa}$ ad b. sive $xb = \frac{b^2}{\varphi}\sqrt{xa}$, vel $x^2b^2 = \frac{b^4xa}{\varphi^2}$, sive $xb^2 = \frac{b^4a}{\varphi^2}$. Ergo $x\varphi^2b^2 = b^4a$ sive $x\varphi^2 = b^2a$. Hinc valorem habemus ipsius $x = \frac{b^2a}{\varphi^2}$, et ipsius $\varphi = \sqrt{\frac{b^2a}{x}}$ et ipsius $\xi = \frac{b^2}{\sqrt{\frac{b^2a}{x}}}$, sive $\xi^2 = \frac{b^4}{\frac{b^2a}{x}} = \frac{b^2x}{a}$, vel $\xi = \sqrt{\frac{b^2x}{a}}$. Positis jam $CD = (d)$ et $DE = (e)$ et $AC = (c)$. quae

---

1 *Darüber*: neque enim ista facile verbis generalibus

2 *Nebenbetrachtung*: $ax = y^2$. $al = 2y^2$.

$x + b \frown a, = y^2 + c^2 + 2yc$

$ax + ba \mp x^2 \mp b^2 \mp 2xb, \frown \frac{a}{q}$

$ax \mp x^2 \mp 2xb$

$\frac{al}{2} \mp \frac{\cancel{2}xl \mp \cancel{2}lb}{\frac{q}{a}} = \cancel{2}y^2 + \cancel{2}yc$

$\frac{al}{2} = ax + ba - c^2 - yc$. $y^2 = lf - lx$.

$\frac{l}{2} = \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}b}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}c^2 + \cancel{2}yc}{a}$. Est a. $x = \frac{y^2 + c^2 + 2yc}{a} - b$. Ergo.

$\frac{l}{2} = \frac{y^2 + yc}{a} - 2b$.

$\langle\text{—}\rangle = \frac{ay^{\cancel{2}}}{y^{\cancel{2}} + \cancel{y}c} - \frac{y^2}{2b}$

2 $\xi a = b^2$ *L ändert Hrsg.* 4 $x^2\alpha^2b^2 = b^4a$ sive $x\alpha^2 = b^2a$ *L ändert Hrsg.*

cum cognitae sint nullo alio sui valore indigent. Erit $AD = c + d = f$ et $SD = f + \sqrt{\frac{b^2x}{a}}$ abscissa scilicet, quae ducta in latus rectum $\varphi, = \sqrt{\frac{b^2a}{x}}$. dabit rectangulum aequale quadrato ipsius applicatae DF. Nempe $\sqrt{\sqrt{\frac{b^2f^2a}{x}} + (\sqrt{\frac{b^4\cancel{xa}}{\cancel{xa}}})b^2} = DF$. Jam eadem

$$DF = \frac{DE \frown SD}{CD} = \frac{fe + \sqrt{\frac{b^2e^2x}{a}}}{d} = \sqrt{, \sqrt{\frac{b^2f^2a}{x}} + b^2}.$$ Quadratis omnibus, fiet:

$$\frac{f^2e^2 + \frac{b^2e^2x}{a} + 2fe^2b\sqrt{\llcorner\frac{x}{a}\lrcorner}}{d^2} = bf\sqrt{\llcorner\frac{a}{x}\lrcorner} + b^2.$$

Ergo $$f^2e^2 + b^2e^2\frac{x}{a} + 2fe^2b\sqrt{\frac{x}{a}} = bfd^2\sqrt{\frac{a}{x}} + b^2d^2.$$

$$b^2d^2 - f^2e^2 - b^2e^2\frac{x}{a} = 2fe^2b\sqrt{\frac{x}{a}} - bfd^2\sqrt{\frac{a}{x}}$$

Quadratisque iterum omnibus, fiet:

$$b^4d^4 - \cancel{2b^2d^2f^2e^2} - 2b^4d^2e^2\frac{x}{a} + f^4e^4 + \cancel{2f^2e^4b^2\frac{x}{a}} + b^4e^4\frac{x^2}{a^2} = \cancel{\overset{2}{\cancel{4}}f^2e^4b^2\frac{x}{a}} - \cancel{\overset{2}{\cancel{4}}f^2e^2b^2d^2} + b^2f^2d^4\frac{a}{x}$$

$$b^4a^4(x) - \cancel{2b^2a^4f^2x} - 2b^4a^3x^2 + f^4a^4x + \cancel{2f^2a^3x^2b^2} + b^4a^2x^3 = \overset{2}{\cancel{4}}b^2f^2a^3x^2 - \overset{2}{\cancel{4}}f^2a^4b^2x + b^2f^2a^5$$

Atque ita habemus aequationem, qua terminus x, qui solus desideratur, haud dubie dabitur. Cujus reductio, ut fiat facilior, et ut multitudine terminorum nos expediamus, substituatur rursus ipsi f. valor suus, $c + d$. Et quoniam d. et e. pro arbitrio assumtae

2 rectum | α, *ändert Hrsg.* | $= \sqrt{\frac{\mathrm{b^2a}}{\mathrm{x}}}$ *L*

sunt, ponatur $d = a$, erit ob naturam parabolae, etiam $e = a$. et $f = c + a$ et aequatio inventa, ita enuntiabitur:

$$b^4a^4x - 2b^4a^3x^2 + b^4a^2x^3 + \underbrace{a^8x + 4a^7cx + 6a^6c^2x + 4c^3a^5x + c^4a^4x} = \\ = f^4a^4x$$

---

2 *Darunter Nebenbetrachtung, durch Umrahmung isoliert:*

$$\frac{ca + a^2 + b, \sqrt{ax}}{a} = \sqrt{bc\sqrt{\frac{a}{x}} + ba\sqrt{\frac{a}{x}} + b^2}$$

$$c + a = -\frac{b}{a}\sqrt{ax} + \sqrt{\qquad\qquad}$$

et $c^2 + a^2 + 2ca = \dfrac{b^2x}{a} + b^2 + b\sqrt{\dfrac{a}{x}} \frown \llcorner c + a \lrcorner + 2\sqrt{, \dfrac{b^3c}{a}\sqrt{ax} + b^3\sqrt{ax} + \dfrac{b^4x}{a}}$

Nebenrechnung:

$$\sqrt{bc\sqrt{\frac{a}{x}}}, \frown \frac{b}{a}\sqrt{ax},$$

$$\sqrt{\frac{b^3c}{a^2}\sqrt{a^3x}}$$

$$\frac{b^3c}{a}\sqrt{ax}$$

3–22,2 *Nebenbetrachtung und Nebenrechnungen*:

c					
f	$=$	a	$+$	c	
a^2	$+$	c^2	$+$	$2ac$	
		a	$+$	c	

a^3	$+$	$3a^2c$	$+$	$3c^2a$	$+$	c^3		
a^4	$+$	$3a^3c$	$+$	$3c^2a^2$	$+$	c^3a	c^4	
		1		3		3		
1		4		6		4	1	

$3c^2a^4$	$+$	c^5a				
$3a^2c^3,$	$+$	a^4c				
$6c^2a^2$	$+$	$4a^3c$				
$4c^3a$	$+$	a^4	$+$	$3c^3a$	$+$	$4c^4$

---

7 Der letzte Term der Nebenbetrachtung müsste ein negatives Vorzeichen haben.

$$\underbrace{2a^5b^2x^2 + 2c^2a^3b^2x^2 + 4ca^4b^2x^2}_{= 2b^2f^2a^3x^2} + \underbrace{2a^7b^2 + 2c^2a^5b^2 + 4ca^6b^2}_{= b^2f^2a^5}$$
$$-\underbrace{2a^6b^2x + 2c^3a^4b^2x + 4ca^5b^2x}_{= 2b^2f^2a^4x}$$

Haec autem aequatio inventa $\dfrac{fe + be\sqrt{\dfrac{x}{a}}}{d} = \sqrt{bf\sqrt{\dfrac{a}{x}} + b^2}$ ut fiat simplicior ideo e vel d, quoniam alterutra earum pro arbitrio sumi potest, eligantur tales, quales natura figurae ad hunc scopum aptissimas ostendet, ut hoc loco si $d = a$. ponatur, erit etiam $d = e$ ob naturam parabolae, ideoque se mutuo destruent, fietque aequatio: $f + b\sqrt{\dfrac{x}{a}} = \sqrt{bf\sqrt{\dfrac{a}{x}} + b^2}$ sive $f^2 + b^2\dfrac{x}{a} - b^2 = bf\sqrt{\dfrac{a}{x}} - 2bf\sqrt{\dfrac{x}{a}}$ sive $\dfrac{f}{b} + \dfrac{bx}{fa} - \dfrac{b}{f} = \sqrt{\dfrac{a}{x}} - \sqrt{\dfrac{x}{a}} = \sqrt{\dfrac{a^2 - x^2}{ax}}$ et utraque parte aequationis quadrata $= \dfrac{f^2}{b^2} + \boxed{\boxed{\dfrac{2x}{a}}} + \dfrac{b^2x^2}{f^2a^2} - \dfrac{2b^2x}{f^2a} + \dfrac{b^2}{f^2} = \dfrac{a^2 - x^2}{ax} = \boxed{\boxed{\dfrac{a}{x}}} - \boxed{\dfrac{x}{a}}$ auferatur utrobique $\dfrac{x}{a}$ semel, nota 2, $\boxed{\dfrac{x}{a}}$ et auferatur adhuc semel nota $\boxed{\bigcirc}$. Jam vero $\dfrac{a^2 - x^2}{ax} + \dfrac{2b^2x}{f^2a} =$ reliquae aequationi, fiet ex additione $\dfrac{a^3f^2 - x^2f^2a + 2b^2ax^2}{a^2xf^2} = \dfrac{f^2}{b^2} - 2 + \dfrac{b^2x^2}{f^2a^2}$ sive $a - \dfrac{x^2}{a} + \dfrac{2b^2x^2}{af^2} = \dfrac{f^2x}{b^2} - 2x + \dfrac{b^2x^3}{f^2a^2}$.

Quae aequatio reduci quidem poterit, sed praestat tamen aliam adducere conditionis tertiae implendae rationem, quae facilius ad scopum ducere. Videtur praesertim quia Tangentium inquisitionem, quae nihilominus caeteris absolutis restaret, jam tum praevertit. Nimirum etiam intervalla perpendicularium ab ordinatis in axe sumta sunt

---

1 Die Terme des zweiten Klammerausdrucks hat Leibniz irrtümlich mit dem Faktor 2 multipliziert.
7 $-\sqrt{\dfrac{x}{a}}$: Richtig wäre $-2\sqrt{\dfrac{x}{a}}$. Zusammen mit weiteren Versehen beeinträchtigt der Fehler die Rechnung bis Z. 11, jedoch nicht die grundsätzliche Überlegung.

ex conditione 3. inter se ut ordinatae, seu AB ad GH ut AZ ad GZ. Cum autem in parabola intervallum tangentis dictum, sit dimidium latus rectum, ergo GZ. erit data $\frac{a}{2}$. cui si addatur $AC = c$. data, et $CG = x$ erit $\frac{a}{2} + c + x = \sqrt{\frac{b^2a}{x}}$ dimidio lateri recto. Sive posito $\frac{a}{2} + c = g$. multiplicatis omnibus per x, fiet: $gx + x^2 = b\sqrt{ax}$, sive $g^2x^2 + x^4 + 2gx^3 = b^2ax$. ac proinde $x^3 + 2x^2g + 2g^2x = b^2a$.

DE. ad DF, esse ut CD ad SD, ubicunque in figura assumantur, falsum est, nec implet conditionem. Curvas ergo similiter positas esse, est omnes earum tangentes esse parallelas, quod non fit nisi earum perpendiculares coincidant. Eligenda est jam recta in figura, quae sit constans, si qua haberi potest. Ea autem est in Parabola ipsa GZ, latus rectum dimidia. Ea ergo data est simpliciter $\frac{a}{2}$, cumque sit

---

5 *Nebenbetrachtung:* $\frac{x^3}{2} + x^2g + gx^2 + \frac{g^3}{\delta^3}.\frac{x}{R\textcircled{3}2} + \frac{g}{\delta}$, dant $\frac{x^3}{2} + \frac{3x^2g}{R\textcircled{3}4,\delta} + \frac{3g^2x}{\delta^2R\textcircled{3}2} + \frac{g^3}{\delta^3}$. Jam $\frac{3}{R\textcircled{3}4,\delta} = 1$. Ergo $\frac{3}{R\textcircled{3}4} = \delta$. Item quia $\frac{3}{R\textcircled{3}2,\delta^2} = 1$. erit $\frac{3}{R\textcircled{3}2} = \delta^2$. Implicat autem de $\frac{3}{R\textcircled{3}2}$ radicem esse ipsum $\frac{3}{R\textcircled{3}4}$. Nam hujus quadr. est $\frac{9}{R\textcircled{3}16}$. Fieret $\frac{3}{R\textcircled{3}2} = \frac{9}{R\textcircled{3}16}$. Fieret $27 \frown 16 = 9 \frown 9 \frown 9 \frown 2$ vel $3 \frown 16 = 9 \frown 9 \frown 2$. Quod est absurdum.

Nebenrechnungen:

$$\begin{array}{rr} 27 & 81 \\ \underline{16} & \underline{9} \\ 2 & 729 \\ & \underline{2} \\ & 8 \end{array}$$

---

5 $+2g^2x$: Richtig wäre $+g^2x$.

$$\begin{array}{cccccc} GZ & \text{ad} & AZ & \text{ut} & GH & \text{ad} & AB. \\ \dfrac{a}{\cancel{2}} & \text{ad} & \dfrac{\varphi}{\cancel{2}}, & & y & & b \\ & & & & \wedge & & \\ & & a+2x+2c & & \sqrt{xa} & & \end{array}$$

fiet: $\dfrac{a}{a+2x+c} = \dfrac{\sqrt{xa}}{b}$, sive $\dfrac{a^2}{a^2+4ax+2ac+4x^2+4xc+c^2} = \dfrac{xa}{b^2}$ sive

$$\begin{aligned} a^2b^2 &= a^3x + 4a^2x^2 + 2a^2cx + 4x^3a + 4x^2ca + c^2ax. \\ ab^2 &= 4x^3\cancel{a} + 4x^2c\cancel{a} + 4x^2a^{\cancel{2}} + xa^{\cancel{3}2} + 2xa^{\cancel{2}}c + x\cancel{a}c^2 \quad \text{et posita} \quad a+c=g \\ ab^2 &= x^3 + x^2g + \frac{xg^2}{4}. \end{aligned}$$

Nota in Parabolis similibus ordinatae sive abscissae sunt lateribus rectis proportionales. Esto enim $\dfrac{x}{\sqrt{ax}} = \dfrac{\xi}{\sqrt{\varphi\xi}}$; erit $\dfrac{x^2}{ax}$ sive $\dfrac{x}{a} = \dfrac{\xi^2}{\varphi\xi}$ sive $\dfrac{\xi}{\varphi}$. Igitur ut ξ ad φ, sive $\xi = \sqrt{\dfrac{b^2x}{a}}$ ad $\varphi = \sqrt{\dfrac{b^2a}{x}}$, ita b ad y, sive b ad $\sqrt{xa}$. $\sqrt{\dfrac{b^2\dfrac{a}{x}}{b^2\dfrac{x}{a}}} = \sqrt{\dfrac{\dfrac{a}{x}}{\dfrac{x}{a}}} = \sqrt{\dfrac{a^2}{x^2}} = \dfrac{a}{x}$. Ergo $\dfrac{\sqrt{xa}}{b} = \dfrac{a}{x}$, sive $\dfrac{xa}{b^2} = \dfrac{a^2}{x^2}$ sive $x^3 = a^2b$. Ergo $x = \sqrt{③}a^2b$. (Quod si ducatur in a^2b, vel $\sqrt{③}a^6b^3$, fiet $\sqrt{③}a^8b^4 = x^4$, vel $\sqrt{③}a^2b^4 = \dfrac{x^4}{a^2}$.) Sive ex a^2b extrahenda est radix cubica, quod ex supposita parabola jam data sola regula ac circino praestari potest.

In Hyperbola, posita asymptoton assumi pro axe, aequatio erit $a^2 - xy = 0$. vel $\varphi^2 - \xi b = 0$. Ergo $\xi = \dfrac{\varphi^2}{b}$ et $y = \dfrac{a^2}{x}$. Positis jam duabus istis hyperbolibus similibus

2 ad | $\dfrac{\alpha}{\cancel{2}}$ *ändert Hrsg.* | y *L* 9 f. proportionales. *(1)* | Esto enim $\dfrac{\mathrm{x}}{\sqrt{\mathrm{ax}}} = \dfrac{\mathrm{b}}{\sqrt{\mathrm{b}\varphi}}$, erit $\dfrac{\mathrm{x}^2}{\mathrm{ax}} = \dfrac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{b}\varphi}$ sive $\dfrac{\mathrm{x}}{\mathrm{a}} = \dfrac{\mathrm{b}}{\varphi}$ vel $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} = \dfrac{\mathrm{x}}{\varphi}$ *nicht gestr.* | *(2)* Esto *L*

---

5 fiet: Der letzte Term in Nenner des folgenden Bruches müsste $+2c$ lauten. Leibniz rechnet konsequent weiter bis Z. 8. 10 Igitur: Aus dem Ansatz $\dfrac{x}{y} = \dfrac{\xi}{b}$ folgt $\dfrac{b}{y} = \dfrac{\xi}{x} = \dfrac{\varphi}{a}$, woraus sich das Ergebnis nicht ableiten lässt. Hinzu kommt ein Rechenfehler.

$\dfrac{x}{y[=]\dfrac{a^2}{x}} = \dfrac{\xi}{\dfrac{\varphi^2}{\xi}[=]b}$. Ergo $\dfrac{x^2}{a^2} = \dfrac{\xi^2}{\varphi^2}$. Id est si Hyperbolae sunt similes, quadrata laterum rectorum sunt proportionalia lateribus homologis sive rectis respondentibus. Jam x ad $\dfrac{\varphi^2}{b}$ (ad ξ) est ut $\dfrac{a^2}{x}$ (ut y) ad b. Ergo $xb = \dfrac{\varphi^2 a^2}{bx}$, sive $x^2b^2 = \varphi^2a^2$. Ergo $\varphi = \dfrac{xb}{a}$. Jam ob naturam Hyperbolae, b est media proportionalis inter $AT = 2AS = 2\xi = \dfrac{2\varphi^2}{b}$ et $AZ = \underset{= c}{AC} + \underset{= x}{CG} + GZ$. Quae GZ est etiam talis, ut $y = \dfrac{a^2}{x}$ sit media proportionalis inter ipsam GZ. et $2CG = 2x$. Ideo $GZ = \dfrac{\dfrac{a^2}{x^2}}{2a} = \dfrac{2a^2}{x}$. Ideo b. media proportionalis inter $2\xi = \dfrac{2\varphi^2}{b} = \dfrac{2x^2b^2}{a^2b} = \dfrac{2x^2b}{a^2}$ et $c + x + \dfrac{2a^2}{x}$. sive $b = \dfrac{2x^2c + 2x^3}{a^2} + 4x$. sive $ba^2 = 2x^3 + 2x^2c + 4xa^2$, $\dfrac{ba^2}{2} = x^3 + x^2c + 2xa^2$.

Aliter solvi potest problema in Hyperbola, si ex curva non in asymptoton sed in diametrum cadant ordinatae.

Aliter etiam videtur procedi posse, sine ulla duarum curvarum similium consideratione. Ponatur ut ante latus rectum curvae datae $= a$. distantia puncti dati a producto curvae b. recta GH vocetur (y) et $CG = (x)$ et AC quae etiam data est, vocetur (c). Porro ex data autem y. facile invenietur recta CG. quemadmodum recta $CG, = x$. sumta velut data facile invenietur $GH = y$. Ex datis autem latere recto et vel x, vel y facile habetur GZ. methodo tangentium. Ea nota eaque esto $= v$. Jam ob similitudinem Triangulorum

1 $= \dfrac{\xi}{\dfrac{\varphi^2}{\xi}\ \mathrm{b}}$. *(1)* Ergo $\dfrac{1}{\mathrm{a}^2} = \dfrac{1}{\varphi^2}$. Ergo si hyperbolae | rectangulae *erg.* | sunt similes, idem est utrobiqve latus secundum qvod possunt ordinatae ad asymptoton. Sed eodem argumento, etiam *(2)* Ergo *L*
15 f. habetur *(1)* tangens, ex natura fi *(2)* GZ *(3)* CZ *(4)* GZ. *L*

6 Ideo GZ: Richtig wäre $GZ = \dfrac{a^4}{2x}$. Der Fehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 8.

ZAB, ZGH, fiet: GZ ad AZ, ut GH. ad AB, sive $v : v+x+c :: y : b$ sive $bv = vy+xy+cy$. Posito jam Curvam esse parabolam, v erit $= \frac{a}{2}$, fietque $\underbrace{\frac{ba}{2} = \frac{ay}{2} + xy + cy}$. Et assumta y. velut nota, erit ex natura parabolae $x = \frac{y^2}{a}$. et aequatio erit: $\frac{ba}{2} = \frac{ay}{2} + \frac{y^3}{a} + cy$. sive $ba^2 = a^2y + 2y^3 + 2cya$. positaque $2ca + a^2 = d^2$, fiet $ba^2 = d^2y + 2y^3$. Quae aequatio

---

3 *Nebenbetrachtung*: $x = \frac{y^2}{a}$.

$$yd = y^2 + xl - fl \qquad \frac{yd - y^2}{2} = \frac{y^4}{a^2} - \frac{fy^2}{a}$$

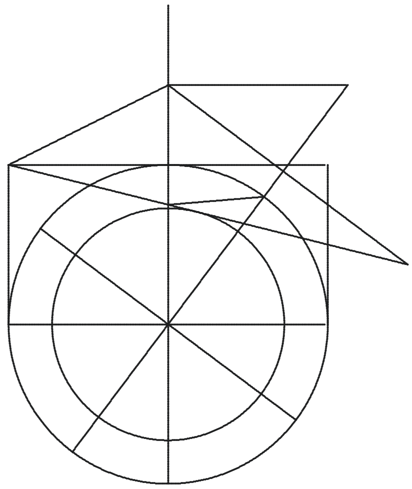
$$yd = y^2 + 2x^2 - 2fx \qquad \frac{d - y}{2} = \frac{y^3}{a^2} - \frac{fy}{a}$$

$$\frac{yd - y^2 - \frac{d^2}{4}}{2} = \cancel{2}x^2 - \cancel{2}fx \qquad \frac{yd - y^2}{2} = \frac{\sqrt{ax}, d - ax}{2} = x^2 - fx \text{ vel}$$

$$d^2 + y^2 - yd = fx - x^2 + \frac{d^2}{4} \qquad \frac{axd^2 + a^2x^2 - \sqrt{a^3x^3}d}{4} = x^4 + f^2x^2 - 2x^3f$$

1 *Nebenbetrachtung*: $\mathrm{bv = vy + xy + cy}$. Ergo $\frac{\mathrm{bv}}{\mathrm{v+x+c}} = \mathrm{y}$. Ergo $\frac{1}{\mathrm{y}} = \frac{1}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{x+c}}{\mathrm{bv}}$. $\mathrm{x + c = t}$ sive $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}} = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}} + \frac{\mathrm{at}}{\mathrm{bv}}$. $\gamma = \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$ posita ratione a ad b. nota, v. g $\gamma = \gamma\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{v}} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}}$. $1 = \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{v}} - \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}\gamma}$. Fiat $\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}} = \mathrm{f}$ erit $1 = \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{v}} - \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{y}}$. sive: $\mathrm{ty - fv = vy}$ *gestr. L* 4 *Nebenbetrachtung*: $\sqrt{}(\beta+\gamma)\mathrm{a}^\beta\mathrm{x}^\gamma \frown \mathrm{x}$ fiet $\sqrt{}(\beta+\gamma)\mathrm{a}^\beta\mathrm{x}^{2\gamma+\beta}$ *gestr. L* 4 $+2\mathrm{y}^3$. *(1)* Qvae aeqvatio cum solida sit *(a)* ope *(b)* in supposita parabola | jam positione *erg.* | data, per regulam et circinum facile construitur. Si vero x sumatur ut nota, erit $\mathrm{y} = \sqrt{\mathrm{ax}}$. et ex aeqvatione praecedente $\underbrace{\ldots\ldots}$ fiet: $\frac{\mathrm{ba}}{2} = \frac{\mathrm{a}}{2}\sqrt{\mathrm{ax}} + \mathrm{x}\sqrt{\mathrm{ax}} + \mathrm{c}\sqrt{\mathrm{ax}}$. Et $\mathrm{c} + \frac{\mathrm{a}}{2}$ posita e. fiet $\frac{\mathrm{ba}}{2} = \mathrm{e}\sqrt{\mathrm{ax}} + \mathrm{x}\sqrt{\mathrm{ax}}$. *(aa)* et positis $\mathrm{e + x = t}$, fiet $\frac{\mathrm{b^2a^2}}{4} = \mathrm{t}$ *(bb)* | et $\frac{\mathrm{b^2a^2}}{4} = \mathrm{e^2ax + x^3a + 2ex}\sqrt{\mathrm{ax}}$, et $\frac{\mathrm{b^2a^2}}{4} - \mathrm{e^2ax - x^3ax - x^3a = 2ex}\sqrt{\mathrm{a^2x^2}}$ *gestr. u. durch Punkte zunächst wieder gültig gemacht, mit gestr. Randbemerkung*: punctata restitutas intelligi debent | *(aaa)* et positis $\mathrm{e + x}$ *(bbb)* qvadrataqve aeqvatione, fiet: $\frac{\mathrm{b^4a^4}}{4} - \frac{\mathrm{b^2e^2a^3x}}{2} - \mathrm{2b^2a^3x^3 + e^4a^2x^2 + 2e^2a^2x^4 + x^6a^2 = 2e^2x^2ax}$ *(cc)* et qvadrata aeqvatione:

cubica implicata, ita reducitur ad absolutam, posito $\frac{d^2}{2} = m^2$, et $\frac{ba^2}{2} = n^3$. et $y = \frac{m^2 - z^2}{z}$, fiet aequatio cubica absoluta, haec: $z = -\frac{1}{2}n^3 + \sqrt{\frac{1}{4}n^6 + m^6}$ quae parabolae datae ope de caetero sola regula ac circino solvi potest. Ipsa z. autem inventa, a tertia proportionali analogiae, in qua z. prima, et m, media ponitur, detracta, relinquet y. quaesitam.



[*Fig. 1*]

$\frac{\mathrm{b^2a}\cancel{2}}{4} = \mathrm{e^2}\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{x+x^3}\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{+2e}\cancel{\mathrm{a}}\mathrm{x^2}$. et restitutis pro e, valore eius $\frac{\mathrm{a}}{2}+\mathrm{c}$: $\frac{\mathrm{b^2a}}{4} = \mathrm{c^2x} + \frac{\mathrm{a^2x}}{4} + \mathrm{acx+x^3+2cx^2+ax^2}$. Jam conferantur duae aeqvationes inventae, multiplicata priore per b, et hac per a fietqve: $\mathrm{2y^3b+ya^2b+2yabc = x^3a+x^2a^2+2x^2ac} + \frac{\mathrm{xa^3}}{4} + \mathrm{xa^2c + xac^2}$ et pro x subsituto eius valore $\frac{\mathrm{a^2}}{4}$ fiet: ______ $= \frac{\mathrm{a^7}}{\mathrm{y^3}} + \frac{\mathrm{a^6}}{\mathrm{y^2}} + \frac{\mathrm{2a^5c}}{\mathrm{y^2}} + \frac{\mathrm{a^5}}{\mathrm{4y}} + \frac{\mathrm{a^4c}}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{a^3c^2}}{\mathrm{y}}$ multiplicatis omnibus per $\mathrm{y^3}$ fiet: $\mathrm{2y^6b+y^4a^2b+2y^4abc = a^7+a^6y +2a^5cy+a^5y^2+a^4cy^2+a^3c^2y^2}$ *Dazu Nebenrechnungen, nicht gestr.*: $\mathrm{e^2 = c^2} + \frac{\mathrm{a^2}}{4} + \mathrm{ac}$ $\frac{\mathrm{a^5}}{\mathrm{y^4}}$ $\frac{\mathrm{a^5}}{\mathrm{x^4}}$ $\frac{\mathrm{a^{10}}}{\mathrm{y^4x^4}}$ $\frac{\mathrm{a^5}}{\mathrm{y^4}}$ ⌢ y *(2)* Qvae *L*

1 cubica *(1)* composita *(2)* implicata, ita reducitur *(a)* ad simplicem *(b)* ad *L*

2 fiet *(1)* : $\mathrm{z} = \sqrt{\frac{1}{4}\mathrm{n^3}}$ *(2)* : $\mathrm{z} = \sqrt{}$ 3 $\frac{1}{2}\mathrm{n^2}+$ *(3)* aeqvatio cubica *(a)* simplex haec: *(b)* absoluta *L*

1 reducitur: Der folgende Versuch der Reduktion der kubischen Gleichung ist verfehlt.

Si figura sit circulus, erit $v = a - x$. fietque $ba - bx = ay - xy + xy + cy$. sive $bx = ba - ay + cy$. fiet $x = a + \dfrac{-ay + cy}{b}$. Jam ex natura circuli $2ax - x^2 = y^2$ vel $2ax - x^2 - a^2 = y^2 - a^2$. Ergo $a^2 + x^2 - 2ax = a^2 - y^2$. Ergo $a - x = \sqrt{a^2 - y^2}$. Ergo $a - \llcorner\sqrt{a^2 - y^2}\lrcorner = x$. Fiet ergo $a - \sqrt{a^2 - y^2} = a.\dfrac{-ay + cy}{b}$ sive $\dfrac{cy - ay = ey}{b} = \sqrt{a^2 - y^2}$. sive $\dfrac{e^2y^2}{b^2} = a^2 - y^2$. et $e^2y^2 + y^2b^2 = a^2[b^2]$. vel $\dfrac{a^2b^2}{e^2 + b^2} = y^2$. Et $e^2 + b^2$, posito f^2. fiet $\dfrac{ab}{f} = y$ sive applicata quaesitae y est ad rectam parallelam b assumtam, ut radius a ad f distantiam puncti dati, a centro.

Si figura sit Hyperbola vel Ellipsis, posito latere recto r. transverso t. et $CG = x$. fiet $v = \dfrac{r}{2} + \dfrac{rx}{t}$ in Hyperbola, et $\dfrac{r}{2} - \dfrac{rx}{t}$ in Ellipsi, ergo utemur signo $\mp$, quod compositum est ex $+$ et $-$. Fiet $\dfrac{br}{2} \mp \dfrac{brx}{t} = \dfrac{ry}{2} \mp \dfrac{rxy}{t} + xy + cy$. et ex natura Hyperbolae vel Ellipsis: $rx \mp \dfrac{rxx}{t} = y^2$ sive $y = \sqrt{rx \mp \dfrac{rxx}{t}}$. Divisis omnibus per $\dfrac{r}{t} = \gamma$. et posita $\dfrac{r}{\gamma} = s$. et $\dfrac{rr}{\gamma} = v^2$, fiet: $sx \mp xx + v^2 = y^2 + rr$ et posito $\dfrac{r}{2} + c = (h)$ fiet: $hy \mp \dfrac{rxy}{t} + xy$ positoque $1 \mp \dfrac{r}{t} = \delta$ fiet: $\dfrac{br}{2} \mp \dfrac{brx}{t} = hy + \delta xy, \frown \sqrt{rx \mp \dfrac{rxx}{t}}$, sive: $\dfrac{b^2r^2}{4} + \dfrac{b^2r^2x^2}{t^2} \mp \dfrac{b^2r^2x}{t} = h^2 + \delta^2x^2 + 2\delta hx \frown rx \mp \dfrac{rxx}{t}$. Fiet aequatio hujus formae

2 +cy. *(1)* sive $\mathrm{a} + \mathrm{c}$. posito e, fiet *(2)* fiet *L* 2–4 Iam … $\mathrm{a} - \llcorner\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2}\lrcorner = \mathrm{x}$. *erg. L* 4 f. $= \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2}$. *(1)* vel $\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2 = \dfrac{\mathrm{c}^2\mathrm{y}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{y}^2}{\mathrm{b}^2}$, vel $\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2 = \mathrm{y}^2\mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2\mathrm{y}^2 - \mathrm{a}^2\mathrm{y}^2$ Eritqve $\mathrm{y}^2 = \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{b}^2}{\mathrm{b}^2 + \mathrm{c}^2 + \mathrm{a}^2}$ et $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{ab}}{\sqrt{\mathrm{a}^2 + \mathrm{c}^2 + \mathrm{b}^2}}$ sive erit y qvaesita ad parallelam assumtam ut est radius ad latus qvadrati ex qvadratis radii ac b et c assumtum conflati. *Daneben, gestr.*: Qvae calculo ambages *(2)* sive *L*

2 $+cy$: Richtig wäre $-cy$. Leibniz rechnet konsequent weiter. Durch die Substitution mit e in Z. 4 wirkt sich der Fehler nicht weiter aus. 11 Divisis: Die Rechnung mit den Substitutionen γ, s und v^2 ist fehlerhaft, Leibniz setzt mit den Substitutionen h und δ neu an. 14 aequatio: Die folgende Gleichung folgt nicht aus der Rechnung.

$$\underbrace{\begin{array}{llll} n^4 & + p^2x^2 & \mp q^3x & \\ & - s^2x^2 & & - \mp vx^3 \end{array}}_{=\,0.}$$

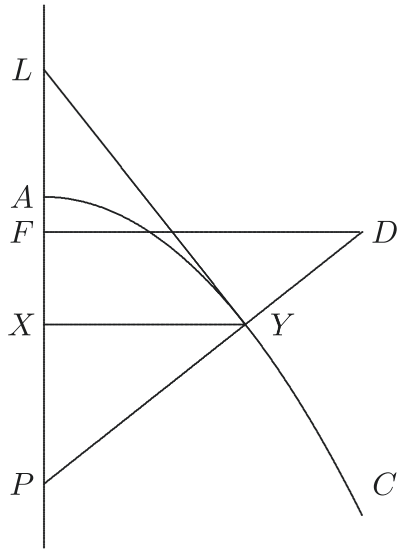
Quodsi figura sit parabola, omissis signo $\mp$ affectis, aequatio fiet 2^{dae} tantum dimensionis.

5. PERPENDICULARIS AD CONICAM
[Herbst 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzeptfragment: LH 4 V 10 Bl. 9–10. 1 Bog. 2°. 4 S. Die zugehörige Handschrift mit den im Text genannten Figuren 1–4 und dem fehlenden Text wurde nicht aufgefunden.
Cc 2, Nr. 855 D

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 bis Mitte 1674 belegt. N. 5 greift die Problemstellung am Schluss von N. 4 auf und modifiziert die dort eingeführte allgemeine Kegelschnittgleichung $y = \sqrt{rx \mp \frac{rxx}{t}}$ leicht zu $y = \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$. Der Verweis in VII, 1 N. 110 S. 680 Z. 1 bezieht sich vermutlich auf die Nebenbetrachtung zu S. 33 Z. 1.

Esto ergo propositum[:] Ex dato puncto ducere rectam, quae curvae Conicae datae ad angulos rectos occurrat; regula tum omnibus communi; tum in simplicioribus calculo particulari.



[*Fig. 1*]

11 Esto ergo propositum *erg. L* 11 curvae *(1)* parabolicae datae perpendiculariter occurrat; methodo tum univers *(2)* Conicae *L*

Inspiciatur fig. 3. in qua punctum datum esto D. Curva Parabolica data esto: $A(Y)C$. Jam problema putetur factum, et punctum in quo ea recta curvae occurrat, esse (Y). Axis parabolae esto $A(P.)$ cui recta $D(Y)$ producta occurrat in puncto $(P.)$. Datur recta DF ex puncto D dato perpendicularis ad axem $= d$, datur et recta $AF = f$. posito A esse verticem parabolae. At $(X)(Y)$ ipsi DF parallela seu ad axem perpendicularis nempe ordinata vocetur y. et $A(X)$ abscissa vocetur x. Denique ducta putetur tangens $(Y)L$ quae axi FA producto occurrat in L. Manifestum est $(X)(Y) = y$ esse mediam proportionalem inter $(X)(P) = p$. et $(X)L = l$. erit ergo $p = \dfrac{y^2}{l}$. Ergo habebitur p, habitis y, et l. Jam quoniam in omnibus figuris ipsa $(X)L, = l$. modo supra exposito haberi potest, is huc repetendus est, quo docemur fieri in parabola $l = 2x$. Inventis jam p, et l restant duae tantum incognitae x, et y. quarum alterutra rursus hoc loco eliminari potest, ope aequationis naturam figurae explicantis. $2ax = y^2$, ergo $x = \dfrac{y^2}{2a}$. et $l = \dfrac{y^2}{a}$. et $p = \dfrac{y^2}{\frac{y^2}{a}} = \dfrac{y^2 a}{y^2} = a$.

9 (X)L, = l. *(1)* regula qvadam generali haberi potest, ea hoc loco adhibenda est, *(a)* si unqvam: *(b)* nimirum Aeqvatio qvae curvae propositae punctorum omnium Relationem ad rectam qvandam pro arbitrio assumtam explicat, ante omnia ita poliatur, ut non nisi duae in ea maneant indeterminatae x et y. Inde rejectis ab aeqvatione partibus, in qvibus neqve x. neqve y reperitur statuantur ab una parte omnes in qvibus est x. in altera omnes in qvibus est y, cum suis signis + vel − Qvod si sit terminus in qvo reperiatur utraqve indeterminatarum, is statuatur ab utraqve parte. contrariis signis; Qvaelibet pars in latere ipsius x. multiplicetur per exponentem ipsius x in illa parte; et qvaelibet pars in latere ipsius y multiplicetur per exponentem qvem habet y in illa parte; ac deniqve in qvalibet parte lateris ipsius x. una litera x. mutetur in l. ita statim aeqvatio habetur qvae absolute exhibebit ⟨v⟩alorem ipsius l per assumtas x et y. Qvod statim in parabola experiemur, *(aa)* posita *(bb)* cuius aeqvatio est: 2ax = y^2, posito latere recto 2a. Unde fit 2al = 2y^2, vel al = y^2 = 2ax. Ergo l = 2x. *(2)* modo *L*

1 fig. 3.: Der folgende Text entspricht im Wesentlichen der von Leibniz nicht nummerierten Fig. 1, in der allerdings keine Punktbezeichnungen in Klammern vorkommen. 9 supra: Leibniz bezieht sich wohl auf die gestrichene Stufe *(1)* der Variante. Er führt die Berechnung der Subtangente l dann auf S. 32 Z. 9–12 durch.

Porro ut nunc ad figuram redeamus, patet ex ea esse $DF \frown (X)(P)$ sive $dp = y \frown FP$. Est autem $F(P) = (X)(P) + A(X) - AF$ vel $= p + x - f$. Fiet ergo $dp = yp + xy - fy$. et pro p. substituendo a. fiet: $da = ya + yx \; -fy$. et pro x ponendo $\frac{y^2}{2a}$. habebimus $2da^2 = 2ya^2 + y^3 - 2yfa$. Potuissemus etiam aliter procedere, non substituendo a, loco p, sed potius generali methodo $\frac{y^2}{l}$. Ita enim ex $dp = yp + xy - fy$, fiet $dy^2 = y^3 + xyl - fyl$, vel $d\,y \;=\; y^2 \;+\; x\,l \;-\; f\,l$. et ⟨ponendo⟩ $2x$ pro l fiet: $dy = y^2 + 2x^2 - 2fx$. et pro x substituendo $\frac{y^2}{2a}$, fiet $4a^2dy = 4a^2y^2 + 2y^4 - 4fy^2a$, vel $2a^2d = 2a^2y + y^3 - 2fya$ idem quod ante $+y^3 * \begin{array}{l}+2a^2y\\-2fa\end{array} -2a^2d$.

Sed nunc operae pretium est idem problema absolvere methodo sectionibus Conicis omnibus communi. Est autem sectionibus Conicis omnibus communis aequatio haec: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 = y^2$. posita $2a$. latere recto, $2q$. latere transverso. Unde fit $\cancel{2}al \mp \frac{\cancel{2}a}{q}xl = \cancel{2}y^2$, Unde habemus $l = \dfrac{y^2}{a \mp \frac{a}{q}x}$. Nunc ut etiam x. investigemus; ponamus $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \mp aq = y^2 \mp aq$. sive ponamus: $+aq \mp y^2 = +aq + \frac{a}{q}x^2 \mp 2ax$. Unde radice utrobique extracta,

---

7 *Nebenrechnung*: $2fx = \cancel{2}f\frac{y^2}{\cancel{2}a}$. $2f\frac{y^2}{2a} \frown 4a^2 = 4fy^2a$.

8 *Darunter Kustos ohne Bezug:* Caeterum placet

1 esse *(1)* dp = (x)(y) $\frown$ F(P) vel etiam esse DF ad F(P) *(2)* DF $\frown$ (X)(P) *L* 3 −fy. *(1)* et a − f. ponendo g fiet da = y^2 + gy vel da $+\frac{g^2}{4} = y^2 + gy + \frac{g^2}{4}$, vel $\sqrt{da + \frac{g^2}{4}} = y + \frac{g}{2}$, sive habebimus *(2)* et *L*

fiet: $\sqrt{aq \mp y^2} = +\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{a}{q}}} \mp x\sqrt{\dfrac{a}{q}}$, vel $x\sqrt{\dfrac{a}{q}} \mp \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{a}{q}}}$. Sed patet expressionem priorem eligi posse, nam vel $\mp$ significat $+$, ut in Parabola et Hyperbola, ac tunc nihil refert, utram eligas, vel significat $-$ ut in Ellipsi, et tunc utique $2a$ est major quam x. et utrum $x\sqrt{\dfrac{a}{q}}$ an $\dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{a}{q}}}$ major sit ex data Ellipsi quoniam tunc etiam a, et q. datae, statim sciri potest. Et si x est major quam a. sumatur ab altero latere[,] fiet eo minor. Quare commodioris

---

1 *Nebenbetrachtung*: $\sqrt{aq \mp y^2} = (\overset{+}{\dagger})\ \dfrac{a}{\sqrt{\dfrac{a}{q}}}\ (\overset{+}{\ddagger})\ x\sqrt{\dfrac{a}{q}}$ seu $x = (\overset{+}{\ddagger})\ \sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2 q}{a}}$ $(\overset{+}{\ddagger})\ q$. Novo opus esset signo ad hanc dubitationem exprimendam.

$$x = (\overset{+}{\ddagger})\ \sqrt{\overline{\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2 a}{a}}(\overset{+}{\perp})\ q}}$$

3 f. *Nebenbetrachtung*: In Ellipsi si q minor quam a, erit $2a$ major quam x. Si $2a$ minor quam x erit q major quam a. Si x major quam q debet esse $2ax = ax +$ aliquid. Quod per se patet.

1 f. eligi *(1)* debere *(2)* posse *L* 3 tunc *(1)* modo qvadrantem non excedas, qvod minime necesse est, *(a)* fit *(b)* utique a est major qvam *(2)* utique *L* 5 Et ... minor *erg.* *L* 7 f. exprimendam. *(1)* Si au pis aller $\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} - \mathrm{x} \frown \sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}} = 0$ Ergo $\mathrm{a} = \mathrm{x} \frown$ *(a)* $\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}} \frown$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}(= 1)$ Ergo $\mathrm{a} = \mathrm{x}$ $\mathrm{x} = \dfrac{\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} = \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$ *(2)* Si au pis aller $\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} - \mathrm{x} \frown \sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}} = 0$ erit *(a)* $\mathrm{a} = \mathrm{x}$ *(b)* $\cancel{\mathrm{x}} = \dfrac{\mathrm{x}\cancel{\mathrm{a}}}{\mathrm{q}}$ seu $\mathrm{x} = \mathrm{q}$. Si $\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} - \mathrm{x} \frown \sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}} = \mathrm{b}$, erit $\dfrac{\mathrm{a}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} - \mathrm{b} = \mathrm{x} \frown \sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}$ Ergo $\dfrac{\mathrm{a}}{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}} - \dfrac{\mathrm{b}}{\sqrt{\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}} = \mathrm{x}$. seu $\mathrm{q} - \sqrt{\dfrac{\mathrm{b}^2\mathrm{q}}{\mathrm{a}}} = \mathrm{x}$ *(3)* $\mathrm{x} =$ *L*

---

1 fiet: Leibniz übersieht, dass das Wurzelzeichen ein weiteres, unabhängiges Doppelvorzeichen erfordert. In der Nebenbetrachtung erkennt er die Problematik, kommt aber nicht zu einer Lösung.
7 $(\overset{+}{\ddagger})q$: Richtig wäre $(\mp)q$.

calculi causa ponamus $\sqrt{aq \mp y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\frac{a}{q}}} \mp x\sqrt{\frac{a}{q}}$. Hanc autem extractionem radicis veram esse, patet multiplicatione ejus in seipsam, ita enim fit:
$\left(\dfrac{a^2}{\frac{a}{q}} = \dfrac{a^2q}{a} = \right) aq + \dfrac{a}{q}x^2 \mp \left(\dfrac{2ax\sqrt{\frac{a}{q}}}{\sqrt{\frac{a}{q}}}\right) 2ax$, ut supra $= aq \mp y^2$. Jam quoniam ut dixi $\dfrac{a}{\sqrt{\frac{a}{q}}} \mp x\sqrt{\frac{a}{q}} = \sqrt{aq \mp y^2}$, ideo erit $\mp x\sqrt{\frac{a}{q}} = \sqrt{aq \mp y^2} - \dfrac{a}{\sqrt{\frac{a}{q}}}$ sive $x = \dfrac{\sqrt{aq \mp y^2}}{\mp\sqrt{\frac{a}{q}}} - \dfrac{a}{\mp\sqrt{\frac{a}{q}} \frown +\sqrt{\frac{a}{q}}}$ vel $= \mp\sqrt{\dfrac{aq \mp y^2}{\frac{a}{q}}} - \dfrac{a}{\mp\frac{a}{q}}$, vel $\mp\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \mp q$. Erit ergo

$$\langle l =\rangle \frac{y^2}{a \mp \frac{a}{q}x} = \frac{y^2}{a + \frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}(\underbrace{\mp\mp}(\frac{a}{q}q)a) - a} = \frac{y^2}{+\frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}}.$$

Atque ista nunc ad aequationem generalem: $yd - y^2 = xl - fl$ applicentur[,] fiet: $yd - y^2 = \dfrac{y^2}{a \mp \frac{a}{q}x} \frown x - f$, vel $d - y = \dfrac{y}{a \mp \frac{a}{q}x} \frown x - f$, et quoniam $x = \mp\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \mp q$[,] $d - y = \dfrac{y}{+\frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}} \frown \underbrace{\mp\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \mp q - f}$. Unde fit:

$$d - y = \frac{\mp yq}{a} \mp \underbrace{q - f} \frown \frac{y}{+\frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}} \text{ vel } d - y \mp \frac{yq}{a} = \underbrace{\mp q - f} \frown \frac{y}{+\frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}}$$

1 $\mp x\sqrt{\frac{a}{q}}$ *(1)* qvod etiam si sectio Conica data sit circulus, et *(2)* Hanc *L* 1 radicis *(1)* rectam *(2)* veram *L*

vel $\dfrac{d - y \underline{\mp} \dfrac{yq}{a}}{\mp q - f} = \dfrac{y}{+\dfrac{a}{q}\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2q}{a}}}$, quadratisque omnibus habebimus:

$$\frac{d^2 - 2dy \underline{\mp} \dfrac{2dyq}{a},, + y^2 \mp \dfrac{2y^2q}{a},, + \dfrac{y^2q^2}{+a^2}}{+q^2 + f^2 \underline{\mp} 2fq} = \frac{y^2}{+\dfrac{a^{\cancel{2}}}{q^{\cancel{2}}}\dfrac{aq^{\cancel{2}} \mp y^2\cancel{q}}{\cancel{a}}} = \frac{y^2q}{a^2q \mp y^2a},$$ factaque

multiplicatione per crucem fiet:

$$+d^2a^2q \mp d^2y^2a,, - 2dya^2q \underline{\mp} 2dy^3a,, \underline{\mp} 2dyq^2a - 2dy^3q,, + y^2a^2q$$
$$\mp y^4a,, \mp 2y^2q^2a + 2y^4q,, \cancel{+y^2q^3} \mp \frac{y^4q^2}{a} = \cancel{y^2q^3} + y^2qf^2 \mp 2y^2q^2f.$$

Quae Aequatio, si in ordinem digeratur, fiet:

$$\left\{\begin{array}{lllll} \mp \dfrac{q^2}{a}\ y^4 & \underline{\mp}\, 2da\ y^3 & \mp\, ad^2 \quad y^2 & -\, 2da^2q\ y & +\, d^2a^2q \\ \mp\, a & -2dq & \langle +a^2q\rangle & \underline{\mp}\, 2dq^2a & \\ +\, 2q & & \langle \mp\, 2q^2a\rangle & & \\ & & -qf^2 & & \\ & & \underline{\mp}\, 2q^2f & & \end{array}\right\} = 0$$

Haec ergo aequatio Curvis Conicis omnibus communis est, ut statim calculi aliunde comperti, exactissimo consensu comprobabo. Nam pro P a r a b o l a omittendi sunt omnes termini aequationis propositae, in quibus exponens ipsius q. non est 2. Excerptis ergo illis tantum in quibus quadratica est ipsius q. potestas, cum suis signis, posito $\mp$ esse $+$. et $\underline{\mp}$ esse $-$. et ipso q^2 in illis expuncto aequatio ita reformata eadem erit, cum illa quae paulo ante singulari in parabola calculo inventa est. Nimirum termini excerpendi sunt:

---

1 *Nebenbetrachtung*: NB. $\dfrac{+}{\mp} = \mp$. $\dfrac{-a}{\mp b} = \underline{\mp}\dfrac{a}{b}$. $a \mp \underline{\mp}\, b = a - b$. $+ \mp = \mp$. $\overset{\frown}{\mp\mp} = +$. $\overset{\frown}{\underline{\mp}\mp} = -$. $\overset{\frown}{\underline{\mp}\underline{\mp}} = +$. $-\,\overset{\frown}{}\mp = \underline{\mp}$. $\overset{\frown}{\underline{\mp}\,|} = \underline{\mp}$.

15 f. posito ... esse $-$. *erg.* L

$$\begin{array}{llll}
\mp\dfrac{q^2}{a}y^4 & \begin{array}{l}\mp 2q^2a\;y^2\\ \overline{\mp}\, 2q^2f\end{array} & \overline{\mp}\, 2dq^2ay & = 0.
\end{array}$$

qui reformati dabunt:

$$\begin{array}{llll}
+\dfrac{y^4}{a} & \begin{array}{l}+2a\;\;y^2\\ -2f\end{array} & -2day & = 0.
\end{array}$$

divisisque omnibus per y, et multiplicatis per a, fiet Aequatio:

$$\begin{array}{llll}
+y^3 & \begin{array}{l}+2a^2\;y\\ -2fa\end{array} & -2da^2 & = 0.
\end{array}$$

Eadem cum paulo ante inventa.

Ellipsin et Hyperbolam, ut compendiosum sit examen, eligemus, in qua latus rectum transverso aequetur, sive in qua sit $a = q$. Nam in caeteris, Ellipsi certe, examen non nisi operationis repetitio foret. Ellipsis autem qualem dixi circulus est. Si ergo aequatio proposita C i r c u l o applicetur, ante omnia termini omnes in quibus est y^4, et y^3, et y. simplex, seu nullo exponente affecta delebuntur. Positis enim $q = a$, et $\mp$ sumto pro $-$, et $\overline{\mp}$ pro $+$, se mutuo destruent, ut experiunti patebit; restabit ergo:

$$\begin{array}{lllllllll}
-d^2ay^2 & - & a^3y^2 & - & af^2y^2 & + & 2a^2fy^2 & +d^2a^3 & = 0, \text{ vel}\\
\hline
 & & & & & & & & = 0 - d^2a^3, \text{ sive}\\
+d^2ay^2 & + & a^3y^2 & + & af^2y^2 & - & 2a^2fy^2 & = d^2a^3. &
\end{array}$$

Totaque aequatione, tum per a, tum deinde per plurinomium, quo y^2 multiplicata est, divisa, fiet: $y^2 = \dfrac{d^2a^2}{d^2 + a^2 + f^2 - 2af}$, positaque $e = a - f$. et $e^2 = a^2 + f^2 - 2af$, fiet $y^2 = \dfrac{d^2a^2}{d^2 + e^2}$, ut jam supra inveneramus, ubi et ostendimus, constructionem hujus aequationis nihil aliud postulare, quam ut ex puncto dato in centrum Circuli ducatur recta, ea enim y sive ordinatam, aut sinum, quaesitum, determinabit, sive curvam ad angulos rectos secabit; quod etsi vulgarissimum sit; jucundum tamen fuit intueri quomodo calculi ambagibus expeditura sese esset natura rerum, ad exhibendam constructionem omnium quae fingi possent simplicissimam. Sed nec usu caret methodos generales atque intricatos, in figuris simplicissimis primum experiri. Quoniam enim in illis solutio problematum plerumque aliunde habetur, possunt saltem examini inservire, cum calculus prolixior, sit in lapsum proclivis: Praeterea imaginationem excitant, et saepe nos conditionum quarundam aut circumstantiarum, aut varietatum admonent, de quibus alioqui minime cogitassemus.

Restat tantum, ut in H y p e r b o l a quoque C i r c u l a r i ut vocare soleo, omnium simplicissima, in qua latus transversum recto aequale est, calculum comprobemus.

13 tum *(1)* per polynomium *(2)* deinde *L*   26 ut vocare soleo *erg. L*

Posito autem in Hyperbola $\mp$ esse $+$ et $\overline{\mp}$ esse $-$. et in hac quidem Hyperbolae specie esse $a = q$. Aequatio, ut statim experienti patebit, ex communi haec orietur

$$\begin{array}{lllllll} & & + \; d^2 & & & & \\ + \; 4y^4 & - \; 4dy^3 & + \; 3a^2 & y^2 & - \; 4da^2y & + \; d^2a^2 & = 0. \\ & & - \; f^2 & & & & \\ & & - \; 2fa & & & & \end{array}$$

Quod verissimum esse, calculo de integro resumto, in hac hyperbolae specie, ita probo: Aequatio, omnis hyperbolae naturam explicans, est $2ax + \dfrac{a}{q}x^2 = y^2$, positisque $a = q$, fiet: $2ax + x^2 = y^2$ et $2al + 2xl = 2y^2$, vel $\dfrac{y^2}{a+x} = l$. Qui valor, ipsius l, si aequationi generali, methodum perpendicularium ex puncto dato, ad curvam datam ducendarum, continenti, $yd = y^2 + xl - fl$ applicetur, fiet: $yd = y^2 + \dfrac{xy^2}{a+x} - \dfrac{fy^2}{a+x}$, vel $da + dx = ay + 2yx - fy$. Superest valorem quaeri ipsius x. Nimirum quia hic $2ax + x^2 + a^2 = y^2 + a^2$, erit $x = \sqrt{y^2 + a^2} - a$. Quo valore in locum ipsius x. substituto, habebimus:

$$da + d\sqrt{y^2 + a^2} - da \quad = \quad ay + 2y\sqrt{y^2 + a^2} - 2ay - fy.$$

sive $d\sqrt{y^2 + a^2} - 2y\sqrt{y^2 + a^2}$ vel $d - 2y, \frown \sqrt{y^2 + a^2}$, erit $= -ay - fy$. Quadrataque utraque aequationis parte, fiet $d^2 + 4y^2 - 4dy, \frown y^2 + a^2$ vel

$$d^2y^2 + d^2a^2 + 4y^4 \underset{+\,3y^2a^2}{\boxed{+4y^2a^2}} - 4dy^3 - 4dya^2, = f^2y^2 \boxed{+a^2y^2} + 2fay^{[2]}.$$

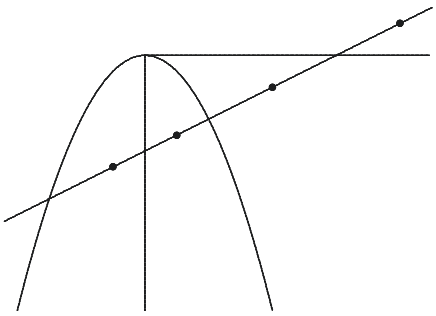
Quae aequatio in ordinem digesta, eam ipsam dabit, quam ex generali Conicarum aequatione derivavi $+4y^4 - 4dy^3$ etc. etc. ut praedictum erat.

Habemus ergo problema propositum, (: ducendi perpendicularem ex puncto dato ad curvam datam :) in sectionibus Conicis unica aequatione omnibus communi, eaque Quadrato-quadratica, solutum, cujus constructio latere non potest cum rationem aequationes quadrato-quadraticas construendi satis dilucide tradiderit Cartesius. Sed haec aequatio, si sectio Circulus sit, ob terminos altiorum potestatum incognitae quantitatis

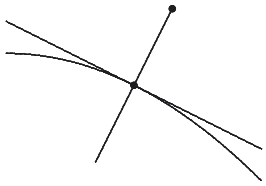
3 $+4d^2$ *L ändert Hrsg.* 22 constructio | omnibus communis *gestr.* | latere *L*

23 tradiderit: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 79–84.

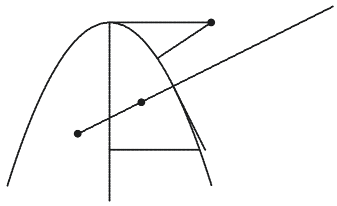
e⟨van⟩escentes, in planam abit. In Parabola statim Cubica fit. In universum quaecunque sit sectio conica data reduci potest ad Cubicam, methodo omnibus aequationibus quadrato-quadraticis communi, ac proinde problema hoc, semper in curva conica jam descripta, de caetero regula tantum ac circino effici potest, perinde ac si planum esset: Quoniam cujuslibet sectionis Conicae ope, problema cubicum aut quadrato-quadraticum quodlibet fieri potest in plano.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

Unum restat ut de Conicis admoneam, in aequatione generali pro ipsis inventa, adhibitam tantum formulam methodi generalis unam $F(P) = (X)(P) + A(X) - AF = p + x - f$. Unde sequitur $dp = yp + xy - fy$; vel l adhibita ad inveniendam p, fiet: $dy = y^2 + xl - fl$. supposito ordine punctorum qui est in figura tertia: $A.\,F.\,(X).\,(P)$. Sed si ordo alius sit, ut est figura quarta, quod variis modis fieri potest, tunc retentis omnibus in calculi progressu terminis aequationis Generalis, signa tantum variabuntur. Sed quoniam ea signorum mutatio ob terminorum multiplicitatem, et ipsarum notarum dubii valoris perplexitatem saepe difficilis et errori obnoxia est, ideo non inutile fuerit modum indicare, qua aequatio illa Conicarum generalis sufficere possit in omnes casus, etiamsi exempli causa recta DF ultra verticem A (vid. fig. 3) sive extra figuram cadat. Id sic obtinebimus: Curvae datae alia similis ac parallela circumscribatur, quantum satis est

1 f. qvaecunqve ... data *erg. L* 6 qvodlibet *(1)* solvi *(2)* construi *(3)* fieri *L* 14 terminorum *(1)* perplexitatem *(2)* multiplicitatem *L* 15 saepe ... est *erg. L*

11 figura tertia: s. Erl. zu S. 31 Z. 1. 12 figura quarta: nicht gefunden. 17 fig. 3: Nach dieser Angabe lag in der nicht gefundenen fig. 3 der Punkt F oberhalb von A.

remota, ut punctum F. in ejus axem cadat. Talem autem curvam describere facillimum est, ut et supra docui, cum exponerem certum casum quo in qualibet sectione Conica problema propositum reducitur ad aequationem planam: Id inquam facillimum est, cum sufficiat describi quamlibet parallelam pro arbitrio, neque enim eam per punctum certum transire necesse est, quod in problemate sequenti requiritur. Curva ejusmodi nova descripta, ducatur ad illam perpendicularis ex puncto dato secundum formulam generalem $dy = y^2 + xl - fl$, seu in Conicis juxta aequationem illam ipsis communem supra positam, cum jam respectu novae curvae, semper ordo punctorum, quem formula illa postulat, haberi possit. Recta curvae novae perpendicularis, etiam priori datae, quippe parallelae perpendicularis erit. Idemque in aliis quoque curvis fieri potest. Sed idem aliter facilius praestabitur, cum punctum A sumere liceat, ubilibet.

11 *Darunter Kustos ohne Bezug:* Et jam nihil

10 Idemqve *(1)* artificium in aliis qvoque curvis adhiberi *(2)* in L

6. CURVA SIMILIS
[Herbst 1673 – Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 221. 1 Streifen ca 24,0 × 6,0 cm mit geschwungener unterer Schnittkante. 1 S. — Bl. 221 hing ursprünglich zusammen mit LH 35 XII 2 Bl. 85 (VII, 2 N. 2). Auf der Rückseite quer geschrieben Fragment eines Textes zur Rechenmaschine.
Cc 2, Nr. 1073

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für August 1673 bis Mitte 1674 belegt. Die Überlegungen zu ähnlichen Kurven dürften nach dem in N. 3 dokumentierten Gespräch mit Ozanam und wohl auch nach N. 4 entstanden sein.

C u r v a s i m i l i s

Si curva quaedam descripta ductibus quotcunque perpendicularibus in qualibet perpendiculari sive a parte concava sive a parte convexa curvae aliud punctum sumatur ut *D*. distantia semper aequali *BD*. a curva distans, definire quaenam illa sit curva; item data curva, quod est longe difficilius, aliam definire curvam, cujus puncta quaelibet hoc modo data distantia ab alterius curvae punctis, in perpendicularibus alterius curvae sumta distent. Difficilis ejusmodi regressus. Possunt infinita hinc jam fingi problemata, ut si distantia non sit eadem, sed crescat ut applicatae Trianguli, parabolae etc.

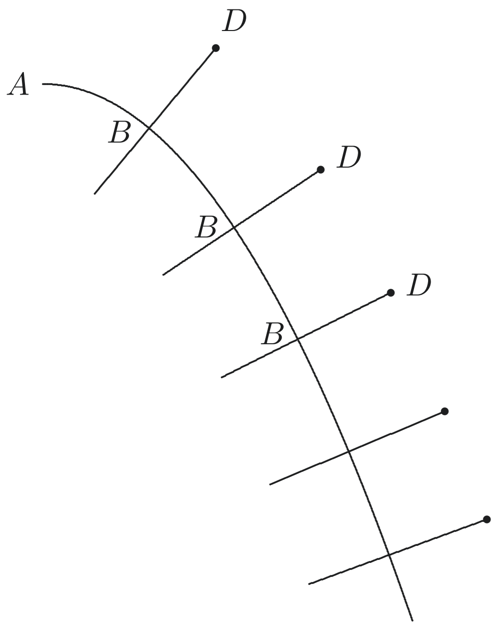
---

11 *Darunter*: Imo talis non est similis.

11 C u r v a s i m i l i s *erg. L*

---

14 curva: vgl. die Überlegungen von Christiaan Huygens zur „curva parallela“ (*HO* XIV S. 398 bis 403).



[*Fig. 1*]

1 *Unter der Figur*: Nota Curvae *B*. et *D*. similes certo modo. Alia est similitudo Apollonii in *Conicis*, ubi videndum an sint verbi gratia parabolae similes et similiter positae, quae in eodem plano secante conum descriptae in plano baseos circulos concentricos projiciunt.

2 similitudo: APOLLONIOS, *Conica*, VI, def. 2; vgl. EUTOKIOS, *Commentarii in libros Archimedis*, gedr. in *AO* III S. 332 f. sowie Cl. MYDORGE, *Prodromi catoptricorum et dioptricorum . . . libri quatuor priores*, 1640, S. 249–251.

7. AEQUATIO EX CIRCULI ET SECTIONIS CONICAE INTERSECTIONE ORIENS

[Ende Dezember 1673 – Juni 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 296–297. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge Bl. 297 r°, 296 v°, 297 v°, 296 r°. — Auf Bl. 297 v° oben drei gestrichene Zeilen: „ChurCollnische Vorschlage." „Obzwarn Churf. Gn." und „*Propositions de S. A. E. de Cologne*". Neben und über diesen eingepasst N. 8.
Cc 2, Nr. 855 C

Datierungsgründe: Die gestrichenen Zeilen auf der ersten Seite enthalten offenbar den Titel und Beginn eines geplanten Konzepts, das sich auf den achtseitigen Druck *Final Resolution Und Erklärung, So Ihre Churfl. Durchl. zu Cölln, Durch dero Thum-Capitul denen Käys. Herrn Abgesandten zu Cölln hinterbringen und eröffnen lassen, den 11. Decemb. 1673* bezieht. Tatsächlich hat Leibniz ein Exzerpt dieses Druckes in französischer Sprache angefertigt: *Extrait des propositions et offres de S. A. E. de Cologne faits aux Ambassadeurs plenipotentiaires de Sa M*^{te} *Imperiale, Cologne 20 [?] Decembre 1673* (LH 12 V 2 Bl. 1 = Cc 2, Nr. 605). Es befasst sich also offensichtlich mit den Vorschlägen, die der Erzbischof und Kurfürst von Köln, Maximilian Heinrich von Bayern, an Kaiser Leopold I. richtete. Dieses Stück kann jedoch nicht mehr herangezogen werden, da es mit dem überwiegenden Teil von LH 12 V nach der Auslagerung im Zweiten Weltkrieg verloren gegangen ist. Somit ist unter Berücksichtigung des Transportweges der Druckschrift nach Paris der späte Dezember 1673 als *terminus post quem* unseres Stückes anzusetzen. Der *terminus ante quem* ergibt sich aus dem Gebrauch der mathematischen Symbole: Das moderne Gleichheitszeichen spricht für eine Niederschrift bis Juni 1674. Auch die *signa ambigua* deuten hierauf hin: Die hier eingesetzten einfachen Zeichen $\mp$ und $\overset{=}{+}$ verwendet Leibniz, bevor er sie durch die analogen Zeichen ǂ und $\underline{ǂ}$ der wohl im Mai oder Juni 1674 abgefassten *Méthode de l'universalité* (N. 10) ersetzt. An einer Stelle des Stückes benutzt er aber versehentlich bereits ein $\underline{ǂ}$ (was für eine Niederschrift in unmittelbarer zeitlicher Nähe zu der der *Méthode* spricht). Und die zusammengesetzten Doppelvorzeichen werden nach den Regeln gebildet, die Leibniz in seiner *Méthode de l'universalité* festlegt; als deren Bestandteile werden hier aber nicht die dort neu eingeführten einfachen Zeichen, sondern ihre Vorgänger verwendet. — N. 7 ist nach N. 5, durch Wasserzeichen zu datieren auf August 1673 – Mitte 1674, entstanden. Sein eigenes Wasserzeichen tritt auch in dem Mitte 1674 entstandenen N. 17 auf und ist sonst für Stücke belegt, die aus dem Oktober 1674, Oktober und November 1675 stammen.

Vide figuram, ℵ qua aequationem explico, quae ex circuli et Sectionis Conicae intersectione oritur. Ibi AB abscissa Sectionis Conicae $= x$. DC, radius circuli $= c$. $BC = y$. $DE = e$. $DF = d$. GF abscissa circuli $= g$. $AE = f$. Tantum autem cogitandum est, esse $FC = y\,(\mp)\,e$. Imo $FC = \left.\begin{array}{l} +y + e \\ +y - e \\ -y + e \end{array}\right\} \mp y \mathbin{{}^{+}\!\!\mp} e.$

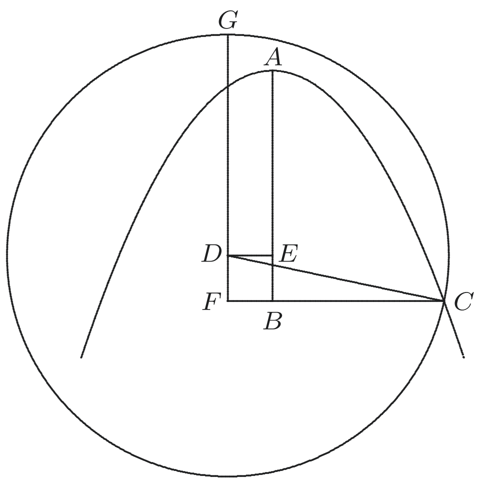
$$\text{Patet esse: } y = \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \qquad \Big| \qquad \text{item} = \sqrt{c^2 - d^2} = ((\mp))\, y\, ((\mathbin{{}^{+}\!\!\mp}))\, e$$

$$\text{unde} \quad y^2 = 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \qquad \Big| \qquad \text{seu} \quad c^2 - d^2 = y^2 ((\mp))((\mathbin{{}^{+}\!\!\mp}))\, 2ye + e^2.$$

$$\text{Seu } y^2 = c^2 - d^2\, ((\overline{\mp}))((\mathbin{{}^{+}\!\!\mp}))\, \underset{\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}}{\underset{\bigwedge}{2y}}e - e^2 = 2ax \mp \frac{a}{q}x^2.$$

1 figuram, | ℵ *erg.* | qva *(1)* intersectionem *(2)* aeqvationem L 2 abscissa *(1)* parabolae *(2)* Sectionis L 4 Imo ... ${}^{+}\!\!\mp$e *erg.* L

1 figuram, ℵ: Die fragliche Abbildung konnte bislang nicht gefunden werden. Aus den Angaben in den folgenden Zeilen lässt sich ihre Struktur wie folgt rekonstruieren:



$$\text{Unde } ((\mp))((\pm\mp))\, 2e\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} = 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 - c^2 \overset{+f^2(\mp)(\pm\mp)2fx+x^2}{\boxed{+d^2}} + e^2.$$

[*Erster Ansatz*]

Ergo

$$\left.\begin{array}{rc|c|c|c|c|r}
 & & +6f^2 & & & & \\
+4e^2 \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 & = & +4a^2x^2 & \mp 4\frac{a^2}{q}x^3 & -4ac^2x & +\frac{a^2}{q^2}x^4 & +c^4 \\
\cancel{8}e^2ax \mp 4\frac{ae^2}{q}x^2 & & \mp 2\frac{a}{q}c^2 \ldots & \mp(\mp)(\pm\mp)4f\frac{a}{q} & +4af^2 & \mp 2\frac{a}{q} & -2c^2f^2 \\
4 & & & & & & -2c^2e^2 \\
\frac{2\cancel{4}ae^2}{q} & & \mp \ldots\ldots f^2 \ldots & +4a & -c^2+e^2, & +1 & +f^4 \\
 & & & & \frown(\mp)(\pm\mp)4f & & +2f^2e^2 \\
 & & (\mp)(+\mp)8fa & (\mp)(\pm\mp)4f & & & +e^4 \\
\hline
 & & \mp 2\frac{e^2a}{q} \ldots & & -4ae^2 \ldots & & \\
 & & -c^2+e^2 & & (\mp)(\pm\mp)4f^3 & &
\end{array}\right\} = 0$$

---

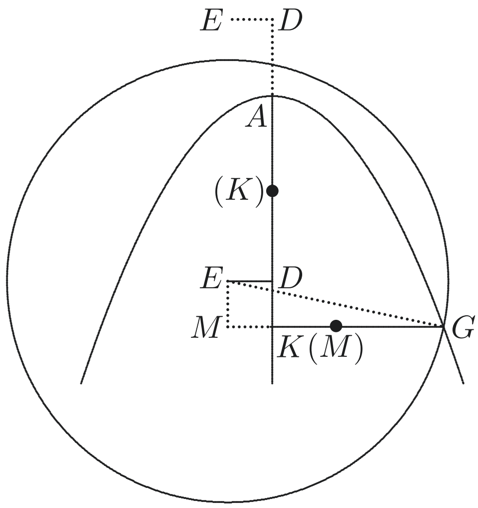
2 *Am Rand:* Sed $d = DF = EB$ incognita. AE cognita ponatur $= f$, pro d ponetur: $(\mp)f(\pm\mp)x$. Ejus $\square$ $+f^2(\mp)(\pm\mp)2fx + x^2 = d^2$. $f^4(\mp)(\pm\mp)4f^3x + 6f^2x^2(\mp)(\pm\mp)4fx^3 + x^4$.

11 DF *(1)* est *(2)* = | Ex *ändert Hrsg.* | incognita *L*

---

4 Ergo: Die folgende Gleichung ist stark überkorrigiert. Das Ergebnis ist gleichwohl fehlerbehaftet. Leibniz stellt dies selbst fest und setzt in S. 47 Z. 6 an der gleichen Stelle noch einmal neu an.
8 $(\mp)(+\mp)8fa$: Dies ist die einzige bislang bekannte Stelle außerhalb von N. 8, an welcher ein zusammengesetztes Doppelvorzeichen des ersten Systems auftritt. Offensichtlich geschieht dies hier irrtümlich.

Atque ita aequatio invenitur, quae determinatur intersectione circuli et sectionis Conicae, cujusque radix est abscissa sectionis Conicae. Sed haec aequatio ad parabolam est inutilis, tunc enim terminus maximus x^4, et pene maximus x^3 evanescunt, quia per q. dividuntur, ideoque utilius est investigare applicatam potius.



[*Fig. 2*]

Et utile erit figuram et literas Cartesii sequi pag. 86. Sectionis Conicae AG latus rectum esto a. transversum q. AD abscissa $= b$. $DE = c$. $EG = d$. Quaeritur $y = KG$. Patet ex iis quae a me ostensa sunt alibi prosit: $AK = x$.

Fore $\sqrt{aq \mp y^2} = \dfrac{a}{\sqrt{\frac{a}{q}}} \mp x\sqrt{\dfrac{a}{q}}$ vel $= x\sqrt{\dfrac{a}{q}} \mp \dfrac{a}{\sqrt{\frac{a}{q}}}$.

Ergo $x = \dfrac{\mp\sqrt{aq \mp y^2}}{\sqrt{\frac{a}{q}}} \mp q$, vel $x = \dfrac{\sqrt{aq \mp y^2}}{\sqrt{\frac{a}{q}}} \mp q$

$= \mp\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2 q}{a}} \mp q$ vel $\sqrt{\dfrac{aq \mp y^2}{a}} \mp q$. Ex his priorem, eligamus.

4 est *(1)* adhibere *(2)* investigare *L* 6 pag. 86. *(1)* Parabolae *(2)* Sectionis Conicae *L* 7 f. qvaeritur | z *ändert Hrsg.* | = KG. *L* 8 alibi *(1)* fore *(2)* prosit *L*

6 Cartesii: Siehe R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 86. 8 alibi: Vgl. N. 5 S. 33 Z. 1.

Et quia K. vel trans D vel citra D sumi potest erit: $DK = AK - AD$ vel $AD - AK$, seu $EM = DK = (\mp)AK(\mp)\,AD$. Ergo $\left(\mp\right)\overline{\mp\sqrt{\dfrac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \mp q}\;(\mp)\,b = DK$. Eodem modo $MG = KG\,((\mp))\,\underbrace{KM = ED}\, = y\,((\mp))\,c$. Jam $EM^2 = DK^2$ erit $=$

$$\frac{aq^2 \mp y^2q}{a} - 2q\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} + q^2 \mp 2b\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \mp 2bq + b^2$$

atque ita hac quidem multiplicatione signa ambigua secunda $(\mp)$ vel $(\mp)$ elisa sunt. Ad EM^2, addatur MG^2, fiet

$$\ldots\ -\ \ldots\ +\ \ldots\ \mp\ \ldots\ \mp\ \ldots\ +\ \ldots\ + y^2\,((\mp))\,2yc + c^2 \;=\; EG^2 \;=\; d^2$$

Ut auferantur Signa Radicalia fiet:

$$\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} = \frac{\dfrac{\cancel{+aq}^2 \mp y^2q}{a} - 2q^2 \mp 2bq - b^2 + d^2 - y^2((\mp))\,2yc - c^2}{-2q \mp 2b}$$

et utroque Termino quadrato fiet:

$$q^2 \mp y^2\frac{q}{a} = +y^4\frac{q^2}{a^2} \mp y^2\frac{4q^3}{a} + y^2\frac{4bq^2}{a} \mp y^2\frac{2b^2q}{a} \mp y^2\frac{2d^2q}{a} \mp y^4\frac{q}{a} \mp ((\mp))\,y^3\,\frac{4cq}{a} \mp y^2\frac{2cq}{a}$$
$$+4q^4 \mp 8bq^3 + 4q^2b^2 - 4q^2d^2 + 4q^2y^2 + ((\mp))\,8q^2cy + 4q^2c^2$$
$$+4b^2q^2 \mp 4b^3q \mp 4bqd^2 \mp 4bqy^2 \mp ((\mp))\,8bqcy \mp 4bqc^2$$
$$+b^4 - 2b^2d^2 + 2b^2y^2\,((\mp))\,4b^2cy - 2b^2c^2 \qquad + d^4 - 2d^2y^2((\mp))\,4d^2cy - 4d^2c^2$$
$$y^4((\mp))4cy^3 + 2c^2y^2 \qquad + 4c^2y^2((\mp))\,4c^3y \qquad + c^4$$

1 erit: *(1)* AD = AK ∓ DK *(2)* DK = AK − AD *L* 2 f. modo MG = *(1)* z + E *(2)* KG … ED = *(a)* z *(b)* y *L* 9 $\dfrac{-\,y^2((\mp))\,2yc - c^2}{-2q \mp 2b}$ *erg. L*

---

7 $y^2\,((\mp))\,2yc$: Folgerichtig nach Z. 3 wäre $y^2\,((\mp))\,2yc$. 9 Leibniz ergänzt zwar den Nenner des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung, berücksichtigt ihn jedoch bei der folgenden Quadrierung nicht. 11–15 $q^2 \mp y^2\dfrac{q}{a}\ \ldots\ + c^4$: Die Gleichung weist mehrere Flüchtigkeiten auf.

Ordinata aequatione habebimus:

$$\begin{array}{llllll} +\dfrac{q^2}{a^2} & y^4 & \mp((\mp))\,\dfrac{4cq}{a} & y^3 & \mp\, 4\dfrac{q^3}{a} & \\ \mp\, 2\dfrac{q}{a} & & ((\mp))\,4c & & +4\dfrac{bq^2}{a} & \\ +1 & & & & & \end{array}$$

[*bricht ab*]

[*Zweiter Ansatz*]

Ut error calculi vitetur, ducamus in se:

$$\mp\frac{a}{q}x^2 + x^2 + 2ax \;(\mp)(\overset{+}{\mp})\; 2fx + f^2 + e^2 - c^2 = ((\mp))((\overset{+}{\mp}))\,2e\sqrt{2ax\mp\frac{a}{q}x^2} \text{ fiet:}$$

$$\left.\begin{array}{llllllllllllll}
+\dfrac{a^2}{q^2}x^4 \mp 2\dfrac{a}{q}x^4 \mp 4\dfrac{a^2}{q}x^3 \mp (\mp)(\overset{+}{\mp})\,4\dfrac{af}{q}x^3 & \mp & 2\dfrac{af^2}{q}x^2 & \mp & 2\dfrac{ae^2}{q}x^2 & \mp & 2\dfrac{ac^2}{q}x^2 \\
\quad + x^4 + 4ax^3 \;(\mp)(\overset{+}{\mp})\; 4fx^3 & + & 2f^2x^2 & + & 2e^2x^2 & - & 2c^2x^2 \\
\quad + 4a^2x^2 \;\ldots\ldots\; 8afx^2 & + & 4af^2x & + & 4ae^2x & - & 4ac^2x \\
\quad + 4f^2x^2 & (\mp)(\overset{+}{\mp}) & 4f^3x & (\mp)(\overset{+}{\mp}) & 4e^2fx & (\mp)(\overset{+}{\mp}) & 4fc^2x \\
 & + & f^4 & + & 2f^2e^2 & - & 2f^2c^2 \\
 & & & + & e^4 & - & 2e^2c^2 \\
 & & & & & + & c^4
\end{array}\right\}$$

$$= +8e^2ax \mp 4\frac{e^2a}{q}x^2$$

6 f. in se: *(1)* $2ax \mp \frac{a}{q}x^2$ *(2)* $\mp\frac{a}{q}x^2 + 2ax - c^2 + d^2 + e^2 = ((\mp))((\overset{+}{\mp}))2e\sqrt{2ax\mp\frac{a}{q}x^2}$ *(a)* $+\frac{a^2}{q^2}x^4$ *(b)* seu *(3)* $\mp\frac{a}{q}x^2$ *L*

6 error calculi: Die Feststellung bezieht sich auf die Gleichung in S. 44 Z. 4–10. An dieser Stelle setzt Leibniz nun neu an.

Ordinataque aequatione, fiet:

$$\left.\begin{array}{l}
\dfrac{h^4}{a^4}\underbrace{\left\{\begin{array}{r}+\dfrac{a^2}{q^2}\\ \mp 2\dfrac{a}{q}\\ +1\end{array}\right.}_{\substack{p\\ \alpha}} x^4 \;\Bigg\|\; \left\{ \frown \dfrac{h^3}{a^3}\underbrace{\left\{\begin{array}{r}\mp 4\dfrac{a^2}{q}\\ +4a\\ \mp(\mp)(^{+}\!\mp)4\dfrac{af}{q}\\ (\mp)(^{+}\!\mp)4f\end{array}\right.}_{r} x^3 \;\Bigg\|\; \frown \dfrac{h^2}{a^2}\underbrace{\left\{\begin{array}{r}\mp 2\dfrac{af^2}{q}\\ \text{NB. }\mp 2\dfrac{ae^2}{q}\\ \mp 2\dfrac{ac^2}{q}\\ (\text{NB.}) + 2f^2\\ +2e^2\\ -2c^2\\ +4a^2\\ (\mp)(^{+}\!\mp)8af\\ (\text{NB.}) +4f^2\\ \text{NB. }\mp 4\dfrac{e^2a}{q}\end{array}\right.}_{s} x^2 \;\Bigg\|\; \dfrac{h}{a}\underbrace{\left\{\begin{array}{r}(\mp)(^{+}\!\mp)4f^3\\ \ldots\ldots..4fe^2\\ (\mp)\ldots.4fc^2\\ +4af^2\\ \text{NB. }+4ae^2\\ -4ac^2\\ \text{NB. }-8ae^2\end{array}\right.}_{t} x \;\Bigg\|\; \underbrace{\begin{array}{r}+f^4\\ +2f^2e^2\\ -2f^2c^2\\ +e^4\\ -2c^2e^2\\ +c^4\end{array}}_{v} \right\}
\end{array}\right\} = 0$$

$\beta \frown g + \gimel$

---

3 *Zu den Koeffizienten von* x^2*, durch Umrahmung isoliert:*
NB. pro $\mp 2\dfrac{ae^2}{q} \mp 4\dfrac{e^2a}{q}$ fiet $\mp 2\dfrac{ae^2}{q}$. (NB.) pro $+2f^2 + 4f^2$ fit $+6f^2$.

2 *(1)* $\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{a}^2} \frown\sqrt{\frac{\mathrm{h}^3}{\mathrm{a}^3}} \frown\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}} \sqrt{\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{h}^4}{\mathrm{a}^4} \frown\frac{\mathrm{h}^3}{\mathrm{a}^3}$ | $\frown\frac{\mathrm{h}^2}{\mathrm{a}}$ *ändert Hrsg.* | | $\sqrt{\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}}$ *nicht gestr.* | $\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}$ *L*

8 *(1)* | $\gimel \frown \mathrm{f}$ *bezogen auf* $\mp (\mp)(^{+}\!\mp)4\frac{\mathrm{af}}{\mathrm{q}}$ *u.* $(\mp)(^{+}\!\mp)4\mathrm{f}$ | *(2)* | $\beta \frown \mathrm{g} + \gimel$ *bezogen auf alle Vorfaktoren von* x^3 | *L*

---

13 Die geschweiften Klammern, mit denen die Koeffizienten zu p, r, s und v zusammengefasst werden, sind in der Handschrift senkrecht angeordnet. Aus satztechnischen Gründen werden sie hier der waagrechten Ausrichtung der Klammer für t angeglichen.

Tentandum an brevior sit via, si x eliminetur, y retineatur. Est enim

---

48,3 *Weitere Notiz zu den Koeffizienten von* x^2*:* $\delta\frown g^2 \quad + ה g \quad + \theta e^2 \quad + \lambda c^2$

48,3 *Zu den Koeffizienten von* x*, ebenfalls durch Umrahmung isoliert:* NB. pro $+4ae^2 - 8ae^2$ ponatur $-4ae^2$.

48,3 *Weitere Notiz zu den Koeffizienten von* x*:* μg^3 הg^2 ט^2g מe^2 סc^2 ξfe^2 πfc^2

48,7 *Zu* α*:* $\dfrac{4a}{q} + \dfrac{4}{1} = \dfrac{\mp 4\langle a\rangle + 4q}{q}$. $\dfrac{\mp a + q}{q} = \sqrt{\alpha}, \frown 4$. $\dfrac{a^2}{q^2} + \dfrac{a}{q} = \dfrac{qa^2 + q^2a}{q^3}$ seu $\dfrac{a^2 + qa}{q^2}$. $\dfrac{a^2 \mp 2qa + q^2}{q^2} = \dfrac{a \mp q}{q}\ \square = \alpha$.

48,8 *Zu* $\beta\frown g +$ ג *sowie zu einer Reihe weiterer Stellen:* NB. pro f ponatur g.

48,13 *Nebenbetrachtung:* | *(1)* pro *(a)* x^4 *(b)* x, ponatur $= \mathrm{z}((\mp))\mathrm{h}$ erit $\mathrm{x}^2 = \mathrm{z}^2((\mp))2\mathrm{zh} + \mathrm{h}^2$ *(2)* | pro *gestr.* |

$$\begin{array}{r}
\mathrm{x} = \mathrm{z}\,((\mp))\,\mathrm{h}\\
\mathrm{x}^2 = \mathrm{z}^2\,((\mp))\,2\mathrm{zh} + \mathrm{h}^2\\
\mathrm{z}\,((\mp))\,\mathrm{h}\\
\hline
\mathrm{x}^3 = \mathrm{z}^3\,((\mp))\,3\mathrm{hz}^2 + 3\mathrm{zh}^2\,((\mp))\,\mathrm{h}^3\\
\mathrm{z}\,((\mp))\,\mathrm{h}\\
\hline
\mathrm{z}^4\,((\mp))\,4\mathrm{hz}^3 + 6\mathrm{h}^2\mathrm{z}^2\,((\mp))\,4\mathrm{h}^3\mathrm{z} + \mathrm{h}^4
\end{array}$$

Unde
$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathrm{p\,z}^4 & +\mathrm{r} & \mathrm{z}^3 & +\mathrm{s} & \mathrm{z}^2 & +\mathrm{t} & \mathrm{z} & +\mathrm{v} & \\
 & ((\mp))\,4\mathrm{ph} & & +6\mathrm{ph}^2 & & ((\mp))\,4\mathrm{ph}^3 & & +\mathrm{ph}^4 & \\
 & & & ((\mp))\,3\mathrm{rh} & & +3\mathrm{rh}^2 & & ((\mp))\,\mathrm{rh}^3 & \\
 & & & & & ((\mp))\,2\mathrm{sh} & & +\mathrm{sh}^2 &
\end{array}$$
gestr. | *L*

---

2 $\delta\frown g^2 \ldots \lambda c^2$: Leibniz fasst die Koeffizienten von x^2 zusammen und gibt ihnen neue Bezeichnungen, die ohne Doppelvorzeichen auskommen. Der Vorfaktor $+4a^2$ geht dabei allerdings verloren. Die neuen Benennungen werden in der Gleichung auf S. 54 Z. 8–14 verwendet. 5 f. $\mu g^3 \ldots \pi fc^2$: Auch die Koeffizienten von x benennt Leibniz um. Diese Umbenennung ist nicht ganz schlüssig: Die Vorfaktoren $(\mp)(^{+}\!\mp)\,4fe^2$ und $(\mp)(^{+}\!\mp)\,4fc^2$ werden unter Ersetzung von f durch g zu ט^2g zusammengefasst, aber auch noch ein zweites Mal unter Beibehaltung von f als ξfe^2 und πfc^2 aufgeführt. Auch diese neuen Bezeichnungen werden in S. 54 Z. 8–14 verwendet. 9 pro f ponatur g: Leibniz führt weiter unten (S. 52 Z. 20) einen Koeffizientenvergleich durch, bei dem eine zweite mit f bezeichnete Größe auftritt.

$$\underbrace{c^2 - f^2 (\mp)({}^{+}\!\mp)\, 2fx - x^2}_{a^2} = y^2 \,((\mp))(({}^{+}\!\mp))\, 2ye + e^2.$$

Sed ipsa aequationis hujus forma satis ostendit rem, eodem redire.

Ponatur jam $x = z\sqrt{\frac{h}{a}}$, erit $x^2 = z^2\frac{h}{a}$, $x^3 = z^3\sqrt{\frac{h^3}{a^3}}$, et $x^4 = z^4\frac{h^2}{a^2}$. Dividendi jam omnes aequationis superioris termini, demto primo, per $+\frac{a^2}{q^2} \mp 2\frac{a}{q} + 1 \frown \frac{h^2}{a^2}$. Jamque aequatio pro Minima seu perpendiculari ad sectionem Conicam ducendam, cujus radix y huc transcripta intelligatur, et ponatur $y = z$, jamque cum duae habeantur aequationes ejusdem formae, ejusdemque Radicis, termini respondentes sigillatim sibi aequabuntur. Et primum ut aequetur terminus secundus secundo, fiet:

$$\frac{\mp 4\frac{a^2}{q} + 4a \mp (\mp)({}^{+}\!\mp)\, 4\frac{ag}{q}\, (\mp)({}^{+}\!\mp)\, 4g, \frown \cancel{a^2} \frown \sqrt{\frac{a^3}{h^3}}}{\cancel{h^2}} = \frac{(({}^{+}\!\mp)) \mp a\, (({}^{+}\!\mp))\, q, \frown 2d}{\mp a + 2q \mp \frac{q^2}{a}}$$

1 $((\mp))(({}^{+}\!\mp))\, 2ye - e^2$ *L ändert Hrsg.* 2 f. redire *(1)* NB. pro *(2)* Ponatur jam *(a)* $x = z^2\frac{h}{a}$ erit $x^2 = z^4\frac{h^2}{a^2}$, et $x^3 =$ *(b)* $x^2 = z^2\frac{h}{a}$ erit $x^4 = z^4\frac{h^2}{a^2}$, *(c)* $x = z\frac{h}{a}$, erit $x^2 = z^2\frac{h^2}{a^2}$, $x^3 = z^3\frac{h^3}{a^3}$ et $x^4 = z^4\frac{h^4}{a^4}$. *(d)* $x = z\sqrt{\frac{h}{a}}$ *L* 4 aeqvationis *(1)* huius *(2)* superioris *L* 9 *(1)* $\frac{\ldots \mp (\mp)({}^{+}\!\mp) 4\frac{af}{q} (\mp)({}^{+}\!\mp) 4f, \frown a^2}{h^2} =$ *(2)* $\frac{\ldots \mp (\mp)({}^{+}\!\mp) 4\frac{ag}{q} (\mp)({}^{+}\!\mp) 4g \frown \cancel{a^2} \frown \sqrt{}\, (a) \frac{h^3}{a^3}\, (b) \frac{a^3}{h^3}}{\cancel{h^2}} =$ *L*

---

9 $\frac{(({}^{+}\!\mp)) \mp a\, (({}^{+}\!\mp))\, q, \frown 2d}{\mp a + 2q \mp \frac{q^2}{a}}$: Auf der rechten Seite der Gleichung verwendet Leibniz den Koeffizienten von y^3 aus der normalisierten Gleichung, mit welcher er das Problem der *Minima ad conicam* algebraisch gelöst hatte; vgl. N. 5 S. 35. Dabei hat er — wie in der etwas später aufgestellten *Aequation generale* für dieses Problem — den Term d um das Vorzeichen ${}^{+}\!\mp$ ergänzt; vgl. S. 159 Z. 9 f. Für die linke Seite der Gleichung hätte sich nach Normalisierung und Substitution von x durch $z\sqrt{\frac{h}{a}}$ eigentlich $\frac{\left(\mp 4\frac{a^2}{q} + 4a \mp (\mp)({}^{+}\!\mp)\, 4\frac{ag}{q}\, (\mp)({}^{+}\!\mp)\, 4g\right) \cdot a^2 \cdot \sqrt{\frac{h^3}{a^3}}}{\left(\frac{a^2}{q^2} \mp 2\frac{a}{q} + 1\right) \cdot h^2}$ ergeben. Bei der folgenden Kreuzmultiplikation

Factaque multiplicatione per Crucem erit

$$+4\frac{a^5}{q} \mp 4a^4\,(\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4\frac{a^4g}{q} \mp (\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4a^3g,, \mp 8a^4 + 8a^3q \mp (\mp\ {}^{+}\!\mp)\,8a^3g\,(\mp\ {}^{+}\!\mp)\,8ga^2q,,$$
$$+4a^3q \mp 4a^2q^2\,(\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4a^2gq \mp (\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4gaq^2 = (({}^{+}\!\mp)) \overline{\mp}\ 2adh^2\,(({}^{+}\!\underline{\mp}))\,2dqh^2$$

$$\text{Ergo}\quad g = \frac{4\dfrac{a^5}{q} \mp 12a^4 + 12a^3q \mp 4a^2q^2 \mp (({}^{+}\!\mp))\,2adh^2\,(({}^{+}\!\mp))\,2dqh^2}{(\overline{\mp}\ {}^{+}\!\mp)\,4\dfrac{a^4}{q} \overline{\mp} (\mp\ {}^{+}\!\mp)\,12a^3(\overline{\mp}\ {}^{+}\!\mp)\,12a^2q \overline{\mp} (\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4aq^2}.$$

Sed antequam ultra progrediamur, ne in errores calculi incidamus, eosque aliis erroribus cumulemus, operae pretium est idem in circulo et parabola certoque quodam puncti dati situ experiri. Equidem possem semel in universum Signa $\mp$ et $({}^{+}\!\mp)$ pro arbitrio determinare, et punctum E. in fig. ℵ certo quodam loco reponere; sed utilius est, ejus locum arbitrio relinquere construentis, potest enim contingere, ut electio constructionem reddat breviorem. Unde rursus usus apparet ingens signorum ambiguorum: probationis tamen instituendae causa $(\mp)$ valeat $+$, et $({}^{+}\!\mp)$ etiam $+$. Item $(({}^{+}\!\mp))$ significet $-$, et $(({}^{+}\!\mp))$ $+$. Denique in Circulo $a = q$, et $\mp$ est $-$. In parabola q infinite longa, et $\mp$ est $+$.

Pro Circulo nimirum resumto primo calculo, fiet: $4e^2 \frown 2ax - x^2 = 2ax - \cancel{x^2} - c^2 + g^2 + 2gx + \cancel{x^2} + e^2$, $\square$ sive $8e^2ax - 4e^2x^2 = 4a^2x^2 - 4axc^2 + 4axg^2 + 8agx^2 + 4axe^2 + c^4 - 2c^2g^2 - 4c^2gx - 2c^2e^2 + g^4 + 4g^3x + 2g^2e^2 + 4g^2x^2 + 4gxe^2 + e^4$.

---

13 *Hierzu am Rand:* pro f pone g, ut dictum

13 f. $2\mathrm{ax} - \cancel{\mathrm{x}^2}$ *(1)* $-\mathrm{c}^2 + \mathrm{f}^2 + 2\mathrm{fx}$ *(2)* $-\mathrm{c}^2 + \mathrm{g}^2 + 2\mathrm{gx}$ *L*

---

fehlt somit der auch als α bezeichnete Faktor $\frac{a^2}{q^2} \mp 2\frac{a}{q} + 1$. Zudem wird der nachträglich ergänzte Term $\sqrt{\frac{a^3}{h^3}}$ (folgerichtig wäre $\sqrt{\frac{h^3}{a^3}}$) nicht berücksichtigt. Dementsprechend ist das Ergebnis für g in Z. 4 fehlerhaft. 13 primo calculo: Vgl. S. 44 Z. 2.

$$\text{Vel fiet}\quad \left.\begin{array}{llllll} +\,4a^2 & x^2 & -\,4ac^2 & x & + & c^4 \\ +\,4e^2 & & +\,4ag^2 & & - & 2c^2g^2 \\ +\,8ag & & -\,4cg & & + & g^4 \\ +\,4g^2 & & +\,4g^3 & & - & 2c^2e^2 \\ & & -\,4ae^2 & & + & 2g^2e^2 \\ & & +\,4ge^2 & & + & e^4 \end{array}\right\} = 0$$

Pro parabola: $4e^2 \frown 2ax = 2ax - c^2 + g^2 + 2gx + x^2 + e^2, \square,$ seu

$$4\cancel{8}e^2ax = 4a^2x^2 - 4ac^2x + 4ag^2x + 8agx^2 + 4ax^3 + \cancel{4ae^2x},, + c^4 - 2c^2g^2 - 4c^2gx - 2c^2x^2 - 2c^2e^2,,$$
$$+\, g^4 + 4g^3x, + 2g^2x^2 + 2g^2e^2,, + 4g^2x^2 + 4gx^3 + 4ge^2x,, + x^4 + 2e^2x^2,, + e^4$$

$$\text{Unde fit:}\quad \left.\begin{array}{llllllll} x^4 & +\,4a & x^3 & +\,4a^2 & x^2 & -\,4ac^2 & x & + \; c^4 \\ & +\,4g & & +\,8ag & & +\,4ag^2 & & -\,2c^2g^2 \\ & & & -\,2c^2 & & -\,4ae^2 & & -\,2c^2e^2 \\ & & & +\,6g^2 & & -\,4gc^2 & & + \; g^4 \\ & & & +\,2e^2 & & +\,4g^3 & & +\,2g^2e^2 \\ & & & & & +\,4ge^2 & & + \; e^4 \end{array}\right\} = 0$$

Examinato ergo Canone, per exempla circuli, et parabolae, pergem⟨us⟩ ⟨cum⟩ Calculo generali. Habuimus paulo ante valorem ipsius g. indagemus eum adhuc semel ope terminorum tertiorum, collatorum, seu ope multiplicantium secundae dimensionis incognitos. Fiet

$$\frac{\mp 2\frac{a}{q}\, g^2\, (\mp\ \bar{\mp})\, 8a\, g\ \ \dfrac{+16a^{[2]}}{\mp 2\frac{a}{q} + 6},, \frown a^2 \atop +6}{h^2} = \frac{\mp 2\frac{a}{q}e^2 \mp 2\frac{a}{q}c^2 - 2e^2 + 2c^2 - 4a^2, \frown \dfrac{a^2}{h^2},, \atop ((\bar{\pm}\ \bar{\mp})) \mp 2q^2f, -qf^2 \mp 2q^2a + a^2q \mp d^2a}{\mp a + 2q \mp \dfrac{q^2}{a}}$$

---

20 *Kontrollansatz zur quadratischen Ergänzung:* $\sqrt{\mp 2\frac{a}{q} + 6}\; g \frown \dfrac{(\mp\ \bar{\mp})\, 4a}{\sqrt{\mp 2\frac{a}{q} + 6}}$

15 f. $\} = 0$ *(1)* Ponendo jam $\mathrm{x}^2 = \mathrm{z}^2\frac{\mathrm{h}}{\mathrm{a}}$ *(2)* Examinato *L*

---

20 $\ldots = \ldots$: Die Koeffizienten, die Leibniz vergleicht, bezieht er wie oben aus den Gleichungen in N. 5 S. 35 sowie auf S. 48 Z. 3–12. Erneut vergisst er den Faktor $\frac{a^2}{q^2} \mp 2\frac{a}{q} + 1$. Zudem nimmt er die

seu extracta utrobique Radice

$$\frac{g\sqrt{\mp 2\frac{a}{q}+6}\;(\mp\ \bar{\mp})\dfrac{4a}{\sqrt{\mp 2\frac{a}{q}+6}}}{\frac{h}{a}} = \sqrt{\frac{\cdots\cdots\cdots}{\cdots\cdots\cdots}} \qquad \text{sive}$$

$$g = \sqrt{\frac{\mp 2\frac{a}{q}e^2 \mp 2\frac{a}{q}c^2 - 2e^2 + 2c^2 - 4a^2\,\text{„}\;\aleph\,\dfrac{((\pm\ \bar{\mp}))\mp 2q^2f - qf^2 \mp 2q^2a + a^2q \mp d^2a}{\mp a + 2q \mp \frac{q^2}{a}\quad\gamma\quad \frown a^2}\,\beth\frown\dfrac{h^2}{\cancel{a^2}}}{[\mp]\,2\frac{a}{q}+6 \qquad \delta}}$$

$$(\pm\ {}^{+}\!\mp)\,\frac{4\frown h}{\mp 2\frac{a}{q}+6} \qquad \delta$$

Unde evanescit incognita g. valore ejus jam aliter supra dato. Ubi erat:

$$g = \frac{\dfrac{(({}^{+}\!\mp))\mp a\,(({}^{+}\!\pm))\,q,}{\mp a + 2q \mp \frac{q^2}{a}\quad\gamma} \frown 2d \frown \dfrac{\cancel{h^2}}{a^2}(\theta)\frown h^2 \mp 4\dfrac{a^2}{q} - 4a \quad \text{ל}}{\mp(\mp\ {}^{+}\!\mp)\,4\frac{a}{q}\,(\mp\ \bar{\mp})\,4 \quad \text{ט}}$$

Atque ita novam habemus aequationem inter hos duos valores, cujus aequationis ope tolli poterit incognita h.

1 f. Radice | $\dfrac{\cdots}{\frac{a}{h}}$ *ändert Hrsg.* | = *L* 3 $\mp a + 2q \mp \dfrac{q^2}{a}$ *(1)* ג *(2)* γ *L* 3 $2\dfrac{a}{q}+6$ *(1)* ד *(2)* δ *L*

---

quadratische Ergänzung nur auf der linken Seite der Gleichung vor. Im weiteren Verlauf multipliziert er die Gleichung mit $\frac{h}{a}$ durch, einen Term aber versehentlich gleich zweimal. Das Ergebnis für g in Z. 3 f. ist somit falsch, was die anschließenden Betrachtungen bis S. 54 Z. 1 belastet. 4 $(\pm\,{}^{+}\!\mp)$: Leibniz verwendet hier anstelle des Symbols $\mp$ das erst in der *Méthode de l'universalité* definierte Zeichen $\pm$. Daneben steht anstatt des Symbols $\bar{\mp}$, welches aus einem Übertragungsfehler hervorgegangen ist, nun wieder das korrekte ursprüngliche Zeichen ${}^{+}\!\mp$. 5 supra: Vgl. S. 50 Z. 9.

Fietque compendiaria enuntiatione: $\sqrt{\dfrac{\text{א} + \dfrac{\text{ב}\, h^2}{\gamma}}{\delta}} = \dfrac{\dfrac{\theta h^2}{\gamma} + \text{ל}}{\text{ט}} - 4\dfrac{h}{\delta}.$

Sed quia valor ipsius incognitae h hoc modo planum excederet, alia uti praestat aequatione.

Placet calculum comparationis de integro ordiri. Ponatur $z = x\dfrac{h}{a}$ erit $z^2 = x^2\dfrac{h^2}{a^2}$, et $z^3 = x^3\dfrac{h^3}{a^3}$ et $z^4 = x^4\dfrac{h^4}{a^4}$. Ergo si terminus maximus x^4, debeat esse purus: fiet, aequatio $\dfrac{x^4.\quad \dfrac{a}{h}x^3.\quad \dfrac{a^2}{h^2}x^2.\quad \dfrac{a^3}{h^3}x.\quad \dfrac{a^4}{h^4}}{+\dfrac{a^2}{q^2} \mp 2\dfrac{a}{q} + \dfrac{a}{a}}\ \ldots$

Unde accedentibus multiplicantibus compendiarie denominatis, fiet:

$$x^4\quad \left.\begin{matrix}\beta g\\ \text{ג}\end{matrix}\right\} \frown \frac{a}{h}\quad x^3\quad \left.\begin{matrix}\delta g^2\\ \text{ה}\, g\\ \theta e^2\\ \lambda c^2\end{matrix}\right\} \frown \frac{a^2}{h^2}\quad x^2\quad \left.\begin{matrix}\text{ת}^3\left\{\begin{matrix}\mu g^3\\ \text{ח}\, g^2\\ \text{ט}^2\, g\end{matrix}\right.\\ \text{ב}\, e^2\left\{\begin{matrix}\text{מ}\, e^2\\ \xi f e^2\end{matrix}\right.\\ \text{א}\, c^2\left\{\begin{matrix}\text{ס}\, c^2\\ \pi f c^2\end{matrix}\right.\end{matrix}\right\} \frown \frac{a^3}{h^3}\quad x\quad \left.\begin{matrix}+g^4\\ +2g^2e^2\\ -2g^2c^2\\ +e^4\\ -2c^2e^2\\ +c^4\end{matrix}\right\} \frown \frac{a^4}{h^4}\ \Bigg\}\Bigg\} = 0.$$

---

6 *Randnotizen hierzu auf dem anderen Blatt:* $\dfrac{h^3}{a^3} \frown \dfrac{a^4}{h^4}$. $\quad \dfrac{a^6}{h^6} \frown \dfrac{h^3}{a^3} = \dfrac{a^3}{h^3}$.

1 $\sqrt{\dfrac{\text{א} + \dfrac{\text{ב}\,\mathrm{h}^2}{\gamma}}{\delta}}$ *(1)* $+\dfrac{4\mathrm{h}}{\delta} = \dfrac{\theta\mathrm{h}^2}{\text{ה}} + \text{ל}$ *(2)* $= \dfrac{\theta\mathrm{h}^2}{\text{ג}}$ *(3)* $= \dfrac{\dfrac{\theta\mathrm{h}^2}{\gamma} + \text{ל}}{\text{ט}}$ *L* 15 $\dfrac{\mathrm{a}^6}{\mathrm{h}^6} \frown \dfrac{\mathrm{h}^3}{\mathrm{a}^3} = |\sqrt{\dfrac{\mathrm{h}^3}{\mathrm{a}^3}}$ *ändert Hrsg.* | *L*

8–14 $x^4 \ldots = 0$: Die Koeffizienten des Polynoms gehen auf die Gleichung in S. 48 Z. 3–12 zurück, sind aber (abgesehen von den absoluten Gliedern) sämtlich umbenannt worden; vgl. S. 49 Z. 2 f. Leibniz normiert die Gleichung, berücksichtigt dies bei den verbleibenden Koeffizienten jedoch nicht.

Quae aequatio comparanda isti: $x^4 + mx^3 + n^2x^2 + r^3x + s^4$.

Incognitae: x. g. h. e. c.

Fient aequationes particulares comparatione duarum aequationum similium.

$+\frac{\text{ג}\cancel{a}}{\cancel{h}} = \frac{m}{a}h - \beta g$. Unde $g = \frac{\frac{m}{a}h - \text{ג}}{\beta}$, et $h = \frac{\text{ג} + \beta g}{\frac{m}{a}}$.

$\frac{n^2}{a^2}h^2 = \delta g^2 + \text{ח} g + \theta e^2 + \lambda c^2$. Unde pro h^2, substituendo ejus valorem ex aequatione praecedenti fiet: $\frac{n^2}{\cancel{a^2}} \frown \frac{\text{ג}^2 + \beta^2 g^2 + 2\,\text{ג}\beta g}{\frac{m^2}{\cancel{a^2}}}$. Digestaque aequatione, fiet:

$$\left.\begin{matrix} -\beta^2\frac{n^2}{m^2} \\ +\delta \end{matrix}\right\} g^2 \quad \left.\begin{matrix} -\frac{n^2}{m^2}2\,\text{ג}\beta \\ +\text{ח} \end{matrix}\right\} g + \theta e^2 + \lambda c^2 - \frac{n^2}{m^2}\text{ג}^2 = 0 \quad \text{seu} \quad g^2 + 2\,\text{פ}\, g + \theta e^2 + \lambda c^2 - \text{ש}^2$$

Unde jam facile habetur absolute valor ipsius g, si fiat aequatio haec:

$$g^2 + 2\,\text{פ}\, g + \text{פ}^2 = \begin{matrix} -\theta e^2 \\ -\lambda c^2 \\ +\text{ש}^2 \\ +\text{פ}^2 \end{matrix}$$

Unde extracta utrobique radice quadrata habebimus: $g = \sqrt{\begin{cases} -\theta e^2 \\ -\lambda c^2 \\ +\text{ש}^2 \\ +\text{פ}^2 \end{cases}} - \text{פ}$.

Habemus ergo valorem ipsius g et per consequens valorem quoque ipsius h inventum. Unde cum duci possint, non opus est, cur amplius earum valorem in ipsarum locum substituamus. Restant aequationes duae, quarum ope, incognitae c. et e, poterunt inveniri. Igitur ex comparatione duorum x, oritur aequatio haec:

1 $\mathrm{x}^4 + \mathrm{mx}^3$ *(1)* $+\mathrm{nx}^2 + \mathrm{rx} + \mathrm{s}$ *(2)* $+\mathrm{n}^2\mathrm{x}^2 + \mathrm{r}^3\mathrm{x} + \mathrm{s}^4$ *L* 5 f. Unde ... $\frac{\text{ג}^2 + \beta^2\mathrm{g}^2 + 2\,\text{ג}\beta\mathrm{g}}{\frac{\mathrm{m}^2}{\cancel{\mathrm{a}^2}}}$ *erg. L*

7 seu: Leibniz normiert die Gleichung, ohne dies bei den absoluten Termen θe^2 und λc^2 zu berücksichtigen.

$$\frac{-r^3\dfrac{h^3}{a^3}+\text{ת}^3+\text{א}\,c^2}{\text{ב}}+e^2=0 \quad\text{seu}\quad e^2=\frac{\text{א}c^2}{\text{ב}}+\text{ד}^2 \quad\text{et}\quad e^4=\frac{\text{א}^2}{\text{ב}^2}c^4+2\frac{\text{א}}{\text{ב}}c^2\text{ד}^2+\text{ד}^4.$$

Et ex comparatione duorum absolutorum, fiet aequatio haec:

$$-s^4\frac{h^4}{a^4}+g^4+2g^2e^2+e^4\begin{matrix}-2g^2\\-2e^2\end{matrix}c^2+c^4=0$$ seu substituto pro e, ejus valore,

$$-s^4\frac{h^4}{a^4}+g^4\underbrace{+2g^2\frac{\text{א}}{\text{ב}}c^2+2g^2\,\text{ד}^2}_{2g^2e^2}\underbrace{+\frac{\text{א}^2}{\text{ב}^2}c^4+2\frac{\text{א}}{\text{ב}}c^2\,\text{ד}^2+\text{ד}^4}_{+e^4}-2g^2c^2\underbrace{-2\frac{\text{א}}{\text{ב}}c^4-2\text{ד}^2c^2}_{-2e^2c^2}+c^4=0$$

Unde habebimus ordinata aequatione:

$$\left.\begin{array}{llllll}
+\dfrac{\text{א}^2}{\text{ב}^2} & c^4 & 2\dfrac{\text{א}}{\text{ב}}\left\{\begin{matrix}g^2\\ \text{ד}^2\end{matrix}\right. & c^2 & - & s^4\dfrac{h^4}{a^4}\\
+\quad 1 & & & & + & g^4\\
-\,2\dfrac{\text{א}}{\text{ב}} & & -\,2g^2 & & + & 2g^2\,\text{ד}^2\\
 & & -\,2\text{ד}^2 & & + & \text{ד}^4
\end{array}\right\}=0$$

Cum vero nullo negotio ex hac aequatione extrahi Radix possit habebimus absolute valorem ipsius c. eadem methodo qua supra ipsius g. Inventa autem c, habetur et ipsa e.

NB. Quilibet ex cognitis Multiplicantibus aequationis alterius, nempe $m.\,n.\,r.\,s.$ multiplicandus per α. Veniendum nonnihil ad explicationem literarum, etsi valor earum sit

---

12 *Im laufenden Text Nebenbetrachtungen zur Notation:* Schoten. p. 340 et p. 395. a ♉ b, $\square=a^2+b^2$ ♉ $2ab$. Nota differentiae incommoda est, quoniam non potest divelli alterum ab altero, ut si sit a ♉ y.

1 seu ... $+\text{ד}^4$ *erg. L* 3 seu ... valore, *erg. L* 11 eadem *(1)* modo *(2)* methodo *L* 14 f. p. 395 *(1)* a = *(2)* a ⟨–⟩ *(3)* a ∞ *(4)* a ♉ b, □ = a² + b² | – *ändert Hrsg.* | 2ab *L* 16 sit a | ∞ *ändert Hrsg.* | y *L*

---

1 seu: Korrekt wäre $e^2=-\dfrac{\text{א}c^2}{\text{ב}}+\text{ד}^2$. Leibniz rechnet konsequent mit dem falschen Vorzeichen weiter. 14 Schoten: Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 340, wo dieser das Symbol ♉ analog zum (anderthalb Jahrzehnte später entwickelten) Leibniz'schen Zeichen ⫲ definiert, sowie DERS., *Additamentum*, 1659, *DGS* I S. 395, wo er das Symbol = als Zeichen für die Differenz zwischen zwei Größen festlegt. Zu diesem Symbol siehe Leibniz' kritische Bemerkung auf S. 59 Z. 14 sowie seine ausführlichere Kritik auf S. 78 Z. 10–23.

cognitus, ita enim forte nonnulla brevius enuntiari poterunt: ac primum $\alpha = +\frac{a^2}{q^2} \mp 2\frac{a}{q} + 1 = \frac{a^2 \mp 2aq + q^2}{q^2}$. Ergo $\sqrt{\alpha}$ erit $= \frac{a \mp q}{q}$, vel $\frac{\mp a + q}{q}$, unde fit $\frac{{}^{+}\!\dagger\, a\, \dagger^{+} q}{q}$ vel sic ${}^{+}\!\dagger\, a\, {}^{+}\!\ddagger q$. Imo sensus esse debet si $\mp$ sit $+$ tunc omnia esse $+$, sin $\mp$ sit $-$, tunc alterutrum esse $-$ et alterum $+$. Seu $\llcorner \mp = \genfrac{}{}{0pt}{}{+,\ +}{-,\,(\mp)}\lrcorner\; a \;\llcorner \mp = \genfrac{}{}{0pt}{}{+,\ +}{-,\,(\overline{\mp})}\lrcorner\; q$. Sed hoc $(\mp)$ vel $(\overline{\mp})$ arbitrarium est.

β est $\mp(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\, 4\,\frac{a}{q}\,(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\, 4$, seu explicatis signis arbitrariis $\mp 4\frac{a}{q} + 4 = \frac{\mp a + q}{q} \frown 4$. Unde patet esse $\beta^2 = \frac{\alpha}{16}$. Unde intelligitur res notabilis: $\frac{\alpha}{16}$ esse $= \beta^2$, et tamen non semper $\frac{\alpha}{4}$ esse $= \beta$. Item illud observandum, β posse sumi pro $\frac{\alpha}{4}$, non contra. Illud interim verum est, β^2 esse $= \frac{\alpha}{16}$. Inventa ergo β, utemur ad α.

Jam $\gimel = \mp\, 4\frac{a^2}{q} + 4a = \frac{\mp a + q}{q} \frown 4a$. Ergo rursus facile habetur $\gimel$, cum sit: βa. $\delta = \frac{\mp 2a + 6q}{q} = \frac{\mp 2a + 3q}{q} \frown 2$ ab eo auferatur $\beta = \mp\, 2a + 2q \frown \frac{2}{q}$, unde erit $\delta = \beta + 2$. ח $= 8a$. $\theta = \overline{\mp} a + q \frown \frac{2}{q} = \beta, \frac{-q \mp 4a}{\cancel{2}q} \frown 2$. $\theta = \beta - 2 \mp 8\frac{a}{q}$.

---

11 *Zwischen den Zeilen über der Gleichung für* β *eingefügt:* $\beta = \mp\, 4 + \frac{4a}{q}$

4 Seu *(1)* $\left.\begin{matrix}\mp = +, \mp \\ \mp = -, \mp\end{matrix}\right\{ \text{a}$ *(2)* $\llcorner \mp = \genfrac{}{}{0pt}{}{+,\ +}{-,\,(\mp)}\lrcorner$ a *L* 4 f. Sed ... est. *erg. L* 6 β est *(1)* $\mp\,(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\frac{4\text{af}}{\text{q}}\,(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\, 4\text{f}$ *(2)* $\mp\,(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\, 4\,\frac{\text{a}}{\text{q}}\,(\mp\, {}^{+}\!\ddagger)\, 4$ *L* 11 $\delta = \frac{\mp 2\text{a} + 6\text{q}}{\text{q}}$ *(1)* $= \frac{\mp \text{a} + \langle 3\rangle \text{q}}{\text{q}}, \frown -2$ *(2)* $=$ *(a)* $\frac{\mp 2\text{a} + 6\text{q}}{\text{q}}$ *(b)* $\frac{\mp 2\text{a} + 3\text{q}}{\text{q}} \frown 2$ *(aa)* auferatur | a *nicht gestr.* | *(bb)* ab *L* 12 $\theta = \beta - 2 \mp 8\frac{\text{a}}{\text{q}}$ *erg. L*

---

7 $\beta^2 = \frac{\alpha}{16}$: Folgerichtig wäre $\beta^2 = 16\,\alpha$. 8 $\frac{\alpha}{4}$: Folgerichtig muss es $\frac{\sqrt{\alpha}}{4}$ heißen. 11 f. $\delta = \beta+2$: Leibniz verrechnet sich hier; folgerichtig wäre $\delta = \frac{\beta}{2} + 4$. 12 $\theta = \beta - 2 \mp 8\frac{a}{q}$: Auch die Umrechnung von θ ist fehlerhaft.

Ecce NB. Specimen additionis aut subtractionis signorum ambiguorum $\theta = \mp 2\frac{a}{q} + 2$. $\lambda = \mp 2\frac{a}{q} - 2, = \mp \frac{a}{q} - 1 \frown 2$. Ergo $\lambda = -\theta$.

$$\begin{array}{ccr}
\text{ג} & = & \beta a \\
\alpha & = & \dfrac{\beta^2}{16} \\
\delta & = & \beta + 1 \\
\text{ה} & = & 8a \\
\theta & = & \mp \dfrac{a}{q} + 1, \frown 2 \\
\lambda & = & -\theta \\
\mu & = & 4 \\
\text{ח} & = & 4a \\
\text{מ} & = & -4a \\
\xi & = & 4 \\
\text{ס} & = & -4a \\
\pi & = & -4
\end{array}$$

2 $\lambda =$ | $\mp$ *ändert Hrsg.* | $2\frac{a}{q}$ *L*

8. SIGNA AMBIGUA COMPOSITA
[Ende Dezember 1673 – Juni 1674]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIV 1 Bl. 296–297. 1 Bog. 2°. 6 Z. auf Bl. 297 r°. Auf dem übrigen Bogen N. 7.
Cc 2, Nr. 855 C tlw.

Datierungsgründe: Die Bemerkungen, aus denen sich das Stück zusammensetzt, hat Leibniz höchstwahrscheinlich während oder kurz nach der Niederschrift von N. 7 festgehalten; er fügte sie nachträglich über und neben die drei gestrichenen Zeilen am Beginn jenes Stückes (S. 42 Z. 5 f.) ein. Die vier im Stück neu entwickelten, zusammengesetzten Doppelvorzeichen sind bislang ausschließlich aus diesem bekannt; lediglich das Symbol +⩨ taucht noch ein weiteres Mal auf dem gleichen Bogen in N. 7 auf (S. 44 Z. 8), wo es versehentlich anstelle des gleichbedeutenden Symbols +⧧ gesetzt worden ist. Auch dies spricht für den engen zeitlichen Zusammenhang mit N. 7.

⧧ a ⩨ $3a$ = ⩨ $2a$

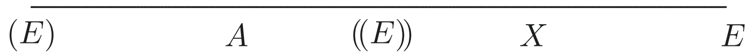
Signum differentiae, = non debet adhiberi in Analysi, est enim contra regulam artis characteristicae.

$\underbrace{+ \quad -}$ $\quad$ $\underbrace{⧧ \quad ⩨}$ $\quad$ (⧧) (⩨). $\quad$ ((⧧)) ((⩨)). $\quad$ (⧧$_4$) (⩨$_4$).

+ vel ⧧ esto +⧧, et ejus contrarium seu − vel ⩨ erit −⩨ et − vel ⧧ erit −⧧ et ejus contrarium erit +⩨.

---

14 Signum differentiae: Das Zeichen = als Symbol für die Differenz zweier Größen findet sich bereits bei Fr. VIÈTE, *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 5 v° (*VO* S. 5). Leibniz bezieht seine Kritik vor allem aber auf die Verwendung des Zeichens bei Fr. van SCHOOTEN, *Additamentum*, 1659, *DGS* I S. 395 u. DERS., *Principia matheseos universalis*, 1661, *DGS* II S. 4. Auf S. 78 Z. 10–23 führt Leibniz seine Kritik weiter aus und begründet mit ihr den Nutzen seiner Doppelvorzeichen. 17 f. +⧧ ... +⩨: Gemeinsam mit den beiden einfachen Doppelvorzeichen ⧧ und ⩨ bilden die neuen zusammengesetzten Symbole ein erstes ausgebautes System an *signa ambigua*. Dieses steht somit entweder zeitlich vor den Systemen der *Méthode*, oder es ist zeitgleich mit ihnen ersonnen worden.



[*Fig. 1*]

$$\text{Ergo}\quad EX = \left.\begin{array}{r} +\,EA + AX \\ -\,EA + AX \\ +\,EA - AX \end{array}\right\} = \;\mp EA \mathbin{+\!\!\ddagger} AX$$

3 $= \mp EA \mathbin{+\!\!\ddagger} AX$: Man beachte, dass die Reihenfolge der Gleichungen frei wählbar ist, sowie dass Leibniz das Zeichen $\mp$ anfangs mit „erster Fall $-$, zweiter Fall $+$“ übersetzt (was bei der Bildung von zusammengesetzten Doppelvorzeichen von Belang ist). Erst in der *Méthode de l'universalité* II (N. 11) ändert er stillschweigend die Reihenfolge und liest nun für gewöhnlich $\pm$ als „erster Fall $+$, zweiter Fall $-$“; vgl. S. 135 Z. 23.

9. MINIMA AD CONICAM
[Mai (?) 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 38–39. 1 Bog. 2°. $2\frac{1}{3}$ S. Der Textkörper ist überwiegend zweispaltig aufgebaut. In der linken Spalte wird der Hauptgedanke entwickelt, die rechte enthält ein Zahlenbeispiel und andere Anmerkungen. Auf Bl. 38 r° und den unteren zwei Dritteln von Bl. 39 v° findet sich unter dem auch das vorliegende Stück bezeichnenden Titel *Minima ad Conicam* ein Zusatz aus dem Jahr 1678 (Druck in einem späteren Band der Ausgabe; vgl. KNOBLOCH, *Die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten*, 1978, S. 34–36). Geringfügige Textverluste auf Bl. 38 v° durch beschädigte Blattränder.
Cc 2, Nr. 851 tlw.

Datierungsgründe: Das Stück liefert Vorarbeiten zu den wahrscheinlich Mitte 1674 entstandenen N. 14 und N. 15. Die im Stück verwendeten *signa ambigua* sind frühe Varianten eines Systems, welches Leibniz in der *Méthode de l'universalité* (N. 10 u. 11) wohl im Mai oder Juni 1674 in eine feste Form brachte und vorwiegend in der zweiten Jahreshälfte 1674 gebrauchte. Auch der Stand der Reflexion über Eigenschaften der Doppelvorzeichen entspricht jenem kurz vor Abfassen der *Méthode*. Dass Leibniz in diesem Stück überwiegend das moderne Gleichheitszeichen verwendet (achtmal allerdings auch das cartesische), spricht ebenfalls für eine Niederschrift vor der der *Méthode*; ab spätestens Juni 1674 gebraucht er nämlich in der Regel den stilisierten Waagebalken. — Das Wasserzeichen des Papierbogens ist im vorliegenden Band auch für N. 10 und 11 sowie N. 14, 23, 38, 42 und 46, ansonsten für Januar 1675 belegt.

Duae sunt aequationes $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 = y^2$, et $a \ddagger \frac{a}{q}x, ^\frown + d\,({}^{+}\underline{\ddagger})\,y, = y, ^\frown\,({}^{+}\dagger)\,f\,({}^{+}\ddagger)\,x$,

---

21 *Nebenbetrachtung zur zweiten Gleichung:* Ut rem numeris probemus, ponamus: $a = 1.$ $q = 2.$ $x = 3.$ $y = 4.$ $d = 5.$ $\ddagger$ sit $+$. $({}^{+}\underline{\ddagger})$ sit $+$. $({}^{+}\dagger)$ sit $+$.

$$\text{Fiet: } \frac{1 + \frac{3}{2} \frown 5 - 4\,[\frac{5}{2} \frown 1] - 12}{4} = f = \frac{\frac{5}{2} - 12}{4} = \frac{5 - 24}{8} = f\,[=]\,\frac{5}{8} - \frac{24}{8} = [-]\,\frac{19}{8}.$$

21–62,1 $({}^{+}\dagger)$ f $({}^{+}\ddagger)$ x, *(1)* qvarum intersectio *(2)* locus prioris . . . qvaeritur, *(a)* ut eius ope *(b)* ut *L*

---

21 Duae sunt aequationes: Vgl. S. 32 Z. 11 u. S. 34 Z. 8. 23 $x = 3.$ $y = 4$: Der hier gewählte Punkt $(x, y) = (3, 4)$ liegt nicht auf jenem Kegelschnitt, welcher durch die erste Gleichung mit den Parametern $a = 1$ und $q = 2$ festgelegt wird. Somit läuft das Beispiel ins Leere. 24 $[\frac{5}{2} \frown 1]$: Die eckigen Klammern stammen an dieser Stelle von Leibniz selbst.

locus prioris est sectio Conica, locus posterioris quaeritur, ut solvi possit problema horum duorum locorum intersectione. (Aequatio posterior digesta dabit:

$$\begin{array}{l} (^{+}\mp)\,q\;yx\;(^{+}\dagger)\;fq\;y \pm da\;x - daq = 0\;) \\ \mp(^{+}\mp)\,a \qquad (^{+}\mp)\;aq \end{array}$$

Convertatur aequatio in proportionem, utroque ejus, ut initio expressa est membro, tum per y, tum per $a \mp \frac{a}{q}x$, diviso, fiet:

$$\begin{array}{rcl} \dfrac{d\,(^{+}\pm)\,y}{y} & = & \dfrac{(^{+}\dagger)\,f\,(^{+}\mp)\;\big|\;x}{a \mp \dfrac{a}{q}x} \\ \dfrac{d}{y}\,(^{+}\pm)\,1 & = & \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad \text{fiat } a \mp \dfrac{a}{q}x = z \text{ et habebimus: } x = \mp\dfrac{zq}{a} \pm q\,[=]\,\mp\dfrac{zq-aq}{a} \\ \cdots\cdots & = & \dfrac{\cdots\cdots\cdots\cdots}{z} \\ \cdots\cdots & = & \dfrac{\cdots\cdots\;\overline{\dfrac{zq}{\mp a} \pm q}}{z} \\ \cdots\cdots & = & \dfrac{(^{+}\dagger)\,f\,(^{+}\mp) \pm q}{z}\,(^{+}\mp) \mp \dfrac{q}{a} \\ \dfrac{d}{y}\,(^{+}\pm)\,1\,(^{+}\mp) \pm \dfrac{q}{a} & = & \dfrac{(^{+}\dagger)\,f\,(^{+}\mp) \pm q}{z} \\ \dfrac{d}{y} \quad + \beta & = & \dfrac{c}{z} \qquad \text{et} \end{array}$$

13 *Nebenbetrachtung:* $\mathrm{v} = \mathrm{d}, +\mathrm{y} \frown +1 - 1.\; +1 - 1.$ Ergo $\mathrm{y} = \dfrac{\mathrm{v} - \mathrm{d}}{+1 - 1}$ *gestr. L*

1 problema: Der Schnittpunkt des durch die erste Gleichung beschriebenen Kegelschnittes mit der zweiten Kurve, einer gleichseitigen Hyperbel, löst namentlich das Problem der *Minima ad conicam*; bei ihm handelt es sich um jenen Punkt auf dem Kegelschnitt, welcher einem Punkt derselben Ebene mit der Abszisse f und der Ordinate d am nächsten liegt. Diese elegante geometrische Lösung des Problems galt den zeitgenössischen Mathematikern jedoch als nicht *lege artis*, da man zutreffenderweise annahm, dass eine Konstruktion mit Hilfe eines einfacher zu zeichnenden Kreises an Stelle der Hyperbel möglich sei. Bei dieser Lösung ist der Schnittpunkt der beiden Kurven allerdings noch nicht der gesuchte Punkt; dessen Konstruktion erfordert im Allgemeinen eine Anzahl weiterer Schritte.

$\dfrac{d+\beta y}{y} = \dfrac{c}{z}$, et $z = \dfrac{cy}{d+\beta y}$, seu posita $v = d+\beta y$ et $y = \dfrac{v-d}{\beta}$ fiet $z = \dfrac{cv-cd}{\beta v}$

62,3 f. *Beispielrechnung:*

$$\begin{array}{cccc} +2\frown 4\frown 3 & -\frac{19}{8}\frown 2\frown 4 & -5\frown 1\frown 3 & -5\frown 1\frown 2 \\ +1\ \cdots\cdots & +1\ \cdots\cdots & & \\ \hline 24 & -11 & -15 & -10 \\ 12 & \multicolumn{3}{c}{\underbrace{\hphantom{-11\qquad\qquad -15\qquad\qquad -10}}} \\ \overline{36} & & -36, & =0 \end{array}$$

62,8 f. *Beispielrechnung:* $z = \dfrac{5}{2}$. $\quad x = \dfrac{z-a}{\ddagger\frac{a}{q}} = z\dfrac{q}{a} - q, = \dfrac{5\frown 2}{2\frown 1} - 2 = 3.$

62,13 *Beispielrechnung:* $\underbrace{\dfrac{5}{4} - 1 - 2}_{\frac{5}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{7}{4}} = \dfrac{[-]\frac{19}{8} - 2}{\frac{5}{2}} = \dfrac{\frac{-19-16}{\cancel{8}}}{\frac{20}{\cancel{8}}}$ $[=] -\dfrac{35}{20} \ulcorner -\dfrac{7}{4}$.

62,14–63,1 *Beispielrechnung:* $\beta = -\dfrac{12}{4} = -3$. $\quad c = -\dfrac{35}{8}$. $\quad v = 5 - 12 = -7$.

$[z =] \dfrac{-\frac{35}{8}\frown 4}{-7} = \dfrac{-\frac{35}{2}}{-7} \langle = \rangle \dfrac{5}{2}$. $\quad y = \dfrac{-7-5 = -12}{-3} = 4$. $\quad \gamma = -3$.

1 *Nebenbetrachtungen zum Fall des Kreises:*

$a - q + \sqrt{a^2 - y^2} =$ [*bricht ab*] $\qquad d\sqrt{a^2-y^2} = (\overset{+}{\dagger})\, cy.$

In Circulo pro $z = \dfrac{cy}{d+\beta y}$, fiet: $a - x = \dfrac{cy}{d} = \dfrac{(\overset{+}{\dagger})\, fy\, (\overset{+}{\ddagger})\, ay}{d}$. Explicetur x in circulo $= q - \sqrt{a^2-y^2}$ fiet $\cancel{a} - \cancel{q} + \sqrt{a^2-y^2} = \dfrac{cy}{d}$. Ergo $a^2d^2 - y^2d^2 = c^2y^2$, seu $a^2d^2 = c^2y^2 + d^2y^2$ seu $\dfrac{a^2d^2}{c^2+d^2} = y^2$.

$f^2\, (\overset{+}{\ddagger})(\overset{+}{\dagger})\, \ddagger\, 2af, +a^2$

$$\text{vel}\quad \frac{c}{\beta} - \frac{\frac{cd}{\beta}}{\overline{\overline{v}}} \quad \text{vel} \quad \frac{c}{\beta} - z = \frac{\frac{cd}{\beta}}{\overline{\overline{v = d + \beta y}}} \quad \text{seu} \quad \frac{c}{\beta} - z = \frac{\frac{cd}{\beta^2}}{\overline{\overline{\frac{d}{\beta} + y}}} = \frac{c}{\beta} - a \pm \frac{a}{q}x \quad \text{vel}$$

$$\pm \frac{cq}{a\beta} \mp q + x = \frac{\pm \frac{cdq}{\beta^2 a}}{\frac{d}{\beta} + y}.$$

---

1 *Beispielrechnung:* $\dfrac{-\frac{35}{8}}{\overline{\overline{-3}}} \left(+\dfrac{35}{24}\right) - \dfrac{5}{2} = \dfrac{\frac{35 \frown 5}{24}}{\overline{\overline{-7}}}. \quad \dfrac{+35 - 60}{24} = -\dfrac{25}{24}.$

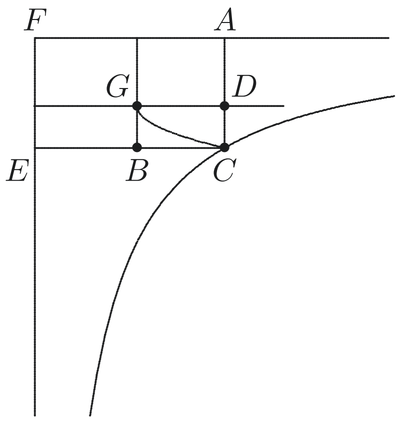
$$\frac{\frac{-\frac{35}{8} \frown 5}{+9}}{\overline{\overline{-\frac{5}{3} + 4, = \frac{7}{3}}}} = \frac{-25 \frown 3}{8 \frown 9} \quad \text{vel} \quad \frac{\langle 5 \frown \rangle - 5}{8 \frown 3} = -\frac{25}{24}.$$

2 *Nebenbetrachtung:* $\pm \dfrac{cq}{a\beta} = \dfrac{(^{+}\!\dagger)\, f\, (^{+}\!\ddagger) \pm q,,}{(^{+}\!\ddagger)\, a\, (^{+}\!\ddagger) \pm q} \frown \pm q.$

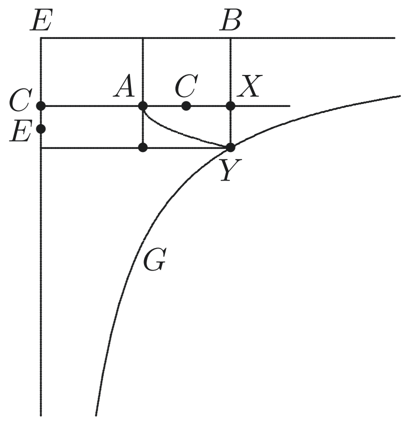
2 *Beispielrechnung:* $\dfrac{+35 \frown 2}{-3 \frown 8} + 2 + 3 \;=\; \dfrac{\frac{35 \frown 5 \frown 2}{\cancel{3} \frown 3 \frown 8 \frown 7} \frown \cancel{3}}{\overline{\overline{\frac{-5 + 12 = 7}{\cancel{3}}}}}$

$$\frac{-70 + 120}{24} = \frac{50}{24} \qquad \frac{35 \frown 5 \frown 2}{21\,[\frown 8]} = \frac{5 \frown 5 \frown 2}{3 \frown 8} = \frac{50}{24}$$

63,8 *(1)* $\underbrace{\frac{5}{4} - 1 + 2}$ $\langle - \rangle |\, \frac{5+4}{4} = \frac{9}{4}$ *nicht gestr.* | *(2)* $\underbrace{\frac{5}{4} - 1 - 2}$ $\frac{5}{4} - \frac{12}{4} = -\frac{7}{4}$ *L* 63,13 $\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2} = (^{+}\!\dagger)\,\mathrm{cf}$ *L ändert Hrsg.* 63,15 fiet *(1)* $\mathrm{a} - \mathrm{q} + \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2} = \frac{\mathrm{cy}}{\mathrm{d}}$ *(2)* $\cancel{\mathrm{a}} - \cancel{\mathrm{q}} + \sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{y}^2} =$ *(a)* $\frac{\mathrm{cy} - \mathrm{ad} + \mathrm{qd}}{\mathrm{d}}$ Ergo $\mathrm{a}^2\mathrm{d}^2 - \mathrm{y}^2\mathrm{d}^2 = \mathrm{c}^2\mathrm{y}^2 - 2\mathrm{cyad} + 2\mathrm{cyqd}$ *(b)* $\frac{\mathrm{cy} - \mathrm{ad} + \mathrm{ad}}{\mathrm{d}}$ *(c)* $\frac{\mathrm{cy}}{\mathrm{d}}$ Ergo *L*



[*Fig. 1a*]

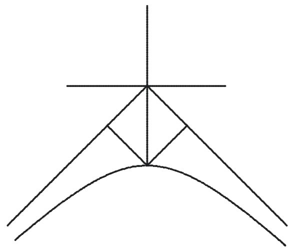


[*Fig. 1b*]

Sit Hyperbola, cujus rectangulum $ACE = \ddagger\frac{cdq}{\beta^2 a}$. Abscissa $FA = EC$, sit $EB = \ddagger\frac{cq}{a\beta} \ddagger q, +BC = x$. Applicata $FE = AC$, sit $AD = \frac{d}{\beta}, +DC = y$. Sectio Conica GC, cujus abscissa $x = GD, = BC$. Applicata y est DC, erit DC quaesita, puncto intersectionis Hyperbolae, et Sectionis Conicae datae determinata.

---

2 *Nebenbetrachtung zur Hyperbel:*



2 f. abscissa FA = EC, sit | ED = $\frac{\mathrm{d}}{\beta}$ + DC = y *ändert Hrsg.* | Applicata FE = AC, sit | AB = $\ddagger\frac{\mathrm{cq}}{\mathrm{a}\beta}$ $\ddagger$ q, +BC = x *ändert Hrsg.* | Sectio *L*

---

1 *Fig. 1a*: Leibniz streicht oder ergänzt nachträglich die Bezeichnungen einiger Punkte in der Abbildung und ändert andere, so dass diese mit jenen der entsprechenden Punkte von Fig. 6 in N. 14 und Fig. 2 in N. 15 übereinstimmen. Dadurch weichen die Bezeichnungen jedoch von den im Text verwendeten ab. Fig. 1a weist die ursprüngliche, Fig. 1b die geänderte Beschriftung auf.

Substituamus pro β $\dfrac{+\gamma = -a \pm q}{(^{+}\!\pm)\, a}$, fiet $\pm(^{+}\!\mp)\dfrac{cq}{\gamma} \mp q + x = \dfrac{\pm\dfrac{cdqa}{\gamma^2}}{(^{+}\!\mp)\dfrac{da}{\gamma} + y}$ sive

$$\mp\frac{cq}{\gamma},, \frown (^{+}\!\mp)\, 1 \quad \frac{-da}{(^{+}\!\mp)\, da + \underset{-a \pm q}{y\gamma}} = \mp q + x.$$

---

2 *Beispielrechnung:*

$$\frac{-\dfrac{35 \frown 2}{8}}{-3}\left(\frac{-70}{-24}\Bigg| + \frac{35}{12}\right), \frown 1 \quad \frac{-5}{5-12, = -7}\,[=]\,\frac{\cancel{12}}{7} \frown \frac{35}{\cancel{12}} = 5 = 2+3.$$

$$1 + \frac{5}{7} = \frac{12}{7}$$

2 *Nebenbetrachtung am unteren Rand mit Beispielrechnung:*

$\mp(^{+}\!\mp)\, cqda \mp cq\gamma y \pm cqda = \mp(^{+}\!\mp)\, da\gamma q \mp \gamma^2 qy\, (^{+}\!\mp)\, da\gamma x + \gamma^2 yx$ seu, $\mp(^{+}\!\mp)(^{+}\!\dagger)\, fqda - q^2 da \;\pm (^{+}\!\dagger)\, fq\langle y\rangle\gamma\; (^{+}\!\dagger)\, q^2\langle\gamma\rangle y \;\pm (^{+}\!\dagger)\, fqda\; (^{+}\!\mp)\, q^2 da = \pm(^{+}\!\mp)\, da^2 q\, (^{+}\!\dagger)\, fq^2 y\, (^{+}\!\mp) \mp q^3 y\; (^{+}\!\pm)\, daq^2 \langle x\; ^{+}\!\pm\rangle\, daq^2$ [*bricht ab*]

$\cancel{-\dfrac{35}{8} \frown 2} \frown 5 \quad \dfrac{35}{8} \frown \cancel{2} \frown 3 \frown \cancel{4} \quad \cancel{\dfrac{35}{8} \frown \langle 2\rangle} \frown \langle 5\rangle = +5 \frown -3 \frown 2, +9 \frown 2 \frown 4_{[,]} - 5 \frown 3 \frown 3, +9 \frown 4 \frown 3.\left(\dfrac{35}{8} \frown 3\right)\left(\dfrac{105}{8} + \dfrac{30}{}\right.$ [*bricht ab*]

---

1 $\dfrac{\pm\dfrac{\mathrm{cdqa}}{\gamma^2}}{(^{+}\!\mp)\dfrac{\mathrm{da}}{\gamma} + \mathrm{y}}$ *(1)* | $\mp \dfrac{\mathrm{cq}}{\gamma}$ fiet *nicht gestr.* | $\mp$ ⟨—⟩(*(2)* sive *L*

2 $\mp\dfrac{cq}{\gamma}$: Viermal setzt Leibniz in diesem Stück bei der Gleichung $\mp\dfrac{cq}{\gamma}\left((^{+}\!\mp)\,1 - \dfrac{da}{(^{+}\!\mp)\, da + y\gamma}\right) = \mp q + x$ an. In S. 67 Z. 1 bricht er, nachdem er das Äquivalent von $\mp\dfrac{cq}{\gamma}$ notiert hat, direkt wieder ab. In S. 67 Z. 2 quadriert er zunächst beide Seiten der Gleichung, wobei ihm jedoch beim vorletzten Summanden

$\mp (\overset{+}{\mp})\, f\, (\overset{+}{\mp})\, q, \frown \dfrac{q}{-a \mp -q}$ *[bricht ab]*

$$\text{Quadratum de } \mp q + x, \text{ est} = +\frac{c^2q^2}{\gamma^2}, \frown +1 \quad \frac{-2da}{(\overset{+}{\mp})\, da + y\gamma} + \frac{d^2a^2}{+d^2a^2 (\overset{+}{\mp})\, 2day\gamma + y^2\gamma^2}.$$

Multiplicetur utraque aequationis pars per $\square\overline{(\overset{+}{\mp})\, da + y\gamma}$, fiet

$$\square\overline{(\overset{+}{\mp})\, da + y\gamma} \frown \square \mp q + x = \frac{c^2q^2}{\gamma^2} \frown \quad \begin{array}{l} 2d^2a^2\, (\overset{+}{\mp})\, 2day\gamma + y^2\gamma^2\, \cancel{(\overset{+}{\mp})\, 2d^2a^2} - 2day\gamma + \cancel{d^2a^2} \\ (\overset{+}{\mp})\, 2d^2a^2 \end{array}$$

---

4 *Beispielrechnung zur rechten Seite der Gleichung, Variante (1):*

$$\frac{35 \frown 35}{12 \frown 12}{[\llcorner]} \frown \overset{24}{\cancel{49}} - \overset{\cancel{25}}{\cancel{50}} + 120 + \cancel{25} = 1 + 5, \frown 24{[\lrcorner]} = 5 \frown 5, \frown 7 \frown 7 = 25 \frown 49.$$
$$\cancel{6 \frown 24}$$

$12 \frown 2 \frown 6 = \cancel{6 \frown 24}$

1 $\mp (\overset{+}{\mp})\, \mathrm{f}\, (\overset{+}{\mp}) |\, \mathrm{g}, \frown \dfrac{\mathrm{q}}{-\mathrm{a}}\ \mp \mathrm{q}$ *ändert Hrsg.* | *L* 3 f. per $\square\overline{(\overset{+}{\mp})\, \mathrm{da} + \mathrm{y}\gamma}$, | fiet $\square\overline{(\overset{+}{\mp})\mathrm{da} + \mathrm{y}\gamma}$ *erg. Hrsg.* | , $\frown \square \mp \mathrm{q} + \mathrm{x}$ | , fiet *streicht Hrsg.* | $= \dfrac{\mathrm{c^2q^2}}{\gamma^2} \frown$ *(1)* $\mathrm{d^2a^2} (\overset{+}{\mp})\, 2\mathrm{day}\gamma + \mathrm{y}^2\gamma^2 (\overset{+}{\mp})\, 2\mathrm{d^2a^2} - 2\mathrm{day}\gamma + \mathrm{d^2a^2}$ *(2)* $\begin{array}{l} 2\mathrm{d^2a^2} \\ (\overset{+}{\mp})\, 2\mathrm{d^2a^2} \end{array}$ *L*

---

ein Vorzeichenfehler unterläuft — richtig wäre $\dfrac{-2da}{da\ (\overset{+}{\mp})\ y\gamma}$. Bei korrekter Rechnung vereinfacht sich die rechte Seite der folgenden Gleichung zu $c^2q^2y^2$. Der Fehler belastet die Betrachtungen bis S. 69 Z. 3. In einer Nebenbetrachtung am unteren Rand des Blattes (Z. 7–9) multipliziert Leibniz sodann die Gleichung mit den Nennern der Brüche durch, wobei er aber nicht alle Doppelvorzeichen korrekt wiedergibt; bereits die nächste Umformung führt er nicht zu Ende. Schließlich setzt er in S. 70 Z. 1 noch einmal wie in Z. 1 an; auch dieser Ansatz versandet nach einer Reihe von Umformungen und Nebenbetrachtungen.

$$= \llcorner \square \not\ddagger \not\oint (+x) \ddagger \sqrt{\frac{aq^2 \ddagger y^2 q}{a}} \not\ddagger \not\oint \lrcorner \frown \square\overline{({}^{+}\ddagger)\, da + y\gamma} = \frac{aq^2 \ddagger y^2 q}{a}, \frown d^2a^2\, ({}^{+}\ddagger)\, 2day\gamma + y^2\gamma^2.$$

Et $\dfrac{c^2q^2}{\gamma^2} \frown$ etc, $-\dfrac{aq^2 \ddagger y^2 q}{a} \frown$ etc $= \delta\ (= 0)$.

---

2 *Beispielrechnung (mit Nebenrechnungen):*

$35 \frown 35 = 1225, -4 - \llcorner 16 \frown 2 \lrcorner \frown 49$ differentia $-11 \frown 49 = \delta = -\langle 539 \rangle$.

$[-]36 \frown 49$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \hline 294 \\ 147 \\ \hline 1764 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 35 \\ 35 \\ \hline 175 \\ 105 \\ \hline 1225 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ 25 \\ \hline 245 \end{array} \qquad \begin{array}{l} 16 \\ 9 \\ \hline 144 - 95 = 49 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 49 \\ 11 \\ \hline 49 \\ 49 \\ \hline 539 \end{array}$$

1 $\frown \square\overline{({}^{+}\ddagger)\,\mathrm{da} + \mathrm{y}\gamma}$ *erg. Hrsg.*

---

4 differentia: Um zu der Gleichung für die Differenz δ, die Leibniz hier am Zahlenbeispiel prüft, zu gelangen, hat er sich im Schritt zuvor der nach x aufgelösten allgemeinen Kegelschnittgleichung bedient. Diese wird jedoch wie oben erwähnt durch die im Beispiel gewählten Werte nicht erfüllt. Somit ergibt sich — auch wenn der Vorzeichenfehler aus S. 67 Z. 2 sich im Beispiel nicht auswirkt — eine von 0 abweichende Differenz. In der Folge ist auch $\delta\gamma^2$ im Beispiel zur nächsten Gleichung nicht gleich 0.

Et multiplicationes absolvendo, fractionesque tollendo:

$$\begin{matrix} + \\ (+\!\ddagger) \end{matrix}\left\{ 2c^2q^2d^2a^2 \quad \begin{matrix} (+\!\ddagger) \\ - \end{matrix}\left\{ 2c^2q^2day\gamma + c^2q^2y^2\gamma^2 - q^2d^2a^2\gamma^2 \ (+\!\ddagger)\, 2q^2day\gamma^3 \right.\right.$$

$$-q^2y^2\gamma^4 \ \ddagger\, qd^2a\gamma^2y^2 \ \ddagger (+\!\ddagger)\, 2qd\gamma^3y^3 \ \ddagger\, \frac{\gamma^4y^4q}{a} \quad = \quad \delta\gamma^2 \ (0)$$

---

2 f. *Beispielrechnung (mit Nebenrechnungen):*

$_{[\llcorner]}\delta = [-]11 \frown 49_{[\lrcorner]} \frown {}_{[\llcorner]}\, \gamma^2 = 9\, {}_{[\lrcorner]} = -11 \frown 49 \frown 9.$

$\dfrac{2 \frown 35 \frown 35}{64} \frown 4 \frown 25,, \frown {}_{\llcorner}1\ (+\!\ddagger)\ 1,,{}_{\lrcorner}\ {}_{\llcorner}(+\!\ddagger)\ 1, -1,{}_{\lrcorner} \frown \dfrac{2 \frown 35 \frown 35}{64} \frown 4 \frown 5 \frown 4 \frown -3.$ Posito $(+\!\ddagger)$ esse $+$ hi duo termini evanescent, $\dfrac{35 \frown 35}{\cancel{64}} \frown \cancel{4} \frown \cancel{16} \frown 9,\ -4 \frown 25 \frown 9,\ -2 \frown 4 \frown 5 \frown 4 \frown -27,\ -4 \frown 16 \frown 81,\ -2 \frown 25 \frown 9 \frown 16,\ -2 \frown 2 \frown 5 \frown -27 \frown 64,\ -81 \frown 256 \frown 2 = \underline{-11 \frown 49 \frown 9.}$

$$\left.\begin{matrix} 11 \\ 5 \frown 5 \end{matrix}\right\} \begin{matrix} \frown 7 \frown 7 \frown 3 \frown 3 \\ \frown 7 \frown 7 \frown 3 \frown 3 \end{matrix} =$$

$$\begin{array}{ll} 2 \frown 5 \frown \quad 3 \frown 3 \frown -3, \frown 2 \frown 2 \\ \underline{2 \frown 5 \quad\ \ 3 \frown 3 \frown -3\ \frown 2 \frown 2 \frown 32} \\ 2 \frown 5 \frown 3 \frown 3 \ = \ 90 \frown \left\{ \begin{matrix} \langle 5 \rangle \\ -\ 12 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 32 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right. \end{array} \qquad \begin{array}{r} -32 \\ \underline{-12} \\ -44 \\ \\ -44 \\ \underline{90} \\ -3960 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 2 \frown 2 \frown 5 \frown 5 \frown 3 \frown 3 \\ 2 \frown 2 \qquad 3 \frown 3 \frown 3 \frown 3 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \\ 2 \frown 2 \frown 5 \frown 5 \frown 3 \frown 3 \qquad 2 \frown 2 \frown 2 \\ 2 \frown 2 \qquad 3 \frown 3 \frown 3 \frown 3 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \frown 2 \end{array}$$

$$36 \left\{ \begin{matrix} 25 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} \right. \\ 9 \frown 16 \left\{ \begin{matrix} 1 \\ 8 \end{matrix} \right. \end{matrix} \right.$$

$$\begin{array}{r} 36 \\ \underline{36} \\ 216 \\ \underline{108} \\ 1296 \\ \underline{4} \\ 5184 \\ \underline{41472} \\ 46656 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \\ \\ 36 \\ \underline{25} \\ 900 \\ \underline{7200} \\ 8100 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 36 \\ \underline{25} \\ 180 \\ \underline{72} \\ 900 \\ \\ 5184 \\ \underline{8} \\ 41472 \end{array}$$

1 absolvendo, *(1)* radicesqve *(2)* fractionesqve *L*

$$(^{+}\dagger)\, f \;\mp\; (^{+}\ddagger)\, q\,,,\; \frac{q}{-a \ddagger q}\,,,\frown (^{+}\ddagger)\, 1 - \frac{\langle da\rangle}{\rangle\, ((^{+}\ddagger)\, da \,\llcorner\llcorner - a \ddagger q\lrcorner \frown y\lrcorner)} = \mp q + x$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots,,\frown \cancel{+da}\; (^{+}\ddagger)\, ay\, (^{+}\ddagger) \ddagger qy \;\cancel{-da} \qquad = \cdots\cdots \frown \;\rangle$$

$$\cdots\cdots\cdots\,,, \quad \frown q \quad ,,\frown \cdots\cdots\cdots\cdots \qquad = \ddagger aq - ax - q^2 \ddagger qx,\frown \rangle$$

$$(^{+}\dagger)(^{+}\ddagger)\, fqay \;\ddagger (^{+}\dagger)(^{+}\ddagger)\, fq^2y \;\mp q^2ay + q^3y \qquad = \qquad /\!/$$

69,5 *Weitere Nebenrechnung zu dem Beispiel für die Gleichung zu* $\delta\gamma^2$*:*

$$\begin{array}{r} 49 \\ 9 \\ \hline 441 \\ 36 \\ \hline 2646 \\ 1323 \\ \hline 15876 \\ 3960 \\ \hline 19836 \end{array}$$

1 *Beispielrechnung:* $-\dfrac{19}{8} - 2,\frown \dfrac{\langle 2\rangle}{-1-2},,\frown\left(1 \quad \dfrac{-5}{5\,{}_{[\llcorner\llcorner]} - 1 - 2\lrcorner \frown 4_{[\lrcorner]}} \atop 5 - 12\right)\left(1 + \dfrac{5}{7}\langle\right) = \rangle 2 + 3$

$$-\frac{19}{8} - \frac{2}{1}, \smile -1 - 2_{[,]} \frown 2$$

$$\frac{19}{4} + 4, \smile 3, = \frac{19+16}{4\,[\frown 3]}$$

$$\left(\left(\frac{\begin{array}{c}19\\ 16 \\ \hline 35\end{array}}{12} \frown \frac{12}{7}\right)\right) = 5.$$

4 $\ddagger(^{+}\dagger)(^{+}\ddagger)$ fqay $(^{+}\ddagger)(^{+}\ddagger)$ fq^{2}y *L ändert Hrsg.* 11 1423 *L ändert Hrsg.* 12 16876 *L ändert Hrsg.* 14 20836 *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{l} (\overset{+}{\mp}) \pm da^2q\,(\overset{+}{\pm})\,da^2x\,(\overset{+}{\pm})\,daq^2\,(\overset{+}{\mp})\pm\ daqx \\ \mp a^2qy + a^2xy + aq^2y \mp aqyx \\ +aq^2y \mp aqyx \mp q^3y \quad + q^2yx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mp q + x,\frown -a \pm q,\frown (\overset{+}{\mp})\,da \quad [=] \\ \pm(\overset{+}{\mp})\,da^2q\ (\overset{+}{\pm})\,da^2x\ (\overset{+}{\pm})\,daq^2\ (\overset{+}{\mp}) \pm daqx \end{array}$$

$$\begin{array}{r} -a \pm q, \\ -a \pm q \\ \hline +a^2 \mp 2aq + q^2 \\ \mp qy + xy \\ \hline \mp q^3\,y \qquad q^2\ xy \\ +2aq^2\cdots \mp 2aq\,[\cdots] \\ \mp a^2q\cdots\ + a^2\,[\cdots] \end{array}$$

$$\begin{array}{l} q^2 \\ \mp 2aq \\ +a^2 \end{array}\ xy,\ \text{componetur cum}\ \begin{array}{l} +q\ (\overset{+}{\mp})\,xy\,[:] \\ \mp a \end{array}\quad (\overset{+}{\mp})\,\frac{q^2 \mp 2aq + a^2}{+q \mp a}.$$

$$\underbrace{\begin{array}{l}\mp \\ -\end{array}\Big\{ q^3 \quad \begin{array}{l}+2 \\ \pm\end{array}\Big\{ aq^2 \ \mp a^2q\ \ (\overset{+}{\mp})(\overset{+}{\mp})\,fq^2 \mp (\overset{+}{\mp})(\overset{+}{\mp})\,fqa}_{y}\ \text{componetur cum}\ (\overset{+}{\mp})\,fq\,(\overset{+}{\mp})\,aq\,[:]$$

$$\frac{\mp q^2 - q^2 + 2aq \pm aq \mp a^2}{(\overset{+}{\mp})\,f\,(\overset{+}{\mp})\,a} + \quad [\textit{bricht ab}]$$

1 $(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{daq}^2$ *L ändert Hrsg.* 12 $\mp\mathrm{a}^2\mathrm{q}$ *(1)* $\langle(\overset{+}{\mp})\rangle$ *(2)* $(\overset{+}{\pm})$ *(3)* $(\overset{+}{\mp})$ *(a)* f *(b)* $(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{fq}^2$ *L* 12 cum *(1)* f $(\overset{+}{\mp})$ q *(2)* $\cancel{\mathrm{f}}\,(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{f}\cancel{\mathrm{q}}\,(\overset{+}{\mp})$ q *(3)* $\cancel{\mathrm{f}}\,(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{f}\cancel{\mathrm{q}}\,(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{a}\cancel{\mathrm{q}}$ *(4)* $\cancel{\mathrm{f}}\,(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{f}\cancel{\mathrm{q}}\,(\overset{+}{\mp})\,\mathrm{a}\cancel{\mathrm{q}}$ *L* 12 *Nebenbetrachtungen: (1)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+c}} + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}} = \frac{\mathrm{ad+bd+cd}}{\mathrm{bd+cd}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b+c}}$ *(3)* $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{a+b}} =$ *(4)* ponatur $\mathrm{a+b=c}$, erit $\mathrm{a=c-b}$ et fiet $\frac{\mathrm{c-b}}{\mathrm{c}} = 1 - \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a+b}}$ *gestr. L*

$z = \dfrac{cy}{d+\beta y}$. $d + \beta y = v$, et $\beta y = v - d$, et $y = \dfrac{v-d}{\beta}$, et $z = \dfrac{cv - cd}{\beta v} = \dfrac{c}{\beta} - \dfrac{cd}{\beta v}$

$= \dfrac{c}{\beta} - \dfrac{\frac{cd}{\beta}}{v}$. Jam $z = a \mp \dfrac{a}{q}x$, et $v = d + \beta[y]$. Ergo $a \mp \dfrac{a}{q}x \infty \dfrac{c}{\beta} - \dfrac{\frac{cd}{\beta}}{d + \beta y}$, vel $\dfrac{c}{\beta} - \dfrac{\frac{cd}{\beta^2}}{\frac{d}{\beta} + y}$,

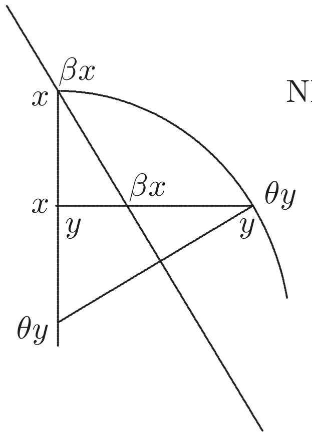
divisaque utraque aequationis parte per $\mp\dfrac{a}{q}$, fiet:

$$\mp q + x \pm \frac{cq}{\beta a} \infty \frac{\pm\frac{cdq}{\beta^2 a}}{\frac{d}{\beta} + y}, \text{ jam } \beta = \frac{-a \pm q}{({}^{+}\!\!\pm)\, a} \text{ et } \beta^2 = \frac{+a^2 \mp 2aq + q^2}{a^2}. \text{ Fiet:}$$

$$\cdots\cdots \pm \frac{({}^{+}\!\!\pm)\, cq}{-a \pm q} \infty \frac{\pm\frac{cdqa}{+a^2 \mp 2aq + q^2}}{({}^{+}\!\!\pm)\frac{da}{-a \pm q} + y}.$$

---

1 *Nebenbetrachtung:*



NB.

1 $z = \dfrac{cy}{d+\beta y}$ $| = \dfrac{({}^{+}\!\mp)\, fy\, ({}^{+}\!\mp) \pm qy}{d + \beta y}$ *gestr.* $|$ $d + \beta y = v$. *L* 6 *Bezugswort links von der Figur:* β *gestr. L*

---

1 $z = \dfrac{cy}{d+\beta y}$: Leibniz wiederholt in diesem Absatz die Entwicklung, die er bereits auf S. 63 Z. 1 bis S. 66 Z. 1 durchgeführt hat.

Et quia $c \infty (^{+}\!\dagger)\, f\, (^{+}\!\ddagger)\, \underline{\ddagger}\, q$. Ergo fiet:

$$\ddagger q + x \quad \frac{\underline{\ddagger}(^{+}\!\ddagger)(^{+}\!\dagger)\, fq + q^2}{-a\, \underline{\ddagger}\, q} \infty \frac{\dfrac{\underline{\ddagger}(^{+}\!\dagger)\, fdqa\, (^{+}\!\ddagger)\, dq^2a}{a^2 \ddagger 2aq + q^2}}{(^{+}\!\ddagger)\, \dfrac{da}{-a\, \underline{\ddagger}\, q} + y}$$

Explicando pro circulo fiet:

$$\langle -a\rangle + x \quad \frac{(^{+}\!\ddagger)(^{+}\!\dagger)\, f\cancel{a} + a^{\cancel{2}}}{0} \infty \frac{\dfrac{(^{+}\!\dagger)\, fd\cancel{a^2}\, (^{+}\!\ddagger)\, da^{\cancel{3}}}{0^2}}{(^{+}\!\ddagger)\, \dfrac{d}{0} + y}$$

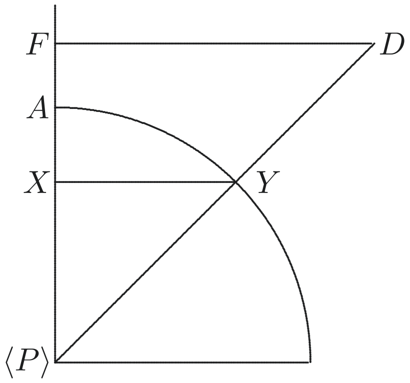
Ergo $(^{+}\!\underline{\ddagger})\, \dfrac{da}{0}\, (^{+}\!\ddagger)\, \dfrac{dx}{0} - ay + xy + \dfrac{(^{+}\!\dagger)\, df\, (^{+}\!\ddagger)\, da}{0^2} \quad \dfrac{(^{+}\!\ddagger)(^{+}\!\dagger)\, fy + ay}{0} \infty \dfrac{(^{+}\!\dagger)\, fd\, (^{+}\!\ddagger)\, da}{0^2}$.

Et fiet $(^{+}\!\underline{\ddagger})\, da\, (^{+}\!\ddagger)\, dx\, [(^{+}\!\ddagger)](^{+}\!\dagger)\, fy + ay \infty 0$ *ou* $(^{+}\!\ddagger)\, d\sqrt{a^2 - y^2} = [(^{+}\!\ddagger)](^{+}\!\dagger)\, fy + ay$.

$(^{+}\!\ddagger)\, da\, (^{+}\!\underline{\ddagger})\, d\, \sqrt{a^2 - y^2}$

Et $d^2a^2 = +d^2y^2 + f^2y^2\, (^{+}\!\dagger)[(^{+}\!\ddagger)\, 2]\, fay^2 + a^2y^2$ et $y^2 = \dfrac{d^2a^2}{d^2 + f^2\, (^{+}\!\dagger)[(^{+}\!\ddagger)\, 2]\, fa + a^2}$.

$y = \dfrac{da}{\sqrt{d^2 + c^2}}$ vel $\dfrac{y}{a} = \dfrac{d}{\sqrt{d^2 + c^2}}$.



[*Fig. 2*]

7 $(^{+}\!\ddagger)$ da | $(^{+}\!\ddagger)-$ *ändert Hrsg.* | d $\sqrt{a^2 - y^2}$ *L* 8 Et d^2a^2 *(1)* $-d^2y^2 = f^2y^2$ *(2)* $= +d^2y^2 + f^2y^2$ *L*

Quod verum esse patet, cum enim P sit circuli centrum, patet esse $XY\,(=y)$ ad $YP\,(=a)$ ut $DF\,(=d)$ est ad $DP=\sqrt{d^2+c^2}$.

	AF	AP	
Ponendo $PF=c=$	$+f$	(+†) a,	semper enim quadratum erit f^2 (+†) $[2]fa+a^2$.
	(+†)	$+$	
	(+⊥)	$-$	
	$-$	(+⊥)	

4 enim *(1)* productum sit *(2)* qvadratum L

4 $PF=c$: In S. 73 Z. 1 hat Leibniz nochmals die Definition von c angeführt: $c=$ (+†) f (+‡) ‡ q. Im Kreis gilt also $c=$ (+†) f (+‡) a und $c^2=f^2$ (+†)(+‡) $2af+a^2$. Dass (+†)(+‡) als ‡ ausgedrückt werden kann, falls die zusammengesetzten Doppelvorzeichen aus einer Gleichung stammen, und dass sie, falls sie unabhängig voneinander gebildet worden sind, unterschieden werden sollten (etwa durch Mehrfachklammerung), so wie es Leibniz in der *Méthode de l'universalité* stipuliert, scheint er zum Zeitpunkt der Abfassung des Stückes noch nicht durchdacht zu haben, was auf einen Enstehungszeitraum deutet, der vor jenem der *Méthode* liegt.

10. DE LA MÉTHODE DE L’UNIVERSALITÉ I
[Mai – Juni 1674]

Überlieferung:

L Konzept: LH 4 V 10 Bl. 1–8. 4 Bog. 2°. 16 S. Auf Bl. 7 durch Papierschaden geringer Verlust an Textvarianten.
Cc 2, Nr. 863 A

l Reinschrift: LH 4 V 10 Bl. 11–24. 7 Bog. 4°. 26 S. auf Bl. 11–23 (Bl. 24 leer). Unbekannte Schreiberhand mit Ergänzungen und Korrekturen von Leibniz’ Hand (*Lil*). Der überwiegende Teil des Textes auf der letzten Seite sowie alle anspruchsvolleren Zeichnungen stammen von Leibniz’ Hand. (Unsere Druckvorlage.) — Gedr.: 1. Couturat, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 97–122; 2. Wiener, *Selections*, 1951, S. 2 f. (tlw. = S. 76 Z. 4 – S. 78 Z. 9; engl. Übers. von 1.).
Cc 2, Nr. 863 D

Datierungsgründe: Das Stück behandelt die Grundsätze der Gestaltung und Verwendung von *signa ambigua* (Doppelvorzeichen). Mit Hilfe zusammengesetzter Doppelvorzeichen, wie sie Leibniz im vorliegenden Stück einführt, lassen sich drei oder mehr Fälle gleichzeitig behandeln. Das älteste datierte Stück, in welchem Leibniz diese komplexen Zeichen dann einsetzt (wobei er bereits ohne Erläuterung auskommt), stammt aus dem Juni 1674 (VII, 1 N. 41). Dies ist unser *terminus ante quem.* — Die sporadische Verwendung des Gleichheitszeichens = in unserem Stück (das Leibniz dann allerdings in das cartesische ∞ umändert) untermauert diese Einschätzung. In datierten Stücken ist das Zeichen = nämlich bis Januar 1674 belegt, ab Juni 1674 dagegen der stilisierte Waagebalken ⊓. Die Verhältnisse in der Zwischenzeit sind unklar, doch spricht das auf Sommer 1674 zu datierende Stück VII, 3 N. 34 dafür, dass der Wechsel eher am Ende dieser Periode erfolgte: Hier findet sich nämlich im Haupttext nur das heutige Zeichen. — Eine Notiz auf demselben Stück (VII, 3 N. 34 S. 360) führt zudem fünf für die *Méthode de l’universalité* charakteristische Doppelvorzeichen auf. Ihre Anordnung ist zugleich eine Entwicklungslinie vom einfachsten zum komplexesten Zeichen. Leibniz beschäftigt sich zu dieser Zeit offenkundig mit den Grundsätzen der *Méthode*; die beiden grundlegenden Schriften zu dieser sind sehr wahrscheinlich in der gleichen Zeit entstanden. — Anstelle des mit der *Méthode* eingeführten Zeichens ‡ verwendet Leibniz im Konzept unseres Stückes mehrfach noch das ältere ⋕, verbessert dies dann aber. Dies weist darauf hin, dass das Konzept in der zeitlich geordneten Reihe der Stücke zur *Méthode de l’universalité* und ihrer Anwendung ganz am Anfang steht. Das ältere Zeichen findet sich zuletzt in VII, 3 N. 26, zu datieren auf Ende 1673 bis Mitte 1674, woraus sich Ende 1673 als *terminus post quem* ergibt. — Im unserem Stück entwickelt Leibniz in § 19 ein System komplexer Doppelvorzeichen, das mit nur zwei Sonderzeichen, den Grundzeichen ǂ und ‡, auskommt. Dieses von ihm in der Praxis nie eingesetzte System stellt er auch in N. 11 dar (S. 134 f.), streicht es dort jedoch und ersetzt es durch eines, das griechische Buchstaben verwendet. Daraus ergibt sich, dass unser Stück die ältere der beiden grundlegenden Schriften zur *Méthode de l’universalité* ist. — Somit ist unser Stück nicht vor Ende 1673 und nicht nach Juni 1674 verfasst worden, sehr wahrscheinlich aber gegen Ende dieses Zeitraums. — Das Wasserzeichen ist für September und Oktober 1674, eine wahrscheinlich durch Abnutzung entstandene Variante für Januar 1675 belegt.

De la Methode de l'Universalité

I. Ce que c'est que la methode de l'Universalité, et son usage.

1. La Methode de l'universalité, nous enseigne de trouver par une seule operation, des formules analytiques et des constructions Geometriques generales pour des sujets ou cas differens dont chacun sans cela auroit besoin d'une analyse ou synthese particuliere. On peut juger par là que son usage s'etend aussi loin que l'Algebre ou Analyse, et qu'elle se repand par toutes les parties des mathematiques pures ou mixtes. Car il arrive tous les jours, qu'un mesme probleme est de plusieurs cas dont la multitude embarasse beaucoup, et nous oblige à des changemens inutiles et à des repetitions ennuyeuses dont cette methode nous garantira à l'avenir.

II. Reduction des figures differentes en Harmonie.

2. Or comme toutes les propositions des Sciences Mathematiques mixtes peuvent estre purgées de la matiere par une reduction à la pure Geometrie; il suffira d'en monstrer l'usage dans la Geometrie: ce qui revient à deux points; sçavoir: Premierement à la Reduction de plusieurs Cas differens à une seule formule, regle, equation ou construction: et en second lieu à la Reduction des figures differentes a une certaine harmonie; pour en demonstrer ou resoudre universellement quantité de problemes, ou theoremes. Le premier point diminue la peine, l'autre augmente la science, et donne des lumieres considerables.

3 et son usage *erg. L* 4 l'universalité *(1)* est *(2)* par le moyen de la qvelle nous trouuons *(3)* qvi *(4)* nous *L* 6 f. particuliere. II. son usage | (2) *gestr.* | On peut *L* 8 ou *(1)* composées *(2)* mixtes *L* 9 qv'un *(1)* problema donné ait *(2)* meme problema soit *L* qv'un mesme probleme soit *l, ändert Lil* 10 des *(1)* repetitions inutiles et ennuyeuses *(2)* changements *L* 11–14 l'avenir: *(1)* III. en Geometrie (3) *(2)* II. Reduction ... harmonie (2) *L* 14 comme *(1)* tous les *(a)* Problemes *(b)* sciences Ma *(2)* toutes *L* 16 premierement *erg. L* 18 differentes *(1)* à une *(2)* en harmonie *L, ändert Lil*

---

2 f. I. Ce ... usage: Leibniz hatte das Konzept zunächst ungegliedert verfasst, dann die einzelnen Abschnitte mit arabischen Zahlen durchnummeriert und sie schließlich zusätzlich hierzu durch zusammenfassende Randbemerkungen, die er mit römischen Zahlen einleitete, markiert. Diese werden hier als Zwischenüberschriften wiedergegeben.

Car si avec le temps la Geometrie des infinis pourroit estre rendue un peu plus susceptible de l'Analyse, en sorte que les problemes des quadratures, des Centres, et des Dimensions des courbes, se peussent resoudre par des equations: comme il y a lieu d'esperer quoyque M[r] Des Cartes n'ait pas osé y aspirer, on tireroit un grand avantage de l'Harmonie des figures pour trouver la quadrature des unes aussy bien que des autres.

III. Par une methode analytique,
au lieu de la Synthetique.

3. Il est vray que Messieurs des Argues et Pascal ont cru pouvoir reduire les Sections Coniques en Harmonie: mais outre que leur methode est bornée, et ne depend que des proprietez particulieres des Coniques, elle est aussy extremement embarassante, parce qu'il faut tousjours demeurer dans le solide, et bander l'esprit par une forte imagination du Cone. Je croy mesme qu'on auroit bien de la peine à resoudre universellement par ce moyen des problemes difficiles, à moins qu'on ne les ait desja trouvés par hazard *a priori*, par le moyen d'un theoreme demonstré ailleurs. Au lieu qu'il n'y a rien qui puisse échapper à nostre methode, qui a cela de commun avec les autres parties de l'Analyse qu'elle espargne l'esprit et l'imagination, dont il faut sur tout menager l'usage.

1 Geometrie *(1)* des Qvadratures *(2)* d'Archimede *(3)* des Infinies *L* 1 un peu plus *erg. L* 2 l'Analyse *(1)* par le moyen des Eqvati *(2)*, *(a)* et ses problemes enoncées *(b)* et si les pr *(c)* en *L* 3 des *(1)* figures *(2)* courbes, se *(a)* pourroient *(b)* puissent *L, ändert Lil* 11 il faut *(1)* qvasi jamais qvitter le Cone de l'im *(2)* tousjours *L* 12 Cone: *(1)* ce qvi est capable *(2)* chose *(a)* assez difficile *(b)* capable d'occuper l'homme tout entier, et de le rendre *(aa)* mal *(bb)* moins propre à toute autre chose. Je crois meme à moins qv' *(aaa)* elle *(bbb)* il ne soit soutenu par une vigueur d'esprit peu commune. *(3)* Je croy même *(a)* qve *(aa)* ceux *(bb)* ces Messieurs aur *(b)* qv'on *L* 12 universellement *erg. L* 16 et l'imagination *erg. L*

4 Des Cartes: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39. 8 des Argues: Leibniz bezieht sich möglicherweise auf die Darstellung der Kegelschnittlehren von Desargues und Pascal durch J. Collins, die ihm H. Oldenburg im Brief vom 16. April 1673 übermittelte (III, 1 N. 13_2 S. 61 f.), sowie auf die darin erwähnte Kritik in Gr. HURET, *Optique de portraiture et peinture*, 1670, S. 158. 8 Pascal: Es handelt sich wohl um Bl. PASCAL, *Essay pour les coniques*, 1640, und um die später verloren gegangene Abhandlung Pascals über die Kegelschnitte, deren Manuskript Leibniz von Januar bis Ende August 1676 ausgeliehen hat, vgl. N. 61–65, 72, seinen Brief an É. Périer, 30. August 1676 (III, 1 N. 90) sowie VII, 1 N. 26.

IV. L'Algebre n'est qu'une branche de la Caracteristique.

4. C'est le but principal de cette grande science, que j'ay accoustumé d'appeller Caracteristique, dont ce que nous appellons l'Algebre, ou Analyse, n'est qu'une branche fort petite: puisque c'est elle qui donne les paroles aux langues, les lettres aux paroles, les chiffres à l'Arithmetique, les notes à la Musique: c'est elle qui nous apprend le secret de fixer le raisonnement, et de l'obliger à laisser comme des traces visibles sur le papier en petit volume, pour estre examiné à loisir: c'est enfin elle, qui nous fait raisonner à peu de frais en mettant des Caracteres à la place des choses, pour desembarasser l'imagination.

V. Exemple des fautes qui se font contre la Caracteristique.

5. Mais quoyque il semble que les caracteres soient arbitraires, il y a pourtant bien des regles à observer, pour rendre les caracteres propres à l'usage. Par exemple M[r] Schoten, et autres se servent d'un certain Caractere, pour marquer la difference entre deux grandeurs, comme $a = b$ c'est à dire $a - b$, ou $b - a$, mais il est aisé de faire voir que ce Caractere est contre les regles de la Caracteristique. Car soit une equation entre b, et entre $a = y$, ou la difference d'a, et y, sçavoir: $a = y \propto b$, vous ne sçauriez mettre les connues a, b, d'un costé, ny separer a de y, mais en vous servant des caracteres dont j'expliqueray l'usage dans la suite vous aurez $\overline{+}a \underline{+}\, y \propto b$, ou $\underline{+}y \propto b \underline{+}\, a$, ou $y \propto \underline{+}b + a$. Au reste j'avoue que M[r] Schoten s'est servi de deux caracteres ☊, et ☋, equivalens aux miens $\overline{+}$ et $\underline{+}$, mais c'est peut estre trois ou quatre fois, et d'une telle maniere, qu'on voit bien qu'il n'en avoit pas assez reconnu l'application, ny les regles: aussy faut il bien d'autres observations pour en tirer quelque advantage considerable.

3 de *(1)* cette grande art *(2)* la *(3)* cette *L* 5 les lettres aux paroles *erg. L* 10 f. qvi se *(1)* commettent *(2)* font *erg. L* 17–19 vous … $\overline{+}$a $\underline{+}$ y $\propto$ b *fehlt l, erg. Lil* 22 f. pour *(1)* s'en servir comme il faut *(2)* en tirer *L*

---

14 Caractere: Fr. v. SCHOOTEN, *Principia matheseos universalis*, 1661, *DGS* II S. 4. Das Zeichen = wird bereits von Viète so eingeführt: *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 5 v° (*VO* S. 5).
20 deux caracteres: ☊ und ☋ werden in Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 340 als einander entgegengesetzte Doppelvorzeichen definiert. Zum Zeichen ☊ vgl. auch DERS., *Appendix*, 1659, *DGS* I S. 353.

VI. Conjonction de la Caracteristique avec la methode des infinis.

6. Cavalieri, M[r] Fermat, M[r] Wallis, et autres supposent des certaines lettres, ou lignes infinement petites ou egales a rien. J'ay mis la mesme chose en usage, et j'ay adjousté des lettres qui representent une grandeur infinie, ou des lignes egales à des rectangles, comme sont les asymptotes de l'Hyperbole.

VII. Advantage de la methode de l'universalité pour abreger la peine du calcul.

7. Mais la methode mesme fera voir plus clairement par ses preceptes, et exemples, ce qu'il y a de nouveau, et d'avantageux, et àfin qu'on ne croye pas, que la peine egale l'avantage j'asseure par avance que le calcul universel de tous les cas ensemble n'est jamais plus difficil que le calcul particulier du cas plus difficil.

VIII. Signes Ambigus.

8. Les Instrumens de la methode de l'universalité sont les C a r a c t e r e s A m b i g u s , qui sont ou s i g n e s , ou l e t t r e s.

Les s i g n e s a m b i g u s sont qui marquent ou l'addition, ou la soubstraction. Il est vray qu'on en pourroit aussy faire utilement, pour marquer la multiplication, la division, et l'extraction des racines: mais je n'en trouve point d'usage pour le present dessein.

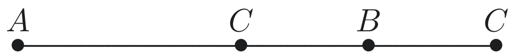
3 | Cavalieri *erg.* | Mons. Fermat | dans sa Methode de Maximis et Minimis *gestr.* | | Mons. Wallis et autres *erg.* | *L* 3 f. ou lignes *erg. L* 5 lettres *(1)* ou lignes infiniment gr *(2)* qvi *L* 9 par ... exemples *erg. L* 10–12 et à fin ... qve *(1)* cet *(a)* ⟨usage⟩ *(b)* avantage soit recompensé par la peine, je *(2)* la peine | recompense *L, l ändert Lil* | l'avantage; j'asseure ... difficil qve *(a)* celuy du plus difficil cas particulier *(b)* le ... difficil *erg. L* 14 f. A m b i g u s *erg. L* 17 faire *(1)* des signes avec raison, qvi marqvent *(2)* utilement pour marqver | avec ambiguité *gestr.* | la *L*

---

3 Cavalieri: B. Cavalieri, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635; Ders., *Exercitationes geometricae sex*, 1647. 3 Fermat: Gemeint sind Fermats Extremwertmethoden. Diese wurden erstmalig dargestellt in P. Herigone, *Supplementum cursus mathematici*, 1642 u. 1644, S. 59–69, sodann in Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 253–255. Siehe auch die Diskussion in R. Descartes, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 300–338 (*DO* I S. 486–493, *DO* II S. 1–13, 103–114, 122–134, 154–158, 169 bis 178). 3 Wallis: J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. XLIV–CVII, S. 35–84 (*WO* I S. 384–412). 6 rectangles: Vgl. S. 89 Z. 11–13. Siehe auch VII, 4 N. 26 S. 434, N. 17 S. 355, N. 40_2 S. 687, N. 40_3 S. 689.

IX. Simples de deux significations.

9. Or les dits signes sont ou s i m p l e s pour marquer seulement deux cas possibles, ou ils sont c o m p o s é s , pour en marquer plusieurs.



[*Fig. 1*]

Par exemple si la ligne AC se doit determiner par le moyen de la ligne AB, et BC, et si le point C, peut avoir seulement deux lieux, l'un entre A, et B, l'autre au delà de B, de sorte que B tombe entre luy, et A, le signe sera simple, car on voit que selon la premiere position AC est egal à $AB - BC$, et selon la seconde à $AB + BC$. Et par consequent nous dirons que AC est egal à $AB \mp BC$.

X. Sçavoir $\mp$ ou $\underline{\mp}$.

10. Et si à present nous voulions exprimer AB par BC, et AC, (: regardez la figure du nombre precedent :) l'equation

$$\left\{\begin{array}{l} AC \infty AB - BC \\ AC \infty AB + BC \end{array}\right. \begin{array}{l} \text{nous donneroit} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array} \left\{\begin{array}{l} AC + BC \infty AB \\ AC - BC \infty AB \end{array}\right.$$

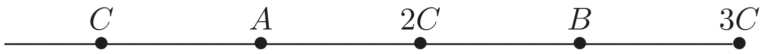
$$\text{ou} \quad AC \infty AB \mp BC \cdots\cdots\cdots\cdots \quad AC \underline{\mp} BC \infty AB.$$

On voit par là qu'il y a deux signes simples, l'un $\mp$ (: c'est à dire $+$ ou $-$:) et l'autre $\underline{\mp}$ (: c'est à dire $-\mp$:) car le signe qui porte un $-$ au bas du caractere, signifie toujours sa propre negation.

XI. Composez de trois significations
comme ${}^{+}\!\mp$ ou ${}^{+}\!\underline{\mp}$.

11. Mais il y a une infinité de signes composez, et comme l'on ne sçauroit en faire le denombrement, il suffira de donner quelques exemples, àfin que chacun s'en puisse faire à leur imitation: par exemple

1 Simples *(1)*: $\mp$, ou $\underline{\mp}$ *(2)* de deux significations *L* 4 *Im Konzept neben der dort am Rande stehenden Figur:* NB. diese Linien musten in die Mitten kommen *L* 7 le signe ... car *erg. L* 8 BC. | Donc BC a seulement deux signes possibles + ou − *gestr. Lil* | et par *l* 11 f. (: regardez ... precedent :) *erg. Lil* 15 AC *(1)* $\not\equiv$ BC *(2)* $\underline{\mp}$ BC *L* 17 $-\mp$ *(1)*. Et il n'y en a point d'avantage, parce qve $+\mp$, ou $+$ *(2)* car *L*



[*Fig. 2*]

Si les points A. B. demeurant immobiles, le point C peut avoir trois situations differentes, on aura aussy trois equations differentes pour exprimer la valeur de la ligne AC par les lignes AB, BC, car

$$\begin{array}{llcccc}
1C & \text{donnera } AC \infty & - & AB & + & BC \\
2C & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & + & \cdots & - & \cdots \\
3C & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & + & \cdots & + & \cdots
\end{array}$$

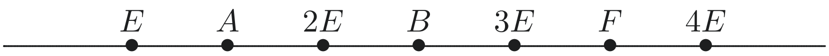
De sorte que AC est ou la difference, ou la somme de AB, BC, et pour exprimer ces equations differentes par une seule, on pourra faire

$$AC \infty \;{}^{+}\!\dagger AB \;{}^{+}\!\ddagger BC,$$

pour marquer que le signe de la ligne AB est opposé au signe de BC, à moins que toutes deux n'ayent pour signe $+$.

XII. *Vinculum.*

12. On peut aussy avoir besoin de trois lignes dont les signes soyent variables pour exprimer la valeur d'une seule. Par exemple



[*Fig. 3*]

$$\begin{array}{llcccccc}
1E & \text{donnera } EF \infty & + & AE & + & AB & + & BF \\
\left.\begin{array}{l}2E\\3E\end{array}\right\} & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & - & \cdots & + & \cdots & + & \cdots \\
4E & \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots & + & \cdots & - & \cdots & + & \cdots
\end{array}$$

Et l'equation generale sera: $EF \infty \;{}^{+}\!\dagger AE \;{}^{+}\!\ddagger \overline{AB + BF}$.

On voit par là qu'en ce cas les lignes AB, BF peuvent estre prises pour une seule AF, et que par consequent ce cas n'est point different du precedent. J'ai pourtant voulu le rapporter pour faire voir comment il est bon de comprendre plusieurs lignes d'un mesme

12 deux *(1)* ne *(a)* ⟨sont⟩ *(b)* soyent marqvez de + *(2)* n'ayent *L* 14 f. pour *(1)* determiner *(2)* exprimer *L*

signe, sous un *vinculum*, à l'imitation des racines sourdes; dont on verra l'usage dans la suite, quand il s'agira de purger l'equation des signes ambigus. Cependant ce *vinculum* a cela de commode qu'on le peut dissoudre, et qu'on en peut eximer ce qui bon nous semble, au lieu que le *vinculum* d'une racine sourde est indissoluble. Au reste il n'est pas permis de faire de ces deux lignes AB, BF une seule AF, en calculant, si toutes deux sont inconnues.

XIII. Signes composez de plus que trois variations.

13. S'il y a plus de trois variations, on pourra faire des signes semblables à ceux cy par exemple on fera

		(ǂ)ǂ	AB	(ǂ)⧧	BC	∞	AC
pour representer	1	$-$	⋯	$+$	⋯	⋯	⋯
	2	$+$	⋯	$-$	⋯	⋯	⋯
	3	$+$	⋯	$+$	⋯	⋯	⋯
	4	$-$	⋯	$-$	⋯	⋯	⋯

C'est à dire ou il y aura (ǂ)AB (ǂ)BC, sçavoir le mesme signe, quoyque indeterminé, selon le 3[me] et quatriesme cas; ou il y aura ǂAB ⧧BC, des signes opposez, selon le 1. et 2. cas: et à fin que deux signes semblables ǂ et (ǂ) mais differents ne se confondent pas, l'un en est renfermé dans une parenthese. Et àfin de discerner un seul signe (ǂ)ǂAB de deux (ǂ) ǂ AB, qui se multiplient, il y a une ligne transversale qui les unit.

XIV. Soubsdistinctions de l'ambiguité.

14. Il pourra arriver que les variations comprennent en elles mesmes des signes ambigus, comme par exemple:

ǂ $a+b$, ou $+a$ ǂ $b \infty c$ ce qui veut dire:

$+a+b$, ou $-a+b$ ou $+a+b$, ou $+a-b$,

4–6 Au reste ... inconnues *erg. L* 16 selon ... cas *erg. L* 18 signe (ǂ)ǂ *l ändert Hrsg.* 24–83,1 +a − b | et il se pourra exprimer *ändert Lil* | par *l*

16 ⧧: Mit der *Méthode de l'universalité* ersetzt Leibniz das Zeichen ⧧ als Negation von ǂ durch ǂ̈. In der ersten Hälfte des vorliegenden Konzepts verwendet Leibniz zunächst noch durchgängig ⧧, korrigiert es dann aber fast überall in ǂ̈. Hier hat er es wahrscheinlich übersehen.

et neantmoins mais on ne doit pas l'exprimer par les signes susdits ${}^{+}\!\mp a\,{}^{+}\!\pm b \propto c$ parce que ce $\mp$ est une position desja faite, donc pour ne troubler pas la connexion ou le rapport, il faudroit ne faire point de nouveau signe, mais plustost l'exprimer ainsi:

$$\underbrace{\mp +}\, a\, \underbrace{+ \mp}\, b \propto c.$$

Car cette marque $\underbrace{\quad}$ signifie ou l'un ou l'autre; ou si nous voulons faire des signes nouveaux, il sera a propos de faire ainsi: ${}^{+}\!\mp a\ \mp^{+}\, b$, voyez aussy l'artic. 18.

XV. Signes Homogenes.

15. Mais pour comprendre mieux la raison de tout cecy, il faut considerer, que dans la suite d'un mesme calcul, il y peut avoir plusieurs ambiguitez dont l'une soit independante de l'autre, ou tout à fait, ou en partie. Et par consequent les S i g n e s a m b i g u s sont ou h o m o g e n e s ou h e t e r o g e n e s. Les Signes ambigus H o m o g e n e s sont, dont l'un estant expliqué, determine l'autre aussy, entierement, et tousjours, et cela n'arrive qu'en deux cas, premierement quand l'un est le mesme avec l'autre comme $\mp a$, et $\mp b$, ou $((\pm))\, c\, ((\pm))\, d$, et en second lieu quand l'un est opposé à l'autre, comme $\mp a$ et $\pm b$, ou $((\mp))\, c\, ((\pm))\, d$, c'est à dire quand l'un signifie zero moins l'autre, et porte le signe $-$ au bas.

XVI. Correspondants.

16. Les signes ambigus H e t e r o g e n e s le sont ou entierement ou en partie. En partie seulement, quand ils sont au moins c o r r e s p o n d a n t s et ont quelque rapport l'un à l'autre, ce qui arrive quand ils ont leur origine d'une mesme equation ambigue: car alors l'un estant expliqué quoyque il ne determine pas l'autre entierement et tousjours, il ne laisse pas pourtant d'en diminuer l'ambiguité ou le determiner quelques fois: par exemple soit $AC \propto {}^{+}\!\mp AB\, {}^{+}\!\pm BC$, posons le cas que ${}^{+}\!\mp$ signifie $+$, alors on pourra changer ${}^{+}\!\pm BC$, en un simple $\mp$, et voila l'ambiguité diminuée. Mais davantage posons que ${}^{+}\!\mp$ ou ${}^{+}\!\pm$, un de deux, signifie $-$, alors toute l'ambiguite cessera, et l'autre sera $+$.

1 $\propto$ c | a moins que ce $\mp$ ne soit une position desja faite, car alors pour n'en *ändert Lil* | troubler *l* 2 ou le rapport *erg. Lil* 5–7 l'autre: | On pourroit faire aussi ${}^{+}\!\mp$a $\mp^{+}$ b voyez aussi artic. 18 *erg.* | XV *L* l'autre | : on pourroit faire aussy *ändert Lil* | ${}^{+}\!\mp$a ... XV *l* 12 l'un *(1)* determine l'autre *(2)* estant *L* 12 entierement, et tousjours *erg. L* 14 ou *(1)* $((\mp))$ c $((\mp))$ d *(2)* $((\pm))$ c $((\pm))$ d *L* 15 signifie – l'autre *L* signifie | zero *(1)* – *(2)* moins *erg. Lil* | l'autre *l* 17 XVI *(1)* Signes heterogenes *(2)* correspondants *L* 19 sont ... et *erg. L* 21 | et *fehlt l* | tousjours *erg. L* 22 ou ... fois *erg. L* 24 et ... diminuée *erg. L*

XVII. Tout à fait Heterogenes.

17. Mais les signes H e t e r o g e n e s s a n s c o r r e s p o n d a n c e sont qui naissent des equations tout à fait differentes en sorte que l'explication de l'un des signes ne contribue rien du tout à la determination de l'autre: dont on verra des exemples dans la resolution du probleme cy joint, et dans la regle generale de la construction de tous les problemes solides par quelque section conique qu'on voudra.

XVIII. Parentheses pour discerner les signes heterogenes qui tirent leur origine de differentes ambiguitez.

18. Or comme tout roule sur ce point de faire en sorte que dans la suite du calcul on puisse discerner les signes et les expliquer, pour faire l'application de la formule generale à quelque cas particulier qu'on voudra: il est necessaire d'avoir des marques pour sçavoir de quelque ambiguité chaque signe tire son origine, et lesquels d'eux soyent correspondants. Pour cet effet je trouve qu'il est commode de se servir des parentheses simples ou doubles etc., et de renfermer en des parentheses semblables, tous les signes d'une mesme origine, c'est à dire qui viennent d'une mesme ambiguité par exemple $(\mp)\,a\ (\pm)\,b.\ ((\mp))\,c\,((\pm))\,d.$ et il s'ensuit que ceux qui ne sont point renfermez sont tous d'une mesme origine.

Mais s'il falloit redoubler trop souvent la parenthese, on pourroit se servir des nombres, par exemple au lieu de $((((\mp))))\,a$ on pourroit faire $(4\mp)\,a$. Et comme j'ay remarqué que bien souvent d'une ambiguité peut naistre une autre par une espece de soubs-distinction (: par exemple dans l'equation susdite $(((\mp)))\,a + b$, ou $+\,a\,(((\mp)))\,b,, \infty\ c$:) on se pourra servir d'une telle façon $(3(6\mp))$ pour marquer que la $6^{\rm me}$ ambiguité n'est qu'une soubs-distinction de la $3^{\rm me}$; il est vray que dans l'exemple de la dite equation l'on n'en ait pas besoin, car elle se peut exprimer ainsy:

3 des signes *erg. L* 5 dans la *(1)* construction *(2)* regle *L* 12 signe *(1)* est né *(2)* tire *L* 12 d'eux *(1)* ayent qvelqve rapport ensemb *(2)* soyent *L* 13 f. simples ou doubles, | etc *fehlt l* | *erg. L* 15 par exemple *(1)* $(\mp)$ a $(\pm)$ b. *(2)* $(^{+}\mp)$ a $(^{+}\pm)$ b. *L* 16 et … origine *erg. L* 17 s'il *(1)* faudroit *(2)* falloit *L* 20 dans *L, fehlt l* 20–22 *Gestrichene Randbemerkung im Konzept:* Si $\dfrac{\mp a + b \quad +..\ \mp\ ..}{^{+}\mp a\ \mp^{+}\ b}$, *(1)* ou +a ⌣ per *(2)* Iam *(3)* erit $\dfrac{^{+}\mp a}{\mp c} = \mp^{+}\dfrac{a}{c}$ et $\dfrac{^{+}\mp a}{\mp^{+} b} = \mp\dfrac{a}{b}$ *gestr. L*

5 probleme: Gemeint ist wahrscheinlich das Problem der *minima ad conicam*; vgl. N. 9. 6 section conique: Vgl. N. 7.

$$\underbrace{\overline{(3\text{ǂ})}+}a\underbrace{+\overline{(3\text{ǂ})}}\,b \infty c,$$

mais il est vray aussy qu'on en auroit besoin pour l'exprimer ainsy:

$$\overline{\left(3\overline{(4^{+}\text{ǂ})}\right)}\,a\ \overline{\left(3\overline{(4\text{ǂ}^{+})}\right)}\,b \infty c,$$

ce qui revient au mesme, comme je viens de dire, art. 14.

XIX. Moyen d'exprimer tous les signes en cas de besoin par les deux simples, en adjoutant des nombres aux parentheses redoublées.

19. Mais pour applanir toutes les rudesses de ce chemin qui n'a pas encore esté battu jusqu'à là, puisque l'esprit peut estre embarassé par cette fabrique de tant de signes nouveaux, j'y apporteray un remede, âfin qu'on n'ait besoin absolument que de deux signes ǂ et ‡. Pour cet effet posons le cas qu'il y ait trois equations ambigües dans nostre calcul, sçavoir:

Equat. 1		Equat. 2	Equat. 3
$a \infty \begin{cases} +\ b\ -\ c \\ +\cdots+\cdots \end{cases}$	*item*	$d \infty \begin{cases} -\ e\ +\ f \\ +\cdots-\cdots \\ +\cdots+\cdots \end{cases}$	$g \infty \left\{ \begin{matrix} -i+k-l-m \\ +i-k+l-m \\ -i-k+l+m \end{matrix} \right\}$

Leur expression pourra estre telle:

$a \infty + b\,\overline{(\text{ǂ})}\,c \qquad d \infty \overline{(2\text{ǂ})}\,e\,\overline{(2\text{ ǂ }2)}\,f \qquad g \infty \overline{(3\text{ǂ})}\,i\,\overline{(3\text{ ǂ }2)}\,k\,\overline{(3\text{ ‡ }2)}\,l\,\overline{(3\text{ ǂ }3)}\,m$

par exemple $\overline{(3\text{ ǂ }2)}k$ veut dire que son signe est le 2^me de la 3^me equation ambigüe l, estant tousjours marqué du signe opposé à celuy de k, car le nombre devant le signe signifie l'equation, le nombre apres le signe signifie le nombre du signe ambigu de cette equation, mais un signe opposé à un autre n'entre point dans la ligne du conte, et n'est pas consideré comme nouveau. Cependant pour retrancher tout ce qui est superflu, il sera bon de faire en sorte que tousjours l'equation simple, (qui n'est que de deux cas possibles) occupe la premiere place, afin de ne donner point de parenthese a un signe

2 il ... qv'on *erg. L* 6 deux *(1)* autres *(2)* simples *L* 8 puisqve *(1)* je voy qv'il y auroit des gens dont *(2)* l'esprit *(a)* seroit *(b)* peut *L* 9 remede *(1)* souuerain, pour faire de sorte *(2)*, à fin *L* 9 absolument *erg. L* 12 Eqvat. 2. Eqvat. 3. *L, fehlt l* 18 f. ambigüe. *(1)* La Paranthese sans nombres *(2)* Le signe sans parenthese signifie la premiere eqvation, qvand elle est simple, elle est *(3)* (et l, est tousjours marqvé du signe opposé à celuy de k.) *L* ambigüe | (et l, est *ändert Lil* | toujours ... celuy de k. |) *streicht Lil* | *l* 21 f. eqvation. | mais ... nouueau *erg.* | *(1)* Qvand il n'y a point de p *(2)* Neantmoins *(3)* cependant *L* 24 possibles) *(1)* tienne *(2)* occupe *L*

simple de la premiere equation: *item* quand le nombre est une unité, il pourra estre omis, comme $\overline{(3\mp)}i$ au lieu de $\overline{(3\mp 1)}i$. Enfin posons qu'il y ait encore une 4 ^{me} equation

$$n \infty \left\{ \begin{matrix} \overline{(3 \mp 2)} & p & - & q \\ + & p & \overline{(3 \pm 2)} & q \end{matrix} \right\}$$ dont l'ambiguité est une soubs-distinction alors son expression pourra estre:

$$n \infty \overline{\left(3\overline{(4 \mp 1)}2\right)}\, p\, \overline{\left(3\overline{(4 \mp 2)}2\right)}\, q$$

pour marquer que le signe de p ou q premier, ou second de la 4^{me} equation depend en quelque façon du signe de k, ou l, qui est le deuxiesme de la 3^{me} equation. Et enfin je trouve bon de fermer les parentheses par en haut pour les discerner de quelques autres parentheses dont on peut avoir besoin. On voit par là l'advantage assez considerable de cette façon des signes sur la premiere qui est de n'estre pas obligé d'en faire des nouveaux qui sont quelques fois fort composés, et ennuyeux: mais en recompense il faut bien souvent recourir à la liste generale, ou table des Ambiguitez pour avoir leur explication au bout du conte, et pour essayer mesme pendant l'operation si plusieurs signes correspondants joints ensemble ne se destruisent peut estre, ou s'expliquent mutuellement comme cela arrive quelques fois, au lieu que les autres se déchiffrent eux mesmes, à la premiere veüe.

Le meilleur est, pour ceux qui comprennent assez l'interieur de cette methode, de se servir de l'une ou de l'autre, et de les joindre mesme selon le besoin, et la commodité de l'operation: les autres se garantiront du danger de faillir et de la peine de réver en se servant tousjours, de la derniere, puisqu'on y decouvre d'abord, aussy bien que dans la premiere, quels signes sont correspondents, quoyque elle n'explique pas la maniere de cette correspondence. Outre que la derniere est plus commode pour les traitez qui doivent estre imprimez, car l'on n'est pas obligé à faire graver des nouveaux caracteres.

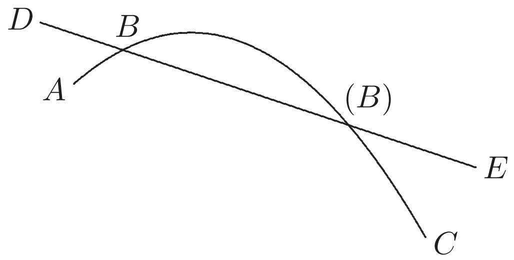
XX. Lettres ambigues
pour exprimer les lignes.

20. J'ay divisé nos caracteres ambigus au commencement en signes, et lettres. C'est assez parlé des signes ce me semble, et les preceptes de l'operation aussy bien, que

6 ou q *erg. L* 6 ou second *erg. L* 7–9 eqvation. | Et ... besoin *erg.* | *(1)* Cette facon des signes a un *(2)* On *L* 10 f. nouueaux *(1)* bien souuent *(2)* qvi *L* 12 Generale ... des *(1)* Eqvations *(2)* Ambiguitez *erg. L* 12–15 explication | *(1)* pour essayer *(a)* aussi *(b)* meme ... arrive *(aa)* bien souuent *(bb)* qvelqve fois; et pour les expliqver au bout du conte *(2)* au bout ... fois; *erg.* | au lieu *L* 15 eux mêmes *erg. L* 18–22 les autres ... servant *(1)* de la posterieure *(2)* tousjours ... caracteres *erg. L* 25 ambigus *erg. L*

les exemples acheveront d'éclaircir les restes de l'obscurité. Les lettres en fait de l'analyse peuvent signifier tousjours une ligne: si mesme il s'agiroit de nombres, puisque les nombres se representent par les divisions du continu en parties egales: et s'il arrive qu'une ligne est dite egale à un rectangle, ou une lettre au produit de deux, ou plusieurs, il faut concevoir que la partie defective de l'equation est multipliée par autant de dimensions de l'unité (qui se peut representer aussy par une ligne ou lettre) qu'il y en a qui luy manquent. Mais on peut aussy concevoir des lignes infiniment grandes, ou infiniment petites.

XXI. Lignes infiniment petites qu'on
appelle vulgairement indivisibles.



[*Fig. 4*]

21. Et pour les infiniment petites soit une ligne courbe ABC et une droite $DB(B)E$ qui coupe la courbe en deux points B et (B) donc pour concevoir que la ligne DE est la touchante, il faut seulement s'imaginer que la ligne $B(B)$ ou la distance des deux points

---

6 *Am oberen Rand der Reinschrift, von Leibniz' Hand:* j'ay divisé les caracteres ambigus

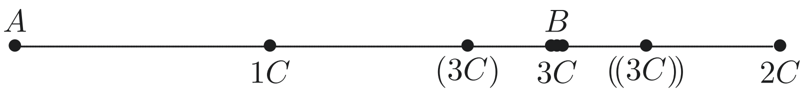
1 lettres *(1)* sont ambigües *(2)* en *L* 3 nombres *(1)* se peuuent *(2)* se representent *L* 5 faut *(1)* s'imaginer la partie de l'eqvation defective *(2)* conceuuoir | qve *zweimal erg. u. gestr. L, fehlt l, erg. Lil* | la *L* 6 (qvi … lettre) *erg. L* 8 petites | , c'est à dire égales *gestr.* | *L* 9 *(1)* XXII *(2)* XXI *(a)* Lettres *(b)* Lignes *L*

---

11 *Fig. 4*: Diese Abbildung hat Leibniz eigenhändig in die Reinschrift eingefügt, ebenso alle danach folgenden.

où elle coupe est infiniment petite: et cela suffit pour trouver les tangentes. D'ailleurs on sçait bien que la Methode des indivisibles n'a rien de solide, qu'autant qu'elle depend de celles des Infinis, et il est manifeste que la Geometrie d'Archimede dont Guldin, Gregoire de S. Vincent et Cavalieri sont les restaurateurs se sert des grandeurs infiniment petites.

XXII. Leur usage en fait de la Methode de l'Universalité.



[*Fig. 5*]

22. Mais àfin qu'on voye l'usage que cette supposition peut avoir icy; reprenons l'exemple de la ligne AC determinée par deux autres AB, BC, on y voit bien que le point C qui est a m b u l a t o i r e peut tomber dans le point B, puisque il peut tomber en deçà et en delà de toutes les manieres; et alors la ligne BC sera infiniment petite. Donc l'equation $AC \infty +AB \ddagger BC$ demeurant tousjours veritable, il faut en cas de la coincidence des points B et C concevoir la ligne BC infiniment petite, àfin que l'equation ne contredise pas l'egalité entre AC et AB. Cela fait voir aussy qu'il n'importe point alors si le signe $\ddagger BC$ signifie $+$ ou $-$. Puisque on peut placer $3C$, non seulement directement sous B, pour faire $AC \infty AB$ et BC egale à rien, mais on le peut aussy placer en deça entre A, et B en $(3C)$ ou au dela de B en $((3C))$ pour verifier par l'une des positions l'Equation $AC \infty +AB-BC$, et par l'autre l'Equation $AC \infty +AB+BC$ pourveu que la ligne $(3C)B$ ou $((3C))B$ soit conceüe infiniment petite. Voila comment cette observation peut servir à la methode de l'universalité pour appliquer une formule generale à un cas

1 f. tangentes *(1)* par le calcul *(2)*. Au reste *(3)*. D'ailleurs ... bien *(a)* qv'Archimede, et *(aa)* deux Geom *(bb)* troi *(b)* qve la Methode *L* 5 *(1)* XXIII *(2)* XXII *L* 8 à fin *(1)* qve *(2)* qv'on *(3)* qve l'on ne s *(4)* de détromper ceux qvi croyent qve cette observation est inseparablement attachée aux Tangentes, et à la methode de Maximis et Minimis *(5)* qv'on voye *L* 16 et ... rien *erg. L*

3 Archimede: ARCHIMEDES, *De sphaera et cylindro.* 3 Guldin: P. GULDIN, *Centrobaryca*, 1636 bis 1641. 4 S. Vincent: Gr. de SAINT-VINCENT, *Opus geometricum*, 1647. 4 Cavalieri: B. CAVALIERI, *Geometria indivisibilibus promota*, 1635.

particulier. Car on ne sçauroit comprendre le Cas de la coincidence des points B et C. dans l'equation generale $AC \infty AB \ddagger BC$ qu'en supposant la ligne BC infiniment petite. Donc si nous nous servons de lettres, l'equation estant $c \infty a \ddagger b$, en ce cas b sera d'une grandeur infiniment petite.

XXIII. Lignes infinies.

23. A l'exemple des infiniment petites je ne voy rien qui nous empeche de concevoir des infinies, ou infiniment grandes et quoyque je ne voye pas qu'on s'en soit servi ordinairement dans le calcul Analytique. Ces lignes pourtant ne sont pas entierement inconnues aux Geometres. Car il y a long temps qu'on a observé les admirables proprietez des lignes Asymptotes de l'Hyperbole, de la Conchoeide, de la Cissoeide, et de plusieurs autres, et les Geometres n'ignorent pas qu'on peut dire en quelque façon que l'Asymptote de l'Hyperbole, ou la touchante menée du centre à la courbe est une ligne infinie egale à un rectangle fini. Il y a d'autres Asymptotes dont on peut dire par la mesme raison qu'elles sont egales à des solides, et mesme à des sursolides. Et pour ne pas prevenir mal à propos l'exemple dont nous nous servirons pour donner un essay de cette methode, on trouvera dans la suite, que *latus transversum* de la parabole doit estre conceu d'une longueur infinie. Aussy a-[t-]on remarqué dans les Tables des sinus, que la tangente et secante sont d'une longueur infinie, quand le sinus droit, et le sinus entier sont egaux: Comme la Tangente et le sinus droit sont infiniment petits quand le sinus entier est egal à la secante.

XXIV. Ambiguité des lettres à l'égard même des lignes finies.

24. Outre cela une lettre ou ligne peut estre posée egale à une autre, et par ce moyen la generalité du Probleme ou plustost de l'equation peut estre restreinte à un certain

3 f. d'une grandeur *erg. L* 5 XIII *(1)* Leur Usage en fait de la Methode de l'Universalité *(2)* Lignes infinies. *erg. L* 7 f. pas | un qui *ändert Lil* | s'en soit servi | ordinairement *erg. Lil* | dans *l* 8 *Gestrichene Randnotiz im Konzept*: *(1)* y *(2)* $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}}$ *(3)* $\mathrm{a}^3 = \mathrm{yx}^2$ *gestr. L* 15 a propos *(1)* des choses *(2)* l'exemple *L* 23 une *(1)* grand *(2)* autre, | ou d'une certaine raison donnée à une autre, *erg. u. wieder gestr.* | *(a)* dont *(b)* et *L*

16 dans la suite: s. u. S. 103 § 44.

cas plus particulier, et bien souvent plus aisé. Cela sert quelquesfois à faire voir d'abord l'irreductibilité d'une equation, comme Monsieur Hudde a remarqué: *item* à examiner la verité du calcul dans un cas, ou elle est connue d'ailleurs. On peut aussy poser qu'une lettre soit en raison donnée à une autre, ou exprimer sa valeur par une certaine equation: tout cela diminue la generalité du probleme, et peut avoir bien souvent des usages. Mais leur consideration est un peu trop éloignée de nostre sujet. Les lettres aussy peuvent servir à signifier des Exponents des Degrez des puissances pour en faire des demonstrations universelles; mais les exemples dont nous nous servirons n'en ont pas besoin.

XXV. Operations simples ou Algorithme de la Methode de l'universalité.

25. Apres l'Explication des Caracteres leur Usage sera aisé a comprendre. Il consiste dans les operations de la Methode de l'Universalité, lesquelles aussy bien que dans le Calcul Algebraique en General, seront simples ou composées. Les simples sont l'Addition, soubstraction, multiplication, division et extraction des Racines. Les Composées se rapportent à une Equa-

2 irreducibilité *L, l ändert Hrsg.* 3 d'ailleurs *(1)*: mais comme on n'a pas besoin de preceptes pour cela, il seroit inutile d'en vouloir *(a)* etendre la dessus d'avantage *(b)* parler la dessus *(2)*. On *L* 5 cela *(1)* peut servir à rétreindre *(2)* diminue *L* 5 usages *(1)* considerables, mais qvi *(2)* n'ont rien de commun avec *(a)* le present dessein *(b)* nostre propos. *(3)* ne sont pas de cette consideration *(4)* mais il n'est pas le temps d'en parler à present. *(5)* mais *L* 6–8 Les lettres ... besoin. *erg. L* 9 simples ou Algorithme *erg. L* 11 *(1)* Il est temps de parcourir les Operations de *(a)* la Met *(b)* nostre Methode pour non haster de venir *(aa)* à *(aaa)* ⟨un⟩ *(bbb)* nostre exemple *(bb)* aux exemples. Les Operations sont Analytiqves ou Synthetiqves *(2)* (25) Apres *L* 11 Usage *(1)* se pourra *(a)* donner en compre *(b)* dire en peu de paroles *(2)* sera *L* 12 f. Universalité, |aussi bien qve du Calcul Algebraiqve en General *erg.*|, qvi sont simples *L* Universalité, |aussy bien que du Calcul Algebraique en General, qui sont *ändert Lil*| simples *l* 14 *Gestrichene Randbemerkung im Konzept*: NB la Translation des signes *gestr. L* 15 Composées *(1)* consistent dans *(2)* se *(a)* reduisent par la preparation de l'Analyse à la Synthèse *(aa)* pour le Calcul *(bb)* pour venir à une Eqvation Analytiqve et à une Construction Synthetiqve |aussi courte et aussi belle qve faire se peut: *erg.*| mais nous ne remarqverons qve ce qve nostre methode à de particulier en tout cecy. *(b)* rapportent *L*

---

2 Hudde: Vgl. J. HUDDE, *De reductione aequationum*, 1659, *DGS* I S. 406–506, insbesondere die beiden ersten Regeln auf S. 408–414.

tion, pour la former, pour la polir, pour l'interpreter, et pour la resoudre par lignes ou nombres; mais nous ne raporterons que ce que nostre methode a de particulier en tout cecy.

XXVI. Regles d'Addition et Soubstraction, quand une Grandeur a des signes differents homogenes.

26. L'Addition, et Soubstraction n'ont que les mesmes preceptes assez courtes, et assez aisez. Il y a ou les mesmes grandeurs ou des grandeurs differentes. *Item* les signes sont ou Homogenes, ou ils ne les sont pas. Si la mesme grandeur entre plus d'une fois dans la composition d'une autre avec le mesme signe on en fait l'addition en ne l'ecrivant qu'une seule fois, et en la multipliant par le nombre d'autant d'unitez qu'elle se trouve de fois. Par exemple $\mp a^2 + \dfrac{b^3 \mp 3ca^2}{c}$ fait: $\mp 4a^2 + \dfrac{b^3}{c}$.

Si la mesme grandeur entre dans la composition d'une autre avec des signes opposés, ces deux expressions se destruiront mutuellement pourveu, que le nombre qui les multiplie soit egal, par exemple $\mp 3a^2 + \dfrac{b^3 \pm 3ca^2}{c}$ fait $+\dfrac{b^3}{c}$ mais si les multipliants sont inégaux le moindre sera soubstrait du plus grand, et la grandeur donnée sera multiplié par le Residu marqué du signe du nombre plus grand de sorte que $\mp 2a^2 + \dfrac{b^3 \pm 3ca^2}{c}$, feroit $\dfrac{+b^3 \pm ca^2}{c}$.

6 *(1)* L'Addition et Soubstraction n'ont qve les mêmes preceptes assez courts: | Sçavoir *erg.* | Si deux *(2)* | (26) *erg.* | L'Addition *L* 7 memes *(1)* lettres, ou des lettres di *(2)* grandeurs *L* 8 grandeur *(1)* a des signes differe *(2)* entre *L* 9 signe | d'une même costé de l'eqvation *erg. u. gestr.* | on *L* 12 f. opposés, *(1)* il ne faut l'écrire qv'une seule fois, en la multipliant par *(2)* ils se detruieront *(3)* ces *L* 14–16 exemple ... mais $\mp 2a^2 \dfrac{+b^2 \pm 3ca^2}{c}$, feroit $\dfrac{+b^3 \pm ca^2}{c}$ *(1)* et le *(2)* car | les *gestr.* | deux nombres estant soubstraits l'un de l'autre le residu sera marqvé du signe du nombre plus grand *L* exemple $\mp 3a^2 \dfrac{+b^3 \pm ca^2}{}$ fait $+\dfrac{b^3}{c}$, mais $\mp 2a^2 \dfrac{+b^3 \pm 3ca^2}{c}$, feroit $\dfrac{+b^3 \pm ca^2}{c}$, et le residu sera marqué du signe du nombre plus grand. *l, ändert Lil*

4 XXVI.: Die Abschnitte 26–28 hat Leibniz nachträglich ins Konzept eingefügt.

XXVII. Ou même heterogenes.

27. Et comme le multipliant peut estre une lettre au lieu d'un nombre; il sera bon de faire une regle generale, qui comprendra aussy les signes heterogenes: Sçavoir: si la mesme grandeur entre plus d'une fois dans la composition de la valeur d'une autre, avec des signes differents, alors elle peut estre écrite une fois seulement avec le signe + estant conceue comme multipliée par la somme des multipliants particuliers, si elle est affectée plus d'une fois d'un mesme signe; ou par leur difference, quand les signes sont opposez; et enfin par une grandeur composée des multipliants, affectez des mesmes signes, si les signes sont heterogenes, et quand il n'y a point de multipliant il faut concevoir la grandeur comme multipliée par l'unité. Par exemple

$$\text{ǂ}3yc + y \;\underline{\text{ǂ}}\; 2yc \;\text{+ǂ}\; dy \text{ fait } +y, \frown \text{ǂ}c + 1 \;\text{+ǂ}\; d,$$

$$\text{et } \frac{\text{ǂ}3y}{c} + y \;\underline{\text{ǂ}}\; \frac{2y}{c} \;\text{+ǂ}\; \frac{y}{d} \infty e \text{ fera } e \smile, \text{ǂ}\frac{1}{c} + 1 \;\text{+ǂ}\; \frac{1}{d} \infty y.$$

Car je me sers ordinairement de $\frown$ pour marquer la multiplication d'une grandeur par l'autre et de $\smile$ pour marquer la division de la precedente par la suivante. Et quoyque la regle ne parle que de la multiplication, il est aisé de l'appliquer à la division; car par exemple c'est le mesme de diviser y par d, ou de le multiplier par $\frac{1}{d}$.

XXVIII. Exception.

28. Il faut pourtant remarquer que cette methode de reduire plusieurs expressions d'une mesme grandeur, à une seule, ne reussit pas quand cette grandeur entre dans le denominateur d'une fraction, ou dans une racine sourde par exemple

3 generale, *(1)* qv'on trouuera un peu moins exposée à la premiere veue: soit *(2)* qvi comprendra *L*
5 signes *(1)* homogenes *(2)* differents *L* 5 avec ... + *erg.* *L* 16–18 par $\frac{1}{\mathrm{d}}$. *(1)* NB il y a pourtant une seule exception a observer qvi est qvand la même grandeur entre en composition tantost par forme de division tantost par forme de multiplication, par exemple $\frac{\text{ǂ}\mathrm{y}}{\mathrm{c}}\ \frac{+\mathrm{d}}{\text{ǂ}\mathrm{y}}$, *(a)* car alors pour *(b)* il faut faire une eqvation pour *(aa)* l'eximer de ⟨la⟩ fraction *(bb)* nous déliurer de la fraction par la multiplication per crucem *(2)* | XXVIII. *(a)* Precaution *(b)* Exception *erg.* | | de cette regle *erg. u. gestr.* | | (28) *erg.* | NB il faut *L* 19 cette grandeur *(1)* entre dans ⟨la⟩ composition d'une autre de differentes façons *(2)* est dans son *(3)* qvi *(a)* entre dans la composition d'une autre *(b)* est *(aa)* dans son terme *(bb)* de differentes façons dans son Terme, tantost par forme de multiplication tantost par forme de division ⟨o⟩u extraction de racines *(4)* entre *L*

$$\mp y \quad \frac{+d}{\mp y}, \; + \sqrt{\mp ay}$$

de sorte qu'il faut tacher d'en faire une equation, et la purger par apres des fractions et racines: pour voir ce qui s'en pourroit faire ensuite.

XXIX. Quand deux grandeurs differentes sont affectées d'un meme signe ou de signes homogenes, alors le *v i n c u l u m* a lieu.

29. Si deux grandeurs differentes qui composent une mesme grandeur ont un mesme signe, elles se pourront joindre par un *vinculum* sous le dit signe. Par exemple au lieu de $\mp a + b \mp c \infty \pm d$ il sera bon d'ecrire $\mp\overline{a+c}+b \infty \pm d$. Si ces grandeurs differentes ont des signes opposez, et ne sont pas d'un mesme costé de l'equation, on peut les mettre toutes d'un costé, pour les joindre sous un *vinculum*, comme dans le mesme exemple on pourra faire $\mp\overline{a+c+d}+b \infty 0$.

Si deux grandeurs differentes ont des signes opposez, et sont d'un mesme costé de l'equation, ou ne sont dans aucune equation, on peut neantmoins les joindre sous un mesme *vinculum* en mettant $+$ devant l'une dont nous retenons le signe et $-$ devant celle que nous pretendons de ranger sous le signe de l'autre. Par exemple soit une ligne de valeur de: $\mp a \pm b$ ou la difference entre a et b l'expression peut estre telle $\mp\overline{a-b}$ ou $\pm\overline{b-a}$, et il est à nous à choisir celle qui nous est plus commode.

On peut obtenir la mesme chose d'une autre façon en cachant le $-$ et en substituant à la place d'une de ces deux grandeurs comme b une autre egale à rien moins elle, par

3 ensuite. | J'appelle T e r m e , une expression qvi *(1)* peut changer sa place impunement, sans aucune autre observation (c'est à dire adjoutée d'un endroit et ostée de l'autre) *(2)* peut estre adjoutée, ou ostée, ou transposée impunement, sans aucune autre observation, comme $\frac{+\mathrm{d}}{\mp \mathrm{y}}$ est un terme *(a)* +d ne l'est pa *(b)* mais *(aa)* $\frac{+\mathrm{d}}{\langle - \rangle}$ ne l'est pas *(bb)* +d en ce cas, ne l'est pas. *gestr.* | *L* 4 qvand des *L*
5 ou ... homogenes *fehlt l, erg. Lil* 6 deux *(1)* ou plusieurs lettres | differentes qvi composent une meme grandeur *erg.* | *(2)* Termes differens *(3)* grandeurs *L* 7 se *(1)* joindront *(2)* pourront joindre *L* 8 ces *(1)* lettres differentes *(2)* termes differens *(3)* grandeurs *L* 9 l'eqvation *(1)* il faut les *(2)* on peut les *(3)* on *L* 12 deux *(1)* lettres differentes *(2)* Termes differens *(3)* grandeurs *L* 13 ou | qvi *erg.* | ne *L* ou qu'il ne *l, ändert Hrsg.* 14 vinculum, *(1)* en *(a)* mettant *(aa)* plus *(bb)* + devant l'une, et − d *(b)* substituant à la place d'une de ces deux lettres | qvi soit pour *(aa)* d *(bb)* c *erg.* | une autre egale à moins elle. *(aaa)* d *(bbb)* 0 − *(aaaa)* d *(bbbb)* c. Par exemple soit une grandeur de cette valeur: $\mp$a $\pm$ c, c'est à dire la difference entre a et c. Soit pose f ∞ a − c alors nous aurons $\mp$ *(2)* en *L*
15 une *(1)* grandeur *(2)* ligne *L* 18 façon *(1)* sans y mêler le − *(2)* en *L* 19 deux *(1)* lettres *(2)* grandeurs *L*

exemple en posant $c \infty 0 - b$ on aura ǂ$\overline{a + c}$, au lieu de ǂa ǂ̱ b mais cette façon pourroit nuire si la mesme lettre b se trouveroit ailleurs dans l'equation: de sorte que la premiere est plus commode en tout cas.

Si de deux grandeurs dont les signes sont homogenes l'une est connue, l'autre inconnue, ou si toutes les deux sont de differentes lettres inconnues, ou de differentes dimensions d'une mesme inconnüe; il ne faut pas les joindre sous un mesme *vinculum*, et si elles y sont il en faut eximer une: quand il s'agit de former ou d'ordonner l'equation, car alors, il faut mettre les inconnues d'un costé, autant que cela se peut. Mais quand il s'agit de purger une formule analytique de toute l'ambiguité, l'on ne fait pas scrupule de les joindre, comme on verra plus bas; car c'est là ou le *vinculum* fera voir principalement son usage.

XXX. Quand les signes sont heterogenes.

30. Si les signes sont de deux grandeurs differentes, ils ne sont point h o m o g e n e s , soit que ces signes soyent c o r r e s p o n d a n s ou h e t e r o g e n e s entierement, on n'y peut rien faire, à l'egard de l'addition ou soubstraction, que de les placer simplement comme le calcul demande avec leurs signes, par exemple +ǂa, adjousté à ǂb, fait +ǂa ǂ b et +ǂa soubstrait de, ǂb fait +ǂ̱a ǂ b sans aucune autre observation quant à cette operation, mais il faut se remettre la dessus à la practique.

XXXI. Des Grandeurs qui entrent dans la composition d'une autre.

31. Ce que nous venons de dire de deux Grandeurs qui composent une autre, s'applique aisement à plusieurs, car on en peut tousjours faire deux seulement, en prennant en-

1 cette *(1)* method *(2)* façon *(a)* nuiroit *(b)* pourroit *L* 3 f. cas. *(1)* Si deux *(a)* lettres *(b)* grandeurs | differentes *erg.* | ont deux signes qvi ne sont pas homogenes *(aa)* on *(bb)* soit qve ces signes soyent correspondents, ou heterogenes entierement, on n'y peut rien faire à l'egard de l'addition ou soubstraction qve de les mettre l'une aupres de l'autre, selon qve l'eqvation ou le calcul le demande d'ailleurs. *(2)* Si | de *erg.* | deux *(a)* lettres | differentes *erg.* | *(b)* Termes *(c)* grandeurs *L* 5 sont *(1)* inconnues de differentes positions *(2)* de *L* 5 f. ou de ... inconnue *erg. L* 6 pas | regulierement *gestr.* | les *L* 13 Si les signes | sont *l, fehlt L* | de ... differentes |, ils *l, fehlt L* | ne *L* 16–18 demande *(1)*: qvoyqve en effect il y ait qvelqve choix à faire à l'egard des autres operations pour en venir à bout avec plus de facilité: | Si vous voulez adjouter +ǂa, à ǂb il n'est pas necessaire de dire +ǂa + ǂb *erg.* | *(2)* avec ... operation, | qvoyqve en effect il y ait qvelqve choix à faire à l'egard des autres operations pour en venir à bout avec plus de facilité: *L, fehlt l* | | mais ... à *(a)* l'usage *(b)* la practiqve *erg.* | *L*

semble celles qu'on voudra, et en les considerant comme une seule. Si plusieurs grandeurs au lieu d'entrer dans la composition d'une seule grandeur, composent une equation, on peut tousjours faire qu'elles composent une seule grandeur, en les rangeant d'un mesme costé de l'equation si elles n'y sont desja.

De sorte qu'il ne faut que chercher des equations, et reduire plusieurs equations en une seule pour faire que plusieurs grandeurs d'un mesme calcul entrent en composition d'une seule, afin que la practique des regles que nous venons d'expliquer puisse avoir lieu. Bien souvent on peut espargner la transposition de l'equation, parce qu'on voit desja ce qui en arriveroit par exemple, s'il y a, $\mp a^2 \infty \frac{b^3 \mp 2ca^2}{c}$, on voit bien que cela fait: $\frac{b^3 \mp ca^2}{c} \infty 0$.

XXXII. Si les signes determinez sont homogenes ou heterogenes à l'égard des ambigus.

32. A present en passant de l'addition ou soubstraction à la M u l t i p l i c a t i o n ou D i v i s i o n , il est à propos de remarquer une difference considerable entre elles, sçavoir qu'en fait d'Addition ou Soubstraction les signes determinez + ou − doivent estre considerez comme heterogenes, (: quoyque correspondants :) à l'egard d'un signe ambigu: mais en fait de multiplication ou division on les peut considerer comme homogenes avec quelque autre signe que ce puisse estre; parce qu'ils les multiplient ou divisent tousjours avec une coalition en un seul signe, comme font les homogenes aussy, au lieu que les heterogenes le plus souvent restent tous deux et nous obligent de les écrire ensemble.

Par exemple pour adjouster $\mp a$ et $+b$, ou pour soubstraire l'un de l'autre, on ne sçauroit rien faire que de les écrire l'un auprès de l'autre avec les signes convenients:

1 *Gestrichene Randbemerkung im Konzept mit Bezug auf* § *34:* NB raison de l'addition tiree de la multiplication; les signes + et − sont heterogenes en l'addition et homogenes en la division *gestr.* *L*
2 lieu *(1)* de composer *(2)* d'entrer *L* 11 XXXII *(1)* A l'egard de la M u l t i p l i c a t i o n o u d i v i s i o n , ou d'un signe ambigu par un signe determiné *(2)* Si *L* 13 (32) *(1)* Avant qve de passer *(2)* A present *L* 15 sçavoir *(1)* qve les signes certa *(2)* qv'en fait *(a)* de divis *(b)* d'Addition *L* 15 ou − *(1)* peuuent *(2)* doiuuent *L* 16 l'egard *(1)* de qvelqve autre *(2)* d'un *L* 18 divisent *(1)* avec qvelqve changement, au lieu *(2)* tousjours *L*

ǂ$a+b$ ou ‡$a+b$. Mais en $\left.\begin{array}{r}\text{multipliant}\\ \text{divisant}\end{array}\right\}$ ǂ a par $+\,a$, nous aurons ǂ a^2; ǂ a par $-\,a$, ... ‡ 1.

XXXIII. Multiplication ou Division, d'un signe ambigu par un determiné.

33. La raison de cecy est manifeste, et generalement tout signe multiplié ou divisé par $+$ demeure tel qu'il est, et tout signe multiplié ou divisé par $-$, est changé en son contraire. Comme l'affirmation d'une affirmation est tousjours une affirmation, et l'affirmation d'une negation est tousjours une negation: mais la negation d'une affirmation, est une negation, et la negation d'une negation est une affirmation, d'où vient que dans l'Algebre ou Analyse commune

+ ⌢	+	∞ +	et	+ ⌣	+	∞ +	par consequent	+	{ o͡u͜ }	ǂ (⁺ǂ)	∞	ǂ (⁺ǂ)
+	−	−		+	−	−	dans la nostre	···	⌢⌣	‡ (⁺‡)	∞	‡ (⁺‡)
−	−	+		−	−	+	de mesme	−	⌢⌣	········	∞	ǂ (⁺ǂ)
								···	⌢⌣	ǂ (⁺ǂ)	∞	‡ (⁺‡)

XXXIV. Qu'on aura raison de dire que les signes mesmes multiplient ou divisent, et qu'ils sont multipliez ou divisez.

34. Mais àfin qu'on ne se scandalise pas de cette maniere de parler: que les signes multiplient, et divisent, ou sont multipliez et divisez, je trouve à propos de la justifier d'autant plus qu'on en peut tirer quelques observations utiles, je dis donc, qu' a d j o u s t e r est m u l t i p l i e r , ou d i v i s e r la grandeur à adjouster; (: ou si vous voulez son signe :) par, $+1$ et s o u b s t r a i r e est multiplier ou diviser la dite grandeur ou son signe par, -1. Or l'unité se peut obmettre impunement quand il y a quelque autre chose à la place,

2 .... ‡ a^2 *L, l ändert Lil* 6 + demeure ... par *L, fehlt l, erg. Hrsg.* 7 est tousjours une affirmation *L, fehlt l, erg. Lil* 7 et *(1)* la negation *(2)* l'affirmation *L* 9 est une *(1)* negation *(2)* affirmation *L* 15 Qu'on *(1)* a *(2)* aura *Lil* 17 ne *(1)* trouue pas cette matiere *(2)* se scandalise *L* 18 ou sont ... divisez, *erg. L, l* 20 ou d i v i s e r *erg. L* 22 qvand ... place *erg. L*

11 +{ o͡u͜ } ǂ (⁺ǂ) ∞ ǂ(⁺ǂ): Gemeint sind die vier Fälle + ⌢ ǂ ∞ ǂ oder + ⌣ ǂ ∞ ǂ sowie + ⌢ ⁺ǂ ∞ ⁺ǂ oder + ⌣ ⁺ǂ ∞ ⁺ǂ.

puisqu'elle n'apporte point de changement à la multiplication ou division; donc l'on peut dire que les signes multiplient ou divisent, et sont multipliez ou divisez.

C'est pourquoy $\left\{\begin{matrix}\text{adjouster} & \pm b \text{ à } & +c\\ \text{soubstraire} & \pm b \text{ de } & +c\end{matrix}\right\}$ est multiplier $\pm$ par $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$; et en escrire le produit devant b, auprez de $+c$, pour faire $+c,\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} \frown \pm b,,$ mais par la regle de multiplication que nous venons d'expliquer $\left.\begin{matrix}+ \frown & \pm\\ - & \ldots\end{matrix}\right\} \infty \left\{\begin{matrix}\pm\\ \mp\end{matrix}\right.$ donc $\left\{\begin{matrix}\text{adjouster}\\ \text{soubstraire}\end{matrix}\right\}$ les termes susdits fait $\left\{\begin{matrix}c & \pm & b\\ \ldots & \mp & \ldots\end{matrix}\right\}$. Et l'on voit que la raison de l'addition et soubstraction depend en ce cas de la multiplication, et division.

Cette observation est conforme aussy aux regles de l'addition, ou soubstraction données cy dessus, car en vertu de ces regles on pourra changer $\pm a + a$; en $a, \frown \pm 1 + 1$, et $\pm a \pm b$, en $\pm 1, \frown a + b$ ou $\pm\overline{a+b}$. Tout cela est de grand usage pour la translation des signes d'une lettre ou grandeur à l'autre dont il sera parlé plus bas.

XXXV. Multiplication ou division d'un signe homogene ambigu par un autre.

35. Nous avons remarqué cy dessus que les signes homogenes ne se multiplient jamais sans coalition en un seul signe en comprennant $+$ et $-$ sous le nom des homogenes mais les signes homogenes ambigus à part, c'est à dire les mesmes $\pm$ et $\pm$ ou $\mp$ et $\mp$ ou $^{+}\!\pm$ et $^{+}\!\pm$, ou $^{+}\!\mp$ et $^{+}\!\mp$ etc. et les opposez $\pm$ et $\mp$ ou $^{+}\!\pm$ et $^{+}\!\mp$, ou $(\pm)$ et $(\mp)$ etc. ont cela de considerable, qu'ils [ne] se multiplient ny divisent jamais entre eux, sans destruction

3 f. et *(1)* l'écrire auprés de +c *(2)* en écrire ... faire $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ *(a)* $\pm$b *(b)* $\frown$ $\pm$, b,, +c *L* faire $\left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\}$ $\frown$ c $\pm$ b,, b + c *l, ändert Lil* 8 observation *(1)* peut contribuer aussi *(a)* à *(aa)* confirme *(bb)* pousser plus *(b)* a confirmer ou expliqver, et même à pousser plus loin les regles susdites *(2)* est conforme *L* 10 f. *Gestrichene Randbemerkung im Konzept*: NB supra la difference: item la translation du signe de la division à la multiplication *gestr. L* 10 la *(1)* transposition *(2)* translation *L* 11–14 bas | XXXV ... les *erg.* | | Les *gestr.* | Signes *(1)* ambigus *(2)* homogenes *L* 15 comprenant *(1)* le *(2)* les Signes determinez à part comme + et +, ou − et − ou + et −. item les Signes homogenes *(3)* + et − *L* 16 f. homogenes | *(1)* determinez *(2)* mais davantage *erg. u. gestr.* | ambigus | à part ... opposez *erg.* | $\pm$ *L* 18–98,1 *Gestrichene Randbemerkung im Konzept*: NB. utile infra ad destructiones ambiguitatum, pour le choix des places, en *(1)* fais⟨a⟩ *(2)* mettan⟨t⟩ les homogenes ensemble, car ainsi une seule qvadrature détruit toute l'ambiguité car sans cela il en faut plusieurs *gestr. L*

entiere de l'ambiguité: dont la regle convient avec celle de l'Algebre commune, sçavoir que deux mesmes signes homogenes ambigus aussy bien que determinez multipliez ou divisez ensemble font +, et deux opposez font −. Par consequent

ǂ	⌒‿	ǂ	∞	+	ou	+ǂ	⌒‿	+ǂ	∞	+
···		ǂ̲	···	−		···		+ǂ̲	···	−
ǂ̲		···	···	+		+ǂ̲		···	···	+
···		ǂ	···	−		···		+ǂ	···	−

XXXVI. Des deux signes heterogenes
entre eux, affirmatifs ou negatifs.

36. Deux signes tout à fait H e t e r o g e n e s affirmatifs se multiplient et se divisent sans changement et il n'y a point d'autre formalité à observer que de les escrire l'un auprez de l'autre par exemple

ǂa ⌒ (+ǂ)b fait ǂ(+ǂ)ab, et ǂa ‿ (+ǂ)b fait $\dfrac{ǂa}{(+ǂ)b}$.

Deux signes heterogenes Negatifs c'est à dire qui portent un, −, au bas du caractere, estant multipliez ou divisez l'un par l'autre se changent en affirmatifs, et le produit est le mesme que celuy de leur deux affirmatifs, par exemple

ǂ̲ a ⌒ (+ǂ̲) b fait ǂ(+ǂ) ab
..... ‿ .... $\dfrac{ǂa}{(+ǂ)b}$.

Si de deux signes heterogenes l'un est affirmatif, l'autre negatif, vous avez le choix de faire ou laisser affirmatif celui de deux qui bon vous semblera; pourveu que l'autre soit fait, ou demeure negatif, par exemple

1 de *(1)* l'analyse com *(2)* l'Algebre *L* 2 deux *(1)* signes homogenes determinez aussi bien qv'ambigus *(2)* memes *L* 3 *Gestrichene, zum Teil fehlerhafte Rechenbeispiele am Rande des Konzepts*: x − b ⌒ x ǂ c = x^2 $\begin{matrix} -\,\text{b} \\ ǂ̲\,\text{c}\end{matrix}$ x ǂ bc x ǂ b ⌒ x ǂ c = +x^2 $\begin{matrix} ǂ\text{b} \\ ǂ\text{c}\end{matrix}$x + b^2 *gestr. L* 7–10 +ǂ . . . − *(1)* Les Signes *(a)* Heterogenes ordinairement ne produisent point de changement *(b)* Correspondants estant multipliez ou divisez ensemble, bien souuent ⟨entr⟩ *(2)* | XXXVI De deux . . . negatifs (36) *erg.* | *(a)* Les *(b)* Deux s i g n e s *L* 13 f. fait $\dfrac{ǂ\text{a}}{(+ǂ)\text{b}}$ | XXXVI *(1)* Multip *(2)* de deux signes heterogenes entre eux (36) *erg. u. gestr.* | *(a)* Les *(b)* Deux *L* 19 vous *(1)* pouuez changer en affirmativ *(2)* avez *L*

ǂ*a* ⌢ (+ǂ̲)*b* fait { ǂ(+ǂ̲) *ab* / ǂ̲(+†) ...

ǂ*a* ⌣ .... { ǂ*a* / (+ǂ̲)*b* ; ǂ̲*a* / (+†)*b*

XXXVII. De deux signes correspondents.

37. Si deux signes correspondants se multiplient ou divisent, ils suivent l'exemple des Heterogenes à moins que leur nature particuliere ne nous oblige à quelque autre changement. Et quoyque les exemples en soyent infinis, il suffira neantmoins d'en considerer deux, pour estre instruit à l'egard de tous les autres.

Soit une mesme grandeur, c tantost ǂ$a + b$, tantost $+a$ ǂ b. Et par consequent sa valeur generale +†a †+ $b \infty c$, à present si la suite du calcul nous oblige de multiplier, ou de diviser a par b, chacun avec son signe, nous aurons en multipliant ǂab, au lieu de +† †+ ab, et en divisant, ǂ a/b au lieu de +†a / †+b. *Item* en multipliant ou divisant +†a †+ b par ǂd les signes se renverseront et nous aurons †+a +† b / d, ou †+ad +† bd, au lieu de +†a †+ b / ǂd ou ǂ +† ad ǂ †+bd.

XXXVIII. Quand plusieurs signes se trouvent ensemble devant une mesme grandeur en un mesme endroit.

38. Tout ce que nous venons de dire de la multiplication, et division des signes, se doit entendre aussy quand nous trouvons desja deux signes ensemble l'un auprés ou au dessous de l'autre, car alors ils se multiplient ou divisent. S'il y a plus de deux, les mesmes regles ont lieu, car on peut comprendre quelque paire des signes qu'on voudra, sous le nom d'un seul: par exemple, ǂ +† †+a fait $+a$ car ǂ +† fait †+, et †+†+ fait + ou ǂ†+ fait +†, et +† +† fait + ou enfin +††+ fait ǂ, et ǂ ǂ fait +.

6 d'en *(1)* rapporter *(2)* considerer *L* 15 endroit |, on peut dire qv'ils ⟨sem⟩ *gestr.* | *L* 17 trouuons *(1)* qve deux signes as *(2)* une même grandeur *(3)* une meme *(4)* une meme grandeur *(5)* déja *(a)* plusieurs *(b)* deux *L* 20 *Gestrichene Randbemerkung im Konzept*: NB definir les lettres abc au lieu d'a. *gestr. L*

XXXIX. Extraction des racines.

39. L'Extraction des Racines ne sera plus difficile qu'à l'ordinaire, à celuy qui aura compris ce peu de regles que nous venons de donner, et à fin qu'on ait de quoy s'exercer un peu sur les preceptes susdits, pour les comprendre mieux, je rapporteray un petit exemple tout fait d'une extraction de racine, avec sa preuve, et je laisseray au lecteur de le faire selon les dits preceptes.

Soit une equation $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \infty y^2$ et la question est, comment il faut exprimer la valeur de x conformement à cette equation. Je dis donc que x est égal à $\mp\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \pm q$ dont voicy l'espreuve, $x \infty \mp\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \pm q$ donc $x \mp q \infty \mp\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}}$, et par consequent $+x^2 \mp 2qx + q^2 \infty \frac{aq^2 \mp y^2q}{a}$, ou si vous voulez $+ax^2 \mp 2aqx + aq^2 \infty +aq^2 \mp y^2q$: ostant aq^2, de deux costez, il vous restera $+ax^2 \mp 2aqx \infty \mp y^2q$, ou $+\frac{a}{\mp q}x^2 \frac{\mp 2aq}{\mp q}x \infty y^2$, ou $\mp\frac{a}{q}x^2 + 2ax \infty y^2$, comme nous l'avions supposé au commencement. La consideration de cette operation peut servir d'exemple à la pluspart de nos preceptes.

2 qv'a l'ordinaire *erg. L* 3 peu *(1)* de preceptes *(2)* de regles *L* 3 venons de *(1)* débiter, *(a)* par ce qv'elle *(b)* car pour le reste elle est entierement conforme avec l'ordi *(2)* se confon *(3)* donner *L* 4 f. mieux *(1)* j'apporteray un *(2)* je rapporteray *L* 5 petit *erg. L* 5 d'une ... Racine *erg. L* 8 f. *In L Wurzelzeichen ohne Querbalken* 9 voicy la preuue *L* 10 y^2q *(1)*, vous aurez *(2)*: ostant *L* 12 $\infty\ y^2$, *(1)* conformement à la premiere Supposition. *(2)* comme *L* 13–101,8 preceptes: | *(1)* XXX *(2)* XXXIX *(3)* XL. *(a)* Exemple d'une gran *(b)* qv'il y a des grandeurs qvi n'ont point de racine imaginable à l'égard des signes (40) ... ambigu *(aa)* NB, c'est pour la translation $\mp x^2$, etc $= y^2 - a^2$ fait $x^2 = \mp y^2 \pm a^2$, et $x = \sqrt{\mp y^2 - \pm a^2}$ *(bb)* qvoyqve ... l'Eqvation *erg.* | XLI *L*

---

9 $x \infty$: Das neu entstandene Doppelvorzeichen vor der Wurzel ist von den anderen unabhängig. Es muss also richtig heißen: $x = (\mp)\sqrt{\frac{aq^2 \mp y^2q}{a}} \pm q$, womit sich vier und nicht lediglich zwei Lösungen für x ergeben.

XL. Grandeurs sans Racine.

40. Il faut pourtant remarquer qu'il y a des certains cas, ou l'on ne sçauroit extraire la racine d'une grandeur affectée d'un signe ambigu; quoyque on la pourroit extraire si le signe ambigu estoit changé en + par exemple $\mp x^2$, n'a point de racine, car il n'y a point de grandeur qui multipliée par elle mesme produise $\mp x^2$, pourveu qu'on aye égard aux signes. La raison en est, parce qu'il n'y a point de racine de $-x^2$, or $-x^2$ est compris dans $\mp x^2$. Mais nous y apporterons remede dans la preparation de l'equation.

XLI. Operations composées
qui se rapportent à l'Equation.

41. Et voila les cinq operations simples du calcul, les composées sont la formation, la preparation, et la construction d'une Equation, mais nous adjousterons la quatriesme qui est particuliere à nostre sujet sçavoir l'interpretation d'une Equation ou formule ambigue trouvée.

XLII. L'art de former
des Equations universelles.

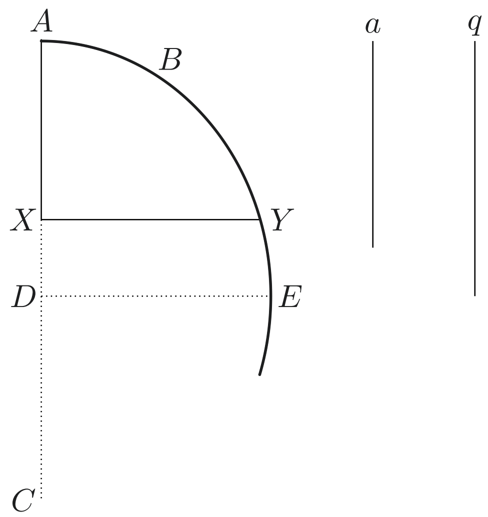
42. La formation d'une Equation Universelle qui doit comprendre quantité de cas particuliers se trouvera en dressant une liste de tous les cas particuliers. Or pour faire cette liste il faut reduire tout à une ligne, ou grandeur, dont la valeur est requise, et qui se doit determiner par le moyen de quelques autres lignes ou grandeurs adjoustées ou soubstraites, par consequent il faut qu'il y ait certains points fixes, ou pris pour fixes, (: car comme le mouvement et le repos ne consistent que dans une relation :) et d'autres ambulatoires, dont les endroits possibles differents nous donnent le catalogue de tous les cas possibles. Les lignes dont nous nous sommes servis

11 la *(1)* Reduction *(2)* Preparation *L* 11 Eqvation, *(1)* mais comme nous n'avons rien de particulier à dire sur la Reduction nous substituerons *(a)* à sa place une autre, part *(b)* une autre qvi est qvi est particuliere à nostre sujet, sçavoir l'interpretation d'une Eqvation ou formule ambigüe trouuee. *(2)* mais *L* 13 trouuée. | Tout ce qve nous avons de particulier à dire sur la formation d'une Eqvation consiste dans la translation des signes de place en place *gestr.* | *L* 17 trouuera *(1)* aisement, par le moyen des lignes, *(a)* et des points *(b)* marqvées des points, en partie ambulatoires, en partie fixes comme *(2)* en dressant *L* 17 f. cas *(1)* possibles *(2)* particuliers *L* 18 pour *(1)* trouuer *(2)* faire *L* 21 comme *(1)* en matiere *(2)* le mouuement *L*

au commencement, le feront comprendre aisement, et on trouvera d'autres exemples dans la suite. Ayant trouvé cette liste, il faut songer à reduire à une formule generale tous les cas possibles, par le moyen de signes ambigus, et des lettres dont la valeur est tantost ordinaire, tantost infiniment grande ou petite.

J'ose dire qu'il n'y a rien de si brouillé, et different qu'on ne puisse reduire en harmonie par ce moyen jusque mesme aux figures courbes de differents degrez, car si l'on me donne une droite, une ellipse et une cissoeide, je pretends de trouver le moyen non seulement de faire quantité de theoremes ou proprietez, dans lesquelles ces lignes s'accordent, mais de resoudre mesme en elles quelque probleme, que ce puisse estre, par une construction universelle, excepté les problemes des quadratures, des centres de Gravité, et autres dont la solution ne consiste pas dans la resolution d'une equation.

XLIII. Equation Commune à toutes les Sections Coniques
et son application au Cercle, à l'Ellipse et à l'Hyperbole.



[*Fig. 6*]

2 faut *(1)* remarqver *(2)* songer à *L* 2 reduire *(1)* en harmonie *(2)* à *L* 4 infiniment *(1)* petite *(2)* grande *L* 6 figures ou courbes *L* 7 droite, une *(1)* hyperbole *(2)* ellipse *L* 10 excepté les *(1)* theoremes *(2)* problemes *L* 10 f. des centres de Gravité *erg. L* 11 ne *(1)* se trouue pas par les moyen *(2)* consiste *L* 13 et à *(1)* la Parabole *(2)* l'Hyperbole *L*

12 Sections Coniques: In seiner Darstellung der möglichen Kegelschnitte in §§ 43–45 berücksichtigt Leibniz die einzelne Gerade, die sich aus dem Fall $a = 0$ ergibt, nicht.

43. Pour en donner un exemple j'ay trouvé à propos de me servir des Coniques. Soit une section conique ABY, dont le sommet A, l'axe AC et une ordonnée perpendiculaire à l'axe, XY. Soient deux lignes droites données a, et q, et $AX \infty x$ et $XY \infty y$, je dis que le lieu de cette equation $+2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 - y^2 \infty 0$ ou la ligne ABY sera une Section conique, et reciproquement qu'il n'y a point de Section conique dont l'equation ne soit $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 - y^2 \infty 0$.

Car, a et q, estant posées egales, et $\ddagger$ estant expliqué par $-$ nous avons cette equation $2ax - x^2 \infty y^2$. Or il est constant que cette equation convient au cercle[,] a estant le rayon, $DA \infty DE \infty a \infty q$. De mesme $\ddagger$ estant expliqué par $-$, mais sans determiner si a, et q sont egales ou inegales, l'equation produite sera $2ax - \frac{a}{q}x^2 \infty y^2$, sçavoir celle de l'Ellipse, a estant son *latus rectum*, q le *transversum*. Mais le signe $\ddagger$ estant expliqué par $+$, et le reste posé comme au paravant, l'Equation qui en proviendra sera $2ax + \frac{a}{q}x^2 \infty y^2$, c'est à dire celle de l'Hyperbole.

XLIV. Aussy bien
qu'à la Parabole.

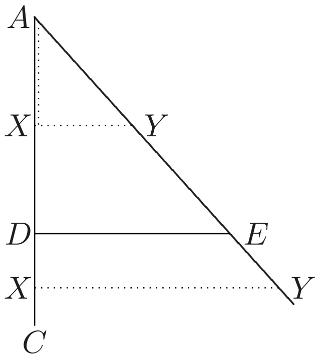
44. Pour y comprendre la Parabole et la ligne droite il faut se servir des lignes infinies et infiniment petites. Or posons que la ligne, q, ou le *latus transversum* de la Parabole soit d'une longueur infinie, il est manifeste, que l'Equation $2axq \ddagger ax^2 \infty qy^2$, sera equivalente à celle cy: $2axq \infty qy^2$, ou $2ax \infty y^2$ (qui est celle de la Parabole) parceque le terme de l'Equation ax^2, est infiniment petit, à l'égard des autres $2axq$, et qy^2, car

4 ou la ligne ABY *erg. L* 7 Car *(1)* si ABY est l'arc d'un Cercle, *(2)* a et q *L* 8 f. le *(1)* diametre *(2)* rayon, *(a)* $\mathrm{DA} - \mathrm{DE} = \mathrm{a} - \mathrm{q}$ *(b)* DA ∞ *L* 11 transversum. *(1)* La même chose estant posée, *(a)* hors mis le signe *(b)* excepté le changement du signe $\ddagger$ *(2)* Mais *L* 12 reste *(1)* estant posé de même l'Eqvation $2\mathrm{ax} + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2 = \mathrm{y}^2$ sera celle *(2)* posé *L* 14 f. XLIV aussi bien qv'à la Parabole et |ligne droite. Triangle *gestr.*| *erg. L* XLIV. Aussy ... Parabole. *erg. Lil* 16 f. infinies *(1)* ou *(2)* et *L* 18 il ... qve *erg. L* 19 (qvi ... Parabole) *erg. L* 20 infiniment *(1)* plus *(2)* petit *L* 20 qy^2 *(1)* car le nombre des lettres des termes estant posé le même *(2)* car *L*

3 $AX \infty x$: In den §§ 43–45 verwendet Leibniz im Konzept zunächst das moderne Gleichheitszeichen, ersetzt es dann aber durch das cartesische.

puisqu'il y a autant de lettres ou dimensions d'un terme, que de l'autre, ceux dont une lettre est infinie, seront infiniment plus grands, que celuy dont les lettres ne sont qu'ordinaires: qui par consequent pourra estre negligé, puisque l'erreur qui en proviendra ne sera qu'infiniment petite, ou moindre qu'aucune erreur donnée, c'est à dire nulle. On voit par là qu'il n'importe point à l'egard de la parabole quelle valeur qu'on donne au signe ǂ puisque son terme evanouit. *Item* que le Parametre de la Parabole icy est $2a$.

XLV. Et au Triangle.



[*Fig. 7*]

45. Enfin à l'egard de la l i g n e d r o i t e on peut concevoir a aussy bien que q infiniment petites, par consequent dans l'Equation: $2ax$ ǂ $\frac{a}{q}x^2 \propto y^2$, le terme $2ax$ evanouira comme infiniment petit, à l'égard de $\frac{a}{q}x^2$ et y^2, et ce qui restera sera $+\frac{a}{q}x^2 \propto y^2$ le signe ǂ estant changé en $+$. Or la raison de deux lignes infiniment petites peut estre la mesme avec celle de deux lignes ordinaires et mesme de deux quarrez ou rectangles, soit donc la raison $\frac{a}{q}$ egale à la raison $\frac{e^2}{d^2}$ et nous aurons $\frac{e^2}{d^2}x^2 = y^2$ ou $\frac{e}{d}x \propto y$ dont

6 item ... 2a. *erg. L* 12 le signe ... en +. *erg. L* 13 et ... rectangles *erg. L* 14 raison *(1)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$, de deux lignes ordinaires b et c, et nous aurons ǂ$\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}\mathrm{x}^2 = \mathrm{y}^2$. ou $\surd$ ǂ $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}, \mathrm{x} = \mathrm{y}$ *(2)* $\frac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{d}^2}$ *L*

14 $\frac{e^2}{d^2}x^2 = y^2$: Leibniz übersieht dieses moderne Gleichheitszeichen sowohl im Konzept als auch in der Reinschrift und ändert es daher nicht in ein cartesisches.

le lieu tombe dans une droite, car posons $d \infty AD$, et $e \infty DE$ en raison sous double de, q et a, et soit decrit le Triangle ADE, soit AD prolongée à l'infini vers C et soit menée XY parallele à DE, il est manifeste qu'$AD \infty d$ est à $DE \infty e$ comme $AX \infty x$, à $XY \infty y$, donc $\frac{d}{e} \infty \frac{x}{y}$ et $\frac{x^2}{y^2} \infty \frac{d^2}{e^2}$, ou $\frac{q}{a}$, donc $x^2a \infty y^2q$ et enfin $\frac{a}{q}x^2 \infty y^2$.

XLVI. Qu'une telle Equation est la clef de toutes les harmonies, et differences des choses.

46. Puisque donc nous avons trouvé une Equation qui explique la nature de la section conique en general, nous pourrons proceder à l'avenir, comme s'il y avoit une certaine figure particuliere dans le monde, qu'on appellat Section Conique, dont les Tangentes, les perpendiculaires, les intersections avec quelque autre ligne, et une infinité d'autres proprietez ou accidens se pourront determiner par un calcul general qui ne sera plus difficil, que si l'on calculoit pour la seule Ellipse. Ce calcul general montrera mesme a la premiere veüe, quand l'interpretation vaudra la peine, c'est à dire si par l'application à une figure particuliere bien de termes evanouiront, et la formule deviendra fort simple: d'ou vient que l'Hyperbole a des Asymptotes que les autres n'ont pas; que la Parabole et la droite n'ont point de Centre, quoyque les autres en ayent, et quantité d'autres diversitez dont la clef est dans le calcul general.

XLVII. Preparation de l'Equation par la Translation des signes.

47. Pour Preparer une Equation à la Resolution, il est bon de la purger des fractions et racines, de la mettre en ordre, et enfin de tacher de l'abbaisser, et pour cet effet on se sert de plusieurs transpositions ou translations sauf l'egalité. Mais je n'y

1 car *(1)* si *(a)* les lignes *(b)* nous posons $\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{e}^2} \infty \frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}$, nous aurons $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{e}} \infty \sqrt{\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{c}}}$ ou les lignes d ∞ AD, et DE ∞ *(2)* posons *L* 2 de *(1)* b et c, ou *(2)* c et b *(3)* a et q *(4)* q et a *L* 2 Triangle | rectangle *gestr.* | ADE *L* 2 f. soit AD ... à DE *erg. L* 3 DE ∞ ⟨e⟩ *(1)* comme *(2)* ou par l'hypothese (q à a) comme d à e, *(3)* comme AX *L* 7 Eqvation *(1)* generale pour expliqver *(2)* qvi *L* 8 une *(1)* seule f *(2)* certaine *L* 11 general *erg. L* 12 calculoit *(1)* par exemple *(2)* pour *L* 17 f. general. | La preparation d'une Eqvation consiste dans sa purgation des Signes radicales et fractions, dans son arrangement | ou transposition *erg.* | et enfin dans sa reduction ou depression. Mais je ne trouue rien de particulier à dire qve sur la Translation des Signes de place en place. *gestr.* | XLVII. *L*

trouve rien de particulier à nostre sujet, que la *Translation des signes de place en place*, sans la grandeur qui en fut affectée. Cela est de grand usage, parce qu'il est bon, ordinairement, d'avoir l'inconnue sans signes ambigus autant que cela se peut, et de transferer l'embarras du costé des grandeurs connues.

Par exemple, soit b la difference entre a, et y, l'equation sera $\mp a \pm y \infty b$ mais nous cherchons la valeur de y, donc je dis que $y \infty \pm b + a$. Cela se peut justifier par les nombres, soit $b \infty 4$ et $a \infty 10$, et $y \infty \left\{ \begin{matrix} 6 \\ 14 \end{matrix} \right\}$ c'est à dire tantost egal à 6, tantost à 14, $b \infty 4$ sera tousjours la difference entre a, et y, ou $\mp 10 \pm y \infty 4$, car si $\mp \infty \left\{ \begin{matrix} + \\ - \end{matrix} \right\}$ alors $\pm \infty \left\{ \begin{matrix} - \\ + \end{matrix} \right\}$ donc $\left\{ \begin{matrix} +\,10 - \;\;\, 6 \infty 4 \\ - \cdots + 14 \infty \cdots \end{matrix} \right\}$ mais si nous posons que y est inconnue, et que nous cherchons sa valeur, nous aurons, $y \infty \pm 4 + 10$, et par consequent, egale à 14 ou 6, c'est à dire ou $-4 + 10, \infty 6$, ou $+4 + 10 \infty 14$.

XLVIII. Demonstration du fondement de toutes ces translations.

48. Mais pour faire voir comment l'Equation $\mp a \pm y \infty b$, se change en celle cy $y \infty \pm b + a$ il faut considerer cette *operation* $\mp a \pm y \infty +b$, donc pour mettre $\mp a$ du costé de b, il faut luy donner le signe opposé, et faire $\pm y \infty +b \pm a$, ou par les regles cy dessus $\pm 1 \frown +y \infty +b \pm a$, donc divisant l'equation par ± 1 nous aurons $+y \infty \dfrac{+b \pm a}{\pm 1}$ ou $+y \infty \dfrac{+b}{\pm 1} + \dfrac{\pm a}{\pm 1}$. Or $\dfrac{+b}{\pm 1}$ fait $\dfrac{+ \pm b}{1}$ et $\dfrac{\pm a}{\pm 1}$ fait $\dfrac{\pm \pm a}{1}$ par une maxime Generale dont nous allons donner la demonstration qu'il n'importe point dans une fraction, si le signe est mis devant le numerateur ou devant le nominateur, ou devant tous deux, c'est à dire devant la fraction mesme; enfin $\dfrac{+ \pm b}{1}$ fait $\pm b$, et $\dfrac{\pm \pm a}{1}$ fait $+a$, par les regles de multiplication données cy dessus, donc nous aurons $+y \infty \pm b + a$.

Pour monstrer la verité de cette maxime susdite, et pour faire voir que $+\dfrac{\mp a}{+b}$ ou $+\dfrac{+a}{\mp b}$ ou $\mp \dfrac{+a}{+b}$ n'est, que la mesme chose, il faut faire $\dfrac{\mp 1, \frown +a}{+1, \frown +b}$, donc $\dfrac{\mp 1}{+1} \frown \dfrac{+a}{+b}$, or $\dfrac{\mp 1}{1}$

2 est *(1)* tousjours bon *(2)* de grand *L* 6 donc *(1)* $\pm$y ∞ b $\pm$ a, et enfin y = *(2)* je *L* 9 nous *(1)* la cherchons *(2)* cherchons *L* 15 donc *(1)* mettant *(2)* pour mettre $\mp$a *L* donc pour | mettre *erg. Hrsg.* | $\mp$a *l* 23 susdite *erg. Lil*

est egal à $\frac{1}{\text{ǂ}1}$, ou à $\text{ǂ}1$ donc $\frac{\text{ǂ}1}{1} \frown \frac{a}{b}$, ou $\frac{+1}{\text{ǂ}1} \frown \frac{a}{b}$ ou $\text{ǂ}1 \frown \frac{a}{b}$ ne sont que la mesme chose, dont la premiere expression fait $\frac{\text{ǂ}a}{b}$, la seconde $\frac{a}{\text{ǂ}b}$, la troisiesme $\text{ǂ}\,\frac{a}{b}$.

XLIX. Necessité de cette translation pour l'extraction des Racines.

49. Cette observation est de grand usage dans tout le calcul de la Methode de l'Universalité, par exemple s'il y a $\text{ǂ}x^2 \infty a^2 \text{ ǂ } b^2$, l'on ne sçauroit en extraire la racine, car ce seroit une erreur d'en faire $\text{ǂ}x \infty \sqrt{a^2 \text{ ǂ } b^2}$, parce que $\text{ǂ}x \frown \text{ǂ}x$, fait $+x^2$, et point, $\text{ǂ}x^2$ afin donc qu'on en puisse extraire la racine, il faut changer $\text{ǂ}x^2 \infty a^2 \text{ ǂ } b^2$, en $x^2 \infty \text{ǂ}a^2 + b^2$, et alors nous aurons $x \infty \sqrt{\text{ǂ}a^2 + b^2}$.

L. Interpretation de l'Ambiguité.

50. L'interpretation des formules ambigues se fait à l'egard des lettres, ou signes. A l'egard des lettres nous pouvons rejetter les grandeurs qui sont

2 f. $\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{b}}$. | Cette observation est fort utile dans le calcul avec des signes ambigus. *gestr.* | XLIX. *L* 5 est *(1)* fort utile *(a)* dans tou *(b)* pour *(c)* à toute l' *(aa)* obs *(bb)* operation avec des signes *(2)* de grand usage dans *(a)* toute la suite du *(b)* l'operation *(c)* tout *L* 10 *(1)* L. de la des-union des lettres pour les transferer en partie avec les signes (50) Il reste seulement à remarqver, qve s'il y a une grandeur faite de la multiplication de plusieurs signes ou lettres, on les peut des-unir, et joindre ensemble les signes et lettres qv'on voudra, ce qvi a souuent des usages considerables: par exemple *(a)* soit *(aa)* $\frac{\text{‡ya}^2 + \mathrm{b^2y}}{\mathrm{c}^2} \infty \frac{-\mathrm{yb}^2 + \mathrm{y}^3}{\mathrm{a}^3}$ fiat $\frac{\text{ǂa} \frown -\mathrm{y}, \mathrm{b}^2}{\mathrm{c}^2}$ *(bb)* $\text{‡ya}^2 + \mathrm{b^2y} \infty -\mathrm{yb}^2+$ *(aaa)* y^3 fiat $\text{ǂa}^2 \frown -\mathrm{y}, +\mathrm{b^2y} \infty -\mathrm{yb}^2 + \mathrm{y}^3$, dividendoqve omnia per $-\mathrm{y}$, fiet $\text{ǂa}^2 - \mathrm{b}^2 \infty \mathrm{b}^2 + \mathrm{y}^2$ *(bbb)* a^3 soit changé ‡ya^2, en $\text{ǂa}^2 \frown -\mathrm{y}$, et l'eqvation divisé par $-\mathrm{y}$ il en proviendra $\text{ǂa}^2 - \mathrm{b}^2 \infty \mathrm{b}^2 - \frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}}$, ou *(aaaa)* $\text{ǂa}^2 - 2\mathrm{b}^2$ *(bbbb)* $2\mathrm{b}^2 \text{ ‡ } \mathrm{a}^2 \infty \frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{y}}$, ou $\mathrm{y} \infty \frac{\mathrm{a}^3}{}$ *(b)* $\frac{\text{‡ya}^2 + \mathrm{b^2x^2}}{\mathrm{b}^2} \infty \text{ ‡ } \frac{\mathrm{yb}^2}{\mathrm{a}^2}$ soit changé en $\text{ǂ}\,\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} \frown -\mathrm{y}, +\mathrm{x}^2 \infty \text{ǂ}\,\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2} \frown -\mathrm{y}$

---

9 $\sqrt{\text{ǂ}a^2 + b^2}$: Die allgemeine Lösung für x wäre in Leibniz' Notation $(\text{ǂ})\sqrt{\text{ǂ}a^2 + b^2}$.
19–108,22 Sehr stark redigierter und schließlich verworfener Abschnitt im Konzept: Die Rechnungen bleiben fehlerhaft oder brechen ab. Von ihren Varianten kann hier nur eine Auswahl wiedergegeben werden.

infiniment petites, au prix des autres; mais il y a des grandes precautions à prendre la dessus; car par exemple la valeur generale de x ou de l'Abscisse de l'Axe depuis le sommet, par l'ordonnée de la section conique, est $\mp\sqrt{q^2 \mp \frac{q}{a}y^2} \pm q$. Or $\frac{q}{a}y^2$, est infiniment petit à l'égard de q^2 donc le negligeant, nous aurons $x \infty \mp\sqrt{q^2} \pm q$ ou $x \infty 0$ ce qui est bien vray à l'égard du q, qui est infini, mais il est de nul usage, donc il faut se garder de rejetter quelque chose, avant qu'avoir nettoyé l'equation des fractions et racines sourdes si elles comprennent la lettre infinie ou infiniment petite.

LI. L'Ambiguité est ou Equivocation ou bien Univocation c'est à dire Universalité.

51. A l'égard des signes, l'interpretation doit delivrer la formule de toute l'equivocation. Car il faut considerer que l'ambiguité qui vient des lettres donne une Univocation ou Universalité mais celle qui vient des signes produit une veritable equivocation de sorte qu'une formule qui n'a que des lettres ambigues, donne un theoreme veritablement general, mais quand il y a des signes ambigus, il n'est universel qu'en apparence, et à l'égard de l'uniformité du calcul. Donc l'interpretation doit delivrer la formule des signes ambigus, ce qu'elle fait ou en particularisant la formule, et en substituant la valeur des signes ambigus d'un cas particulier donné a leur place, ou en faisant evanouir les signes ambigus sauf l'universalité. La premiere sorte d'interpretation est sans aucune façon ny difficulté, mais l'autre est aussy subtile qu'importante, car elle nous donne le moyen

et divisant tout par $\mp\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$ vous aurez $-\mathrm{y}$ *(c)* soit l'eqvation $\pm\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{y}^3+\mathrm{yc}^4}{\mathrm{b}^2} \infty$ *(d)* soit | l'eqvation, *gestr.* | $\frac{\pm\mathrm{y}^3\mathrm{a}^2+\mathrm{b}^4\mathrm{y}}{\mathrm{b}^2} \infty \frac{\pm\mathrm{y}^3\mathrm{b}^2+\mathrm{c}^5}{\mathrm{a}^2}$: changée en $-\mathrm{y}^3 \frown \mp\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2} + \mathrm{b}^2\mathrm{y} \infty -\mathrm{y}^3 \frown \mp\frac{\mathrm{b}^2}{\mathrm{a}^2} + \frac{\mathrm{c}^5}{\mathrm{a}^2}$, qvi sera divisée par $\mp\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^2}$, et nous aurons, $-\mathrm{y}^3 \mp \frac{\mathrm{b}^4\mathrm{y}}{\mathrm{a}^2} \infty -\mathrm{y}^3 \mp \frac{\mathrm{c}^5\mathrm{a}^2}{\mathrm{b}^4}$ ou $\mathrm{y} \infty \frac{\mathrm{c}^5\mathrm{a}^4}{\mathrm{b}^8}$ *(2)* | L. Interpretation de l'Ambiguité *erg. Lil* | (50) L'interpretation *L* 107,11 ambigues *(1)* trouuées consiste dans *(2)* se peut faire de deux façons, en *(3)* se fait *L* 1 petites, à l'egard des autres *l, ändert Lil* 2 generale *erg. L* 3 infiniment *L* infinement *l, ändert Hrsg.* 7 infiniment *L* infinement *l, ändert Hrsg.* 8 f. LI. L'Ambiguité ... Universalité *erg. Lil* 10 l'interpretation *(1)* consiste dans l' *(2)* doit *L* 15 l'interpretation *(1)* est de deux façons en *(2)* qvi oste les si *(3)* doit *l* 18 premiere *(1)* ⟨façon⟩ *(2)* sorte *L*

3–5 Or ... infini: Leibniz erörtert hier den Fall der Parabel. In ihm ist q unendlich groß.

de faire des theoremes, et des constructions absolument universelles, et de trouver des proprietez generales, et mesme des definitions ou genres subalternes communs à toute sorte de choses, qui semblent bien éloignées l'une de l'autre: Il est vray que la construction ou enunciation d'un probleme ou theoreme devient plus composée par ce moyen, au lieu que l'autre interpretation qui particularise les cas la laisse telle qu'elle est. Mais en recompense, celle cy nous donne des lumieres considerables pour l'harmonie des choses.

LII. Moyen de trouver des Theoremes ou Constructions absolument universelles, sans equivocation.

52. Le fondement de l'art de trouver des formules absolument universelles consiste en ce que les signes ambigus homogenes se détruisent en se multipliant ou divisant; cette observation me fit naistre la pensée d'essayer si une formule ambigue se pourroit nettoyer entierement de toute l'equivocation, en quoy j'ay reussy à la fin: pour cet effet il faut remarquer que bien souvent dans une equation ou formule sans ambiguité, il en peut naistre une, quand une grandeur polynome peut avoir des racines exprimables, mais differentes, par exemple $a^2 - 2ba + b^2$ a pour racine la difference entre b et a c'est à dire $\mp a \pm b$. Mais quand les racines sont inexprimables, comme si l'equation estoit $z^3 - bz + q \infty 0$ elle demeurera sans amphibolie malgré nous, par ce que nous n'en sçaurions extraire la racine, et les courbes dont nous nous servirons pour la construire par leur differentes intersections suppleeront à ce defaut et determineront toutes les racines possibles. Or comme dans un calcul qui n'a rien d'amphibole donné, les extractions des racines quand elles sont exprimables en peuvent faire naistre; de mesme quand il y a des equivocations, les multiplications des grandeurs par elles mesmes, en substituant les quarrez à leur place, peuvent faire evanouir les amphibolies: car il est manifeste, que $\mp a \pm b$ estant quarré, donne $+a^2 - 2ab + b^2$. Mais on voit aussy que pour faire evanouir les equivocations par ce moyen il faut hausser les degrez des equations, quand l'inconnue y est comprise, donc il est important d'y joindre d'autres moyens, qui servent à la mesme fin: Car quoyque les amphibolies ne naissent que par l'extraction des racines;

2 proprietez *(1)* ge⟨ner⟩ales a toutes sortes de figures *(2)* co⟨mmunes⟩ *(3)* generales *L* 3 vray qve *(1)* cette interpretation rend plus *(2)* la construction *L* 6 nous *L, fehlt l, erg. Hrsg.* 6 lumieres *(1)* importantes *(2)* considerables *L* 7 f. LII. Moyen ... eqvivocation *erg. Lil* 10 les *(1)* figures homo *(2)* signes *L* 11 pensée *(1)* de tacher de purger l'eqvation *(2)* d'essayer *L* 15 $\mathrm{a}^2 - 2\mathrm{ba} + \mathrm{b}^2$ radicem habet differentiam inter b et a seu $\mp\mathrm{a} \pm \mathrm{b}$ *L, l ändert Lil* 25 f. eqvations *(1)*. De sorte qv'a *(2)* | qvand ... comprise, *erg.* | Donc *L*

elles evanouissent pourtant bien souvent sans multiplication d'une mesme grandeur par elle mesme (: par exemple $\mp a \frown \pm b$ donne $-ab$:) et mesme sans aucune multiplication, car $\dfrac{\mp a}{\pm b}$, donne $-\dfrac{a}{b}$. Donc il faut tacher de profiter de ces moyens s'il est possible, avant que de venir à la multiplication de la grandeur par elle mesme.

[LIII.]

53. Pour en donner un exemple, voyons s'il est possible, de trouver une notion absolument universelle, de toutes les Sections Coniques, sans aucune amphibolie, afin que nous puissions dire d'avoir trouvé une definition de la section conique en general, sans mention du cone. L'equation generale ambigue est

$$2ax \mp \frac{a}{q}x^2 - y^2 \infty 0$$

$$\text{donc} \qquad \mp \frac{a}{q}x^2 \infty y^2 - 2ax$$

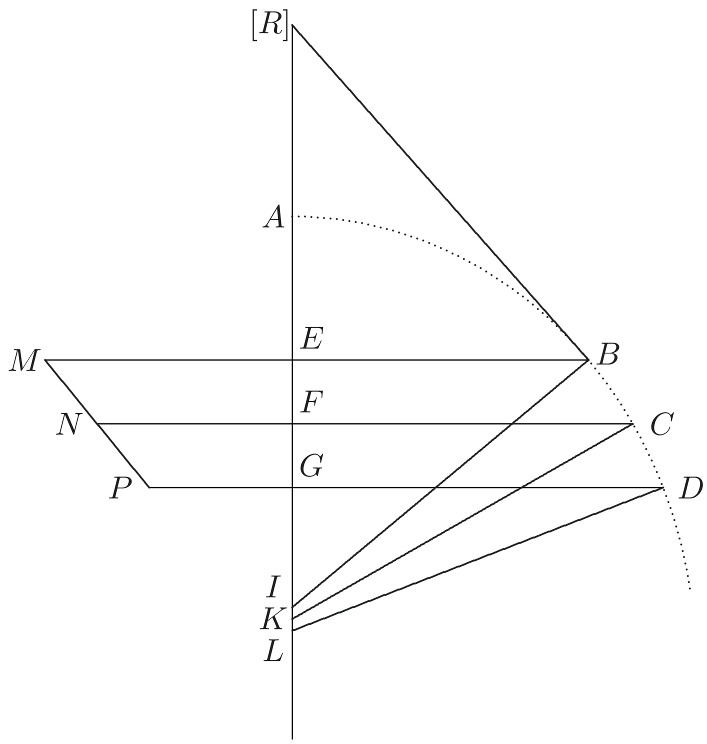
$$\text{et} \qquad \frac{a^2}{q^2}x^4 \infty y^4 - 4axy^2 + 4a^2x^2$$

eritque haec Sectionum conicarum definitio generalis, sive proprietas essentialis, ut quadratum ordinatae dempto quadruplicato rectangulo sub latere recto et abscissa sit ad quantitatem, quadrati abscissae in duplicata ratione lateris recti ad transversum multiplam, demto quadruplicato quadrato lateris recti; ut quadratum abscissae est ad quadratum ordinatae.

12 $+4\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2$ | vel $\dfrac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{x}^4 - 4\mathrm{a}^2\mathrm{x}^2 \infty \mathrm{y}^4 - 4\mathrm{axy}^2$, vel $\dfrac{\frac{\mathrm{a}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{x}^2 - 4\mathrm{a}^2}{\mathrm{y}^2} \infty \dfrac{\mathrm{y}^2 - 4\mathrm{ax}}{\mathrm{x}^2}$ *gestr.* | *L* 13 Conicarum *(1)* proprietas generalis *(2)* definitio ... essentialis *L* 15 abscissa *(1)* ⟨—⟩ sit ad ⟨qvadratum abscissae ut ——⟩ *(2)* sit *L* 16 f. transversum | multiplam *erg.* | demto | qvadruplicato *fehlt l, erg. Hrsg.* | qvadrato *L* 18 ut qvadratum ordinatae est ad qvadratum abscissae *L, l ändert Hrsg.*

5 [LIII.]: Sowohl im Konzept als auch in der Reinschrift fehlen zusammenfassende Randbemerkungen zu den drei letzten Abschnitten.

[LIV.]



[*Fig. 8*]

54. Bien souvent nous trouvons des theoremes absolument universels sans faire evanouir les signes ambigus, par exemple: soit une section conique $ABCD$ dont l'axe AE, et les ordonnées BE, CF, DG, les perpendiculaires BI, CK, DL; soient transferées EI, à EM, et FK, à FN, et GL, à GP, c'est à dire soient les distances entre les perpendiculaires, et ordonnées prises dans l'axe, appliquées à l'axe de sorte qu'elles tombent *in directum* chacune avec l'ordonnée qui luy répond, je dis que le lieu des points M, N, P, etc., est une ligne droite. Mons. Hugens a observé desja ce theoreme dont

3 absolument *erg. L* 3 f. evanouir *(1)* l'eqvivocation *(2)* les *L* 7 ordonnées à l'axe *L, l, ändert Lil* 7 l'axe *(1)* paralleles entre elles; et aux ordonnées *(2)* de sorte *L* 7 f. tombent *(1)* dans l'axe prolo *(2)* in directum *(a)* avec l'ordonnée de qvi *(b)* chacune *L* 8 dis qve *(1)* ces points M. N. P etc. tombent tous dans *(2)* le lieu *L*

9 ligne droite: Chr. HUYGENS, *Horologium oscillatorium*, 1673, S. 84f. (*HO* XVIII S. 230–233).

je donne icy une demonstration universelle par le calcul des tangentes: Car l'equation generale (quoyque amphibole) de toutes les sections coniques est $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \infty y^2$, donc par la methode des tangentes $2ar \ddagger 2\frac{a}{q}xr \infty 2y^2$, si r est posé ∞ ER, distance de la tangente et de l'ordonnée prise dans l'axe, par consequent $ar \ddagger \frac{a}{q}xr \infty 2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2$, donc $r \infty \dfrac{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}{a \ddagger \frac{a}{q}x.}$, or $EB^2 \infty 2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2$ est moyenne proportionnelle entre $ER \infty r$, et EI, que nous appellerons p et dont nous cherchons la valeur ou le lieu, donc

$$2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \infty \frac{2axp \ddagger \frac{ap}{q}x^2}{a \ddagger \frac{a}{q}x}, \text{ et } p \infty \frac{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}{r \infty \dfrac{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}{a \ddagger \frac{a}{q}x}}, \text{ ou } p \infty a \ddagger \frac{a}{q}x$$

or il est manifeste que le lieu de toutes les, $a \ddagger \frac{a}{q}x$, est une ligne droite, ce qu'il falloit demonstrer.

[LV.]

55. Avant que de quitter ce poinct, il faut remarquer l'usage que le *V i n c u l u m* a icy, soit une Equation $\ddagger a \infty \sqrt{a^2 - x^2} \ddagger y$; donc faisons $\overline{\ddagger + a - y} \infty \sqrt{a^2 - x^2}$, et nous aurons $+2ya - y^2 \infty x^2$ et par consequent le lieu de cette Equation est un cercle, non obstant Amphibolie quelconque. Mais en rangeant les termes autrement nous n'en aurions pas esté quitté à si bon marché.

4 l'axe ou *L, ändert Lil* 4–13 ar $\ddagger \frac{a}{q}$xr . . . cercle *L, fehlt l, erg. Lil* 5 or EB $\infty \sqrt{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2}$ *L, ändert Lil* 6 et . . . lieu, *fehlt L, erg. Lil* 11 l'usage *(1)* qve *(2)* du Vinculum en cette matiere *(3)* qve *L* 12 $\ddagger$a $\infty \sqrt{a^2 - x^2}$ | $\ddagger$ *ändert Hrsg.* | y *L, Lil* 13 aurons | $a^2 - 2ya + y^2 \infty a^2 - x^2$, ou *gestr.* | +2ya *L* 14 f. non . . . marché *fehlt L, fehlt l, erg. Lil*

11. DE LA MÉTHODE DE L'UNIVERSALITÉ II
[Juni 1674]

Überlieferung: *L* überarbeitete Reinschrift: LH 4 V 10 Bl. 25–38. 7 Bog. 2°. 28 S. — Gedr.: Couturat, *Opusc. et fragm.*, 1903, S. 122–143 (tlw. = S. 113 Z. 8 – S. 115 Z. 18, S. 116 Z. 11–24, S. 118 Z. 11 – S. 134 Z. 4 u. S. 136 Z. 9 – S. 141 Z. 14 unseres Textes).
Cc 2, Nr. 863 C

Datierungsgründe: Vgl. N. 10.

De la Methode de l'Universalité

La Methode de l'Universalité nous enseigne de trouver par une seule operation des formules Analytiques et des constructions Geometriques generales pour des sujets ou cas differents dont chacun sans cela auroit besoin d'une analyse ou synthese particuliere.

Par Exemple soit un Probleme proposé, sçavoir: d'un point donné *D*. mener une perpendiculaire *DB*, à une section conique donnée, *ABC*. On voit bien que ce probleme est susceptible d'une grande variation, tant à l'égard de la ligne ou section donnée qu'à l'egard des differents endroits du poinct *D*. Car quant à l'égard de la section ou ligne *ABC* donnee, elle peut estre, droite, ou circulaire, ou Parabolique, ou Elliptique, ou Hyperbolique, et à l'egard des lieux du point donné, *D*, il est manifeste, que ce lieu peut tomber ou en 1*D* au dessus du sommet de la ligne sçavoir au dessus du poinct *A*, ou en 2*D* vis a vis du dit sommet, ou en 3*D*, entre le sommet

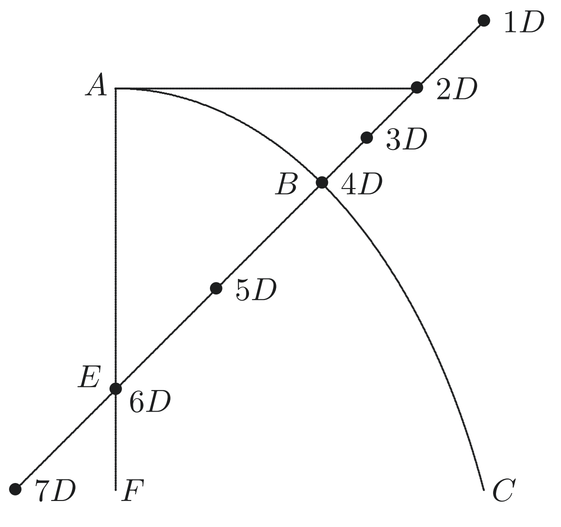


fig. 1.

9–12 La Methode ... particuliere: Der einführende erste Satz entspricht demjenigen von Stück N. 10.

et le poinct B, où la perpendiculaire doit rencontrer la courbe; ou en $4D$, dans la courbe même, de sorte que les points D et B alors reviennent à un seul, ou en $5D$, entre la courbe ABC, et l'Axe AF, ou en $6D$ dans l'axe même, ou enfin en $7D$ de l'autre costé de l'axe.

Toutes ces lignes, et tous les endroits du point D de chaque ligne, ont besoin d'un calcul apart, car par exemple la ligne estant droite ou circulaire, *item* le point D, tombant dans l'axe, ou dans la courbe, le probleme est plan, quoyque il soit solide estant pris generalement. Or il y a 5 lignes differentes et 7 endroits differents du poinct D. Par consequent il y a 35 calculs differents à faire, pour donner une solution parfaite du probleme proposé. Et neantmoins je pretends de les comprendre tous dans un seul calcul qui ne sera pas plus difficil que celuy du plus difficil de ces 35 cas.

Mais a fin qu'on ne prenne pas sujet de chicaner sur ces 35 cas ou calculs differents; j'avoue qu'on les peut reduire a 20. en prenant tous les cas de la ligne droite pour un seul et de meme tous les cas du Cercle pour un autre: car on peut tousjours conceuvoir que le point donné tombe dans l'axe de la section, si elle est un cercle, ou une droite. En voila donc 2 cas. Or il y restent trois figures, la Parabole, l'Hyperbole, et l'Ellipse (: quoyqu' on auroit peut estre raison de separer l'Hyperbole dont *latus rectum* et *transversum* sont égaux, de l'autre, aussi bien que le cercle est consideré separé de l'Ellipse :) et il y a 6 endroits des points à considerer, (1) le 1., (2) le 2., (3) le 3$^{\text{me}}$ ou 5$^{\text{me}}$ (: car je montreray plus bas, que ces deux cas n'ont qu'un seul calcul, selon même la maniere ordinaire de calculer :) (4) le 4$^{\text{me}}$, (5) le 6$^{\text{me}}$, (6) le 7$^{\text{me}}$. Or trois fois six joints a 2 font 20. Et je croy qu'il est assez important de reduire 20, ou si vous voulez 18 calculs, à un seul.

On peut juger par la que l'usage de la Methode de l'Universalité s'etend aussi loin que l'Algebre ou l'Analyse, et qu'elle se repand par toutes les parties des mathematiques pures ou mixtes. Car il arrive tous les jours, qu'un même probleme est de plusieurs cas, dont la multitude embarasse beaucoup, et nous oblige à des changements inutils et à des repetitions ennuyeuses dont cette methode nous garantira à l'avenir. Or comme toutes les propositions des sciences Mathematiques mixtes, peuvent estre purgées de la matiere par une reduction a la pure geometrie, il suffit d'en monstrer l'usage dans la Geometrie, qui revient à deux poincts, comme l'exemple susdit le fait juger, sçavoir premierement à la reduction de plusieurs cas differents d'un probleme a une seule

12–22 Mais ... la *(1)* droite *(2)* section ... bas, *(a)* qve leur calcul revient a ⟨m⟩ *(b)* qve ... 20. | Et *erg.* | je croy *(aa)* pourtant *(bb)* qv'il est assez | important *erg.* | de ... seul *erg. L* 31 d'un probleme *erg. L* formule, regle, equation ou construction, et e n s e c o n d l i e u a la reduction des figures differentes à une harmonie, ou conformité, à fin qu'on les puisse traiter comme une seule figure. Car pour les Sections Coniques je soûtiens qu'on les peut considerer comme s'il y avoit une seule figure dans le monde, dont le nom soit, S e c t i o n C o n i q u e. Et je pretends de reduire de même en harmonie quelques autres figures qu'on me donne, quoyque de differens degrez, et quoyque la nature de l'une soit bien éloignée de la nature de l'autre; pour trouver une certaine notion commune, et comme genre subalterne, qui comprenne toutes ces lignes données, et pour découvrir par ce moyen en elles des proprietez communes, des constructions generales, et des belles harmonies, conveniences ou differences, dont la clef sera tousjours dans le calcul general, qui les fera paroistre à la premiere veue.

Le premier de ces deux poincts diminue la peine, l'autre outre cela augmente la science. Car si avec le temps la Geometrie des infinis pouvoit estre rendue un peu plus susceptible de l'analyse, en sorte que les Problemes des quadratures, des centres de gravité, et des dimensions des lignes ou surfaces courbes se peussent resoudre par le moyen des Equations, comme il y a lieu d'esperer, quoyque Mons. des Cartes n'ait pas osé d'y aspirer; on tireroit un grand avantage de l'harmonie des figures, pour trouver les dimensions des unes aussi bien que des autres.

Il est vray que Messieurs des Argues et Pascal ont cru de pouvoir reduire les Sections Coniques en harmonie: mais outre que leur methode est bornée, et ne depend, que des proprietez particulieres des Coniques elle est aussi extremement embarassante, par ce qu'il faut tousjours demeurer dans le solide, et bander l'esprit par une forte imagination du cone. Je croy même qu'on auroit bien de la peine a resoudre universellement par ce moyen des problemes difficiles, à moins qu'on ne les trouve comme par hazard, *a p r i o r i* , par le moyen d'un theoreme demonstré ailleurs. Au lieu qu'il n'y a rien qui

3 je *(1)* pretends *(2)* croy *(3)* soûtiens *L* 7 f. qvi *(1)* les comprenne toutes, et *(2)* comprenne *L* 9 des *(1)* harmonies *(2)* belles harmonies *L* 10 general, *(1)* et se déc *(2)* qvi les fera *(a)* découurire *(b)* paroistre *L* 22 et *(1)* ⟨—⟩ *(2)* bander *L*

16 des Cartes: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39. 19–116,10 Il . . . l'imagination: Bis auf drei geringfügige Änderungen stimmt dieser Abschnitt wörtlich mit N. 10 §§ 3–4 überein.
19 Messieurs: Zu den Kegelschnittlehren von Desargues und Pascal sowie der Kritik an ihnen vgl. die Anmerkung zu N. 10 S. 77 Z. 8.

puisse echapper à nostre methode, qui a cela de commun avec les autres parties de l'analyse, qu'elle épargne l'esprit et l'imagination dont il faut sur tout ménager l'usage.

C'est le but principal de cette grande Science que j'ay accoustumé d'appeller *Caracteristique*, dont ce que nous appellons l'Algebre n'est qu'une branche fort petite. Car c'est la Caracteristique qui donne les paroles aux langues, les lettres aux paroles, les chiffres à l'Arithmetique, les notes à la Musique: c'est elle qui nous apprend le secret de fixer le raisonnement, et de l'obliger à laisser comme des traces visibles sur le papier en petit volume, pour estre examiné à loisir: c'est enfin elle, qui nous fait raisonner à peu de frais, en mettant des caracteres à la place des choses, pour des-embarasser l'imagination.

Mais quoyque il semble que les caracteres soient arbitraires, il y a pourtant bien de regles à observer pour rendre les dits caracteres propres à l'usage; comme par exemple je montreray plus bas qu'il ne faut point de caractere particulier pour marquer la *difference* entre deux grandeurs, et qu'il nuit au lieu de servir, quoyque Mons. Schoten et d'autres l'ayent employé.

Or avant que de venir à l'Exposition de la Methode même, je me trouve obligé d'avouer que les preceptes de cette nature sont plus propres à estre expliquées de vive voix que par ecrit; et qu'il faut un peu de meditation pour les entendre par la seule lecture, mais en recompense on les comprendra bien mieux apres cette petite peine. Au reste je suppose que mon lecteur entende la Geometrie, et l'Algebre ou Analyse ordinaire, et comme il y a une grande varieté dans l'usage des caracteres, à fin d'eviter l'obscurité dans la suite, je trouve à propos d'expliquer icy les miennes dont je me sers, jusque à ce que la commodité publique, et l'autorité de quelques Grands Geometres se declare hautement pour quelques autres.

13 bas *(1)* qve la caractere d *(2)* qv'il ... caractere | particulier *erg.* | pour *L* 17 d' *(1)* admoneter *(2)* avouer *L* 21 f. à fin d'eviter | *(1)* l'ambiguité *(2)* l'obscurité | dans la suite, *erg. L* 23 f. se declare | hautement *erg.* | pour *(1)* l'une ou l'autre de *(2)* tant de different *(3)* des autres *(4)* qvelqves autres *L*

---

15 Schoten et d'autres: Das Zeichen = für die Differenz wird bereits von Viète so eingeführt: *In artem analyticem isagoge*, 1591, Bl. 5 v° (*VO* S. 5). Schooten verwendet es im *Additamentum*, 1659, *DGS* I S. 395 sowie in den *Principia matheseos universalis*, 1661, *DGS* II S. 4.

$a \sqcap b$	signifie a egal à b
$a \sqcap b$	signifie qu'a est plus grand que b
$a \sqcap b$	signifie qu'a est moindre que b
$a + b$	signifie a plus b ⟨ou⟩ l'addition
$a - b$	signifie a moins b ou la soubstraction
$a \frown b$ ou ab	signifie a multiplié par b
$a \smile b$ ou $\frac{a}{b}$	signifie la division de a, par b *item* la raison de a, à b dont a soit l'antecedent, b le consequent
$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$	signifie, que $\frac{a}{b}$, est divisé par c, ou il signifie $\frac{a}{b} \smile c$
$\dfrac{a}{\frac{c}{d}}$	signifie que a est divisé par $\frac{c}{d}$ ou il signifie $a \smile \frac{c}{d}$
$\dfrac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}$	signifie que $\frac{a}{b}$, est divisé par $\frac{c}{d}$, ou $\frac{a}{b} \smile \frac{c}{d}$
$a \,.\, b : c \,.\, d$	signifie $\frac{a}{b} \sqcap \frac{c}{d}$, c'est à dire que la raison d'a à b est la même avec la raison de c, à d
$\sqrt{}ab + b$	signifie b, plus la racine quarrée de ab
$\sqrt{ab + b}$	signifie la racine quarrée de $ab + b$
$\sqrt{}(4)ab^3$	signifie la racine quarre-quarrée, de ab^3
$\sqrt{}(5)a^2b^3$	.... surdesolide de a^2b^3
$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}$	signifie a, ou b
$+a+b$ $+c$	signifie $a+b+c+b$, car les poincts me signifient la repetition de ce qui est immediatement au dessus d'eux

19 me *erg. L*

$a \frown c + b$	signifie $ac + b$, c'est à dire a multiplié par c, et b adjouté au produit
$a, \frown c + b$	signifie $ac + ab$, c'est à dire $c + b$ multiplié par a
$a + d, \frown c + b$	.... $ac + dc + b$, ... $a + d$, multiplié par c, et b adjouté au produit
$a + d, \frown \llcorner c + b \lrcorner$	$ac + dc + ab + db$, ... $a + d$, multiplié par $c + b$
$\left.\begin{array}{l} y \\ x \end{array}\right\}$	ne signifieront que les inconnues
a + b , □	signifie $a + b$, multiplié par luy même
$\dfrac{\begin{array}{l} +a \quad y \\ +b \\ -c \end{array}}{d}$	signifie $\dfrac{ay}{d} + \dfrac{by}{d} - \dfrac{cy}{d}$
a^b	signifie une puissance de a dont l'exponent, est b et si b est egal à 3 ce sera a^3, c'est pourqouy il est tousjours bon d'écrire l'exponent un peu au dessus de la racine, c'est à dire a^3 plus tost que $a3$

Maintenant pour expliquer ce que la Methode de l'Universalité adjoute à l'Analyse Ordinaire, il ne faut que donner les Instruments nouveaux dont elle se sert, avec leur Usage. Ces Instruments sont les Caracteres Ambigus, qui sont ou Signes ou Lettres, car les lettres expriment les grandeurs, et les signes font connoistre la relation des grandeurs entre elles. Les Signes Ambigus sont qui marquent ou l'Addition, ou la Soubstraction. Il est vray qu'on en pourroit aussi faire utilement pour marquer la multiplication, la division, et l'extraction des racines, mais je n'en trouve point d'usage pour le present dessein.

Or à fin de venir a une parfaite connoissance de l'origine des dits signes ambigus, il faut supposer une certaine grandeur dont la valeur ou signification soit expliquée par deux ou plusieurs equations; mais qui ne soient differentes entre elles, qu'a l'egard des signes; et comme il y peut avoir tantost deux Equations ou ambiguitez seulement, tantost plusieurs, les signes aussi qui les comprennent et qui les expriment dans une seule Equation ambigue seront ou simples ou composés.

Mais comme ces choses ne sont gueres intelligibles sans figures et exemples soit une ligne droite indefinie dans la quelle doivent tomber trois points A. B. C. et la ligne AC,

20 une *(1)* même grandeur expliqvé *(2)* certaine *L* 20 ou signification *erg. L* 22 avoir *(1)* ou deux Eqvations seulement, ou plusieurs *(2)* tantost *L*

soit considerée comme inconnue, et sa valeur expliquée par le moyen de deux autres lignes AB, et BC; or ces trois points peuvent estre rangez differemment et a fin d'avoir un denombrement plus aisé de ces diversitez considerons deux de ces p o i n t s par exemple A, et B comme f i x e s et immuables et le troisieme C, comme a m b u l a t o i r e ou mobile; car comme en matiere de mouvement, de même icy le changement est une chose relative, et il nous est permis de prendre pour fixes ceux que nous voudrons. Or si le point ambulatoire C ne peut avoir que deux endroits seulement sçavoir l'un entre A et C, l'autre au de la de B, de sorte que B tombe entre A et luy, il y aura aussi deux cas particulier[s] seulement, et il y aura autant d'ambiguitez ou equations particulieres pour exprimer la valeur d'une de ces trois lignes AB,BC, AC, par le moyen des deux autres. Car si AC est considerée comme inconnue, dont nous cherchons la valeur il est visible que selon le premier cas AC est égale à AB, moins BC, et selon le second cas, AC, est egale à AB plus BC et ces deux Equations particulieres nous donneront une generale ambigue, AC egale à AB plus ou moins BC. Par consequent au lieu

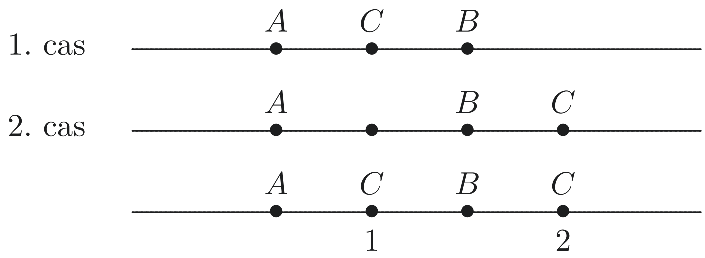


fig. 2.

de l'Equation du 1. cas	$AC \sqcap AB - BC$
ou 2	$AC \sqcap AB + BC$
nous formerons une generale ambigue,	$AC \sqcap AB$ ǂ BC.

Et par consequent le premier signe simple ambigu sera ǂ, c'est a dire $-$, ou $+$.

Soit maintenant une certaine grandeur affectée du signe ǂ, par exemple ǂ a, c'est à dire: 0 ǂ a car puisque $+$ aussi bien que $-$, signifie une Relation entre deux, et qu'il n'y a qu'une seule grandeur a, l'autre sera 0 ou rien: supposons donc que la dite grandeur ǂ a, doit estre adjoutée à une autre b, le produit sera $b +$ ǂ a ou b plus ǂ a, c'est à dire b ǂ a, car le signe $+$ ne change point les autres signes: mais à present supposons que la dite grandeur ǂ a, doit estre soubstraite d'une autre b, le Produit sera $b -$ ǂa, ou b moins ǂa. Et par ce que cela arrive bien souvent, je trouve à propos d'employer un seul signe,

2 BC; *(1)* mais *(2)* or *L* 3 f. par ... et B *erg. L* 5 de même icy *erg. L* 23 f. ou +. | Jusqve à la je crois de n'avoir rien dit qve de tres clair. *gestr.* | Soit *L* 26 supposons *(1)* a present *(2)* donc *L* 27 sera *(1)* b ǂ a *(2)* b + ǂa | ou b plus ǂa *erg.* |, c'est *L* 30 à propos *(1)* de faire *(2)* d'employer *L*

‡ au lieu de ces deux − et ǂ joints ensemble, et le produit susdit sera *b* ‡ *a*, et ‡ vaudra −ǂ.

Et generalement j'observeray cette regle, qu'un signe ambigu insistant sur un −, aura une signification contraire à celle qu'il auroit sans cela, ou que le signe avec le − au bas du caractere signifiera moins le même sans −. Par exemple $^+$‡ (que nous expliquerons cy après :) signifiera −$^+$ǂ.

Par consequent si dans une meme formule ou Equation ces deux signes opposés se trouvent à la fois, comme par exemple ǂ*a* ‡ *b* ⊓ *c*, et que cette formule vienne a estre expliquée ou appliquée à un certain cas particulier, ou ǂ signifie par exemple +, alors ‡ s'expliquera aussi et signifiera −. Et si ǂ signifie − dans le cas particulier dont nous avons besoin, ‡ signifiera + et suivant cette explication on peut dire que si ǂ signifie + ou −, ‡ signifiera − ou + ; et *vice versa*.

Pour l'appliquer à l'exemple susdit considerons les deux Equations particulieres, et leur generale, où la ligne *AC*, est supposée comme inconnue, et expliquée par le moyen des lignes, *AB* et *BC*. A present servons nous de la transposition selon les loix de l'Algebre ordinaire, et transferant *BC*, du costé de *AC*, tachons d'expliquer *AB* supposée maintenant comme inconnue, par le moyen des deux autres, *AC*, et *BC*.

Et l'Equation du 1. cas *AC* ⊓ *AB* − *BC* nous donnera *AC* + *BC* ⊓ *AB*
.... 2. .... *AC* ⊓ *AB* + *BC* .... *AC* − *BC* ⊓ *AB*
Et l'Equation generale, *AC* ⊓ *AB* ǂ *BC* .... *AC* ‡ *BC* ⊓ *AB*,

et il ne faut qu'appliquer ces Equations aux lignes cy dessus pour en voir clairement la verité.

Et à fin qu'on ne croye pas d'avoir besoin encor d'un troisiesme qui signifie −‡, il faut considerer que −‡ vaut − − ǂ, c'est a dire simplement ǂ parce que − moins, signifie +.

Ces signes simples ǂ, et ‡ sont suffisants pour exprimer toutes les ambiguités simples, où l'Equation ambigue ne comprend que deux particulieres, quoyque il y en ait encor

3 ambigu *(1)* portant un − au bas *(2)* insistant *L* 4 f. le − | au bas du caractere *erg.* | signifiera *(1)* − le signe *(2)* moins *L* 12 ; et vice versa *erg. L* 13–15 les *(1)* trois Eqvations *(2)* deux ... ou | la ligne *erg.* | AC, est | supposée comme inconnue, et *erg.* | expliqvée ... moyen *(a)* de AB et BC *(b)* des lignes *L* 16 f. supposée *(1)* a present *(2)* maintenant *L* 25 f. signifie +. | Il y a encor d'autres exemples des ambiguitez simples. *gestr.* | Ces *L* 26 et ‡ *(1)* suffisent pour toutes *(2)* sont *L*

d'autres exemples differents de ceux que je viens de rapporter; et pour en faire voir l'application, soit comme au paravant une ligne droite indefinie dans la fig. 3, dans la quelle tombent trois points A. B. C. Dans l'exemple cydessus nous avions pris un certain point pour ambulatoire, icy nous donnons à deux B et C la liberté de se remuer, mais à condition de ne souffrir jamais que le point A se mette entre eux. Je trouve pourtant qu'on le peut expliquer avec plus de netteté et de rapport au premier exemple, en ne supposant qu'un seul point ambulatoire A qui se mette tantost a droit, tantost a gauche de la ligne BC dont les deux points sont considerez fixes; sans permission neantmoins de se mettre entre ces deux points B et C, comme la 4me figure le fait voir.

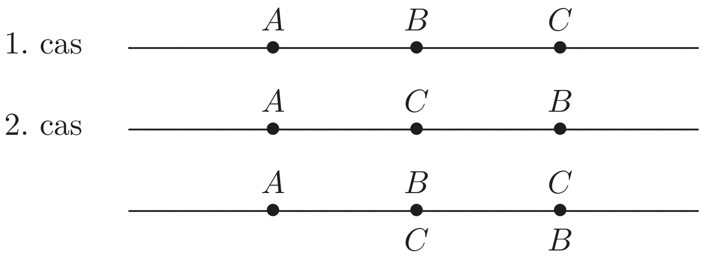


fig. 3.

Or par la collation de la 3me et de la 4me figure on voit bien que l'une revient à l'autre, car le 1 cas de l'une et de l'autre, sont semblables entierement, le 2 cas de la quatrieme, n'est que le renversé du 2 cas de la 3me, et il ne faut que renverser la feuille de papier, ou la regarder de l'autre costé, puisque elle est transparente, pour s'en apperceuvoir; car l'on voit bien que le seul renversement de la ligne indefinie donnée tout entiere ne change rien aux relations que les trois points A. B. C. y peuvent avoir entre eux.

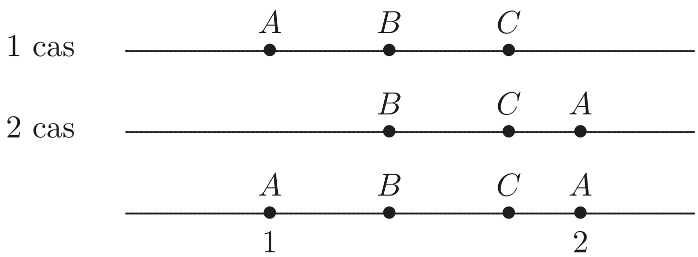


fig. 4.

Laissons donc la 3me figure, puisque elle est comprise dans la 4me, et ne comparons que la 2me de l'exemple cy dessus, avec la 4me de celuy cy: nous voyons qu'il y a dans la deuxieme aussi bien que dans la troisieme un seul point ambulatoire, qui est C dans la 2de et A dans la 4me, qui a la liberté [de] se promener, mais pas toute entiere car dans la 2de il est permis au point ambulatoire C. de se mettre ou entre les deux points fixes,

2 dans la fig. 3 *erg. L* 4 B et C *erg. L* 5 condition de | garder tousjours entre eux une même distance, et de ne *gestr., wieder erg. und erneut gestr.* | | ne *erg. Hrsg.* | souffrir *L* 13 permission *(1)* pourtant *(2)* neantmoins *L* 24 seul *erg. L* 28 seul *erg. L*

A. B. dans le 1. cas de la 2. fig. ou d'un certain costé, par exemple dans le 2. cas de la 2. fig. du costé droit; mais s'il a pris le party de se mettre du costé droit, il ne luy est plus permis de se mettre du costé gauche, et *vice versa*; car s'il se vouloit placer tantost à droit tantost a gauche, ce seroit l'exemple de la 4me figure, et s'il se vouloit placer tantost à droit, tantost a gauche, tantost entre deux, l'Ambiguité ne seroit plus simple, de deux cas particuliers, mais composée, de trois. Pour la même raison il est permis au point ambulatoire A de la 4me figure, de se placer tantost a gauche de la ligne BC, tantost a droit, mais pas de se mettre entre les deux points fixes B et C.

Quand je parle des points fixes, il ne faut pas s'imaginer que ces points gardent necessairement une même distance entre eux; mais je les considere comme attachés ensemble avec une corde, qui se peut allonguer ou rappetisser; sans changer autrement de situation, mais je considere le point A de la 4me figure comme detaché avec liberté de sauter de place en place: Il est vray que tout cela est arbitraire, et que je puis concevoir que la ligne BC se renverse, a fin d'avoir le point A tantost du costé de B, tantost du costé de C, ou qu'elle saute elle même (sans se renverser) pour avoir le point A tantost à droit, tantost a gauche, mais il est plus simple d'attribuer le changement au mouvement du point, qu'au mouvement de la ligne entiere, comme l'Hypothese de Copernic est plus commode et satisfait mieux l'imagination, que celle de Tycho.

Or celuy qui voudra considerer attentivement la 4me figure, trouvera d'abord que la ligne BC, y est la difference entre les deux lignes AB, et AC. Car selon le premier cas de la 4me figure, BC sera egal à $AC - AB$, et selon le second cas, BC sera egal à $AB - AC$. Et

l'Equation du 1. cas de la 4me fig. estant $BC \sqcap + AC - AB$
.... 2 .... $BC \sqcap - AC + AB$
l'Equation ambigue generale sera, $BC \sqcap \mp AC \pm AB$.

1 dans ... fig. *erg. L* 1 certain *erg. L* 4 gauche, *(1)* les cas *(2)* ce seroit *(a)* le cas *(b)* l'exemple *L* 5 deux, *(1)* l'eqvation ne ser *(2)* l'Ambiguité *L* 8 f. et C. *(1)* Or celuy qvi *(a)* consid *(b)* voudra considerer | attentivement *erg.* | la 4me figure remarqvera d'abord *(2)* Qvand je parle des points fixes *(3)* Or celuy *(4)* Qvand *L* 12 de la 4me figure *erg. L* 18 commode *(1)* qvant à *(2)* et satisfait *L* 21 figure, *(1)* l'eqvation sera BC ⊓ AC − AB *(2)* BC sera *L*

Cette maniere de marquer la difference de deux grandeurs est bien plus utile, et bien plus naturelle que si nous voulions nous servir d'un certain caractere, qui signifie: difference, comme Mons. Scoten, se sert de celuy cy $=$, car $a = y$ egal à b luy signifie que b est la difference entre a et y. Mais comme j'ay deja touché cydessus, ce Caractere est contre les regles de la Caracteristique, par ce qu'il n'est pas assez maniable, car vous ne sçauriez mettre les connues a. b. d'un costé, ny separer a, qui est connue, de l'inconnue y, par ce que ny a, ny y n'ont point de caractere a part: mais selon ma maniere d'exprimer la difference, l'Equation seroit $\mp a \pm y \sqcap b$, qui nous donneroit enfin, selon les regles cydessous, $y \sqcap \pm b + a$, de sorte que l'inconnue se trouvera toute seule d'un costé de l'equation sans aucun signe ambigu, l'ambiguité estant transferée du costé des connues, ce qui est bien souvent necessaire, comme je le feray voir plus bas.

Je croy d'avoir assez expliqué les signes Ambigus simples, ou du premier degrez, pour pouvoir maintenant passer outre aux composés, c'est à dire qui sont du second, troisiesme ou quatrieme degrez, et ainsi de suite. Car comme les simples ne sont que de deux ambiguitez, ceux du second degrez, en ont trois, et ainsi de suite. Et pour entendre la nature de ceux du second degrez, il faut considerer que si le point ambulatoire A a la liberté de se remuer toute entiere, et s'il peut se placer tantost à gauche, tantost a droit de la ligne fixe BC (voyez la 5me figure:) tantost entre les deux points fixes B. C. alors nous aurons trois cas particuliers, les quels deuvant estre compris dans une seule Equation Generale ambigue, les s i g n e s a m b i g u s y employés seront C o m p o s e z du second degrez, dont voicy la representation,

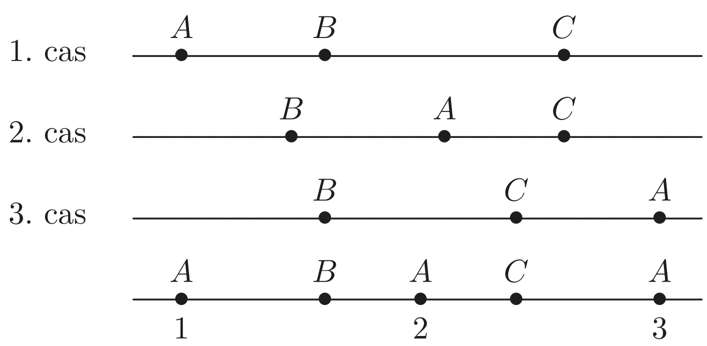


fig. 5.

9 b + a *(1)* ou y^2 *(2)* ou, $y^2 - 2ya + a^2 - b^2 \sqcap 0$, c'est a dire ⟨la va⟩ *(3)* de sorte qve *L*
12–19 Je croy . . . considerer qve *erg. L* 23 droit *(1)*, tantost au milieu de la ligne *(2)* de la ligne *L*
27 du second degrez *erg. L*

3 Scoten: Fr. v. SCHOOTEN, *Principia matheseos universalis*, 1661, *DGS* II S. 4.

l'Equation du 1. cas de la 5. fig.	$AC \sqcap + AB + BC$
.... 2	$AC \sqcap - AB + BC$
.... 3	$AC \sqcap + AB - BC$
Et l'Equation ambigue generale sera:	$AC \sqcap$ ⁺ǂ AB ⁺‡ BC

d'où la valeur des S i g n e s c o m p o s é s

⁺ǂ et ⁺‡

est manifeste, sçavoir que la grandeur ou ligne AC est ou la somme selon le 1. cas, ou la difference des lignes AB et BC, et si elle en est la difference, elle sera ou égale à $BC - AB$, selon le 2. cas, ou égale à $AB - BC$ selon le 3me. Et à fin qu'on entende aussi la raison de la forme du caractere, pour en faire d'autres en cas de besoin, il faut seulement considerer, que l'un d'eux est composé de $+$ et ǂ, l'autre, de $+$ et ‡ par ce que AC, est

tantost $\sqcap + AB + BC$ selon le 1. cas c'est à dire la somme
.... $\sqcap$ ǂ AB ‡ BC .... 1. et 2. cas .... difference } de AB et BC

$$\text{car}\quad \left.\begin{matrix} + \\ \left.\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}\right\}\text{ǂ} \end{matrix}\right\}\text{⁺ǂ}\ AB\quad \left.\begin{matrix} + \\ \left.\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right\}\text{‡} \end{matrix}\right\}\text{⁺‡}\ BC, \sqcap AC$$

et quoyque il semble que le second, sçavoir ⁺‡, ne deuvroit pas estre composé de $+$ et ‡ mais de $+$ et ǂ̲, en quel cas il donneroit ⁺ǂ̲, la raison pourtant du contraire est manifeste, par ce qu'alors on ne le discerneroit pas du signe opposé au premier ⁺ǂ, ou de $-$⁺ǂ, que j'exprime par ⁺ǂ̲ selon la maxime generale susdite; et par consequent quand un signe opposé a un autre, comme ǂ̲ opposé à ǂ doit entrer dans la composition d'un autre signe, il est a propos de mettre un peu plus haut le trait $-$, qui estoit embas, ou plus tost de prolonguer d'avantage vers embas la ligne perpendiculaire du caractere, et de faire ⁺‡

7–10 *Gestrichene Randbemerkung*:

(1) $AC \sqcap + AB + BC$ $\left\{\begin{matrix} - & + \\ + & - \end{matrix}\right.$ *(2)* ⁺ǂ$\left\{\begin{matrix} +AB \\ \text{ǂ}\left\{\begin{matrix} - \\ + \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$ ⁺‡$\left\{\begin{matrix} +BC \\ \text{ǂ̲}\left\{\begin{matrix} + \\ - \end{matrix}\right. \end{matrix}\right.$ *gestr. L*

7 selon le 1. cas *erg. L* 9 BC – AC *L ändert Hrsg.* 9 AC – BC *L ändert Hrsg.* 18 qve *(1)* l'autre, ne deuuroit pas *(2)* le second *L* 18 f. de + et ‡ mais de *gestr. u. wieder erg. L* 20 pas *(1)* du contraire *(2)* du signe *L* 23 embas, *(1)* et de faire ⧧ au lieu de ǂ̲, *(a)* et ⁺⧧ au lieu de ⁺ǂ̲ *(b)* ‡ au lieu de *(2)* ou *L*

au lieu de +⊥; et +‡ au lieu de +‡. Et à fin aussi qu'on voye la raison de la distance que je laisse entre le trait haussé, et les premiers, et pour quoy je fais +‡ au lieu de +‡, et +‡ au lieu de +‡ ou +‡ je dis qu'on découvre par ce moyen à la premiere veue l'origine et composition de tous ces signes, mais qu'outre cette commodité il y a même quelque necessité de faire de la sorte, pour eviter l'equivocation, ou confusion de deux signes de differente signification, car posons que le signe +⊥ doive entrer dans la composition d'un autre, si on en faisoit alors +‡ en haussant simplement le trait d'embas on ne le discerneroit pas du signe +‡ quand il entreroit aussi dans une composition par ce que en le haussant simplement, nous aurions eu aussi +‡ au lieu de +‡ donc voila deux +‡ de differente signification l'un fait de +⊥, c'est à dire du contraire à +† c'est à dire à + ou ǂ: l'autre fait de +‡, c'est a dire de + ou ‡ c'est à dire du + et du contraire à ǂ: ce qui n'est pas le même.

Quand je dis par exemple que +† vaut + ou ǂ, et que +‡ vaut + ou ‡ cela se doit entendre avec une relation entre ces deux signes ambigus composez; de sorte que si dans l'application de l'ambiguité ou generalité à un cas particulier, +† est expliqué par −, alors +‡ sera expliqué par + et *vice versa* car entre ces trois equations susdites de la 5me figure il n'y a pas une, ou AB aussi bien que BC, tout a la fois soient affectées par −. Mais si +† est expliqué par +, il n'est pas necessaire que +‡ soit expliqué par − par ce que dans une de ces equations particulieres, AB, aussi bien que BC, sont affectées par +. Par consequent si l'un de ces deux signes composés est expliqué par + l'autre sera expliqué par ǂ et *vice versa* (: avec la caution pourtant, que nous y apporterons plus bas :) de sorte que l'ambiguité decomposée qu'elle est, deviendra simple. Et par ce que la liste des Equations particulieres

$$\left.\begin{array}{lcccc} AC & \sqcap & + & AB + & BC \\ & & \left.\begin{array}{c} - \\ + \end{array}\right\} ǂ & \begin{array}{c} AB + \\ AB - \end{array}\Big\} ‡ & \begin{array}{c} BC \\ BC \end{array} \end{array}\right\} \text{qui peuvent estre entendues}$$

$$\text{sous la Generale} \quad \overline{\;+†\,AB \qquad +‡\,BC,}$$

2 entre ... premiers *erg. L* 3 de ‡ ou +‡ *L ändert Hrsg.* 8–10 signe +‡ | qvand ... composition *erg.* | par ce qve *(1)* si on haussoit le signe *(2)* en ... eu | aussi *erg.* | +‡ au ... deux +‡ | de differente signification *erg.* | l'un *(a)* faisoit de *(aa)* +‡, l'autre de + ou ‡ *(bb)* +⊥, l'autre de +‡, c'est à dire de + ou ‡ *(b)* fait de +⊥, c'est à dire *(aa)* de + ou ǂ *(bb)* du contraire *L* 13 *(1)* On voit par la, a *(2)* Qvand je dis | par exemple *erg.* | *L* 14 f. dans *(1)* l'explication *(2)* l'application *L* 16 f. car ... susdites | de la 5me figure *erg.* | il ... bien | qve *erg. Hrsg.* | BC ... par − *erg. L*

fait voir que ces deux signes ambigus $^{+}\!\mp$ et $^{+}\!\pm$ signifient ou tous deux $+$, ou que l'un signifiant $\mp$, l'autre signifie $\pm$, je les exprime en mettant $+$ au devant, en tous deux $^{+}\!\mp$ et $^{+}\!\pm$, au lieu de $^{+}\!\mp$ et $\pm^{+}$ dont nous aurons besoin dans une autre rencontre.

On voit en fin par la; la grande difference qu'il y a entre le signe $\mp$, et tous les autres. Car le signe simple $\mp$ peut subsister tout seul, sans changement, par ce qu'il ne dit point de relation a aucun autre; mais tous les autres contiennent quelque relation à un autre signe provenant d'une meme equation ambigue, et pour cela je les appelle Correspondants. Par exemple si nous avons deux signes ambigus simples, $\mp$ et $\pm$ provenans de l'equation $\mp a \pm y \sqcap b$, et si dans la suite du calcul le signe $\mp$ evanouit, comme il arrive en cet exemple, ou nous trouvons en fin cette equation, $y \sqcap \pm b + a$, alors si nous nous determinons à abandonner entierement la premiere equation, avec tout ce qui en est provenu, hormis cette nouvelle trouvée, dont nous pretendons nous servir à l'avenir dans le calcul qui reste à faire; nous pourrons sans scrupule changer le signe $\pm$ en $\mp$, et nous servir de cette equation, $y \sqcap \mp b + a$.

Mais pour donner une regle generale je dis si plusieurs signes ambigus proviennent d'une meme equation ambigue ou sont correspondents par exemple $^{+}\!\mp$ et $^{+}\!\pm$, et si dans la suite du calcul tous les autres evanouissent horsmis un seul qui reste, alors celuy qui reste, par exemple $^{+}\!\mp$ peut estre changé en un simple $\mp$ comme nous venons de dire un peu au dessus. La raison provient de la réponse à une objection qu'on m'a fait souvent sur cette matiere. Car on m'a dit, si tous signes ambigus ne signifient que $+$ ou $-$ pourquoy en faut il tant. Ma reponse fut que les signes ambigus ne signifient pas seulement tousjours plus ou moins, mais aussi quelque relation entre eux, sçavoir que l'un vaut $+$ quand l'autre vaut $-$ et *vice versa*, etc., comme je viens d'expliquer. Par consequent quand cette Relation cesse, c'est à dire quand des signes correspondents, ou qui ont Relation entre eux un seul reste, alors celuy cy quelque composé qu'il puisse estre, deviendra simple. Mais si de trois ou quatre signes ambigus correspondents deux restent, alors bien que la composition du signe sera deminuée, le signe pourtant ne deuviendra pas tousjours

2 en mettant ... deux *erg. L* 4 difference *(1)* qv'il y a entre les signes simples et composés, pour l'interpretation et l'usage. *(2)* qv'il *L* 7 ambigue *(1)*. Car si dans l'eqvation nostre calcul *(2)*, et *(a)* par conseqvent *(b)* pour cela je *L* 15 dis *(1)* si qvelqve signe qve cy puisse estre *(2)* si *L* 16 | ou sont correspondents *erg.* | par ... $^{+}\!\pm$ *erg. L* 18–26 comme ... simple *erg. L* 26 f. trois | ou qvatre *erg.* | signes ambigus *(1)* qvi proviennent d'une même Eqvation *(2)* correspondents ... alors *(a)* il pourra arriv *(b)* bien qve *L*

simple. Il n'est pas necessaire de rapporter des exemples du dernier par ce que ces cas sont rares, et embarasseroient le lecteur, sans utilité.

Il faut seulement remarquer que le ǂ provenu de ce changement ne sera pas le même avec le premier ǂ qui entroit dans la composition des signes ambigus composés evanouis ou changés, et par consequent si ce premier ǂ reste encor ailleurs dans le calcul, il faut renfermer le nouveau dans une parenthese, comme (ǂ) à fin qu'ils ne se confondent. La raison de cette precaution sera rendue plus bas quand il s'agira d e s d i f f e r e n t e s p o s i t i o n s a m b i g u e s. Par exemple si tout le calcul d'un probleme proposé seroit reduit à une telle Equation, $\overset{+}{ǂ}\, a^2 \sqcap \pm\!ǂ\, y^2 + cy$ on en pourroit faire sans scrupule, $(ǂ)\, a^2 \sqcap ǂ\, y^2 + cy$ par ce que $\overset{+}{ǂ}$, (: c'est à dire + ou ǂ :) et $\pm\!ǂ$ (: c'est a dire −ǂ :) n'ayant point de correlatifs, (: que je suppose estre evanouis :) pourront estre changés en des simples ǂ, mais independants l'un de l'autre, ou comme je les appelle, h e t e r o g e n e s (voyez plus bas —) et par consequent il en vaut renfermer un dans une Parenthese.

Je n'ay employé jusque à la que trois points; et deux lignes servants à expliquer la troisiême: Mais il arrive aussi, qu'on ait besoin de 4 points, et de trois lignes pour expliquer la quatrieme; et cette multiplication des points et lignes, peut augmenter à l'infini la composition des signes, comme il est aisé a juger, toutes fois si de ces 4 points il n'y a qu'un seul ambulatoire, il n'y aura aussi en effect que trois ambiguitez, et les signes de l'Equation ambigüe generale ne seront pas plus composez que ceux que nous venons d'expliquer. Par exemple soient trois points fixes, *A*. *X*. *P*. c'est à dire qui ne changent point de situation, quoyque il se puissent approcher ou éloigner l'un de l'autre, et soit

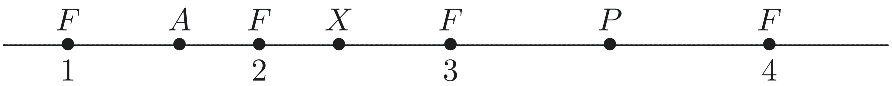


fig. 6.

un quatrieme poinct ambulatoire *F* avec liberté entiere de le placer ou l'on voudra, je dis que neantmoins il n'y aura en effect que trois cas particuliers, par ce que tout arrive

2 embarasseroient | seulement *gestr.* | le lecteur, *(1)* sans autre *(2)* sans *L*   4 premier ǂ *(1)* dont nous nous ser *(2)* qvi *L*   7 de *(1)* cecy *(2)* cette *L*   13 et par ... Parenthese *erg. L*   18 et *(1)* des signes tels qve nous venons d'expliqver suffirent *(2)* les signes *L*   24–128,2 par ce qve ... comme | si *erg. Hrsg.* | celuy ... estoit pas *erg. L*

13 plus bas: s. u. S. 140 Z. 27 – S. 141 Z. 4 sowie S. 141 Z. 10–14.

comme si celuy des poincts fixes qui est au milieu des deux autres, sçavoir X n'y estoit pas. Car si nous voulons expliquer la ligne FP, par le moyen des lignes AF, AX, et XP, tout arrive, comme si nous voulions expliquer la ligne FP, par deux autres seulement, sçavoir par AF et AP, et si nous posons que le poinct F est dans la place marquée de 1, ou 2, ou 3, ou 4, alors la 2. et 3me place ne donnera qu'une même Equation

car (1) F nous donnera $$FP \sqcap +AF \underbrace{+AX+XP}_{+AP}$$

(2) F, (3) F .... $$FP \sqcap -AF \underbrace{+AX+XP}_{+AP}$$

(4) F .... $$FP \sqcap +AF \underbrace{-AX-XP}_{-AP}$$

et l'Equation generale ambigue sera: $$FP \sqcap {}^{+}\!\dagger AF \underbrace{{}^{+}\!\ddagger AX \; {}^{+}\!\ddagger XP}_{{}^{+}\!\ddagger AP}$$

par ce que AP est $\sqcap$ à $+AX+XP$. Neantmoins si les lignes AX, et XP sont inconnues toutes deux, ou indeterminées, il ne sera pas à propos, de les exprimer par une seule, AP, et il faut plustost les joindre par un *V i n c u l u m* à l'imitation des racines sourdes, et l'Equation generale trouvée se pourra exprimer ainsi,

$$FP \sqcap {}^{+}\!\dagger AF \; {}^{+}\!\ddagger \overline{AX+XP}$$

puisque ce *Vinculum* a cela de commode, qu'on le peut dissoudre, et qu'on en peut eximer ce qui bon nous semble, au lieu que le *Vinculum* d'une racine sourde est indissoluble.

Je me suis servi tout expres d'un exemple qui arrive effectivement dans le calcul du Probleme, dont j'ay fait mention au commencement , — et qui me doit servir d'essay de ma methode, sçavoir: de mener la perpendiculaire d'un point donné D à une section

3 f. tout ... et AP *erg. L* 5 alors ... Eqvation *erg. L* 13 faut *(1)* mieux *(2)* plustost *L* 13 à l'imitation ... sourdes *erg. L* 16 peut *(1)* faire *(2)* eximer *L*

19 commencement: s. o. S. 113 Z. 13 – S. 114 Z. 22.

conique donnée ABC car soit A, le sommet de la courbe, le point donné D. du quel soit menée sur l'axe la perpendiculaire DF. Et nous aurons les mêmes 4 points, dont nous venons de parler, sçavoir trois fixes A. X. P. et un ambulatoire F, avec liberté entiere de se placer en quatre endroits differents. Il est vray qu'on pourra conter aussi les cas qui font tomber le point F, dans les poincts A, ou X, ou P, comme je les avois contés cy dessus, mais la varieté qui en arrive, tombe sur les lettres, ou lignes, qui deviennent quelques fois infiniment petites, dont nous parlerons par apres; et point sur les signes.

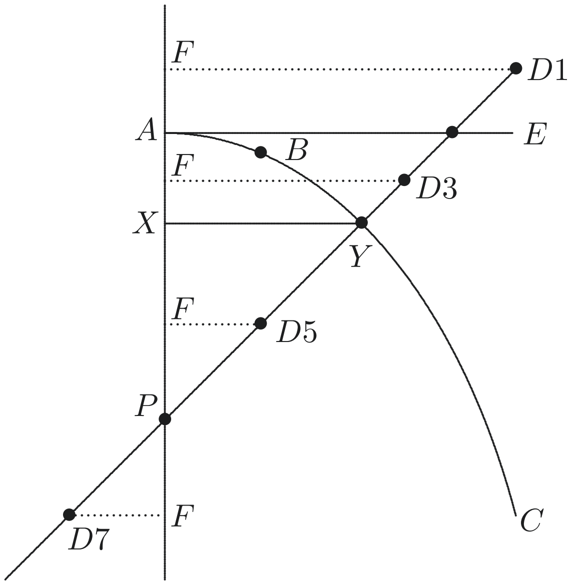


fig. 7.

Donc si nous faisons

$$x \sqcap AX$$
$$f \sqcap AF$$
$$p \sqcap XP,$$

nous aurons l'equation generale ambigüe, $FP \sqcap \pm f \mp \overline{x+p}$.

2 DF. *(1)* Maintenant le point demandé dans la courbe, vers le qvel il faut *(2)* Soit la perpendiculaire DY, ou DP, rencontrant la ligne ou courbe donnée dans le point Y, et l'axe AF, prolongué au besoin dans le point P. du point Y, soit menée sur l'axe, la perpendiculaire XY rencontrant l'axe dans le point X puisqve donc nous avons deux Triangles semblables, DFP, et YXP, *(3)* Et *L* 5 font *(1)* tomber le point F, dans le point A, (: qvand le point D tombe dans la ligne AE, touchante du sommet; :) ou dans le point X, (: qvand le point D tombe dans la courbe, ou dans le point Y, :) ou dans le point P, (: qvand le point D. tombe dans l'Axe, ou dans le point P, et tous ces trois points D. F. P se trouuent coincidents :) comme je les avois conté cy dessus. Donc si nous *(2)* tomber *L*

Il reste à montrer, que les trois poincts A. X. P sont fixes et qu'il[s] ne changent point de situation, dans toutes les Coniques, et que X tombe tousjours entre A et P ce qui est fort aisé, car dans l'Hyperbole et Parabole la perpendiculaire YP s'éloigne tousjours du sommet A, en allant de Y vers P, dans l'Ellipse et dans le Cercle le même axe a deux sommets opposés l'un à l'autre, et la perpendiculaire YP, s'éloigne de l'un et s'approche de l'autre: donc on peut tousjours se servir de celuy de ces deux sommets, dont la ligne YP s'éloigne, pour rendre le calcul de toutes les coniques general. On voit donc bien que si quelques unes des courbes données pour mener sur elles les perpendiculaires d'un point donné estoient fort recourbées, qu'alors l'ambiguité seroit bien plus composée; et que nous aurions besoin aussi de signes plus composés pour donner une Equation generale. Car il pourra arriver alors tantost que la perpendiculaire s'approche du sommet, et tantost qu'elle s'en éloigne.

Il y a encor d'autres s i g n e s a m b i g u s d u s e c o n d d e g r é , ou composez de trois ambiguitez seulement outre ${}^{+}\ddagger$ et ${}^{+}\ddagger$ que je viens d'expliquer. Et pour en faire comprendre la nature, soit une equation trouvée

$$\begin{array}{c} \ddagger\, a + b \;\sqcap\; c \\ \text{ou} + a \;\ddagger\; b \;\; \ldots\ldots \end{array}$$

je dis qu'il y a en effect trois ambiguitez cachées la dedans, car en substituant à la place de $\ddagger$, sa valeur $+$ ou $-$ nous aurons à la verité 4 expressions, mais dont la 1. et 3$^{\text{me}}$ ne sont qu'une même

$$\left.\begin{array}{lllll} (1) & \left.\begin{array}{l} + \\ - \end{array}\right\} \ddagger\, a & + b & & \\ (2) & & + b & & \\ (3) & + a & \left.\begin{array}{l} + \\ - \end{array}\right\} & \ddagger\; b & \\ (4) & + a & & & \end{array}\right\} \sqcap\, c.$$

2 dans ... et P *erg.* *L* 3 la *(1)* ligne *(2)* perpendiculaire *L* 3 f. tousjours *(1)* de l'ax *(2)* du sommet *L* 5 f. opposés ... la *(1)* ligne *(2)* perpendiculaire YP ... l'autre *erg.* *L* 9 estoient | fort *erg.* | recourbées, | comme la conchoeide et autres, *gestr.* | qv'alors *L* 11 alors *(1)* qve la perpendiculaire s'approche tantost de l'axe *(2)* tantost *L* 14 d'expliqver *(1)*: Car soit une *(a)* grandeur *(b)* eqvation trouuée $\mathrm{a}^2 \ddagger 2\mathrm{ax} + \mathrm{x}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{d}^2}{\mathrm{y}^2}$, la racine en peut estre $\left.\begin{array}{r} + \mathrm{a} \ddagger \mathrm{x} \\ \text{ou} \ddagger \mathrm{a} + \mathrm{x} \end{array}\right\} \sqcap (\ddagger) \dfrac{\mathrm{ad}}{\mathrm{y}}$ car qvoyqve ⟨—⟩ ou $-\mathrm{a} \ddagger \mathrm{x}$, ou $\ddagger \mathrm{a} - \mathrm{x}$ multiplie *(2)* soit *(3)*. Et *L* 18 dedans, *(1)* $\ddagger \left\{\begin{array}{c} + \\ - \end{array}\right\} \mathrm{a} + \mathrm{b} \quad \left.\begin{array}{c} +\mathrm{a} \\ -\mathrm{a} \end{array}\right\} \ddagger \begin{array}{c} + \mathrm{b} \\ + \mathrm{b} \end{array} \quad \left.\begin{array}{c} + \mathrm{a} \; + \\ + \mathrm{a} \; - \end{array}\right\} \ddagger \begin{array}{c} \mathrm{b} \\ \mathrm{b} \end{array}$ *(2)* car en *(a)* expliqvant *(b)* substituant *L*

On me dira que cette Ambiguité donc est la même, avec celle que nous venons d'expliquer

$$\left.\begin{array}{r} +\, a + b \\ -\, a + b \\ +\, a - b \end{array}\right\} \sqcap c,$$

$$\text{c'est à dire } {}^{+}\!\dagger\, a\; {}^{+}\!\ddagger\, b \quad \sqcap c$$

mais je reponds, qu'il y a de la difference, et qu'en fait de composition ou fabrique des signes ambigus par le moyen de quelques autres déja posés, il ne faut pas venir à la resolution de ceux cy; car alors nous perdrons le rapport qu'il y a entre les signes déja faits et posés, et ceux qu'il y a à faire, comme nostre exemple le fait voir; car multipliant ${}^{+}\!\dagger\, a\; {}^{+}\!\ddagger\; b \sqcap c$ par luy même, nous aurons $+a^2\; {}^{+}\!\dagger\; {}^{+}\!\ddagger\; 2ab + b^2 \sqcap c^2$ dont on ne tirera jamais universellement $+a^2 \dagger 2ab + b^2 \sqcap c^2$ et neantmoins cela devroit provenir, selon les deux equations particulieres ou cas donnés au commencement, sçavoir: $\left.\begin{array}{r} \dagger\, a + b \\ \text{ou} + a \dagger b \end{array}\right\} \sqcap c,$ car l'une, aussi bien que l'autre de ces equations particulieres estant quarrée donnera $+a^2 \dagger 2ab + b^2 \sqcap c^2$. Donc les signes ${}^{+}\!\dagger$ et ${}^{+}\!\ddagger$ ensemble n'y servent de rien, et l'Equation ambigüe Generale sera:

$${}^{+}\!\dagger\, a \;\; \dagger^{+}\;\; b \sqcap c$$

pour marquer que l'une de ces deux grandeurs, a, et b estant affectée effectivement du signe $+$, l'autre le sera du signe $\dagger$, et *vice versa*.

Pour donner aussi un exemple des Ambiguitez de quatre cas particuliers, ou des Signes composez du troisiême degrez. Soit selon

l'Equation particuliere du 1. cas	$AC \sqcap$	$+$	AB	$+$	BC
.... 2	$AC \sqcap$	$-$	AB	$+$	BC
.... 3	$AC \sqcap$	$+$	AB	$-$	BC
.... 4	$AC \sqcap$	$-$	AB	$-$	$BC.$
Et l'Equation Ambigüe Generale sera	$AC \sqcap$	$\overline{(\dagger)}\dagger$	AB	$\overline{(\dagger)}\ddagger$	$BC.$

Dont voicy la raison pour comprendre la formation de ces deux signes. Sçavoir, que ces 4 cas, peuvent estre reduits a deux ambigus:

1 cette *(1)* Eqvation *(2)* Ambiguité *L* 7 ou fabriqve *erg. L* 11 ⊓ c *erg. L* 11 ⊓ c^2 *erg. L* 12 ⊓ c^2 *erg. L* 13 cas *(1)* possibl *(2)* donnés *L* 14 car ... particulieres *erg. L* 15 Donc ... rien *erg. L*

$$AC \sqcap (ǂ)\ AB\ (ǂ)\ BC$$
$$\text{ou } AC \sqcap\ ǂ\ AB\ ‡\ BC$$

c'est à dire AB et BC, sont affectées, tantost d'un meme signe soit $+$, soit $-$, selon le 1, et 4^me^ cas; tantost de signes opposez, selon le 2. et 3^me^ cas. Or à fin que deux signes semblables mais heterogenes ǂ et (ǂ) ne se confondent pas, l'un d'eux est renfermé dans une parenthese, close en haut, pour estre discernée d'autres parentheses; et à fin de discerner un seul signe (ǂ)ǂ de deux qui se multiplient, (ǂ)ǂ les parties du premier sont unies par un trait d'en haut.

En fin l'on voit bien, que le quatrieme cas suppose une grandeur fausse, ou negative, ou moindre que rien; c'est à dire prise en sens contraire à celuy cy dans le quel on la proposoit ou demandoit. Car soit une ligne droite indefinie DE dans la quelle tombent trois points: A. B. C de 6 façons differentes representées icy fig. 8.

valeurs reelles ou positives			valeurs fausses ou negatives			
1) $AC \sqcap + AB + BC$	D — C B A — E					
2) $-AB + BC$	C A B					
3) $+AB - BC$	B C A					
4) $-AB + BC$	B ◌ A C	4) $AC \sqcap + AB - BC$	supposant	$BC\ (\sqcap AB)$	pris vers E
5) $+AB - BC$	◌ A C B	5) $-AB + BC$		$AB\ (\sqcap BC)$	
6) $+AB + BC$	◌ A B C	6) $-AB - BC$		$AB+BC$	

fig. 8.

19 f. *Am Rand:* $\sqcap$ signifie plus grand voyez la Table des Caracteres.

9 En fin … qve *erg.* *L* 12 fig. *(1)* 6 *(2)* 8 *L*

21 Leibniz zeichnet zunächst fig. 5 größtenteils noch einmal, nennt sie irrtümlich fig. 6, streicht sie dann und fügt fig. 8 ein. 22 voyez: vgl. S. 117 Z. 2.

Or si nous ne contons que les varietez des Equations qui nous donnent la valeur de la ligne reelle ou positive AC, ou les differences des Voisinages des points, sans avoir égard au rang, ou au costé droit ou gauche; et par consequent si nous prenons celles dont l'une est la renversee de l'autre, pour une seule comme 1, et 6 *item* 2 et 4, *item* 3 et 5 nous n'aurons que trois varietez. Mais si dans le probleme ou theoreme proposé, on demande que la ligne AC, soit prise du poinct A, vers le costé D. et que sa valeur soit determinée par les lignes AB, et BC. alors cette valeur peut devenir moindre que rien. Car dans le quatrieme cas, soit AB adjoutée mais BC qui est posée $\sqcap$ AB (plus grande qu'AB) soubstrait, selon l'equation des fausses valeurs, c'est à dire selon l'equation des valeurs reelles; AB soubstraite, et BC adjoutée (: ou prise reellement, mais en sens contraire vers E :) selon l'equation des valeurs reelles; donc puisque BC est $\sqcap$ AB il y aura plus de soubstrait, ou de pris en sens contraire vers E, que d'adjouté ou de pris selon la demande. Par consequent la difference, scavoir AC tombera du costé de E. Le meme, mais apres un échange des lignes, arrive au 5me cas. Mais au 6me tout est pris en sens contraire ou vers E, AB aussi bien que BC. Or prendre en sens contraire, c'est à dire reculer, est proprement soubstraire. Or non seulement celuy qui a avancé peut reculer, plus meme qu'il n'ait avancé, comme dans le 4. et 5me cas; mais celuy aussi qui n'a rien avancé du tout; car en reculant, il avance a rebours, et son avancement est moindre que rien puisqu'il faut encor qu'il avance veritablement, et qu'il revienne au premier endroit pour pouvoir dire de n'avoir rien fait; comme celuy qui doit plus qu'il ne possede.

Mais enfin à l'egard des signes dont il est question uniquement, il n'y a que 4 cas differens, sçavoir le 1. le 2. le 3. et le 6., puisque le 4me est compris dans le second (: 3me), et le 5me, est compris dans le 3me (: second) selon les vrayes (: fausses :) valeurs. Je fus pourtant obligé de rapporter le 4me et 5me cas aussi, pour faire voir comment la valeur d'AC peut estre fausse, sauf les signes; et comment il y a tantost 3, tantost 4, tantost 6 varietez selon les differentes considerations.

Voila l'explication de la plus-part des Signes Ambigus dont on peut avoir besoin ordinairement. Car de monter aux compositions plus hautes, d'expliquer les varietez qui peuvent arriver, quand il y a plus de trois points employez sur tout quand on y mêle les fausses grandeurs; d'expliquer les cas differents dont on peut avoir besoin, quand nous

2 des points *erg. L* 8 soit *(1)* BC soubstrait, c'est selon l'eqvation des fausses valeurs, ou adjouté c'est à dire adjouté ou pris *(2)* AB ... BC | qvi est posée *erg.* | $\sqcap$ AB *L* 11 reelles; *(1)* et AB soubstrait, dont *(2)* donc *L* 19 veritablement ... endroit *erg. L* 22 differens ... le 6., *erg. L* 27 de *(1)* tous les *(2)* la plus-part des *L*

supposons les points tomber dans une circulaire ou autre qui recourt en elle même, au lieu d'une droite indefinie: ce seroit plus curieux qu'utile, et ne serviroit qu'à embarasser l'esprit du lecteur: puisque ce que je viens de dire, avec [ce] que je m'en vay d'y adjouter, estant bien compris, luy suffira asseurement.

[*Erste Fassung*]

Car je pretends de donner un moyen de nous passer de la fabrique de tant de signes nouveaux sur tout quand ils seroient trop composés. Je dis donc, qu'absolument ces deux signes ǂ, et ‡ pourroient suffire: Car en effect ⁺ǂ est aussi un ǂ c'est a dire signifie + ou −, mais puisque il marque outre cela une relation à d'autres signes correspondents, ou qui proviennent de la même equation generale ambigue, dont le signe proposé ⁺ǂ tire son origine, comme à ⁺‡; donc pour marquer aussi cette correspondance, je trouve qu'on se pourroit servir d'un tel expediant, soient trois ambiguitez données dans la valeur de trois Grandeurs, a, d, g dont nous avons besoin d a n s u n m ê m e c a l c u l

1. ambiguité	2. ambiguité	3[me] ambiguité
$a \sqcap \;+ b - c$	$d \sqcap \;- e + f$	$g \sqcap \;- h + k - l - m$
ou $+ b + c$	ou $+ e - f$	ou $+ h - k + l - m$
	ou $+ e + f$	ou $- h - k + l + m$

Leur Equations ambigues generales pourront estre telles:

(1) $a \sqcap + b$ ǂ c

(2) $d \sqcap \overline{(2\text{ ǂ }1)}\; e\; \overline{(2\text{ ǂ }2)}\; f$

(3) $g \sqcap \overline{(3\text{ ǂ }1)}\; h\; \overline{(3\text{ ǂ }2)}\; k\; \overline{(3\text{ ‡ }2)}\; l\; \overline{(3\text{ ǂ }3)}\; m$

Par exemple $\overline{(3\text{ ǂ }2)}\; k$ signifie, que le signe ambigue dont k. est affecté est le second signe ambigu, de la troisiesme ambiguité; et $\overline{(3\text{ ‡ }2)}\; l$, signifie que celuy de l, est le contraire de celuy de k. Et l'on peut avoir besoin de ces sortes de nombres et parentheses, si mêmes on se serviroit de la fabrique des signes composez. Car posons qu'il y ait trois ambiguitez, independantes l'une de l'autre, et qu'on trouve les signes composés ⁺ǂ et ⁺‡ aussi bien dans l'une que dans les autres, donc pour discerner ces figures differents, qouyque semblables, il sera a propos de laisser celuy de la premiere sans marque, ⁺ǂ et de

2 f. embarasser l'esprit | inutilemen *gestr.* | l'esprit *L* 6 passer | en cas de necessité *erg. und wieder gestr.* | de *L* 8 suffire: *(1)* en effect ⁺ǂ est aussi un ǂ sans *(2)* Car *L* 9 il *(1)* dit *(2)* pres *(3)* marqve *L* 10 generale ambigue *erg. L* 10 le signe proposé *erg. L* 12 tel *(1)* moyen *(2)* expediant *L* 13 dont ... c a l c u l *erg. L* 24 de la fabrique *erg. L* 27–135,1 ⁺ǂ et de marqver *erg. L*

marquer celuy de la seconde, $\overline{(2\pm)}$, et celuy de la 3me $\overline{(3\pm)}$. L'Usage de ces nombres est manifeste par ce qu'il nous fait tousjours voir dans la suite du calcul, quels signes sont correspondants, sçavoir ceux qui portent le même nombre.

Mais a fin de ne laisser rien échapper qui soit de consequence, il faut considerer qu'une ambiguité peut estre soubsdistinguée par une autre. Par exemple outre les trois ambiguitez susdites, qui expriment la valeur de a, d, g, sort encor une autre, selon la quelle $\left.\begin{array}{l} n \sqcap \overline{(3 \mp 2)}p \quad - \quad q \\ \quad \text{ou} \quad + \quad p\,\overline{(3 \pm 2)}\,q \end{array}\right\}$ c'est à dire si p est affecté du même signe dont k est affecté cy dessus, q sera affecté de $-$, et si p est affecté de $+$, alors q sera affecté du contraire à celuy de k. Donc pour donner un signe à p ou q il faut marquer, que p est le premier, et que q est le second signe de la premiere soubsdistinction du deuxiême signe de la troisiême ambiguité, et nous pourrons faire: $n \sqcap \overline{\big(3(1 \mp 1)2\big)}\ p\ \overline{\big(3(1 \mp 2)2\big)}\ q$.

Et pour prevenir une objection qu'on ne manqueroit pas de faire, sçavoir que dans la suite du calcul la repetition des signes si embarassés seroit fort incommode; je reponds qu'on n'y est pas obligé, et qu'il suffit de les employer, quand on remarque que plusieurs signes sont joints ensemble, et qu'ils se pourroient peut estre expliquer mutuellement. Alors il est a propos d'exprimer leur signes pour voir s'ils sont correspondants. Hors de ce cas, on peut employer quelque nombre, étoile nombrée, ou autre marque a leur place, ou meme une lettre. Car par exemple $\pm b$, est $\sqcap \pm 1 \frown b$ ou b multiplié par ± 1, ou par $\pm \dfrac{a}{a}$, donc posons α, à la place de $\pm a$, et nous aurons $+\dfrac{\alpha b}{a}$ à la place de $\pm b$.

Cela m'a fait songer à un expedient assez commode, dont on se pourroit servir, en cas d'un grand embarras d'ambiguitez.

Soit une ambiguité $\begin{array}{l} d \sqcap +b+c \\ \quad \text{ou} +b-c \end{array}$, representons d a n s c e t t e p r e m i e r e a m b i g u i t é $+$ par α et $-$ par ω, et nous aurons $d \sqcap +b\ \overline{(\alpha\omega)}\ c$ au lieu de $d \sqcap +b \mp c$. Par consequent, $\pm$ sera $\overline{(\omega\alpha)}$, et nous aurons, $b \sqcap +d\ \overline{(\omega\alpha)}\ c$.

Soit dans le même calcul une autre ambiguité $\left.\begin{array}{l} e \sqcap +f-g \\ \quad \text{ou} -f+g \end{array}\right\}$ posons β egal à $+$, et ψ égal à $-$, d e l a 2 de a m b i g u i t e, et nous aurons $e \sqcap \overline{(\beta\psi)}\ f\ \overline{(\psi\beta)}\ g$.

1–3 L'Usage ... nombre. *erg. L* 5 autre. *(1)* Car *(2)* Par exemple *L* 11 f. q. *(1)* Neantmoins puisqv'il seroit fort ennuyeux, d'employer tousjours des signes si embarassez *(2)* Et *L* 15 signes *(1)* joints entre eux *(2)* correspondants *(3)* sont *L* 15 f. mutuellement. *(1)* Je tourne *(2)* hors de ce cas on peut *(3)* alors *L* 22 f. d a n s ... a m b i g u i t é *erg. L* 23 f. au lieu ... d $\overline{(\omega\alpha)}$ c. *erg. L*

Soit une 3me ambiguité, selon la quelle nous avions $\begin{array}{l} h \sqcap +k \mp l \\ \quad \text{ou} \mp k + l \end{array}$, posons γ egal à $+$ *de la 3me ambiguité* et nous aurons $h \sqcap \overparen{(\gamma, \alpha\omega)}\ k\ \overparen{(\alpha\omega, \gamma)}\ l$ si $\mp$ est celuy de la premiere ambiguité, ou $\alpha\omega$.

Soit une quatrieme ambiguité, sçavoir, $m \sqcap \begin{array}{l} +n\ +p, \\ -n\ +p \\ +n\ -p \end{array}$ posons δ égal à $+$, et φ égal à $-$, *de la quatrieme ambiguité*, et nous aurons $m \sqcap \overparen{(\delta\varphi\delta)}\ n\ \overparen{(\delta\delta\varphi)}\ p$.

Mais enfin pour applanir toutes les rudesses de ce chemin, qui ne fut pas encor battu, et pour reduire tout, je l'ose dire, à la derniere clarté possible.

[*Zweite Fassung*]

Car je pretends de donner un moyen de nous passer de la fabrique de tant de signes nouveaux sur tout quand ils seroient trop composés; à fin d'applanir toutes les rudesses de [ce] chemin, qui ne fut pas encor battu, et de reduire tout à la derniere clarté et, je l'ose dire, facilité possible. J'ay balancé si je le deuvois donner, puisqu'il m'avoit servi de *principe d'invention*, qu'on a accoustumé de supprimer, pour faire paroistre d'avantage les theoremes inventés, mais la consideration du bien public l'a emporté par dessus toutes les autres.

Je dis donc, qu'on peut exprimer les signes par le moyen des lettres, à fin de venir à une espece d'Algebre pour trouver les signes inconnus; comme l'on trouve ordinairement les grandeurs inconnües. Je choisis pour cet effect les lettres Grecques, pour distinguer plus aisement les *lettres des signes*, des *lettres des grandeurs*. De ces lettres de l'Alphabete Grec les premieres signifieront, $+$, comme, $\alpha.\,\beta.\,\gamma.\,\delta.$ les dernieres signifieront $-$, comme $\omega.\,\psi.\,\varphi$. Et α et ω, par exemple, signifieront $+$ ou $-$ de la premiere ambiguité; β et ψ, de la seconde, etc. Cette expression des signes par

17 inconnus *erg. L* 19 f. *grandeurs*. *(1)* Or chaqve signe ambig *(2)* Ces lettres *(3)* De ces lettres *(a)* Grecqves, je *(b)* de l'Alphabete *L* 21 , comme $\omega.\,\psi.\,\varphi$ *erg. L*

21 $\omega.\,\psi.\,\varphi$: Leibniz lässt in dieser Aufzählung das χ aus. Infolgedessen bildet er auf S. 138 Z. 12 ein Paar aus γ und φ, wogegen er in der gestrichenen ersten Fassung in Z. 5 φ noch in Opposition zu δ setzt.

lettres n'est pas si forcée, qu'elle le paroist d'abord, car par exemple $-y$ signifie $-1, \frown y$. Or -1, est une grandeur sçavoir un nombre, et chaque grandeur peut estre expliquée par une lettre, donc -1 peut estre expliqué par ω, et nous pouvons faire ωy au lieu de $-y$. pourveu que nous nous souvenons que ces lettres qui signifient un nombre, ou une raison, n'augmentent pas les dimensions: et pour cette raison à fin de les distinguer d'avantage des autres, il sera bon de les renfermer dans une parenthese close, comme $\overline{(\omega)}\,y$. Si deux de ces lettres se trouveront ecrites l'une aupres de l'autre dans une meme parenthese, comme $\overline{(\alpha\omega)}\,y$ cela signifiera ou l'un des signes comme $+$ (ou α) ou l'autre, sçavoir $-$, (ou ω).

Mais il sera à propos de reprendre les exemples, de tous les signes, dont nous avons parlé, et de monstrer comment nous les pourrions exprimer par lettres, d'une maniere qui nous fera voir en même temps ou dans la suite tous leurs usages. Soit une ambiguité:

$$\begin{array}{ll} d \sqcap & +b+c \\ & \text{ou} +b-c \end{array}$$

representons le $+$ de cette p r e m i e r e a m b i g u i t é par α, et le $-$ par ω, et nous aurons

$$\begin{array}{l} d \sqcap +\, b\,\overline{(\alpha\omega)}\,c, \text{ au lieu de} \\ d \sqcap +\, b \quad \mp \quad c \end{array}$$

et si nous cherchons la valeur de b, par la même equation en nous servant d'une transposition necessaire, nous aurons:

$$\begin{array}{lll} b \sqcap d - \overline{(\alpha\omega)}\,c, & & \text{c'est à dire} \\ b \sqcap d \ \ \overline{(\omega\alpha)}\ \ c, & & \text{au lieu de} \\ b \sqcap d \quad \pm \quad c. & & \end{array}$$

Car il est manifeste qu'un signe comme $\overline{(\alpha\omega)}$, estant affecté de $-$ doit estre changé en sorte qu'α soit mis à la place de ω et *viceversa*, puisque $-\alpha$, ou $-\overline{(+)}$ est $\overline{(-)}$ ou ω, et $-\omega$, ou $-\overline{(-)}$ est $\overline{(+)}$ ou $\overline{(\alpha)}$.

2 sçavoir un nombre *erg. L* 8 des signes ... (ou α) *erg. L* 11 par *(1)* signes *(2)* lettres *L* 12 ou dans la suite *erg. L* 17 d $\sqcap$ + b $\overline{(\alpha\omega)}$ c *(1)* et d $\overline{(\omega\alpha)}$ c $\sqcap$ b *(2)*, au lieu *L* 19 eqvation *(1)* par le moyen *(2)* en nous servant *L* 25 $-\alpha$, *(1)* est ω, *(a)* et *(b)* ou $-\overline{(+)}$ est $\overline{(-)}$, et $-\omega$ est $+\alpha$ *(2)* ou $-\overline{(+)}$ *L*

Soit la seconde ambiguité, dans le même calcul:

$$\begin{array}{l} e \;\sqcap\; +f-g \\ \quad\text{ou} -f+g \end{array}$$

posons $\begin{Bmatrix} \beta \\ \psi \end{Bmatrix}$ egal à $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ de la 2 $^{\text{d e}}$ a m b i g u i t é , et nous aurons

$$e \sqcap (\overline{\beta\psi})\, f\, (\overline{\psi\beta})\, g, \text{ au lieu de}$$
$$e \sqcap (\overline{\text{ǂ}})\; f\; (\overline{\text{ǂ}})\; g.$$

Soit une 3me ambiguité, dans le même calcul

$$\begin{array}{l} h \;\sqcap\; +k+l \\ \quad\text{ou} -k+l \\ \quad\text{ou} +k-l \end{array}$$

posons $\begin{Bmatrix} \gamma \\ \varphi \end{Bmatrix}$ egal a $\begin{Bmatrix} + \\ - \end{Bmatrix}$ de la 3 $^{\text{m e}}$ a m b i g u i t é , et nous aurons:

$$h \sqcap (\overline{\gamma\varphi\gamma})\, k\, (\overline{\gamma\gamma\varphi})\, l \quad \text{au lieu de}$$
$$h \sqcap \;\; \text{⁺ǂ} \;\; k \;\; \text{⁺ǂ} \;\; l.$$

Si l'Equation avoit esté
$$\begin{array}{l} h \;\sqcap\; +k+l \\ \quad\text{ou} -k+l \\ \quad\text{ou} +k-l \\ \quad\text{ou} -k-l \end{array}$$

nous eussions eu $\quad h \sqcap (\overline{\gamma\varphi\gamma\varphi})\; k\; (\overline{\gamma\gamma\varphi\varphi})\; l$

au lieu de $\quad h \sqcap \;(\overline{\text{ǂ}})\text{ǂ}\;\; k\;\; (\overline{\text{ǂ}})\text{ǂ}\;\; l.$

Soit une 4me ambiguité, sçavoir

$$\begin{array}{l} m \;\sqcap\; +n \;\text{ǂ}\; p \\ \quad\text{ou}\;\text{ǂ}\; n+p \end{array}$$

posons $\begin{Bmatrix} \delta \\ (\alpha\omega) \end{Bmatrix}$ égal à $\begin{Bmatrix} + \\ \text{ǂ} \end{Bmatrix}$ si ǂ est celuy de la premiere ambiguité, et nous aurons

$$m \sqcap (\overline{\delta, \alpha\omega})\; n\; (\overline{\alpha\omega, \delta})\; p$$

au lieu de $\quad m \sqcap \;\; \text{⁺ǂ} \;\; n \;\; \text{ǂ⁺} \;\; p.$

Je croy que cette façon d'exprimer est assez aisée, j'y adjoute seulement cette caution que l'ordre des lettres aussi bien que des equations particulieres est arbitraire en effect; mais estant choisi une fois, il doit estre observé constamment, pendant qu'il y a un autre

26–139,2 Je croy ... lettres *erg. L*

signe de la même equation ambigue, à fin que ces deux signes gardent un rapport entre eux et puisque il n'y a rien qui les discerne que l'ordre des lettres.

Le grand avantage de cette expression des signes par lettres paroistra clairement dans la suite des operations: cependant il est fort aisé d'y appliquer, tout ce que je viens de dire de l'expression par signes comme par exemple touchant le v i n c u l u m ; *item* touchant le changement d'un signe composé dans un signe simple, en cas qu'il reste seul de tous les autres correspondants. Car si de la 3me Equation susdite le seul signe $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ ou $^+\!\dagger$ reste, et l'autre $(\overline{\gamma\gamma\varphi})$ ou $^+\!\ddagger$ evanouit, le premier pourra estre changé en celuy cy: $(\overline{\gamma\varphi})$ comprenant les deux premiers cas, $\gamma\gamma$, sous un seul: tout ainsi que nous n'avions pas feint de comprendre sous un seul cas le 3me et le 5me endroit du point D, dans la 1. ou 7me figure. Mais si des signes de la quatrieme equation le seul signe $^+\!\dagger$, ou $(\overline{\delta, \alpha\omega})$ reste, et l'autre $\dagger^+$ ou $(\overline{\alpha\omega, \delta})$ evanouit, le dit signe $(\overline{\delta, \alpha\omega})$ ne pourra pas estre changé en un simple, par ce qu'on ne sçauroit determiner si ce signe simple doit estre $(\overline{\delta\omega})$, ou $(\overline{\alpha\omega})$; et par ce que cette quatrieme ambiguité est une soubsdistinction de la premiere, et par consequent les signes de la quatrieme sont correspondents avec ceux de la premiere, de sorte qu'on ne peut pas dire, que de tous les signes correspondants le seul $(\overline{\delta, \alpha\omega})$ reste, puisque les signes de la premiere ambiguité restent encor, comme je le suppose.

A present je croy qu'il sera temps d'expliquer la division generale des Signes, en Homogenes, en Correspondants, et entierement Heterogenes car l'expression des signes par lettres sert beaucoup à l'éclaircir. Cette division est de grande importance dans la suite des operations. Car l'Addition et soubstraction de deux signes Homogenes se peut tousjours faire avec cöalition de ces deux signes en un seul, et pour cette raison je les appelle Homogenes, car deux Grandeurs sont homogenes si on les peut adjoûter ensemble. Si deux signes ambigus homogenes se multiplient et se divisent l'ambiguité évanöuit;

2 f. lettres. *(1)* Il est fort aisé d'appliqver icy | tout *erg.* | ce qve je viens de *(2)* il est fort aisé d'y appliqver aux expressions par lettres *(3)* Le grand ... expression *(a)* paroist *(b)* des signes *(aa)* paroistra clairement dans la suite: cependant *(bb)* par *L* 9–11 comprenant ... figure *erg. L* 12 l'autre | $^+\!\ddagger$ *ändert Hrsg.* | ou *L* 18 la *(1)* distin *(2)* division *L* 19–140,2 car l'expression ... un seul *erg. L*

7 $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$: $^+\!\dagger$ ist in der Buchstaben-Notation als $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ auszudrücken, doch ist umgekehrt die Interpretation von $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ als Doppelvorzeichen nicht eindeutig, da man auch die beiden ersten Buchstaben als Ausdruck einer Ambiguität auffassen kann.

en fin si deux signes correspondents se multiplient, ou s'ils se divisent, il s'ensuit tousjour leur coalition en un seul.

J'appelle H o m o g e n e s, ceux dont un estant expliqué, l'autre s'explique aussi par consequence, entierement et tousjours. Il est aisé de juger par cette definition, que [de] tous les signes il n'y a que ceux qui soient homogenes, qui sont les memes comme $(\overline{\alpha\omega})$ ou ǂ, et $(\overline{\alpha\omega})$ ou ǂ, *item* comme $(\overline{\gamma\gamma\varphi})$ ou +‡, et $(\overline{\gamma\gamma\varphi})$ ou +‡; ou qui sont opposés, comme ǂ et ±, ou $(\overline{\alpha\omega})$ et $(\overline{\omega\alpha})$, ou +† et +± ou $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ et $(\overline{\varphi\gamma\varphi})$.

J'appelle C o r r e s p o n d a n t s, ceux qui tirent leur origine d'une même equation ambigue, et quand ils ne sont pas homogenes, alors quoyque l'un estant expliqué n'explique pas l'autre entierement et tousjours. Il ne laisse pas pourtant d'en deminuer tousjours l'ambiguité; et même de l'expliquer entierement quelques fois. Par exemple soit $AC \sqcap$ +† AB +‡ BC, ou qui revient au même, $AC \sqcap (\overline{\gamma\varphi\gamma})\, AB\, (\overline{\gamma\gamma\varphi})\, BC$. Posons le cas que +†, signifie $+$, alors l'autre +‡ pourra estre changé en un simple ǂ, comme les lettres le font voir. Car puisque le signe $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ ou (+†) signifie $+$, ou γ, donc le 1 ou 3me cas de l'ambiguité sera choisi; or dans l'autre signe +‡, ou $(\overline{\gamma\gamma\varphi})$ le 1. ou 3me cas sera γ ou φ, donc +† signifiant $+$, +‡ deviendra $(\overline{\gamma\varphi})$, c'est à dire ǂ. Mais d'avantage posons que +†, ou +‡, un de deux, signifie, $-$, alors toute l'ambiguité cessera, et l'autre sera $+$, comme il est aisé de demontrer par le moyen des memes lettres.

Les Signes Correspondants sont d'une même ambiguité immediatement, ou mediatement; immediatement, comme dans la 3me ambiguité +† et +‡ dont je viens de parler, ou comme (+†) et (†+) dans la 4me; mediatement, comme †+ dans la quatrieme, et ǂ dans la premiere, par ce que la 4me est une soubsdistinction de la premiere; et se sert de la premiere en y adjoutant encor une nouvelle ambiguité. Il est aisé de les reconnoistre par le moyen des lettres, car ceux qui tirent leur origine d'une même ambiguité immediatement, n'ont que les memes lettres diversement rangez; comme $(\overline{+\dagger})$ s'exprime par $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$, et $(\overline{+\ddagger})$ par $(\overline{\gamma\gamma\varphi})$. Et +† s'exprimant par $(\overline{\delta, \alpha\omega})$, †+ s'exprime par $(\overline{\alpha\omega, \delta})$. Mais ǂ s'exprimant par $(\overline{\alpha\omega})$, †+ s'exprime par $(\overline{\delta, \alpha\omega})$. Les memes lettres font connoistre d'abord, si deux signes sont entierement H e t e r o g e n e s ou sans correspondence; c'est à dire s'ils naissent

14 signe $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$ *(1)*, le (+) c'est a dire γ, c'est à dire le 1. ou 3me cas, est choisi; *(2)* ou (+†) *L* 16 +† deviendra $(\overline{\gamma\varphi})$ *L ändert Hrsg.* 19 même *(1)* Eqvation m *(2)* ambiguité *(a)* mediat *(b)* immediatement *L* 20 3me *(1)* Eqvation ceux *(2)* ambiguité *L* 20 +‡ | de la troisieme Eqvation *erg. und gestr.* | dont *L* 21 comme †+ *(1)* et ǂ de la premiere *(2)* dans la qvatrieme *L* 24 f. immediatement, *(1)* ont *(2)* n'ont qve *L* 28–141,1 naissent *(1)* des eqvations en *(2)* d'ambiguitez *L*

d'ambiguitez entièrement differentes, et sans dependance, en sorte que l'explication de l'un des signes ne contribue rien du tout à l'explication de l'autre, car alors ils n'ont point de lettre commune, comme par exemple le signe ǂ, et le signe +ǂ, dont l'un signifie $(\overline{\alpha\omega})$, et l'autre $(\overline{\gamma\varphi\gamma})$. Et cela arrivera dans le calcul du probleme proposé, des perpendiculaires des Coniques, voyez la fig. 1. et 7. car alors l'explication du signe ǂ depend de la nature de la courbe proposée ABC, mais l'explication du signe +ǂ depend de l'endroit du point donné, D.

L'on me demandera à present, si j'aimerois mieux d'exprimer les signes Ambigus par signes, ou par lettres. Je reponds; que j'aimerois mieux d'exprimer les signes simples par signes, et les signes composez par lettres. Il me reste seulement d'adjouter: si l'on veut employer les signes soit simples, soit composez, et qu'on trouve deux signes heterogenes, mais semblables, qu'il faut renfermer l'un d'eux dans une parenthese, comme ǂ et $(\overline{ǂ})$, et s'il y en avoit trois, l'on feroit ǂ, et $(\overline{2ǂ})$, et $(\overline{3ǂ})$ de même +ǂ, et $(\overline{2+ǂ})$, et $(\overline{3+ǂ})$. Mais si l'on [se] sert de lettres on n'a pas besoin de marquer ces parentheses par nombres.

5 voyez la fig. 1. et 7. *erg. L* 5 alors *(1)* | l'explication de *erg.* | ǂ depend de la nature de la courbe donné, et +ǂ *(2)* on me demandera si l'explication *(3)* l'explication *L* 6 ABC, mais *erg. L*

12. TABLE DES SIGNES DE LA MÉTHODE DE L'UNIVERSALITÉ [Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 39–40. 1 Bog. 2^{o}. 3 S. Auf Bl. 39 r^{o} befindet sich N. 13.
Cc 2, Nr. 863 B, F

Datierungsgründe: Die französischsprachigen Stücke der folgenden Gruppe (N. 12–15) basieren auf der ebenfalls auf französisch verfassten *Méthode de l'universalité* (N. 10 und 11, zu datieren auf Mai bis Juni 1674). N. 12 und 13 fassen wesentliche Aussagen der *Méthode* zusammen und ergänzen sie. In N. 14 und 15 wird die *Méthode* sodann auf das Problem der *Minima ad conicam* angewendet. Der Stand der inhaltlichen Reflexion spricht dafür, dass Leibniz diese vier Stücke bald nach der *Méthode* verfasst hat. Die wörtliche Übernahme ganzer Abschnitte steht einer solchen Datierung nicht entgegen. Auch die Wasserzeichen der verwendeten Papierbögen lassen sich mit dieser Datierung gut vereinbaren: Die auf ein und demselben Bogen niedergeschriebenen N. 12 und 13 stimmen in dieser Hinsicht höchstwahrscheinlich, N. 14 stimmt eindeutig mit N. 9, 10 und 11 (zudem aber auch mit N. 23 sowie 38–42) überein, und N. 15 weist das gleiche Wasserzeichen auf wie N. 16 (aber auch wie N. 24).

La Methode de l'Universalité,

nous enseigne de trouver par un seul calcul des formules analytiques, et des constructions Geometriques generales, pour des sujets ou cas differents, dont chacun sans cela auroit besoin d'une analyse ou synthese àpart.

Les Instrumens de cette methode sont les caracteres ambigus.

Les Caracteres ambigus sont ou Lettres qui signifient les grandeurs mêmes, ou signes qui expriment la relation des grandeurs.

Les Lettres ambigues signifient tantost des grandeurs ordinaires tantost des grandeurs infinies ou infiniment petites à l'égard des autres.

Les Signes ambigus servent à marquer qu'une grandeur affectée d'un tel signe, signifie + dans un certain cas, et − dans un autre.

21 f. sont *(1)* ou signes *(2)* ou Lettres qvi signifient *(a)* ou les grandeurs, ou leur relation *(b)* les grandeurs mêmes, *(aa)* et signes. *(bb)* ou signes qvi expriment *(aaa)* leur *(bbb)* la *L*

16–19 La Methode ... àpart: Der einführende erste Satz entspricht, von zwei Änderungen abgesehen (*calcul* statt *operation*, *àpart* statt *particuliere*) demjenigen der Stücke N. 10 u. 11 (*Méthode de l'universalité I* bzw. *II*).

Pour dresser des Equations ambigues generales, il faut dresser une liste des Equations particulieres, en remarquant toutes les Situations possibles d'un certain p o i n t a m b u l a t o i r e ou de plusieurs, qui changent le calcul: et on forme des signes ambigus, qui s'accordent avec cette liste, comme les exemples feront juger.

S'il y a plusieurs ambiguitez, ou E q u a t i o n s a m b i g u e s independantes l'une de l'autre dans la suite d'un même calcul, on peut renfermer les signes dans des P a r e n t h e s e s , closes par enhaut (a fin de les discerner d'autres sortes de parentheses) et les marquer meme des nombres de l'ambiguité dont chaque signe depend, comme $\mp$, $(2\mp)$, $(3\pm)$. Et cela est necessaire sur tout quand ces signes sont semblables; mais si les signes d'une ambiguité sont par exemple $\mp$ et $\pm$, et ceux de l'autre $^{+}\!\mp$, et $^{+}\!\pm$ l'on peut negliger cette precaution, parce qu'alors il n'y a point de confusion à craindre.

Or venons aux particularitez.

T a b l e d e s S i g n e s d e l a M e t h o d e d e l ' U n i v e r s a l i t é

I. ambiguité

$$a \overset{\text{égal}}{\sqcap} +b \mp c \quad \text{signifie} \quad a \sqcap \begin{array}{l} +b+c \\ \text{ou } +b-c \end{array}$$

Consequence de la 1. amb.

$$b \sqcap +a \pm c \quad \text{signifie} \quad b \sqcap a \; - \mp c \quad \text{c'est à dire} \quad b \sqcap a, \text{ moins } \mp c.$$

II. Amb.

$$a \sqcap (\mp)\, b\, (\pm)\, c \quad \text{c'est à dire} \quad a \sqcap \begin{array}{l} +b-c \\ \text{ou } -b+c \end{array} \quad \text{signifie, que } a \text{ est la difference entre } b, \text{ et } c.$$

J'appelle deux S i g n e s O p p o s e z si, une grandeur affectée de l'un, vaut autant que zero moins la même grandeur affectée de l'autre signe. Par exemple $\mp$ et $\pm$, par ce que $\pm c, \sqcap 0 -, \mp c$, et pour cette raison j'ay accoûtumé de les marquer en sorte, qu'il n'y ait

3 ou de plusieurs *erg. L* 3 on *(1)* accomode les signes, qv'on f *(2)* forme *L* 6 dans ... calcul *erg. L* 11 parce qv' ... craindre *erg. L* 20 si, *(1)* a augmenté d'une *(2)* une *L*

18 II. Amb.: Die Zwischenüberschriften *II. Amb., III. Ambig., IV. Ambig.* hat Leibniz nachträglich eingefügt und wohl im selben Zuge die Größen auf der linken Seite der Gleichungen, die er zuvor mit d, g, h bezeichnet hatte, allesamt in a umbenannt.

point d'autre difference entre eux, que celle: que l'un d'eux soit marqué d'un − au bas, ou qu'il insiste sur un _ comme par exemple ⁺ǂ, et ⁺ǂ̲ par consequent ǂ̲ (3⁺ǂ) a, ⊓ ǂ(3⁺ǂ) $\langle - \rangle a$ ou ⊓ ǂ (3⁺ǂ̲) a.

III. Ambig.

a ⊓ (2⁺ǂ) b (2ǂ⁺) c signifie a ⊓ + b (2ǂ) c
ou (2ǂ) b + c

IV. Ambig.

a ⊓ (3⁺ǂ) b (3⁺ǂ) c signifie a ⊓ $+b$ $+c$, c'est à dire, a ⊓ $+b$ $+c$
(3ǂ){ $+b$ / $-b$ } (3ǂ̲){ $-c$ / $+c$ } ou (3ǂ) b (3ǂ̲) c

a estant ou la somme, ou la difference de b. c. cela fait voir clairement la raison de la fabrique des signes, et il faut remarquer seulement que de + ou (3ǂ̲), on a fait tout expres (3⁺ǂ) au lieu de (3⁺ǂ̲) par ce que (3⁺ǂ̲) signifie le signe opposé à (3⁺ǂ).

Si nous eussions eu

f ⊓ + b + c (3ǂ){ + e / − e }
(3ǂ){ + b / − b } (3ǂ̲){ − c / + c } − e, cela auroit fait
――――――――――――――――――――――
f ⊓ (3⁺ǂ)b (3⁺ǂ)c (3ǂ⁻) e

car ǂ⁻ composé de ǂ et − signifie ǂ ou −.

S i g n e s H o m o g e n e s sont ou les mêmes, ou les opposez comme ǂ et ǂ, ou ǂ̲ et ǂ, ou ⁺ǂ et ⁺ǂ̲.

S i g n e s a m b i g u s c o r r e s p o n d a n t s sont qui entrent dans une meme ambiguité, ou Equation ambigue ou dans des cas particuliers, qui composent une même Equation, comme (3⁺ǂ) et (3⁺ǂ).

2 f. comme . . . ou ⊓ | ǂ̲ (3⁺ǂ) *ändert Hrsg.* | a *erg. L* 10 f. à (3⁺ǂ). *(1)* Deux signes semblables mais differents, par ce qv'ils tirent leur origine de differentes ambiguitez d'un même calcul seront distinguées par des p a r e n t h e s e s et s'il y en a beaucoup par des p a r e n t h e s e s marqvées de nombres. Comme s'il y avoit a ⊓ b ǂ c, et d ⊓ + e − f (ou − e + f) nous ferons d ⊓ (ǂ) e (ǂ̲) f. Et s'il y avoit une troisieme, je marqverois son ǂ ainsi: g ⊓ (3ǂ) h + k. (ǂ) je trouve a propos de fermer par enhaut les parentheses des signes, à fin de les discerner d'autres parentheses. *(2)* a ⊓ (ǂ) ǂ b (ǂ)ǂ *(3)* Si *L*

Les autres sont entierement Heterogenes comme ǂ et (2ǂ). Un signe estant expliqué, (par l'appliquation de la formule generale à un certain cas particulier) l'autre Homogene s'explique aussi entierement et tousjours. Par exemple si ⁺† signifie + ⁺‡̲ signifiera −. Un signe estant expliqué, l'ambiguité de l'autre correspondant est tousjours diminuée. Par exemple, si ⁺† signifie +, alors ⁺‡ signifiera ǂ; mais pas tousjours ostée entierement, mais quelques fois, comme dans le même exemple ⁺† signifiant −, ⁺‡ signifie +.

Algorithme ou operations simples

Addition et Soubstraction

Si les signes sont homogenes, on en peut faire un seul par le moyen d'un *vinculum*. Au lieu de ǂa ‡ b nous pourrons faire ǂ, $\overline{a-b}$. Si une meme grandeur est repetée, alors au lieu de ǂ $3yc+y$ ⁺‡ dy nous pourrons faire $y,\frown$ ǂ $3c+1+$ ⁺‡ d.

Multiplication et Division

Il n'y a point de difference entre une grandeur multipliée par un signe et divisée par le même signe car ǂa, ⊓ $\dfrac{a}{ǂ1}$.

Deux signes Homogenes entierement semblables font +
.... opposez ...... −

ǂ a ⌒ ‡ b fait $-ab$

⁺† a, □, fait $+a^2$

$\dfrac{⁺† a}{⁺‡̲ b}$ fait $-\dfrac{a}{b}$

Un signe multiplié ou divisé par + demeure sans changement, par − est changé dans son opposé: $+a$ ⌒ ǂ b, ⊓ ǂ ab, $-a^{[\frown]}$ ǂ b ⊓ ‡ ab, $-a^{[\frown]}$ ‡ b ⊓ ǂ ab.

Par consequent si de plusieurs signes qui se multiplient le nombre de ceux qui portent un − au bas est pair, on obsmettra ces traits ou −; s'il est impair on obmettra tous ces

1–3 signe |Homogene *gestr.*| estant ... l'autre |Homogene *erg.*| s'expliqve *L* 3 f. Par ... signifiera −. *erg. L* 4 signe *(1)* corresponde *(2)* estant expliqué, *(a)* l'autre correspo *(b)* l'ambiguité *L* 8 Algorithme ... simples *erg. L* 14 f. Il ... $\dfrac{a}{ǂ1}$ *verschiebt L vom Ende des folgenden Absatzes — also im Anschluss an* $-\dfrac{a}{b}$ *— hierher* 23–146,2 Par ... (3⁺†) a. *erg. L* traits, ou−, horsmis un qui se pourra placer ou l'on voudra, par exemple ‡ (3+‡) (2‡+) a fait ǂ (3+ǂ) (2ǂ+) $-a$ ou ǂ (3+‡) (2ǂ+) a et ‡ (3+‡) a, fait ǂ (3+ǂ) a.

Si les signes qui se multiplient, ou qui se divisent sont correspondants seulement: leur nature particuliere qui se reconnoit par la forme du Caractere, fera juger du produit. Par exemple

(2+ǂ) b ⌢ (2ǂ) a, fait (2ǂ+) ab
(2+ǂ) a ⌢ (2ǂ+) b, fait (2ǂ) ab
(2+ǂ) a ⌢ (2ǂ+) b ⌢ (2ǂ) c, fait $+abc$
(3+ǂ) a ⌢ (3+ǂ) b, fait (3ǂ) ab

Exemple d'une extraction d'une Racine Quarrée

Soit une Equation $2ax \text{ ǂ } \frac{a}{q}x^2, \sqcap y^2$, et la question est comment il faut exprimer la valeur de x, conformement à cette Equation, or je dis, que

$$+x \sqcap \text{ǂ}\sqrt{\frac{aq^2 \text{ ǂ } y^2q}{a}} \;\text{‡}\; q$$

dont voicy la preuve. En transposant nous aurons $+x \text{ ǂ } q \sqcap \text{ ǂ}\sqrt{\frac{aq^2 \text{ ǂ } y^2q}{a}}$, dont le quarré sera, $+x^2 \text{ ǂ } 2xq + q^2 \sqcap \frac{aq^2 \text{ ǂ } y^2q}{a}$. Multipliant tout par a, ce sera: $+ax^2 \text{ ǂ } 2aqx + \cancel{aq^2} \sqcap \cancel{aq^2} \text{ ǂ } y^2q$, ostons aq^2 de deux costez, et divisons tout, par ǂq, $\frac{+ax^2}{\text{ǂ}q}\ \frac{\text{ǂ}2aqx}{\text{ǂ}q} \sqcap \frac{\text{ǂ}y^2q}{\text{ǂ}q}$, et nous aurons: $\text{ǂ}\frac{a}{q}x^2 + 2ax \sqcap y^2$ qui est l'equation donnée.

La consideration de cette operation peut servir d'exemple à la pluspart de nos preceptes.

6 fait | (3ǂ+) *ändert Hrsg.* | ab *L*

13 $+x \sqcap$: Das Doppelvorzeichen vor der Wurzel ist unabhängig von den anderen drei Doppelvorzeichen der Gleichung, was Leibniz durch eine Klammerung darzustellen pflegt. Es muss also richtig heißen: $x = (\text{ǂ})\sqrt{\frac{aq^2 \text{ ǂ } y^2q}{a}} \text{ ‡ } q$.

Operations composées

Consistent dans la formation des Definitions, invention des proprietez, et effection des Demandes.

Definitions des Figures, et Equations propres à expliquer la relation de tous les points des courbes, à une certaine droite, ne sont qu'une même chose. Or trouver des definitions communes à plusieurs figures, c'est les reduire en Harmonie pour y trouver des theoremes universels, et des constructions communes de quelque probleme proposé.

Exemple de la Reduction des Figures differentes en harmonie, essayé dans les Coniques.

....

....

Exemple d'une Proprieté commune à toutes les Coniques, demonstrée generalement par la methode de l'universalité.

....

....

Essay de la methode de l'universalité, ou

Exemple d'un Probleme des plus difficiles et des plus fameux, proposé dans les coniques, et resolu par deux constructions universelles, dont l'une se fait par le moyen de la Conique donnée et de l'Hyperbole, l'autre par le moyen de la Conique donnée et du Cercle.

16 Essay ... ou *erg. L* 17 et ... fameux, *erg. L*

---

8 Reduction des Figures: vgl. N. 10 § 2. 12 Proprieté commune: vgl. N. 10 § 54. 16 methode de l'universalité: vgl. N. 15.

13. TABLE DES CARACTÈRES ANALYTIQUES
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 39–40. 1 Bog. 2°. 1 S. auf Bl. 39 r°. Auf den drei anderen Seiten des Bogens findet sich N. 12, *Table des Signes de la Méthode de l'Universalité*.
Cc 2, Nr. 863 E

Datierungsgründe: Eine unbetitelte Tabelle in der wahrscheinlich im Juni 1674 verfassten *Méthode de l'universalité II* (N. 11 S. 117 f.) liefert die Grundlage für das vorliegende Stück. Sie ist um eine Reihe von Einträgen erweitert und um einige wenige gekürzt, an manchen Stellen umformuliert sowie um Kommentare ergänzt worden. Das Stück ist somit nach N. 11 verfasst worden; aus den in den Datierungsgründen zu N. 12 genannten Erwägungen zum Stand der inhaltlichen Reflexion der Gruppe N. 12–15 heraus ist davon auszugehen, dass der zeitliche Abstand zur *Méthode* jedoch nicht sehr groß war.

Table des Caracteres Analytiques

$a \sqcap b$	signifie a egal à b
$a \ulcorner b$	signifie qu'a est plus grand que b
$a \urcorner b$	signifie .... moindre ....
$a + b$	signifie a plus b, ou l'addition
$a \sqcap c + b$	signifie aussi $a \ulcorner b$, pourveu que c soit une vraye grandeur ou $\ulcorner 0$
$a - b$	signifie a moins b ou la soubtraction et par consequent
$a \sqcap -c + b$	.... aussi $a \ulcorner b$ pourveu que c soit $\ulcorner 0$.

NB. Il est important quelques fois (: comme en matiere de la recherche des Lieux, :) de discerner les vrayes grandeurs des fausses ou negatives, ou au moins de celles qui peuvent estre fausses: et pour cet effect on pourra choisir certaines lettres pour les unes, et autres pour les autres: on se pourra même servir des signes ambigus simples, dont je parleray par apres. Une ligne determinée par ses deux points, comme AC, est tousjours une vraye grandeur, si elle est prise absolument.

14 des *(1)* Signes *(2)* Caracteres *L* 19 aussi *(1)* qu'a est $\ulcorner$ b *(2)* a $\ulcorner$ b *L*
26 f. Une ligne ... absolument *erg. L*

$\left.\begin{array}{l} a \frown b \\ \text{ou } ab \end{array}\right\}$ signifie a multiplié par b. Je trouve ce signe $\frown$ assez commode, quand a, aussi bien que b, est fort composé

$\left.\begin{array}{l} a \smile b \\ \text{ou } \frac{a}{b} \end{array}\right\}$ signifie a divisé par b. Et l'on se peut servir du signe $\smile$ quand la soubscription est fort incommode

$\frac{a}{b}$ signifie aussi la raison de a, à b quand a est l'antecedent et b le consequent

$\dfrac{\frac{a}{b}}{c}$ signifie, que $\frac{a}{b}$ est divisé par c

$a \,.\, b : c \,.\, d$ signifie $\frac{a}{b} \sqcap \frac{c}{d}$, c'est à dire, que la raison de a, à b, est la même avec la raison de c à d

$\left.\begin{array}{l} x \\ y \\ z \end{array}\right\}$ signifieront ordinairement des grandeurs inconnues, et generalement les premieres lettres de l'Alphabete serviront pour les connues, les dernieres pour les inconnues

$\sqrt{}ab + b$ signifie b plus racine quarrée de ab

$\sqrt{ab+b}$ signifie la racine quarrée de $ab+b$

$\sqrt{}(3)ab^2$ signifie la racine cubique de ab^2

$\sqrt{}(4)ab^3$ .... quarre-quarrée de ab^3

$\left.\begin{array}{l} 2b \\ 3b \end{array}\right\}$ signifie $b \left\{\begin{array}{l} \text{deux} \\ \text{trois} \end{array}\right\}$ fois

$\left.\begin{array}{l} b^2 \\ b^3 \end{array}\right\}$ signifie $b \left\{\begin{array}{l} \text{quarré} \\ \text{cube} \end{array}\right\}$

etc etc

$b^{\frac{c}{d}}$ ou b^e signifie la puissance de b, dont l'exponant est la raison de c, à d, ou le nombre e.

NB. Il est important de discerner les lettres qui signifient des choses grandes, comme lignes, forces; de celles qui signifient des grandeurs abstraites, comme nombres ou raisons; car celles cy n'augmentent pas les dimensions. Le plus seur est peut estre, de n'exprimer

25 Le *(1)* meilleur *(2)* plus seur *L*

jamais un nombre, ny raison, par une lettre, mais tousjours par deux lettres pour le moins, dont l'une divise l'autre; à fin que les lettres signifient tousjours des grandeurs concretes.

$a+b, \boxed{},$	signifie le quarré de $a+b$	
$a+b, \boxed{3},$	en signifie le cube	
.... $\boxed{4}$	.... quarre-quarré	
$a+b, \boxed{\frac{c}{d}}$	signifie la puissance de $a+b$, dont l'exponant est $\frac{c}{d}$	
$\left.\begin{matrix} a \\ b \end{matrix}\right\}, +\mathrm{c}$	signifie a, ou b, $+c$	
$+a+b$	signifie $+a+b$	car les points signifient la repetition de ce
$+a$.....	$+a+b$	qui est immediatement au dessus d'eux
$a \frown c, +b$	signifie $ac+b$	
$a, \frown c+b$	signifie a multiplié par $c+b$	
$a, \frown c+b, , \smile d+e$	signifie le produit a multiplié par $c+b$, divisé par $d+e$.	

Établir des Distinctions, est une fonction assez importante de l'Analyse, ou plus tost de la Caracteristique en General.

1 f. pour le moins *erg.* *L*

14. ESSAY DE LA MÉTHODE DES UNIVERSELS
[Mitte 1674]

Überlieferung:

L^1 Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 169–170. 1 Bog. 2°. $2\frac{1}{2}$ S. Bl. 170 v° leer. Ursprünglich etwa doppelt so lang; die fehlende erste Hälfte lässt sich aus L^2 erschließen.
Cc 2, Nr. 862 A

L^2 Reinschrift: LH 35 XIII 3 Bl. 167–168. 1 Bog. 2°. 4 S. Für die ersten beiden Drittel fehlt die Vorlage, das letzte Drittel ist eine Kopie des ersten Teiles von L^1. Geringfügiger Textverlust durch Papierschaden auf Bl. 167 r°. (Erster Teil unserer Druckvorlage.)
Cc 2, Nr. 862 B

l Reinschrift: LH 35 XIII 3 Bl. 171–172. 1 Bog. 2°. $1\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 171 (Bl. 172 leer). Kopie des zweiten Teils von L^1 von unbekannter Schreiberhand mit vereinzelten Ergänzungen von Leibniz' Hand (*Lil*). Drei Zeichnungen von Leibniz' Hand, deren erste in L^1 fehlt. Leichter Papierschaden an Bl. 171. (Zweiter Teil unserer Druckvorlage.)
Cc 2, Nr. 862 C

Datierungsgründe: Das Stück behandelt das Problem der *minima ad conicam* und wendet hierbei die in N. 10 und N. 11 entwickelte *Méthode de l'universalité* an, womit es zeitlich nach diesen Stücken — und somit nicht vor Juni 1674 — anzusetzen ist. Verschiedene noch frühere Stücke liefern Vorarbeiten zum hier behandelten Problem, insbesondere N. 5 und N. 9. So greift Leibniz, als er Fig. 6 in unserem Stück ausarbeitet, in N. 9 auf die Fig. 1 zurück und überarbeitet diese in diesem Zusammenhang. Andererseits ist das vorliegende Stück offensichtlich entstanden, bevor Leibniz Sluses *Mesolabum* rezipiert und Mitte 1674 sein Exzerpt (N. 16) angefertigt hat. — Zum Wasserzeichen vgl. die Datierungsgründe zu N. 12.

Essay de la Methode des Universels, fait dans les Coniques.

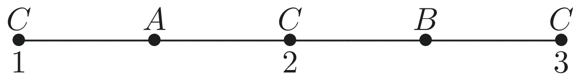
La Methode des Universels consiste dans l'usage des caracteres ambigus, qui sont signes ou lettres.

Explication des Signes.

b ǂ a signifie $b + a$, ou $b - a$.

b ‡ a signifie, b, moins cette grandeur susdite, ǂa. Par consequent quand ǂ signifie $+$, alors ‡ signifiera $-$, et quand ǂ signifie $-$, alors ‡ signifiera $+$.

Dans l'Hyperbole ǂ signifie $+$, dans le Cercle ou Ellipse, $-$, dans la Parabole $+$ aussi bien que $-$.



[*Fig. ohne Nummer*]

Soyent trois points $A. B. C.$ dans une même droite dont $A.$ et B, sont considerez comme fixes, et $C.$ comme mobile: l'on voit que $C.$ peut avoir trois situations differentes, qui font naistre autant d'Equations, pour expliquer la grandeur $AC.$ par le moyen des deux autres, $AB.$ $BC.$

1	$- AB + BC \sqcap AC$
2	$+ AB - BC \sqcap AC$
3	$+ AB + BC \sqcap AC$
ou	$^+$‡ AB $^+$ǂ $BC \sqcap AC$

Car dans la premiere situation AC est égale, à $+BC - AB$, dans la deuxiesme, à $+AB - BC$, et dans la troisiesme, à $AB + BC$, que nous pourrons comprendre toutes trois dans cette quatrieme ambigüe, $AC \sqcap$ $^+$ǂBC $^+$‡ AB, ce qui veut dire, que AC est ou la somme ou la difference de BC et AB.

La negation de $^+$ǂ, c'est à dire, moins $^+$ǂ sera $^+$‡ de même $-$$^+$‡ fera $^+$‡.

Il y en a d'autres signes plus composés, quand il y a plus de trois points: mais je n'en ay pas besoin à present.

J'ay trouvé l'usage de ces caracteres fort important, et fort commode, premierement quand il s'agit de demonstrer universellement des Theoremes qui ont plusieurs

12–15 *Tabelle erg.* L^2

cas, comme ceux de Ptolemee et de Theon de la Composition de la raison; en s e c o n d l i e u , quand on demande la solution d'un probleme de plusieurs cas. Car ordinairement les Geometres ayant donné la solution d'un cas ou deux laissent au lecteur le soin de calculer les autres à leur imitation quoyque cette imitation soit bien souvent tres difficile, sur tout quand ils n'ont donné que la construction et synthese des cas expliqués, sans l'analyse. Mais e n t r o i s i e s m e l i e u l'usage presque indispensable, de cette methode des Universels, paroist sur tout, quand il s'agit de trouver des harmonies, ou des proprietez communes à des figures differentes.

Pour faire voir tout cecy par un exemple j'ay choisi ce probleme:

„D'un poinct donné mener une perpendiculaire à une Section Conique donnée, dont „l'espece est indefinie.

Dans la f i g. 1 soit le point donné D. du quel soit menée sur l'Axe AX prolongué au besoin, la perpendiculaire à l'axe, DC, de mesme la perpendiculaire à la courbe, DY, prolonguée en cas de besoin [qui] rencontrera l'axe dans le point B. Voila donc icy nostre cas susdit des trois points $A.B.C.$ et AC sera égale à +† BC +‡ AB, car les deux points $A.B.$ estant considerés comme fixes, le point C sera mobile, ou variable.

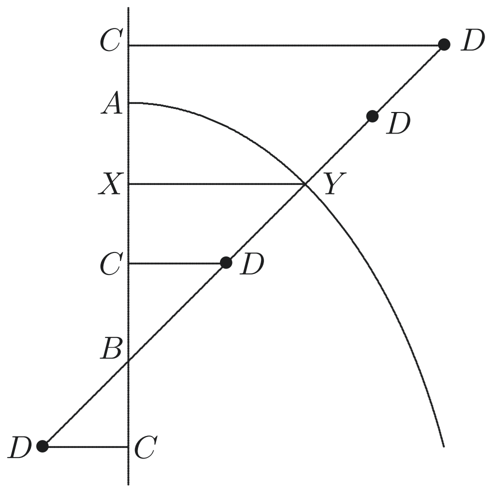


fig. 1.

7 s'agit de *(1)* demonstrer universellement *(2)* trouuer L^2 14 f. perpendiculaire | à l'axe *erg.* |, DC. | de mesme *erg.* | la perpendiculaire L^2

1 Ptolemee ... Theon: Gemeint sind die Transversalensätze des Menelaos aus dem 3. Buch von dessen *Sphaerica*. Diese wurden über die Gleichheit des Verhältnisses zweier Größen zu einem aus zwei solchen Verhältnissen zusammengesetzten Ausdruck dargestellt und waren daher auch als *regula sex quantitatum* bekannt. Bis ins 17. Jahrhundert schrieb man sie Ptolemaios zu. Dieser hatte in seinem *Almagest* (1. Buch, Kap. 11) je zwei Fälle des Satzes für das ebene und für das sphärische Dreieck bewiesen, ohne seine Quelle anzugeben. In seinem Kommentar zum *Almagest* spielte Theon von Alexandria weitere Fälle durch.

Explication des Lettres.

$2a$ est *latus rectum*, $2q$ *latus transversum* de la courbe. J'appelle *latus transversum*, la ligne droite qui joint les deux sommets opposés, comme cela se voit plus bas dans la 3[me] figure. D'ou vient que dans la Parabole *latus transversum* est infini, et dans le Cercle *latus Rectum* et *transversum* sont égaux. Le Triangle a aussi son *latus rectum* et *transversum*, d'une maniere assez extraordinaire.

Toutes les harmonies des Coniques sont fondées la dessus: et l'on peut dire que cette observation quelque legere qu'elle puisse paroistre est la clef de cette science universelle des coniques, outre qu'elle nous ouvre le chemin aux harmonies des figures plus composées.

On me dit, que Mons. des Argues avoit un theoreme general, mais bien long, qui luy deuvoit servir de fondement en cette matiere, et le mien qui suffit à demonstrer tous les theoremes, et à resoudre universellement tous les problemes rectilignes des coniques est à peine de deux lignes de longueur.

J'appelle Problemes rectilignes, quand on ne demande ny suppose que la grandeur des lignes droites, ou espaces rectilignes, car j'avoue, que je ne sçay pas encor le moyen de resoudre universellement les problemes Coniques des Quadratures et des centres de Gravité et autres qui en dependent. Dont il ne faut pas s'étonner; car ces sortes de problemes ne sont pas sujets à l'analyse connue: Mais je croy de pouvoir venir à bout universellement de tous les autres: dont Mons. des Argues estoit bien éloigné; puisqu'il n'agissoit que par la synthese qui se trouve courte dans des problemes difficiles.

Avant que de venir à la construction du probleme proposé, je trouve à propos, de mettre en avant deux problemes fort étendus, dont le premier contient la construction de toutes les Equations quarrées d'une seule inconnue par le moyen du cercle, et l'autre determine le lieu à la section conique donnée de toutes Equations quarrées à deux inconnues qui se peuvent reduire à la formule que je donneray cy dessous.

---

2 *Am Rand*: *a. q.*

6 transversum, | mais *gestr.* | d'une L^2

---

11 theoreme: Desargues' Kegelschnittlehre stellt H. Oldenburg (gestützt auf Angaben von J. Collins) in seinem Brief an Leibniz vom 16. April 1673 (III, 1 N. 13_2 S. 61 f.) dar.

problem. I.

„Une Equation estant proposée, $x^2 \sqcap (ǂ)\, bx\, ((ǂ))\, ca$, trouver x.

$(ǂ)\, b$ signifie que b peut estre affectée du signe $+$ ou $-$, et $((ǂ))\, c$. signifie le meme de c. Le signe ambigu de l'un est renfermé dans une simple parenthese, et l'autre dans une double, pour marquer que ces deux ambiguitez ne dependent pas l'une de l'autre: car par exemple $(ǂ)\, b$ estant expliqué par $+\, b$, le signe $((ǂ))$ de c, demeure encor ambigu.

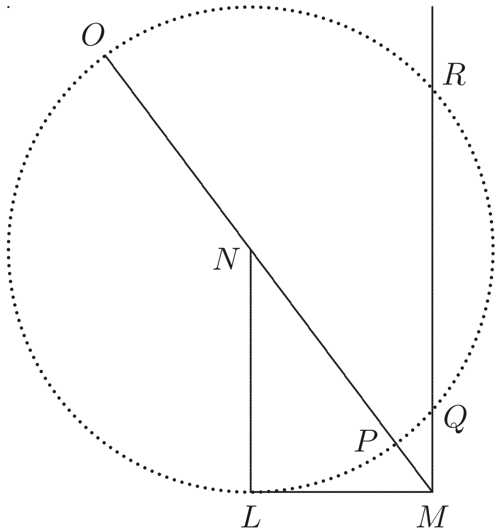


fig. 2.

Or la construction du probleme proposé est telle: Dans l a f i g. 2 soit du centre N, et du rayon NL, décrit le cercle LRO, qui est touché en L, par LM. Le Rayon NL sera égal à $\frac{b}{2}$, et la touchante LM pourra ca. Du point M soit menée la droite $MPNO$. qui passe par le centre N, et rencontre le cercle dans les points O. P. si le signe $((ǂ))$ signifie $+$. Mais s'il vaut moins, alors au lieu de cellecy une autre droite sera menée sçavoir MQR. parallele à LN. qui ⟨rencon⟩trera le cercle dans les points, Q. R. La por⟨ti⟩on de la droite menée, interceptée entre le point de la rencontre et le point M., sera l'inconnue x. avec

9 du rayon NL | egal à $\frac{\mathrm{b}}{2}$ *erg. u. wieder gestr.* |, décrit L^2 12 au lieu de cellecy *erg.* L^2

cette difference quand ((ǂ)) vaut $+$, qu'alors OM sera x, quand (ǂ) vaut aussi $+$, et PM, quand (ǂ) vaut $-$. Je ne m'arreste pas d'avantage la dessus, par ce que Mons. des Cartes l'a donné déja dans le premier livre de sa *Geometrie*.

Problem. II.

„Une Equation à deux inconnues, x. et y. estant donnée, dont la formule est telle:

$$„\qquad \begin{array}{l} \text{ǂ}\dfrac{a}{q}x^2 + g\,\dfrac{a}{q}x + ca \sqcap y^2 + \dfrac{\delta a}{\mu}y\ , \\ \qquad\quad +\,2\,a\ \cdot\cdot \end{array}$$

„trouver son lieu à la section conique donnée; dont le *latus rectum* est $2\,a$, le *trans-* „*versum* $2\,q$, et dont l'espece est indefinie.

C'est à dire, monstrer, comment, l'une des inconnues estant determinée, ou prise à discretion, l'autre se trouve aussi par le moyen de la conique donnée.

Il y a trois grandeurs connües arbitraires dans cette Equation, sçavoir, $g.\ c.\ \frac{\delta a}{\mu}$. et la construction est tousjours la même, quelque valeur, ou quelques signes elles puissent avoir, si mêmes on les suppose égales à 0, car alors la place, de ce qu'elles multiplient se trouvera vuide: par exemple si g et $\frac{\delta a}{\mu}$, egales à 0, et c une grandeur fausse ou negative, egale à $-f$, l'equation sera telle: $\text{ǂ}\frac{a}{q}x^2 + \underset{*\ \cdot\cdot}{2ax} - fa \sqcap y^2 *$. Il faut seulement remarquer, que dans la parabole $\text{ǂ}\frac{a}{q}x^2$. et $g\frac{a}{q}x$ manqueront tousjours. La Construction de ce lieu general à la section Conique generale, est telle:

2f. des Cartes: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 6f. 16 Construction: Die folgende Beschreibung der zeichnerischen Lösung des Problems ist inkonsistent und fehlerbehaftet.

Prenez b egale à $g\dfrac{a}{q}+2a$. et r égale à $\dfrac{\delta a}{\mu}$. et ayant fait une Equation
$$\begin{array}{l} \ddagger\, cq\quad \ddagger\, g\,\text{♀} \sqcap \text{♀}^2 \\ \ddagger\, \dfrac{qr^2}{4a} \\ -\dfrac{q^2b^2}{2a^2} \\ +\dfrac{q^2b}{a} \end{array}$$
nous trouverons l'inconnue ♀ par le moyen du probleme I. L'ayant trouvée, soubstraites la de $\dfrac{ga}{q}$. soit la ligne AP. égale à ce qui reste, la quelle vous prendrez dans l'axe de la section, d'un tel sens, que A estant le sommet et B le centre. AC. *latus transversum* égal à $2q$. àlors BP puisse valoir $q \ddagger AP$.

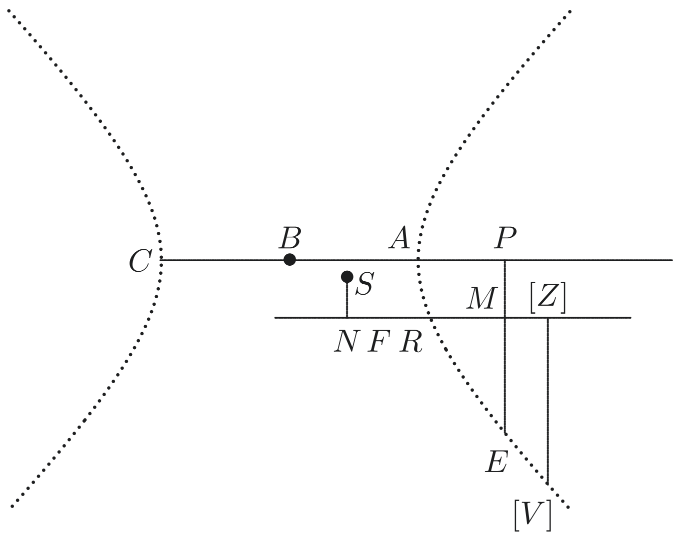


fig. 3.

1 *Am Rand:* b. r.

5 àlors | BD *ändert Hrsg.* | L^2 5 valoir q ‡ | AD *ändert Hrsg.* | L^2

Soit de plus menée l'ordonnée normale, PE. du costé de la courbe, où nous cherchons le lieu de nostre Equation, et les points V. de la courbe, qui luy puissent satisfaire. Et EM soit prise dans EP. prolonguée au besoin, depuis E vers P. et MF. parallele à l'axe, menée vers le centre B. égale à ♀.

A present, je dis, que dans MF prolonguée au besoin, une des inconnües ou supposées telles, AZ, ou x. estant prise à discretion en même sens, comme AP. a esté prise dépuis A: et du point Z une ordonnée normale estant menée à la courbe, sçavoir VZ, la dite ordonnée sera egale à y.

Cette construction est une des plus importantes et des plus étendues, qui se puissent donner en matiere des coniques, car outre qu'elle est commune à toutes les Coniques, elle comprend aussi quantité de lieux particuliers, selon la variation des signes, et le defaut des termes, dont il faudroit sans cela donner des constructions particulieres.

Probl. III.

„D'un point donné mener une perpendiculaire à une section conique donnée, dont „l'espece est indefinie.

Voyez la p r e m. f i g u r e , ou le point donné est D, la conique AY, son sommet, A, son Axe AX, la distance du point donné de l'Axe, DC. La distance du point donné D. du sommet A. prise dans l'axe, est AC.

3 dans | ED. *ändert Hrsg.* | L^2 6 telles, *(1)* AX *(2)* AZ L^2 10 qv'elle | est *fehlt* L^2 | commune L^1 12 termes; *(1)* dont voicy la liste: (1) $\mp\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2 + 2\mathrm{a\ x} + \mathrm{ca} \sqcap \mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{da}}{\mu}\mathrm{y}$ $+\frac{\mathrm{ca}}{\mathrm{q}}$ ‥ .... ‥ .... ‥ ...... ‥ ... – ...... ‥ .... ‥ *(2)* dont L^1 14 donné | D *erg. u. wieder gestr.* | mener L^1 14 f. dont ... indefinie *erg.* L^2 16 est D. *(1)* l'Axe de la Coniqve, AB. *(2)* la coniqve L^1

6 AZ: Der Punkt A liegt nicht auf der Geraden durch M und F, und die Bezeichnung Z fehlt in der Figur. Wahrscheinlich ist FZ gemeint. 9 Cette construction: Ab hier liegt mit L^1 das Konzept des Stückes vor.

Explication des lettres.

$2a$	est *latus rectum* de la conique donnée			
$2q$	est son *latus transversum*		β	est ⁺ǂ a
d	est DC	fig. 1.	ψ	est $\beta - f$
f	est ⁺† AC	fig. 1.	φ	est ǂ̲ $\dfrac{a}{q}\beta$
y	est XY	fig. 1.		

A e q u a t i o n g e n e r a l e servant à l a s o l u t i o n du probleme e n N o m b r e s.

$$\begin{array}{llllllll}
\text{ǂ}\, a^2 & y^4 & \text{⁺ǂ ǂ̲}\, 2da^2 & y^3 & \text{⁺ǂ ǂ}\, 2q^2af & y^2 & \text{⁺ǂ̲}\, 2da^3q & y + d^2a^3q \sqcap 0 \\
+\, 2aq & \cdot\cdot & \text{⁺ǂ̲}\, 2daq & \cdot\cdot & -\, qaf^2 & \cdot\cdot & \text{⁺ǂ ǂ̲}\, 2dq^2a^2 & \cdot\cdot \\
\text{ǂ}\, q^2 & \cdot\cdot & & & \text{ǂ}\, 2q^2a^2 & \cdot\cdot & & \\
 & & & & +\, a^3q & \cdot\cdot & & \\
 & & & & \text{ǂ}\, d^2a^2 & \cdot\cdot & &
\end{array}$$

13–160,1 ǂ d^2a^2 ·· *(1)* y estant pris pour *(a)* l'ordonnée normale menée *(b)* XY, ordonnée menée du point demandé dans la courbe, Y à l'axe, AX. J'ay trouué a propos *(aa)* d'adjouter cette observation *(bb)* de mettre cette Eqvation, car qvoyqve je sçache bien, qv'il n'est pas necessaire de venir à de telles Eqvations qvand on cherche des constructions Geometriqves; neantmoins on en a besoin, qvand on *(aaa)* veut calculer *(bbb)* cherche l a s o l u t i o n du probleme e n n o m b r e s veritables ou approchants par la methode de Viete. L^1 *(2)* Toutes L^2

---

4 *d*: Anstatt das ⁺ǂ in der Definition von β zu berücksichtigen, hätte es nahegelegen, analog zu der sich anschließenden Definition $f =$ ⁺†AC auch eine Kurzschreibweise für ⁺ǂDC festzulegen, da das Vorzeichen ⁺ǂ ja ebenso zur Beschreibung der Position von D dient wie das Doppelvorzeichen ⁺†. Eine folgerichtige Definition $d =$ ⁺ǂDC hätte weitere Rechenschritte erleichtert und zu einer leichter darstellbaren allgemeinen Formel geführt. Ließe man negative Größen als Koordinaten des Punktes D zu, wären die zusammengesetzten Doppelvorzeichen ⁺† und ⁺ǂ sowie ihre Umkehrungen hier ohnedies nicht erforderlich. 4 ψ: Vgl. die Definitionen von ψ und φ in N. 39 S. 417 Z. 16. 7 A e q u a t i o n: Diese Gleichung leitet Leibniz in N. 5 S. 32 Z. 9 – S. 35 Z. 11 her, dort allerdings ohne das Vorzeichen ⁺ǂ bzw. seine Negation, die hier d begleiten. Während sie dort korrekt angegeben ist, hat sich hier ein Vorzeichenfehler eingeschlichen: es muss richtig ǂ̲$2q^2afy^2$ heißen (nicht ⁺ǂ ǂ $2q^2afy^2$). Der Fehler beeinträchtigt die weiteren Schlussfolgerungen für die geometrische Konstruktion. Auch in N. 39 S. 417 Z. 2–4 stellt Leibniz die Formel auf. Sie ist dort ebenfalls fehlerbehaftet.

Toutes les grandeurs connues estant données en nombres, on pourra tirer les racines de cette Equation, veritables ou approchantes par la methode de Viete.

Il est aisé d'appliquer cette Equation aux cas particuliers du probleme, ou à une espece particuliere des coniques, en expliquant les signes ou lettres ambigues comme il faut. Par exemple si vous la voulez appliquer à la Parabole, il ne faut que rejetter toutes les quantités, ou tous les termes, qui ne sont pas multipliés par q^2. et nous aurons cette Equation particuliere pour la Parabole:

$$\begin{array}{llll} y^3 * & -2af\; y & \overset{+}{\ddagger} 2da^2 & \sqcap 0 \\ & +2\,a^2 \;\cdot\cdot & & \end{array}$$

Preparation à la Construction Geometrique Universelle,
par le moyen de la Conique donnée, et d'un Cercle.

Faites ד à a comme ψ à φ appliquez le quarrée de ד à $\ddagger 2q$. de celle qui provient, ω. ayant soubstrait $2a +$ ד, reste ξ. Soit une autre ב à ω comme $\dfrac{d}{2}$ à $\ddagger q$ et encor une

12–161,5 *Am Rand:* ד. ω. ξ. ב. ק. ג. א. ו. ח. m. r. ט. ס. n. h. e.

6 q^2: de sorte qve L^1 q^2. et L^2 8 y^3 * | $\overset{+}{\ddagger}$ *ändert Hrsg.* | 2 af y L^1, L^2

2 methode: Fr. VIÈTE, *Supplementum Geometriae*, 1593, prop. 25 (*VO* S. 256 f.); zur Reduktion quartischer Gleichungen auf kubische DERS., *De emendatione aequationum*, 1615, cap. 6 (*VO* S. 140 bis 148), zur Lösung der kubischen Gleichungen ebd., cap. 7–10 (*VO* S. 149–156). 7 Parabole: Diese Formel leitet Leibniz in N. 5 S. 32 Z. 1–8 direkt her; auf S. 35 Z. 13 – S. 36 Z. 3 zeigt er, dass sie ein Spezialfall der allgemeinen Formel für Kegelschnitte ist. Für den Kreis ergibt sich entsprechend die Gleichung $(a^2 - 2af + f^2 + d^2)\,y^2 = a^2d^2$, wie Leibniz in N. 4 S. 36 Z. 14 aus der allgemeinen Formel ableitet. Zu einer analogen Gleichung gelangt er in N. 15 S. 172 Z. 17 auf dem Umweg über die in seiner geometrischen Lösung verwandten Größen. 12–161,5 Die in diesem Absatz definierten Größen, deren Bezeichnungen Leibniz überwiegend dem hebräischen Alphabet entlehnt, dienen ihm bei der Entwicklung einer allgemeinen geometrischen Lösung. Deren Herleitung findet sich im vorliegenden Stück allerdings nicht. Wo und wie Leibniz die erforderlichen Berechnungen anstellte, ist nicht bekannt.

autre ק à la même ω, comme d à ψ et ג à a comme $\frac{d}{2}$ à φ. ב + ק − ג fait א. Et ו à א *item* ח à d comme $\ddagger a$ à q. ח + א font m, comme aussi ח et ו font r. Soit ט à ק, comme d à $\frac{\psi}{2}$ et une autre ס à ט comme 2φ à $-a$. Leur somme, ou ס + ט, fait n. Enfin ayant formé l'Equation d'une inconnüe, sçavoir $h^2 \sqcap \xi h - na$, nous aurons h par le probl. 1. et $\xi - 2h$ sera e.

Formons à present cette Equation à deux inconnües,

$$\begin{array}{llll} \ddagger\frac{a}{q}z^2 & +2a\ \ z & \ddagger\frac{a^2}{q}n \sqcap y^2 + ry \\ & \ddagger\frac{a}{q}\xi\ \ \cdot\cdot & \\ & \ddagger\frac{2a^2}{q}\ \ \cdot\cdot & \end{array}$$

dont il faut determiner le lieu à la Conique donnée, par l e p r o b l. 2 , en trouvant les points, $P.\,E.\,M.\,F.$ dans la troisiesme figure.

Construction Geometrique Universelle,
par la Conique donnée et un Cercle.

Soyent dans la 3^me ou 4^me fig. les points $P.\,E.\,M.\,F.$ trouvez par le p r o b l. 2. et la ligne $MF.$ parallele à l'axe; dans la quelle prolonguée au besoin, depuis $F.$ dans le sens

3–5 En fin ayant ... sera e. *erg.* L^1 4 inconnue, | h, *fehlt* L^2 | sçavoir L^1 10 faut *(1)* donner *(2)* determiner L^1 10 en *(1)* determinant *(2)* trouuant L^1 11 P. *erg.* L^2 14 la *(1)* fig. 4. *(2)* 3^me ou 4 fig les points | P. E. *erg.* L^2 | M. F L^1 15–162,1 l'axe | de la section coniqve donné *fehlt* L^2 | *(1)* dans la qvelle | prolonguée au besoin *erg.* | dépuis F soit prise FN en même sens, comme qve AD a esté prise depuis A dans la 3^me fig. *(a)* du prob. *(b)* en *(c)* ou pour le *(d)* qvi est pour le probl. 2. à moins qve H ne soit une grandeur moindre qve rien car alors *(aa)* elle *(bb)* le contraire arrivera et elle sera prise dans le sens de A vers P. Depuis N, dans la meme MN prolonguée au besoin soit prise en retrogradant ou *(aaa)* à contresens *(bbb)* dans le *(aaaa)* sens de *(bbbb)* sens qvi va *(2)* dans laqvelle prolonguée au besoin, dépuis F. dans le sens | qvi va *fehlt* L^2 | de P vers A, (dans la 3^me fig. | qvi est celle du 2 probleme *gestr.* |) soit prise FN egale à h *(a)* dans le même sens, *(b)* a contresens de celuy dans leqvel *(c)*. Et depuis N L^1

12 Construction: Vergleiche dieses Verfahren mit der allgemeinen geometrischen Konstruktion solider Probleme bei R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 85–90. Siehe auch den Ansatz zu einer konstruktiven Lösung beliebiger Gleichungen vierten Grades mittels Kegelschnitt und Kreis, den Leibniz in N. 39 S. 410–414 entwickelt. 14 Die Punkte P und E sind in der Figur nicht dargestellt.

de P. vers A. (dans la 3^{me} fig.) soit prise FN, égale à h, et depuis N, à contresens, ou de A. vers P. soit prise $NR \sqcap e$ et du meme point N soit dans le sens de E vers P. prise $NS. \sqcap m$, comme cela se voit dans la 3^{me} figure.

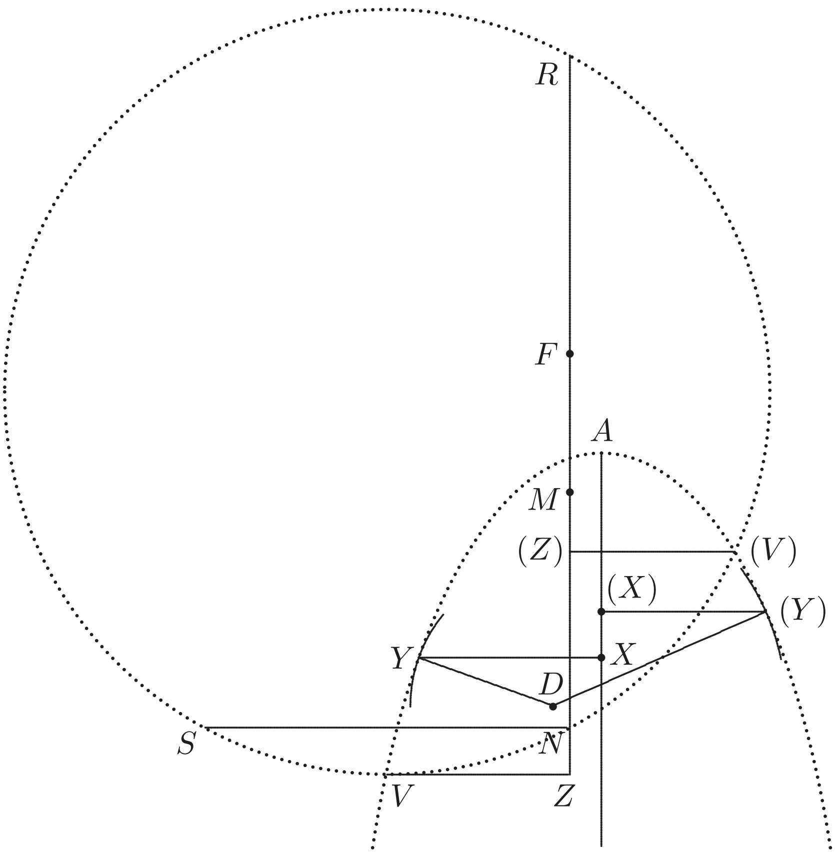


fig. 4.

Mais comme les grandeurs $h. e. m$ peuvent estre moindres que rien, alors elles seront prises en sens contraire à celuy que j'ay exprimé comme on le voit fait dans

2 et *(1)* | enfin *erg.* | de N: la pe *(2)* la même, *(3)* du meme point N, *(a)* la per *(b)* soit *(aa)* prise NS *(bb)* dans le sens, *(aaa)* EN prise *(bbb)* de E L^1 4 *Figur 4 fehlt* L^1 5 alors *(1)* tout sera pris *(2)* elles L^1

4 fig. 4.: In seiner Skizze trägt Leibniz die Strecke VZ etwas zu kurz ab, so dass X zwischen A und (X) zu liegen kommt. D findet sich dann im Kreis rechts unterhalb von (X).

la 4me figure, ou les lignes $FN. NR. NS.$ sont prises à contresens des lignes du même nom, de la troisiesme. Ce que se doit tousjours entendre dans les constructions, quand il s'agit de prendre les lignes d'un certain sens.

Enfin soit decrit un Cercle qui passe par les trois points trouvez, $R. N. S.$ comme vous le voyez dans la quatriesme figure, qui rencontrera la conique dans les points V. $(V.)$ dont les perpendiculaires VZ $(V)(Z)$ sur MF prolonguée au besoin, soient transferées à l'axe, pour y faire les ordonnées: YX, ou $(Y)(X)$. Et les points Y, (Y) seront ceux, auxquels du point donné D, les droites DY, $D(Y)$, estant menées, seront perpendiculaires, à la conique donnée, $Q. E. F.$

Construction particuliere dans la parabole.

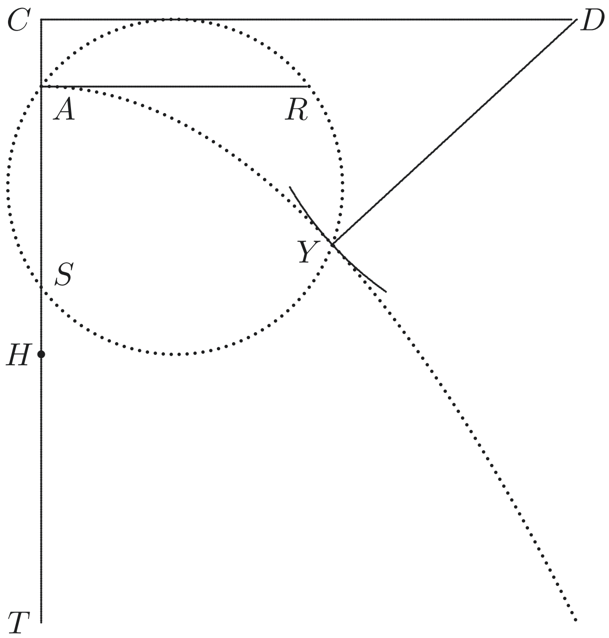


fig. 5.

4 soit | dans la 4me figure *erg. u. gestr.* | decrit L^1 8 DY, DY L^1, *l ändert Hrsg.* 9 donnée, *(1)* ce qv'il falloit *(2)* Q. E. F. L^1

2 la troisiesme: Hier endet Leibniz' eigenhändige Reinschrift L^2, die Wiedergabe folgt im weiteren der Abschrift l von Schreiberhand. 11 fig. 5.: Im Konzept L^1 zeichnet Leibniz einige Linien in Blindtechnik ein, so den Kreisdurchmesser RS und den Durchmesser ab A. Im Konzept wie in der Reinschrift erscheint die Strecke CD als Tangente an den Kreis. Dies ist im Allgemeinen nicht der Fall.

Cette construction generale devient tout à fait courte en bien des cas: et particulierement dans la parabole, il n'y a que trois mots à dire, car soit AY la parabole donnée dont le sommet A, et le point donné hors de la parabole, D. le point dans la courbe qui est demandé, Y; *latus rectum* de la parabole AT, dont la moitié, AH. Soit AR, egale à $AH - AC$, prise du costé de Y dans la tangente du sommet, et AS prise dans l'axe vers Y egale à la moitié de CD. Le cercle qui passe par les trois points $R. A. S.$ rencontrera la parabole dans le point demandé Y.

Construction generale plus nette et plus naturelle
que la precedente par le moyen de la Section
conique donnée, et d'une H y p e r b o l e S i m p l e ,
c'est à dire dont les Asymptotes font un Angle droit,
et *latus rectum* et *transversum* sont egaux.

Soit la Section conique donnée, AY, fig. 6. Soit

$$\mu \sqcap a \mp q. \qquad \pi \sqcap \mp f + q. \qquad \varpi \sqcap \pm f \mp q.$$

Dans l'axe AX prolongué du costé de la convexité de la courbe soit prise $AC \sqcap q\dfrac{\pi}{\mu} \mp q$

---

14 *Daneben:* $\mu.\ \pi.\ \varpi.$

4 AR, égale à *erg.* L^1 8–12 *(1)* Construction Generale *(2)* Construction ... égaux L^1 13 fig. 6. | et dans l'Axe AX prolongué au besoin *gestr.* | soit L^1

4–6 Soit AR ... CD: Die Beschreibung der Strecken AR und AS ist vertauscht. AR ist halb so lang wie CD, und AS entspricht in Leibniz' Figur $AH - AC$, ist im Allgemeinen also gleich $a + f$. 8–12 Dieser geometrischen Lösung des Problems mit Hilfe einer Hyperbel ist auch N. 15 gewidmet. Eine Herleitung der Hyperbelgleichung (mit abweichenden Kurzbezeichnungen für die Summen bzw. Differenzen aus a und q sowie aus q und f) findet sich in N. 9 S. 61 Z. 21 – S. 64 Z. 2. Auch das dortige Ergebnis ist mit einem (allerdings eigenständigen) Vorzeichenfehler belastet. 15 AC: Richtig wäre $AC = -q\dfrac{\pi}{\mu} \mp q$. Der Vorzeichenfehler ist unabhängig von jenem in der *Aequation generale*. Die Bezeichnung C vergibt Leibniz im vorliegenden Stück übrigens an zwei verschiedene Punkte, die zwar beide auf der x-Achse liegen, aber einander nicht entsprechen. Daraus ergeben sich auch zwei voneinander zu unterscheidende Strecken AC: Die hier definierte Strecke AC ist der Abstand von A zu der einen Asymptote der Hilfshyperbel; sie ist nicht identisch mit jener Strecke AC aus Fig. 1, für welche $f = \pm AC$ gilt und die über die Position des Punktes D festgelegt ist.

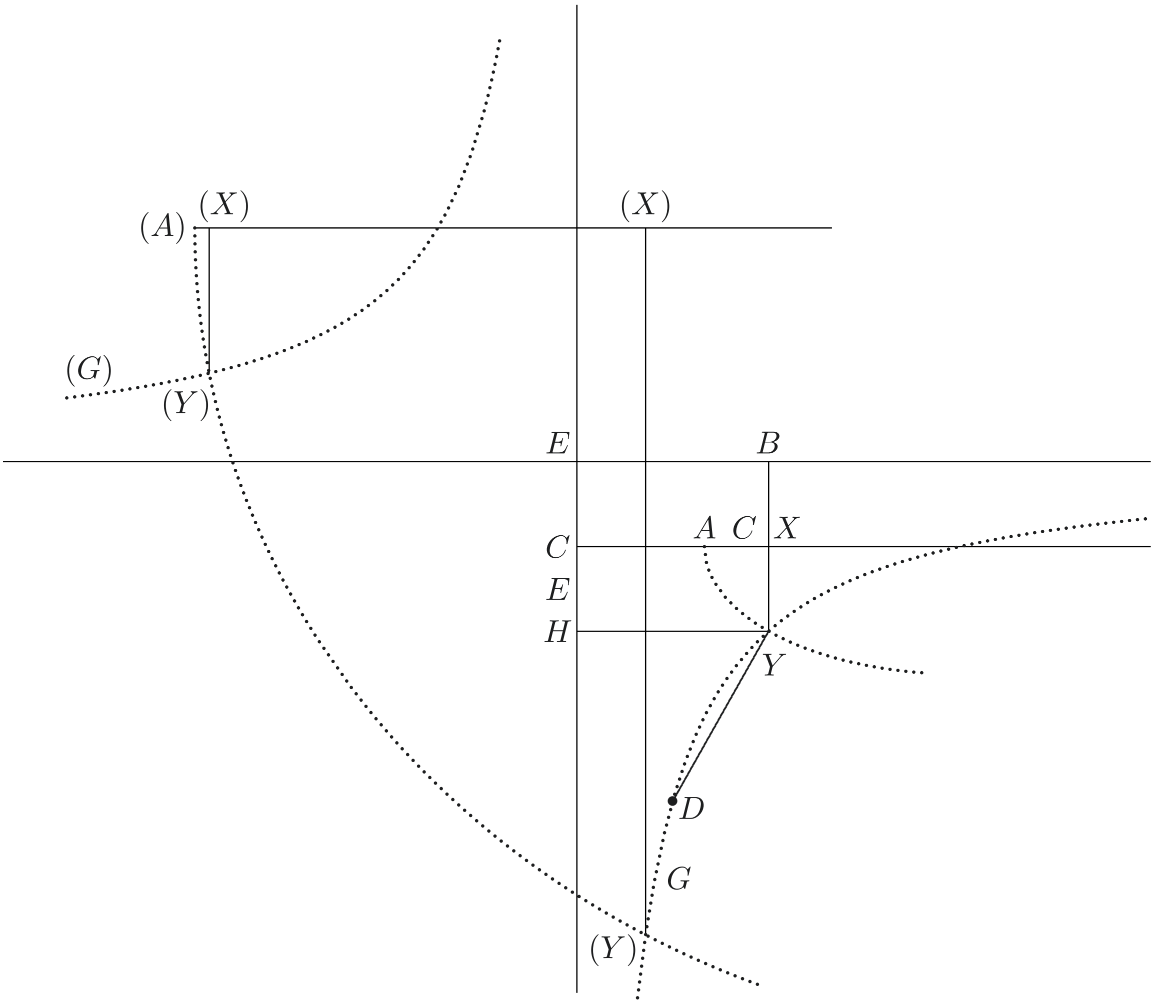


fig. 6.

1 fig. 6.: Die Figur entspricht weitestgehend Fig. 2 von N. 15. Ihre Wiedergabe folgt L^1, da l einen leichten Papierschaden aufweist; zudem fehlen in l der Punkt D und die Strecke DY. In allen drei Varianten der Figur liegt D nicht auf der Hilfshyperbel. Dass diese stets durch D verläuft, konnte Leibniz nicht erkennen, da seine auf der nächsten Seite angegebenen Formeln für AC und $EBYH$ Vorzeichenfehler aufweisen. In den drei Figuren wäre im übrigen ein Punkt (D) so zu ergänzen, dass die beiden Strecken $(D)(Y)$ senkrecht auf dem Kegelschnitt $(A)(Y)$ stehen.

à moins que cette valeur ne soit moindre que rien, car alors C sera pris vers X. De plus du point C soit menée la perpendiculaire $CE \sqcap -\frac{\beta d}{\mu}$ vers le costé opposé à celuy du point demandé Y à moins que $CE \sqcap -\frac{\beta d}{\mu}$ ne soit moindre que rien, car alors E sera pris du costé de Y. Dans le point E deux droites indefinies se croiseront à angle droit. Du centre E entre les dites droites indefinies comme asymptotes soient décrites deux Hyperboles egales et semblables, ayant *latus rectum* et *transversum* egaux opposées GY, et $(G)(Y)$ dont la puissance ou quelque rectangle que ce puisse estre, comme $EBYH$ (: les points $E.H$ estant dans les Asymptotes :) égal à $\frac{\omega\!\backsim aqd}{\mu^2}$. Cette Hyperbole GY, ou son opposée $(G)(Y)$, rencontrera la section Conique donnée AY, ou $(A)(Y)$ en des points $Y.(Y)$ vers lesquels du point donné D, les droites $DY.\ D(Y)$ estant menées, elles seront perpendiculaires à la Section Conique donnée.

Comme cette construction est une des plus nettes, et des plus generales qu'on puisse voir, je l'ay cru remarquable, quoyqu'il y faille employer une section Conique outre la donnée.

1 De plus *erg. Lil* 2 $-\frac{\beta \mathrm{d}}{\mu}$ L^1 $-\frac{\beta \mathrm{d}}{\mathrm{n}}$ *l, ändert Hrsg.* 3 $-\frac{\beta \mathrm{d}}{\mu}$ L^1 $-\frac{\beta \mathrm{d}}{\mathrm{n}}$ *l, ändert Hrsg.* 4 croiseront *(1)* aux ang *(2)* faisant qvatre angles dro *(3)* à angle droit L^1 6 f. Hyperboles | opposées *gestr.* | egales et semblables | ayant ... égaux *erg.* |, opposées ... puissance, *(1)* égale a *(a)* un rectangle *(b)* qvelqve rectangle *(2)* egale à $\frac{\omega\!\backsim \mathrm{aqd}}{\mu^2}$ *(3)* ou qvelqve rectangle L^1 12 et ... generales *erg. L*

8 $\frac{\omega\!\backsim aqd}{\mu^2}$: Richtig wäre $EBYH = \frac{\pi aqd}{\mu^2}$; der Fehler geht wahrscheinlich auf jenen in der *Aequation generale* zurück. Es gilt somit $EBYH = CE \cdot (AC \pm q)$, woraus folgt, dass die Hilfshyperbel die x-Achse an der Stelle $\mp q$ schneidet. Sie verläuft also stets durch den Mittelpunkt der gegebenen Ellipse oder Hyperbel. Auch dieser Zusammenhang erschließt sich nur bei Kenntnis der korrekten Formeln für AC und $EBYH$. 12 generales: Unter Verwendung der korrigierten Größen AC und $EBYH$ führt dieses geometrische Verfahren für die Hyperbel und die echte Ellipse zum richtigen Ergebnis. Es liefert jedoch nicht den gesuchten allgemeinen Weg zu den Senkrechten auf die Kegelschnitte, da sich für die Parabel, den Kreis sowie die doppelte und die einzelne Gerade nicht alle erforderlichen Größen konstruieren lassen. Eine spezielle Konstruktion für den Fall der Parabel gibt Leibniz oben selbst an; die übrigen Fälle sind mit einfachsten Mitteln zu lösen.

15. ESSAY DE LA MÉTHODE DE L'UNIVERSALITÉ
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 41–42, 1 Bog. 4°. 4 S.
Cc 2, Nr. 864

Datierungsgründe: Das Stück greift einen in N. 14 entwickelten geometrischen Lösungsansatz für das Problem der *Minima ad conicam* auf und diskutiert ihn eingehender. Somit ist es jünger als N. 14. Auf der anderen Seite ist es aber ebenso wie jenes Stück noch entstanden, bevor Leibniz das Sluse'sche *Mesolabum* rezipiert und Mitte 1674 auch exzerpiert (N. 16) hat. — Die Form der im Stück verwendeten zusammengesetzten Doppelvorzeichen hat Leibniz in der *Méthode de l'universalité I* (N. 10) wohl im Mai oder Juni 1674 festgelegt. Drei nachträglich hinzugefügte Randbemerkungen in lateinischer Sprache identifizieren in unserem Stück diese Zeichen mit den *signa ambigua*, wie sie Leibniz wahrscheinlich im Dezember 1674 entworfen hat.

Essay de la Methode de l'universalité.

Construction du Probleme d'un poinct donné mener la perpendiculaire à une section Conique donnée, par le moyen d'une Hyperbole simple.

Ce Probleme estant pris universellement est solide, car son Equation generale, trouvée par la methode de l'universalité est de 4 degrez; quoyqu'il devienne plan par accident en certains cas, sçavoir quand la Section conique donnée est un triangle ou cercle, ou quand le point donnée tombe dans la courbe ou dans l'axe, et en d'autres rencontres particulieres.

Or la construction de quelque probleme solide que ce puisse estre se peut faire par l'intersection de deux courbes coniques, ou d'une Courbe Conique (: c'est à dire Ellipse

13 Essay ... l'universalité. *erg. L* 14–16 | Construction du Probleme *erg.* | D'un poinct ... Coniqve donnée |, par ... simple *erg.* | *L*

---

17 Equation: Die allgemeine Gleichung zur Lösung des Problems findet sich in N. 14 auf S. 159. 22 solide: Vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 85 und Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, ebd., S. 321 f.

Hyperbole ou Parabole :) et d'un cercle: sans parler des courbes des plus hauts degrez.

Et comme il y a une infinité de manieres pour l'effection de chaque probleme il en faut choisir les plus simples: Mais la simplicité s'estime differemment, tantost par la nature de la courbe, tantost par les autres preparations. Car il n'y a point de doute, que la plus simple construction d'un probleme solide, en égard à la nature de la courbe ne soit celle qui se fait par le moyen d'une Hyperbole simple, ou Parabole avec une Ellipse simple, c'est à dire Cercle. Car j'appelle l'Hyperbole ou Ellipse, simples, quand leur *latus rectum* et *transversum* sont egaux.

Puis apres il faut venir à l'intersection commune d'une Hyperbole simple et d'une Parabole: et l'on ne viendra qu'à regret, et quand d'autres raisons l'emportent à l'Hyperbole et Ellipse dont le *latus rectum* et *transversum* sont inégaux.

Or il y a souvent d'autres raisons qui nous font negliger cette observation qui n'est fondée que sur la commodité. Car si quelque courbe conique quoyque composée est donnée dans le probleme; on aimera mieux sans doute de l'employer, que de se servir d'une autre quoyque plus simple: de même il faut plus tost employer une Hyperbole dont les generatrices sont aisées à trouver qu'un Cercle, dont la description a besoin d'un grand embarras de preparations.

Mais le meilleur est en ce cas, sur tout quand le probleme est important, d'en donner deux constructions Geometriques, l'une en choisissant les lignes les plus simples, outre celles qui ne sont pas encor données: l'autre en employant la ligne à la quelle l'Analyse nous mene tout droit, et que la nature semble avoir destinée à la Solution du probleme.

On ne manque pas même d'exemples de grands geometres, qui sont passez d'un degrez à l'autre, sans necessité, parce qu'ils trouvoient des constructions elegantes. Et les anciens quoyque assez exacts en ce poinct n'ont jamais temoigné de rejetter l'invention de deux moyennes proportionnelles, par le moyen de la Conchoeide non plus que les modernes. Mais nous ne passerons pas icy de degrez en degrez, et nous nous servirons à present de l'Hyperbole simple (avec la section conique donnée) au lieu de l'Ellipse simple c'est à dire du Cercle, puisque un probleme n'est pas moins conique si l'on se sert de deux coniques, que si l'on n'en employe qu'un seule.

Et quant à la Construction par le Cercle, qui fait que le probleme paroist plan (: si l'on ne conte pas la section conique donnée :) nous la donnerons en son lieu avec la demonstration de cellecy, l'equation generale du probleme, et tout le calcul necessaire pour cet effect. Maintenant:

7 ou Parabole *erg. L*

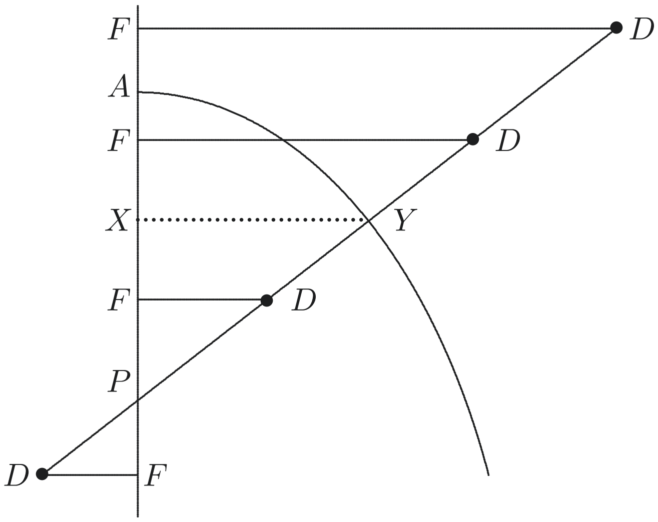


fig. $\widehat{1}$.

Soit la Conique donnée AY, son sommet A, l'Axe prolongué en cas de besoin, $FAFXFPF$, le point donnée D et DF, la distance du point D de l'axe; AF l'intervalle entre le point F, et le sommet de la courbe; le point demandé Y vers le quel il faut mener la perpendiculaire DYP, son ordonnée XY.

Pour determiner le point Y le *latus rectum* de la conique donnée soit a, le *transversum* q (: car je monstreray qu'on en peut concevoir en toutes les coniques :) la ligne $FD \sim d$ et $AF \sim f$. La Section conique estant un Triangle a, et q sont infiniment petites. Si c'est une parabole q sera infinie, et a finie ou ordinaire. Dans les autres Sections a aussi bien que q sont tousjours lignes ordinaires, et la difference ne sera que dans les signes. Or $\mp$ signifie $+$ dans l'Hyperbole, et $-$ dans l'Ellipse dont le Cercle est une espece ayant a et q égales, dans la Parabole et droite l'explication du signe $\mp$ est indifferente. Le signe $\pm$

---

11 *Am Rand:* (*scribatur potius* $\mp$)

12 *Am Rand, direkt neben* $\pm$*:* (*scribatur potius* $\mp$)

---

7 $\sim$: In diesem Stück bedient sich Leibniz des von Ozanam verwendeten Gleichheitszeichens $\sim$. Der Grund ist offen. Nur am Schluss findet sich zweimal das cartesische Symbol $\propto$. 12 droite: Den Fall der Einzelgerade übergeht Leibniz in seinen Darstellungen der Kegelschnitte in der Regel, vgl. N. 10 S. 104, N. 11 S. 113–114, N. 14 S. 154; Ausnahme: N. 10 S. 105. Auf seine Ableitung aus der allgemeinen Kegelschnittgleichung $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 = y^2$ durch Wahl eines unendlich kleinen a und eines endlich großen q geht er auch hier nicht ein.

signifie tousjours le contraire ou la negation du signe ‡ et enfin, si le poinct F tombe entre les points A et P le signe (+†) signifiera −, et (+‡) fera +. Si le poinct F tombe au dessous du poinct P (+†) signifiera +, et (+‡) fera −. Mais si le point F tombe au dela du sommet, dans l'axe prolongué, ces deux signes signifieront +. S'ils portent un − au bas, comme (+†̲) ou (+‡̲) ce sera leur contraire ou negation.

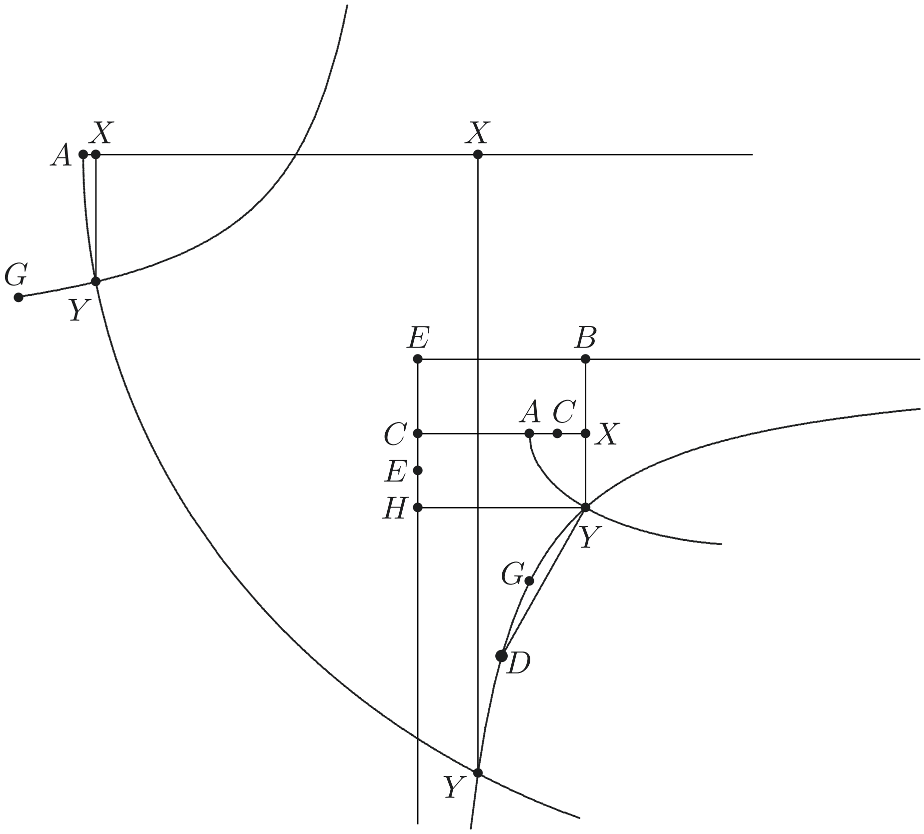


fig. $\widehat{2}$.

---

3 *Am unteren Rand:* (*pro* +† *scribemus* ǂ *pro* +‡ *scribo* ǂ *pro* +†̲ *scribo* ǂ̲ *pro* +‡̲ *scribo* ǂ)

1–4 F tombe … signifieront +: Die Begründung für diese Interpretation der zusammengesetzten Doppelvorzeichen liefert Leibniz in N. 11 auf den S. 127–129. 6 fig. $\widehat{2}$.: Die Figur entspricht weitestgehend der *fig.* 6. in N. 14; vgl. auch die dortige Anmerkung zur Lage von D.

Cela estant posé, soit la Section Conique donnée, $AXYA$ transferée dans la 2. f i g. et dans l'Axe AX, prolongué en cas de besoin, soit $AC \sim \dfrac{\pm(^{+}\!\mp)fq - q^2}{-a \pm q} \mp q$ adjoutée à $x \sim AX$ mais il peut arriver dans l'explication des signes ambigus que le signe de $-$ l'emporte sur celuy de $+$, alors cette addition deviendra en effect une soubstraction et le point C tombera du costé de la concavité de la courbe, vers X, qui doit tomber du costé convexe ou exterieur, dans l'axe prolongué au dela du sommet, quand l'explication des signes et lettres fait $+$.

Soit de plus menée par le point C une droite indefinie perpendiculaire à l'axe, et dans cette perpendiculaire soit prise la droite $CE \sim \dfrac{(^{+}\!\pm)\, ad}{-a \pm q}$, en sorte que le point E tombe du costé du point Y, au dessous de l'axe, si apres l'expliquation des signes de la valeur de CE le signe $-$ l'emporte, et de l'autre costé ou au dessus de l'axe, si le signe de $+$ y reste.

Du point trouvé E, comme centre, entre les deux asymptotes EC et EB faisant angle droit, soit décrite l'Hyperbole GY dont le *latus rectum* et *transversum* sont égaux, et la puissance de cette Hyperbole, ou la valeur perpetuelle d'un rectangle comme $EBYH$ est $\dfrac{(^{+}\!\mp) \pm fqda\, (^{+}\!\pm)\, aq^2d}{a^2 \mp 2aq + q^2}$. Cette Hyperbole GY rencontrera la section conique donnée AY dans le point demandé Y et si elle la rencontre plus d'une fois ou son opposée cela veut dire qu'on peut mener plusieurs perpendiculaires d'un même poinct D à une meme Conique donnée.

14 GY *erg. L* 16 Hyperbole | GY *erg.* | *(1)* coupera ou touchera *(2)* rencontrera *L* 17 ou son opposée *erg. L* 18 f. meme *(1)* courbe *(2)* Coniqve *L*

---

1 2. f i g.: Die in Fig. 2 dargestellte und im folgenden Abschnitt beschriebene geometrische Lösung des Problems präsentiert Leibniz auch in N. 14 S. 164–166. Die dort angegebenen, mit Vorzeichenfehlern behafteten Ergebnisse für AC und $EBYH$ verwendet er auch im vorliegenden Stück. Hier wird jedoch, anders als in N. 14, die Größe f in allen Formeln stets vom Doppelvorzeichen $(^{+}\!\mp)$ begleitet. Der Unterschied liegt darin begründet, dass Leibniz dort $f = {}^{+}\!\mp AF$ definiert (auf S. 159 Z. 5; er verwendet dabei allerdings die Bezeichnung AC statt AF), hier hingegen $f = AF$ gilt. 2 AC: Richtig wäre $AC = \dfrac{\mp(^{+}\!\mp)fq + q^2}{-a \pm q} \mp q$. 15 $EBYH$: Richtig wäre $EBYH = \dfrac{(^{+}\!\mp)(^{+}\!\pm) \mp fqda\, (^{+}\!\pm)\, aq^2d}{a^2 \mp 2aq + q^2}$, wobei sich die beiden zusammengesetzten Doppelvorzeichen vor $\mp fqda$ auch zu $(\mp)$ zusammenfassen ließen.

J'en donneray la demonstration lors que je proposeray l'Equation Universelle du probleme, et que j'expliqueray sa construction par le moyen de la section conique donnée et du cercle, car de transferer le calcul icy, ce seroit redoubler inutilement la peine. Cependant pour donner quelque preuve de la verité, posons que la conique donnée soit un C e r c l e .

Par la nature de l'Hyperbole, sa puissance divisée par $BY \sim BX\,(\sim CE) + XY\,(\sim y)$ donne $HY \sim AX\,(\sim x) + AC$ donc ayant expliqué la valeur de la puissance, et des lignes CE et AC conformement à la nature du Cercle, nous aurons:

$$-a + x \quad \frac{(^{+}\!\ddagger)(^{+}\!\dagger)f + a}{0} \sim \frac{\dfrac{(^{+}\!\dagger)\,fd\,(^{+}\!\ddagger)\,da}{0^2}}{(^{+}\!\ddagger)\dfrac{d}{0} + y}$$

car dans le cercle a est $\sim q$, et $\ddagger$ vaut $-$, et $\underline{\ddagger}$ vaut $+$, donc $-a \,\underline{\ddagger}\, q$ fait 0. Multipliant l'Equation par $(^{+}\!\ddagger)\dfrac{d}{0} + y$, nous aurons:

$$\frac{(^{+}\!\underline{\ddagger})\,da\,(^{+}\!\ddagger)\,dx}{0} \quad \frac{(^{+}\!\dagger)\,df\,(^{+}\!\ddagger)\,da}{0^2} - ay + x \quad \frac{(^{+}\!\dagger)\,fy + ay}{0}, \sim \frac{(^{+}\!\dagger)\,fd\,(^{+}\!\ddagger)\,da}{0^2}$$

$$\text{ou} \quad (^{+}\!\underline{\ddagger})\,da\,(^{+}\!\ddagger)\,d\underset{\substack{\wedge \\ +a-\sqrt{a^2-y^2}}}{x}\,(^{+}\!\dagger)\,fy + ay \sim 0.$$

Or x dans le Cercle vaut $+a - \sqrt{a^2 - y^2}$ donc nous aurons

$$(^{+}\!\ddagger)\,d\sqrt{a^2 - y^2} \sim (^{+}\!\dagger)\,fy + ay$$

$$\text{ou} \quad d^2a^2 \sim d^2y^2 + f^2y^2(^{+}\!\dagger)2fay^2 + a^2y^2,$$

$$\text{ou} \quad \frac{da}{\sqrt{d^2 + f^2(^{+}\!\dagger)2fa + a^2}} \sim y$$

4 verité, *(1)* appliqvons nostre construction au C e r c l e *(2)* posons *L* 10 q faut 0 *L ändert Hrsg.*

1 demonstration: In N. 14 findet sich auf S. 159 die allgemeine Gleichung und auf S. 160–163 ein geometrischer Lösungsweg mit Hilfe des Kreises, jedoch kein Beweis. 6–173,4 Par ... vaut *a*: Die in diesem Abschnitt angestellte Berechnung geht von einem unkorrekten Wert für *EBYH* aus. Sie ist fehlerhaft und rechnet mit 0 als infinitesimaler Größe. Am Ende erreicht sie dennoch das gewünschte, allerdings ebenfalls mit einem Vorzeichenfehler belastete Ergebnis.

ce qui se trouve veritable: car

$$\frac{y \text{ ou } XY}{a \text{ ou } PY} \sim \frac{d \text{ ou } DF}{DP \text{ ou } \sqrt{d^2 + f^2 (\overset{+}{\ddagger}) 2fa + a^2}},$$

P estant posé le Centre du cercle dans la f i g u r e 1 et PF estant $\sqrt{f^2 (\overset{+}{\ddagger}) 2fa + a^2}$, parce que PA vaut a.

Mais PF ou $\sqrt{f^2\,(\overset{+}{\ddagger})\,2af + a^2}$, peut valoir

$$\begin{array}{ccc} + & AF \sim f\,(\overset{+}{\ddagger})\,AP \sim a & \\ (\overset{+}{\ddagger}) & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad + \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ - & \ldots\ldots\ldots\ldots \;(\overset{+}{\underline{\ddagger}})\; \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ (\overset{+}{\underline{\ddagger}}) & \ldots\ldots\ldots\ldots \quad - \quad \ldots\ldots\ldots\ldots & \end{array}$$

Ce peu de Calcul peut servir de fonds dont on pourra tirer des contemplations tout à fait extraordinaires et admirables. Car premierement notre Hyperbole estant appliquée au Cercle, quoyque elle ne soit pas imaginaire, et n'implique nulle contradiction, devient pourtant indescriptible, par ce que son centre E est infiniment éloigné du cercle. Donc il a fallu changer la construction en Equation, alors quantité de Termes evanouissant le probleme s'est trouvé plan.

On voit par la que l' U n i v e r s a l i t é d e l a M e t h o d e ne laisse pourtant d'estre vraye, et qu'elle paroist d'autant plus admirable, que nous voyons comment la nature des choses se gêne, et se fait des efforts, pour luy obeïr en se forgeant des lignes qui encor bien qu'incomprehensibles par l'esprit humain, ne sont pas moins veritables pour cela. De plus nous découvrons dans ce Calcul des proprietés admirables du 0 ou z e r o . Et j'avoue ingenûment d'avoir esté merveilleusement embarassé avant que d'y prendre garde.

1–4 ce qvi . . . vaut a. *erg. L* 7 $(\overset{+}{\ddagger})$ *L ändert Hrsg.* 13 il *(1)* faut chan *(2)* a fallu *L* 13 la *(1)* proportion *(2)* construction *L*

1 veritable: Die Formel entspricht in der Tat (bis auf das dort nicht berücksichtigte Doppelvorzeichen zu f, $\overset{+}{\ddagger}$, das hier allerdings in $\overset{+}{\underline{\ddagger}}$ umgekehrt werden müsste) dem Spezialfall der korrigierten *Aequation generale* aus N. 14 S. 159, der sich ergibt, wenn man $a = q$ wählt und für $\ddagger$ ein $-$ einsetzt.

12 indescriptible: Die Schwierigkeiten, mit denen sich Leibniz hier konfrontiert sieht, gehen auf den Umstand zurück, dass er, um seine geometrische Lösung des Problems zu entwickeln, die *Aequation generale* in N. 14 S. 159, die Gleichung 4. Grades also, durch $\ddagger(a \ddagger q)^2$ dividieren musste. Für den Fall des Kreises ergibt sich aber aus der *Aequation generale* eine wesentlich einfachere Gleichung; es bleiben nur das quadratische und das absolute Glied übrig, so dass eine ganz simple geometrische Lösung für diesen Spezialfall möglich ist. Dies widerspricht allerdings Leibniz' Intention, eine allgemeine zeichnerische Konstruktion für alle Kegelschnitte zu finden.

Car par exemple la puissance de nostre Hyperbole sçavoir $\dfrac{({}^{+}\!\dagger) \pm fqda \, ({}^{+}\!\ddagger) \, dq^2a}{a^2 \mp 2aq + q^2}$, fait pour le Cercle: $\dfrac{({}^{+}\!\dagger) fda^2 ({}^{+}\!\ddagger) \, da^3}{a^2 - 2a^2 + a^2, \infty \; 0}$, donc si nous la faisons $\dfrac{({}^{+}\!\dagger) fda^2 ({}^{+}\!\ddagger) \, da^3}{0}$ ou bien $\dfrac{({}^{+}\!\dagger) fd \, ({}^{+}\!\ddagger) \, da}{1 - 2 + 1 \infty \; 0}$, nous tomberons toujours dans une impossibilité, comme cela m'est arrivé à mon grand étonnement, car croyant au commencement de m'estre trompé dans le calcul, j'en ay esté des-abusé enfin à force de le refaire, et je me suis apperceu, que le zero ou rien veut estre traité comme quelque chose de fort reel, et qu'il y a bien de la difference entre un zero simple, et son quarré; et que la veritable expression de la dite puissance doit estre $\dfrac{({}^{+}\!\dagger) fd \, ({}^{+}\!\ddagger) \, da}{0^2}$ j'en voy bien la raison à present, et je trouve que cela depend de la nature de l'infini, dont la contemplation a quantité de choses bizarres et surprenantes. Je trouve qu'on n'y a esté que sur les costes, et qu'il y a la dedans un vaste pays à découvrir fertile en productions aussi admirables qu'utiles. La Methode de l'Universalité dont je pretends d'avoir donné les Elemens peut servir de boussole pour ces découvertes pour nous garantir de paralogismes qui ne sont que trop communs dans un chemin si glissant, ou l'imagination se perd. Mais nostre Methode est comme un Protée qui se change en mille formes, et s'enflant quelques fois jusque à l'infini, et referrant d'autres fois dans un rien paroist aussi bien souvent sous un scheme ordinaire: et comme ce n'est qu'une même expression qui comprend tous cecy, nous en sommes tousjours les maistres, et ayant attrapé une fois une certaine Equation universelle, nous la pouvons serrer de si prés, et luy donner tant la question, qu'à la fin nous l'obligerons de quitter toutes ces formes bizarres, et de laisser paroistre la verité toute nüe.

Enfin je croy que de la perfection de la Geometrie des infinis on se peut promettre le dernier rafinement de l'analyse au dela de tout ce que Monsieur des Cartes a osé d'esperer; au reste je suis asseuré que l'usage de la Methode de l'Universalité n'est pas moins grand dans les Mechaniques que dans la Geometrie.

1 Hyperbole *(1)* estant appliqvée au Cercle estoit *(2)* sçavoir *L* 13 trop *(1)* freqvens *(2)* communs *L* 14 perd. *(1)* Car c'est un Protée *(2)* Mais *(a)* elle est un Protée *(b)* nostre *L* 20 verité *(1)* ⟨cherchée⟩ *(2)* toute nüe *L* 21 croy *(1)* qv'on se peut promettre *(2)* qve *L* 23 f. de la ... Universalité *erg. L*

23 des Cartes: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39.

16. EXCERPTA EX SLUSIANI MESOLABI ANALYSI
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 2 Bl. 83–86. 2 Bog. 2°. 8 S. Textfolge: Bl. 85–86, 83–84.
Cc 2, Nr. 850

Datierungsgründe: N. 16 enthält Exzerpte aus R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, *Pars altera de analysi*, S. 51–95. Es dürfte deshalb vor VII, 1 N. 129 (dat. September 1674), N. 130 und N. 138 (dat. Oktober 1674) entstanden sein, in denen Leibniz Methoden aus dem exzerpierten Abschnitt des *Mesolabum* verwendet. Das Doppelvorzeichen ∓ findet sich bei Leibniz ca Mitte bis Ende 1674; den Waagebalken $\sqcap$ benutzt er ab Juni 1674. Die Stücke N. 17 bis N. 22 setzen N. 16 inhaltlich voraus, sind aber teilweise vor dem Abschluss der Exzerpte entstanden, wie der Verweis in S. 188 Z. 5 zeigt.

Excerpta ex Slusiani *Mesolabi* (ed. 1668.) Analysi

Quatuor continue proportionales: $b\ a\ e\ d$. Hinc $\frac{b}{a} \sqcap \frac{a}{e}$, item $\frac{a}{e} \sqcap \frac{e}{d}$. Item $\frac{b}{e} \sqcap \frac{a}{d}$. Unde Aeq. 1. $be \sqcap a^2$. aequatio ad Parabolam. Et Aeq. 2. $e^2 \sqcap ad$. aequatio alia ad Parabolam. Ac denique Aeq. 3. $bd \sqcap ae$. aequatio ad Hyperbolam circa asymptotos. Aequationes simplices.

Sequuntur aequationes compositae ex duabus simplicibus nempe ex prima et secunda affirmative Aeq. 4. $be + e^2 \sqcap da + a^2$, ad Hyperbolam ad axem relatam; ex prima et secunda negative Aeq. 5. $be - e^2 \sqcap a^2 - da$ ad Ellipsin; nota si angulus quem rectae a, et e continent est rectus; Ellipsis et Hyperbola sunt regulares, seu lateris recti transversique aequalium; et Ellipsis quidem est Circulus. In posterum ergo semper angulus intelligetur rectus nisi aliud moneatur; et aequatio $be - e^2 \sqcap a^2 - da$, erit ad Circulum.

$$\left.\begin{array}{lll} \text{Ex prima et tertia} & \text{affirmative} & be + bd \sqcap a^2 + ae \\ & \text{negative} & be - bd \sqcap a^2 - ae \\ \text{secunda et tertia} & \text{affirmative} & ad + bd \sqcap e^2 + ae \\ & \text{negative} & ad - bd \sqcap e^2 - ae \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Aeq. 6.} \\ \text{singulae ad diver-} \\ \text{sas Hyperbolas.} \end{array}$$

12 Excerpta ... Analysi *erg. L* 22 f. nisi aliud moneatur *erg. L*

Jam loco e substituatur $\frac{b}{q}e$, et loco a, $\frac{ba}{q}$, fient tres aequationes simplices Aeq. 7. $\frac{b^2e}{q} \sqcap \frac{b^2a^2}{q^2}$ ad Parabolam. Et Aeq. 8. $\frac{b}{q}a[d] \sqcap \frac{b^2}{q^2}e^2$ ad parabolam, et Aeq. 9. $bd \sqcap \frac{b^2ae}{q^2}$ ad Hyperbolam circa asymptotos. Jungatur prima ad parabolam supposita, cum prima substituta, affirmative vel negative, fiet Aeq. 10. $be \ddagger \frac{b^2}{q}e \sqcap a^2 \ddagger \frac{b^2}{q^2}a^2$, quae est rursus ad parabolam. Sed eandem cum priore. Ideo facta substitutione in aequationibus non sunt conferendae inter se supposita et substituta. Ob eandem causam non sunt conferendae duae substitutae diversae. Sed supposita et substituta diversae. Ergo aequationem substitutam conferamus cum supposita sequenti ad parabolam seu aeq. 7. cum aeq. 2. fiet: Aeq. 11. $\frac{b^2}{q}e\ (\overline{\ddagger})\ e^2 \sqcap \frac{b^2}{q^2}a^2\ (\overline{\ddagger})\ ad$, quae est vel ad Hyperbolas vel ad Ellipses infinitas, cum b. et q. ad libitum assumi possint. Caeterum, quoniam res arbitraria est, Slusius maluit primam servare intactam, et substituere in secunda aequatione ubi pro $ad \sqcap e^2$, ponit Aeq. 12. $\frac{b}{q}ad \sqcap \frac{be^2}{q}$, jungatur cum aeq. 1. fiet aequatio: Aeq. 13. $be \ddagger \frac{b}{q}e^2 \sqcap a^2 \ddagger \frac{b}{q}da$ quae est ad Ellipses infinitas si $\ddagger$ significat $-$, et ad Hyperbolas infinitas si significat $+$. Si aeq. 4. aut 5. mutetur in substitutam, seu si $\frac{b}{q}e$, ponatur loco e et $\frac{b}{q}a$ loco a, in aeq. 4. aut 5, et producta; quam vocabo aeq. 14. jungatur cum aeq. 3. fiet aequatio 15 ad infinitas Hyperbolas, sed quae ad Ellipsin applicari non potest. (+ NB. duae aequationes plus quam semel inutiliter junguntur quantum ad alterius plane novae productionem. Videndum tamen. +) Interim notandum est, non semper certum esse signum aequationis ad Hyperbolam, si in eam ingreditur, ae, seu rectangulum duarum incognitarum, etsi hoc verum fuerit in omnibus speciebus aeq. 6.

Jam enim Slusius annotat tribus aequationibus nempe 1. 2. 3. inter se junctis fieri aequationem ad Ellipsin, aliquando, si scilicet talis sit: aeq. 16. $\underbrace{be - e^2} + bd \sqcap$

4 vel negative *erg.* *L* 14 Si *(1)* cum substituta ista seu aeq. 12. cum *(2)* aeq. *L*

11 maluit: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 52. 22 annotat: *a. a. O.*, S. 61.

$\underbrace{a^2 - da}+ae$. Quod ut ostendat addit utrique aequationis parti $\frac{1}{4}d^2 - de + \frac{1}{4}e^2$, unde tandem ei provenit haec aequatio A e q. 1 7. $be + bd + \frac{1}{4}d^2 - de - \frac{3}{4}e^2 \sqcap \underbrace{a - \frac{1}{2}d + \frac{1}{2}e}_{\square}$ quam aequationem ostendit esse ad Ellipsin. Ista ergo ni fallor intelligenda sunt, quando extractione aliqua radicis fieri potest, ut terminus ille de evanescat, tunc pro signorum productae aequationis ratione aliquando Ellipsin prodire posse, sed tunc applicata est et ad angulos non rectos.

Item produci potest ad infinitas Ellipses, assumendo b. et q. ibi vero observatio fit memorabilis, si q assumta major sit dimidia b, seu si $q \sqcap \frac{b}{2}$ aequationem fore ad Ellipsin, si $q \sqcap \frac{b}{2}$ ad Hyperbolam, si denique $q \sqcap \frac{b}{2}$ ad Parabolam. Omnibus his modis ordinata et abscissa sunt ad angulos obliquos. Et nota, tunc evenire, ut a et e, sunt in una aequationis parte v. g. $a+e$, vel $a+(\beta)e \sqcap \sqrt{\aleph e}$ modo scilicet altera earum in surda non contineatur; et tunc fit $a \sqcap \sqrt{\aleph e}+e$. id est ipsa a, certam quandam servat rationem ad $\sqrt{\aleph e}$ applicatam simplicem.

Hactenus certa aequatio simplex una vel plures multiplicata fuerat per rationem quandam, ut $\frac{b}{q}$ reliquis intactis; at nunc alia ratio eligitur, pro una ex incognitis substituendo aliam, quae ad ipsam rationem habeat datam, ut pro b, a, e, d, substituendo b, $\frac{by}{q}$, e, d. Unde redeunt eaedem quae ante aequationes simplices et compositae, substituendo tantum $\frac{by}{q}$ in locum a. Sed tamen res simplici ista substitutione in compositis non peragitur: prout scilicet aequationes simplices ortas per communem aliquando ipsis magnitudinem b dividis aut non. Tres simplices enim sunt $be \sqcap \frac{b^2}{q^2}y^2$, $\frac{db}{q}y \sqcap e^2$, et $\frac{be}{q}y \sqcap bd$.

7 Ellipses, *(1)* si q assumta major est dimidia b, aeqvatio *(2)* assumendo *L*

---

2 provenit: Sluse hätte die Gleichung um $\frac{1}{4}d^2 - \frac{de}{2} + \frac{1}{4}e^2$ erweitern müssen, um den gewünschten quadratischen Ausdruck zu erhalten.

Si primam dividis per b communem, jungisque cum secunda, habebis: $qe \pm e^2 \sqcap \frac{b}{q}y^2 \pm \frac{d[b]}{q}y$. Si vero divisione primae per b abstineas, habebis $be \pm e^2 \sqcap \frac{b^2}{q^2}y^2 \pm \frac{db}{q}y$. Et hic jam modum docet efficiendi, ut infinitis etiam circulis (et Hyperbolis angulum rectum asymptotorum, et latus rectum transversumque aequalia habentibus) solvi possit problema, ut antea infinitis Ellipsibus et Hyperbolis fieri posse docuit. Nimirum aequationem 1[mam] multiplicat per q^2, et dividit per b^2, producitur ei $\frac{q^2}{b}e - e^2, \sqcap y^2 - \frac{db}{q}y$, quae aequatio est circulorum infinitorum; pro varia ratione q ad b.

Non meminit aequationis ad infinitas parabolas, credo, quod id per se manifestum indicaret, nam in praesenti exemplo aequatio prima simplex divisa per b^2 et multiplicata per q^2, dat $\frac{q^2}{b}e \sqcap y^2$, quae utique est ad infinitas parabolas, ob arbitrariam q. In Circulis autem efformandis totum erat artificium efficere, ut ratio assumta $\frac{q}{b}$ incognitas simplices tantum, non et earum quadrata afficeret. Adjungit methodum, qua problema solvi possit ope infinitorum Circulorum et infinitarum sectionum, de parabola id ex dictis patet: de Hyperbola et Ellipsi, id ita ostendit, duae sunt rectae datae, b, et q, quemadmodum ergo usi sumus ratione $\frac{b}{q}$ in qua arbitraria est, q, ita possumus uti et ratione $\frac{d}{r}$ in qua arbitraria est r. Nimirum jungendo methodum priorem et hanc, substituendo in locum, a, $\frac{b}{q}y$, et adhuc praeterea multiplicando unam ex aequationibus simplicibus, ut 2[dam] $\frac{db}{q}y \sqcap e^2$, per $\frac{r}{d}$, fiet $\frac{rb}{q}y \sqcap \frac{r}{d}e^2$, quae juncta primae simplicium, dabit: $\frac{q^2}{b}e \pm \frac{r}{d}e^2 \sqcap y^2 \pm \frac{rb}{q}y$. ad infinitas hyperbolas vel Ellipses. Et hoc ni fallor patet.

Sed jam progreditur ad id quod mihi videtur rei caput, *data sectione Conica circulum invenire, qui cum ea junctus problema solvat.*

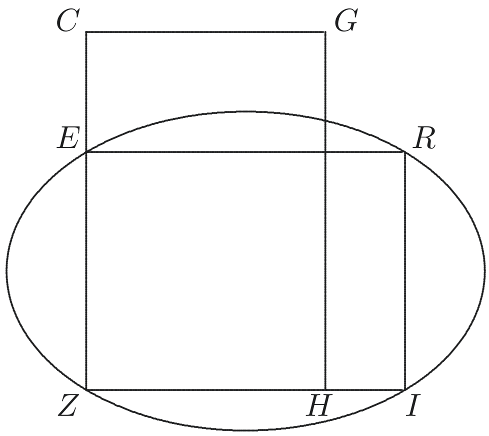
16 Nimirum *(1)* qvemadmodum *(a)* in Cir *(b)* pro Circulo *(2)* jungendo *L*

---

3 docet: *a. a. O.*, S. 66. 9 indicaret: *a. a. O.*, S. 67. 12 Adjungit: *a. a. O.*, S. 68 f. 20 progreditur: *a. a. O.*, S. 71.

Ad hoc universaliter absolvendum, necessarium esse ait, pro utraque incognitarum seu mediarum quaesitarum, substituere alias per assumtam rationem $\frac{q}{b}$ multiplicatas. Id problema inquit ita universaliter per praecedentem analysin solvi nequit, sed rationem non explicat, quae tamen opinor facile appareret, si examinaremus.

Ponit $\frac{by}{p}$ pro a, et $\frac{bv}{p}$ pro e. Unde tres simplices, quas et dividit quantum potest: $pv \sqcap y^2$ et $\frac{pd}{b}y \sqcap v^2$ et $\frac{p^2d}{b}$ $[\sqcap]$ yv. Duabus prioribus junctis fit aequatio ad infinitos circulos, $y^2 - \frac{pd}{b}y \sqcap pv - v^2$. Jam pro $pv \sqcap y^2$, substituatur $\frac{qp}{b}[v] \sqcap \frac{q}{b}y^2$ et hac aequatione juncta cum posteriore ad parabolam aequatio fit ad infinitas Ellipses vel Hyperbolas loco aequationis ad infinitos Circulos. Et haec aequatio inventa ad infinitas Ellipses aut hyperbolas explicata per unam datam cum priore ad infinitos circulos etiam ad unam per consequens determinata problema solvit.



[*Fig. 1*]

1 hoc *(1)* necessarium esse ait *(2)* universaliter *L* 4 f. examinaremus. *(1)* Huius rei ratio est, qvia supra una | arbitrariarum *erg.* | determinata, determinatur altera nam ob aeqvationem $\frac{\mathrm{rb}}{\mathrm{q}}\mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{d}}\mathrm{e}^2$ *(2)* Ponit *(a)* analogiam continuam *(b)* $\frac{\mathrm{by}}{\mathrm{p}}$ *L* 5 simplices, *(1)* qvas jungendo statim duas priores ad pa *(2)* qvas *L* 10 explicata ... datam *erg. L* 10 f. etiam ... determinata *erg. L*

Exemplo Ellipseos utitur, ponit $\dfrac{q}{b} \sqcap \dfrac{\text{axis Ellipsis datae}}{\text{latus rectum}}$, inscribatur Ellipsi rectangulum $ZIRE$ in qua ZI ad IR sit $\sqcap$ $\dfrac{bq}{p}$ ad $\dfrac{bd}{q}$ quia ex aeq. ad Ellipsin $\dfrac{pq}{b}v - v^2 \sqcap \dfrac{q}{b}y^2 - \dfrac{pd}{b}y$ fieri potest analogismus: $q,\ b,\ \dfrac{pq}{b}v - v^2,\ y^2 - \dfrac{pd}{q}y$. Quoniam vero p etiam assumta est ad libitum potest rectangulum $ZIRE$, intelligi aequale producto ex $\dfrac{pq}{b}$ in $\dfrac{pd}{q}$. Ergo et p determinata quare et aequatio superior ad infinitos circulos. Ergo in recta ZI, sumta $ZH \sqcap p$ et normali $HG \sqcap \dfrac{pd}{b}$ circa rectangulum $ZHGZ$ descriptus circulus Ellipsin secabit in puncto quaesito.

Pergit Slusius ad solutionem problematum solidorum, et primum cubicorum, formulae: $+a^3 + b^2a \sqcap b^2d$. Unde $\dfrac{b^2}{a^2} \sqcap \dfrac{a}{d-a}$, et si ipsarum b et a sumatur tertia proportionalis e, erunt 4 termini in continua analogia $b.\ a.\ e.\ d-a$. Reductum ergo est problema ad inventionem duarum mediarum. Eodem modo si aequatio fuerit $a^3 - b^2a \sqcap b^2d$. fient $b.\ a.\ e.\ d+a$. Si aequatio: $-a^3 + b^2a \sqcap b^2d$. fiet $b.\ a.\ e.\ a-d$.

Methodus ergo solvendi prior huc applicari potest, et plurimi calculi plurimaeque constructiones quas affert Slusius nihil continent quod annotari intersit, excepto exemplo uno, ubi aequationem cubicam sub latere affirmative affectam ope Ellipseos aut Hyperbolae datae, et Circuli construit. Ingreditur scilicet viam nonnihil a superiore differentem. Nimirum pro $qv \sqcap y^2$ substituit $\dfrac{zq}{b}v \sqcap \dfrac{z}{b}y^2$ eamque aequationem addit ad supra inventam ad circulos infinitos, fiet aequatio: $\dfrac{qd}{b}y - y^2 + \dfrac{z}{b}y^2 \sqcap v^2 + \dfrac{zq}{b}v$. ad infinitas Ellipses, si $z \sqcap b$. Hyperbolas si $z \sqcap b$. Parabolas, si $z \sqcap b$. Constructio in lineis digna considerari, quam in Ellipsi Hyperbolaque exhibet. Ibidem annotat, si quis data qualibet parabola vel Hyperbola circa Asymptotos angulum rectum continentes problema solvere vellet, tantum loco e, substitui sufficere e. g. $\dfrac{by}{q}$, nullo substito loco a, et erunt 4 proportionales

21 f. vellet, *(1)* sectione illa proportionali *(2)* tantum *L*

1 ponit: *a. a. O.*, S. 72. 8 Pergit: *a. a. O.*, S. 74. 14 affert: *a. a. O.*, S. 78. 17 substituit: *a. a. O.*, S. 79. 20 annotat: *a. a. O.*, S. 83.

continuae: $b.\ a.\ e.\ d-a.$ unde tres aequationes una ad parabolam, quamlibet, una ad infinitas Ellipses una ad quamlibet Hyperbolam circa asymptotos, (sed quae rectangula sumenda ut cum Circulo componi possit). Aequationi ad Ellipses $\dfrac{b^2}{q^2}y^2 \sqcap da-a^2$ (male impressum $+a^2$) addatur aequatio ad Parabolam $\dfrac{b^2}{q}y \sqcap a^2$ fiet alia aequatio ad quamlibet parabolam. Unde componendo duas ad parabolam fiet aequatio ad Circulum.

Inde exponit modum eadem obtinendi pro T r i s e c t i o n e a n g u l i. Ubi hanc analogiam invenit, a, e, $2a+n$, d. unde aeq. $2ae+ne \sqcap da$ Hyp. circa Asympt. ultra aeq. ad Circ. datum, $b^2 \sqcap a^2+e^2$. Aequatione ista circa Asymptotos utendum ut supra (cum tres aequationes inter se junctae) ubi ex ea facta aequatio ad infinitas Ellipses Hyperbolas vel parabolas; Nimirum hoc loco aeq. ad Hyp. multiplicat per $\dfrac{b}{q}$ huic addit aeq. ad Circulum, ac denique addit utrique aequationis parti: $\dfrac{b^2}{q^2}a^2+\dfrac{1}{4}\dfrac{b^2}{q^2}n^2+\dfrac{b^2na}{q^2}$. Aequatio inde producta est ad infinitas Ellipses Hyperbolas vel Parabolas scilicet si $q \sqcap b$ fit Ellipsis, si $\sqcap$ Hyperbola, si $\sqcap$ parabola. Sed constructio qua utitur considerari digna est, nam etsi ordinata ista ad Parab. non sit ad ang. rect. est tamen ad ang. rectos ad diam. circ. artificio quod ibi adhibitum est, scilicet huc non est observatum, ut una incognitarum sit ordinata altera abscissa; nam nec id semper necesse. Notat aequatione ad Circulum et ad Hyperbolam aequalium laterum, ad axem junctis ablatis aequalibus, fieri aequationem ad parabolam. Ego idem addiderim de qualibet ad Hyperbolam et Ellipsin cum qualibet alia ad Hyperbolam vel Ellipsin juncta fieri posse aequationem ad Parabolam (: Omnes aequationes ad Parabolas infinitas et ad Hyperbolas vel Ellipses infinitas aequalium laterum sicut ad quamlibet quia sub illis infinitis comprehensi omnes possibiles :). In Problemate Trisectionis anguli ait Slusius omnes aequationes ad parabolam et Hyper-

5 componendo *(1)* aeqvatio ad *(2)* duas *L* 6 a n g u l i. *(1)* Cum qvo et formulis supra dictis *(a)* solvi *(b)* vel *(2)* Ubi *L* 7 d. *(1)* ultra aeqvationem circuli dati, *(2)* Aeqvatio ad Circulum *(3)* unde *L* 13 parabola. *(1)* | sed *nicht gestr.* | *(a)* angulus tunc non est *(b)* applicata tunc non est ad diametrum atqve ideo *(2)* sed *L* 17 aeqvalium ... axem *erg. L* 21 qvia ... possibiles *erg. L*

3 f. male impressum $+a^2$: Der Druckfehler auf S. 83 ist in der Liste der Errata korrigiert (*a. a. O.*, S. [182]). 6 exponit: *a. a. O.*, S. 84. 16 Notat: *a. a. O.*, S. 88. 22 ait: *a. a. O.*

bolam aequalium laterum, et ad infinitas Hyperbolas vel Ellipses, etiam ad quamlibet, quia Circulus cujus arcu secto angulus secandus est, pro libitu major et minor assumi possit.

Restat nunc ex Slusio excerpenda quae de problematum solidorum formulis sine reductione eadem methodo solvendis, tradit, sed ea schedulae separatae inscripsi.

Pars 2. Excerptorum ex Slusiani *Mesolabi* 1668 editi, Analysi

Dictum est de Inventione duarum Mediarum proportionalium, de Constructione aequationum cubicarum sub latere tantum affirmative, ut $a^3 + b^2a \sqcap b^2d$ vel negative $a^3 - b^2a \sqcap b^2d$, vel amphibole, $-a^3 + b^2a \sqcap b^2d$ affectarum, ac de Trisectione anguli. Jam omnia problemata solida, aut ad tres illas formulas, aut ad mesolabum et trisectionem anguli reduci queunt. Utile tamen fuerit exponere quomodo problemata ista solvi possint etiam absque reductione. Recte consideranti videtur primum omne problema solidum sola anguli trisectione adhibita solvi posse. Videamus an non et omne problema solidum sola radicis cubicae extractione solvi possit. Ait Cartesius ex Cardani *arte Magna* regulisque Scipionis Ferrei, si aequatio sit $z^3 * \sqcap +apz + a^2q$, necesse esse, ut $\frac{q^2a^4}{4}$ sit $\sqcap \frac{a^3p^3}{27}$, alioquin ex ea non posse extrahi radicem Cubicam: sive aequationem non posse reddi ex affecta puram. At huic malo videtur in promtu remedium esse mutando incognitam in aliam. Ponatur $\frac{pz}{d} \sqcap y$. Ergo $z \sqcap \frac{d}{p}y$, pro z substituatur ejus valor, fiet: $\frac{d^3}{p^3}y^3 \sqcap * + a\frac{\cancel{p}d}{\cancel{p}}y + a^2q$. vel $y^3 \sqcap * + \frac{ap^3}{d^2}y + \frac{a^2p^3}{d^3}q$. Jam ponamus $\frac{q^2a^4}{4} \sqcap \frac{a^3p^3}{27} - ca^5$, videamus an fieri possit, ut $\frac{a^4p^6q^2}{4d^6}$ sit $\sqcap \frac{a^3p^9}{27d^6}$, substituendo scilicet pro $\frac{q^2a^4}{4}$ ejus valorem, supra inventum, $\frac{a^3p^3}{27} - ca^5$. et habebimus: $\frac{a^3p^3}{27} - ca^5, \frown \frac{p^6}{d^6} \sqcap \frac{a^3p^9}{27d^6}$, sive $\frac{a^3p^3}{27} \sqcap \frac{a^3p^3}{27} - ca^5$.

12–183,12 NB. Speculatio a me adjecta.

---

5 tradit: *a. a. O.*, S. 88–95. 14 Ait: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 93. 14 f. ex ... *Magna*: G. CARDANO, *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus*, 1545, Bl. 31 (G. CARDANO, *Opera* IV, S. 251).

Et $0 \sqcap -ca^5$. Quod est absurdum quia c. et a. ponuntur termini positivi. Unde patet id fieri non posse, multiplicatione nec divisione. At additione vel subtractione si rem experiamur, redibit terminus secundus sublatus; ideoque arte opus erit ad inquirendum an res ita additione subtractioneve vel etiam earum cum multiplicatione aut divisione, commixtione, dirigi possit, ut sublato postea secundo illo termino, possit desideratus quadrati illius super illum cubum excessus obtineri. Sed haec alias inquirenda, nunc addo tantum, si posuissemus $z \sqcap \frac{d}{a} y$. habuissemus postremo: $\frac{a^3p^3}{27} \sqcap \frac{p^6}{27} - c$. quod videamus an sit possibile. Ergo $\frac{a^3p^3}{27} \sqcap \frac{p^6}{27}$. Ergo $a \sqcap p$. Ergo $a \sqcap p - e$. Ergo $a^3 \sqcap p^3 - 3p^2e + 3pe^2 - e^3$, substituendo, fiet: $\frac{\cancel{p^6} - 3p^5e + 3p^4e^2 - p^3e^3}{27} \sqcap \frac{\cancel{p^6}}{\cancel{27}} - c$. Ergo $+3p^5e - 3p^4e^2 + p^3e^3 \sqcap c$. vel $\sqcap c - f$. Sed cum ita arbitraria quantitas d. evanuerit, manifestum est, hac quidem methodo nihil agi. Sed alia videtur esse in promtu, cujus ope videntur omnia illa problemata reduci posse ad Mesolabum, de quo alibi dissertatione separata.

Nunc de constructione problematum solidorum sine reductione, per circulum et quamlibet sectionem Conicam datam. Esto a e q u a t i o: $a^3 + ba^2 * \sqcap bd^2$, unde Analogismus: $d^2 \,/\, a^2 \,/\, b + a \,/\, b$. Sit e media inter b et $b + a$. fiet aequatio $b^2 + ba \sqcap e^2$ ad parab. ac duplex analogismus: $d \,/\, a \,/\, b + a \,/\, e$. item $d \,/\, a \,/\, e \,/\, b$. Unde aequationes $ba + a^2 \sqcap de$, iterum ad parab. et $ae \sqcap bd$ circa Asympt. ad Hyp. Duae parabolae subtrahendo junctae dant circularem, unde facile caetera fiunt.

---

8 *Nebenrechnung:*

$$\begin{array}{rrrr}
 & p^2 & -\ 2pe & +\ e^2 \\
 & & p & -\ e \\
\hline
p^3 & -\ p^2e & +\ 2pe^2 & [-]\ e^3 \\
 & -\ 2p^2e & +\ pe^2 &
\end{array}$$

1 qvia ... positivi *erg.* *L*

---

9 $\sqcap c$: Richtig wäre $\sqcap 27c$. 12 alibi: vgl. z. B. VII, 1 N. 129 u. 134.

Si A e q u a t i o sit: $a^3 - pa^2 + b^2a \sqcap b^2d$ sive $b^2a - b^2d \sqcap pa^2 - a^3$. unde $b^2 \,/\, a^2 \,/\, p - a \,/\, a - d$. et sumta inter $p - a$, et $a - d$ media e. fiet aequatio ad circulum $pa + da - a^2 - pd \sqcap e^2$. et duplex analogismus, $b \,/\, a \,/\, p - a \,/\, e$. ac $b \,/\, a \,/\, e \,/\, a - d$. unde duplex aequatio $be \sqcap pa - a^2$, ad parabolam. $ba - bd \sqcap ae$ ad Hyperbolam circa asymptotos. Circulus in hoc exemplo statim se offert, si vero non occurrisset, prima aequatio composita cum alia aequatione ad parabolam, ut in primo exemplo statim eum obtulisset, nunc autem dat Ellipsin, vel aliam parabolam.

Inter Aequationes 4[ti] gradus data sit in exemplum Aeq. $2ba^3 - a^4 \sqcap b^2d^2$ erit demto utrinque b^2a^2, et mutatis omnibus signis $a^4 + b^2a^2 - 2ba^3 \sqcap b^2a^2 - b^2d^2$ eritque $\dfrac{b^2}{a^2} \sqcap \dfrac{a^2 + b^2 - 2ba}{a^2 - d^2}$. positoque $a^2 - d^2 \sqcap e^2$. quae aequatio est ad Hyperbolam aequalium laterum[,] fient proportionales: $b \,/\, a \,/\, b - a \,/\, e$ et aequatio ad parabolam $ba - a^2 \sqcap be$, a cujus duplo auferendo aliam ad Hyperbolam, emanebit $2ba - a^2 - d^2 \sqcap 2be + e^2$ ad Circulum.

Si sit A e q u a t i o $b^3a - a^4 \sqcap b^2d^2$, vel $b^3a - b^2d^2 \sqcap a^4$, erit $b^2/a^2/ba - d^2$. Et posito $e^2 \sqcap ba - d^2$, quae est aeq. ad parab. habebuntur tres continue proportionales $b \,/\, a \,/\, e$. et rursus aequatio ad parabolam $be \sqcap a^2$. quae ablata a priore dat $e^2 - be \sqcap ba - d^2$ aeq. ad Circulum.

Si sit A e q u a t i o $p^2a^2 + ba^3 - a^4 \sqcap b^2d^2$, fit $b^2 \,/\, a^2 \,/\, p^2 + ba - a^2 \,/\, d^2$. et faciendo $p^2 + ba - a^2 \sqcap e^2$. aeq. ad Circ. fient proportionales $b \,/\, a \,/\, e \,/\, d$. unde aequatio ad asymptotos $ae \sqcap bd$. cujus duplum junctum aequationi priori dat $p^2 + ba - a^2 + 2bd \sqcap e^2 + 2ae$. sive $p^2 + ba + 2bd \sqcap a^2 + e^2 + 2ae$. aeq. ad parab. cujus diameter inclinatur ad diametrum Circuli angulo semirecto, applicatae vero sunt eidem circuli diametro perpendiculares ut supra in prop. 14. et 15, id est in iis casibus, ubi ope asymptotorum aliae aequationes compositae sunt. Verum quoniam tam in hac aequationum specie quam in aliis magis affectis, inventio aequationis ad circulum saepe difficilis est, in praesto est R e g u l a U n i v e r s a l i s , pro qualibet aequatione solida, quomodolibet affecta.

11–13 NB.

21 f. NB.

23 prop. … 15: R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 38–43.

Nam vel ad 4^{tum} gradum ascendunt, vel subsistunt in 3^{tio} si hac multiplicatione per a, sive incognitam ad 4^{tum} gradum promovendae sunt. Hoc facto vel sub cubo etiam erunt affectae aequationes quarti gradus; vel non. Si sub cubo, sive affirmative sive negative, facienda est aequatio ad parabolam quamlibet, a^2+ vel $-ba \sqcap qy$ sumta q. ad libitum; et b dimidia coefficientis ad cubum, scilicet si ponamus esse a^4+ vel $-2ba^3$ si vero sub aliis gradibus tantum affecta fuerit aequatio sufficiet aequatio ad parabolam quamlibet, $a^2 \sqcap qy$. In exemplum sit Aequatio quadrato quadratica, cujus omnia loca sint repleta seu quae sit affecta sub omnibus gradibus parodicis, $a^4-2ba^3+bna^2+b^2pa \sqcap b^2d^2$ resolvatur in Analogismum, ut ratio regulae evidentius appareat $b^2 \,/\, a^2 \,/\, a^2-2ba+bn \,/\, d^2-pa$. Ob aeq. ad parab. $a^2 \sqcap ba+qy$, qui valor si in analogismo superiori substituatur in locum a^2, fiet aequatio $q^2y^2+bnqy-b^2a^2+b^2na \sqcap b^2d^2-b^2pa$ ad infinitas scilicet Hyperbolas pro varia ratione q ad b, et quod si $-b^2a^2$, substituatur ulterius ejus valor, nempe $-b^2qy-b^3a$, fiet aequatio ad quamvis parabolam.

Aeq. ad parab. $y^2 \begin{array}{l} +\,bn\,y \\ -\,b^2\,.. \\ \left[\dfrac{\quad}{q}\right] \end{array} \sqcap \begin{array}{l} b^2d^2-b^2p\,a \\ \qquad -\,b^2n\,.. \\ \qquad +\,b^3\quad .. \\ \qquad \left[\dfrac{\quad}{q^2}\right] \end{array}$ quae rursus est ad quamlibet parabolam, et si prior ad parabolam ab ea auferatur relinquetur aequatio ad Circulum.

$$\text{Aeq. ad Circ. } y^2 \left\{ \begin{array}{llll} +\,bn\,y & \sqcap\, b^2d^2 & -\,b^2p\,a & -\,a^2. \\ \underline{-\,b^2}\,\ldots & & -\,b^2n\,\ldots & \\ \quad q & & \underline{+\,b^3}\quad\ldots & \\ & & \quad q^2 & \\ -\,q\ \ldots & & +\,b\quad\ldots & \end{array} \right.$$

Aequatio ad infinitas Ellipses inveniri potuisset, addendo primae aequationi ad infinitas Hyperbolas, primam aequationem ad parabolam ductam in q^2, supponendo $q \sqcap b$, vel etiam ductam in b^2, per quemlibet numerum, v. g. 2. multiplicatam, exempli gratia per 2. ut sequitur: $q^2y^2+bnqy-b^2a^2+b^2na+2b^2a^2-2b^3a \sqcap b^2d^2-b^2pa+2b^2qy$. Igitur cum hoc circulo et qualibet parabola, idque dupliciter, vel infinitis Hyperbolis aut Ellipsibus, vel etiam cum qualibet, si huc applicetur methodus superior aequatio proposita construetur.

Si deficeret $2ba^3$ sufficeret poni pro aeq. ad parab. $qy \sqcap a^2$. (Hoc per se patet ponendo $b \sqcap 0$ sed hoc methodus ejus non permittit, quia ipsam b. repetit, deberet assignare ipsi termino tertio literam particularem, ut caeteris, item deberet assignare terminum peculiarem cognito.) Unde haberetur $q^2y^2 + bna^2 + b^2pa, \sqcap b^2d^2$ ad infinitas Ellipses vel etiam ad Circulum, si q^2 aequaretur bn.

Et iterum: $y^2 + \dfrac{bn}{q}y \sqcap \dfrac{b^2d^2 - b^2pa}{q^2}$ ad quamlibet parabolam, unde auferendo aeq. priore, ad parab. fiet aeq. ad Circ.

Quodsi aequatio ex Cubica sit sublata ad QQ$^{\text{draticam}}$, pro b^2d^2 substituatur 0. et caetera procedent ut ante. Si abesset a^2, foret $n \sqcap 0$. si abesset a, foret $p \sqcap 0$ quo si absit, et simul a^3 ut $a^4 - 2ba^3 + bna^2 \sqcap 0$. invenietur aequatio ad Circulum,

$$\begin{array}{cccccc} y^2 & +bn & y & \sqcap & -b^2n\,a & -a^2. \\ & \dfrac{-b^2}{q} & .. & & \dfrac{+b^3}{q^2} & .. \\ & -q & .. & & +b & .. \end{array}$$

Sed non opus hoc molimine, cum sit plana, et valeat: $2ba - a^2 \sqcap bn$. Si quis tamen eam per hunc circulum construere velle aequationi huic $2ba - a^2 \sqcap bn$, jungendo $a^2 - ba \sqcap qy$, fiet $ba \sqcap bn + qy$ aequatio ad lineam rectam, quae priori ad infinitos circulos puncta problema solvit. Infiniti autem sunt circuli, quia q sumi potest ad lubitum. Unde et sumi potest circulus datus.

Universaliter loquendo esto aequatio $a^4 + 2ca^3[+]bna^2 + b^2pa \sqcap b^2d^2$ vel: $a^4 + 2ca^3 + bna^2 \sqcap -b^2pa + b^2d^2$, unde analogismus: $\dfrac{b^2}{a^2} \sqcap \dfrac{a^2 + 2ca + bn}{-pa + d^2}$. Esto aequatio ad quamlibet parabolam: $a^2 + ca \sqcap gy$, vel $a^2 \sqcap gy - ca$, quae est ad parabolam. Ergo pro a^2, substituatur in analogismo ejus valor, fiet: $\dfrac{b^2}{gy - ca} \sqcap \dfrac{gy\boxed{-ca + 2}ca + bn}{-pa + d^2}$, et multiplicando per crucem: $[-]b^2pa[+b^2d^2] \sqcap g^2y^2\boxed{+gyca - cagy} - c^2a^2 + bngy[-cabn]$ quae est ad infinitas Hyperbolas, et rursus pro a^2 substituendo ejus valorem, habebimus: $-b^2pa$ $+b^2d^2 \sqcap g^2y^2 - c^2gy + c^3a + bngy\ -cabn$, quae iterum est ad parabolam, et sublata ab ea priore ad parabolam, fit ad Circulum quae ita ordinari potest:

22 f. qvae ... Hyperbolas *erg. L*   24 $+b^2d^2$ *erg. L*   24 $-$cabn *erg. L*   24 f. parabolam, *(1)* atqve *(2)* et ... qvae *L*

$$\begin{array}{llllll} y^2 & -\dfrac{c^2}{g}\ y & \sqcap & -\dfrac{c^3}{g^2}\ a & -a^2 & +d^2p^2. \\ & +\dfrac{bn}{g} \ldots & & +\dfrac{cbn}{g^2} \ldots & & \\ & -\ g\ \ldots & & -\dfrac{b^2p}{g^2} \ldots & & \\ & & & -\ c\ \ldots & & \end{array}$$

Erit a. ad circulum, quomodocunque literae $c.\ n.\ p.\ d.$ explicentur, id est sive falsae sint sive verae; semper enim nihilominus verum manebit, quadrata incognitarum uno aequationis latere collocata, eadem signa habitura, et nullis multiplicationibus affecta esse. Quorum prius ab Hyperbola, posterius ab Ellipsi distinguit.

Caeterum ut ad Aequationem Catholicam sectionum Conicarum nunc perveniamus: resumatur prior ad Hyperbolas infinitas $\dfrac{b^2pn}{g^2} + \dfrac{c^2}{g^2}a^2 \sqcap +\dfrac{bng}{g^2}y + y^2$. Est inquam ad Hyperbolas infinitas, nam in hoc situ $\dfrac{c^2}{g^2}a^2$, semper signo $+$ afficitur etsi lineae c et g fuerint falsae vel c solum falsa vel g solum falsa, quia quadrata falsarum verae sunt quantitates, caeterorum autem quae sint signa non refert. Ab hac aequatione auferatur aequatio prior ad parabolam, in $\dfrac{h^2 - b^2}{g^2}$ ducta. Quod si secundus terminus extat, et c, per consequens reperitur in aequatione data, tunc b sit $\sqcap$ h. et in Hyp. erit $h^2 - b^2 \sqcap c^2$, in Ell. $\sqcap$ c^2, in parab. $\sqcap$. fietque Aequatio:

1–4 *Daneben:* Aeq. ad parab. prior ducta in $\dfrac{b^2}{q^2}$ facit $\dfrac{b^2}{g^2}a^2 + \dfrac{b^2}{g^2}ca \sqcap \dfrac{b^2}{g}y$.

---

1 $+d^2p^2$: Richtig wäre $\dfrac{b^2d^2}{g^2}$. 16 Aequatio: In der folgenden Gleichung sind einige Faktoren nicht korrekt. Leibniz rechnet konsequent weiter, bemerkt in S. 188 Z. 10 die Fehlerhaftigkeit seiner Rechnung und bricht das Konzept ab.

$$\frac{b^2pn}{g^2}\left\{\begin{array}{l}+c^2\,v^2\\-h^2\\\dfrac{+b^2}{g^2}\end{array}\right.\left\{\begin{array}{l}-h^2\,v\\\dfrac{+b^2}{g^2}\end{array}\right. \sqcap \begin{array}{l}+\dfrac{bn}{g}y+y^2.\\ \left\{\begin{array}{l}-h^2\\\dfrac{+b^2}{g^2}\end{array}\right.\end{array}$$

Caeterum, ut alibi usurpatis a me literis res consonet, pro c substituamus, n, pro n, ponamus p, pro p ponamus r, pro b^2dd, ponamus b^3s. Jam illud agendum est, ut aequatio Conica arbitraria, hoc loco exposita, comparetur datae. Esto data $2r\omega \text{ǂ} \frac{r}{t}\omega^2 \sqcap \text{♉}^2$, ponendo $v+l \sqcap \omega$, et $y+m \sqcap \text{♉}$, habebimus: $2rv+2rl \text{ǂ} \frac{r}{t}v^2 \text{ǂ} 2\frac{r}{t}lv \text{ǂ} \frac{r}{t}l^2 \sqcap y^2+2my+m^2$. Ergo $m \sqcap \frac{+bng-h^2+b^2}{2g^2}$. $2r \text{ǂ} \frac{2r}{t}l \sqcap \frac{-h^2+b^2}{g^2}$. $\text{ǂ}\frac{r}{t} \sqcap \frac{+c^2-h^2+b^2}{g^2}$, ac denique $2rl \text{ǂ} \frac{r}{t}l^2-m^2 \sqcap \frac{b^2pn}{g^2}$. Video me nonnihil errore calculi lapsum. Statim ab initio in calculanda aequatione, ad infinitas Hyperbolas, rem ergo separata schedula exequar. Contentus hic ex Analysi *Mesolabi* Slusiani quaedam ad rem pertinentia excerpsisse.

5 alibi: z. B. N. 18 S. 205 Z. 10. 11 separata schedula: N. 19.

17. SPECIMEN MEMORABILE ALGORITHMI SIGNORUM
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 160. 1 Bl. 4°. 2 S. — Bl. 160 hing ursprünglich mit LH 35 XIV 1 Bl. 243 (VII, 1 N. 136) zusammen.
Cc 2, Nr. 1209

Datierungsgründe: Das Stück setzt inhaltlich N. 16 voraus. Ebenso wie in VII, 1 N. 136 verwendet Leibniz die Doppelvorzeichen ǂ und ‡, was eine Niederschrift nicht vor Mai 1674 nahelegt. Während Leibniz in VII, 1 N. 136 allerdings durchgängig das moderne Gleichheitszeichen = verwendet, benutzt er dieses in unserem Stück nur noch sporadisch und setzt überwiegend den stilisierten Waagebalken $\sqcap$ ein. Den Wechsel der Gleichheitszeiten nimmt er bis spätestens Juni 1674 vor; unser Stück ist offensichtlich in zeitlicher Nähe zu diesem Vorgang entstanden. Des weiteren unterscheidet Leibniz hier „heterogene“ (also aus unterschiedlichen Gleichungen stammende, ansonsten aber gleiche) Doppelvorzeichen durch Nummerierung voneinander — beispielsweise (6ǂ) von (7ǂ). Dieses Verfahren hat er in der *Méthode de l'universalité I* vom Mai oder Juni 1674 entwickelt (vgl. N. 10 § 18), jedoch in der Praxis kaum angewandt. Im vorliegenden Band findet es sich nur in unserem Stück. Auch dies deutet auf eine Niederschrift um die Jahresmitte 1674 hin. — Das Wasserzeichen des Papierbogens ist für Oktober 1674 sowie häufiger für Herbst 1675 belegt, aber auch für die erste Hälfte von 1674 anzusetzen.

Specimen Memorabile Algorithmi Signorum,
et quomodo aequationes institui possint inter ipsa signa.
Et usus horum ad doctrinam de Locis

$by - y^2 \sqcap v^2 - cv$ locus est ad circulum.

18–20 Specimen ... Locis *erg. L* 21–190,1 circulum. *(1)* ponantur ⟨b⟩ − y $\sqcap$ ⟨e⟩ fietqve ⟨−y $\sqcap$ −⟩ sive $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{i}} \sqcap \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{y}}$ sive $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{v}} \sqcap \frac{\mathrm{i}}{\mathrm{y}}$, ponendo *(a)* b − e $\sqcap$ *(b)* pro e valorem eius ut et pro i, fiet $\frac{\mathrm{b-y}}{\mathrm{v}} \sqcap \frac{\mathrm{v-c}}{\mathrm{y}}$. by− *(2)* $+\frac{\mathrm{c}^2}{4}$ + by *L*

21 locus est ad circulum: Vgl. N. 16 S. 175 Z. 23. 22 f. ⟨b⟩ − y ... $\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{i}} \sqcap \frac{\mathrm{v}}{\mathrm{y}}$: Am oberen Rand des Blattes ist ein Teil der Variante verloren gegangen, wahrscheinlich durch Leibnizens eigenhändiges Beschneiden des Papiers. Vermutlich hatte Leibniz $b - y = e$ und $v - c = i$ gesetzt und ist so zu der Gleichung $ey = iv$, umgestellt also zu $\frac{e}{i} = \frac{v}{y}$, gelangt.

$+\frac{c^2}{4}+by-y^2 \sqcap v^2-cv+\frac{c^2}{4}$, vel $\sqrt{\frac{c^2}{4}+by-y^2} = \ddagger v \Ddagger \frac{c}{2}$ vel $+v-\frac{c}{2}$. Addatur recta, $\frac{c}{2}$ manebit idem qui ante locus, cujus aequatio $\frac{c^2}{4}+by-y^2 \sqcap v^2$. Pro $\frac{c^2}{4}$ ponamus [−]db fietque $-db+by-y^2 \sqcap v^2$. Fiat $\frac{c^2}{4} \sqcap -\frac{b^2}{4}-f^2$, fiet $f^2 \sqcap -\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$. Transponendo vel $-\frac{b^2}{4}+by-y^2 \sqcap v^2+f^2$, vel $+\frac{b^2}{4}-by+y^2 \sqcap -v^2-f^2$, et $\ddagger\frac{b}{2} \Ddagger y \sqcap \sqrt{-v^2-f^2}$, resectoque b, habebimus $y^2 \sqcap -v^2-f^2$ vel $-y^2 \sqcap v^2+\underbrace{f^2}_{-\frac{b^2}{4}-\frac{c^2}{4}}$. Ergo $y^2 \sqcap \frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-v^2$. Q. E. D. Locus ergo circulus est.

Universalius: $(\ddagger)\, by \ddagger y^2 \sqcap (((\ddagger)))\, v^2 ((\ddagger))\, cv$, unde fiet: $+\frac{b^2}{4}(\ddagger)\ddagger by+y^2 \sqcap \ddagger(((\ddagger)))\, v^2 \ddagger((\ddagger))\, cv+\frac{b^2}{4}$, extrahendo radicem, fiet:

$$\text{vel } (4\ddagger)\,\frac{b}{2}\,(5\ddagger)\,y \qquad \left.\begin{array}{ccccc} + & \frac{b}{2} & \ddagger(\ddagger) & y \\ \ddagger(\ddagger) & \ldots & + & \ldots \\ \ddagger & \ldots & (\ddagger) & \ldots \\ (\ddagger) & \ldots & \ddagger & \ldots \end{array}\right\} \text{vel} \left\{\begin{array}{cccc} [-] & \frac{b}{2} & \Ddagger(\ddagger) & y \\ \Ddagger(\ddagger) & \ldots & - & \ldots \\ \Ddagger & \ldots & (\Ddagger) & \ldots \\ (\Ddagger) & \ldots & \Ddagger & \ldots \end{array}\right\| \sqcap \sqrt{\ldots\ldots.}$$

Resecto jam $(4\ddagger)\,\frac{b}{2}$ quocunque signo affectum sit, et $(5\ddagger)\,y$ quocunque etiam signo affectum sit quadrato, habebimus: $+y^2 \sqcap \ddagger(((\ddagger)))\, v^2 \ddagger((\ddagger))\, cv+\frac{b^2}{4}$. Unde patet aliquam ex ambiguitatibus, nempe $(\ddagger)$ evanuisse, salva loci natura et aequationis gradu. Potest et

1 $+v-\frac{c}{2}$ *(1)* referetur *(2)* addatur *L* 3 $\sqcap v^2$. *(1)* ponatur in lo *(2)* transponendo $by-y^2 \sqcap v^2-db$ vel potius ponamus *(3)* Fiat *L* 4 $\sqcap v^2+f^2$, *(1)* unde $-b+y \sqcap \sqrt{v^2+f^2}$ Unde locus *(2)* vel $+\frac{b^2}{4}$ *L* 6 circulus est. *(1)* $y^2 \sqcap v^2+f^2$ Unde patet pro Signorum variatione locum esse posse etiam ad Hyperbolam *(2)* Universalius: *L* 7 $\ddagger y^2 \sqcap$ *(1)* $\ddagger v^2$ *(2)* $(((\ddagger)))\, v^2$ *L*

fieri $ǂ\frac{b^2}{4}\ ǂ y^2 \sqcap (((ǂ)))\, v^2 ((ǂ))\, cv$. Jam addatur utrobique $+\frac{c^2}{4}$, extractaque radice habebimus $(6ǂ)\,\frac{c}{2}\,(7ǂ)\,v$, ab uno latere, et resecta $(6ǂ)\,\frac{c}{2}$ et reliquis quadratis: $(3ǂ)\,v^2 \sqcap +\frac{c^2}{4}\ ǂ\frac{b^2}{4}\ ǂ y^2$. Unde rem manifestum est ad simplicissimam expressionem esse reductam, duasque ambiguitates velut inutiles elisas, satisque ex illis quae restant judicari posse, quando locus est Hyperbola aut Circulus. Nam si $(3ǂ) \sqcap +$, et $ǂ \sqcap -$, et $c \sqcap b$, fiet $v^2 \sqcap g^2 - y^2$, et locus est circulus. Si $(3ǂ) \sqcap -$ et $c \sqcap b$, et $ǂ \sqcap +$ locus itidem est circulus fit enim $-v^2 \sqcap -g^2 + y^2$.

Nimirum ut locus sit circulus necesse est esse aequationem $(8ǂ)\,v^2\,(8ǂ)\,y^2\,(8‡)\,g^2 \sqcap 0$ eandem cum hac $(3‡)\,v^2\ ǂ\ y^2 + \frac{c^2}{4}\ ǂ\ \frac{b^2}{4} \sqcap 0$ ideo $ǂ \sqcap (8ǂ)$ et $(3‡) \sqcap (8ǂ)$.

Junctisque his aequationibus inter se, patet esse $ǂ \sqcap (3‡)$ vel $(8‡)\,g^2 \sqcap ǂ\frac{b^2}{4} + \frac{c^2}{4}$ et $(8‡)\,g^2 \sqcap +\frac{c^2}{4}(8‡)\,\frac{b^2}{4}$. Ergo $g^2 \sqcap (8‡)\,\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4}$, et $(8‡)\,g^2 \sqcap (8‡)\,1,\frown (8‡)\,\frac{c^2}{4} + \frac{b^2}{4}$.

2 $(6ǂ)\,\frac{c}{2}$ *(1)* caetera *(2)* et *L* 2 $(3ǂ)$ *erg. L* 5 aut *(1)* Elli *(2)* Circulus *L* 8 f. $\sqcap 0$ *(1)* comparandum *(2)* comparandam eandem cum hac: $(3‡)\,\mathrm{v}^2\ ǂ\,\mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{c}^2}{4}\ ǂ\ \frac{\mathrm{b}^2}{4} \sqcap 0$ Ergo $(8‡)\,\mathrm{g}^2 \sqcap +\mathrm{c}^2\ ǂ\ \frac{\mathrm{b}^2}{4}$, vel $(8‡)1 \sqcap \dfrac{+\mathrm{c}^2\ ǂ\ \frac{\mathrm{b}^2}{4}}{\mathrm{g}^2}$ et $ǂ \sqcap (8ǂ)$. *(3)* eandem *L* 10 f. $ǂ \sqcap (3‡)$ *(1)* Et ut *(2)* qvia $(8‡)\mathrm{g}^2 - \mathrm{c}^2 \sqcap ǂ\frac{\mathrm{b}^2}{4}$, erit $(8‡)4\mathrm{g}^2 - 4\mathrm{c}^2 \sqcap ǂ\mathrm{b}$ *(3)* vel $(8‡)\mathrm{g}^2 \sqcap ǂ\frac{\mathrm{b}^2}{4} + |\,\mathrm{c}^2$ *ändert Hrsg.* | *(a)* fiet ergo $ǂ\mathrm{v}^2\ ǂ\ \mathrm{y}^2‡$ *(b)* Unde $ǂ$ *(c)* ponatur $\mathrm{c}^2 \sqcap ǂ\frac{\mathrm{b}^2}{4}(3ǂ)\,\mathrm{d}^2$, fiet 8 = *(d)* $(8ǂ)\,\mathrm{g}^2 \sqcap ǂ\frac{\mathrm{b}^2}{4} + \mathrm{c}^2$. ergo $\mathrm{g}^2 = (8‡)\ ǂ\ \frac{\mathrm{b}^2}{4}(8‡)\,\mathrm{c}^2$ *(e)* et $(8‡)\,\mathrm{g}^2 \sqcap +\frac{\mathrm{c}^2}{4}(8‡)\frac{\mathrm{b}^2}{4}$ *(aa)*, hab *(bb)* Et pro $(8‡)$ substituendo $‡$ habebimus: *(cc)* Ergo g^2 *L*

---

1 $ǂ\frac{b^2}{4}$: Aus dem Vorangehenden folgt eigentlich $‡\frac{b^2}{4}$. Leibniz rechnet konsequent weiter.
2 reliquis quadratis: Leibniz quadriert hier $(7ǂ)\,v$ zu $(3ǂ)\,v^2$, was die von ihm selbst formulierte Regel, dass $ǂ$ mal $ǂ$ gleich $+$ ist (vgl. S. 98 Z. 4), verletzt. Somit kann die Wurzel aus $(3ǂ)\,v^2$ auch nicht, wie von ihm im Halbsatz zuvor angegeben, gleich $(7ǂ)\,v$ sein. 11 $(8‡)\,\frac{b^2}{4}$: Folgerichtig wäre $(8ǂ)\,\frac{b^2}{4}$. Leibniz rechnet konsequent weiter.

Ergo fiet: $(8\text{ǂ})\,v^2\,(8\text{ǂ})\,y^2\,(8\text{ǂ})\,-1,^{\frown}\,(8\text{⩲})\,\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}$. Ergo $v^2+y^2\,(8\text{ǂ})\,\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}=0$ vel $v^2+y^2\,\text{ǂ}\,\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}=0$.

Imo, ut ipsam (8ǂ) potius eliminemus, ita agendo:

$$\begin{array}{llllll}
 & (8\text{ǂ})\,v^2 & (8\text{ǂ})\,y^2 & (8\text{⩲})\,g^2 & \sqcap & 0 \quad \text{aequatio pro Circulo, arbitraria,}\\[1ex]
 & (3\text{⩲})\,v^2 & \text{ǂ}y^2 & +\dfrac{c^2}{4}\,\text{ǂ}\,\dfrac{b^2}{4} & \sqcap & 0 \quad \text{aequatio inventa}\\[1ex]
\text{Ergo} & \text{ǂ}v^2 & \text{ǂ}y^2 & \text{⩲}g^2 & \sqcap & 0\\[1ex]
 & \text{ǂ}v^2 & \text{ǂ}y^2 & +\dfrac{c^2}{4}\,\text{ǂ}\,\dfrac{b^2}{4} & \sqcap & 0
\end{array}$$

Ergo $\text{⩲}g^2 \sqcap +\dfrac{c^2}{4}\,\text{ǂ}\,\dfrac{b^2}{4}$ et $g^2\sqcap\text{⩲}\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}$, et $\text{⩲}g^2\sqcap\text{ǂ}1,^{\frown}\,\llcorner\,\text{ǂ}\,\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}\,\lrcorner$.

Fiet ergo $\text{ǂ}v^2\,\text{ǂ}\,y^2{,,}\text{ǂ}1,^{\frown}\,\text{ǂ}\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}\sqcap 0$, vel $v^2+y^2\,\text{ǂ}\,\dfrac{c^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}\sqcap 0$.

$by-y^2-v^2+cv\sqcap 0$ an convertibilis in hanc $-v^2-y^2+\dfrac{c^2}{4}-\dfrac{b^2}{4}\sqcap 0$.

191,10 f. *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{llllll}
 & & -\dfrac{b^2}{4} & +(c^2)\ \ d^2 & \left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} & \dfrac{b^2}{4}\\[1ex]
(8\text{⩲})\,g^2 \ \sqcap & \left\{\begin{matrix}\\ \\ \end{matrix}\right. & & & & \\[1ex]
 & & +\dfrac{b^2}{4} & +c^2+d^2 & \left\{\begin{matrix}+\\-\end{matrix}\right\} & \dfrac{b^2}{4}\\[1ex]
\text{aut} & & \cancel{\text{ǂ}\dfrac{b^2}{4}} & +c^2 \quad \sqcap & \text{⩲} & \dfrac{b^2}{4} \quad (9\text{ǂ})\\[1ex]
\text{et fiet} & & & (8\text{⩲})\,g^2 \quad \sqcap & (9\text{ǂ})\,d^2 &
\end{array}$$

4 *Am oberen Rand der Rückseite Rechnung ohne Textbezug:*

$$\begin{array}{r}
999\\
9\\
8|\overline{991}
\end{array}$$

9 f. vel ... $\sqcap$ 0 *(1)* Ergo | si *erg.* | aeqvatio data: $(\text{ǂ})\,\mathrm{by}\,\text{ǂ}\,\mathrm{y}^2(3\text{⩲})\,\mathrm{v}^2((\text{⩲}))\,\mathrm{cv}\sqcap 0$ in hanc $\mathrm{v}^2+\mathrm{y}^2\,\text{ǂ}\,\dfrac{\mathrm{c}^2}{4}+\dfrac{\mathrm{b}^2}{4}\sqcap 0$ commutari potest post explicationem; locus est circulus; sin minus, Hyperbola. ⟨Imo⟩ brevius, qvia non alius valor qvam signorum qvaeritur, si v^2 et y^2, eodem signo affecta sunt, et *(2)* $\mathrm{by}-\mathrm{y}^2$ *L*

Ergo $by+cv \sqcap \frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$. Ergo $y \sqcap \frac{c^2}{4b}-\frac{b}{4}-\frac{cv}{b}$. Quod fieri non potest, locus enim fieret Triangulum. Ista ergo accuratius examinanda ne errore calculi labamur. Error in ea hic, quod comparavi postremam, aequationem primae, oblitus rectas a me rejectas. Ita ergo dicendum si signa $\ddagger$ et $(3\pm)$ sunt eadem, et $\ddagger\frac{c^2}{4}+\frac{b^2}{4} \sqcap -$ aliquid locus est circulus, sin minus hyperbola. Ponendo scilicet v, et y esse aliquid, non vero nihil aut nihilo minora. Unde si b aliquid positivum est, necesse est $\ddagger$ esse $-$.

Si idem est locus $(\ddagger)\, by \ddagger y^2 (3\pm)\, v^2 ((\pm))\, cv \sqcap 0$ et locus $v^2+y^2 \sqcap \pm\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$ problema est circulus, tantum ergo necesse est $\pm\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$ esse aliquid si v^2+y^2 est aliquid, et nihilo minus, si v, ut et y est nihilo minus. Ergo in locorum tractatione radices verae a falsis distinguendae sunt. Ergo Regula: Si v^2 et y^2, verae (falsae) sunt quantitates, et eodem signo affectae, et $\llcorner \pm\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}\lrcorner$ vera (falsa) quantitas est, tunc locus $(\ddagger)\, by \ddagger y^2\, (3\pm)\, v^2 ((\pm))\, cv \sqcap 0$ est Circulus. Sin minus Hyperbola.

1 $y \sqcap \frac{c^2}{4b}-\frac{b}{4}+\frac{cv}{b}$ *L ändert Hrsg.* 4 eadem, | et si signa $\ddagger$ et $(3\pm)$ non sunt eadem, statim praedici potest commutationem fieri non posse. *erg. u. wieder gestr.* | | et si signa $\ddagger$ et $(3\pm)$ sunt eadem, *nicht gestr.* | et $\ddagger\frac{c^2}{4}$ *L* 4 aliqvid *erg. L* 5 non vero *(1)* nihil aliud *(2)* nihil aut *L* 8 esse *(1)* aliqvid. Ac proinde $\ddagger$ valore $+$ *(2)* $\langle - \rangle \sqcap v^2+y^2$ *(3)* aliqvid *L* 8 et *(1)* nihil si *(2)* nihilo *L* 9 si | y *ändert Hrsg.* | , ut *L* 10 (falsae) *erg. L* 11 (falsa) *erg. L* 12 Hyperbola. | Rectius si $\ddagger \sqcap (3\pm)$ et *gestr.* | *L*

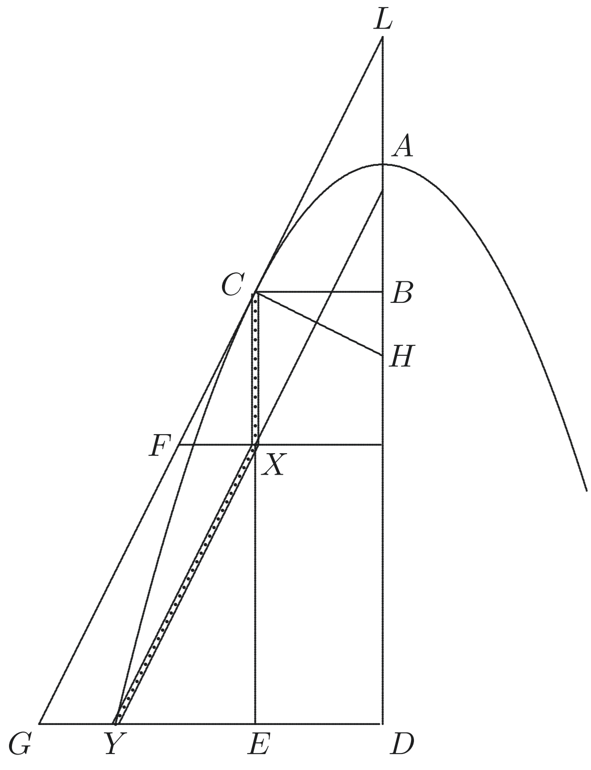
2 Triangulum: Diese Ausdrucksweise ist typisch für Leibniz; vgl. etwa VII, 5 N. 1 S. 3. Im Prinzip handelt es sich hier um die Gerade, welche durch die beiden Schnittpunkte des ursprünglichen mit dem transformierten Kreis verläuft. 10 Regula: Der Fall, dass v^2 und y^2 *falsae* sind, ist ausgeschlossen. Damit die Gleichung einen Kreis beschreibt, muss lediglich das Vorzeichen von y^2 identisch mit jenem von v^2 sein; sind sie einander entgegengesetzt, liegt eine Hyperbel vor. Eine Betrachtung von $\pm\frac{c^2}{4}-\frac{b^2}{4}$ ist weder erforderlich noch sinnvoll.

18. THEOREMA MEMORABILE
[Mitte 1674]

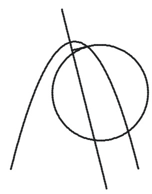
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 167–168. 1 Bog. 2° 4 S. Textfolge Bl. 167 r°, 168 v° unteres Drittel, 167 v°, 168 r°, 168 v° obere zwei Drittel.
Cc 2, Nr. 849_2

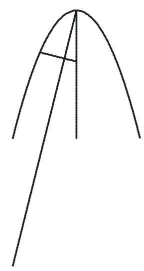
Datierungsgründe: Die fünf Studien N. 18 bis N. 22 stehen in thematischem Zusammenhang und sind alle auf Papier mit einem für den Sommer 1674 belegten Wasserzeichen geschrieben. Inhaltlich setzen sie die Exzerpte aus Sluses *Mesolabum* (N. 16) voraus, in denen umgekehrt auf sie verwiesen wird. Ab Teil 2 von N. 18 greifen sie eine Problemstellung in dem spätestens Mitte 1674 entstandenen VII, 1 N. 113 (S. 700 Z. 7 bis S. 701 Z. 11) auf, die sie vom Schnitt zweier Kreise auf den Schnitt eines Kreises mit einem Kegelschnitt verallgemeinern.

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]


[*Fig. 2*]


[*Fig. 3*]

$CX \sqcap x$. $YX \sqcap y$. $LA \sqcap AB \sqcap z$. $CB^2 \sqcap AB \frown r$. $DY^2 \sqcap rAB + rCE$. $y^2 \sqcap xa$. $y \sqcap \sqrt{xa}, \sqcap \sqrt{YE^2 + XE^2}$. $\dfrac{XE}{YE} \sqcap \dfrac{2z}{\sqrt{zr}}$. $FX \sqcap \dfrac{x\sqrt{zr}}{2z}$. $GY \sqcap FX$.

$\dfrac{XE \frown \sqrt{zr}}{2z} + \sqrt{zr}, \square \sqcap rz + rx + rXE$. Unde $XE^2 \frown \dfrac{\cancel{r}}{4z} + \cancel{zr} + \cancel{XE} \frown \cancel{r} \sqcap \cancel{z} + x + \cancel{XE}$. Unde tandem $XE^2 \sqcap 4zx$.

Altera aequatio est: $XE^2 + \dfrac{XE^2 r}{4z} \sqcap xa$, unde $XE^2 \sqcap \dfrac{xa}{1 + \dfrac{r}{4z}}$. Ergo $4z\cancel{x} \sqcap \dfrac{\cancel{x}a}{1 + \dfrac{r}{4z}}$ sive $4z + r \sqcap a$. Sive $z \sqcap \dfrac{a - r}{4}$.

Theorema est memorabile, in parabola distantiam Diametri secundariae a vertice in axe sumtam aequari, quartae parti excessus lateris recti secundarii super primarium. Unde consequitur latus rectum primarium secundario quolibet minus esse.

Tentandus est calculus generalis, pro omnibus Sectionibus conicis. Ac primum constat generaliter in omni sectione Conica, quis sit valor ipsius LB, vel etiam ipsius BH, si

---

1 *Darunter*: Notabilis haec solutio, ob usum Methodi de Maximis et Minimis, necessarium ubi minime videbatur.

1 +rCE *(1)* 2x *(2)* $\dfrac{\mathrm{LA + AB}}{\sqrt{\mathrm{AX}}} \sqcap$ *(a)* LA+ *(b)* 2x+CE *(3)* $\mathrm{y}^2 \sqcap \mathrm{xa}$. *L* 2 f. $\dfrac{\mathrm{XE}}{\mathrm{YE}} \sqcap$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{2x}}{\sqrt{\mathrm{xr}}}$ item 2x *(2)* $\dfrac{\mathrm{2z}}{\sqrt{\mathrm{zr}}}$. *(a)* item $\dfrac{\mathrm{2z + x + XE}}{\mathrm{YE} + \sqrt{\mathrm{zr}}}$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{FX}}{\mathrm{x}} \sqcap {}^{\mathrm{z+x}}$ *(c)* $\dfrac{\mathrm{FX} + \langle 2\rangle \mathrm{z}}{\mathrm{x+}}$ *(d)* $\dfrac{\mathrm{FX}}{\mathrm{x}}$ *(e)* $\mathrm{FX} \sqcap \dfrac{\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}}$ *(aa)* Jam $\dfrac{\mathrm{GE}}{\mathrm{CE}}$ seu $\dfrac{\dfrac{\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}} + \mathrm{YE}\left(+\dfrac{\mathrm{XE} \frown \sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}}\right)}{\mathrm{x + XE}} \sqcap \dfrac{\mathrm{YE}}{\mathrm{XE}}$ sive $\dfrac{\dfrac{\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}} + \mathrm{XE} \frown \dfrac{\sqrt{\mathrm{z}}}{\mathrm{2z}}}{\mathrm{x + XE}} \sqcap \dfrac{\mathrm{XE} \frown \dfrac{\sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}}}{\quad}$ fietqve: x + X *(bb)* $\mathrm{GY} \sqcap \mathrm{FX}$ *(aaa)* $\dfrac{\mathrm{GD}}{\mathrm{DL}} \sqcap$ *(bbb)* $\dfrac{\mathrm{DL}}{\mathrm{GD}} \sqcap \dfrac{\mathrm{2z}}{\sqrt{\mathrm{zr}}}$ seu *(ccc)* Jam *(ddd)* seu $\dfrac{\mathrm{x}\sqrt{\mathrm{z}}}{\mathrm{2z}} + \mathrm{y}$ *(eee)* $\dfrac{\mathrm{XE} \frown \sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}} + \sqrt{\mathrm{zr}} \sqcap \mathrm{zr + xr + XEr}$ sive $\mathrm{XE} \sqcap \dfrac{\mathrm{zr + xr} - \sqrt{\mathrm{zr}}}{\dfrac{\sqrt{\mathrm{zr}}}{2}}$ *(fff)* $\dfrac{\mathrm{XE} \frown \sqrt{\mathrm{zr}}}{\mathrm{2z}}$ *L* 4 + $\cancel{\mathrm{XE}}$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{XE}^2 \frown \cancel{\mathrm{zr}}}{\mathrm{4z}\cancel{^2}} \cancel{+}\cancel{\mathrm{zr}} - \cancel{\mathrm{XE}} \frown \cancel{\mathrm{r}} \sqcap \cancel{\mathrm{zr}} + \mathrm{x}\cancel{\mathrm{r}} + \mathrm{2XE}\cancel{\mathrm{r}}$ *nicht gestr.* *(2)* Unde *L* 5 $\sqcap \dfrac{\mathrm{xa}}{1 + \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{4z}}}$ *(1)* $\sqcap \dfrac{\mathrm{4xa}}{5}$ *(2)* Unde $\mathrm{XE} \sqcap \sqrt{\dfrac{\mathrm{xa}}{1 + \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{4z}}}}$ *(3)* Ergo *L* 7 memorabile, *(1)* abscissam *(2)* in ... Diametri *(a)*, aeqvari *(b)* secundariae *(aa)* primariam *(bb)* a vertice *L* 8 excessus *(1)* qvo latus rectum primarium superat latus rectum secundarium *(2)* lateris *L*

ponatur CH perpendicularis ad curvam in C. Nam ostensum saepius si $CB \sqcap \sqrt{2bz \pm \frac{b}{q}z^2}$, esse $BH \sqcap b \pm \frac{b}{q}z$.

Jam in omni Sectione Conica $\frac{XE}{YE} \sqcap \frac{LB}{CB} \sqcap \frac{CB}{BH}$ sive $YE \sqcap \frac{bXE \pm \frac{b}{q}zXE}{\sqrt{2bz \pm \frac{b}{q}z^2}}$. Eodem modo in omni Sectione Conica $\frac{CX}{FX} \sqcap \frac{LB}{CB} \sqcap \frac{CB}{BH}$ ideoque posita $CX \sqcap x$, erit $FX \sqcap \frac{bx \pm \frac{b}{q}zx}{\sqrt{2bz \pm \frac{b}{q}z^2}}$. Porro $\underset{\underset{CB}{/\backslash}}{YE+ED}$, $\square$, $\sqcap \underbrace{AB(z)+CX(x)+XE}_{AD}$, $\frown 2b \pm \frac{b}{q} \frown AD^2$. Unde fiet posita $XE \sqcap e$: $\frac{b^{\cancel{2}}e^2 \pm \frac{2b^{\cancel{2}}}{q}ze^2 + \frac{b^{\cancel{2}}}{q^2}z^2e^2}{2\cancel{b}z \pm \frac{\cancel{b}}{q}z^2} + \cancel{2bz} \pm \cancel{\frac{b}{q}z^2} + \cancel{2be} \pm \cancel{\frac{2b}{q}ze} \sqcap \cancel{2bz} + 2bx + \cancel{2be} \pm \cancel{\frac{b}{q}z^2} \pm \frac{2b}{q}zx \pm \cancel{\frac{2b}{q}ze} \pm \frac{b}{q}x^2 \pm \frac{2b}{q}xe \pm \frac{b}{q}e^2$ ac denique multiplicatis omnibus per $2bz \pm \frac{b}{q}z^2$, et destructis utrinque fiet

$$e^2 \sqcap 2x \pm \frac{2zx}{q} \pm \frac{x^2}{q}, \frown 2z \pm \frac{z^2}{q}$$ (quod in parabola daret $e^2 \sqcap 4xz$).

Jam $YE^2+XE^2 \sqcap YX^2$, et $YX^2 \sqcap 2ax \pm \frac{a}{q}x^2$ ponatur. Ergo: $\sqcap \frac{b^{\cancel{2}} \pm \frac{2b^{\cancel{2}}}{q}z + \frac{b^{\cancel{2}}z^2}{q^2}}{2z \pm \frac{z^2}{q}} + 1, \frown e^2$. Ponatur jam ipsa x, seu linea CX esse infinite parva, fiet $\underset{1}{\cancel{2}} \pm \frac{\cancel{2}z}{q}, \frown 2z \cancel{\pm \frac{z^2}{q}} \sqcap \frac{\cancel{2}a}{b \pm \frac{2bz}{q} + \frac{bz^2}{q^2} + 2z \pm \frac{z^2}{q}}$.

---

1 ostensum: z. B. N. 5. 8 fiet: Bei der Umformung unterlaufen Leibniz Fehler, welche zusammen mit weiteren Versehen die folgende Rechnung beeinträchtigen.

$$\text{Ac denique fiet: }\left.\begin{array}{llllllll} +b & \mp\dfrac{\overset{3}{\cancel{2}}b}{q}\,z & +2\dfrac{b}{q^2}\,z^2 & \mp\dfrac{b}{q^3}\,z^3 \\ -a & +2\ \ldots & \mp\cancel{\dfrac{1}{q}}\ \ldots & +\dfrac{1}{q^2}\ \ldots \\ & \mp\cancel{\dfrac{b}{q}}\ \ldots & +\cancel{\dfrac{b}{q^2}}\ \ldots & \\ & & \mp\dfrac{\overset{3}{\cancel{2}}}{q}\ \ldots & \end{array}\right\}0$$

Aequatio problematis: Data sectionis Conicae datae parametro, invenire diametrum illi parametro respondentem.

$$\left.\begin{array}{llll} +b & \mp\dfrac{3b}{q}\,z & +\dfrac{2b}{q^2}\,z^2 & \mp\dfrac{b}{q^3}\,z^3 \\ -a & \underset{\text{NB.}}{+2} & \mp\dfrac{3}{q} & +\dfrac{1}{q^2} \end{array}\right\}0$$

Error puto aliquis admissus circa numerum signatum NB., deberet ibi esse 4, loco 2, quod ex applicatione ad parabolam judico. Applicetur et ad circulum.

z est AB. b est parameter principalis, a, est parameter data secundaria, q est latus transversum principale. Lateris transversi secundarii nulla habetur ratio.

[*Teil 2*]

$$\begin{array}{llll} x^3 & px^2 & rax & a^2s \\ x^3 & tx^2 & vax & a^2w \end{array}$$

$\overset{B}{\sqrt{2by+2bl-y^2-2ly-l^2+h^2}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay \mp \dfrac{a}{q}y^2}} + g$. B applicata Circuli quaesiti; A, applicata Sectionis Conicae datae. g. excessus ipsius B, super A.

14 *Dazu am Rand*: $x+\dfrac{p}{3}$

Notandum autem, si B est applicata Circuli, $\sqrt{b^2+h^2}$, aequari ejus radio. Quod ita demonstro: Ponatur $y+l \sqcap z$ et fiet $B \sqcap \sqrt{2bz-z^2+h^2}$. Ponendo $B \sqcap x$, habebimus $2bz-z^2+h^2 \sqcap x^2$, vel $2bz-z^2-b^2 \sqcap x^2-h^2-b^2$ vel $b^2+z^2-2bz \sqcap b^2+h^2-x^2$, vel $\underbrace{\mp b \pm z}_{v} \sqcap \sqrt{\underbrace{b^2+h}_{a^2}{}^2-x^2}$. Ergo $\sqrt{b^2+h^2} \sqcap a$.

Jam resumta aequatione $B \sqcap A+g$, quadrataque, habebimus $B^2 \sqcap A^2+g^2+2Ag$. vel $B^2-A^2-g^2 \sqcap 2Ag$, et ordinando explicandoque

$$\begin{array}{llll} -1\ y^2 & 2b\ \ y & +2bl & \sqcap\ 2Ag, \text{ vel } \odot y^2\ \ ☽y\ \ ☿ \sqcap 2Ag. \\ \pm\dfrac{a}{q} & -2l & -l^2 & \\ & -2a & +h^2 & \\ & & -g^2 & \end{array}$$

Et quadrando

$$\left.\begin{array}{lllll} \odot^2\ y^4 & 2\odot\ ☽\ y^3 & 2\odot ☿\ \ y^2 & 2\ ☽☿\ \ y & +☿^2 \\ & & ☽^2\ \ \ldots & & \\ & & \pm 4g^2\dfrac{a}{q}\ \ \ldots & -8g^2a\ \ldots & \end{array}\right\} \sqcap 0$$

Jam esto data aequatio cubica $y^3\ py^2\ ary\ a^2s$, terminos omnes habens completos, attollatur ad [quadrato]quadraticam, multiplicando per incognitam, fietque $y^4\ py^3\ ary^2\ a^2sy\ *$, in qua ut patet terminus ultimus deest. Eritque ☿ $\sqcap$ 0. et omnia per ☿ multiplicata. Ideoque per 4$^{\text{tum}}$ terminum habebitur $g^2 \sqcap \dfrac{-ar}{8}$ valor purus ipsius g^2. b erit $\sqcap \dfrac{p}{2}+l+a$ per terminum secundum. Sed inde veniemus ad ἄτοπον, quia si in termino tertio valor purus ipsius, $☽^2$ substituatur, habebitur valor purus ipsius g^2, quod esse non debet.

2 $\sqrt{2bz-z^2+h^2}$ *(1)* $\sqcap x\cancel{^2}$ *(2)* ponendo *L* 3 $\sqcap x^2-h^2-b^2$ *(1)* Et ponendo $\mp b \pm z \sqcap v$, fiet $v \sqcap \sqrt{x^2-h^2-b^2}$ vel *(2)* vel *L* 7–11 $\sqcap$ 2Ag *(1)* $4g^2,\frown 2a+2a \frown \dfrac{ca}{q^2} \quad \sqcap$ *(2)* Et *L* 15 $y^3\ apy^2$

$$4g^2,\frown \mp\frac{a}{q}+\frac{a}{q}\frown\frac{ca}{q^2}$$
$$4g^2,\frown 2a+2a\frac{ca}{q^2},\frown 2 \sqcap$$

$a^2ry\ \ a^3s$ *L ändert Hrsg.* 20–199,1 debet *(1)* An ergo sic: ut pro g, substituamus *(a)* gl, *(b)* g + l caeteris omnibus retentis. *(2)* Sed *L*

18 Ideoque: Leibniz verrechnet sich im folgenden Koeffizientenvergleich und setzt in S. 199 Z. 3 neu an.

Sed nec res procedet si ponatur $\mercury$ valere aliquid. Habebitur enim bis valor absolutus ipsius $\mercury$. Ergo fiat:

$$g+\sqrt{b^2(by)-y^2\boxed{+2ly}{}^{-}_{(+)}l^2}\sqcap\sqrt{2ay+2ah\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q}y^2\ \text{ǂ}\ \frac{2a}{q}hy\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q}h^2}$$

$$\begin{array}{llll|lllllll}
\text{ǂ}\,\frac{a}{q}\ y^2 & +2a & y & 2ah & \odot^{[2]}y^4 & 2\odot\leftmoon y^3 & 2\odot\mercury & y^2 & 2\leftmoon\mercury & y & +\mercury^2\\
+1 & \text{ǂ}\,\frac{2ah}{q} & \ldots & \text{ǂ}\,\frac{a}{q}h^2 & & & \leftmoon^2 & & & & \boxed{-4g^2b^2}\\
\odot & +2l & \ldots & +b^2 & & & +4g^2 & & -4g^2l & & +4g^2l^2\\
 & (b) & (+) & -l^2 & & & & & (b) & & \\
 & \leftmoon & & +g^2 & & & & & & & \\
 & & & \mercury & & & & & & &
\end{array}$$

Subrogetur $\frac{n\odot^2}{2}$ in locum $\leftmoon$, et $\frac{ap\odot^2-\frac{n^2\odot^4}{4}-4g^2}{2\odot}$ in locum $\mercury$ vel $\frac{ca-4g^2}{2\odot}$. Ergo $nca\odot^2-n\odot^2g^2-4g^2\sqcap\frac{a^2r\odot^2}{b}$ dividatur b. Si absit terminus ultimus valebit $\mercury\sqcap 2gl\frown\sqrt{-1}$. $ap\odot^2-n^2\odot^4-g^2\sqcap 0$. et $\frac{nca\odot^2-a^2r\odot^2}{n\odot^2-4b}-g^2$. Destructo utrobique $-g^2$, habebitur $\alpha glb+\beta^2gl+\gamma^3b+\delta^4\sqcap 0$.

$$\frac{ag}{\sqrt{\sqrt{ba}}}+\sqrt{y2\sqrt{ba}-y^2+l\sqrt{ba}}\sqcap\sqrt{2ay+2ah\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q}y^2\ \text{ǂ}\ \frac{2a}{q}hy\ \text{ǂ}\ h^2}.$$

1 aliqvid *(1)* qvia habet *(2)* et $\leftmoon$ nihil hab *(3)* habebitur *L* 10–13 *(1)* h invenitur per l, ope termini secundi *(a)* Si terminus ultimus desit ⟨—⟩ et secundus *(b)* si pro termino secundo substituatur eius valor n, fiet $\frac{\mathrm{ap}\odot^2-\mathrm{n}^2-4\mathrm{g}^2}{2\odot}\sqcap\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{r}\odot^2+4\mathrm{g}^2\mathrm{l}}{\mathrm{n}}$ *(2)* Subrogetur … $+\ \delta^4\sqcap 0$ *erg. L*

2 fiat: Leibniz unterlaufen im folgenden Ansatz Rechenfehler, er versucht, durch Abänderung zum Erfolg zu kommen. 10–13 Subrogetur … $+\ \delta^4\sqcap 0$: Leibniz übernimmt von N. 20 S. 219 Z. 9 fehlerhafte Ergebnisse.

$$\begin{array}{llllll}
\odot & \text{☽} & & \text{☿} \\
ǂ\frac{a}{q} & y^2 & 2a & y & 2ah \\
+1 & & ǂ\frac{2a}{q}h & & ǂh^2 \\
 & & -2\sqrt{ba} & & -\frac{g^2a}{\sqrt{ba}} \\
 & & & & -l\sqrt{ba}
\end{array}
\qquad
\begin{array}{lllllll}
\odot^2y^4 & 2\odot\text{☽}y^3 & 2\odot\text{☿} & y^2 & 2\text{☽☿} & y & +\text{☿}^2 \\
 & & \text{☽}^2 & \dots & & & \\
 & & \frac{4g^2a}{2\sqrt{ba}} & & 4g^2a & & -4g^2al
\end{array}$$

Ita habetur primum valor ipsius g^2 absolute.

Jam conferendo duos valores ipsius ☿, ex termino tertio et quinto, fiet

$$\frac{4g^2a - 2\cancel{b}ap\odot^2\sqrt{ba}}{2\odot} \sqcap 2\sqrt{ba}\sqrt{4g^2al + a^3s\odot^2}.$$

$$\frac{4g^2a - 2\cancel{b}ap\odot^2\sqrt{ba}}{2\odot} \sqcap \frac{2a\sqrt{ba} - 2a^2}{2aq} \;ǂ\; \frac{ba - 2a\sqrt{ba} + a^2}{} \;[\textit{bricht ab}]$$

[*Teil 3*]

In sectione conica cujus vertex A. abscissa ex axe AX, sit ordinata YX, angulum ad axem faciens datum XYB, ita scilicet ut ratio rectarum XB, et BY sit data $\frac{c}{q}$. Datur

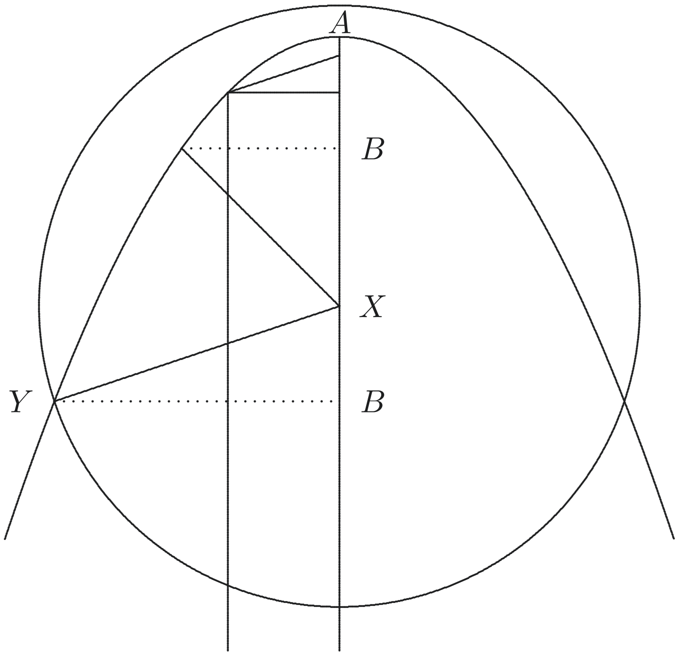
---

8 *Am Rand, durch Strich abgetrennt*: $h \sqcap \dfrac{\sqrt{ba} - a}{ǂ\frac{2a}{q}}$

---

4 $-\frac{g^2a}{\sqrt{ba}}$: Richtig wäre $-\frac{g^2a^2}{\sqrt{ba}}$. Dieses Versehen beeinträchtigt mit weiteren Fehlern die Rechnung.

7 conferendo: Beim folgenden Koeffizientenvergleich mit dem Polynom $\odot^2(y^4 + ny^3 + apy^2 + a^2ry + a^3s)$ vergisst Leibniz den Term ☽$^2y^2$ und bricht dann die Rechnung ab.



[*Fig. 4*]

recta $AX \sqcap x$. Data YB, quae est $\sqrt{2az \ddagger \frac{a}{q}z^2}$ posito $AB \sqcap z$ datur et XB, quae erit

$\dfrac{c\sqrt{2az \ddagger \frac{a}{q}z^2}}{q}$, et YX erit $\sqrt{2az \ddagger \frac{a}{q}z^2 + \frac{ca2az}{q^2} \ddagger \frac{ca^2}{q^3}z^2}$.

---

1 *Neben der Figur*: $AX \ddagger XB$
$z \sqcap y \ddagger 2za$

2 AX ⊓ x. *(1)* datur | pro arbitrio *erg.* | et recta XB ⊓ b. Ergo AB ⊓ x(‡)b. *(a)* Jam ⟨hisc⟩ *(b)* Ergo $\frac{\mathrm{YB}}{\mathrm{XB}} \sqcap \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}$, Ergo YB ⊓ $\frac{\mathrm{bq}}{\mathrm{c}}$, *(aa)* ut eandem *(bb)* Ergo 2ax (‡) 2ab ‡ $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2$‡ $(\overline{\ddagger})$ $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$2bx ‡ $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{b}^2 \sqcap \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{q}}{\mathrm{c}^2}$. YB ⊓ 2aAX ‡ 2aXB‡ *(2)* Data *L*

---

3 *YX* erit: Leibniz hat im folgenden Wurzelausdruck und in der weiteren Rechnung bis S. 202 Z. 10 c^2 durch ca ersetzt.

Hoc jam ut ad solutionem problematum transferamus: ad Circulum separatim applicemus cujus applicata esto $\sqrt{2by - y^2 + l^2} \sqcap YB$. Ergo datur et $XB \sqcap \frac{c}{q}\sqrt{2by - y^2 + la}$ et YX erit $\sqrt{2by - y^2 + la + \frac{2cab}{q^2}y - \frac{ca}{q^2}y^2 + \frac{ca^2l}{q^2}}$. Jam faciemus:

$$\overset{B}{\dotfill} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay \mp \frac{a}{q}y^2 + \frac{ca2ay}{q^2} \mp \frac{ca^2}{q^3}y^2 + g}}.$$

Quadrando et ordinando fiet:

$$\begin{array}{llll} -1 & y^2 \quad 2b & y & +la \\ -\frac{ca}{q^2} & \frac{2cab}{q^2} & & +\frac{cala}{q^2} \\ \pm\frac{a}{q} & -2a & & -g^2 \\ \pm\frac{ca^2}{q^3} & -\frac{2a^2c}{q^2} & & \text{☿} \\ \odot & \text{☽} & & \end{array}$$

Erit $b \sqcap a$. si ☽ $\sqcap 0$. Sed incommodum vetus redit scilicet quod duo valores puri ejusdem incognitae habentur, cui malo quaeratur remedium. Omisso l transferatur g in latus B, et in B pro y, ponatur $y + h$ fietque

$$\overset{B}{\sqrt{\left.\begin{matrix}1\\ \frac{c}{q}\end{matrix}\right\} \frown 2by + 2bh - y^2 - h^2 + 2hy}} + g \sqcap \overset{A}{\sqrt{\left.\begin{matrix}1\\ \frac{c}{q}\end{matrix}\right\} \frown 2ay \mp \frac{a}{q}y^2}},$$

fietque quadrando et ordinando

---

4 *Zur rechten Seite der Gleichung*: y pro z.

5 *Darunter:* Pone ca pro c^2.

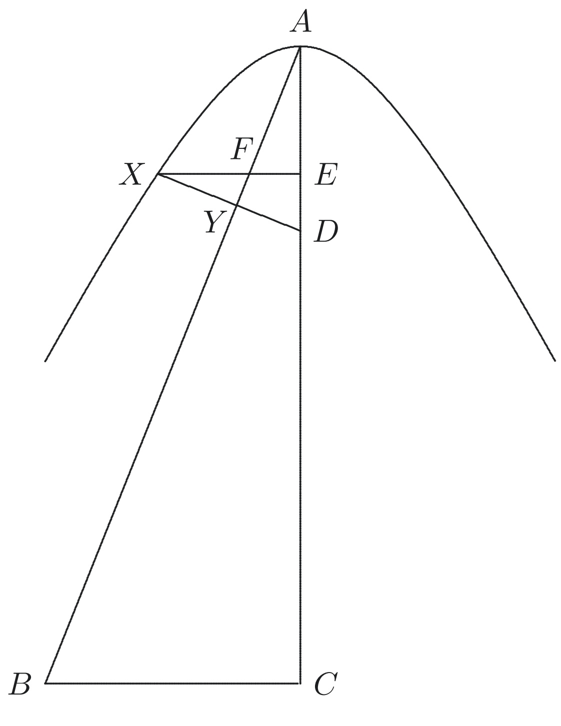
---

2 $XB \sqcap$: Leibniz ersetzt im folgenden Wurzelausdruck l^2 durch la und rechnet damit weiter.
4 Leibniz hat auf der rechten Seite der Gleichung Wiederholungspunkte gesetzt, einen Verbindungsstrich zum Wurzelausdruck für YX auf S. 201 Z. 3 gezogen und mit der Anmerkung „y pro z" die Variable geändert. 13 fietque: In den folgenden Rechnungen unterlaufen Leibniz mehrere Fehler.

$$
\begin{array}{ll}
 & \odot \\
\left.\begin{array}{l} 1 \\ \frac{c}{q} \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{ll} \mp\frac{a}{q} & y^2 \\ +1 & \ldots \end{array}\right.
\end{array}
\quad
\begin{array}{ll}
 & \text{☽} \\
\left.\begin{array}{l} 1 \\ \\ \frac{c}{q} \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{ll} +2a & y^2 \\ -2b & \\ -2h & \end{array}\right.
\end{array}
\quad
\begin{array}{ll}
 & \text{☿} \\
\left.\begin{array}{l} 1 \\ \frac{c}{q} \end{array}\right\} & \left\{\begin{array}{l} -2bh \;\; y \sqcap 2gB \\ +h^2 \\ -g^2 \end{array}\right.
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllllllll}
\text{Et quadrando:} & \odot^2 & y^4 & 2\odot\,\text{☽} & y^3 & 2\odot\text{☿} & y^2 & 2\,\text{☽☿} & y & \text{☿}^2 \\
 & & & & & \text{☽}^2 & & -8g^2b & & -8bhg^2 \\
 & & & & & +8g^2 & & -8g^2h & & +4g^2h^2
\end{array}
$$

Hinc sequitur ante omnia $b \sqcap -h$ (sublato 2^{do} termino aequationis seu si $\text{☽} \sqcap 0$). Sed hinc etiam eo non sublato alia absurditas, nimirum valor ipsius b bis explicatus per h, in termino 2^{do}, et in termino 4^{to}.



[*Fig. 5*]

Sit recta ex vertice sectionis conicae introrsum ducta, angulum ad axem faciens datum, et ratio $\frac{AC}{BC} \sqcap \frac{q}{c}$. Quaeritur valor rectae YX, $\sqcap x$ ex recta AY. Ponatur AY, $\sqcap y$. Ergo $\frac{y}{YD} \sqcap \frac{q}{c}$, et $YD \sqcap \frac{cy}{q}$ et $AD \sqcap \sqrt{y^2 - \frac{c^2y^2}{q^2}}$. $XE \sqcap \sqrt{2AEa \ddagger \frac{a}{q}AE^2}$, et $ED \sqcap \frac{cXE}{q}$, $\sqcap AD - AE$. Ergo $AD - AE \sqcap q\ \surd$ [*bricht ab*].

$$\wedge$$
$$\sqrt{y^2 - \frac{c^2y^2}{q^2}}$$

$\frac{XY}{AY} \sqcap \frac{XE - FE}{AD}$. Ex AD datur XD ut supra posita $\frac{AC}{BC} \sqcap \frac{c}{q}$ erit $AD\ y\sqrt{\underbrace{1 - \frac{c^2}{q^2}}_{\alpha}}$ et subtracta YD ex XD fiet: $XY \sqcap \sqrt{2a\beta - y \ddagger \frac{a}{q}\beta^2y^2 + \frac{c^2}{q^2}2a\beta y \ddagger \frac{c^2}{q^2} \frown \frac{a}{q}\beta^2y^2} - \frac{cy}{q}$. Error est quia hoc non ex AD, sed AE, inventa supra XD.

$$\overbrace{\sqrt{\frac{2q^3}{b^2}y - y^2 + \frac{q^2l^2}{b^2}}}^{B} + \frac{bg}{q} \sqcap \overbrace{\sqrt{2ay + 2ah \ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger \frac{a}{q}h^2 \ddagger \frac{2a}{q}hy}}^{A}.$$ Et quadrando atque ordinando:

2 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \sqcap$ *(1)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}}$ *(3)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}$ *L* 3 Ergo *(1)* YD $\sqcap \frac{\mathrm{y}}{\mathrm{c}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{y}}{\mathrm{YD}} \sqcap$ *(a)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}}$, et YD $\sqcap \frac{\mathrm{qy}}{\mathrm{c}}$ *(b)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}$ *L* 4 ED $\sqcap$ *(1)* $\frac{\mathrm{qXE}}{\mathrm{c}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{cXE}}{\mathrm{q}}$ *L* 5 $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{BC}} \sqcap$ *(1)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{c}}$ erit *(a)* XD *(b)* et AD *(aa)* $\sqrt{}\mathrm{y}^2 - \frac{\mathrm{c}^2}{\mathrm{q}^2}\mathrm{y}$ *(bb)* $\mathrm{y}\sqrt{\underbrace{1 - \frac{\mathrm{q}^2}{\mathrm{c}^2}}_{\alpha}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}}$ *L* 8 *(1)* $\overbrace{\sqrt{2\mathrm{y} - \mathrm{y}^2 + \mathrm{l}^2}}^{\mathrm{B}} + \mathrm{g}$ *(2)* $\overbrace{\sqrt{\frac{2\langle\mathrm{q}\rangle^2}{\mathrm{g}^2}\mathrm{y} - \mathrm{y}^2 + \mathrm{l}^2}}^{\mathrm{B}} + \frac{\mathrm{gb}}{\mathrm{q}}$ *(3)* $\overbrace{\sqrt{\frac{2\mathrm{q}^3}{\mathrm{b}^2}\mathrm{y} - \mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{q}^2\mathrm{l}^2}{\mathrm{b}^2}}}^{\mathrm{B}}$ *L*

---

3 $AD \sqcap$: Richtig wäre $AD = \sqrt{y^2 + \frac{c^2y^2}{q^2}}$. Leibniz rechnet konsequent weiter. 5 supra: Zuvor hatte Leibniz $\frac{AC}{BC} = \frac{q}{c}$ gesetzt. Die folgende Rechnung ist fehlerhaft.

$$\begin{array}{llllll}
\odot & & \rightmoon & & \mercury & \\
\mp\dfrac{a}{q} & y^2 & +2a & y & +2ah & \sqcap\; 2\dfrac{gb}{q}B. \\
+1 & & \mp\dfrac{2ah}{q} & & \mp\dfrac{a}{q}h^2 & \\
 & & -\dfrac{2q^3}{b^2} & & -\dfrac{b^2g^2}{q^2} & \\
 & & & & -\dfrac{l^2q^2}{b^2} &
\end{array}$$

Et rursus quadrando
$$\left.\begin{array}{l}
y^4 \quad \dfrac{\begin{array}{llllllll}
2\odot\rightmoon & y^3 & 2\odot\mercury & y^2 & +2\rightmoon\mercury & y & +\mercury^2 \\
 & & \rightmoon^2 & \ldots & & & \\
 & & +\dfrac{4b^2g^2}{q^2} & \ldots & -8qg^2 & & -4l^2g^2
\end{array}}{\odot^2}
\end{array}\right\}\sqcap 0$$

$$\overline{\overline{\begin{array}{llllllll}
y^4 & n & y^3 & ap & y^2 & a^2r & y & a^3s
\end{array}}}$$

Aeq. 1. Unde $g^2 \sqcap \dfrac{-a^2r\odot^2}{8q}$.

Conferendo terminum tertium et ultimum erit $\dfrac{ap\odot^2 - \dfrac{4b^2g^2}{q^2}}{2\odot} \sqcap \mercury \sqcap \sqrt{a^3s\odot^2 - 4l^2g^2}$.

$$\frac{a^2p^2\odot^4 + \dfrac{16b^4g^4}{q^2} - \dfrac{8apb^2g^2}{q^2}}{4\odot^2} \sqcap a^3s\odot^2 - 4l^2g^2.$$

Eritque Aeq. 2. $l^2 \sqcap \left.\dfrac{\dfrac{a^2p^2\odot^4 + 16b^4g^4 - \dfrac{8apb^2g^2}{q^2}}{4\odot^2} - a^3s\odot^2}{-4g^2}\right\}$ cujus loco ponatur $\beta b^4[+]\gamma^2b^2 + \delta^4$.

14 Eritqve *(1)* $\mathrm{b}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{a^3s}\odot^4 - 4\mathrm{l^2g^2}, \odot^2\langle\mathrm{q}\rangle^2 - \mathrm{a^2p^2}\odot^4}{16\mathrm{g}^2 - 8\mathrm{apg}}$ *(2)* Aeq. 2. *L*

Aeq. 3. Jam per term. 3^{tium} erit:

$$\begin{array}{cccc} b^4 \frown -\dfrac{g^2}{q^2} \frown 2\odot & b^2 \frown & \left.\begin{array}{r} 2ah \\ \mp\dfrac{a}{q}h^2 \\ -\odot^2 ap\end{array}\right\} & 2\odot - 2\odot l^2q^2 \\ +\dfrac{4g^2}{q^2} & & & \\ \hline \multicolumn{4}{c}{-2\odot q^2} \\ \hline -\beta & & -\gamma^2 & -\delta^4 \end{array}$$

Divisis omnibus per $-2\odot q^2$, habebitur bis valor ipsius l^2.

Ponatur jam $\dfrac{b^2 \frown 2ah \mp b^2\dfrac{a}{q}h^2}{-2q\odot}\ \boxed{-\dfrac{b^2\odot^2 ap}{2q\odot} - b^2\gamma^2} \sqcap l^2 - c$. Eritque b^4 etc. $\sqcap c^2$. Atque ita valor ejus (b) habebitur pure. Unde et valor ipsius h pure habebitur per terminum secundum.

2–6 $-2\odot l^2q^2$ *(1)*, vel multiplicatione ipsius b^4, qvippe cognito posito α. divisisqve omnibus per $\langle\beta\rangle$ *(2)* divisis *L* 6 f. ipsius l^2 *(1)* Restat adhuc alia aeqvatio pro valore ipsius h et b. et ea sumenda ex termino ultimo. *(2)* ponatur *L* 7 $\dfrac{b^2 \frown 2ah \mp b^2\dfrac{a}{q}h^2}{-2q\odot}$ *(1)* $\sqcap l^2$ habebimus valorem ipsi *(2)* $\boxed{-\dfrac{-b^2\odot^2 ap}{2q\odot} - b^2\gamma^2}$ *L*

19. DE CONSTRUCTIONE METHODO SLUSII
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 214–215. 1 Bog. 2° 4 S.
Cc 2, Nr. 858

Datierungsgründe: s. N. 18.

[*Teil 1*]

Slus. pag. 81. $\dfrac{\dfrac{dq}{b-z} - y, \frown y}{z\dfrac{qv}{b} + v^2} \sqcap \dfrac{b}{b-z}$ (vel $\dfrac{1}{1-\dfrac{z}{b}}$ [)]. Ergo

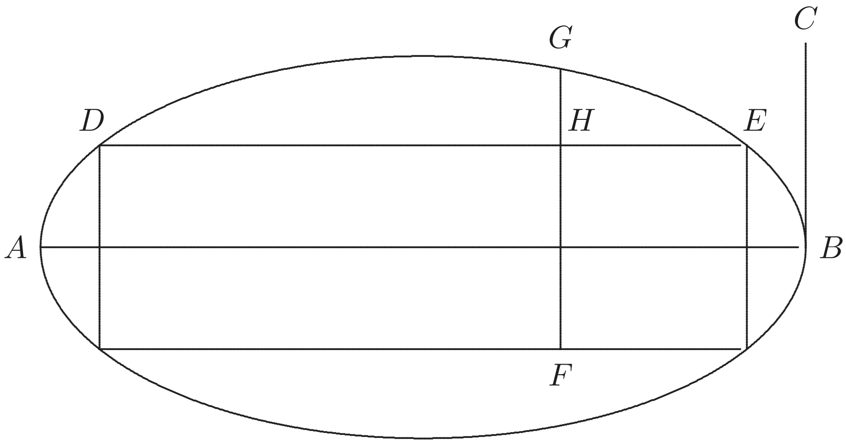
$$\begin{array}{lllll}
\dfrac{dq}{b}\,y & -\,y^2 \quad +\dfrac{z}{b}y^2 & -k^2 \quad \sqcap & \dfrac{zq}{b}\,v & +v^2 \\
 & & -\dfrac{zq}{b}k & 2k\ .. & \\
\hline
+\dfrac{bml}{2}\,y & +\dfrac{l^2}{4}\,y^2 & +\dfrac{b^3p}{g^2} & \dfrac{bmg}{g^2}\,v & +v^2 \\
-\,b^2n & -\,\beta l & & -\dfrac{\beta gb}{g^2} & \\
\dfrac{-\dfrac{\beta l}{2}}{g^2} & \overline{\quad}\ g^2 & & &
\end{array}$$

---

7 *Rechnungen ohne Textbezug*: $\begin{array}{r} 36 \\ 9 \\ \hline 324 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 53 \\ 18 \\ 39 \\ \hline 110 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 36 \\ 27 \\ \hline 252 \\ 72 \\ \hline 972 \\ 110 \\ \hline 1082 \end{array}$ $\quad \begin{array}{r} 1 \\ \cancel{1}\cancel{7} \\ \cancel{2}\cancel{3}8 \\ \cancel{3}\cancel{2}\cancel{2} \\ \cancel{1}\cancel{9}\cancel{9} \\ \cancel{1} \end{array} \ ⨍\ 16\dfrac{18}{19}$ $\quad \begin{array}{r} 72 \\ 54 \\ \hline 18 \end{array}$

---

7 Slus.: R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 80 f. 7 Ergo: Leibniz ersetzt in der folgenden Gleichung v durch $v + k$.



[*Fig. 1*]

Ut AB ad BC, ita DHE ad FGH, ergo appellando $EH \sqcap y$ et $GH \sqcap v$, et $AB : t$, et BC, r, et DE, c, et FH, d, fiet: $\dfrac{1}{\frac{r}{t}} \sqcap \dfrac{y \frown, c - y \text{ (seu } cy - y^2)}{v \frown, v + d \sqcap v^2 + dv}$.

$$\mp\frac{r}{t}y^2 \; \underset{\gamma}{\boxed{\begin{array}{c}\frac{r}{t}c\\ \mp\frac{2r}{t}h\end{array}}}\, y \; \underset{\delta b}{\boxed{\begin{array}{l}\mp\frac{r}{t}h^2\\ -f^2\\ -df\end{array}}} \sqcap \; v^2 \underset{\theta}{\boxed{\begin{array}{cc}+ & d\\ & 2f\end{array}}}\, v \ldots$$

f est quantitas supernumeraria et pro arbitrio assumi potest rursus aliqua ex his.

2 DEH ad FHG *L ändert Hrsg.* 2 GH ⊓ x *L ändert Hrsg.*

3 FH: Leibniz bezeichnet nun die Strecke FH mit d, rechnet aber ab S. 209 Z. 1 wieder mit der zu Anfang aus dem Text von Sluse übernommenen Größe d und verwendet für FH den Wert $\frac{zq}{b}$.

4 $\mp\frac{r}{t}y^2$: Leibniz rechnet nun mit dem Ansatz $\mp\frac{r}{t}(y+h)^2 + \frac{r}{t}c(y+h) = (v+f)^2 + d(v+f)$, vergisst aber den Term $+\frac{r}{t}ch$.

$\frac{dq}{b-z}.\ DE.\ FH\ z\frac{q}{b}.\ \frac{b}{z-b} \sqcap \frac{\frac{dqy}{z-b}-\frac{y^2d}{d}}{v^2+\frac{zq}{b}v}$, sive $bv^2+zqv \sqcap dqy-zy^2+by^2$ vel $\frac{b}{d}\sqcap\frac{qy-\frac{y^2}{d}\frown z-b}{v^2+z\frac{q}{b}v}$. Fiet ergo $q+\frac{-yz+by}{d},\frown y$ vel $\frac{b}{d}[\sqcap]\frac{q+\frac{r}{t}y,\frown y}{v^2+z\frac{q}{b}v}$. $bv^2+zqv-dqy,\frown \frac{t}{r}\sqcap ry^2$. Unde $bv^2+zqv\frown\frac{t}{r}\sqcap y^2+\frac{dqt}{r}y$ sive $\frac{tbv+zq}{ry+}$ [*bricht ab*]

$\frac{t}{r}\sqcap\frac{\frac{dq}{rb}y-\frac{y^2}{b}}{v^2+z\frac{q}{b}v}$. $\frac{tbv^2}{r}+qvt\sqcap dty+ry^2$, vel $v^2+\frac{rq}{b}v\sqcap\frac{r}{b}dy+\frac{r^2}{tb}y^2$. Unde $\frac{\frac{tb}{r}v+qt}{dt+ry}\sqcap \frac{v}{y}\sqcap\frac{\frac{b}{\text{ǂ}r}v+q}{d+\frac{\text{ǂ}r}{t}y}$. Unde $\frac{d+\frac{\text{ǂ}r}{t}y}{\frac{b}{\text{ǂ}r}v+q}\sqcap\frac{y}{v}$, et $\frac{\frac{\text{ǂ}r}{t}y}{\frac{b}{\text{ǂ}r}v+q}\sqcap\frac{y}{v}-\frac{d}{\frac{b}{\text{ǂ}r}v+q}$ vel $\frac{\text{ǂ}r}{t}\sqcap\frac{y}{v}-\frac{d}{\frac{b}{\text{ǂ}r}+q},\frown \frac{\frac{b}{\text{ǂ}r}v+q}{y}$. Ergo $\frac{\text{ǂ}r}{t}\sqcap\frac{b}{\text{ǂ}r}+\frac{q}{v}-\frac{d}{y}$.

[*Teil 2*]

B applicata circuli quaesiti $\qquad$ A applicata sectionis Conicae datae

$$\sqrt{\frac{2q^3}{b^2}y-y^2+\frac{q^2l^2}{b^2}}+\frac{bg}{q} \quad\sqcap\quad \sqrt{2ay+2ah\,\text{ǂ}\,\frac{a}{q}y^2\,\text{ǂ}\,\frac{a}{q}h^2\,\text{ǂ}\,\frac{2ah}{q}y}$$

---

1 f. *Dazu, interlinear ergänzt*: Documentum hic non posse fidi rationibus, nisi ad aequationes reducantur. Imo potest.

4 $\frac{\mathrm{\frac{dq}{rb}y-\frac{y^2}{b}}}{\mathrm{v^2+z\frac{q}{b}v}}$ | sive pro z ponendo r *gestr.* | $\frac{\mathrm{tbv^2}}{\mathrm{r}}+$ *(1)* z *(2)* r *(3)* qvt *L*

---

2 ergo: Leibniz formt zunächst den Zähler des Bruches um, danach unterlaufen ihm mehrere Versehen in der Rechnung. 4 $\frac{tbv^2}{r}$: Leibniz setzt $z = r$, die folgenden Rechnungen werden jedoch durch Fehler beeinträchtigt. 7 [*Teil 2*]: Leibniz setzt an mit der in N. 18 S. 204 Z. 8 umgearbeiteten Formel.

Et quadrando atque ordinando: $$\left.\begin{array}{llll} \odot & \rightmoon & & \mercury \\ \mp\frac{a}{q}y^2 & 2a & y & +2ah \\ +1 & \mp\frac{2ah}{q} & & \mp\frac{a}{q}h^2 \\ & -\frac{2q^3}{b^2} & & -\frac{b^2g^2}{q^2} \\ & & & -\frac{q^2l^2}{b^2} \end{array}\right\} \sqcap \frac{2bg}{q}B.$$

Et rursus quadrando atque ordinando: $$\left.\frac{\begin{array}{llllll} y^4 & 2\odot\rightmoon y^3 & +2\odot\mercury \quad y^2 & \boxed{+2\rightmoon\mercury}\; y & +\mercury^2 \\ & \boxed{-\rightmoon^2} & \ldots & & \\ & +\frac{4b^2g^2}{q^2} & \ldots \quad -8qg^2 & \ldots & -4l^2g^2 \end{array}}{\odot^2}\right\} \sqcap 0.$$

Aequatio arbitraria conferenda cum data $y^4 * apy^2\ a^2ry\ a^3s \sqcap 0$.

Ex his $$\left\{\begin{array}{l} \rightmoon \sqcap 0 \text{ seu} \\ 2a \mp \frac{2a}{q}h - \frac{2q^3}{b^2} \sqcap 0 \quad \text{A e q. } 1 \text{ . ob Terminum } 2^{\text{dum}}. \\ g^2 \sqcap \frac{-a^2r\odot^2}{8q} \quad \text{A e q. } 2 \text{ . ob terminum penultimum.} \end{array}\right.$$

A e q. 3 . $\mercury \sqcap \dfrac{ap\odot^2 - \dfrac{b^2g^2}{q^2}}{2\odot}$, ob Terminum 3^{tium}.

A e q. 4 . $\mercury \sqcap \sqrt{a^3s\odot^2 + 4l^2g^2}$ ob terminum ultimum.

10 $y^4 * apy^3\ a^3ry^2$ *L ändert Hrsg.*

14 A e q. 3.: Leibniz vergisst den Faktor 4 vor dem zweiten Term im Zähler des Bruches. Der Fehler beeinträchtigt mit weiteren Versehen die folgenden Rechnungen.

Collata aequ. 3. et 4. habebitur $\dfrac{a^2p^2\odot^4 - \dfrac{2ap\odot^2b^2g^2}{q^2} + \dfrac{b^4g^4}{q^4}}{4\odot^2} \sqcap a^3s\odot^2 + 4l^2g^2$ vel ut valor habeatur ipsius l^2, habebitur:

$$l^2 \sqcap \frac{-a^3s\odot^2 + \dfrac{a^2p^2\odot^4 - \dfrac{2ap\odot^2b^2g^2}{q^2} - \dfrac{b^4g^4}{q^4}}{4\odot^2}}{4g^2} \quad \text{A e q. 5.}$$

Jam ut aliquando etiam explicetur ☿, alia investiganda aequatio alium continens valorem ipsius l^2, ope termini tertii, fietque:

$$\left.\begin{array}{l} \text{Aeq. 6. } l^2 \sqcap \\[40pt] \text{Aeq. 5. } l^2 \sqcap \end{array}\right\{ \begin{array}{c} \dfrac{\begin{array}{llll} \dfrac{2g^2}{q^2} & b^4 & -ap\odot^2 & b^2 \\ \pm \dfrac{2a}{q} \frown \dfrac{g^2}{q^2} & & +4\odot ah & \\ & & \mp \dfrac{a}{q}2\odot h^2 & \end{array}}{2\odot q^2} \\[10pt] \dfrac{\dfrac{-\dfrac{g^4}{q^4} \quad \ldots\ldots \quad -\dfrac{2ap\odot^2g^2}{q^2} \quad \ldots\ldots}{4\odot^2} + \dfrac{a^2p^2}{4}\odot^4 - a^3s\odot^2}{-4g^2} \end{array} \left\}\begin{array}{l} \text{A e q u a t i o 6 quae} \\ \text{cum } 5^{\text{ta}} \text{ conferenda est,} \\ \text{et fit A e q u a t i o 7.} \\ \sqcap 0. \end{array}\right.$$

In hac Aequatione manifestum est non nisi duas occurrere incognitas nempe h, et b. Jungatur a e q u a t i o n i p r i m a e , in qua etiam eaedem duae incognitae inveniuntur, et habebitur earum determinatio. Sed malum in eo est quod quomodocunque eas formemus, problema semper fit solidum, seu Cubicum, nisi ponantur $a^2p^2\odot^4 - a^3s\odot^2 \sqcap 0$. Unde vel $\odot$ erit $\sqcap 0$, quod non contingit nisi Sectio Conica data sit Circulus; vel erit $p^2\odot^2 \sqcap as$. Quod efficere videamus an sit in nostra potestate. Sit $x^4 + atx^2 + a^2vx + a^3w$

18 potestate. *(1)* Res reducitur ad hoc problema duae qvantitates datas *(a)* multiplicare *(b)* ap, et a^3s, multiplicare per aliam qvandam ξ ita ut $a^2p^2\xi^2\odot^4$ sit $\sqcap a^3s\xi\odot^2$, unde $a^2p^2\xi\odot^4 \sqcap a^3s\odot^2$, sive erit $\xi \sqcap \dfrac{as}{p^2\odot^2}$ qvo facto omitti potest a nobis *(2)* Sit *L*

aequatio data, ponatur $x \sqcap y+z$ fietque $\begin{array}{llll} y^4\; 4zy^3 & at\,y^2 & a^{[2]}v\,y & a^3w\,. \\ 6z^2 & 2atz & a^2vz & \\ & 4z^3 & atz^2 & \\ & & z^4 & \end{array}$ Sed invenire ipsam z ex collatione termini 3[tii] et ultimi, problema est solidum. Sed hinc patet facile effici posse ut terminus primus et secundus eandem habeant quantitatem cognitam, nempe 1. Patet et effici ut secundus habeat rationem quamlibet ad primum.

In aequatione data facile efficiemus, ut quilibet incognitae terminus datam accipiat rationem ad ultimum, si radicem per ejusmodi quantitatem multiplicemus, ut ultimus per ejusdem quantitatis maximam dimensionem divisus, datam accipiat rationem ad quantitatem cognitam termini dati per idem divisa[m]; ut si sit aequatio data:

$x^4 \quad * \quad atx^2 \qquad a^2vx \quad a^3w.$ Ponatur $x \sqcap \beta y$, fiet

$\beta^4x^4 \quad * \quad at\beta^2x^2 \qquad a^2v\beta x \quad a^3w,$ et dividendo per β^4, fiet

$x^4 \quad * \quad \dfrac{at}{\beta^2}x^2 \quad + \quad \dfrac{a^2v}{\beta^3}x \quad \dfrac{a^3w}{\beta^4}.$ Ponatur jam $\dfrac{a^2t^2}{\beta^4}\odot^4 \sqcap \dfrac{a^3w}{\beta}\odot^2$ patet hinc sequi ἄτοπον, neque id hac methodo in quovis dato fieri posse.

---

1 *Nebenrechnung*:

$$\begin{array}{rrrrr} & & x \sqcap & y+ & z \\ & & & y+ & z \\ \hline & & x^2 & 2zx & z^2 \\ & & & x+ & z \\ \hline & x^3 & 3x^2z & 3xz^2 & z^3 \\ x^4 & 4x^3z & 6z^2x^2 & 4z^3x & z^4 \end{array}$$

Dazu: y pro x.

5 solidum. *(1)* Sed illud facile esse patet, ex his efficere ut in aeqvatione data terminus secundus et penultimus *(2)* Sed *L* 6 terminus *(1)* qvart *(2)* ultimus *(3)* primus *L* 6 qvantitatem *(1)* datam *(2)* cognitam *L* 9 ad *(1)* primum, si radi *(2)* ultimum, si *(a)* radicem *(aa)* multip *(bb)* seu incognitam multiplicemus *(b)* datum terminum ultimum ta *(c)* radicem *L*

---

12 Ponatur $x \sqcap \beta y$: Leibniz verwendet dann aber βx für βy.

Restat videamus, an liceat in aequatione arbitraria etiam tollere terminum secundum ut faciliora fiant omnia minoreque arbitriarum quantitatum numero opus sit. Calculus sequens mihi ostendit rem succedere.

$\sqrt{2by - y^2 + l^2} \sqcap \sqrt{2ay \mp \frac{a}{q}y^2} + g$. Unde fiet: $\begin{array}{lll} \overset{\odot}{-1y^2} & 2by & +l^2 \\ \mp\frac{a}{q} & -2a & -g^2 \end{array}$, et quadrando:

$$\left.\begin{array}{lllll} -1y^4 & +2\odot\,☽\,y^3 & +2\odot☿y^2 & 2\,☽☿y & ☿^2 \\ & & ☽^2 & & \\ & & \mp\frac{4g^2a}{q} & -\,8ga & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Tollatur in hac aequatione terminus secundus; faciendo $x - \frac{2\odot\,☽}{4} \sqcap y$. Eoque facto instituatur comparatio cum alia aequatione in qua x incognita est, invenietur valor ipsarum $b.\ g.\ l.$ Potestque valor ille ipsius y in locum ejus tam in circulo, quam in Conica substitui. Caeterum aequatio arbitraria ita stabit:

$$\frac{\begin{array}{llllll} x^4 & * & \frac{1}{4} \frown 6\odot^2\,☽^2\ \ x^2 & -8\odot^3\,☽^3 & x & \frac{\odot^4\,☽^4}{16} \\ & & -3\odot^2\,☽^2 & +\frac{3}{2}\odot^3\,☽^3 & & -\frac{\odot^4\,☽^4}{4} \\ & & (♂)\left\{\begin{array}{c} +2\odot☿ \\ ☽^2 \\ \mp\frac{4g^2a}{q} \end{array}\right\} & (♂)\left\{\begin{array}{c} 2\odot☿ \\ ☽^2 \\ \mp\frac{4g^2a}{q} \end{array}\right\} - \odot\,☽ & & (♂)\left\{\begin{array}{c} 2\odot☿ \\ ☽^2 \\ \mp\frac{4g^2a}{q} \end{array}\right\} \frac{\odot^2\,☽^2}{4} \\ & & & (♃)\left\{\begin{array}{c} 2\,☽☿ \\ -8ga \end{array}\right\} & & (♃)\left\{\begin{array}{c} 2\,☽☿ \\ -8ga \end{array}\right\} \frac{-\odot\,☽}{2} \\ & & & & & ☿^2 \end{array}}{\odot^2}$$

5 *(1)* ⊙y⁴ *(2)* $-1y^4$ *L* 8 b. g. l. *(1)* Ac proinde habebuntur rectae, qvarum ope si circulus ducatur, *(2)* Potestqve *L*

4 fiet: Leibniz schreibt nicht alle Terme der resultierenden Gleichung an. In der Folge unterlaufen ihm mehrere Versehen.

Conferamus hanc aequationem arbitrariam cum data, $x^4 * apx^2\ a^2rx\ a^3s$ et fiet per 3^{tium} terminum: $\odot^2\,☽^2 \sqcap \dfrac{-ap\odot^2 + ♂}{\overline{\left(\frac{3}{2}-3\right)}\frac{3}{2}}$ et $\square$ ejus

$$\odot^4\,☽^4 \sqcap \frac{a^2p^2\odot^4 - 2ap\odot♂ + ♂^2}{+\frac{9}{4}}.\quad \text{A e q. 1 .}$$

At ex termino ultimo $\odot^4\,☽^4 \sqcap a^3s\odot^2 - ♂\odot^2\,☽^2 + \dfrac{♃\odot\,☽}{2} - ☿^2$. A e q. 2 .

Hinc suo loco aliam ducemus. Sumatur terminus penultimus, ex eo:

$$\odot^2\,☽^2 \sqcap \frac{\dfrac{a^2r\odot^2}{\odot\,☽} + ♂ - \dfrac{♃}{\odot\,☽}}{-8+\dfrac{3}{2}}.\quad \text{A e q. 3 .}$$

Jungatur primae habebitur valor ipsius ♂ collatis Aeq. 1. et 2.

Brevius per Aequationem primam ♂ habetur ope ipsius $☽^2$, ergo postea pro ♂ substituatur ejus valor. Ergo et ♃ habetur ope ☽, ergo et ☿. Restabit ergo invenire ipsam ☽. Nimirum $♂ \sqcap \dfrac{3\odot^2\,☽^2}{2} + ap\odot^2$ vel $\dfrac{\beta\,☽^2}{a} + \gamma a$ ob Aeq. 1. Eundem valorem subrogando in Aeq. 3. habebitur valor ipsius ♃ nempe per brachylogiam: $+\dfrac{\lambda\,☽^3}{a} + \mu^3 a$. Quem valorem subrogando in ipsius ♃ locum in aequatione 2^{da}, habebitur $\dfrac{\pi}{\alpha}\,☽^4 + \varphi a\,☽^2 + \psi a^2\,☽ - a^3s\odot^2$ $\sqcap ☿^2$. Conferatur cum termino ultimo signis in contrarium mutatis, et quia tunc utrobique $-☿^2 + a^3s\odot^2$, eo deleto, nova ex reliquo fiet aequatio, divisibilis per ☽, unde evanescet ☽ simplex, restabit $☽^4$, $☽^3$ et $☽^2$, nimirum $\dfrac{\aleph\,☽^3}{a} + a^2\beth + \gimel\,☽^2 \sqcap 0$. Conferatur termino

4 f. A e q. 2 . *(1)* Hinc ergo resultabit a e q v a t i o 3^{tia} *(2)* Hinc *L* 6 f. A e q. 3 . *(1)* Jungatur 1^{mae} vel $\dfrac{\text{a}^2\,☽\odot^2 - ♃}{\odot\,☽}$ eius radici, differen *(2)* Jungatur … ipsius *(a)* $♂\odot^2\,☽^2$, at idem jam inde habetur *(b)* ♂ collatis *L* 10 Aeq. 1. *(1)* Ergo substituto valore ♂ in Aeq. 2. fiet: $+\dfrac{\delta}{\text{a}}\,☽^4 + \theta\text{a}^3$ $|-\gamma\text{a}\odot^2\,☽^2$ *erg.* $| + \dfrac{♃\odot\,☽}{2} - ☿ \sqcap 0$ Unde datum valor *(2)* Eum *(3)* Eundem *L* 13 $\sqcap ☿^2$. *(1)* conferatur cum termino penultimo sublatoqve utrobiqve $☽^3$, fiet: $\dfrac{\pi}{\text{a}^2}\,☽^4 + \varphi\,☽^2$ *(2)* conferatur *L*

penultimo, et tollatur utrobique $\frac{☽^3}{♂}$, fietque ☽^{2} ⊓ a⌉ qui valor purus cum altero valore puro ipsius ☽ termini tertii, quippe jam adhibito ad ipsam inveniendam haud dubie consentire debet. Habita jam ☽, habetur b. ac denique ope et ☿ et ☽ habetur g. ex termino 3$^{\text{tio}}$ qui consentire [debet] cum quarto et 5$^{\text{to}}$. Sed l. inveniemus ope valoris inventi ipsius l. et g. Sed calculum tam prolixum absolvat alius.

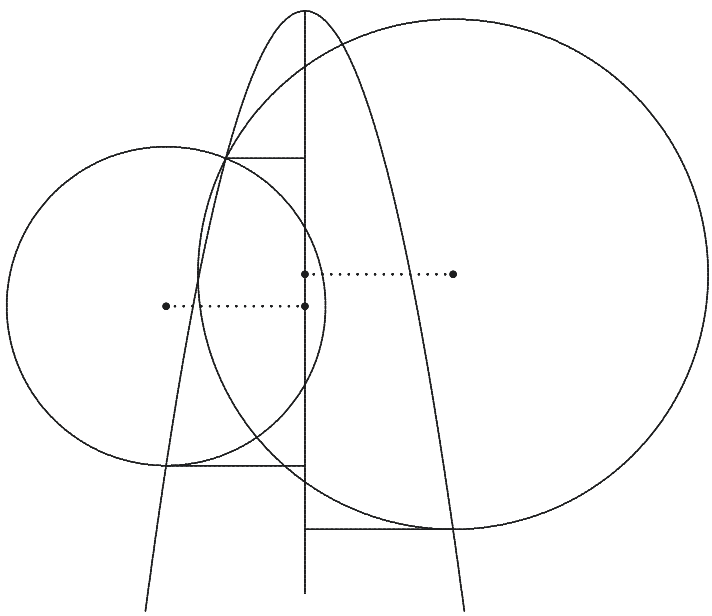
Sed malum ex eo oriri video, quod cum inventa sunt ☿, ☽, ♃, et ♂, habebitur g, quia ingreditur ♂ cum ☽ et ☿. At idem g, etiam in ♃ habebitur quod etiam ingreditur cum ☽ et ☿. Unde si ☉ esset incognita vel incognitam contineret ita explicatio ejus plenaque solutio quaestionis haberetur.

Res digna consideratu an utiliter investigari possint duae pluresque aequationes plane diversae, sed quae unam, aut plures habeant radices communes; possunt autem duae aequationes opinor non nisi duas habere radices communes, tot enim habet radices aequatio, in quot punctis sectio Conica, aut altior curva circulo occurrere potest, at duo circuli se non nisi in duobus punctis secare possunt. Suppono enim omnem aequationem curva apta et Circulo construi posse. In eo jam quaestio versatur; an data aequatione quaedam alia una pluresve formari possunt, quae easdam cum ea habeant radices communes. Dico id nisi problema deprimi queat fieri, non posse, saltem, non nisi ope alterius aequationis aeque altae. Et ratio est, quia data aequatione semper opinor haberi circulus potest, qui cum aliqua curva apta problema solvit. Si ergo duarum aequationum inveniantur Circuli, eorum intersectio dabit radicem unam communem, duasve. Inventa autem una radice duabusve problema deprimi potest.

Excogitanda autem ratio est, inveniendi modum tales aequationes fabricandi quando id fieri potest.

2 termini tertii *erg.* *L* 4 inveniemus *(1)* substituendo pro ☿ eius valorem ⟨inv⟩ *(2)* ope *L*
9 f. haberetur. *(1)* Ubicunqve *(a)* duo problemata *(b)* aeqvatio problematis solidi ita resolvi potest, ut duae hab *(2)* Res *L* 13 curva *(1)* circulum tangere *(2)* circulo *L* 20 communem, *(1)* pluresve *(2)* duasve *L*

[*Teil 3*]



[*Fig. 2*]

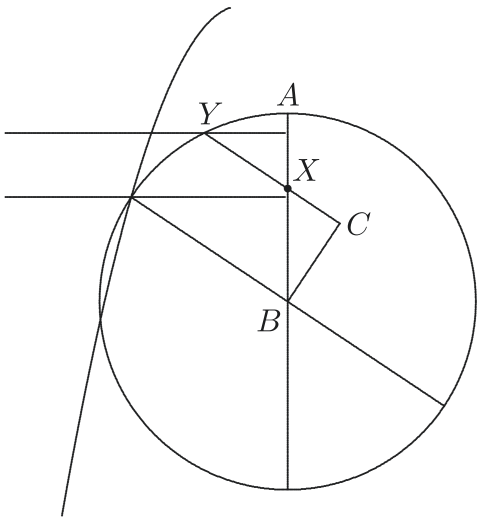
$x+a \qquad x+b \qquad y+c$

$$
\begin{array}{lllll}
 & & x & + & a \\
 & & x & + & b \\
\cline{2-5}
 & x^2 & bx & & ab \\
 & & a & & \\
 & & & & \\
 & & y & + & c \\
\hline
yx^2 & cx^2 & cbx & & cab \\
 & & ca & & \\
 & & aby & & \\
 & byx & & & \\
 & a\ \ldots & & & \\
\hline
x^3 & nx^2 & apx & & a^2r
\end{array}
$$

20. DE APPLICATA CIRCULI
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 216–217. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge Bl. 216 v°, 217 r°, 217 v°, 216 r°.
Cc 2, Nr. 859 C

Datierungsgründe: s. N. 18.



[*Fig. 1*]

Ex AX vel BX definire YX in Circulo. Ponatur $BX \sqcap x$ erit $BC \sqcap \frac{c}{a}x$. Unde $CY \sqcap \sqrt{2a^2 - \frac{c^2}{q^2}x^2}$. Et $XC \sqcap \sqrt{x^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}$ seu $x\sqrt{1 - \frac{c^2}{q^2}}$.

$$\underset{(g)}{\frac{x\sqrt{q^2-c^2}}{q}} + \underset{B}{\sqrt{\cancel{2}b^2 - \frac{c^2}{q^2}x^2 - \frac{c^2}{q^2}h^2 + \frac{c^2}{q^2}2hx}} \sqcap \underset{A}{\sqrt{2ax + 2al \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{a}{q}l^2 \mp \frac{a}{q}2lx}}.$$

8 BC $\sqcap$ *(1)* BX *(2)* q *(3)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}}$ *(4)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}$ *L*

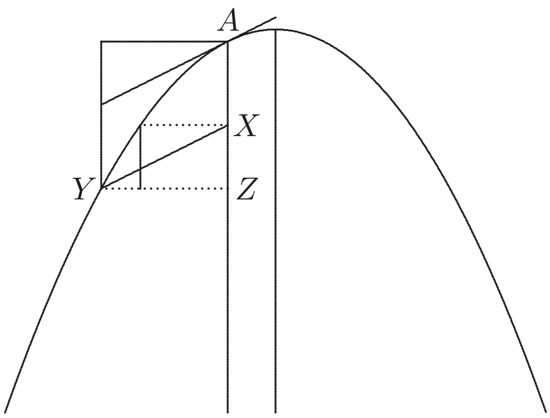
---

8 $CY \sqcap$: Richtig wäre $CY = \sqrt{a^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}$. Leibniz führt außerdem die Bezeichnungsänderung von q zu a nur teilweise durch.

$$\left.\begin{array}{llll}
 & \odot & ☽ & ☿ \\
\text{Unde} & \mp \dfrac{a}{q} \quad x^2 & 2a \quad [x] & + 2al \\
 & + \dfrac{2c^2}{q^2} & \mp \dfrac{2al}{q} & \mp \dfrac{a}{q} l^2 \\
 & - 1 & - \dfrac{2c^2 h}{q^2} & - b^2 \\
 & & & + \dfrac{c^2}{q^2} h^2
\end{array}\right\} 2gB$$

$$\begin{array}{lllll}
\odot^2 \quad x^4 & 2\odot ☽ \; x^3 & 2\odot ☿ \; x^2 & 2 ☽ ☿ \; x & ☿^2 \\
- 4 & - \dfrac{8c^2 h}{q^2} & ☽^2 & & \\
+ \dfrac{4c^4}{q^4} & + \dfrac{8c^4 h}{q^2} & - 4b^2 & & \\
 & & + \dfrac{4c^2}{q^2} b^2 & & \\
 & & \dfrac{4c^2}{q^2} h^2 & & \\
 & & - \dfrac{4c^4}{q^4} h^2 & &
\end{array}$$

[*bricht ab*]



[*Fig. 2*]

$AX \sqcap x.\ YX \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}.$

$$+\,g\ +\ \overset{B}{\sqrt{b^2-y^2\boxed{-h^2}+2yh}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay+2al \mp \frac{a}{q}y^2 \mp \frac{a}{q}l^2 \mp \frac{2a}{q}ly}}.$$

$$\begin{array}{llll}
\mp\frac{a}{q}\,y^2 & 2a\quad y & 2al & \sqcap 2gB, \text{Unde}\ \cancel{\odot^2}\ y^4\quad 2\odot\text{☽}\ y^3\quad 2\odot\text{☿}\ y^2\quad 2\,\text{☽☿}\ y\quad \text{☿}^2\quad . \\
+1 & \mp\frac{2al}{q} & \mp\frac{a}{q}\quad l^2 & \qquad\qquad \text{☽}^2 \qquad\qquad\qquad \boxed{-4g^2b^2} \\
 & -2h & -b^2 & \qquad +4g^2\qquad -8g^2h\qquad \boxed{+4g^2h^2} \\
 & & \left.+h^2\right\}b^2 & \qquad\qquad \overline{\qquad\qquad\qquad\odot^2\qquad\qquad\qquad} \\
 & & & y^4\quad n\quad y^3\quad ap\quad y^2\quad a^2r\quad y\quad a^3s
\end{array}$$

Ex Term. 4. $g^2h \sqcap \frac{a^2r\odot^2}{-8}$. $\text{☿} \sqcap \frac{ap\odot^2-4g^2-n^2}{2\odot}$. $\text{☿} \sqcap \frac{a^2r\odot^2-8g^2h}{2n}$. Pro g substituatur $\frac{ga}{\sqrt{ha}}$. Et g. habebitur pure. Sed relicta aequatione in priore statu, ponamus in locum ipsius ☿^2, ejus valorem aequatione sumtum termini 3^{tii}, et pro g^2h^2, substituamus valorem g^2h, ex aeq. termini quarti. Fiet:

$$\frac{a^2p^2\odot^4-8ap\odot^2g^2+16g^4}{4\odot^2}-4g^2b^2+\frac{a^2r\odot^2h}{-8} \sqcap a^3s\odot^2.\ \text{Aeq. 1.}$$

$\frac{c}{q}h \sqcap \mp\frac{\cancel{2}al}{q}+\cancel{2}a$. Ergo $\frac{c^{[2]}}{q^{[2]}}h^2 \sqcap +\frac{a^2l^2}{q^2}\mp\frac{2a^2l}{q}+a^2$. Loco l, substituatur $\pm\frac{q}{a}l$, ipso h intacto. Ideoque per ☽, fiet $h \sqcap a-l$. Ut efficiamus l, vel l^2, vel etiam utrumque cum h

14 *(1)* h $\sqcap \mp\frac{\cancel{2}\mathrm{al}}{\mathrm{q}}+\cancel{2}\mathrm{a}$. Ergo h^2 *(2)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}\mathrm{h}$ *(3)* $\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{q}}\mathrm{h}$ *L*

---

4 $\sqcap 2gB$: Auf der rechten Seite der Gleichung fehlt der Term $+g^2$. Dies beeinträchtigt zusammen mit weiteren Versehen die folgende Rechnung bis nach Gleichung 12 S. 222 Z. 1 f. 9 $g^2h \sqcap$: Leibniz setzt im folgenden Koeffizientenvergleich $n = \frac{2\,\text{☽}}{\odot} = 0$, damit auch ☽ $= 0$, und ersetzt dann ☽ durch n.

14 $\frac{c}{q}h \sqcap$: Leibniz geht aus von ☽ $= 2a \mp \frac{2al}{q} - 2h = 0$ und ersetzt dann nicht konsequent h durch $\frac{c}{q}h$.

evanescere ita procedamus. Pro a ponamus βa, pro h ponamus γh, et pro l[,] δl. Fietque ex ☽ seu termino secundo $2\beta a \mp \frac{2\beta a}{q}\delta l \sqcap 2\gamma h$. Debet esse

$$\beta^2 a^2 \left\{ \begin{array}{l} \mp \frac{2\beta^2 a^2}{q}\delta \\ -2\beta a \quad \delta \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} l + \frac{\beta^2 a^2}{q^2}\delta^2 \\ l \pm \frac{\beta a}{q} \quad \delta^2 \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{l} l^2 \\ l^2 \end{array} \right.$$

. Sed quia unde duae orientur aequationes, cum una sit tantum indeterminata, ideo forte etiam g per indeterminatam multiplicanda est. Erit $\mp \frac{\beta a}{\odot q} \sqcap -1$, Ergo $\beta a \sqcap q\odot$. Unde patet rem possibile, tantum in circulo, alias frustra tentari.

$$l \sqcap \frac{h-a}{\mp \frac{a}{q}}.\ l^2 \sqcap \frac{h^2 - 2ha + a^2}{\frac{a^2}{q^2}}.\ \text{Ergo ☿ dat} \left. \begin{array}{l} \boxed{\mp 2qh} \pm \boxed{2}aq \\ \mp \frac{qh^2}{a} \boxed{\pm 2qh}\boxed{\mp qa} \\ -b^2 \\ +h^2 \end{array} \right\} + 4g^2 \sqcap ap\odot^2.\ \text{Aeq. 2.}$$

Unde valore ipsius b^2 in ejus locum substituto in Aeq.

Aeq. 1. ☿ $\sqcap gb$. si terminus ultimus nullus est.

Aeq. 2. Ergo $2al \mp \frac{a}{q}l^2 + b^2 - gb \sqcap 0$.

Aeq. 3. ☿ $\sqcap \frac{ap\odot^2 - 4g^2}{2\odot}$. Ergo Aeq. 4. $\frac{ap\odot^2}{2\odot} \sqcap \frac{4g^2}{2\odot} + gb$.

Aeq. 5. Sive $\frac{ap\odot}{2} - \frac{4g^2}{2\odot} - gb \sqcap 0$. Ergo jungendo Aeq. 2 et 5 auferendoque utrobique $-gb$. habebimus $2al \mp \frac{a}{q}l^2 + b^2 - \frac{ap\odot}{2} + \frac{4g^{\langle 2\rangle}}{2\odot} \sqcap 0$ Aeq. 6.

Tentemus pro $\langle b\rangle$ supponere $\frac{ca}{g}$. Et per aequationem 4, erit Aeq. 7 $ca \sqcap \frac{ap\odot}{2} - \frac{4g^2}{2\odot}$. Quem valorem substituendo in aequatione 6. habebimus Aequationem 8$^{\text{vam}}$:

$$\frac{\frac{a^2p^2\odot^2}{4} - \frac{8ap\odot g^2}{4\odot} + \frac{16g^4}{4\odot^2}}{g^2} + 2al \mp \frac{a}{q}l^2 - \frac{ap\odot}{2} + \frac{4g^2}{2\odot} \sqcap 0.\ \text{Aeq. 8.}$$

6 Ergo: Leibniz setzt $\mp = -$.

$$\text{vel } \frac{a^2p^2\odot^2}{4g^2} - \frac{\overset{2}{\cancel{8}}ap\odot}{\cancel{4\odot}} + \frac{4g^2}{\odot^2} + 2al \mp \frac{a}{q}l^2 \sqcap 0 \text{ sive}$$

$$- \frac{ap\odot}{2} \quad + \frac{\overset{2}{\cancel{4}}g^2}{\cancel{2}\odot}$$

$$\frac{a^2p^2\odot^2}{4} - 2ap\odot\ g^2 + \frac{4}{\odot^2}\ g^4 + 2alg^2 \mp \frac{a}{q}\ l^2g^2 \sqcap 0. \text{ A e q. 8.}$$

$$- \frac{ap\odot}{2} \qquad + \frac{2}{\odot}$$

Nunc quia ob terminum secundum $\sqcap 0 \sqcap$ ☽ scimus esse $h \sqcap \cancel{2}a \mp \frac{\cancel{2}a}{q}$: ideo erit ex termino penultimo $8ag^2 \mp \frac{8a}{q}lg^2 \sqcap -a^2r$. A e q. 9.

Pro $2alg^2$ in aeq. 8. substituatur ejus valor ex aeq. 9. nempe $2lg^2 \sqcap \dfrac{-a^2r - 8ag^2}{\mp\frac{4}{q}}$ fietque

$$\text{A e q. 10. } \frac{a^2p^2\odot^2}{2} - 2ap\odot\ g^2 + \frac{4}{\odot^2}\ g^4 \mp \frac{a}{q}l^2g^2 \sqcap 0$$

$$- \frac{ap\odot}{2} \ \ldots + \frac{2}{\odot}$$

$$\mp \frac{qa^2r}{4} \quad \pm\ 2qa \quad \ldots$$

Ex aequatione 9^{na} fiet $g^2 \ \dfrac{\mp\frac{\cancel{8}\cancel{a}lg}{q}}{\cancel{8}\cancel{a}}g + \dfrac{l^2g^2}{4q^2} \sqcap \dfrac{l^2g^2}{4q^2} - \dfrac{a\cancel{{}^2}r}{8\cancel{a}}$.

Aeq. 11 $\quad g \mp \dfrac{lg}{2q} \sqcap \sqrt{\dfrac{l^2g^2}{4q^2} - \dfrac{ar}{8}}$. Pro $g \mp \dfrac{lg}{2q}$ substituatur $-\dfrac{a\cancel{{}^2}r}{8\cancel{a}g}$, fietque

12 f. $-\frac{a\cancel{{}^2}r}{8\cancel{a}}$ *(1)* Substituatur pro altero ex $-l^2g^2$, nempe in latere dextro, eius valor, et habebimus *(2)* sub *(3)* Aeq. 11 *L*

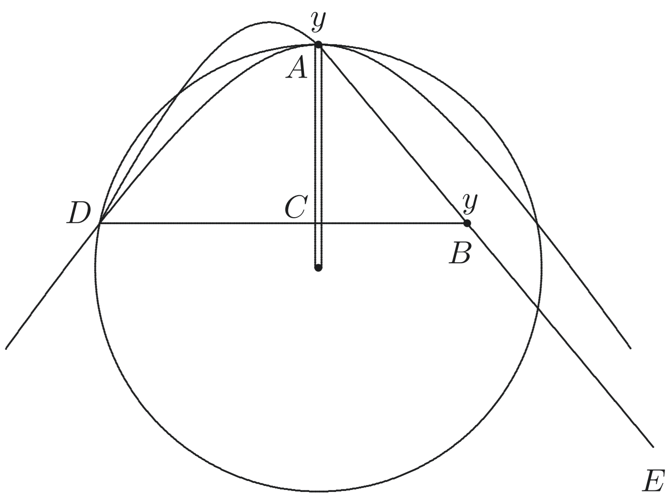
Aeq. 12 $\dfrac{a^2r^2}{64} \sqcap \dfrac{l^2g^4}{4q^2} - \dfrac{arg^2}{8}$ vel $\dfrac{a^2r^2}{64l^2} + \dfrac{arg^2}{8l^2} \sqcap g^4$. Qui valor substituatur in aequ. 10, et fiet $\beta^6 \quad \gamma^4g^2 \quad \delta^2g^2l^2 \quad \theta^2l^2g^2 \quad \lambda^2l^4g^2$.

Videtur modus esse reducendi l ad simplicem radicem.

Ad Slus. pag. 85. Aequationes ibi sunt duae pro Trisectione anguli, $b^2 \sqcap a^2 + e^2$, et $2ae+ne \sqcap da$. Erit $e \sqcap \dfrac{da}{2a+n}$. Ergo erit $e^2 \sqcap \dfrac{d^2a^2}{4a^2+4an+n^2}$. Unde $b^2 \sqcap a^2 + \dfrac{d^2a^2}{4a^2 + \text{etc.}}$. Et remota fractione $4a^4 + 4na^3 - 4b^2a^2 - 4n^2a - n^2b^2$ [*bricht ab*]
$\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + n^2$

$$\sqrt{2by \ + 2bh - y^2 - 2hy - h^2} + \frac{g}{a}y + l \sqcap \sqrt{2ey \mp \frac{a}{q}y^2 + c^2}$$

$$2fy + m^2 - y^2$$



[*Fig. 3*]

3 f. radicem *(1)* Ut aeqva *(2)* Qvaer *(3)* | Ponamus diametrum Sectionis Conicae *nicht gestr.* | *(a)* incognitam, item rationem *(b)* | ra *nicht gestr.* | *(4)* Ad *L* 8 | $\sqrt{2\mathrm{by} + 2\mathrm{bh} - \mathrm{y}^2 + 2\mathrm{hy} - \mathrm{h}^2}$ *ändert Hrsg.* | $+\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}}\mathrm{y} + \mathrm{l} \sqcap$ *(1)* $\sqrt{2\mathrm{ay} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}$ *(2)* $\sqrt{2\mathrm{fy} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}^2 + \mathrm{m}}$ *(3)* $\sqrt{2\mathrm{ey} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{y}^2 + \mathrm{c}^2}$ *L*

4 Ad Slus. pag. 85.: R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 85; vgl. N. 16 S. 181 Z. 6 – S. 182 Z. 3.
10 *Fig. 3*: Leibniz hat in der Figur und im zugehörigen Text die Punkte A, B, C, D ursprünglich mit X, X, Y, Y bezeichnet.

Ex $AB \sqcap y$ data definienda BD. Ex y data habetur $CB \sqcap \dfrac{g}{a}y + \dfrac{gh}{a}$ et $AC \sqcap \sqrt{y^2 - \dfrac{g^2}{a^2}y^2}$, vel $y\sqrt{1 - \dfrac{g^2}{a^2}}$. Ergo

$$DC, \sqcap \sqrt{2by\sqrt{1-\frac{g^2}{a^2}}, +2bh\sqrt{1-\frac{g^2}{a^2}} - y^2 + \frac{g^2}{a^2}y^2 - 2hy + 2hy\frac{g^2}{a^2} - h^2 + \frac{g^2}{a^2}h^2} \sqcap$$

$$\sqrt{2ay + 2ae \mp \frac{a}{q}y^2 \mp \frac{a}{q}e^2 \mp \frac{2a}{q}ey}.$$

Unde fieri potest $\overset{A}{\sqrt{2fy+m^2-y^2}}\ \overbrace{+\frac{g}{a}y+l}^{B} \sqcap \overset{C}{\sqrt{2ey \mp \frac{a}{q}y^2 + c^2}}$.

$$\text{Et quadrando } \begin{array}{llll} \odot & & ☽ & & ☿ \\ \mp\frac{a}{q} & y^2 & +2e & y & +c^2 & \sqcap 2AB, \text{ et rursus quadrando} \\ +1 & & -2f & & -m^2 \\ -\frac{g^2}{a^2} & & -\frac{2lg}{a} & & -l^2 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccccccccc} \odot^2 & y^4 & +2\odot☽ & y^3 & +2\odot☿ & y^2 & +2☽☿ & y & + & ☿^2 \\ & & & & +☽^2 & \ldots & & & & \\ +\frac{4g^2}{a^2} & \ldots & -\frac{8g^2f}{a^2} & \ldots & -\frac{4m^2g^2}{a^2} & \ldots & -8l^2f & \ldots & [-] & 4l^2m^2 \\ & & & & +4l^2 & \ldots & & & & \\ & y^4 & n & y^3 & ap & y^2 & a^2r & y & & a^3s \end{array}$$

1 ex *(1)* YY data definienda XY *(2)* AB $\sqcap$ y *L* 1 $+\frac{\mathrm{gh}}{\mathrm{a}}$ *erg. L* 3 *Unter der Wurzel* $-\mathrm{h}^2+\frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{a}^2}\mathrm{e}^2$ *L ändert Hrsg.*

---

1 $+\dfrac{gh}{a}$: Leibniz wechselt zum Ansatz $AB = y + h$, führt die Änderungen im Text aber nur unvollständig durch. 12 $+\dfrac{4g^2}{a^2}\ldots$: Leibniz vergisst, mit dem Term $+2\dfrac{gl}{a}y$ aus B^2 zu multiplizieren, so fehlen die Terme $+8\dfrac{gl}{a}y^3, -16\dfrac{glf}{a}y^2$ und $-8\dfrac{glm^2}{a}y$.

Hac methodo infallibilis calculi executio est; quoniam enim non nisi 4 dantur aequationes et 5 sunt indeterminatae, ideo, sub calculi finem ei quae superest, id est cuilibet talis attribui valor potest, ut quicquid difficultatem facit evanescat. Sciendum est autem diametrum Sectionis conicae statim determinari, dum scilicet recta g. et per consequens recta AE indefinita determinatur, cui ducitur tantum diameter parallela.

Sed cum nova in eo oritura sit difficultas, quod scil. applicatae ad diametrum non ideo statim eundem angulum facturae sint, ideo potest relinqui principalis diameter seu axis; modo etiam recta quaedam ut $\dfrac{k}{a}y$ addita vel subtracta intelligatur, quae conjuncta cum $\dfrac{g}{a}y$, uno nomine possit vocari $\dfrac{d}{a}y$. vel ut libuerit, unde calculus manet idem qui ante.

Eadem ergo methodo in aliis figuris altioribus quoque uti licebit. Unde methodus datur hac ratione cum circulo et linea qualibet data construendi problema quodlibet, cujus aequatio altior non est quam curvae natura postulet. Nam si curva sit trium dimensionum, habebuntur 7 indeterminatae, quatuor a circuli latere; et 3 ab ipsa curva; pro solvendis aequationibus 6 dimensionum, ubi totidem aequationibus particularibus opus est.

Et ita semper una indeterminata supernumeraria haberi potest, quae servat ad deprimendum aut contrahendum calculum.

Transferenda est eadem methodus ad sectiones angulares, ut earum ope omnia problemata quam compendiosissime solvantur. Unde et facile et statim haberentur appropinquationes sine ullo calculo; quoniam sectiones angulares jam tum habentur per Trigonometriam.

Sed ut quantitas cognita termini tertii datam habeat rationem ad terminum ultimum, aliave alia, id quidem fieri generaliter non potest, nisi alio problemate aeque alto ac illud quod proponitur. Alia ergo ratio quaerenda est, ut aequationem 6^{tam} primae conferendo veniatur ad aequationem planam. Videndum ergo an nobis permissum sit facere Hypothesin, quae *b. h. l.* non absolute quidem, sed quadam inter ipsas relatione explicet, et illud inprimis cavendum ne illa per consequentiam praejudicet, et ejusdem arbitrariae duo valores determinati diversi, id est contradictio, oriatur. Quod ut eo securius experiamur, utamur alia quantitate c, quae vel data sit, si res procedit, vel minime data sit, sed fiat data si res non procedit; atque ita in omnem eventum ni fallor securi sumus.

$$\text{Ponatur}\ \frac{\begin{matrix} -\ ap\odot^2 \\ +\ 4\odot ah \\ \mp \frac{2a}{q}\odot h^2 \end{matrix}}{2\odot q^2}\ b^2 \sqcap l^2 - c^2 - \frac{2ap\odot^2\cancel{g^2}b^2}{16\odot^2\cancel{g^2}q^2}\ \text{eritque}$$

$$\lambda\left\{\frac{\begin{matrix} \frac{2g^2}{q^2} \\ \mp\frac{2a}{q}\frown\frac{g^2}{q} \end{matrix}}{2\odot q^2}\right.\ b^4 \sqcap \quad + c^2 \qquad \xi^{[2]}\ \frac{+\frac{a^2}{4}p^2\cancel{\odot^2} - a^3 s\cancel{\odot^2}}{16\cancel{\odot^2}g^2}$$

$$\mu \quad \frac{-g^4}{16\odot^2 q^4 g^2}$$

sive per brachylogiam: $b^4 \sqcap c^2\delta a + \theta a^3$ aut $b^2 \sqcap \sqrt{c^2\delta a + \theta a^3}$.

Invento jam valore ipsius b. inveniemus valorem ipsius h, per terminum 2^{dum} seu $\rightmoon \sqcap 0$. Nam $h \sqcap \dfrac{-2a + \frac{2q^3}{b^2}}{\mp\frac{2a}{q}}$. Sed explicate ista tractanda sunt, neque amplius sufficit

---

1–8 *Nebenbetrachtung auf der Gegenseite Bl. 217 v°:* $c^2 \sqcap h^2 - b^2 - bm$. Ergo $2c^2 - h^2 + b^2 + [b]m, \sqcap c^2 \sqcap \beta^2 - bm$, pro c^2 substituatur dg [*bricht ab*]

1–8 *Nebenbetrachtung:* $+\overset{\gamma}{\frac{ap}{8\odot^2 q^2}}\ \overset{b^2}{b^2}$. $\gamma b^4 + \beta b^2 - l^2 \sqcap 0$. Ponatur

$\beta b^2 \sqcap l^2 - c^2 - \dfrac{\cancel{2}ap\cancel{\odot^2}b^2}{\underset{8}{\cancel{16}\cancel{\odot^2}}}$. Ergo pro βb^2, substituto ejus valore, fiet: $\gamma b^4 - c^2 - \dfrac{apb^2}{8q^2} - \underset{-\frac{apb^2}{8q^2} - \aleph}{l^2} \sqcap 0$

fiet $\gamma b^4 \sqcap c^2 + \aleph$.

---

1 Ponatur: Vgl. zum Folgenden N. 19 S. 209 Z. 7.

brachylogia. Igitur $b^2 \sqcap \sqrt{\dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu}}$, Et $h \sqcap \dfrac{-2a+\dfrac{2q^3}{\sqrt{\dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu}}}}{\ddagger\dfrac{2a}{q}}$. Ergo $l^2 \sqcap \mu, \frown \dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu} - \gamma\sqrt{\dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu}} + \xi$ Ex aequatione 5^{ta}. Item

$$l^2 \sqcap \left.\begin{array}{l} \lambda \frown \dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu} - ap\odot^2 \\[2ex] \qquad + 4\odot a, \frown \dfrac{-2a+\dfrac{2q^3}{(b^2)\sqrt{\dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu}}}}{\ddagger\dfrac{2a}{q}} \\[2ex] \qquad \ddagger \dfrac{2a}{q}\odot \frown \dfrac{4a^2-\dfrac{8q^3a}{\sqrt{\ldots}}+\dfrac{4q^6}{(b^4)\dfrac{c^2+\xi^2}{\lambda+\mu}}}{\dfrac{4a^2}{q^2}} \end{array}\right\} \frown \sqrt{\ldots} \text{ Ex aequatione } 6^{\text{ta}}. \quad (b^2)$$

Aequatio autem inter hos duos valores ipsius l, si c ponitur data, non nisi casu subsistere potest, si c non est data, nocet potius quam prodest, Ergo restituto b^2, et b^4, fiet aequatio quae ad 6^{tam} dimensionem sed bisecabilem, sive ad cubum ascendet, quicquid etiam moliamur.

Confugiendum est ergo, ad id quod unum restat, tollendusque est secundus terminus ex aequatione arbitraria, quemadmodum sublatus est ex data, de quo alibi.

---

11 alibi: s. N. 21 u. N. 22.

21. DE CONSTRUCTIONE PER CIRCULUM ET SECTIONEM CONICAM [Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 169–170. 1 Bog. 2° 4 S. Textfolge Bl. 170, Bl. 169. Cc 2, Nr. 859 A

Datierungsgründe: s. N. 18.

[*Teil 1*]

$$\sqrt{2by-y^2+lb+l^2} \sqcap \sqrt{2ay \ddagger \frac{a}{q}y^2} + \frac{lg}{q}. \quad \begin{array}{ccc} \odot & ☽ & ☿ \\ -1y^2 & +2by & +lb \\ \ddagger\frac{a}{q} & -2a & +l^2 \\ & & -\frac{l^2g^2}{q^2} \end{array} \quad \sqcap \frac{2lg}{q}A.$$

$$\text{Et quadrando } \begin{array}{llllll} \odot^2y^4 & +2\odot ☽y^3 & +2\odot☿ \quad y^2 & 2\ ☽☿ & y & +☿^2 \\ & & +\ ☽^2 \quad \ldots & -\frac{8l^2g^2a}{q^2}\ldots & & \\ & & \ddagger\frac{4l^2g^2a}{q}\ldots & & & \\ & & \begin{pmatrix} \ddagger g^2 \\ \ddagger l^2 \end{pmatrix} & \begin{pmatrix} -8g^2a \\ -8l^2a \end{pmatrix} & & \end{array}$$

Unde $lg \sqcap \odot\sqrt{a^3sq} \sqcap \odot\sqrt{\frac{a^2rq^2}{8a}}$ seu $\odot q\sqrt{\frac{ra}{8}}$.

12 $+\ ☽^2$ ... *(1)* $-\frac{4l^2g^2a}{q^2}$ *(2)* $-\frac{8l^2g^2a}{q^2}$ *L* 14 f. $\begin{pmatrix} \ddagger g^2 \\ \ddagger l^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -8g^2a \\ -8l^2a \end{pmatrix}$ *erg. L*

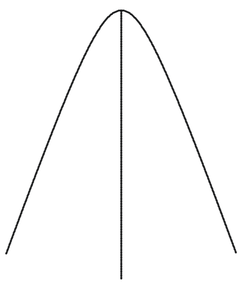
16 Unde: Im Koeffizientenvergleich mit dem Polynom $\odot^2(y^4+ny^3+apy^2+a^2ry+a^3s)$ unterlaufen Leibniz mehrere Versehen. Er erkennt schließlich die Fehlerhaftigkeit der Rechnung und setzt in S. 228 Z. 6 neu an.

Loco $\frac{lg}{q}$ ponatur $l+g$, fiet $\text{☿} \sqcap \begin{array}{c} lb \\ -g^2 \\ -2gl \end{array} \sqcap \odot\sqrt{a^3sq}$.

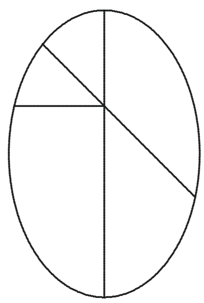
Item $\text{☿} \sqcap \frac{\odot^2 ap \mathbin{\text{ǂ}} g^2 \mathbin{\text{ǂ}} l^2}{2\odot} \sqcap \odot\sqrt{a^3sq}\,\boxed{-\frac{n^2\odot}{2}}$.

Ergo $g^2 \sqcap \frac{2\odot^2\sqrt{a^3sq}\,\boxed{-\frac{\cancel{2}n\odot^2}{\cancel{2}}} - \odot^2 ap \mathbin{\text{‡}} l^2}{\text{ǂ}}$. $g^2 \sqcap \frac{-a^2r-8l^2a}{8a}$.

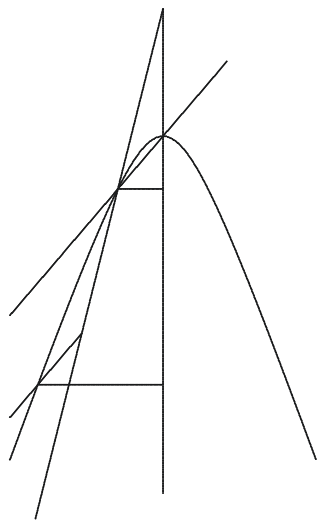
Ergo fiet: $\text{ǂ}2\odot^2\sqrt{a^3sq} \mathbin{\text{‡}} \odot^2 ap + l^2 \sqcap \frac{ar}{8} + l^2$.



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

$g + \overset{B}{\sqrt{b^2-y^2-2ly-l^2}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay+2ah \mathbin{\text{ǂ}} \frac{a}{q}y^2 \mathbin{\text{ǂ}} \frac{2a}{q}hy \mathbin{\text{ǂ}} \frac{a}{q}h^2}}$. Unde fiet $A^2 \sqcap B^2 + g^2 + 2Bg$, vel $A^2 - B^2 - g^2 \sqcap 2Bg$. et ordinando:

---

2 f. *Nebenbetrachtung*: $\text{☽} \sqcap \frac{\odot^2 n}{2\odot}$

3 *Daneben:* Ex his calculis theoremata duci possunt memorabilia.

4 *Dazu*: ἄτοπον

$$\begin{array}{lllll} \odot & & \rightmoon & & \\ \mp\frac{a}{q} & y^2 & +2a & y & +2ah \\ +1 & & \mp\frac{2a}{q}h & & \mp\frac{a}{q}h^2 \\ & & +2l & & -b^2 \\ & & & & +l^2 \\ & & & & -g^2 \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l}1\\1\\1\\1\\1\\1\end{array}}\right\}\mercury \quad \sqcap 2gB.$$

et quadrando:
$$\begin{array}{llllllllll} \odot^2 & y^4 & 2\odot\rightmoon & y^3 & 2\odot\mercury & y^2 & 2\rightmoon\mercury & y & +\mercury^2 \\ & & & & \rightmoon^2 & & & & \\ & & & & & & +4g^2l & & -4g^2b^2 \\ & & & & +4g^2 & & & & -4g^2l^2 \end{array}$$

Ponatur jam aequationem cubicam dari, tollatur ex ea terminus secundus, atque inde multiplicetur per incognitam, seu ad quartum gradum attollatur.

Ut si aequatio sit $x^3 \; * \; apx \quad a^2r$

Attollatur ad quartum, dabit: $x^4 \; * \; apx^2 \quad a^2rx \; *$

Sic potius: $\overset{B}{\sqrt{2by+2bl-y^2-2ly-l^2+h^2}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay \mp \frac{a}{q}y^2}} + g.$

$$\begin{array}{lllllll} & \odot & & \rightmoon & & \mercury & \\ \text{Unde} & -1 & y^2 & +2b & y & -l^2 & \sqcap \; 2gA. \\ & \mp\frac{a}{q} & & -2l & & +h^2 & \\ & & & -2a & & -g^2 & \end{array}$$

Et quadrando $\odot^2y^4 + 2\odot\rightmoon y^3 + 2\odot\mercury \;\; y^2 \; + \; 2\rightmoon\mercury \;\; y \;\; \mercury^2$
$$\begin{array}{l} +\;\rightmoon^2 \quad \ldots \; [-] \; 8ag^2 \ldots \\ \mp \; \frac{4a}{q}g^2 \ldots \end{array}$$

7 $\odot^4$y^4 *L ändert Hrsg.* 11 jam *(1)* | in *nicht gestr.* | aeqvatione *(a)* cubica *(b)* solida data *(2)* aeqvationem *L* 15 +2bl *erg. L unter der Wurzel*

9 $+4g^2l$: Richtig wäre $+8g^2l$. 10 $-4g^2l^2$: Richtig wäre $+4g^2l^2$. 17 Unde: Leibniz berücksichtigt den in Z. 15 unter der Wurzel ergänzten Term $+2bl$ in der folgenden Gleichung und der weiteren Überlegung nicht.

Ponatur secundus terminus aequationis cubicae esse repletus, eoque facto ad quartum attollatur; patet fore $\text{☿} \sqcap 0$. atque ita valorem ipsius h inveniri per g, et l, valor ipsius b, ex secundo termino, invenitur per l. Valor ipsius g. habetur pure ex quarto termino; denique valor ipsius l, habetur ex termino 3^{tio}. Si vero quartus terminus sit repletus auferatur secundus atque ita habebitur b per l, ut ante; et g habebitur pure per terminum quartum ut ante, ergo habetur et b per l ex termino ultimo seu 5^{to}.

$$\overset{B}{\sqrt{2by+2bh-y^2-h^2+2hy+l^2}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay \mp \frac{a}{q}y^2}} + g.$$

Et quadrando: $B^2 \sqcap A^2+g^2+2Ag$, et ordinando $B^2-A^2-g^2 \sqcap 2gA$, et explicando $2by+2bh-y^2-h^2+2hy+l^2-2ay \pm \frac{a}{q}y^2-g^2 \sqcap 2gA$, et ordinando

$$\begin{array}{llllll}
\odot & & \text{☽} & & \text{☿} & \\
-1 & y^2 & +2b & y & +2bh & \sqcap\ 2gA, \text{ et quadrando} \\
\pm\frac{a}{q} & & +2h & & -h^2 & \\
 & & -2a & & +l^2 & \\
 & & & & -g^2 &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\odot^2 y^4 & \cancel{+2\odot\text{☽}\ y^3} & & +2\odot\text{☿} & y^2 & \cancel{+2\text{☽}\text{☿}\ y} & & +\text{☿}^2 & \left.\right\} \sqcap 4g^2A^2 & \\
 & & & \cancel{+\text{☽}^2} & \ldots & & & & & \left.\right\} \sqcap 0 \\
 & -4g^2A^2 & \sqcap & \pm\frac{4ag^2}{q} & \ldots & -8g^2a\ \ldots & & & & \\
\hline\hline
y^4 & +2b & y^3 & 2\odot\text{☿} & y^2 & -\,8g^2a\ y & & +\text{☿}^2 & & \\
 & +2h & & \pm\frac{4ag^2}{q} & & & & & & \\
 & -2a & & & & & & & & \\
\hline
 & & & \odot^2 & & & & & & \\
y^4 & & * & ap & & a^2r & & a^3s & &
\end{array}$$

1–6 *Nebenbetrachtung*: $\sqrt{b^2+h^2}$, aequatur a circuli illius radio.

23 *(1)* $\mathrm{b}^2+\mathrm{h}^2 \sqcap \mathrm{y}^2+\mathrm{e}^2$ *(2)* $\sqrt{\mathrm{b}^2+\mathrm{h}^2}$ *L*

Unde habemus $b \sqcap +a - h$. $g^2 \sqcap \dfrac{-\odot^2 ar}{8}$. Jam $2\odot☿$, *fait*

$$\left.\begin{array}{l} 4\cancel{\odot}ha - \overset{6}{\cancel{4}}\cancel{\odot}h^2 \\ \cancel{-2\odot h^2} \\ +2\cancel{\odot}l^2 \\ +\dfrac{2\odot^{\cancel{2}}ar}{8} \\ ∓\dfrac{a}{2q}\cancel{\odot}ar \end{array}\right\} \smile \odot^{\cancel{2}} \sqcap ap.$$

$$☿^2 \textit{ fait } \left.\begin{array}{l} 4h^2a^2 - 12h^3a + 4hal^2 + \dfrac{\odot ha^2r}{2} \\ +h^4 - 2h^2l^2 - \dfrac{\odot h^2ar}{4} \\ +l^4 + \dfrac{\odot l^2ar}{4} \\ +\dfrac{\odot^2a^2r^2}{64} \\ \hline \odot^2 \end{array}\right\} \sqcap a^3s.$$

Et aequationem hanc multiplicando per $2ha$ ut habeatur in ea pure $-h^3$, et alteram aequationem totam dividendo per $12a$, ut habeatur etiam in ea pure h^3, abjiciendo utrobique h^3, componetur nova aequatio et divisorem $\odot$ ita ut in priore nullus restet, in posteriore fiat radix seu $\odot$. Ex quadrato seu $\odot^2$ habebimus ita novam seu tertiam aequationem in qua extabunt h^4, h^2, et h et negligenda imposterum 2^{da} et tertia, ex qua ut auferatur h, conferatur cum prima, divisa per $4a$, ipsa divisa per multiplas ipsius

11 aeqvationem *(1)* unam *(2)* hanc multiplicando | per *(a)* h *(b)* 2ha *erg.* | ut *L* 11 pure *erg.* *L* 14 habebimus *(1)*:*(a)* $\dfrac{+4\mathrm{h}^2\mathrm{a}^2}{\odot^2}$, $-4\mathrm{h}^2\mathrm{a}^2$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{h}^4}{12\mathrm{a}}\,\dfrac{+\cancel{4}\mathrm{a}^{\cancel{2}}}{3\cancel{12}\odot}$ *(2)* ita *L* 14 seu tertiam *erg.* *L* 15 et negligenda … tertia *erg.* *L*

---

1 *fait*: Die beiden letzten Terme des geklammerten Ausdrucks müssten $+\dfrac{2\odot^2ar}{8} ∓ \dfrac{a}{2q}\odot ar$ lauten. Die Versehen beeinträchtigen mit weiteren Fehlern die folgenden Rechnungen. 11 pure $-h^3$: Um dies zu erreichen, müsste die erste Gleichung mit $\dfrac{h}{6}\odot$ multipliziert werden. Leibniz multipliziert schließlich die erste Gleichung mit $2ha$ und dividiert die zweite Gleichung nicht.

h, abjiciatur h utrobique et habebitur quarta aequatio, quae sola conferenda erit cum prima, nam in prima extabit tantum h^4, in quarta h^2 atque ita valor ipsius h habebitur pure, et bis quidem. Unde conferendo duos illos valores etiam valor ipsius l dabitur.

$$\begin{array}{cccccccc}
 & \text{♀} & & \text{♃} & & \text{♂} & & \\
\frac{h^4}{\odot} & -8a^2 & h^2 & -4l^2a & h & -a^3s & \sqcap & 0 \\
 & +\frac{4a^2}{\odot} & & -\frac{\odot a^2 r}{2} & \dots & +\frac{l^4}{\odot} & & \\
 & -\frac{2l^2}{\odot} & & \ddagger\frac{a^3 r}{q} & \dots & +\frac{l^2 ar}{4} & & \\
 & -\frac{ar}{4} & & +2a^2p & \dots & +\frac{\odot a^2 r}{64} & & \\
 & & & +\frac{al^2}{\odot} & & & & \\
 & & & +\frac{a^2 r}{2} & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llll}
\frac{1}{\text{♃}}h^4 & \frac{\text{♀}}{\text{♃}}\ h^2 & \cancel{+h} & +\frac{\text{♂}}{\text{♃}} \\
 & +\frac{6}{4a} & \cancel{-h} & \left.\begin{array}{l} +\frac{ap}{4a} \\ -\frac{2l^2}{4a} \\ -\frac{2\odot ar}{8 \frown 4a} \\ \ddagger\frac{a}{2q} \frown \frac{ar}{4a} \end{array}\right\} \text{♄}
\end{array}
\quad \sqcap\ 0 \quad \text{vel} \quad
\begin{array}{lllll}
h^4 & \text{♀}\ h^2 & & +\text{♂} & \sqcap\ 0 \\
 & +\frac{6\text{♃}}{4a} & \dots & +\text{♄♃} &
\end{array}$$

2 nam *(1)* utrobiqve extabit tantum h^4, h^2 et h *(2)* in *L*

$$\left.\begin{array}{llll} \text{vel } h^4 & \text{♀}\quad h^2 & + \text{♀}^2 & \\ & \dfrac{6\text{♃}}{4a} & + \dfrac{12\text{♃}}{4a}\text{♀} & \\ & & + \dfrac{36\text{♃}^2}{16a^2} & \end{array}\right\} \begin{array}{ll} \sqcap & \text{♂} \\ [*] & +\text{♄♃} \\ & +\text{♀} \\ & +\dfrac{12\text{♃}}{4a}\text{♀} \end{array}$$

$$\text{Ergo } \sqrt{\ldots\ldots - [*]} \sqcap h + \begin{array}{c} \dfrac{\text{♀}}{2} \\ \dfrac{6\text{♃}}{4} \end{array}$$

$$\overset{B}{\sqrt{2by - y^2 + l^2}} \sqcap \overset{A}{\sqrt{2ay \mp \frac{a}{q}y^2}} + \underbrace{\overset{g}{\frac{lc}{h} + h}}_{g}. \text{ Et quadrando}$$

$$2by - y^2 + l^2 - 2ay \pm \frac{a}{q}y^2 - \frac{l^2c^2}{h^2} - h^2 - 2lc \sqcap 2gA. \text{ Et ordinando:}$$

$$\begin{array}{llllll} -1 & y^2 & +2b & y & +l^2 & \sqcap \quad 2gA. \quad \text{Et quadrando} \\ \pm\dfrac{a}{q} & & -2a & & -\dfrac{l^2c^2}{h^2} & \\ & & & & -h^2 & \\ & & & & -2lc & \end{array}$$

---

9 *Über den Termen der linken Seite der Gleichung*: $+2bh + 2hy - h^2 - \dfrac{2b^2c^2}{q^2}$

7 A B g *L ändert Hrsg.*

2–5 [∗]: Leibniz hat durch einen Verbindungsstrich markiert, an welcher Stelle die geklammerten Terme unter der Wurzel eingefügt werden sollen. 10 quadrando: Die folgende Umformung ist fehlerhaft.

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & l^2-g^2 & & & & l^4-2l^2g^2+g^4 \\
 & & \vee & & & & \vee \\
\cancel{\odot^2}y^4 & \cancel{2\odot ☽}y^3 & +2\odot☿ & y^2 & +\cancel{2☽}☿ & y & +\frac{☿^2}{\odot} \sqcap 4g^2A^2 \\
 & & \cancel{+☽^2} & \ldots & \frac{-8g^2a}{\odot} & \ldots & \\
 & & \cancel{ǂ\frac{4g^2a}{q}} & \ldots & & & \\
 & & -2l^2 & & & & \\
 & & +2g^2 & & & & \\
 & & ǂ\frac{2a}{q}l^2 & & & & \\
 & & \underline{ǂ\frac{2a}{q}g^2} & & & & \\
 & & \odot & & & & \\
\bullet & \bullet & ap & & a^2r & & a^3s
\end{array}$$

Resumatur aequatio superior, inde ducentur aequationes particulares: $b \sqcap +a-h$. $g^2 \sqcap -\frac{\odot^2ar}{8}$. ☿ hoc est $+ah-2h^2+l^2+\frac{\odot^2ar}{8} \sqcap \odot\sqrt{a^3s}$. Item ☿ $\sqcap \dfrac{ǂ\dfrac{4\cancel{a^2}\odot^{\cancel{2}}a^2r}{8q}+ap\odot^{\cancel{2}}}{2\cancel{\odot}}$. ἄτοπον.

11–13 *Nebenbetrachtungen*: $b \sqcap a$. $g \sqcap \sqrt{\frac{-\odot ar}{8}}$. $g \sqcap \sqrt{\sqrt{a^3s}-l^2}$.

$$\wedge$$

$$\frac{lc}{h}+h$$

$$g \sqcap \sqrt{\frac{+2l^2 ǂ 2\frac{a}{q}l+ap\odot}{+2 ǂ \frac{2a}{q}}}.$$

Relato 2^{do} termino $b \sqcap \odot a+n$. $☽ \sqcap n\odot^2$. $☽^2 \sqcap n^2\odot^4$. $☿ \sqcap \odot\sqrt{a^3s}$. Ergo $\odot☿ \sqcap \odot^2\sqrt{a^3s}$ et $☽☿ \sqcap n\odot^3\sqrt{a^3s}$.

---

11 Resumatur aequatio superior: Leibniz hat einen Hinweisstrich zur Gleichung von S. 230 Z. 7 gezogen.

An sic $\dfrac{bg^2}{q} + \sqrt{2by - y^2 + \dfrac{l^2q}{b}} \sqcap \sqrt{2ay + 2ah \mp \dfrac{a}{q}y^2 \mp \dfrac{a}{q}h^2 \mp \dfrac{2a}{q}hy}$. Unde

$$\begin{array}{llllllll} \odot & \text{☽} & \text{☿} & & & & & \\ \mp\dfrac{a}{q}\,y^2 & +2a\quad y & +2ah & \sqcap\ 2gB, \text{ et quadrando } y^4 & +2\odot\text{☽}\,y^3 & +2\odot\text{☿}\,y^2 & +2\,\text{☽☿}\,y & +\text{☿}^2. \\ +1 & \mp\dfrac{2ah}{q}\ \ldots & \mp\dfrac{a}{q}h^2 & & & +\text{☽}^2\ \ldots & & \\ & -2b\ \ldots & -l^2 & & & +4g^2 & -8g^2b\ \ldots & -4g^2l^2 \\ & & -g^2 & & & & & \\ \hline & & & & & \odot^2 & & \\ & & & y^4 & * & ap\ \ y^2 & a^2r\ \ y & a^3s \end{array}$$

Unde $b \sqcap -2a \pm \dfrac{2a}{q}h(\frown \dfrac{q}{g})$ et $g^2b \sqcap -\dfrac{a^2r}{8}$. Unde $g^2 \sqcap \dfrac{-\dfrac{a^2r}{8}}{-2a \pm \dfrac{2a}{q}h}$ vel $+2ag^2 \mp \dfrac{2a}{q}hg^2 \sqcap + \dfrac{a^2r}{8}$.

$\dfrac{\odot^2ap - 4g^2}{2\odot} \sqcap \sqrt{\odot^2a^3s + 4g^2l^2}$, unde $\dfrac{\odot^4a^2p^2 - 8\odot^2apg^2 + 16g^4}{4\odot^2} \sqcap \odot^2a^3s + 4g^2l^2$.

An sic $g + \sqrt{\dfrac{2bq}{g}[y] - y^2 + l^2} \sqcap A$. Fiat $\text{☽} \sqcap 0$. Erit $b \sqcap -\dfrac{2ag}{q} \pm 2ahg$. Habemus $g^2 \sqcap -\dfrac{a^2r}{8}$.

Conferendo etiam tertium et ultimum terminum invenimus valorem ipsius l. conferendo duos valores ipsius ☿ alterum absolutum, ope g explicatae, alterum l, implicantem. Invento pure valore ipsius, l, et ipsius g, invenitur valor purus ipsius h, ope vel ipsius tertii, vel ipsius ultimi termini, quia illi duo termini coincidunt, seu producunt eundem valorem; jam enim iis usi sumus. Habito valore ipsius h, habetur valor ipsius b etc.

1 sic *(1)* $\mathrm{g} + \sqrt{2\mathrm{by} - \mathrm{y}^2 + \mathrm{l}^2}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{bg}^2}{\mathrm{q}}$ *L* 13 etiam *(1)* primum et ultimum *(2)* tertium *L*

8 Unde: Die folgenden Rechnungen werden durch Fehler beeinträchtigt.

[*Teil 2*]

Esto sectio Conica data $\mp\frac{bq}{c}\pm z \sqcap \sqrt{\frac{q}{a}y^2 - \frac{q}{a}h^2 \mp \frac{b^2q^3}{ac^2}}$. Unde ut fiat $2az \mp \frac{a}{q}z^2 \sqcap v^2$ quaeramus z hujus, fiet $\mp 2qz + z^2 + q^2 \sqcap \mp\frac{q}{a}v^2 + q^2$. Unde fiet $\pm z \mp q \sqcap \sqrt{\mp\frac{q}{a}v^2 + q^2}$. Quae ut aequivaleant prioribus, sumatur differentia inter ipsam $\frac{bq}{c}$ inventam, et ipsam q, quae differentia esto e. seu esto $q + e \sqcap \frac{bq}{c}$. Per consequens pro $\pm z \mp q$ substitui poterit valor ipsius q, seu $\frac{bq}{c} - e$, unde fiet $\pm z \mp \frac{bq}{c} \pm e$, quam magnitudinem comparando cum $\pm x \mp \frac{bq}{c}$, fiet $z \sqcap x \frac{\pm}{\pm} e$, vel $z \sqcap x \pm e$. Unde fiet $2ax \pm 2ae \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{a}{q}e^2 - \frac{2a}{q}ex$, loco $2az \mp \frac{a}{q}z^2$. Posita ut dixi $e \sqcap \frac{bq}{c} - q$. Restant comparanda $\frac{q}{a}y^2 - \frac{q}{a}h^2 \mp \frac{b^2q^3}{ac^2}$, cum $\mp\frac{q}{a}v^2 + q^2$. Eritque $v \sqcap \mp y$ et $h^2 \sqcap \dfrac{q^2 \pm \frac{b^2q^3}{ac^2}}{-\frac{q}{a}}$, $\sqcap -aq + \frac{b^2q^2}{c^2}$.

$2bx \mp \frac{c}{q}x^2 + h^2 \sqcap y^2$ sectionis conicae arbitrariae aequatio, unde

2 $\sqrt{\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2 - \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}\mathrm{h}^2 \mp \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{q}^3}{\mathrm{ac}^2}}$ *(1)* ita ut valor ipsius b $\sqcap$ *(2)* ita ut *(3)* Unde *L* 2 f. $\sqcap$ v^2 *(1)* multiplicetur, *(2)* aeqvivalere debet huic *(3)* hoc *(4)* qvaeramus *L* 4 prioribus, *(1)* | esto q + e $\sqcap \frac{\mathrm{bq}}{\mathrm{c}}$ *nicht gestr.* | erit et q $\sqcap \frac{\mathrm{bq}}{\mathrm{c}}$ − e, et z − e $\sqcap$ x vel z $\sqcap$ x + e Unde fiet 2ax + 2ae $\mp \dfrac{\mathrm{a}}{\frac{\mathrm{bq}}{\mathrm{c}} - \mathrm{e}}$x *(2)* sumatur *L* 7 Unde *(1)* 2ax $\pm$ 2ae $\mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$x^2 loco 2az $\mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$z^2 *(2)* fiet *L* 8 Posita ... e $\sqcap \frac{\mathrm{bq}}{\mathrm{c}}$ − q *erg. L* 10 arbitrariae *erg. L*

7 fiet: Die Rechnungen mit den Mehrfachvorzeichen sind fehlerhaft.

$$\mp\frac{2qbx}{c}+x^2+\frac{q^2b^2}{c^2} \sqcap \mp\frac{q}{c}y^2 \pm \frac{q}{c}h^2+\frac{q^2b^2}{c^2} \qquad \text{et}$$

$$^{+\!+}\!\mp\frac{qb}{c} \mp^{+\!+} x \sqcap \sqrt{\mp\frac{q}{c}y^2 \pm \frac{q}{c}h^2+\frac{q^2b^2}{c^2}}.$$

Esto jam sectio Conica data $2az \mp \frac{a}{q}z^2 \sqcap y^2$. Unde fiet

$$\mp\frac{2q\cancel{a}}{\cancel{a}}z+z^2+q^2 \sqcap \mp\frac{q}{a}y^2+q^2 \qquad \text{, Et extracta radice}$$

$$^{+\!+}\!\mp q \mp^{+\!+} z \sqcap \sqrt{\mp\frac{q}{a}y^2+q^2}.$$

Ponatur $^{+\!+}\!\mp q - \frac{^{+\!+}\!\mp qb}{c} \sqcap {}^{+\!+}\!\mp e$. Jamque comparando $^{+\!+}\!\mp\frac{qb}{c} \mp^{+\!+} x$ cum $^{+\!+}\!\mp q \mp^{+\!+} z$, et auferendo utrobique $^{+\!+}\!\mp\frac{qb}{c}$, restabit $x \sqcap z+e$. Deinde conferendo $\mp\frac{q}{a}y^2$ cum $\mp\frac{q}{c}y^2$, fiet $c \sqcap a$, denique comparando q^2 cum $\pm\frac{q}{c}h^2+\frac{q^2b^2}{c^2}$, fiet $q \sqcap \pm\frac{h^2}{a}+\frac{qb^2}{a^2}$, et $h^2 \sqcap \pm aq \mp \frac{qb^2}{a}$. Applicemus ad parabolam, et pro $2bx \mp \frac{c}{q}x^2+h^2, \sqcap y^2$, substituamus valorem ipsarum x. c. et h. fietque:

$$2bz+2be(2bq-\frac{2b^2q}{c}) \mp \frac{a}{q}z^2 \mp \frac{a}{\cancel{q}}e^2(q^{\cancel{2}}+\frac{q^{\cancel{2}}b^2}{c^2}-\frac{2q^{\cancel{2}}b}{c}) \pm aq \mp \frac{q}{a}b^2 \sqcap y^2$$

Sed ita evanescerent z, et y. Unde cautionem discimus, ipsius h valorem ante radicum extractionem investigandum. Est ergo $h^2 \sqcap$ [*bricht ab*]

10 f. $\sqcap$ y^2 *(1)* Unde necesse est *(a)* $2bq-\frac{2b^2}{c}q \mp aq \mp \frac{qb^2a}{c^2} \pm \frac{2qba}{c}$ *(b)* b, qvoqve esse infinite magnam, qvod *(2)* sed *L*

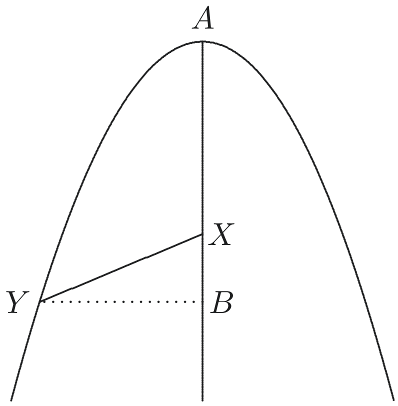
---

7 $x \sqcap z+e$: Richtig wäre $z \mp e$. 9 fietque: In der folgenden Gleichung fehlt auf der linken Seite der Term $\mp\frac{2a}{q}ez$.

22. DE APPLICATA SECTIONIS CONICAE
[Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 2 Bl. 171–172. 1 Bog. 2° $2\frac{1}{2}$ S. Textfolge Bl. 172 v°, 171 r°, 171 v°.
Cc 2, Nr. 859 B

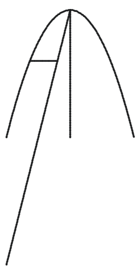
Datierungsgründe: s. N. 18.



[*Fig. 1*]

In data sectione [conica], invenire valorem rectae YX, ex curva ad datam AX Abscissam ex axe applicatae angulo dato, ita scilicet ut ratio rectarum YB ad XB, sit data c ad q. Sit $AX \sqcap y$. Ex $y(\ddagger)XB$, (e) datur YB. Erit enim

$$YB \sqcap \sqrt{2ya(\ddagger)2ea \ddagger \frac{a}{q}y^2 \ddagger \frac{a}{q}e^2 \ddagger (\overline{\ddagger})\frac{2a}{q}ey.}$$

8 *(1)*  Inveni supra aeqvationem *(a)* ad li *(b)* ordinatae demissae ex curva conica, ad *(aa)* axem ex *(bb)* rectam ex vertice intra curvam utcunque ductam, nempe abscissa eius rectae, posita *(aaa)* AY *(bbb)* y. erit applicata ad angulos rectos: *(2)* In *L* 8 ad *(1)* axem ab *(2)* datam *L*

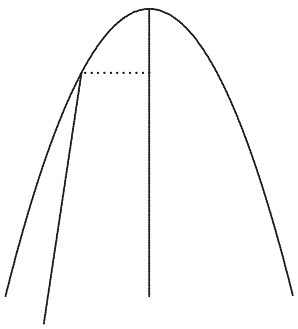
12 Inveni supra: N. 18 S. 204 Z. 1 – S. 206 Z. 9.

At eadem YB datur ex e, data, erit enim $\dfrac{YB}{e \sqcap XB} \sqcap \dfrac{c}{q}$. Ergo erit $\dfrac{c^2e^2}{q^2} \sqcap 2ya\ (\ddagger)2ea$ etc. Ordinandoque erit

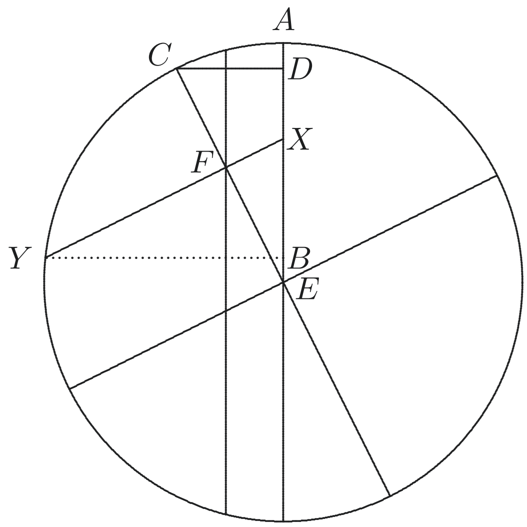
$$\left.\begin{array}{ll} e^2 & (\ddagger)2a \\ & (\ddagger) \ddagger (\ddagger)\dfrac{2ay}{q} \\ \cline{2-2} & +\dfrac{c^2}{q^2} \ddagger \dfrac{a}{q} \end{array}\right\} \sqcap 2n\ \ e \qquad \begin{array}{lll} +n^2 & \sqcap & 2ya \\ & & \ddagger \dfrac{a}{q}y^2 \\ & & +n^2 \end{array}$$

Eritque $e+n \sqcap \sqrt{ya \ddagger \dfrac{a}{q}y^2 + n^2}$. Unde fiet $YB^2 \sqcap 2ya(\ddagger)\ \overline{-2an + 2a\sqrt{4ay \ddagger y^2 + n^2}}$.

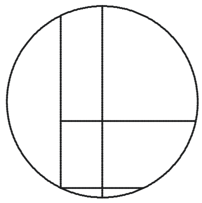
Ponamus $n \sqcap \dfrac{\gamma^2 a + a\delta y}{c^2 + \theta a}$. Nimis prolixus fit calculus.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]

In Circulo ex recta AX, quaeritur ipsa XY, dato angulo YXB, seu $\dfrac{YB}{XB} \sqcap \dfrac{c}{q}$. $AX \sqcap x$. $XB \sqcap e$. Cum detur $\dfrac{YB}{XB}$ dabitur et $\dfrac{YX}{YB}$ nempe ergo et $\dfrac{EC}{ED}$, et cum detur

10 AX $\sqcap$ | y *ändert Hrsg.* | . XB $\sqcap$ e. *(1)* 2ax $(\ddagger)$ 2ae $-$ x^2 $-$ e^2 *(2)* Cum *L* 10–240,1 et | $\dfrac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BD}}$, et cum detur BC, dabitur BD *ändert Hrsg.* | . Datur *L*

3 e^2: Leibniz unterlaufen beim Aufstellen der Gleichung und in der folgenden Rechnung mehrere Versehen. Er setzt in Z. 9 mit dem Spezialfall des Kreises neu an.

EC, dabitur ED. Datur porro et $XE \sqcap a-x$. Ergo et EF et FX. Et ex EF dato datur FY, junctaeque FY, et FX, dant YX, quaesitam, id reapse exequamur:

$$AX \sqcap x.\ \frac{YB}{XB} \sqcap \frac{c}{q}.\ XE \sqcap a-x.\ XB \sqcap e.\ \text{Ergo } YB \sqcap \frac{ec}{q},\ \text{et } YX \sqcap \sqrt{\frac{e^2c^2}{q^2}+e^2}.$$

Ergo $\dfrac{YX}{YB} \sqcap \dfrac{\cancel{e}\sqrt{\frac{c^2}{q^2}+1}}{\cancel{e}\frac{c}{q}}$. Ergo $\dfrac{FE}{XE} \sqcap \dfrac{\frac{c}{q}}{\sqrt{\frac{c^2}{q^2}+1}}$ et $FE \sqcap \dfrac{ac}{\cancel{q}\sqrt{\frac{c^2}{\cancel{q^2}}+q^2}} - \dfrac{xc}{\cancel{q}\sqrt{\frac{c^2}{\cancel{q^2}}+q^2}} \sqcap \dfrac{ac-xc}{\sqrt{c^2+q^2}}$.

$\dfrac{FX}{XE} \sqcap \dfrac{e}{e\sqrt{\frac{c^2}{q^2}+1}}$. Ergo $FX \sqcap \dfrac{qa-xq}{\sqrt{c^2+q^2}}$. Data FE, datur jam FY, estque $\sqcap \sqrt{a^2-\dfrac{a^2-2ax+x^2,c^2}{c^2+q^2}}$. Ergo YX, hoc est $FY+FX$, $YX \sqcap \sqrt{a^2-\dfrac{a^2-2ax+x^2}{c^2+q^2}} + \dfrac{qa-xq}{\sqrt{c^2+q^2}}$, si loco $a-x$, substituatur z, pro a ponatur b ut in altera Aequatione maneat a. et pro z ponatur y, habebimus $YX \sqcap \overbrace{\sqrt{b^2-\dfrac{y^2c^2}{c^2+q^2}}}^{B} + \overbrace{\dfrac{qy}{\sqrt{c^2+q^2}}}^{g} \sqcap \overbrace{\sqrt{2ay \ddagger \dfrac{2a}{q}y^2}}^{A}$.

Quadrando et ordinando fiet

$$\begin{array}{lllll} \ddagger\dfrac{2a}{q} & y^2 & +2a & y & -b^2 \sqcap 2gA. \\ -\dfrac{q}{\sqrt{c^2+q^2}} & & -\dfrac{q}{\sqrt{c^2+q^2}} & & \\ +\dfrac{c^2}{c^2+q^2} & & & & \end{array}$$

7 FY+ | YX ändert *Hrsg.* | , YX *L* 8 f. pro a … ponatur y *erg. L*

6 *FY*, estque: Die folgende Formel ist nicht richtig und beeinträchtigt mit zusätzlichen Versehen die weiteren Rechnungen. Leibniz setzt in S. 241 Z. 1 neu an; vgl. N. 18 S. 199 Z. 3–9.

$$g+\sqrt{2by-y^2+l^2}\sqcap\sqrt{2ay+2ah\mp\frac{a}{q}y^2\mp\frac{a}{q}h^2\mp\frac{2a}{q}hy}.\ \text{Unde}$$

$$\begin{array}{lllllll}
\odot & & \rightmoon & & \mercury & & \\
\mp\frac{a}{q} & y^2 & 2a & y & 2ah & \sqcap & 2gB \\
+1 & & \mp\frac{2a}{q}h & & \mp\frac{a}{q}h^2 & & \\
 & & -2b & & -l^2 & & \\
 & & & & -g^2 & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{llllllllll}
\cancel{\odot^2} & y^4 & 2\odot\rightmoon & y^3 & 2\odot\mercury & y^2 & +2\rightmoon\mercury & y & \mercury^2 \\
 & & & & \rightmoon^2 & & & & \\
 & & & & 4g^2 & & -4g^2b & & -4g^2l^2 \\
\hline
 & & & & & \odot^2 & & & \\
 & y^4 & * & & ap & y^2 & a^2r & y & a^3s
\end{array}$$

$$h\sqcap\frac{b-a+n\odot^2}{\mp\frac{2a}{q}}\ \text{ob}\ \rightmoon\sqcap 0.\ \text{Aeq. 1.}$$

$$\mercury\sqcap\sqrt{a^3s\odot^2+4g^2l^2},\ \text{ob terminum } 5^{\text{tum}}.\ \mercury\sqcap\frac{ap\odot^2-4g^2+n^2\odot^4}{2\odot}\ \text{ob terminum } 3^{\text{tium}}.$$

Pro $ap\odot^2+n^2\odot^4$ ponatur $at\odot^2$. Unde fiet:

$$a^3s\odot^2+4g^2l^2\sqcap\frac{a^2t^2\odot^4+16g^4-8atg^2\odot^2}{4\odot^2}.\ \text{Aeq. 2.}$$

$$\text{Aeq. 3.}\ g^2b\sqcap\frac{a^2r\odot^2}{4}-2n^2\odot^4,\frown\mercury.$$

$$l^2\sqcap 4\odot ah\mp 2\odot\frac{a}{q}h^2-2\odot g^2+4g^2\overbrace{-ap\odot^2+n^2\odot^4}^{at\odot^2}.\ \text{Aeq. 4.}$$

12 +n$\odot^2$ *erg. L im Zähler des Bruches* 14 pro ... at$\odot^2$ *erg. L*

9 $-4g^2b$: Richtig wäre $-8g^2b$. 12 $h\ \sqcap$: Leibniz rechnet zunächst mit $\rightmoon=0$ und ändert dann zu $\rightmoon=n\odot^2$, wobei ihm jeweils Versehen unterlaufen. Diese und weitere Fehler beeinträchtigen die Berechnung der Gleichungen 1–8.

Aequatio 2^{da} si conferatur quartae, et valor ipsius l^2, bis sumatur, habebitur:

$$\frac{16\odot\cancel{g^2}ah}{\boxed{\pm 8\odot\frac{a}{q}}}\ \boxed{\pm 8\odot\frac{a}{q}}\cancel{g^2}h^2\ \frac{\overbrace{-8\odot g^4+16g^4-4\odot^2g^2at-a^3s\odot^2-\frac{a^2t^2\odot^2-16g^4+8atg^2\odot^2}{4\odot^2}}^{\male}}{\boxed{\pm 8\odot\frac{a}{q}}\frown g^2}\ \sqcap$$

0 fietque $h \sqcap \sqrt{-\frac{\male}{\pm 8\odot\frac{a}{q}g^2}+\boxed{\frac{a^2}{+\frac{a^2}{q^2}}}q^2}-q$. Aequatio 5^{ta}.

Ut proinde, h, aut b, ex solo g. pendeat. Ob aequationem 1^{mam} $b\sqcap \pm\frac{2ah}{g}+a$. Ergo juncta 3^{tia}: $\pm\frac{2a}{q}hg^2+ag^2\sqcap\frac{a^2r\odot^2}{4}-2n\odot^2\frown\mercury$. Aeq. 6.

Sive $h\sqcap\dfrac{\frac{a^2r\odot^2}{4}-ag^2}{\pm\frac{2a}{q}g^2}$. Aequatio 6^{ta}. Quae collata cum 5^{ta} dare debet valorem ipsius g. Translato $-q$, 5^{tae} in $+q$ ipsius sextae, quadretur utraque aequatio, fietque:

$$\frac{\frac{a^4r^2\odot^4}{16}-\frac{2a^3r\odot^2g^2}{4}+a^2g^4}{4\frac{a^2}{q^2}g^{\cancel{4}2}}+\frac{\frac{2qa^2r\odot^2}{4}-2qag^2}{\pm 2\frac{a}{q}\cancel{g^2}}+\cancel{q^2}\sqcap\frac{-\male}{\pm 8\odot\frac{a}{q}\cancel{g^2}}+\cancel{q^2}$$

Sed jam multiplicando omnia per g^2, ad cubum assurgeremus, seu ad g^6. Cujus vitandi comminiscenda ratio est. Ista inclusa valent tantum secundo termino $\leftmoon$, sublato seu $\sqcap$ 0.

Ob quartum terminum, erit $\mercury\sqcap\frac{a^2r\odot^2-4g^2b}{2n\odot^2}\sqcap\frac{at\odot^2-4g^2}{2\odot}$. Aequat. 7.

Ex termino 4^{to} juncta aequat. 7. erit

$$\text{Aeq. 8. } l^2\sqcap\frac{-a^2r\odot^2\ \ \frac{+a^2r\odot^2-2at\odot^4n+8n\odot^2g^2}{2\odot}+4n\odot^2ah\pm 2n\odot^2h^2-2n\odot^2g^2}{2n\odot^2}$$

Conferatur aequationi 4. habebiturque valor ipsius h, ope solius g. Ergo et valor ipsius b, ope solius g habebitur junct. aeq. 1. Sed idem valor ipsius b, habetur ope ipsius g. aliter, ex aeq. 7. Unde junctis his duobus ipsius b valoribus habetur g. pure et ejus ope tandem et l pure. Sed provideo rem ad altiores dimensiones assurgere.

1 assurgere. | Remedium vide pagina versa:

$$+g\overbrace{\sqrt{\frac{2ba^2}{g^2}y-y^2+l^2}}^{B}\sqcap\overbrace{\sqrt{2ay+2ah\mp\frac{a}{q}y^2\mp\frac{2a}{q}hy\mp\frac{a}{q}h^2}}^{A}.$$

$$\begin{array}{lllll} & \odot & ☽ & & ☿ \\ \text{Unde} & \mp\frac{a}{q}\;y^2 & 2a & y & +2ah \\ & +1 & \mp\frac{2ah}{q} & & \mp\frac{a}{q}h^2 \\ & & -\frac{2ba^2}{g^2} & & -l^2 \\ & & & & -g^2 \end{array}\Bigg\}\sqcap 2gB.\ \text{Et quadrando}$$

$$\begin{array}{lllll} \odot^2y^4 & 2\odot ☽\ y^3 & 2\odot ☿\ y^2 & 2\,☽♀\ y & +☿^2 \\ & ☽ \quad \ldots & & & \\ & +4g^2 & -8ba^2 & -4g^2l^2 & \end{array}$$

$$+\frac{gc}{a}\sqrt{\frac{2ba^2}{g^2}y-y^2}\sqcap\sqrt{2ay+2ah\mp\frac{a}{q}y^2\mp\frac{2a}{q}hy\mp\frac{a}{q}h^2}$$

$$\begin{array}{lllll} & \odot & ☽ & & ☿ \\ \text{Unde} & \mp\frac{a}{q}\;y^2 & 2a & y & 2ah \\ & +1 & \mp\frac{2a}{q}h & & \mp\frac{a}{q}h^2 \\ & & -\frac{2ba^2}{g^2} & & -\frac{g^2c^2}{a^2} \end{array}\Bigg\}\sqcap 2gB\ \text{et quadrando:}$$

$$\begin{array}{llllllll} \odot^2 & y^4 & 2\odot ☽ & y^3 & 2\odot ☿ & y^2 & 2\,☽☿ & y & ☿^2 \\ & & & & \mp\frac{4g^2c^2}{a^2} & & -8bc^2 & & \end{array}\Big\}\sqcap 0$$

$$\begin{array}{llllll} y^4 & n\ y^3 & ap & y^2 & a^2r\ y & a^3s \\ & * & & & & * \end{array}$$

☿ habetur pure *(1)* Ergo et $\frac{g^2c^2}{a^2}$. Ergo et *(2)* per Term. ult. Ergo et $\frac{g^2c^2}{a^2}$, per collationem ultimi et antepenultimi. Ergo et h, ob valorem ipsius ☿ inventum Ergo et $\frac{b}{g^2}$ *(a)* datur e⟨t⟩ *(b)* ob terminum 2^{dum} datur et bc^2, ob penultimum. Ponatur $\frac{ba^2}{g^2}\sqcap\alpha$. $\frac{g^2c^2}{a^3}\sqcap\beta$, $\frac{bc^2}{a^2}\sqcap\gamma$. Ergo $b\sqcap\frac{\alpha g^2}{a^2}$, $\sqcap\frac{\gamma a^2}{c^2}$, sive $c^2g^2\sqcap\frac{\gamma a^4}{\alpha}$ At eadem $c^2g^2\sqcap\beta a^3$, Ergo $\beta a^3\sqcap\frac{\gamma a^4}{\alpha}$. ἄτοπον *gestr.* | *L*

23. INTRODUCTION À LA CONSTRUCTION D'UN PROBLEME SOLIDE [Mitte 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 43–46. 2 Bog. 2°, ineinander gelegt. 3 S. auf Bl. 43 r°–44 r°.
Cc 2, Nr. 865

Datierungsgründe: Es handelt sich bei dem Stück wahrscheinlich um die Einleitung einer geplanten Publikation, deren Hauptteil womöglich N. 14 oder N. 15 bilden sollte. Wie zwei Bemerkungen zeigen, hat Leibniz, als er N. 23 verfasst, die Methoden von Sluse bereits studiert. Dies deutet darauf hin, dass das Stück nach N. 16 entstanden ist. Die in der Ausgangsformel des gestrichenen Schlussabsatzes verwendeten Koeffizienten n, p, r, s verwendet Leibniz in diesem Band ansonsten nur in N. 19–22; in den Stücken ab N. 24, die das in N. 23 angekündigte allgemeine *problème solide* behandeln, schreibt Leibniz dagegen l, m, n, p. Dies legt nahe, dass das Stück nach N. 19 und vor N. 24 abgefasst wurde.

Introduction à la Construction d'un probleme solide donné par l'intersection d'une Section Conique donnée et d'un Cercle, suivant une seule Regle commune à toutes les Sections Coniques, necessaire à l'execution des Calculs de la Methode de l'Universalité.

Les Anciens ayant bien jugé que les problemes solides ne sçauroient estre construits geometriquement par le moyen des lignes droites et circulaires ont employé quelques autres plus composées pour cet effect. Mais nous deuvons à nostre siecle deux découvertes assez importantes, sçavoir premierement la Reduction de tous les problemes solides à deux (: l'invention de deux moyennes et la Trisection de l'Angle :) et en second lieu, la distinction des Lieux ou lignes en degrez, comme on peut voir dans les Écrits de Viete, Albert Girard et Des Cartes.

13 introduction à la *erg. L* 21 moyen *(1)* d⟨'une⟩ droite et d'un cercle *(2)* des lignes droites et circulaires *(a)* sans employ⟨er⟩ *(b)* ont employé *L* 23 premierement *erg. L*

25 Écrits: Vgl. Fr. Viète, *Supplementum geometriae*, 1593, prop. XXV, S. 21 (*VO* S. 256 f.); A. Girard, *Invention nouvelle en l'algebre*, 1629; R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106.

Or l'Analyse ayant repris vigueur et la Geometrie estant assujettie aux loix de l'Arithmetique, il fut aisé de juger que tout probleme solide est susceptible de constructions infinies, dont il ne falloit que choisir les plus commodes: de sorte que Monsieurs des Cartes et Fermat, en donnerent deux formules presque en même temps, l'un par le moyen du Cercle et de la Parabole, l'autre par le Cercle et l'Hyperbole. Par apres Messieurs Hudde et Schoten en donnerent d'autres; et enfin Mons. Slusius dans son Mesolabe donna une methode pour trouver des formules infinies par la combinaison de deux coniques que l'on voudra, dont l'une soit donnée, ou toutes deux arbitraires.

Il y avoit apparence qu'on ne deuvroit plus rien souhaitter, j'ay esté moy même tousjours de cét avis, jusque à ce que je me trouvay une fois arresté tout court, en cherchant l'execution ou construction des Calculs de la Methode de l'Universalité, dont voicy l'occasion. Mons. de Carcavi ayant parlé du dessein de Messieurs Des Argues et Pascal, de traiter les Coniques universellement, me proposa un Probleme que pas un avoit resolu universellement, sçavoir de mener une perpendiculaire d'un poinct donné à une conique donnée. J'avoua que l'Analyse commune ne s'étendoit pas jusque à là, et que ces Messieurs ayant suivi la voye de la Synthese avoient apparemment eu de la peine à arriver à la solution des Problemes embarassez; mais pour moy que j'estois persuadé qu'on pourroit pousser l'Analyse jusqu'à là et je promis d'y vouloir songer. Ce que [je] fis

7 coniqves *(1)* qvelqvesconqve *(2)* qve *L* 9 ne *(1)* deuuoit *(2)* deuuroit *L* 12 Mons. de *(1)* Carcavy m'ayant *(2)* Carcavi ayant *L* 13 un *(1)* exemple *(2)* Probleme *L*

5 Parabole: *a. a. O.*, S. 85–90. Das französische Original, *La Géométrie*, wurde 1637 veröffentlicht. 5 l'Hyperbole: Fermat verfasste wohl 1636 die Abhandlung *Ad locos planos et solidos isagoge*, *FO* I S. 91–110, in deren Anhang er Lösungswege für Gleichungen dritten und vierten Grades mittels Parabel und Kreis oder Hyperbel (nicht mit Kreis und Hyperbel) darstellte; vgl. *Appendix ad isagogem topicam continens solutionem problematum solidorum per locos*, insb. S. 107 f. Zwar wurde die Abhandlung erst posthum in P. de Fermat, *Varia opera*, 1679, S. 1–11 abgedruckt, doch war sie unter Pariser Mathematikern schon früh bekannt. Auch der Nachruf auf Fermat im *Journal des Sçavans*, 1665, S. 69 bis 72, berichtete, dass dieser Lösungen solider Probleme gefunden habe, noch bevor Descartes solche veröffentlichte. 6 Hudde: Huddes zeichnerische Lösung quartischer und kubischer Gleichungen mit alternierenden Vorzeichen gibt Schooten in seinem Kommentar zu Descartes' *Géométrie* wieder; vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 325–328. 6 Schoten: *a. a. O.*, S. 328–330. 6 Slusius: Vgl. den Abschnitt *De problematum solidorum constructione* in R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 21–37. 12 Carcavi: Vgl. S. 476 Z. 22 – S. 477 Z. 25. 12 dessein: Zu den Kegelschnittlehren von Desargues und Pascal vgl. die Anmerkungen zu S. 77 Z. 8.

heureusement, ayant trouvé moyen, par les signes ambigus, et par les grandeurs infinies ou infiniment petites de ne reduire pas seulement les Coniques en harmonie, mais d'assujettir aux mêmes loix quelques courbes geometriques qu'on me donneroit, quelques éloignées qu'elles pourroient estre l'une de l'autre; et, ce que je ne trouve pas moins important, de resoudre par un seul calcul des problemes dont la multitude des cas no[u]s embarasseroit autrement et nous obligeroit à plusieurs calculs differents, qui aboutiroient enfin chacun à une equation à part, mais qui selon ma methode sont toutes comprises dans une equation generale qu'un seul calcul me donne, qui n'est pas plus difficil que celuy du plus difficil entre les cas particuliers.

Or comme la Resolution d'une Equation trouvée peut estre ou Arithmetique, ou Geometrique; je me voyois déja à bout de l'Arithmetique, ou de la construction universelle du probleme par des nombres assez approchants, puisque la Methode de Viete, de Harriotte et d'autres se peut appliquer aux Equations ambigües aussi bien qu'aux formules expliquées ou particularisées; mais venant à la construction Geometrique, je me trouva arresté par une difficulté d'autant plus grande que personne l'avoit remarquée. Car je voyois bien qu'il ne suffiroit pas d'avoir des formules pour construire un probleme solide donné par le Cercle et la Parabole, et d'autres par le Cercle et l'Hyperbole ou Ellipse, puisqu'ainsi les equations quoyque universelles ou communes à toutes les coniques, seroient executees par autant de constructions differentes qu'il y a de coniques, ce qui est contre l'intention: mais qu'il nous falloit une formule commune à toutes les sections pour construire quelque equation solide que ce soit: ce qui personne a fait autant que je sçache. J'ay trouvé meme que cette belle methode de Mons. Sluys, de faire quantité d'equations

3 geometriqves *erg.* *L* 4 f. de *(1)* ⟨comp⟩ *(2)* resoudre *L* 11 f. universelle *erg.* *L* 17–19 Ellipse, *(1)* puisqve par ce *(2)* puisqv'ainsi *(a)* je *(b)* les eqvations | qvoyqve *erg.* | universelles | ou *erg.* | communes a toutes les coniqves, seroient *(aa)* construites *(bb)* executees *L* 20 l'intention: *(1)* de sorte qv'il nous faut *(2)* mais *L* 22 meme *(1)* qve la methode *(2)* qve cette *L*

---

7 f. equation generale: Leibniz' Vorzeigebeispiel ist die *Aequation generale* für das Problem der *mimima ad conicam*, vgl. S. 159 Z. 7 – S. 160 Z. 1. 12 Viete: Vgl. Fr. VIÈTE, *De emendatione aequationum*, 1615, cap. 6–10, *VO* S. 140–156. 13 Harriotte: Vgl. den Abschnitt *Exegetice Numerosa. Ad aequationes biquadraticas resolvendas* in TH. HARRIOT, *Artis analyticae praxis*, 1631, S. 151–167.
22 Sluys: Diese Methode legt Sluse in *De analysi* offen; vgl. R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 51–95, insb. S. 51 f.

composées par la combinaison des simples pour avoir plusieurs lieux et equations de deux inconnues qui soyent les memes dans toutes ces equations, afin que l'intersection de deux de ces lieux donne la construction du probleme, ne me servoit pas, et que ce seroit le plus grand hazard du monde de rencontrer par ce moyen des formules generales pour toutes les coniques.

De Sorte que je me suis trouvé obligé à recourir à mes propres recherches qui me donnerent à la verité quelques formules communes, mais pour la plus part si embarassées, que je ne trouva pas à propos de m'en servir: en fin j'ay eu le bonheur de me satisfaire, et j'ay formé une formule tout expres, où dans la suite de l'operation bien de calcul se détruit, et je suis persuadé qu'on aura de la peine à l'abreger beaucoup, sauf l'universalité.

[*Gestrichener Schlussabsatz*]

Soit une Equation solide donnée, dont la formule $x^4\ nx^3\ apx^2\ a^2rx\ a^3s \infty 0$ car il est fort aisé de faire qu'une equation donnée ait cette forme, puisque on demande seulement que tous les lieux des termes soyent remplis ce qui se peut obtenir tousjours quoyque en effect cela ne soit pas necessaire. Car si l'equation donnée est de trois degrez, on peut l'elever au quatrieme, multipliant tous les termes par x, et alors dans cette Equation quarre-quarrée le dernier terme s sera egal à zero; si l'equation est quarre-quarrée, le troisiesme terme peut manquer aussi, et p estre equivalent à 0. La même chose se peut dire du quatrieme; mais le second se doit tousjours trouver. Or pour parler plus generalement posons tous les lieux remplis, puisque cela se peut tousjours: Enfin soit une Section Conique donnée par le moyen de la quelle, et d'un cercle dont nous deuvons chercher le centre et le diametre, l'inconnue x, puisse estre determinée geometriquement, et les racines de l'equation devenir connues.

1–3 lieux *(1)* des memes inconnues | communes *erg.* | dont *(2)* et eqvations de deux inconnues *(a)* dont les d⟨e⟩ *(b)* qvi soyent les memes dans *(aa)* l'une e *(bb)* toutes ... l'intersection | de deux de ces lieux *erg.* | donne *L* 3 et *(1)* qv'il auroit esté *(2)* qve ce seroit *L* 5 f. coniqves. *(1)* Enfin *(2)* De Sorte qve *L* 8 f. de | me *erg.* | satisfaire, *(1)* et j'espere de | pouuoir *erg.* | satisfaire aussi à ceux qvi auront la bonté de juger eqvitablement de mes trauuaux *(2)* et j'ay *L* 9 suite *(1)* du calcul bien de grandeurs *(2)* de l'operation *L* 12 Soit *(1)* un probleme *(2)* une *L* 14 lieux des *erg. L* 17 f. l'eqvation *(1)* est donnée *(2)* est qvarre-qvarrée *L* 18 à 0. | Mais *gestr.* | la *L* 22 diametre *(1)*. La valeur de l'inconnue *(2)*, l'inconnue *L*

24. AEQUATIO SOLIDA I
[Juli – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 248–249. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 854 B

Datierungsgründe: Die Stücke N. 24–28, unter denen das vorliegende Stück das älteste ist, hängen eng miteinander zusammen. Ihr Gegenstand ist die Behandlung von Gleichungen 4. Grades, wie sie beim Versuch entstehen, das Problem der *minima ad conicam* zu lösen. Inhaltlich setzen die Stücke die Rezeption von Sluses *Mesolabum* voraus, das Leibniz um die Jahresmitte 1674 herum exzerpiert hatte (vgl. N. 16). Andererseits sind sie vor die umfassendere Darstellung *De constructione aequationum solidarum universali* (N. 31) zu stellen, in die zentrale Gesichtspunkte unseres Konvoluts eingehen. N. 31 wiederum ist inhaltlich vor dem zweiteiligen *Schediasma de focis conicarum* (N. 33), welches das Datum Oktober 1674 trägt, anzusiedeln. — Die Notation steht dieser Datierung nicht entgegen: Die in den Stücken eingesetzten Doppelvorzeichen verweisen auf eine Entstehung frühestens im Mai und spätestens im Dezember 1674, und die Stücke sind, wie die durchgängige Verwendung des Symbols $\sqcap$ zeigt, nach dem wahrscheinlich im Juni 1674 oder kurz zuvor erfolgten Wechsel der Gleichheitszeichen entstanden.

Esto Aequatio data, solida, quomodocunque affecta:

$$y^4 + ly^3 + bmy^2 + b^2ny \sqcap b^3p$$

Quod si Terminus aliquis abest, litera ei propria, ut $l.\,m.\,n.$ potest intelligi infinite parva. Si primus y^4 abest, res eodem redit, ac si ultimum, $p.$ abesse cogitaremus, tunc enim divisis omnibus per y, aequatio ex quadrato-quadratica fieret cubica.

Signa etiam quaelibet subintelligi possunt, quia literae $l.\,m.\,n.\,p.$ possunt intelligi magnitudines verae aut falsae; at b semper veram esse, sive affirmativam, intelligi potest. Jam transponendo, fiet:

$$y^4 + ly^3 + bmy^2 \sqcap -b^2ny + b^3p,$$

divisisque omnibus per y^2, item per $-ny + bp$, fiet:

$$\frac{y^2 + ly + bm}{-ny + bp} \sqcap \frac{b^2}{y^2}$$

18 l. m. n. | p. *gestr.* | potest *L* 19 f. abesse *(1)* conciperemus *(2)* cogitaremus *L* 20 f. fieret *(1)* solida *(2)* cubica *L* 22 literae *(1)* indeterminatae, *(2)* l. *L* 26 per *(1)* b^2, habebimus $-ny + bp$ *(2)* $-ny + bp$ *L*

Ponamus $y^2 \sqcap gv - \frac{l}{2}y + c^2$ valoremque ipsius in ejus locum substituendo, habebimus:

$$\frac{gv\boxed{-\frac{l}{2}y} + c^2\boxed{+ly} + \frac{l}{2}y + bm}{-ny + bp} \sqcap \frac{b^2}{gv - \frac{l}{2}y + c^2}$$

Factaque multiplicatione per crucem, fiet:

$$g^2v^2 + c^2gv\boxed{+\frac{l}{2}gyv} + bmgv, \boxed{-\frac{l}{2}gyv}\boxed{\boxed{-\frac{c^2l}{2}y}} - \frac{l^2}{4}y^2$$

$$-\frac{bml}{2}y, +c^2gv + c^4\boxed{\boxed{+\frac{c^2l}{2}y}} + c^2bm \sqcap -b^2ny + b^3p.$$

Et pro $-\frac{l^2}{4}y^2$, substituendo iterum ejus valorem, $-\frac{l^2}{4}gv + \frac{l^3}{8}y - \frac{l^2c^2}{4}$, ordinandoque et dividendo omnia per, g^2 et in uno aequationis latere subtrahendo gv, in altero ejus valorem, $y^2 + \frac{l}{2}y - c^2$, habebimus:

1–5 *Am Rand:* Etiam loco $\frac{l}{2}y$ poterit aliquid indeterminatum assumi, v.g. γy. Sed eventus calculi docuisset utile esse ponere, $\gamma \sqcap \frac{l}{2}$ ad tollendum yv. Si poneretur $c^2 \sqcap -bm$, etiam v simplex evanuisset.

1 valoremqve ... substituendo, *erg. L* 6 f. valorem, *(1)* atqve ita *(2)* $-\frac{\mathrm{l}^2}{4}\mathrm{gv}$ ... ordinandoqve *(a)* habebimus *(b)* et ... g^2 *(aa)* habebimus

$$☿\left\{\begin{array}{l} -\frac{\mathrm{l}^3}{8}\ \mathrm{y} \\ +\frac{\mathrm{bml}}{2}\ \cdots \\ -\mathrm{b}^2\mathrm{n}\ \cdots \end{array}\right. \frac{}{\mathrm{g}^2} \left\{\begin{array}{l} +\frac{\mathrm{l}^2\mathrm{c}^2}{4} \sqcap \mathrm{v}^2 \\ -\mathrm{c}^4 \\ -\mathrm{c}^2\mathrm{bm} \\ +\mathrm{b}^3\mathrm{p} \end{array}\right. \frac{}{\mathrm{g}^2} \quad ♀\left\{\begin{array}{l} +2\mathrm{c}^2\mathrm{g}\ \mathrm{v} \\ +\mathrm{bmg}\ \cdots \\ -\frac{\mathrm{l}^2}{4}\mathrm{g}\ \mathrm{v} \end{array}\right. \frac{}{\mathrm{g}^2}$$

(bb) et ... latere *(aaa)* addendo *(aaaa)* y^2, *(bbbb)* $\mathrm{y}^2 - \mathrm{c}^2$, in altero ejus valorem gv *(bbb)* subtrahendo *L*

---

10 c^2: Um den Vorfaktor von v zum Verschwinden zu bringen, müsste man tatsächlich $2c^2 = -bm$ wählen. In S. 250 Z. 1–6 und in S. 251 Z. 4–9 experimentiert Leibniz mit der Setzung $c^2 = -bm$.

$$-y^2 \left\{ \begin{array}{c} \text{♃} \left\{ \begin{array}{c} \text{☿} \left\{ \begin{array}{l} -\frac{l^3}{8}\; y \\ +\frac{bml}{2} \cdots \\ -b^2 n \cdots \end{array} \right. \\ \hline g^2 \end{array} \right. \\ -\frac{l}{2} \cdots \end{array} \right. \left\{ \begin{array}{c} \left. \begin{array}{c} \boxed{+\frac{l^2c^2}{4}} \\ \boxed{-c^4} \\ \boxed{-c^2bm} \\ +b^3p \end{array} \right. \\ \hline g^2 \\ \boxed{+c^2} \end{array} \right. \sqcap\; v^2 \left\{ \begin{array}{c} \text{♂} \left\{ \begin{array}{c} \text{♀} \left\{ \begin{array}{l} \boxed{+2c^2\cancel{g}}\; v \\ +bm\cancel{g} \cdots \\ -\frac{l^2}{4}\cancel{g}\; v \end{array} \right. \\ \hline g^{\cancel{2}} \end{array} \right. \\ -gv \end{array} \right.$$

Pro v, ponatur $w - \frac{\text{♂}}{2}$ et pro y, ponatur $e + \frac{\text{♃}}{2}$. Unde fiet $+\frac{\text{♃}^2}{4} - e^2 \sqcap w^2$ cujus $+\frac{\text{♂}^2}{4}$ aequationis locum esse circulum inde patet, quod utrumque quadratum incognitum pure, et si ab eodem aequationis latere colloces, eodem signo affectum, habetur. Jam ut aequationem universalem ad quamlibet sectionem Conicam datam, obtineamus: in aequatione superiore, quae multiplicatione per crucem producta erat; relinquamus $-\frac{l^2}{4}y^2$ omissa valoris ejus substitutione, relictisque terminis, v continentibus, in eo, in quo sunt latere, aliisque in oppositum aequationis latus transpositis, omnisbusque per g^2 divisis. Inde aequationem superiorem arbitrariam, ipsius y^2, valorem exprimentem, multiplicemus per $\frac{h^2 - b^2}{g^2}$, fiet:

7 pro v . . . ponatur | e $- \frac{\text{♃}^2}{2}$ *ändert Hrsg.* | . Unde fiet | $+\frac{\text{♃}^2}{4} - e^2 \sqcap w^2$ *ändert Hrsg.* | *erg. L*
$-\frac{\text{♂}^2}{4}$

13 omnisbusqve per g^2 divisis *erg. L*

7 $\sqcap$: In der Gleichung fehlen die weiteren absoluten Glieder neben $\frac{\text{♃}^2}{4}$ und $\frac{\text{♂}^2}{4}$.

$$\frac{h^2-b^2}{g^2}y^2+\frac{h^2-b^2}{g^2}ly \quad \frac{-h^2+b^2}{g^2}c^2 \sqcap \frac{h^2-b^2}{g\cancel{2}}\cancel{g}v$$

Cujus aequationis arbitrariae latus unum uni, alterum alteri aequationis superioris per crucem productae, lateri, subtrahendo, fiet aequatio:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} +\frac{l^2}{4} \\ -h^2 \\ +b^2 \end{array}\right.}{g^2}\begin{array}{l} y^2 \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \quad \frac{\left\{\begin{array}{l} +\frac{bml}{2} \\ -b^2n \\ -h^2l \\ +b^2l \end{array}\right.}{g^2}\begin{array}{l} y \\ \cdots \\ \cdots \\ \cdots \end{array} \quad \frac{\left\{\begin{array}{l} \boxed{\begin{array}{l} -c^4 \\ -c^2bm \end{array}} \\ +b^3p \\ \boxed{\begin{array}{l} +h^2c^2 \\ -b^2c^2 \end{array}} \end{array}\right.}{g^2} \sqcap \quad v^2 \quad \frac{\left\{\begin{array}{l} +bm \\ \boxed{+2c^2} \\ -h^2 \\ +b^2 \end{array}\right.}{g}\ v$$

Quae aequatio est ad infinitas	Hyperbolas,	imo ad quamlibet, si	$\frac{l^2}{4}+b^2$	$\sqcap$	h^2
....	Ellipses	....	....	$\sqcap$	....
....	Parabolas	....	....	$\sqcap$	....

modo scilicet g^2 sit quantitas vera, nam si foret quantitas nihilo minor, contrarium quantum ad Ellipses et Hyperbolas dicendum foret. Nimirum ut verbo dicam, si y^2 sit affecta signo + aequatio est ad Hyperbolam, si signo − ad Ellipsin, si signo 0, est ad parabolam, ut constat.

4–9 *Neben der Gleichung:* $\beta^2 \sqcap +h^2-b^2$

3 lateri, *(1)* adjiciendo *(2)* addendo *(3)* subtrahendo *L* 5 + | 2 *erg.* | c^2 *L*

---

1 $\frac{h^2-b^2}{g^2}ly$: Im Nenner des Bruchs müsste $2g^2$ stehen. Leibniz rechnet konsequent mit dem falschen Wert bis S. 255 Z. 8 weiter. 5 $+2c^2$: Den Faktor 2 fügt Leibniz nachträglich korrigierend hinzu. Er verwendet im weiteren aber durchgängig den unkorrigierten Term — in der *Aeq. 4.* (S. 253 Z. 4) ebenso wie in den Berechnungen von S. 254 Z. 11 bis S. 256 Z. 6. 17 β^2: Im weiteren Verlauf des Stückes setzt Leibniz dagegen durchgängig $\beta^2 = b^2 - h^2$.

Caeterum haec omnia consulto ita concepta sunt, ut quisquis etiam ex Terminis aequationis datae absit, aut etiam si plures simul absint, termini tamen omnes aequationum ad circulum, et ad sectionem Conicam quamlibet, sibi constent; excepto si l et n simul absint, sive sint 0. Tunc enim aequatio plana est, eoque casu in aequationibus ad circulum et ad sectionem Conicam quamlibet aberit terminus y. Et tamen constructio nihilo secius procedet. Unum annoto brevioris constructionis causa, si aequatio data sit quadrato quadratica, seu si litera p extet, posse literam c poni aequalem nihilo. Si vero absit, fieri potest, ut utile sit c adhiberi, nam si absit, determinatio quaedam involvitur. Sive aequatio inter duos terminos cognitos, ex aliis incognitis + vel −. cognitis, in locum incognitarum y vel v, substitutis, ortos, necesse est enim ut se mutuo tollant, quae aequatio an et quatenus nocere possit; Calculus sequens dabit.

Jam ut quantitates arbitrariae determinentur, aequatio arbitraria ad sectionem conicam inventa, conferenda cum aequatione ad sectionem Conicam indefinitam, data, ponatur sectio conica data esse.

$$\left.\begin{array}{l} 2r\omega \ddagger \dfrac{r}{t}\omega^2 \sqcap w^2, \text{ loco } \omega \text{ substituatur } y+e, \\ \qquad\qquad\qquad\;\; \ldots\ldots\; w \;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; v+k, \end{array}\right\} \text{fietque aequatio:}$$

$$2ry + 2re \ddagger \frac{r}{t}y^2 \ddagger \frac{2r}{t}ey \ddagger \frac{r}{t}e^2 \sqcap v^2 + 2kv + k^2, \text{ vel ordinando:}$$

$$\begin{array}{llll} \ddagger\dfrac{r}{t}\,y^2 & +2r\;\;y & +2re & \sqcap v^2 + 2kv. \\ & \ddagger\dfrac{2r}{t}e & \ddagger\dfrac{r}{t}e^2 & \\ & & -k^2 & \end{array}$$

Hujus aequationis Termini singuli cum singulis respondentibus Aequationis Conicae superioris collati dabunt aequationes particulares sequentes:

2 f. omnes *(1)* duorum locorum, sive ae *(2)* aeqvationum *L* 5 y. *(1)* Sed aeqvatio *(2)* Et *L* 6 procedet. *(1)* Si termin *(2)* Unum *L* 6 si *(1)* terminus *(a)* secundus aeqvationis datae *(aa)* absit *(bb)* adsi *(b)* tertius, aeqvationis datae adsit, sive si illa sit affecta sub qvadrato *(2)* | si *streicht Hrsg.*| aeqvatio *L* 6 sit *(1)* Cubica, qvo casu *(2)* qvadrato *L* 7 si *(1)* terminus *(2)* litera p extet, posse *(a)* terminum c *(b)* literam *L* 9 ex *(1)* valor alia *(2)* aliis *L* 11 f. dabit. | NB. inveni in seq. pagina c^2 semper utile esse nec omitti debere *erg. u. wieder gestr.* | Jam *L* 12 f. conicam *(1)* indefinitam *(2)* inventa *L*

$$\text{Aeq. 1.}\quad \ddagger\frac{r}{t} \sqcap \frac{+\frac{l^2}{4}\underbrace{-h^2+b^2}_{\beta^2}}{g^2}$$

$$\text{Aeq. 2.}\quad +2r \ddagger \frac{2r}{t}e \sqcap \frac{+\frac{bml}{2}-b^2n-h^2l+b^2l}{g^2}$$

$$\text{Aeq. 3.}\quad +2re \ddagger \frac{r}{t}e^2-k^2 \sqcap \frac{\boxed{-c^4-c^2bm}+b^3p\ \boxed{+h^2c^2-b^2c^2}}{g^2}$$

$$\text{Aeq. 4.}\quad 2k \sqcap \frac{+bm\ \boxed{+c^2}-h^2+b^2}{g}$$

Ubi patet $r.\,t.\,l.\,b.\,m.\,n.\,p.$ literas esse datas; caeterarum, quippe pro arbitrio assumtarum, $g.\,c.\,e.\,\underset{(\beta)}{h}.\,k$ determinationem quaeri. Ex ipsis autem datis, $r.\,t.\,b$, esse quantitates positivas, caeteras esse ambiguas inter veras, sive positivas, et falsas sive nihilo minores, prout scilicet aequatio data id postulat, sive determinat. Denique cum sint 5 indeterminatae, et aequationes tantum 4, patet unam ex incognitis, pro arbitrio assumi posse, ut c. ponatur ergo $\sqcap$ 0. et omnia per c affecta evanescent. Quod jam tantum abesse ut noceat, recognosco, ut contra plurimum prosit, quoniam constructionem aequationum Cubicarum reddi patet faciliorem, quia ibi $p \sqcap 0$. Unde per Aeq. 3. $k^2 \sqcap 2re \ddagger \frac{r}{t}e^2$. Et nunc ex aequationibus hisce 4 fundamentalibus, ducamus consequentias: Ac primum patet $k \sqcap \frac{+bm-h^2+b^2}{2g}$ ex aeq. 4. et $e \sqcap \dfrac{\dfrac{\frac{bml}{2}-b^2n-h^2l+b^2l-2rg^2}{g^2}}{\ddagger\frac{2r}{t}}$ et rursus

6 (β) *erg. L* 6 quaeri. *(1)* Et ex ipsis datis *(2)* Ex *L* 12 Cubicarum *(1)* p omisso *(2)* reddi *L*
14–254,1 rursus *(1)* k $\sqcap \sqrt{\frac{b^3p}{g^2}-2re \ddagger \frac{r}{t}e^2}$ *(2)* k^2 *L*

12–256,6 Unde ... $-bm$: Eine Reihe von Flüchtigkeitsfehlern belastet die in diesem Abschnitt durchgeführten Berechnungen.

$k^2 \sqcap \dfrac{b^3p}{g^2} - 2re \pm \dfrac{r}{t}e^2$. Et in aequatione ipsius k^2, valorem exprimente, pro e, vel e^2 substituendo ejus valorem, posteaque duos ipsos k^2 valores conferendo, fiet:

$$\frac{b^2m^2 - 2bmh^2 + 2b^3m + h^4 - 2h^2b^2 + b^4}{4g^2} \sqcap$$

$$\frac{b^3p}{g^2}\ (-2re\ :)\ \frac{-\dfrac{2rbml}{2} + 2rb^2n + 2rh^2l - 2rb^2l}{g^2} + 4r^2\ (\pm\frac{r}{t}e^2)$$

Sed ut verba contrahamus, $-h^2 + b^2$ appellentur β^2, fietque

$$\frac{b^2m^2 + 2bm\beta^2 + \beta^4}{4\cancel{g^2}} \sqcap \frac{b^3p}{\cancel{g^2}} \quad (-2re) \quad \frac{-\dfrac{\cancel{2}rbml}{\cancel{2}} + 2rb^2n - 2r\beta^2l + 4r^2g^2}{\mp\dfrac{2r\cancel{g^2}}{t}} \quad (\pm\frac{r}{t}e^2)$$

$$\frac{\dfrac{b^2m^2l^2}{4} - b^3mln + bml^2\beta^2 - 2bmlrg^2, + b^4n^2 - 2\beta^4l^2 + 4b^2nrg^2 + \beta^4l^2 - 4\beta^2lrg^2 + 4r^2g^4}{\dfrac{4r^2}{t^2}g^4 \smile \mp\dfrac{r}{t} \sqcap \mp\dfrac{4r}{t}\cancel{g^4}g^2}$$

Porro ex aequatione prima, $\beta^2 \sqcap \mp\dfrac{rg^2}{t} - \dfrac{l^2}{4}$. Ergo $\beta^4 \sqcap +\dfrac{r^2}{t^2}g^4 \pm \dfrac{2rg^2l^2}{4t} + \dfrac{l^4}{16}$ quibus in locum eorum in priori aequatione substitutis, consequitur incommodum ingens, nimirum incognita g. ascendit ad cubum, prodit enim alicubi $g^2\beta^4$ atqui β^4 valet g^4. etc. Quod ut evitetur, utile fuit indefinitam habuisse supernumerariam c^2, faciamus ergo

8 *(1)* Et pro β^2, substituatur ejus valor in *(2)* Porro L 9 substitutis *(1)* fiet: $\mp\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{g}^4$ *(2)*, conseqvitur L

---

1 $k^2 \sqcap$: Auf der linken Seite der Gleichung muss $-k^2$ stehen. Unter dem falschen Vorzeichen leidet die Berechnung bis Z. 7. 4 $(-2re\ :)$: Dieser eingeklammerte Ausdruck wird durch die beiden folgenden Terme ersetzt, wobei Leibniz aber den Nenner des Doppelbruchs aus seiner Formel für e vier Zeilen weiter oben, $\mp\dfrac{2t}{r}$, vergisst. Im weiteren Verlauf der Rechnung berücksichtigt er ihn wieder. Der andere eingeklammerte Ausdruck in dieser Zeile, $(\pm\dfrac{r}{t}e^2)$, ist dagegen weiter gültig. 7 $-2\beta^4l^2$: Hier müsste $-2b^2n\beta^2l$ stehen. Zudem müsste im Nenner das Doppelvorzeichen $\pm$ lauten.

$bm + c^2 \sqcap +h^2 - b^2$, erit $k \sqcap 0$ et $c^2 \sqcap h^2 - b^2 - bm$ seu $h^2 - b^2 - bm - c^2 \sqcap 0$. Ergo $\dfrac{-c^4 - c^2bm + h^2c^2 - b^2c^2}{g^2} \sqcap 0$. restabitque $\dfrac{b^3p}{g^2}$ tantum in aequatione 3^{tia}. Ergo per Aeq. 3. fiet $g^2e \frown +2r\cancel{e} \mp \dfrac{r}{t}e^{\cancel{2}} \sqcap b^3p$. At per Aeq. 2. $g^2 \frown \llcorner + 2r \mp \dfrac{2r}{t}e \lrcorner \sqcap \dfrac{+bml}{2} - b^2n + \beta^2l$ vel $g^2e \frown \llcorner +2r \mp \dfrac{2r}{t}e \lrcorner \sqcap \dfrac{+bmle}{2} - b^2ne + \beta^2le$. Unde $\dfrac{b^3p}{+2r \mp \dfrac{r}{t}e} \sqcap \dfrac{\dfrac{bmle}{2} - b^2ne + \beta^2le}{+2r \mp \dfrac{2re}{t}}$. Ergo $\dfrac{2r \mp \dfrac{2re}{t}}{2r \mp \dfrac{re}{t}}$ seu $1 \mp \dfrac{\dfrac{e}{t}}{2 \mp \dfrac{e}{t}} \sqcap \dfrac{\dfrac{bmle}{2} - b^2ne + \beta^2le}{b^3p}$.

Resumamus nunc aequationem primam $g^2 \sqcap \dfrac{+\dfrac{l^2}{4} + \beta^2}{\mp\dfrac{r}{t}}$, at per aequationem secundam $g^2 \sqcap \dfrac{+bml - b^2n + \beta^2l}{+2r \mp \dfrac{2r}{t}e}$. Collatis ergo his duobus valoribus fiet $\dfrac{\beta^2}{\mp\dfrac{r}{t}} - \dfrac{\beta^2l}{2r \mp \dfrac{2re}{t}} \sqcap \dfrac{bml - b^2n}{+2r \mp \dfrac{2r}{t}e} - \dfrac{\dfrac{l^2}{4}}{\mp\dfrac{r}{t}}$ unde fiet:

$$\beta^2 \sqcap \dfrac{\dfrac{\mp\dfrac{r}{t}bml \pm \dfrac{r}{t}b^2n - \dfrac{2rl^2}{4} \pm \dfrac{2rl^2}{4t}e}{\boxed{\mp\dfrac{2r^2}{t} + \dfrac{2r^2}{t^2}e}}}{\dfrac{2r \mp \dfrac{2re}{t} \pm \dfrac{lr}{t}}{\boxed{\mp\dfrac{2r^2}{t} + \dfrac{2r^2}{t^2}e}}}.$$

4 vel ... $+\beta^2$le *erg. L* 5 $1 \mp \dfrac{\text{te}}{2 \mp \frac{\text{e}}{\text{t}}}$ *L ändert Hrsg.* 7 fiet *(1)* $\beta^2 \sqcap \dfrac{\mp\frac{\text{r}}{\text{t}}\text{bml} \pm \frac{\text{rb}^2\text{nr}}{\text{t}} - \frac{2\text{rl}^2}{4\text{t}} \pm \frac{2\text{rl}^2\text{e}}{4\text{t}}}{+2\text{r} \mp \frac{2\text{r}}{\text{t}}\text{e}\pm}$ *(2)* $\dfrac{\beta^2}{\mp\frac{\text{r}}{\text{t}}}$ *L*

7 $+bml$: Richtig wäre hier und in den beiden folgenden Gleichungen $\dfrac{bml}{2}$.

Quae aequatio si cum superiore in qua etiam solae ex incognitis β, et e continentur, conferatur, et eliminetur e, ascendetur ad cubum ipsius e. Quod ut evitetur, novissimo artificio opus est, ut scilicet ex aequatione ab initio data, auferatur Terminus secundus, sive, ut l ponatur $\sqcap 0$ quo facto fiet: $\beta^2 \sqcap \dfrac{\pm\dfrac{rb^2n}{t}}{2r \mp \dfrac{2re}{t}}$. Ex hac novissima aequatione et ex superiore $+2b^3pr \sqcap \dfrac{\left\{\begin{array}{l} \pm\dfrac{2rb^3p}{t}\,e \;+\; e^2. \\ -2rb^2n\ldots \end{array}\right.}{\pm\dfrac{r}{t}}$

Ergo $g^2 \sqcap \mp\dfrac{t}{r}\beta^2$ per Aeq. 1. et $k \sqcap 0$ et $c^2 \sqcap -\beta^2 - bm$.

His ergo literis omnibus, $\beta.\,e.\,g.\,k.\,c$ ita determinatis etiam aequatio ad circulum determinata habetur, inventusque est circulus, cujus cum Sectione conica data intersectione, solvitur problema.

Quoniam autem hujus schedulae calculus mihi inventionis loco fuit, docuitque quae omitti potuerint debuerintve. (: Apparuit enim l. poni debere $\sqcap 0$. et assumendum esse, $y^2 \sqcap gv - \beta^2 - bm$ et hunc valorem in progressu multiplicari debere per β^2 et k esse debere $\sqcap 0$ sive ordinatam in ipsius sectionis Conicae datae axem incidere. :) Ideoque utile erit calculum jam ex eventu reformatum, simplicius redordiri, scheda separata. Idque et probationi calculi inserviet.

Detexi autem hae occasione, artificium constructionum maximum et generalissimum, ut scilicet quantitates indefinitae assumantur, tot quot assumi possibile est, quamvis aliqua ex ipsis sit supernumeraria, nec in progressu calculi, definiri possit a b a e q u a t i o n i b u s c o l l a t i t i i s. Definietur enim arbitrio nostro, talisque assumetur, ut certo valore ipsi assignato magna calculi pars, aut certe difficillima, et quae nos ad altiores justo

1 *(1)* Unde *(2)* Sive $\beta^2 \sqcap$ *(3)* Qvae *L* 4 f. et ex superiore *erg. L* 12 β^2 *(1)* :) ideoqve *(2)* et *L* 19 assumetur, *(1)* qvod inutile *(2)* ut *L*

---

5 $+2b^3pr$: Aus der rechten Gleichung in S. 255 Z. 4 folgt mit $l \sqcap 0$ richtig $2b^3pr = (\pm\dfrac{2rb^3p}{t} - 2rb^2n)\,e \pm \dfrac{b^2nr}{t}e^2$. 14 scheda: Vgl. N. 25.

dimensiones, reductu difficiles, duceret, evanescat. Sed et si plures una restent indefinitae, semper utiliter ad finem usque calculi reservabitur earum determinatio. Caeterum quod Terminum Secundum tollo, minime refugiendum aut onerosum videri deberet. Nam jam tum constat, ad Reductiones atque Resolutiones Aequationum plerumque secundi Termini sublationem requiri.

3 f. Nam *(1)* constat aliunde, *(2)* iam *L*

25. AEQUATIO SOLIDA II
[Juli – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 71 u. 74. 1 Bog. 2°.
Cc 2, Nr. 854 E

Datierungsgründe: Vgl. N. 24.

Esto Aequatio data Solida, quomodocunque affecta, nisi quod secundo Termino carere debet:

$$y^4 * bmy^2 \sqcap -b^2ny + b^3p, \quad \text{sive} \quad \frac{y^2+bm}{-ny+bp} \sqcap \frac{b^2}{y^2}$$

Ponatur Aequatio arbitraria $y^2 \sqcap gv + \underbrace{h^2 - b^2}_{\beta^2} - bm$, eoque valore in locum ejus substituto, fiet $\dfrac{gv + h^2 - b^2 \boxed{-bm + bm}}{-ny+bp} \sqcap \dfrac{b^2}{gv + \underbrace{h^2 - b^2}_{\beta^2} - bm}$, sive multiplicando per crucem

$$v^2 \; \frac{\left\{\begin{array}{l} +2\beta^2\cancel{g} \\ -bm\cancel{g} \end{array}\right.}{g^{\cancel{2}}} \; v \sqcap \frac{\left\{\begin{array}{r} -\beta^4 \\ +bm\beta^2 \\ +b^3p \end{array}\right.}{g^2} \; \frac{-nb^2}{g^2} \; y$$

Auferatur ab uno aequationis hujus latere, gv ab altero ejus valor, ex aequatione arbitraria sumtus fiet

9 Aeqvatio arbitraria *erg.* *L* 10 f. multiplicando per crucem *erg.* *L* 16 f. valor, *(1)* fiet *(2)* ex … arbitraria *(a)* fiet *(b)* sumtus *L*

$$v^2 \quad \frac{\left.\begin{array}{l} +2\beta^2 \cancel{g} \\ -bm\cancel{g} \end{array}\right.}{g^{\cancel{2}}} \begin{array}{l} v \\ \ldots \end{array} \quad \sqcap \quad -y^2 \quad \frac{-nb^2}{g^2}\, y \quad \frac{\left\{\begin{array}{r} -\beta^4 \\ +bm\beta^2 \\ +b^3p \end{array}\right.}{\begin{array}{c} g^2 \\ +\beta^2 \\ -bm \end{array}}$$
$$\begin{array}{ll} -g & \ldots \end{array}$$

Quam A e q u a t i o n e m a d C i r c u l u m esse manifestum est.

Aequationem arbitrariam assumtam multiplicemus per $\dfrac{\beta^2}{g^2}$, dabit: $\dfrac{\beta^2}{g} v \sqcap \dfrac{\beta^2}{g^2} y^2 - \dfrac{\beta^4}{g^2} + \dfrac{bm\beta^2}{g^2}$, auferantur latera hujus aequationis, a lateribus respondentibus aequationis superioris multiplicatione per crucem productae fiet:

$$v^2 + \begin{array}{l} \dfrac{\beta^2}{g} \\ -\dfrac{bm}{g} \end{array} v \sqcap -\frac{\beta^2}{g^2}\, y^2 - \frac{nb^2}{g^2}\, y + \frac{b^3p}{g^2}$$

Quam aequationem Sectionis Conicae indefinitae inventam, conferamus cum aequatione Sectionis Conicae datae, $2r\omega \mp \dfrac{r}{t}\omega^2 \sqcap w^2$, et ponendo $\begin{array}{l} \omega \sqcap y + e \\ w \sqcap v + k \end{array}$ fiet

$$v^2 + k\, v \sqcap \mp\frac{r}{t}\, y^2 \begin{array}{l} +2r \\ \mp\dfrac{2r}{t}e \end{array} y \begin{array}{l} +2re \\ \mp\dfrac{r}{t}e^2 \\ +k^2 \end{array}$$

Hinc $\dfrac{\beta^2}{g^2} \sqcap +\dfrac{bm}{g^2} + \dfrac{k}{g}$. Item $\dfrac{\beta^2}{g^2} \sqcap \pm\dfrac{r}{t}$. Ergo $\dfrac{bm + kg}{g^2} \sqcap \pm\dfrac{r}{t}$.

16 kv: Richtig ist $2kv$. 18 $+k^2$: Richtig ist $-k^2$.

Si posuissemus ab initio $y^2 \sqcap \dfrac{-bm+h^2-b^2}{2} + gv$, in aequatione Conica indefinita, v simplex terminus evanuisset, ergo k foret $\sqcap$ 0. Ergo $\beta^{[2]} \sqcap bm$, et $g^2 \sqcap \pm\dfrac{bmt}{r}$, et $e \sqcap \dfrac{-\dfrac{nb^2}{g^2}-2r}{\mp\dfrac{2r}{t}}$ sed inde sequitur contradictio, vel saltem nimia determinatio ex novissimo valore ipsius e, qui adhuc superest.

Igitur utilius videtur resumere aequationem Scheda priore inventam, ubi l. et c. relicta sunt. Jamque aequationes instituantur $g^2 \sqcap \dfrac{-\beta^2+\dfrac{l^2}{4}}{\mp\dfrac{\cancel{r}}{t}}$ item $g^2 \sqcap \dfrac{+\dfrac{bml}{2}-b^2n-\beta^2 l}{2\cancel{r}\mp\dfrac{2\cancel{r}}{t}e}$. Collatisque his duobus valoribus, fiet

$$\beta^2 \sqcap \frac{+\dfrac{bml}{2}-b^2n\pm 2\dfrac{l^2t}{4}-\dfrac{el^2}{4}}{\pm 2t\mp e+l}, \quad \text{porro} \quad k^2 \sqcap \frac{\boxed{+c^4}\boxed{+c^2bm}-b^3p\boxed{-\beta^2c^2}}{g^2}-2re\pm\frac{r}{t}e^2$$

1 in *(1)* novissima *(2)* aeqvatione ter *(3)* aeqvatione *L* 2 $g^2 \sqcap \pm$| $\dfrac{b^2m^2t}{r}$ *ändert Hrsg.* |, et *L* 3 e $\sqcap$ | $\dfrac{+\dfrac{nb^2}{g^2}-2r}{\mp\dfrac{2r}{t}}$ *ändert Hrsg.* | sed *L* 5 Scheda *(1)* separata *(2)* priore *L* 6 sunt. *(1)* Ponatur e $\sqcap$ 0. *(2)* jamqve *L* 6 instituantur *(1)* $\mp\dfrac{r}{t}g^2 \sqcap -\beta^2+\dfrac{l^2}{4}$ *(2)* g^2 *L*

---

2 evanuisset: Tatsächlich ergäbe sich bei diesem Ansatz $k=\dfrac{\beta^2}{2g}$, was im Allgemeinen nicht gleich Null ist. Dies entzieht den in derselben Zeile formulierten Folgerungen die Grundlage. 5 aequationem: Gemeint ist die in N. 24 S. 249 Z. 1 eingeführte Gleichung $y^2 \sqcap gv-\dfrac{l}{2}y+c^2$. Im folgenden verwendet Leibniz Ansätze und Ergebnisse aus N. 24. 6 g^2: Die beiden Gleichungen für g^2 erhält Leibniz aus *Aeq. 1.* und *2.*; S. 253 Z. 1 f. 8 β^2: Richtig ist $\beta^2=\dfrac{\dfrac{bml}{2}-b^2n\pm\dfrac{l^2t}{2}-\dfrac{el^2}{2}}{\pm 2t-2e+l}$. 8 k^2: Diese Gleichung entsteht durch Umstellen der *Aeq. 3.* (ebd., Z. 3). Auf ihrer rechten Seite muss nach dem Bruch allerdings $+2re\mp\dfrac{r}{t}e^2$ stehen.

itemque $k^2 \sqcap \dfrac{b^2m^2 \boxed{+4bmc^2} - 2\beta^2bm \boxed{+4c^4} \boxed{-4c^2\beta^2} + \beta^4}{4g^2}$. Ergo $k \sqcap \dfrac{bm-\beta^2}{g}$.

$$\beta^2 \sqcap \ddagger\frac{r}{t}g^2. \qquad e \sqcap \frac{-\dfrac{b^2n}{g^2} - 2r}{\ddagger\dfrac{2r}{t}}.$$

$$k^2 \sqcap \frac{-b^3p}{g^2 \sqcap \ddagger\dfrac{t\beta^2}{r}} - 2re \ddagger \frac{r}{t}e^2 \text{ et } k^2 \sqcap \frac{b^2m^2 - 2bm\beta^2 + \beta^4}{g^2 \sqcap \ddagger\dfrac{t\beta^2}{r}} \text{ sive } \frac{k^2}{-b^3p} \sqcap \frac{1}{g^2} \; \frac{-2re \ddagger \dfrac{re^2}{t}}{-b^3p}$$

et $\dfrac{k^2}{b^2m^2} \sqcap \dfrac{1}{g^2}\;\dfrac{-2bm+\beta^2}{\ddagger\dfrac{t}{r}b^2m^2}$ fietque conferendo $k^2 \sqcap \dfrac{-2re \ddagger \dfrac{re^2}{t}}{-b^3p} + \dfrac{2bm-\beta^2}{\ddagger\dfrac{t}{r}b^2m^2},\!,\frown -b^3p - b^2m^2$.

Ut plures indeterminatas nanciscamur, ita faciamus: $\dfrac{\lambda\delta y^2 + \lambda\delta ly + \lambda\delta bm}{-\delta ny + \delta bp} \sqcap \dfrac{\lambda\theta b^2}{\theta y^2}$.

Pro y^2 ponendo $gv+\mu y+c^2$, fiet: $\dfrac{\lambda\delta gv + \lambda\delta\mu y + \lambda\delta c^2 + \lambda\delta ly + \lambda\delta bm}{-\delta ny + \delta bp} \sqcap \dfrac{\lambda\theta b^2}{\theta gv + \theta\mu y + \theta c^2}$.

1 *(1)* E⟨st⟩ k $\sqcap \dfrac{\mathrm{bm}-\beta^2}{\mathrm{g}^2}\not e$ *(2)* Ergo *L* 4 $\mathrm{k}^2 \sqcap$ *(1)* $\dfrac{\dfrac{-2\mathrm{re} \ddagger \dfrac{\mathrm{re}^2}{\mathrm{t}}}{-\mathrm{b}^3\mathrm{p}} + \dfrac{2\mathrm{bm}-\beta^2}{\ddagger\dfrac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}}\mathrm{b}^2\mathrm{m}^2}}{-\mathrm{b}^3\mathrm{p} - \mathrm{b}^2\mathrm{m}^2}$ *(2)* $\dfrac{-2\mathrm{re} \ddagger \dfrac{\mathrm{re}^2}{\mathrm{t}}}{-\mathrm{b}^3\mathrm{p}}$ *L*

5 | $\dfrac{\dfrac{\lambda\not\delta}{\not g}\mathrm{y}^2 + \dfrac{\lambda\not\delta}{\not g}\mathrm{ly} + \lambda\not\delta\mathrm{bm}}{-\delta\mathrm{ny} + \delta\mathrm{bp}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L* 6 fiet: *(1)* $\dfrac{\lambda\delta\mathrm{y}^2 + \lambda\delta\mathrm{ly} + \lambda\delta\mathrm{bm}}{-\delta\mathrm{ny} + \delta\mathrm{bp}}$ *(2)* $\dfrac{\lambda\delta\mathrm{gv} + \ldots}{-\delta\mathrm{ny} + \delta\mathrm{bp}}$ *L*

---

1 k^2: Diese Gleichung erhält Leibniz durch Quadrieren der *Aeq. 4.* (ebd., Z. 4), wobei er aber den dort fehlenden Faktor 2 vor dem c ergänzt. 1 k: Setzt man c in *Aeq. 4.* gleich 0, ergibt sich richtig $k \sqcap \dfrac{bm-\beta^2}{2g}$. 3 f. k^2: Die Berechnung von k^2 leidet unter Folgefehlern und einer falschen Ausklammerung. Das korrekte Ergebnis lautet $k^2 = \dfrac{2re \ddagger \dfrac{re^2}{t}}{-b^3p} + \dfrac{2bm-\beta^2}{\ddagger\dfrac{4t}{r}b^2m^2},\!,\frown -\dfrac{1}{b^3p} - \dfrac{1}{b^2m^2}$.

5 faciamus: Leibniz behandelt im folgenden nichtreduzierte Gleichungen der Form $y^4 + ly^3 + bmy^2 + b^2ny = b^3p$ (S. 248 Z. 17) und startet mit einer Erweiterung von deren Bruchdarstellung (ebd., Z. 17).

Et multiplicando per crucem:

$$\begin{array}{l}\theta\lambda\delta g^2v^2+\theta\lambda\delta\mu gyv+\theta\lambda\delta c^2gv+\lambda\delta l\theta gyv+\lambda\delta bm\theta gv,\\ +\lambda\delta g\theta\mu yv+\lambda\delta\theta\mu^2y^2+\lambda\delta c^2\theta\mu y+\lambda\delta l\theta\mu y^2+\lambda\delta bm\theta\mu y,\\ +\lambda\delta g\theta c^2[v]+\lambda\delta\mu\theta c^2y+\lambda\delta c^4\theta+\lambda\delta l\theta c^2y+\lambda\delta bm\theta c^2\\ \sqcap -\delta n\lambda\theta b^2y+\delta bp\lambda\theta b^2\end{array}$$

Ab hac aequatione auferatur aequatio ipsius y^2 valorem assumtum eximens, ducta in β^2b^3, seu $\beta^2b^3y^2 \sqcap \beta^2b^3gv, +\beta^2b^3\mu y+\ \beta^2b^3c^2$. Ut autem yv evanesceat, multipli ejus ponantur esse 0: Seu $\cancel{\theta}\ \cancel{\lambda}\ \cancel{\delta}\ \mu\ \cancel{g}+\cancel{\lambda}\ \cancel{\delta}\ l\ \cancel{\theta}\ \cancel{g}+\cancel{\lambda}\ \cancel{\delta}\ \cancel{g}\ \cancel{\theta}\ \mu, \sqcap 0$. Ergo erit $2\mu \sqcap -l$ seu $\mu \sqcap -\frac{l}{2}$. Quo in locum prioris substituto, ordinataque aequatione, fiet:

$$\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{r}+\lambda\delta\theta\mu^2\ \ y^2\\ -\beta^2b^3\end{array}\right.\\ \hline -\theta\lambda\delta g^2\end{array}
\odot
\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{r}+\lambda\delta c^2\theta\mu\ \ y\\ +\lambda\delta bm\theta\mu\\ +\lambda\delta\mu\theta c^2\\ +\lambda\delta l\theta c^2\\ +\beta^2b^3m\\ +\delta n\lambda\theta b^2\end{array}\right.\\ \hline -\theta\lambda\delta g^2\end{array}
☽
\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{r}+\lambda\delta g\theta c^2\ \sqcap\ v^2\\ +\lambda\delta c^4\theta\\ +\lambda\delta bm\theta c^2\\ +\beta^2b^3c^2\\ -\delta bp\lambda\theta b^2\end{array}\right.\\ \hline -\theta\lambda\delta g^2\end{array}
\begin{array}{r}\left\{\begin{array}{r}-\theta\lambda\delta c^2g\ \ v\\ -\lambda\delta bmg\theta\\ -\beta^2b^3g\end{array}\right.\\ \hline [-]\theta\lambda\delta g^2\end{array}$$

comparando cum $\quad \mp\frac{r}{t}\ y^2 \qquad +2r\ \ y \qquad +2re \sqcap v^2 \qquad +2k\ \ v.$

$$\mp\frac{2r}{t}e \qquad \mp\frac{r}{t}e^2$$

1 Et ... crucem. *erg.* *L* 4 f. $\lambda\delta\mathrm{bm}\theta\mathrm{c}^2$ *(1)* $+\lambda\delta$ *(2)* $\sqcap -\delta\mathrm{ny}+\delta\mathrm{bp}\ \boxed{-\mathrm{y}\ \langle\mathrm{b}+\rangle\ \frac{\beta^2}{\cancel{g^2}}\ \langle\delta\theta\rangle\ \mathrm{b}^3\mathrm{gv}}\ \sqcap$ *(3)* $\sqcap\ \boxed{-\beta^2\mathrm{b}^3\mathrm{y}^2-\beta^2\mathrm{b}^3\mu\mathrm{y}+\beta^2\mathrm{b}^2\mathrm{c}^2}$ *(4)* $\sqcap -\delta\mathrm{n}\lambda\theta\mathrm{b}^2\mathrm{y}$ *L* 6 auferatur *(1)* multip *(2)* aeqvatio *L* 7 $+\,|\,\beta^2\mathrm{b}^3\mathrm{my}$ *ändert Hrsg.* $|+$ *L* 7 $+\beta^2\mathrm{b}^3\mathrm{c}^2$ *(1)* Ordinandoqve fiet: ⟨— —⟩ *(2)* ut *L*

10–16 $+\lambda$ ... $\sqcap$ ... v: Die Gleichung weist einige Fehler auf, die zum Teil aus vorangegangenen Flüchtigkeiten folgen. So fehlt der Term $+\lambda\delta l\theta\mu y^2$ zur Gänze, im Term $\beta^2b^3\mu y$ steht an der Stelle des μ ein m, dem Term $\lambda\delta g\theta c^2v$ fehlt das v, weswegen er falsch eingeordnet ist, und dem Term $-\lambda\delta bmg\theta v$ ist das θ abhanden gekommen. Diese und weitere Flüchtigkeitsfehler belasten die Folgerungen bis S. 263 Z. 2. 17 f. $\mp\frac{r}{t}$ ... $\sqcap$ ... v: In dieser Gleichung fehlt auf der linken Seite der Term $-k^2$.

Erit: $\theta\lambda\delta g^2 \sqcap \dfrac{\lambda\delta\theta\mu^2 - \beta^2 b^3}{\pm\dfrac{r}{t}}$. Ex Aeq. 1. $\dfrac{\beta^2 b^3}{\theta\lambda\delta \cancel{g^2}} \sqcap + \dfrac{\mu^2}{\cancel{g^2}} \mp \dfrac{r g^2}{t \cancel{g^2}}$.

$\sqcap \odot$

$$+2c^2\mu + bm\mu - lc^2 + nb^2 + \frac{\beta^2 b^3 m}{\delta\lambda\theta g^2} \sqcap -2r \pm \frac{2r}{t} e.$$

Aequatio initialis multiplicatione per crucem facta:

$$\begin{array}{cccccccccc}
\dfrac{-l^2}{\boxed{-4g^2}} & y^2 & \dfrac{-bml}{\boxed{-2g^2}} & y & \dfrac{-b^3 p}{\boxed{-g^2}} & \sqcap & \cancel{-g^2} & v^2 & -\dfrac{bm\cancel{g}}{-g^{\cancel{2}}} & v \qquad \odot \\
 & & \dfrac{+b^2 n}{\boxed{-g^2}} & & & & & & & \\
\hline
-\dfrac{\beta}{b} & \ldots & -\dfrac{\beta}{b} l & \ldots & & & & & -\dfrac{\beta}{b}\cancel{l} g & \ldots \qquad ☽ \\
\hline\hline
\mp\dfrac{r}{t} & y^2 & +2r & y & +2re & \sqcap & & v^2 & +2k & v \\
 & & \mp\dfrac{2r}{t} e & & \mp\dfrac{r}{t} e^2 & & & & & \\
 & & & & -k^2 & & & & &
\end{array}$$

Ponatur secundus terminus abesse, et aequatio initialis $\odot$ divisa per g^2 ante additionem novae, ☽. habebimus: $\beta \sqcap \pm \dfrac{rb}{t}$. Item $e \sqcap \dfrac{-\dfrac{b^2 n}{g^2} - 2r}{\mp\dfrac{2r}{t}}$, item $e^2 \mp 2te + t^2 \sqcap \dfrac{b^3 p}{g^2} + t^2 + k^2$

4 $\sqcap$ | $-\mathrm{g}^2\mathrm{v}^2 - \dfrac{\mathrm{bm}\cancel{\mathrm{g}}}{\mathrm{g}^{\cancel{2}}}$ *ändert Hrsg.* | v *L* 10 et *(1)* omnia divisa per g^2, *(2)* aeqvatio *L*

3 Aequatio initialis: Diese Gleichung findet sich in S. 249 Z. 4 f. Leibniz setzt in ihr nun $c = 0$.

11 $e^2 \ldots \sqcap \ldots k^2$: Leibniz vergisst, auch die Terme $\dfrac{b^3 p}{g^2}$ und k^2 mit $\mp\dfrac{t}{r}$ zu multiplizieren. Hierunter und unter einer Anzahl weiterer Fehler leiden die Schlussfolgerungen bis S. 264 Z. 3.

fiet ${}^{+}\!\mp e \mp^{+} t \sqcap \sqrt{\dfrac{+b^3p}{g^2}+t^2+k^2}$ vel $\sqcap\ {}^{+}\!\pm\dfrac{b^2n}{g^2}\ {}^{+}\!\pm 2r \mp^{+} t$. Et quadrando utrobique fiet: $+\dfrac{b^4n^2}{g^4}+\dfrac{4b^2nr}{g^2}\pm\dfrac{2b^2nt}{g^2}+4r^2\pm 4rt+\cancel{t^2}\sqcap\dfrac{+b^3p}{g^2}+\cancel{t^2}+k^2$, sive $+b^4n^2-4b^2nrg^2\pm 2b^2ntg^2+4r^2g^4\pm 4rtg^4-b^3pg^2\sqcap 0$. Sive $g^4 \left\{\begin{array}{l} -b^2nr \\ \pm b^2nt \\ -b^2bp \end{array}\right.$ $\dfrac{}{+4r\pm 4rt-k^2}$ $g^2\sqcap\dfrac{-b^4n^2}{+4r\pm 4rt-k^2}$.

Jam $k^2\sqcap\dfrac{b^2m^2}{4g^2}$. $k\sqcap\dfrac{-bm-\dfrac{\beta}{b}(\mp\dfrac{r}{t})}{2g}$. Ergo $k^2\sqcap\dfrac{b^2m^2}{g^2}\pm\dfrac{2bmr}{t}+\dfrac{r^2}{t^2}g^2$.

Ponamus nunc l. non tolli, eo casu satius est fortasse differri divisionem per g^2 usque dum ☽ accesserit. Ita jam $g^2\sqcap\dfrac{+\dfrac{l^2}{4}+\beta b}{\mp\dfrac{r}{t}}$, item $g^2\sqcap\dfrac{-\dfrac{bml}{2}+b^2n-\beta bl}{-2r\pm\dfrac{2r}{t}e}$. Ergo $+2rl+2\beta br\mp\dfrac{2l^2re}{4t}\mp\dfrac{2br}{t}\beta e\sqcap\mp\dfrac{rbmt}{2r}\pm\dfrac{rb^2n}{t}\mp\dfrac{rbl}{t}\beta$. Item $g^{\cancel{2}}\sqcap\dfrac{+bm+\beta b}{2k}$. Ergo

1 fiet *(1)* $\mp$e $\sqcap$ *(2)* $\sqcap$ *(3)* ${}^{+}\!\mp$e *L* 2 $+k^2$ *erg. L* 3 f. $\dfrac{-b^4n^2}{+4r\pm 4rt-k^2}$ *(1)* $k^2\sqcap b^2m^2$ *(2)* jam *L*

4 f. $+\dfrac{r^2}{t^2}g^2$ | Unde $\begin{array}{l}+4r\\ \pm 4rt\end{array}$ g^4 $\begin{array}{l}-b^2nr\\ \pm b^2nt\\ -b^2bp\\ -\dfrac{b^2m^2}{4}\end{array}$ $g^2\sqcap -b^4n^2$, sive $g^4 \left\{\begin{array}{l}-b^2nr\\ \pm b^2nt\\ -b^2bp\\ -\dfrac{b^2m^2}{4}\end{array}\right.$ $\dfrac{}{+4r\pm 4rt}$ $g^2\sqcap -b^4n^2$ *gestr.* | Ponamus *L*

1 ${}^{+}\!\pm\dfrac{b^2n}{g^2}\ {}^{+}\!\pm 2r$: Der Nenner des Doppelbruchs aus der Zeile zuvor, also $\mp\dfrac{2r}{t}$, ist hier verlorengegangen.
3 Sive: Die Umformung ist – wie bereits die vorangehende – in mehrfacher Hinsicht missglückt. 4 Ergo: Bei diesem Schritt geht der Faktor 2 aus dem Nenner verloren. 6 Ergo: Die Kreuzmultiplikation der beiden rechten Seiten der Gleichungen für g^2 in der nächsten Zeile ist nicht korrekt ausgeführt.
7 Ergo: Leibniz setzt in diesem Schritt den Wert von g^2 anstelle desjenigen von g ein.

$$\frac{2k}{\mp\frac{r}{t}} \sqcap \frac{bm+\beta b}{+\frac{l^2}{4}+\beta b} \text{ item } g^2 \sqcap \frac{b^2m^2+2b^2m\beta+\beta^2b^2}{4k^2}.$$

$$4k^2 \sqcap \frac{r^2}{t^2} \frown \frac{b^2m^2+2b^2\beta m+\beta^2b^2}{+\frac{l^4}{16}+\frac{2l^2\beta b}{4}+\beta^2b^2}$$

Et rursus $g^2 \sqcap \dfrac{b^3p}{-2re \pm \frac{r}{t}e^2+k^2}$. Ergo $\dfrac{1}{4}\quad \dfrac{-2re \pm \frac{r}{t}e^2}{4k^2} \sqcap \dfrac{b^3p}{b^2m^2+2b^2m\beta+\beta^2b^2}$.

$$\begin{array}{llll}
\boxed{+\frac{l^2}{4}\;y^2} & +\frac{bml}{2}\quad y & +\frac{b^3p}{\boxed{g^2}} \sqcap g^2\; v^2 & +\frac{bmg}{\boxed{g^{\cancel{2}}}}\quad v \\
 & \frac{-b^2n}{\boxed{g^2}} & & \\
 & -\frac{l^3}{8} & &
\end{array}$$

explicetur $\dfrac{\frac{l^2}{4}y^2}{g^2}$, fiet $\dfrac{\frac{l^2}{4}\cancel{g}v-\frac{l^3}{8}\cancel{g}y}{g^{\cancel{2}}}$

$$\begin{array}{llll}
\beta\; y^2 & +\frac{\beta l}{2}\quad y & \frac{\beta g}{\boxed{g^2}} & \ldots \\
 & & & \\
\mp\frac{r}{t}\; y^2 & +2r\quad [y] & v^2 & +2k\quad v \\
 & \mp\frac{r}{t}e^2 & & \\
 & -k^2 & &
\end{array}$$

1 f. $\dfrac{\mathrm{b^2m^2+2b^2m\beta+\beta^2b^2}}{\mathrm{4k^2}}$ | Ergo g^2 *erg. u. gestr.* | $4\mathrm{k}^2 \sqcap$ *L* 4 explicetur *(1)* $\dfrac{\mathrm{l}^2}{4}\mathrm{y}^2$, dabit $\mathrm{y}^2+\dfrac{\mathrm{l}}{2}\mathrm{y}$ *(2)* $\dfrac{\frac{\mathrm{l}^2}{4}\mathrm{y}^2}{\mathrm{g}^2}$ *(a)* | dabit *streicht Hrsg.* | *(b)* fiet *L*

3 rursus: Die folgende Gleichung weist einen Vorzeichenfehler auf. 4–266,12 Auch die folgenden, nicht erläuterten Ansätze weisen Übertragungs- und Vorzeichenfehler sowie gedankliche Unklarheiten auf. Diese bleiben aber folgenlos, da alle Ansätze schnell abbrechen.

$$\frac{-bm+\beta g}{\cancel{g^2}}v \sqcap \begin{matrix}-bm\\+\beta g\end{matrix}\,y^2 \begin{matrix}-bm\\+\beta g\end{matrix}\,y.$$ Unde fiet

$$\begin{matrix} +\frac{l^2}{4} & y^2 & +\frac{bml}{2} & y & +\frac{b^3p}{g^2} & \sqcap & v^2 \\ -\beta b & & -b^2n & & & & \\ -bm & & -\frac{\beta l}{2} & & & & \\ \frac{+\beta g}{g^2} & & -bmg & & & & \\ & & \frac{+\beta g}{g^2} & & & & \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mp\frac{r}{t} & y^2 & +2r & y & +2re & \sqcap & v^2 \\ & & \mp\frac{2r}{t}e & & \mp\frac{r}{t}e^2 & & \end{matrix}$$

$$\frac{\frac{l^2}{4}-\beta b-bm+\beta g}{\mp\frac{\cancel{r}}{t}} \sqcap \frac{\frac{bml}{2}-b^2n-\frac{\beta lb}{2}-bmg+\beta bg}{+2\cancel{r}\mp\frac{2\cancel{r}}{t}e}$$

fiet $b\alpha\beta+\gamma be+\theta be \sqcap b^2\delta+\beta b\lambda+\mu bg+\mu\beta g$

$g \sqcap \dfrac{ba\beta+\gamma be+\theta be-b^2\delta-\beta b\lambda}{\mu b+\mu\beta}$, et $g^2 \sqcap$ [*bricht ab*]

Esto Conicae datae aequatio [*bricht ab*]

Loco $\dfrac{b}{\cancel{z-b}}$ [*bricht ab*]

[*Gleichung ohne erkennbaren Bezug zum Stück*]

$$qba+qra+\frac{d}{q}a+faq \sqcap \frac{bed\cancel{\phi}+bef\cancel{\phi}+bdf\cancel{\phi}+cdf\cancel{\phi}}{\cancel{\phi}q}$$

10 *(1)* $g^2 \sqcap \dfrac{\frac{l^2}{4}-\beta b-bm}{\mp\frac{r}{t}}$ *(2)* $\dfrac{\frac{l^2}{4}-\ldots}{\mp\frac{\cancel{r}}{t}}$ *L* 13 Esto *(1)* aeqvationis *(2)* Conicae *L*

26. AEQUATIO SOLIDA III
[Juli – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 69 u. 76. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 854 C

Datierungsgründe: Vgl. N. 24.

Esto Aequatio:

$$x^2 + dx \sqcap \mp \frac{r}{t} y^2 + ey + rc$$

Quaeritur: ejus locus ad quam sit Conicam Sectionem, et quomodo illa describi queat? Ponatur $x \sqcap v - \dfrac{d}{2}$, fietque aequatio:

$$v^2 \boxed{-dv} + \frac{d^2}{4} \boxed{+dv} - \frac{d^2}{2} - rc \sqcap \mp \frac{r}{t} y^2 + ey$$

$$\text{vel} \quad \mp \frac{r}{t} y^2 + ey + \begin{array}{l} \dfrac{d^2}{4} \\ + rc \end{array} \sqcap v^2$$

Si non alia quam ista methodo in reducendo utamur, tunc alterutram, aut *d*. aut *e*. necesse est non esse determinatam, ut a Sectione Conica data in parabola determinari possit.

---

9 f. aeqvatio: *(1)* $v^2 - dv + \dfrac{d^2}{4} + dv - \dfrac{d^2}{2}$ *(a)* $\sqcap \mp \dfrac{r}{t} y^2 + ey + rc$ *(b)* $-rc$ *(aa)* $\sqcap y^2 \mp \dfrac{rey}{t}$ *(bb)* $\sqcap y^2 \mp \dfrac{t}{r} ey$. *(aaa)* item ponatur $\mp \dfrac{r}{t}$ *(bbb)* Ponatur iterum $y \sqcap w \pm \dfrac{r}{2t} e$, *(aaaa)* fietqve *(bbbb)* et loco $y^2 \mp \dfrac{r}{t} ey$, fiet, *(aaaaa)* $w^2 \pm \dfrac{r}{t} ew + \dfrac{r^2}{4t^2} e^2 \mp \dfrac{r}{t} ey$ *(bbbbb)* $w^2 \pm \dfrac{t}{r} ew + \dfrac{t^2}{4r^2} e^2 \mp \dfrac{t}{r} ew - \dfrac{t^2}{2r^2} e^2$ habebiturqve aeqvatio *(aaaaaa)* $v^2 \begin{array}{l} -\dfrac{d^2}{4} \\ -rc \\ \dfrac{r}{\langle 4 \rangle t} e^2 \\ \langle - \rangle \end{array} \Bigg\} \frown \Bigg\{ \begin{array}{l} \langle \pm \dfrac{1}{4} \rangle \\ \langle \pm \dfrac{1}{2} \rangle \end{array}$ *(bbbbbb)* $v^2 \begin{array}{l} \dfrac{-d^2}{2} \\ -rc \\ \pm \dfrac{r}{4t} e^2, \frown \langle \pm \dfrac{1}{4} + \dfrac{1}{2} \rangle \\ \dfrac{\langle r \rangle}{2t} e^2 \end{array} \sqcap \mp w^2$ qvoniam *(2)* $v^2 \boxed{-dv}$ *L*

13 f. data *(1)* (in parabola) *(2)* in parabola ... possit. | in *streicht Hrsg.* | *L*

Ut vero jam et terminus pure cognitus evanescat, ponamus, $y \sqcap w+\mu$. habebimusque $\ddagger\frac{r}{t}w^2 \ddagger \frac{2r}{t}\mu w \ddagger \frac{r}{t}\mu^2, +ew+e\mu$, eritque $\ddagger\frac{r}{t}\mu^2+e\mu \sqcap -\frac{d^2}{4}-rc$. ac proinde $\mu^2 \ddagger \frac{t}{r}e\mu+\frac{t^2e^2}{4r^2} \sqcap -\frac{td^2}{4r}-\frac{t\cancel{r}c}{\cancel{r}}+\frac{t^2e^2}{4r^2}$, ac denique ${}^{+}\!\ddagger\mu \sqcap \sqrt{-\frac{td^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}^{+} \frac{te}{2r}$, sive $\mu \sqcap {}^{+}\!\ddagger\sqrt{-\frac{td^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}$. Et aequatio inventa erit:

$$v^2 \sqcap \ddagger\frac{r}{t}w^2 \ddagger^{+}\frac{2r}{t}\sqrt{-\frac{td^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\;w\ \boxed{-ew+ew}$$

Res memorabilis hic evenit observanda in hoc calculo infinitorum, primum in isto valore $\mu \sqcap {}^{+}\!\ddagger\sqrt{-\frac{dt^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}$ $\quad -\frac{dt^{[2]}}{4r}-tc$, quae comparatione ipsius $+\frac{t^2e^2}{4r^{[2]}}$ infinite parva sunt rejici non debere, quia ipsis rejectis, restaret ${}^{+}\!\ddagger\sqrt{\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}$, seu ${}^{+}\!\ddagger\frac{te}{2r}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}$, quae in parabola explicando $\ddagger$ per $+$ se destruerent. Non ergo parva illa rejicienda sunt, si illis rejectis majora se destruerent. Alia hic observatio surgit, procedente operatione apparuit $\underline{\ddagger}\frac{te}{2r}$, ductum in $\ddagger\frac{2r}{t}w$, devenire $-ew$, et destrui contra aliud $+ew$ quod jam

4 $\mu \sqcap$ *(1)* ${}^{+}\!\ddagger\sqrt{-\frac{td^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}$ *(2)* | $\sqrt{{}^{+}\!\ddagger\sqrt{-\frac{td^2}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r^2}}\ \underline{\ddagger}\,\frac{te}{2r}}$ *ändert Hrsg.* | *L*

5 f. $\boxed{+ew-ew}$ *(1)* rectius, et ut parabolae qvoqve accomodare facilius possumus ex aeqvatione $\ddagger\frac{r}{t}\mu^2+e\mu \sqcap -\frac{d^2}{4}-rc$. *(a)* valorem parabolae ita effi *(b)* valorem ipsius μ ita inveniemus: $\ddagger\frac{r}{t},\frown\mu^2+e\mu+\frac{e^2}{4} \sqcap -\frac{d^2}{4}-rc+\frac{e^2}{4}$. Unde *(aa)* $\sqrt{\ddagger}$ *(bb)* $\mu\sqrt{\ddagger\frac{r}{t}}+e \sqcap \sqrt{\frac{d^2}{4}-rc+\frac{e^2}{4}}$ *(2)* Res *L* 7 $\mu \sqcap$ | ${}^{+}\!\ddagger\sqrt{-\frac{dt}{4r}-tc+\frac{t^2e^2}{4r}}$ *ändert Hrsg.* | *(1)* minora *(2)* $\underline{\ddagger}\frac{te}{2r}$ *L* 8 rejectis, *(1)* posset *(2)* restaret *L*

3 $-\frac{td^2}{4r}-\frac{t\cancel{r}c}{\cancel{r}}+\frac{t^2e^2}{4r^2}$: Rechnerisch richtig ist $\underline{\ddagger}\frac{td^2}{4r}\ \underline{\ddagger}\,\frac{t\cancel{r}c}{\cancel{r}}+\frac{t^2e^2}{4r^2}$. Der Vorzeichenfehler belastet die weiteren Berechnungen bis S. 269 Z. 2.

in calculo aliunde extat. Sed ita ingens oritur incommoditas, ita enim $-\dfrac{td^2}{4r} - tc$, rejici possunt, ut et $\ddagger \dfrac{r}{t} w^{[2]}$ et fit aequatio $\langle v\rangle^2 \sqcap \dagger\!^{+} \dfrac{te}{4r}$, quod est absurdum, unde patet infinite parva magnaque sese mutuo integrantia divelli tuto non posse, ideoque ad ea connectenda vinculo esse opus; si scilicet ex radicum extractione orta sunt.

Caeterum satius est fortasse valorem ipsius μ, hac aequatione, $\ddagger \dfrac{r}{t}\mu^2 + e\mu \sqcap -\dfrac{d^2}{4} - rc$, exprimere, quando quidem si ad parabolam applicare velimus, ille ipse valor restituendus est. Sin velimus exprimere valorem ipsius μ in aequatione adhibito vinculo ita faciemus:

$$\left(\ddagger \frac{2r}{t}\mu \sqcap \dagger\!^{+} \frac{2r}{t}\sqrt{-\frac{d^2}{2} - rc + \frac{t^2e^2}{4r^2}} - e\right) w \ddagger \frac{r}{t} w^2 \sqcap v^2$$

Inventa ergo est Sectio Conica, ad quam est locus datus, nimirum ejus latus rectum est $\ddagger \dfrac{r}{t}\ \mu + e$. Ratio autem lateris recti ad transversum $\dfrac{r}{t}$. Ergo ponendo transversum β, erit $\dfrac{\beta}{\mu + e} \sqcap \dfrac{t}{r}$, eritque: $\beta \sqcap \dfrac{t\mu + te}{r}$.

Ponatur vero viceversa, Sectio ista Conica jam esse data. Quaerique tantum an non indeterminatae ab initio assumtae, $d.\,e.\,c.$ determinentur, Respondeo determinari ex ipsis non nisi unam, quia non nisi una reperitur aequatio $\mu + e \sqcap$ lateri recto sectionis Conicae datae ergo in nostra est potestate quam ex omnibus velimus, ea aequatione determinari. Caeterum invenimus $\ddagger \dfrac{2r}{t}\mu + e \sqcap a$. et habuimus $\ddagger \dfrac{r}{t}\mu^2 + e\mu \sqcap -\dfrac{d^2}{4} - rc$. vel $\mu \sqcap$

1 incommoditas, *(1)* fiunt enim *(2)* ita *L* 2 possunt, *(1)* et fit *(2)* ut *L* 6 parabolam *(1)* redire *(2)* applicare *L* 10 $\ddagger \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *erg. L* 11 erit *(1)* $\frac{\mu + \mathrm{e}}{\beta} \sqcap$ *(2)* $\frac{\beta}{\mu + \mathrm{e}}$ *L* 15 f. determinari. *(1)* Qvam vero determinationem compensare facile est, ponamus enim *(a)* e. g. f *(b)* exempli causa *(aa)* f + g, ⟨aliam⟩ e *(bb)* f + g $\sqcap$ c. atqve ita c, *(aaa)* habi *(bbb)* determinato, alterutra tantum assumtarum, nempe vel f vel g, id est earum summa tantum determinata erit. *(2)* Caeterum invenimus *(a)* $\ddagger\mu$ *(b)* $\ddagger \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mu$ *(c)* $\ddagger \frac{2\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mu$ *L*

2 aequatio: Konsequent gerechnet ergäbe sich $v^2 = \dagger\!^{+} \dfrac{2r}{t}\sqrt{\dfrac{t^2e^2}{4r^2}}\,w = \dagger\!^{+} ew$. 16 $\ddagger \dfrac{2r}{t}\mu$: Den nachträglich eingeführten Faktor 2 vernachlässigt Leibniz in den Umformungen bis S. 270 Z. 5.

$\mp\frac{t}{r}a \pm \frac{t}{(2)r}e$. NB. imo potius $\mu \sqcap \mp\frac{t}{2r}a \pm \frac{te}{2r}$. Ergo $\mu^2 \sqcap \frac{t^2}{r^2}a^2 - 2\frac{t^2}{r^2}ae + \frac{t^2e^2}{r^2}$ ergo $\mp\frac{r}{t}\mu^2 \sqcap \mp\frac{t\cancel{2}}{r\cancel{2}}a^2 \pm \frac{2t\cancel{2}}{r\cancel{2}}ae \mp \frac{t\cancel{2}e^2}{r\cancel{2}}$, et $e\mu \sqcap \mp\frac{eta}{r} \pm \frac{te^2}{r}$.

Ergo $\mp\frac{t}{r}a^2\ \boxed{\boxed{\pm\frac{2tae}{r}}}\ \boxed{\mp\frac{t}{r}e^2}\ \boxed{\boxed{\mp\frac{eta}{r}}}\ \pm\frac{tae}{r}\ \boxed{\pm\frac{te^2}{r}} \sqcap -\frac{d^2}{4}\ \boxed{-rc} - rf - rg$.

In parabola autem statim manifestum est, ipsam $e \sqcap a$ esse. Ideoque utile est determinari ipsam e semper, ut universalis sit calculus. Ita $e \sqcap \dfrac{-\frac{d^2}{4} - rc \pm \frac{t}{r}a^2}{\pm\frac{ta}{r}}$. Ut autem possimus g pro arbitrio assumere, et facilior fiat constructio, tantum, opus est loco x, sumi $z+f$, neque enim eam in rem ullo alio opus calculo separato sed non x verum y experiunda quia ibi e. At si $\mp\frac{r}{t}$ explices evanescent omnia inde orta in parabola. Quare hinc video non esse in potestate nostra ipsas g. et β. assumere pro arbitrio.

1 NB. ... $\frac{\mathrm{te}}{\mathrm{2r}}$ *erg.* *L* 5 Ita *(1)* | a *nicht gestr.* | sed *(2)* e *L* 7 sumi *(1)* z + f seu ⟨x⟩ *(2)* z + f *L* 7 sed *(1)* inde ⟨— — —⟩ parabolam, tunc *(2)* non *L* 8 si *(1)* $\mp \mathrm{y}^2$ *(2)* $\mp\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *L* 9–271,1 arbitrio *(1)* jam aeqvatio construenda est *(a)* $\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{bm}}{\mathrm{g}}$ x $\sqcap$ $\frac{-\mathrm{l}^2}{4\mathrm{r}^2}$ $\mathrm{y}^2 + \frac{\mathrm{bml}}{2}$ y + $\frac{\mathrm{b}^3\mathrm{p}}{\mathrm{g}^2}$ *(b)* $\mathrm{z}^2 + \frac{\mathrm{bm}}{\mathrm{r}}$ z $\sqcap$ *(c)*

$-\frac{\beta\langle\mathrm{l}\rangle}{\langle\mathrm{r}\rangle}\ldots \quad +\frac{\beta}{\mathrm{r}}\ldots + \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{n}}{\mathrm{r}^2}\ldots \quad -\beta\ \ldots$

$-\frac{\beta\mathrm{l}}{2\mathrm{r}}\ldots$

$\mathrm{x}^2 + \frac{\mathrm{bm}}{\mathrm{r}}$ x $\sqcap$ $\frac{-\mathrm{l}^2}{4\mathrm{r}^2}$ $\mathrm{z}^2 + \frac{\mathrm{bml}}{2\mathrm{r}^2}$ z + $\frac{\mathrm{b}^3\mathrm{p}}{\mathrm{g}^2}$ Et aeqvatio ad Sectionem Conicam datam est $\mathrm{x}^2 + \mathrm{dx} \sqcap \mp\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{z}^2$ *(2)*

$-\beta\ \ldots \quad +\frac{\beta}{\mathrm{r}}\ldots + \frac{\mathrm{b}^2\mathrm{n}}{\mathrm{r}^2}\ldots$

$-\frac{\beta\mathrm{l}}{2\mathrm{r}}\ldots$

Jam *L*

Jam Aequatio construenda est:

$$\begin{array}{llllll} x^2 + \dfrac{bm}{g}\ x & \sqcap & + \dfrac{l^2}{4g^2}\ y^2 & - \dfrac{bml}{2g^2}\ y & + \dfrac{b^3p}{g^2} \\ \quad - \dfrac{bg}{r}\ \ldots & & - \dfrac{\beta}{r}\ \ \ldots & - \dfrac{b^2n}{g^2}\ \ldots & \\ & & & + \dfrac{\beta l}{2r}\ \ldots & \end{array}$$

Et aequatio ad Sectionem Conicam datam, est:

$$x^2 + dx \sqcap \mp \frac{r}{t} y^2 + ey + rc$$

Ex lineis autem $b.\,m.\,l.\,p.\,r.\,t.\,e.$ datae sunt, quaeruntur vero $g.\,\beta.\,d.\,c.$ quae quatuor incognitae, ope quatuor aequationum collatitiarum, ita invenientur:

$\dfrac{\beta}{r} \sqcap \dfrac{l^2}{4g^2} \pm \dfrac{r}{t}$, item $\dfrac{\beta}{r} \sqcap \dfrac{e + \dfrac{bml + 2b^2n}{2g^2}}{\dfrac{l}{2}}$, ac proinde $\dfrac{l^3}{8g^2} \pm \dfrac{rl}{2t} \sqcap e + \dfrac{bml + 2b^2n}{2g^2}$, sive $\dfrac{-l^3 + 4bml + 8b^2n}{8g^2} \sqcap \pm \dfrac{rl}{2t} - e$. Habetur ergo valor ipsius g. Quare et valor ipsius β.

Jam $d \sqcap \dfrac{bm}{g} - \dfrac{bg}{r}$ et $c \sqcap \dfrac{b^3p}{g^2r}$.

Omnium ergo incognitarum habetur determinatio, ac proinde et constructio problematis.

Resumatur tantum calculus, erroris vitandi causa:

Aequatio data 4 dimensionum est: $y^4 + ly^3 + rmy^2 + r^2ny + r^3p \sqcap 0$. sive $y^2 \frown y^2 + ly \frown y^2 + rmy^2 + r^2ny + r^3p \sqcap 0$. Fiat $y^2 \sqcap gx - \dfrac{l}{2}y$ aequatio arbitraria, et substituatur

---

9 *Am Rande:* b mutetur in r.

7 autem | d, *gestr.* | b. *L* 10 $\dfrac{8g^2}{-l^3 + 4bml + 8b^2n}$ *L ändert Hrsg.* 16 aeqvatio arbitraria *erg. L*

---

16 $y^2 \sqcap gx - \dfrac{l}{2}y$: Diesen Ansatz verfolgt Leibniz auch in S. 286 Z. 9 – S. 287 Z. 4.

hic valor ipsius y^2, in ejus locum, fiet: $y^2 \frown y^2 \sqcap g^2x^2 - glxy + \dfrac{l^2}{4}y^2$, item fiet: $ly \frown y^2 \sqcap glxy - \dfrac{l^2}{2}y^2$, et $rmy^2 \sqcap rmgx - \dfrac{rml}{2}y$. Caetera: $r^2ny + r^3p$ manent, sublatisque quae se destruunt, omnibusque divisis per g^2 habebimus:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & & +\dfrac{rml}{2g^2} & y & & \\[2ex]
x^2 & +\dfrac{rm}{g} & x \sqcap & \boxed{\boxed{+\dfrac{l^2}{4g^2}\; y^2}} & -\dfrac{r^2n}{g^2} & y & -\dfrac{r^3p}{g^2} & \\[2ex]
\hline
 & \boxed{-\dfrac{l^2}{4g}} & x & & \boxed{-\dfrac{l^3}{8g^2}} & y & & \\[2ex]
\hline
 & -g & & -y^2 & -\dfrac{l}{2} & y & & \\[2ex]
 & \mercury & & & \venus & & &
\end{array}$$

quae primae lineolae superstant. Explicetur $+\dfrac{l^2}{4g^2}y^2$, circulo duplicato inclusum, substituaturque in ejus locum circulis simplicibus inclusa inter 2 lineolas: tandemque a secundo subtrahatur aequatio arbitraria, seu quae infra lineolam. Producta aequatio erit ad circulum. Hujus circuli ut radium inveniamus caeterasque rectas ad constructionem necessarias, ponatur $x \sqcap s - \dfrac{\mercury}{2}$, fiet aequatio $s^2 \sqcap -y^2 + \venus y - \dfrac{\mercury^2}{4} - \dfrac{r^3p}{g^2}$.

Ponatur porro $y \sqcap w + \lambda$, fiet $s^2 \sqcap -w^2 - 2w\lambda - \lambda^2, +\venus w + \venus\lambda - \dfrac{\mercury^2}{4} - \dfrac{r^3p}{g^2}$. Ponatur $-\lambda^2 + \venus\lambda \sqcap \dfrac{\mercury^2}{4} + \dfrac{r^3p}{g^2}$ (sive $\lambda \sqcap \sqrt{-\dfrac{\mercury^2}{4} - \dfrac{r^3p}{g^2} + \dfrac{\venus^2}{4}} + \dfrac{\venus}{2}$), et destructione facta,

2 $\mathrm{r^2ny + r^3p}$ manent, *(1)* destructisq *(2)* sublatisqve *L* 3 omnibusqve ... $\mathrm{g^2}$ *erg. L* 4 $+\dfrac{\mathrm{rml}}{\mathrm{2g^2}}\mathrm{y}$ *erg. L* 12 caeterasqve *(1)* lineas *(2)* rectas *L* 14 $-2\mathrm{w}\lambda + \lambda^2$ *L ändert Hrsg.* 15 $+\lambda^2 + \mercury\lambda$ *L ändert Hrsg.* 15 (sive $\lambda \sqcap \sqrt{\dfrac{\mercury^2}{4} + \dfrac{\mathrm{r^3p}}{\mathrm{g^2}} + \dfrac{\venus^2}{4}} - \dfrac{\venus}{2}$) *erg. L, ändert Hrsg.*

restabit: $s^2 \sqcap -w^2 - 2w\lambda + \text{♀}w$. Eritque radius circuli $\frac{2\lambda - \text{♀}}{2}$. Brevius, loco λ poterat poni $y \sqcap \varphi + \frac{\text{♀}}{2}$, fietque $s^2 \sqcap -\varphi^2 \boxed{-\varphi\text{♀}} - \frac{\text{☿}^{[2]}}{4} \boxed{+\text{♀}\varphi} + \frac{\text{♀}^2}{2} [-\frac{\text{☿}^2}{4}] - \frac{r^3p}{g^2}$ sive erit: $s^2 \sqcap -\varphi^2 \; \frac{-\text{☿}^2 + \text{♀}^2}{4} - \frac{r^3p}{g^2}$, et radius circuli $\sqrt{\frac{-\text{☿}^2 + \text{♀}^2}{4} - \frac{r^3p}{g^2}}$.

Aequationi prima interpretatione inventae: ☽ auferatur aequatio arbitraria ducta in $\frac{\beta}{r}$, fiet $\odot$ aequatio ad sectionem Conicam indefinitam. Satius est hic quoque explicare $+\frac{lr}{4g^2}$, ita β statim habetur et facile quoque habentur e. et g.

$$\odot \left\{ \begin{array}{l} \text{☽} \left\{ \begin{array}{llllllll} x^2 & +\frac{rm}{g} & x \sqcap & +\frac{l^2}{4g^2} & y^2 & +\frac{rml}{2g^2} & y & -\frac{r^3p}{g^2} \\ & & & & & -\frac{r^2n}{g^2} & \ldots & \end{array} \right. \\ \hline \qquad\qquad -\frac{\beta}{r}g \;\ldots \qquad -\frac{\beta}{r} \;\ldots \quad -\frac{\beta}{2r}l \;\ldots \end{array} \right.$$

Conferatur aequatione ad Sectionem Conicam datam.

$$x^2 + dx \sqcap \mp\frac{r}{t}y^2 + ey + rc$$

Ex his literis, dantur r. t. l. m. n. p., et ut mox ostendam e. restant quaerendae β. g. d. c quem in finem et quatuor Aequationes collatitiae habentur. $\frac{\beta}{r} \sqcap \frac{l^2}{4g^2} \ddagger \frac{r}{t}$, item $\frac{\beta}{r} \sqcap \frac{\frac{rml - 2r^2n}{2g^2} - e}{\frac{l}{2}}$. Ergo $\frac{l^3}{\cancel{8g^2}} \ddagger \frac{4lrg^2}{t\,\cancel{8tg^2}} \sqcap \frac{4rml - 8r^2n - 8eg^2}{\cancel{8g^2}}$.

1 $-2w\lambda + \text{♀}\lambda$ *L ändert Hrsg.* 1 $\frac{\text{♀} - 2\lambda}{2}$ *L ändert Hrsg.* 3 circuli *(1)* $\sqrt{\frac{\text{♀}^2}{4} - \frac{r^3p}{g^2}}$ *(2)* $\sqrt{\frac{-\text{☿}^2 + \text{♀}^2}{4} - \frac{r^3p}{g^2}}$ *L* 4–6 *(1)* addatur *(2)* auferatur ... e. et g. *erg. L* 14–274,1 $\frac{4rml - 8r^2n - 8eg^2}{\cancel{8g^2}}$ *(1)* |sive *nicht gestr.*| $\frac{8g^2}{-l^3 + 4rml - 8r^2n} \sqcap \ddagger\frac{lr}{2t} + e$, sive $g^2 \sqcap \frac{\ddagger\frac{lr}{2t} + e \frown -l^3 + 4ml - 8r^2n}{8}$ *(2)* Inventa *L*

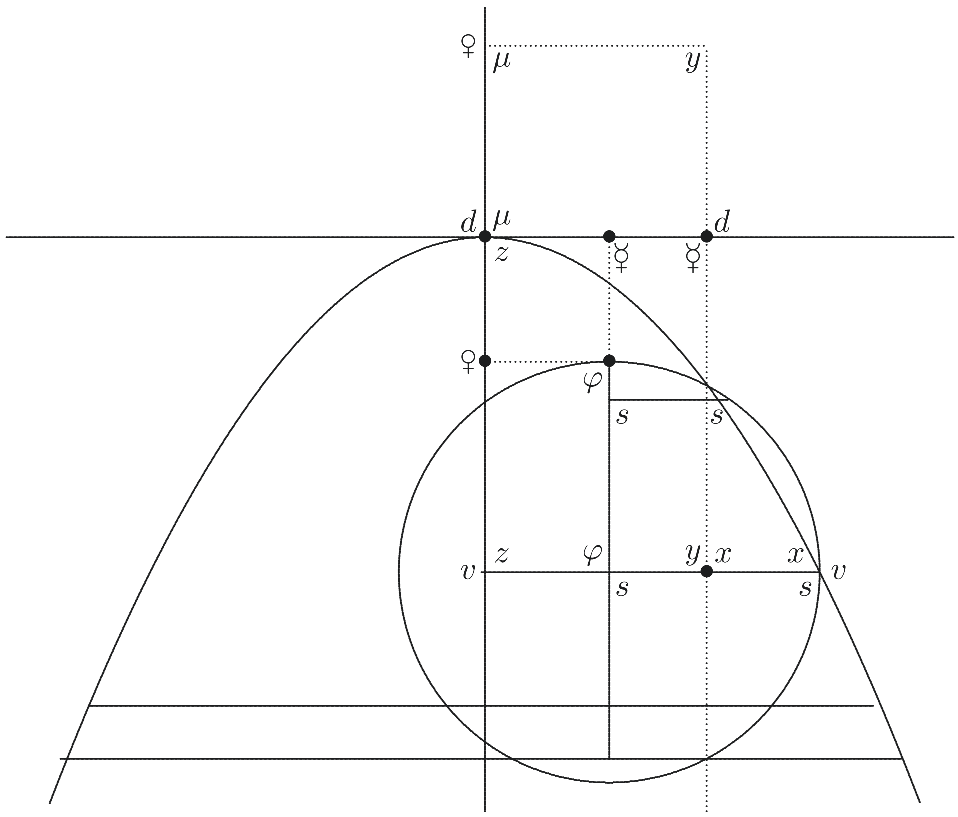
Inventa g. habetur et β quare per eas quae restant aequationes etiam d et c, habentur. Nam $d \sqcap \frac{rm}{g} - \frac{\beta g}{r}$ et $c \sqcap [-]\frac{r^2p}{g^2}$.

Restat ut ostendamus, quomodo $x^2 + dx \sqcap \mp\frac{r}{t}y^2 + ey + rc$. sit ad sectionem Conicam datam, ubi et e. determinabitur. Nimirum ponatur $x \sqcap v - \frac{d}{2}$. fiet $x^2 + dx \sqcap v^2 - dv + \frac{d^2}{4}, +dv - \frac{d^2}{2}$, et sublatis quae se destruunt, et cognito in alterum aequationis examinandae latus translato, fiet: $v^2 \sqcap \mp\frac{r}{t}y^2 + ey \begin{array}{l} +rc \\ +\frac{d^2}{4} \end{array}$ in qua aequatione nova ut terminum cognitum iterum destruamus, ponamus $y \sqcap z + \mu$ et pro $\mp\frac{r}{t}y^2 + ey$, habebimus $v^2 \sqcap \mp\frac{r}{t}z^2 \mp \frac{2r}{t}\mu z \mp \frac{r}{t}\mu^2 + ez + e\mu + rc + \frac{d^2}{4}$.

Nunc ergo ut termini cogniti orti, et priores se mutuo destruant, fiet $\mp\frac{r}{t}\mu^2 + e\mu \sqcap -rc - \frac{d^2}{4}$ et aequatio prodibit $v^2 \sqcap \mp\frac{r}{t}z^2 \left.\begin{array}{r} \mp\frac{2r}{t}\mu \\ + \quad e \end{array}\right\} z$, quae ut sit ad sectionem Conicam datam $2az \mp \frac{a}{q}z^2 \sqcap v^2$. Ideo erit: $\frac{r}{t} \sqcap \frac{a}{q}$, item $\mp\frac{2a}{q}\mu + e \sqcap 2a$. Quae ut jungatur priori $\mp\frac{r}{t}\mu^2 + e\mu \sqcap -rc - \frac{d^2}{4}$. faciemus $\mu \sqcap \mp\frac{\cancel{2}\cancel{a}q}{\cancel{2}\cancel{a}} \pm \frac{qe}{2a}$, et $\mu^2 \sqcap q^2 - \frac{q^2e}{a} + \frac{q^2e^2}{4a^2}$. Ergo $\mp aq \boxed{\pm qe} \mp \frac{qe^2}{[4]a}; \boxed{\mp eq} \pm \frac{qe^2}{2a} \sqcap -rc - \frac{d^2}{4}$, ideoque $e^2 \sqcap 4a^2 \frac{\mp 4arc \mp ad^2}{q}$. Habemus ergo valorem ipsius, e.

3 $r^2 + dx$ *L ändert Hrsg.* 4 fiet *(1)* $x^2 \sqcap v^2 - dv$ *(2)* $x^2 + dx \sqcap$ *L* 11 $\sqcap 2a$ *(1)* unde $+\frac{4a^2}{q^2}\mu^2 \mp \frac{4ae\mu}{q} + e^2 \sqcap 4a^2$. *(2)* qvae *L* 13 $e^2 \sqcap -2a^2 \frac{\pm 2arc \pm \frac{2ad^2}{4}}{q}$ *L ändert Hrsg.* 14–275,1 e. *(1)* habemus ergo sectionis *(2)* Nunc *(a)* sit *(b)* data *L*

Nunc data sectio Conica descripta intelligatur. Jam $z \sqcap y - \mu$, et $v \sqcap x + \frac{d}{2}$. Et jam supra in Circulo $y \sqcap \varphi + \frac{\text{♀}}{2}$, ergo $z \sqcap \varphi + \underbrace{\frac{\text{♀}}{2} - \mu}$. et quia in circulo $x \sqcap s - \frac{\text{☿}}{2}$, erit $v \sqcap s - \frac{\text{☿}}{2} + \frac{d}{2}$.



[*Fig. 1*]

⟨Res⟩tat adhuc invenire valorem absolutum linearum $d.\,g.\,e.\,c.\,\beta$ de quo scheda sequenti.

4 *Fig. 1*: Zwei verworfene Vorstufen der Abbildung sind nicht dargestellt. Die fertige Figur weist zudem einige hier nicht wiedergegebene Korrekturen auf. So löscht Leibniz die Benennung der Schnittpunkte der beiden parallellen Strecken am unteren Bildrand mit dem Kegelschnitt und ändert andere ab. Die dargestellten Strecken erfüllen die Gleichungen in Z. 1–3, sofern man in der Abbildung d durch $\frac{d}{2}$ ersetzt, ♀ durch $\frac{\text{♀}}{2}$ und ☿ durch $\frac{\text{☿}}{2}$. 5 f. scheda sequenti: Vgl. N. 27.

27. AEQUATIO SOLIDA IV
[Juli – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 70 u. 75. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 854 D

Datierungsgründe: Vgl. N. 24.

Esto Aequatio solida data, quae construenda proponitur,

$$y^4 \quad + ly^3 + bmy^2 + b^2ny + b^3p \sqcap 0$$

$$\text{sive} \quad y^2 \frown y^2 + ly \frown y^2 + bmy^2 + b^2ny + b^3p \sqcap 0.$$

Pro y^2 ponatur ejus valor pro arbitrio sumtus, ex a e q u a t i o n e a r b i t r a r i a hac,

$$gx + (\mu)y + \boxed{c^2} - y^2 \sqcap 0$$

H u n c v a l o r e m a r b i t r a r i u m voco, quoad literas $g.\,\mu.\,c.$ dimensiones vero incognitarum x et y arbitrariae non sunt, sed utiliter ita in valore arbitrario assumuntur, ut neutra earum ad altiorem quandam dimensionem, quadrati nempe aut cubi ascendat.

Substituendo hunc valorem ipsius y^2, in ejus locum, habebimus:

$$gx+\mu y+c^2, \frown gx+\mu y+c^2,, +ly \frown \llcorner gx+\mu y+c^2,, +bm \frown \llcorner gx+\mu y+c^2,, +b^2ny, +b^3p \sqcap 0$$

7 +bny *L ändert Hrsg.* 8 +bny *L ändert Hrsg.* 10 f. hac, *(1)* $y^2 \sqcap gx + \mu y + c^2$ *(2)* gx *L* 11 f. $\sqcap$ 0 *(1)* Nec vero alius | utiliter *erg.* | assumi potest, ut scilicet neutra incognitarum ultra radicem assurgat. *(2)* H u n c *L* 12 g. μ. c. *(1)* sed dimensiones incognitarum *(2)* dimensiones *L*

---

7 y^4+ly^3: Leibniz arbeitet mit der Gleichung aus S. 248 Z. 17 weiter. Zu dem im weiteren verfolgten Ansatz der Substitution von y^2 vgl. auch S. 286 Z. 9–12 sowie S. 316 Z. 25.

$$\text{sive}\quad \frac{1}{g^2}\frown\left\{\begin{array}{llllll} g^2x^2 & \boxed{\begin{array}{l}+2g\mu\ \ xy\\ +lg\end{array}} & +2gc^2\ \ x & \boxed{\boxed{\begin{array}{l}+\mu^2\ \ y^2\\ +l\mu\ \ \ldots\end{array}}} & \begin{array}{l}+2\mu c^2\ \ y\\ +lc^2\ \ \ldots\end{array} & +c^4\\ & & +bmg\ \ \ldots & & \begin{array}{l}+bm\mu\ \ \ldots\\ +b^2n\ \ \ldots\end{array} & \begin{array}{l}+bmc^2\\ +b^3p\end{array}\\ \hline & & \begin{array}{l}+\mu^2 g\ \ \ldots\\ +\mu gl\ \ \ldots\end{array} & & \begin{array}{l}+\mu^3\ \ \ldots\\ +l\mu^2\ \ \ldots\end{array} & \begin{array}{l}+\mu^2c^2\\ +l\mu c^2\end{array}\\ \hline & & -g\ \ \ldots & +\ y^2 & -\mu\ \ \ldots & -c^2 \end{array}\right\}\sqcap 0$$

$$\text{☽}\quad 0\sqcap\left\{\begin{array}{llllll} x^2 & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}\boxed{+2gc^2\ \ x}\\ +bmg\ \ \ldots\end{array}\right.}{g^2} & \boxed{-\dfrac{l^2}{4g^2}\ \ y^2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}-\dfrac{bml}{2}\ \ y\\ +b^2n\ \ \ldots\end{array}\right.}{g^2} & \dfrac{\left\{\begin{array}{l}\boxed{\begin{array}{l}+c^4\\ +bmc^2\end{array}}\\ +b^3p\end{array}\right.}{g^2}\\ & -\dfrac{\beta g}{r}\ \ldots & +\dfrac{\beta}{r}\ \ldots & +\dfrac{\beta l}{2r}\ \ldots & \boxed{-\dfrac{\beta}{r}c^2} \end{array}\right\}$$

Aequatio ad Sectionem Conicam indefinitam, conferenda cum aequatione ad datam:

$$0\sqcap\left\{\begin{array}{lllll} x^2 & +d\ \ x & \pm\dfrac{r}{t}\ \ y^2 & -\dfrac{r}{t}e\ \ \ y & \pm\dfrac{r}{t}h^2\\ & \boxed{+2f} & & \pm\dfrac{2rh}{t}\ \ \ldots & \boxed{+f^2}\\ & & & & \boxed{+df} \end{array}\right.$$

6 f. $-c^2$ | NB. non $-\frac{l^2}{4g^2}y^2$, sed $+\frac{l^2}{4g^2}y^2$ *gestr.* | ☽ *L* 9 *(1)* $+\frac{\beta g}{b}\ \ldots\ -\frac{\beta g}{b}\ \ldots\ -\frac{\beta l}{2b}\ \ldots\ -\frac{\beta}{b}c^2$ *(2)* $-\frac{\beta g}{r}\ \ldots\ +\frac{\beta}{r}\ \ldots$ | $-\frac{\beta l}{2r}\ \ldots$ *ändert Hrsg.* | $\boxed{-\frac{\beta}{r}c^2}$ *L*

Et in locum y^2 in aequatione producta, substituendo rursus ejus valorem, tunc loco eorum quae circulo duplicato inclusa sunt, adjicienda sunt, quae sub transversa linea collocata vides.

Et ut xy evanescat, pone $\mu \sqcap -\frac{l}{2}$. Atque ita invenimus quaenam ipsius μ determinatio utiliter assumi possit quod si jam ab hac aequatione producta auferatur arbitraria, l o c u s e j u s e r i t a d C i r c u l u m , adjectis scilicet illis quae vides infra lineolam secundam, et prioribus omnibus divisis per g^2. Nunc ut obtineatur aequatio ad sectionem Conicam indefinitam, resumatur ea quae ante secundam explicationem ipsius y^2, seu supra primam lineolam habita est; eique addatur a e q u a t i o a r b i t r a r i a , ducta in quantitatem quandam arbitrariam $-\frac{\beta}{r}$, et habebimus quod vides sub signo ☽.

Hanc a e q u a t i o n e m mox figura adhibita explicabimus.

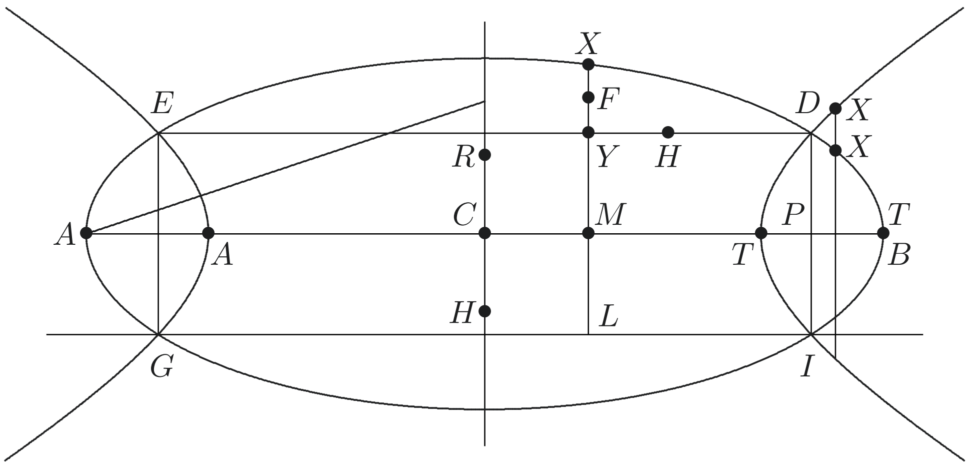
In hac aequatione ad sectionem Conicam datam, nihil datum est, praeter $r.$ et t, latera scilicet rectum et transversum, reliquae omnes literae numero septem, $g.\,\beta.\,c.\,d.\,e.\,f.\,h.$ sunt indeterminatae.

At vero non nisi quatuor sunt aequationes, quibus determinari possint, ergo tres ex iis sunt plane arbitrariae et a nobis ita pro lubitu assumi possunt, ut calculi commoditas exigit. Ergo ponamus: $c \sqcap 0.$ $f \sqcap 0$ et $g \sqcap r.$

Erit $\beta \sqcap \pm\frac{r^2}{t}+\frac{l^2}{4r}$, et $d \sqcap +\frac{bm}{r}-\beta.$ $h \sqcap \frac{b}{r}\sqrt{\mp\frac{bpt}{r}}.$ $e \sqcap \dfrac{-bml+2b^2n+\beta lr}{-\dfrac{2r^3}{t}} \pm 2h.$

2 duplicato *erg. L* 4 $\mu \sqcap \frac{1}{2}$ *L ändert Hrsg.* 10 arbitrariam *(1)* $\frac{\beta^2}{b^2}$ *(2)* | $\frac{\beta}{b}$ *ändert Hrsg.* |, et *L* 13 f. omnes *(1)* lineae *(2)* literae | numero septem *erg.* |, g. β. ... sunt *(a)* arbitrariae. Et jam ⟨—⟩ *(b)* indeterm *(c)* indeterminatae *L* 15 nisi *(1)* tres *(2)* qvatuor *L* 17 c $\sqcap$ 0. *(1)* f $\sqcap$ g $\sqcap$ r. *(2)* f $\sqcap$ 0 *L* 18 $\beta \sqcap \pm\frac{r^2}{t}$ *(1)* $+\frac{l^2 r}{4g^2}$ *(2)* $+\frac{l^2}{4r}$ *L* 18 $+\frac{bm}{r}-\beta$ *(1)* $\pm$h $\sqcap$ *(a)* $\frac{b}{r}$p *(b)* $\frac{bp}{}$ *(2)* h $\sqcap$ *(a)* $\frac{b}{r}\sqrt{\pm\frac{bpt}{r}}$ *(b)* $\frac{b}{r}\sqrt{\mp\frac{bpt}{r}}$ *L* 18 e $\sqcap \dfrac{+bml+2b^2n-\cancel{2}\beta lr}{-\dfrac{2r^3}{t}} \mp 2h$ *L ändert Hrsg.*

13 numero septem: Die Aufzählung ist unvollständig.



[*Fig. 1*]

Sit rectangulum $EDIG$ Ellipsi Hyperbolaeve inscriptum, (sub hoc autem nomine et parabolam comprehendo, velut lateris transversi infiniti) ita scilicet ut duo latera rectanguli ejus, ED. GI. axi sectionis parallela sint, centrum autem Rectanguli idem cum centro Figurae. Unius autem figurae nomine etiam duas oppositas sectiones comprehendo. Esto latus figurae transversum AT. duos vertices conjungens, rectum RH. Ex puncto curvae X ducatur, XYL recta occurrens perpendiculariter lateri ED in Y, et lateri GI in L. Jam recta DY appelletur y, et recta XY appelletur x. Inveniaturque valor rectangulorum EYD, et LXY. $EYD \sqcap \langle e\rangle y - y^2$, et $LXY, \sqcap dx + x^2$.

1 *Neben der Abbildung:* Utile signa potius quam literas ambiguas adhibere translationum causa. Item compositionum.

2 EDCG *erg. L, ändert Hrsg.* 3 f. ut *(1)* latera eius axi *(2)* duo latera *(a)* ⟨pa⟩ *(b)* ⟨app⟩ *(c)* rectanguli *L* 4 ED. *(1)* GC. *(2)* GI. *L* 5 centro *(1)* sectionis *(2)* Figurae *L* 6 transversum *(1)* AB. rectum *(a)* ⟨E⟩A *(b)* RH *(2)* AT. *L* 6 conjungens, | transversum *ändert Hrsg.* | RH. *(1)* cui ducatur parallela qvaelibet X *(2)* ex *L* 7 ducatur *(1)* perpendicularis axi XY⟨T⟩ *(2)*, XYL recta *L* 8 in *(1)* E *(2)* L *L* 9 rectangulorum *(1)* E⟨P⟩Y *(2)* | CYD *ändert Hrsg.* |, et LXY. | EDY *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L*

1 *Fig. 1*: Die Figur weist einige Bearbeitungsspuren auf; viele Bezeichnungen von Punkten sind geändert, einige Geradenabschnitte gelöscht. Die Strecke RH, die dem *latus rectum* entsprechen soll, ist in Leibniz' Figur zu lang geraten; dies ist hier korrigiert. 9 $dx + x^2$: d und e entsprechen nicht den gleichnamigen Größen aus S. 277 Z. 11, sondern stehen für die Länge der Strecken LY bzw. DE.

$$\frac{b}{z-b} \sqcap \frac{\frac{qd}{z-b}y - y^2}{v^2 + z\frac{q}{b}v}.$$ Et quia $\frac{b}{z-b} \sqcap \frac{t}{r}$ fiat $\frac{b}{z-b} \sqcap \frac{\frac{qdb}{bz-b^2}[y] - y^2}{v^2 + z\frac{q}{b}v}$, et pro $\frac{b}{z-b}$ substituendo $\frac{t}{r}$ fiet: $\frac{t}{r} \sqcap \frac{\frac{qdt}{rb}[y] - y^2}{v^2 + z\frac{q}{b}v}$. Jam si $\frac{b}{z-b} \sqcap \frac{t}{r}$, erit $\frac{r}{t} \sqcap \frac{z}{b} - \boxed{\frac{b}{b}}1$ et $\frac{rb}{t} + b \sqcap z$. Fietque $\frac{t}{r} \sqcap \frac{\frac{qdt}{rb}y - y^2}{v^2 + \frac{rq}{t}v + qv}$ sive $\frac{t}{r} \sqcap \frac{\frac{t}{r}ey - y^2}{v^2 + \frac{r}{t}qv + qv}$.

Jam pro y substituatur $s - \delta$. Est autem δ differentia dimidiata inter latus transversum figurae et rectanguli latus. Est a. latus transversum t. et DE latus rectanguli fuit $\frac{dq}{z-b}$, vel $\frac{dqb}{bz-b^2}$, vel $\frac{dqt}{br}$, vel $\frac{t}{r}e$. Erit ergo $\delta \sqcap (\mp)t\ (\pm)\frac{t}{r}e$, vel erit $\delta \sqcap \pm t \mp \frac{t}{r}e$. Ponendo $t.e.r.$ quantitates positivas fiet ergo $y\,(DY) \sqcap s$ (id est BM)$-\frac{(TP)(\pm t \mp \frac{t}{r}e)}{2}$ vel erit

1 | $\mathrm{d}\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{z-b}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{\frac{\mathrm{qd}}{\mathrm{z-b}}\mathrm{y} - \mathrm{y}^2}{\mathrm{v}^2 + \mathrm{z}\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{b}}\mathrm{v}}$. *(1)* eius loco poni potest: $\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}}$ *(2)* Et qvia *L* 2 erit *(1)* $\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}} \sqcap$ *(2)* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *L* 4 substituatur *(1)* $\varphi - \delta$, et *(2)* $\mathrm{s} - \delta$ *(3)* $\mathrm{s} - \delta$ *L* 4 autem δ *(1)* $\sqcap$ t latus transversum demto latere Rectanguli et residuo dimidiato; *(2)* differentia | dimidiata *erg.* | inter *L* 5 figurae *erg. L* 5 latus. *(1)* ita ut in Ellipsi latus transversum sit maius rectangulo, in Hyperbola contra, ⟨—⟩ *(2)* Est a semper rectanguli latus maius *(3)* Est *L* 6 $\frac{\mathrm{dqr}}{\mathrm{bt}}$ *L ändert Hrsg.* 6 $\delta \sqcap$ *(1)* $\mp \mathrm{t} \pm \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}}\mathrm{e}$ *(2)* $\pm \mathrm{t} \mp \frac{\mathrm{t}}{\mathrm{r}}\mathrm{e}$ *L* 7 (DY) *erg. L*

1 $\frac{b}{z-b} \sqcap \frac{t}{r}$: Leibniz verwendet hier stillschweigend den auch in S. 306 Z. 8 f. u. Z. 12 (allerdings mit anderen Bezeichnungen) angesprochenen Zusammenhang $\frac{DY \cdot EY}{XY \cdot XL} = \frac{t}{r}$; vgl. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 52 f. Hierbei setzt er, wie er einige Zeilen später erläutert, LY (also d) gleich $\frac{zq}{b}$ und DE (also e) gleich $\frac{dq}{z-b}$. 7 $\frac{(TP)(\pm t \mp \frac{t}{r}e)}{2}$: Der Nenner ist zu streichen; $s - \delta$ stellt bereits die gesuchte halbe Differenz zwischen dem Quermaß und der Rechteckseite dar. Der Fehler pflanzt sich bis S. 281 Z. 5 fort.

$y \sqcap s \mp \frac{t}{2} \pm \frac{t}{2r}e$. Et pro XY. seu v ponamus: $\underset{w}{\underset{\wedge}{XM}} - YM$, seu $w - YM$ seu $w - \frac{LY}{2}$, jam $LY \sqcap \frac{zq}{b} \sqcap \frac{rq}{t} + q$. fiet ergo: $v \sqcap w - \frac{rq}{2t} - \frac{q}{2}$. Pro w substituamus $\sqrt{2rs \mp \frac{r}{t}s^2}$. Fiet $v \sqcap \sqrt{2rs \mp \frac{r}{t}s^2} - \frac{r}{2t} - \frac{q}{2}$.

Et his in locum priorum substitutis, fiet:

$$\frac{t}{r} \sqcap \frac{\frac{t}{r}e \mp \frac{t^2}{2r} \pm \frac{t^2}{2r^2} - s^2 \pm st \mp \frac{st}{r}e + \frac{t^2}{2r}e - \frac{t^2}{4r^2}e^2}{2rs \mp \frac{r}{t}s^2 - \sqrt{\frac{2r^2}{t}s \mp \frac{r^2}{t^2}s^2}}$$

Accuratius inquirendum in ejus theorematis veritatem.

$\frac{t}{r} \sqcap \frac{\frac{t}{r}ey - y^2}{v^2 + \frac{r}{t}qv + qv}$. Ergo $tey - ry^2 \sqcap tv^2 + rqv + tqv$, vel $v^2 + \frac{r}{t}qv + qv \sqcap \frac{t}{r}ey - \frac{r}{t}y^2$

vel fiat
$$\begin{array}{llllllll} v^2 & +\frac{r}{t}q & v & +\frac{r^2}{4t^2}q^2 & \sqcap & \frac{t}{r}e\ y & -\frac{r}{t}\ y^2 & +\frac{r^2}{4t^2}q^2 \\ & +q & \ldots & +\frac{r}{2t}q^2 & & & & +\frac{r}{2t}q^2 \\ & & & +\frac{q^2}{4} & & & & +\frac{q^2}{4} \\ & & & & & & & \boxed{\frac{\boxed{n^2}}{4}} \end{array}$$

1 pro *(1)* x *(2)* v, ponamus w+ *(3)* XY *L*

2 $\sqrt{2rs \mp \frac{r}{t}s^2}$: Nach der für t gegebenen Definition muss hier $\sqrt{rs \mp \frac{r}{t}s^2}$ stehen. 5 $\frac{t}{r} \sqcap$: Bereits die Berechnung des Zählers des Bruches auf der rechten Seite der Gleichung ist fehlerbehaftet; die Berechnung des Nenners bricht Leibniz dann unvermittelt ab. Er lässt jedoch unter der Gleichung ungefähr ein Drittel der Seite frei, möglicherweise, um den Ansatz später doch noch weiterzuführen.

7 $\frac{t}{r}ey$: Richtig ist $\frac{t}{t}ey$ bzw. ey. Der falsche Faktor belastet die Berechnung bis S. 282 Z. 3, wo der Ansatz dann abbricht.

Unde $v + \underbrace{\frac{r}{t}q + q}_{n} \sqcap \sqrt{\frac{t}{r}ey - \frac{r}{t}y^2 + \frac{n^2}{4}}$. Pone $v + n \sqcap w$. fiet: $w^2 \sqcap \frac{t}{r}ey - \frac{r}{t}y^2 + \frac{n^2}{4}$, sive $\frac{t}{r}w^2 - \frac{tn^2}{4r} - \frac{e^2}{4} \sqcap -\frac{e^2}{4} + ey - y^2$, unde fiet: $\sqrt{\frac{t}{r}w^2 - \frac{tn^2}{4r} - \frac{e^2}{4}} \sqcap (\mp)\, e\, (\pm)\, y$. Ponatur $(\mp)\, e\, (\pm)\, y \sqcap s$. fietque: $\frac{t}{r}w^2 - \frac{tn^2}{4r} - \frac{e^2}{4} \sqcap s^2$. Sed haec non accommodabilia ad parabolam.

Sed ut aequationem ad sectionem Conicam datam clarius intelligamus, aequatio haec consideranda est: $\nmid x^2 + \nmid dx + \nmid fr \sqcap \mp \frac{r}{t}y^2 + \nmid ey$. Hanc aequationem ajo esse ad Sectionem Conicam quamlibet, ad Parabolam, si t ponatur infinite magna, ad Hyperbolam et Ellipsin si ordinaria, et si $\mp$ significat $+$ erit ad Hyperbolam, si $-$ ad Ellipsin, quod si $r \sqcap t$. erit ad Circulum. Jam ejus latus rectum transversumque investigemus. Nimirum, dividantur omnia per t. et facilioris calculi causa, possemus omittere tfr. alioquin enim possemus adhuc augere numerum quantitatum supernumerariarum, sed earum satis habemus. Fiet ergo $x^2 + dx + \frac{d^2}{4} \sqcap \mp \frac{r}{t}y^2 + ey + \frac{d^2}{4}\ \boxed{-fr}$. Unde $x + \frac{d}{2} \sqcap \sqrt{\mp \frac{r}{t}y^2 + ey + \frac{d^2}{4}\ \boxed{-fr}}$. Et ponendo $w \sqcap x + \frac{d}{2}$, fiet: $w^2 \sqcap \mp \frac{r}{t}y^2 + ey + \frac{d^2}{4}\ \boxed{-fr}$. Unde fiet rursus: $\dfrac{w^2\ \boxed{+fr} - \frac{d^2}{4} + \frac{t^2e^2}{4r^2}}{\mp \frac{r}{t}} \sqcap y^2 \mp \frac{t}{r}ey + \frac{t^2}{4r^2}e^2$. Unde $\sqrt{\dfrac{w^2\ \boxed{+fr} - \frac{d^2}{4} + \frac{t^2e^2}{4r^2}}{\mp \frac{r}{t}}} \sqcap$ $\pm\mp y \mp\pm \frac{te}{2r}$.

3 f. parabolam. *(1)* Esto ae *(2)* Esto aeqvatio: bv^2 + qrv + r *(3)* Esto aeq *(4)* Sed *L* 9 causa, *(1)* omittamus tfr. *(2)* possemus *L* 11 $\boxed{-\mathrm{fr}}$ *erg. L* 11 Unde x + d *L ändert Hrsg.* 12 $\boxed{-\mathrm{fr}}$ *(unter der Wurzel) erg. L*

---

2 sive: Die Umformungen in dieser Zeile leiden unter weiteren Flüchtigkeiten. 13 rursus: Auf der linken Seite der folgenden Gleichung muss $\dfrac{w^2\ \boxed{+fr} - \frac{d^2}{4}}{\mp \frac{r}{t}} + \frac{t^2e^2}{4r^2}$ stehen. Der Fehler wirkt sich bis S. 283 Z. 6 aus.

Jam si sumatur aequatio haec $2ay \ddagger \frac{a}{q}y^2 \sqcap w^2$. Unde fiet: $\ddagger 2qy + y^2 + q^2 \sqcap \ddagger \frac{w^2 a}{q} + q^2$, sive $\ddagger\!+ q \;{+}\!\ddagger y \sqcap \sqrt{\ddagger \frac{w^2 q}{a} + q^2}$. Ergo erit $\frac{te}{2r} \sqcap q$. et $\frac{t}{r} \sqcap \frac{a}{q}$. Ergo $t \sqcap \frac{ar}{q}$. Ergo $\frac{a\cancel{r}e}{2\cancel{r}q} \sqcap q$. Ergo $e \sqcap \frac{2q^2}{a}$. Ergo e. arbitraria non est. Sed si aequatio fuisset $\ddagger\!+ q \;{+}\!\ddagger x \sqcap \sqrt{\ddagger \frac{w^2}{a}q + q^2}$, et posita jam $x \sqcap \lambda + y$. tunc aut λ aut e. fuisset determinanda, alterutra vero mansisset arbitraria.

Comparando porro: Restant comparanda: $\ddagger tf \ddagger \frac{td^2}{4r} \ddagger \frac{t^3 e^2}{4r^3}$, cum q^2 qua aequatione necesse rursus est aliquam ex incognitis determinari, ut f. restat ergo incognitarum non

---

1 *Am Rande, um 90° gedreht:*

$$\sqrt{2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \cancel{+g}} \sqcap y + g. \text{ Ergo } \begin{array}{ll} 2a\,x & +2a\mu \\ \ddagger \frac{2ah}{q}x & \ddagger \frac{a}{q}h^2 \\ & -g^2 \end{array} \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2 + 2gy \cancel{+g^2}.$$

1 haec *(1)* $2\langle aw\rangle \ddagger \frac{a}{q}\langle w\rangle^2$ *(2)* $2ay \ddagger \frac{a}{q}y^2$ *L* 2 sive *(1)* $+\!\ddagger q \ddagger\!+ y$ *(2)* $\ddagger\!+ q \;{+}\!\ddagger y \sqcap$ *(a)* $\sqrt{\ddagger \frac{w^2 a}{q} + q^2}$ *(b)* $\sqrt{\ddagger \frac{w^2 q}{a} + q^2}$ *L* 3 est. *(1)* fiet vero *(2)* si f *(3)* Sed *L* 4 jam | fuisset *gestr.* | x *L*

---

1 fiet: Auf der rechten Seite der folgenden Gleichung muss es $\ddagger \frac{w^2 q}{a}$ heißen. Leibniz bemerkt den Fehler in der nächsten Zeile und korrigiert ihn dort, rechnet jedoch mit dem falschen Wert weiter. Dies führt zu der Aussage $\frac{t}{r} = \frac{a}{q}$ (richtig wäre $\frac{r}{t} = \frac{a}{q}$) und weiter zu einem falschen Wert für e (richtig wäre $e = 2a^2$).

nisi una. Et addi possunt duae, adhuc ut λ et h. ex explicatione ipsarum ω et y. Tres ergo incognitae seu indeterminatae pro arbitrio assumi possunt.

Sed plus arbitrii, minus determinationis habebimus, si in ipsa aequatione determinata nempe $\pm\!\pm q \pm\!\pm y \sqcap \sqrt{\pm w^2 \frac{q}{a} + q^2}$ pro y. et w alias nempe $x+\lambda$, et pro w quoque aliam assumsissemus, sed id videtur in ω solum utile sed ipsis opus non habemus nisi velimus problema solvere ope datarum duarum sectionum. Ut huc transferamus aequationem ad sectionem Conicam indefinitam paginae primae hujus schedae, loco fr, ponamus $\pm\frac{r}{t}h^2$, loco (e), ponamus $+\frac{r}{t}e \pm \frac{2r}{t}h$, pro (d) fiat $d+2f$ per consequens:

$$\begin{array}{l} +f^2 \\ +df \end{array}$$

$$\frac{e}{2} \pm h \sqcap q, \quad \text{et} \quad \frac{+\frac{r}{t}ae \pm \frac{2r}{t}ha}{2} \sqcap \cancel{2}\frac{e^2}{4} \pm \cancel{2}eh + \cancel{2}h^2, \quad \text{vel} \ \pm\cancel{\frac{r}{t}ha} \quad \begin{array}{l} \cancel{-h^2} \\ \cancel{+h^2} \\ +\frac{r^2a^2}{t^2} \\ \pm\frac{\cancel{2}hra}{t} \end{array} \sqcap \frac{e^2}{4} \begin{array}{lll} \pm h & e & +h^2 \\ & -\frac{ra}{t} & +\frac{r^2a^2}{t^2} \\ & & \pm\frac{2hra}{t} \\ & & \end{array}$$

2 possunt. *(1)* fiat nimirum: $\begin{array}{l} x^2 + dx \\ +2fx \end{array} \pm \frac{r}{t}e^2 + \left.\begin{array}{l} \frac{d^2}{2} + g^2 r \\ f^2 \\ \pm\frac{r}{t}h^2 \\ +df \end{array}\right\} \langle h\rangle^2 \sqcap \begin{array}{l} \pm\frac{r}{t}y^2 + ey. \\ \pm\frac{2rh}{t}y \end{array}$ *(a)* Calculus erit qvi ante *(b)* erit $e \pm \frac{2rh}{t} \sqcap \frac{2q^2}{a}$ *(2)* Sed *L* 8 $\begin{array}{l} +f^2 \\ +df \end{array}$ *erg. L*

9 $\frac{e}{2} \pm h \sqcap q$: Leibniz verwendet im folgenden die Gleichung $\frac{t}{r} = \frac{a}{q}$ und den Wert für e aus S. 283 Z. 2. Beide sind nicht korrekt, und so laufen die weiteren Berechnungen ins Leere. Ohne eine weitere Flüchtigkeit in der folgenden Zeile, wo im Nenner des Terms $-\frac{ra}{2t}$ der Faktor 2 verloren geht, ergäbe sich in S. 285 Z. 1 $q = \frac{ra}{t}$, was ja bereits vorausgesetzt war.

fietque $\dfrac{e}{2} \mp h - \dfrac{ra}{t} \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2a^2}{t^2} \pm \dfrac{hra}{t}}$, vel $q - \dfrac{ra}{t} \sqcap \sqrt{\dfrac{r^2a^2}{t^2} \pm \dfrac{hra}{t}}$.

Ergo $q^2 - \dfrac{2\cancel{q}a^2}{\cancel{t}} + \cancel{\dfrac{a^4}{q^2}} - \cancel{\dfrac{a^4}{q^2}} \sqcap \pm \dfrac{ha^2}{q}$ vel $h \sqcap \pm \dfrac{q^3}{a^2} \mp 2q$.

2 Ergo | h $\sqcap$ *streicht Hrsg.* | q^2 *L*

---

2 Ergo: Leibniz rechnet nun mit der korrekten Beziehung $\frac{r}{t} = \frac{a}{q}$.

28. AEQUATIO SOLIDA V
[Juli – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 72–73. 1 Bog. 2°. Auf Bl. 73 r° Fragment zum Problem der *Minima ad conicam.*
Cc 2, Nr. 854 F

Datierungsgründe: Vgl. N. 24.

[*Teil 1*]

Esto Aequatio solida data, quomodocunque affecta:

$$y^4 + ly^3 + rmy^2 + r^2ny + r^3p \sqcap 0$$
$$\text{sive } y^2 \frown y^2 + ly \frown y^2 + rmy^2 + r^{[2]}ny + r^3p \sqcap 0$$

Pro y^2 ponatur ejus valor pro arbitrio sumtus ex aequatione arbitraria hac:

$$y^2 \sqcap gx - \frac{l}{2}y \quad \text{fiet:}$$

$$g^2x^2 - \cancel{2}\frac{gl}{\cancel{2}}xy + \frac{l^2}{4}y^2, +lgyx - \frac{l^2}{2}y^2, +rmgx - \frac{rml}{2}y, +r^2ny + r^3p \ \sqcap 0.$$

Et loco $-\frac{l^2}{4}y^2$, rursus ponatur ejus valor, nempe $-\frac{l^2}{4}gx + \frac{l^3}{8}y$, et omnibus divisis per g^2, auferatur aequatio arbitraria assumta $gx - \frac{l}{2}y - y^2 \sqcap 0$. Et ita ordinando habebimus

13 lgyx − | $\frac{l^2}{4}$ *ändert Hrsg.* | y^2 *L* 13 f. $\sqcap 0$. *(1)* Destructisqve qvae se tollunt, et *(2)* Et *L* 14 $\frac{l^3}{8}$y, *(1)* ordinatisqve omnibus *(2)* et *(a)* divisis *(b)* omnibus *L* 15 g^2, *(1)* addatur *(2)* ⟨adde⟩ *(3)* fiet *(4)* auferatur *L*

9–287,2 rmy^2: Leibniz schreibt in diesem Abschnitt zunächst bmy^2, b^2ny usw. und benennt den Faktor b dann überall in r um. Die unkorrigierte Ausgangsgleichung entspricht abgesehen vom Vorzeichen des absoluten Gliedes jener aus N. 24 S. 248 Z. 17.

$$\begin{array}{lll} x^2 \; +\dfrac{rm}{g}\,x & + \; y^2 \; -\dfrac{rml}{2g^2}\,y & + \; \dfrac{r^3p}{[g^2]} \sqcap 0. \\ \quad -\dfrac{l^2}{4g} & \qquad +\dfrac{r^2n}{g^2} \;\ldots & \\ \quad -g & \qquad +\dfrac{l^3}{8g^2} \;\ldots & \\ & \qquad +\dfrac{l}{2} \;\ldots & \end{array}$$

Cujus aequationis locum patet esse Circulum.

Si loco aequationis arbitrariae assumtae, simpliciter, subtrahatur aequatio eadem multiplicata per rationem indefinitam $\frac{\beta}{r}$, aequationis locus futurus est Sectio Conica Universalis, et aequatio ipsa ita stabit:

$$\begin{array}{lll} x^2 \; +\dfrac{rm}{g}\,x & +\dfrac{\beta}{r}\,y^2 \; -\dfrac{rml}{2g^2}\,y & + \; \dfrac{r^3p}{g^2} \sqcap 0. \\ \quad -\dfrac{l^2}{4g} \;\ldots & \qquad +\dfrac{r^2n}{g^2} & \\ \quad -\dfrac{\beta}{r}g \;\ldots & \qquad +\dfrac{l^3}{8g^2} & \\ & \qquad +\dfrac{\beta}{2r}l & \end{array}$$

Et sectionis conicae universalis intersectione cum Circulo, solvetur problema solidum datum. Tantum inveniendus est valor rectarum β. et g. quae pro arbitrio assumtae sunt: id vero efficiemus conferendo cum aequatione ad Sectionem Conicam Universalem hujus formae:

$$x^2 \quad dx \pm \frac{r}{t}y^2 - ey - rc \sqcap 0$$

6 simpliciter, *(1)* subtracta fuisset *(2)* subtrahatur *L* 7 rationem *(1)* qvamlibet *(2)* indefinitam $\frac{\beta}{\mathrm{r}}$. *(a)* aeqvatio futura est ad Sectionem coni *(b)* aeqvationis *L* 12 f. $+\frac{\beta}{2\mathrm{r}}\mathrm{l}$ *(1)* Huiusq *(2)* Et *(a)* huius *(b)* sectionis conicae *(aa)* cum circulo *(bb)* universalis *L*

Erit (1) $\beta^2 \sqcap \pm\dfrac{r^2}{t}$ (2) $c \sqcap \dfrac{-r^2p}{g^2}$ (3) $8erg^2 + 4\dfrac{\beta l}{\cancel{2r}}g^2 \sqcap \dfrac{4r^2ml - 8r^3n - l^3r}{\cancel{8}}$ sive $e \sqcap \dfrac{4r^3ml - 8r^4n - l^3r^2 - 4l^2g^2r}{8r^2g^2}$ sive $e \sqcap \dfrac{4kr^3 - 4l^2g^2}{8rg^2}$, vel $e \sqcap \dfrac{kr^3 - l^2g^2}{2rg^2}$ et $e^2 \sqcap \dfrac{2k^2r^6 - 4kr^3l^2g^2 + l^4g^4}{r^2g^4}$ (4) $d \sqcap \dfrac{r^2m - l^2r - \beta g^2}{rg}$, vel $\dfrac{2hr^2 - 2\beta g^2}{2rg}$. Unde $d^2 \sqcap \dfrac{h^2r^4 - 2hr^2\beta g^2 + \beta^2g^4}{4r^2g^2}$.

Sed cum sint literae indeterminatae quinque nempe $\beta. c. d. e. g.$ aequationes autem datae tantum quatuor, restat invenienda quinta, investigando latus rectum et transversum sectionis conicae datae, quae locus est aequationis hujus $x^2 \; dx \sqcap \sqcap \mp\dfrac{r}{t}y^2 + ey + rc$. Quod ut obtineamus, efficiendum est, ut non nisi una incognitarum radicum, v. g. y, restet, planum faciens cum aliqua cognita, x, seu terminus dx, evanescat. Ponamus nempe

$$x \sqcap v - \frac{d}{2} \text{ eritque } v^2 \boxed{-dv} + \frac{d^2}{4} \boxed{+dv} \sqcap \mp\frac{r}{t}y^2 + ey + rc \text{ sive } \begin{array}{l} \mp\dfrac{r}{t}y^2 + ey + rc \sqcap v^2. \\ \qquad\qquad\qquad\;\; -\dfrac{d^2}{4} \end{array}$$

Jam ut tollamus terminum cognitum $+rc - \dfrac{d^2}{4}$ ponamus $y \sqcap w + \mu$, fietque aequatio $\mp\dfrac{r}{t}w^2 + \dfrac{2r}{t}w\mu + \mu^2, +ew + e\mu, +rc - \dfrac{d^2}{4} \sqcap v^2$. Quare ut $\mu^2, +e\mu, +rc - d^2$ se mutuo

1 f. $\sqcap \dfrac{\ldots - \mathrm{l}^3\mathrm{r}}{\cancel{8}}$ *(1)* et $\mathrm{e}^2 \sqcap 16\mathrm{r}^4\mathrm{m}^2\mathrm{l}^2 - 64\mathrm{r}^5\mathrm{ml}$ *(2)* sive *L* 4 f. $\sqcap \dfrac{\ldots + \beta^2\mathrm{g}^4}{4\mathrm{r}^2\mathrm{g}^2}$ *(1)* (5) *(2)* Sed *(a)* anteqvam *(b)* ut ipsas qv *(c)* cum *L* 7 $\mathrm{x}^2 \;\mathrm{dx} \sqcap$ *(1)* $\pm\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{y}^2 - \mathrm{ey} - \mathrm{rc} \sqcap 0.$ *(2)* $\mp\dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *L* 8 incognitarum *(1)* simplex, *(2)* simplici *(3)* radicum *L* 8 y, *(1)* restet, altera x, *(2)* restat *(3)* restet *L* 10 rc *(1)* Jam efficiendum qvoqve est, ut tollatur terminus cognitus, ex *(2)* sive *L*

1–4 Beim Koeffizientenvergleich und den Folgerungen unterlaufen Leibniz einige Flüchtigkeiten. — Leibniz führt hier eine neue Größe ein, ohne sie zu definieren oder ihre Verwendung zu motivieren. Zunächst nennt er sie c, da diese Bezeichnung aber bereits vergeben ist, ändert er sie später im ganzen Stück in k. An einigen Stellen im Stück übersieht er sie; diese werden im folgenden stillschweigend angepasst. 6 investigando: Auch die Umformungen des folgenden, bis S. 290 Z. 2 reichenden Ansatzes weisen eine Reihe an Rechenfehlern auf.

destruant, ponemus (Aeq. 6) $\mu^2 + e\mu \sqcap -rc + \dfrac{d^2}{4}$, quae aequatio exhibet ipsius μ quantitatem, atque ita fiet:

$$\begin{array}{l} +\dfrac{2r}{t}\mu \; w \ddagger \dfrac{r}{t}w^2 \sqcap v^2. \\ +e \quad \cdots \end{array}$$

Quae est ad axem Sectionis Conicae Universalis, ita ut latus rectum sit $\dfrac{2r}{t}\mu + e$, lateris recti ad transversum ratio $\dfrac{r}{t}$. Quae cum in data Sectione Conica jam tum habeantur, sitque latus rectum $2a$, ratio recti ad transversum $\dfrac{a}{q}$. Ejus enim aequatio est

$$2aw \ddagger \frac{a}{q}w^2 \sqcap v^2. \quad (\text{: unde in Parabola erit } e \sqcap 2a\text{ :})$$

Ideo erit (Aeq. 7) $\dfrac{r}{t} \sqcap \dfrac{a}{q}$. Et potest poni $r \sqcap a$ ac $t \sqcap q$ et (Aeq. 8) $\dfrac{2a}{q}\mu + e \sqcap 2a$. $\mu \sqcap \dfrac{\cancel{2}\cancel{a}q}{\cancel{2}\cancel{a}} - \dfrac{eq}{2a}$. Ergo $e\mu \sqcap qe - \dfrac{e^2q}{2a}$ et $\mu^2 \sqcap q^2\cancel{a^2} - \dfrac{q^2\cancel{a}e}{a} + \dfrac{e^2q^2}{4a^2}$ quibus in Aeq. 6 substitutis fiet: $4a^2q^2 - \dfrac{4aq^2e}{\cancel{a}} + \dfrac{e^2q^2}{\cancel{4a^2}} + 4a^2qe - 2\dfrac{ae^2q}{\cancel{2a}} \sqcap -4a^2rc + \dfrac{a^2d^2}{\cancel{4}}$ sive c et d explicatis $\sqcap \dfrac{-32g^2a^2r^5p + 2a^2h^2r^4g^2 - 4a^2hr^2\beta g^4 + 2a^2\beta^2g^6}{8g^4r^2}$.

Et pro e et e^2, substituendo ejus valorem ex Aequatione 3, fiet:

1 (Aeq. 6) *erg. L* 1 $\frac{\mathrm{d}^2}{4}$, *(1)* unde *(2)* qvis esse *(3)* qvalis ipsa *(4)* ips *(5)* qvae *L* 4 f. e, *(1)* latus transversum *(a)* t *(b)* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *(2)* lateris *L* 6 transversum | $\ddagger$ *gestr.* | $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(1)* ideo erit $\ddagger\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}} \sqcap \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(2)* eius *L* 8 et potest poni r $\sqcap$ *(1)* t *(2)* a ac *(a)* q $\sqcap$ t *(b)* t $\sqcap$ q *erg. L* 8 (Aeq. 8) *erg. L* 9 2a. *(1)* et pro e substituto eius valore ex aeq. 6 fiet *(a)* $\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mu \sqcap \mu \; \frac{-\mathrm{rc} + \mathrm{d}^2}{\mu}$ sive *(b)* $\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mu - \mu \; \frac{-\mathrm{rc} + \mathrm{d}^2}{\mu} \sqcap 2\mathrm{a}$ (Aeq. 9) sive $+\frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mu^2 - 2\mathrm{a}\mu - \mathrm{rc} + \frac{\mathrm{d}^2}{4} \sqcap 0$. dato ergo valore ipsius μ datur et valor ipsius e. Et explicatis rc et $\frac{\mathrm{d}^2}{4}$ per aeqvationes 2. et 4, fiet: $4\mathrm{a}^2\mathrm{g}^2$ *(2)* $\mu \sqcap$ *L*

$$\frac{2k^2r^6\cancel{q^2} - 4kr^3l^2\cancel{q^2}g^2 + 2l^4\cancel{q^2}g^4}{\cancel{8r^2g^4}}, \frown \begin{matrix} +2aq \\ -q^2 \end{matrix} \quad \frac{+4kr^4g^2 - 4l^2rg^4}{\cancel{8r^2g^4}}, \frown \begin{matrix} -4aq^2 \\ +4a^2q \end{matrix} \sqcap \frac{-32a^2r^5pg^2 \text{ etc.}}{\cancel{8g^4r^2}}$$

multiplicandoque omnia per $8r^2g^4$, aequationem patet ascendere ad cubum, ob g^6.

Cum ergo hac methodo semper ad aequationem intervenientem solidam veniamus, et aliunde tamen certum sit aequationem solidam ad Circulum et conicam indefinitam deduci posse ope non nisi planae invenientis, conferendo ista lux quaedam circa reductiones ascendetur.

[*Teil 2*]

$$-y^2 + \frac{\lambda s}{r}y - v^2 - sv \sqcap 0.$$

Ponendo $v \sqcap w - \frac{s}{2}$ fiet $-y^2 + \frac{\lambda s}{r}y - w^2 \boxed{+ws} \boxed{-\frac{s^2}{4}} \boxed{-sw} \boxed{+\frac{s^2}{4}} - \frac{s^2}{4} \sqcap 0$. Ac proinde

1 f. $\frac{\ldots \text{etc}}{\cancel{8g^4r^2}}$ *(1)* dividendoqve omnia per $8r^2g^4$, atqve ordinando habebimus:

$$\begin{array}{rcrcrcc}
+4aql^4 & g^4 & -8kr^3l^2aq & g^2 & +4k^2r^6aq & \cancel{-2e^2r^6q^6} & \sqcap\ 0 \\
-2q^2l^4 & & +4kr^3l^2q^2 & & -2k^2r^6q^2 & & \\
+16aq^2l^2r & & -16aq^2kr^4 & & -2a^2h^2r^6 & & \\
-16a^2ql^2r & & +16a^2qkr^4 & & & & \\
-2a^2\beta^2r^2 & & +32a^2r^5p & & & & \\
 & & +4a^2hr^4\beta & & & &
\end{array}$$

Si Aeqvationis ad construendum propositae secundus terminus desit, seu si l, sit $\sqcap$ 0 tunc erit k $\sqcap$ *(a)* ⟨ml⟩ *(b)* 2n, et h $\sqcap$ m et parenthesi inclusa evanescent. *(2)* multiplicandoqve *L* 3 aequationem *(1)* planam *(2)* solidam *(3)* intervenientem *L* 4 et conicam indefinitam *erg. L* 5 invenientis, *(1)* et Sectionis Conicae *(2)* conferendo *L* 8 *(1)* ⟨r⟩ *(2)* bx *(3)* $\mp\frac{r}{t}y^2 + \frac{\mu q}{r}y$ *(a)* $\sqcap v^2 + qv$ *(b)* $-v^2 - qv \sqcap 0$. et $y^2 + \frac{\lambda s}{r}y - v^2 - sv \sqcap 0$. ponendo $v \sqcap w$ *(aa)* + *(bb)* $-\frac{s}{2}$ fiet $y^2 + \frac{\lambda s}{r}y - w^2 - \frac{s^2}{2}$ *(4)* $-y^2$ *L* 9 Ponendo v $\sqcap$ *(1)* w+ *(2)* $w - \frac{s}{2}$ *L*

9 $-\frac{s^2}{4} \sqcap$: Das Vorzeichen ist falsch. Dieser und ein analoger Fehler in S. 291 Z. 3 (wo es unter der Wurzel $+\frac{\gamma^2r^2}{4q^2}$ heißen muss) wirken sich bis auf das Endergebnis des Ansatzes in S. 292 Z. 1–4 aus.

w, sive $v+\dfrac{s}{2} \sqcap \sqrt{-y^2+\dfrac{\lambda s}{r}y-\dfrac{s^2}{4}}$. Esto jam alia aequatio sive locus ad quamlibet sectionem Conicam datam, nempe $\dfrac{d}{r}qy \mp \dfrac{r}{t}y^2 \sqcap +\dfrac{\gamma r}{q}v+v^2$, ponendo eodem modo $v \sqcap \boldsymbol{\aleph}-\dfrac{\gamma r}{2q}$, fiet $\dfrac{dq}{r}y \mp \dfrac{r}{t}y^2 \sqcap \boxed{\dfrac{\gamma r}{q}\boldsymbol{\aleph}}-\dfrac{\gamma^2r^2}{2q^2}+\boldsymbol{\aleph}^2\boxed{-\dfrac{\boldsymbol{\aleph}\gamma r}{q}}+\dfrac{\gamma^2r^2}{4q^2}$ sive $\boldsymbol{\aleph}$, vel $v+\dfrac{\gamma r}{2q} \sqcap \sqrt{\dfrac{dq}{r}y \mp \dfrac{r}{t}y^2-\dfrac{\gamma^2r^2}{4q^2}}$.
Conferantur hae duae aequationes seu duo valores ipsius v, habebimusque aequationem hanc:

$$\overset{B.}{\sqrt{-y^2+\frac{\lambda s}{r}y-\frac{s^2}{4}}}-\frac{s}{2} \sqcap \overset{A.}{\sqrt{\frac{dq}{r}y \mp \frac{r}{t}y^2-\frac{\gamma^2r^2}{4q^2}}}-\frac{\gamma r}{2q},$$

vel appellando $\dfrac{-sq+\gamma r}{2q}$ C, et radices $B.\,A$, fiet: $B^2+2\,CB+C^2 \sqcap A^2$.

$$\begin{array}{llllll}
\text{Ideoque} & -\ y^2 & +\dfrac{\lambda s}{r}\ y & & -\dfrac{s^2}{4} & [\sqcap -2\,CB\,] \\
 & \mp\dfrac{r}{t}\ \ldots & -\dfrac{dq}{r}\ \ldots & +\dfrac{s^2q^2-2sq\gamma r+\gamma^2r^2}{4q^2} & & \\
 & \odot & \text{☽} & & +\dfrac{\gamma^2r^2}{4q^2} & \\
 & & & & \text{☿} &
\end{array}$$

Jam $-\dfrac{s^2}{4}+\dfrac{\gamma^2r^2}{4q^2} \sqcap \dfrac{-\cancel{4}q^2s^2+\cancel{4}\gamma^2r^2}{\cancel{16}\,4\,q^2}$. Ergo ☿ erit $[\dfrac{-2sq\gamma r+2\gamma^2r^2}{4q^2}.]$

$$\begin{array}{lllll}
 & \odot & \text{☽} & \text{☿} & \\
\text{Sive aequatio} & -1\ y^2 & +\dfrac{\lambda s}{r}\ y & \dfrac{-\cancel{2}sq\gamma r+\cancel{2}\gamma^2r^2}{2q^2} & \sqcap -[2]\,CB \\
 & \mp\dfrac{r}{t}\ \ldots & -\dfrac{dq}{r}\ \ldots & &
\end{array}$$

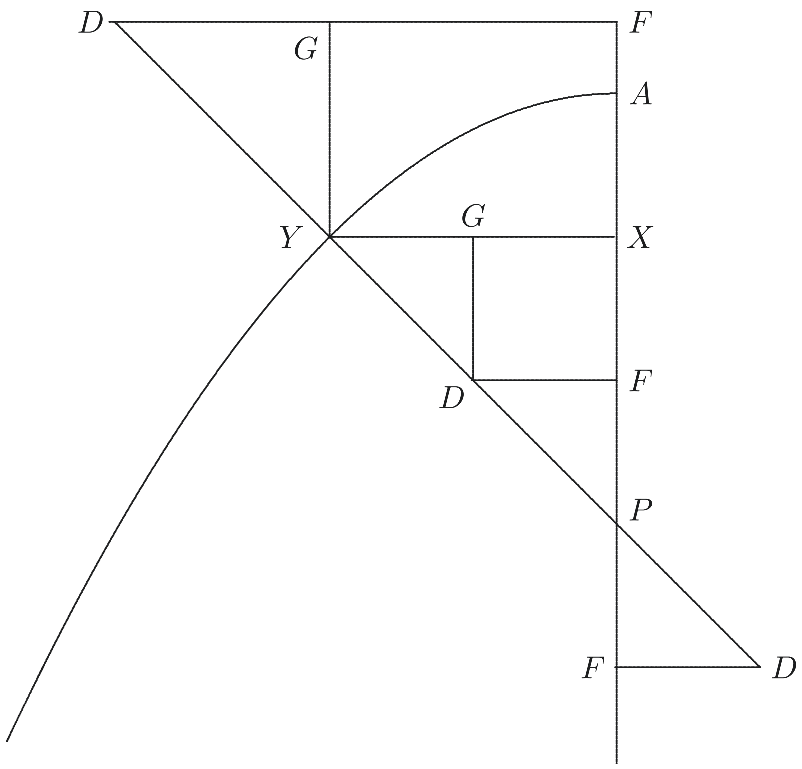
et quadrando utrobique:

12 ☿ erit | $\dfrac{2sq\gamma r}{4q^2}$ *gestr.* | *L*

4–6 aequationem: Vgl. den Ansatz in den Stücken N. 18–22, etwa auf S. 197 Z. 17.

$$
\begin{array}{llllll}
 & l & m & n & p & \\
\odot^{[2]}y^4 & +\,2\odot\text{☽}\,y^3 & +\,2\odot\text{☿}\,y^2 & +2\,\text{☽}\text{☿}\,y & +\text{☿}^2 & [\sqcap 0] \\
 & & +\,\text{☽}^2\ \ldots & & & \\
 & \dfrac{-s^2q^2+2sq\gamma r-\gamma^2r^2}{4q^2}\ \ldots & \dfrac{+s^2q^2-2sq\gamma r+\gamma^2r^2}{4q^2} \frown \dfrac{\lambda s}{r}\,y & \dfrac{-s^2q^2+2sq\gamma r-\gamma^2r^2}{4q^2} \frown \dfrac{s^2}{4} & &
\end{array}
$$

[*Fragment zum Problem der Minima ad conicam*]



[*Fig. 1*]

---

1 l: Um die Koeffizienten dieser Gleichung mit jenen der Ausgangsgleichung (S. 286 Z. 9) vergleichen zu können, müsste die Gleichung zuvor normiert werden. Zudem wäre der Faktor r zu berücksichtigen.
4 $\dfrac{-s^2q^2\ldots}{4q^2}$: Die unterste Zeile der Gleichung muss mit -4 multipliziert werden.

$$\frac{y}{\underset{\displaystyle a \text{ ǂ } \frac{a}{q}x}{\underset{\wedge}{p}}} \sqcap \frac{(\text{ǂ})d\,(\ddagger)y}{f\,(\text{ǂ})\,x}, \quad \text{sive} \quad p \sqcap \frac{\cancel{y}^{\cancel{2}}}{(\text{ǂ})dy\,(\ddagger)y^2} \frown f\,(\text{ǂ})\,x \sqcap \frac{\cancel{y}^{\cancel{2}}}{l \sqcap \dfrac{y^2}{a \text{ ǂ } \frac{a}{q}x}} \quad \text{fiet}$$

$$fy^{\cancel{2}} \text{ ǂ } xy^{\cancel{2}} \sqcap d\cancel{y}\,[-]\,y^{\cancel{2}} \frown a \text{ ǂ } \frac{a}{q}x.$$

$$\frac{y^2}{p^2} \sqcap \frac{+d^2 - 2dy + y^2}{f^2\,(\text{ǂ})\,2fx + x^2}.$$

$$\sqrt{2ax \text{ ǂ } \frac{a}{q}x^2} \sqcap \frac{(\text{ǂ})d}{f\,(\text{ǂ})\,x} \smile \frac{1}{\underset{\displaystyle a \text{ ǂ } \frac{a}{q}x}{\underset{\wedge}{p}}} \;(\text{ǂ})\frac{1}{f\,(\text{ǂ})\,x}.$$

---

1 $\frac{y}{p} \sqcap \frac{(\text{ǂ})d\,(\ddagger)y}{f\,(\text{ǂ})\,x}$: Die rechte Seite der Gleichung gibt die Verhältnisse nicht zutreffend wieder: Falls der Punkt D zwischen dem Kegelschnitt und der Achse liegt, gilt mit den üblichen Benennungen $\frac{y}{p} = \frac{d-y}{x-f}$, falls der Punkt D rechts von der Achse liegt, gilt $\frac{y}{p} = \frac{d+x}{f-x}$. Beides wird von der Gleichung nicht abgedeckt. Zur Beschreibung solcher Lageverhältnisse führt Leibniz in der *Méthode de l'universalité* (N. 10 u. 11) die zusammengesetzten Doppelvorzeichen ein.

29. DUAE AEQUATIONES I
[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 68 u. 77. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 855 E

Datierungsgründe: Die eng zusammenhängenden Stücke N. 29 und N. 30 zeigen Gemeinsamkeiten mit den wahrscheinlich zwischen Juli und Oktober 1674 entstandenen Stücken N. 24–26: Der Papierbogen von N. 29 weist das gleiche Wasserzeichen wie N. 25–27 auf, derjenige von N. 30 das gleiche wie N. 28. Auch inhaltlich knüpfen die Überlegungen in unseren beiden Stücken an jene an, die Leibniz im genannten Konvolut anstellt, und sie sind wie diese vor das Stück N. 31 zu stellen, das seinerseits vor N. 33, datiert auf Oktober 1674, anzusiedeln ist (vgl. die Datierungsgründe von N. 24). Dass unsere Stücke nicht vor September 1674 entstanden sind, legt eine Bemerkung (S. 299 Z. 4 f.) im vorliegenden Stück nahe: Die hier als überwunden bezeichnete Schwierigkeit bestand noch, als Leibniz die Stücke VII, 1 N. 129–131 verfasste. Das erste dieser Stücke aber, VII, 1 N. 129, trägt das Datum September 1674.

In problemate ducendorum ad sectionem Conicam perpendicularium aequatio prodit haec:

$$\frac{b}{a}\left\{\begin{array}{l} \overset{\odot}{\mp (\overline{\pm\mp})} \dfrac{a}{q}\,xy \mp \dfrac{ad}{q}\,x \\ \quad (\overline{\pm\mp})\ 1\ \ldots \end{array}\right. \quad c\left\{\begin{array}{l} \overset{☽}{\mp (\overline{\pm\mp})}\ a\ \ y + da \ \sqcap\ 0. \\ \quad (\overline{\pm\mp})\ f\ \ldots \end{array}\right.$$

Et jam data est haec ex ipsius sectionis natura:

$2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, quae ducta in $\dfrac{\beta}{a}$ priori jungatur, fietque

17 x | $\frac{c}{a}$ *ändert Hrsg.* | $\{$ *L* 20 ducta *gestr. L, erg. Hrsg.*

20–295,1 fietqve *(1)* $\frac{\beta}{a}y^2 \quad + 2\beta$ *(2)* $\mp \frac{\beta a}{qb}x^2 - \frac{\beta \cancel{a}}{\cancel{a}b}y^2 \boxed{+\frac{b}{a}} xy \mp \frac{a^2d}{qb}x \ \frac{ca}{b}y + \frac{da^2}{b}$. $+\frac{2\beta}{b}\ \ldots$ *(3)* $\mp \frac{\beta}{q}x^2$ *L*

14–18 Leibniz startet mit der umgeformten zweiten Gleichung aus S. 61 Z. 21 und übernimmt auch den dortigen Vorzeichenfehler (es heißt hier dadurch $(\pm\mp)\,f$ statt richtig $(\pm\mp)\,f$).

$$\pm\frac{\beta}{q}\,x^2\quad-\frac{\beta}{a}\,y^2\;\boxed{+\frac{b}{a}\,xy}\;\pm\frac{ad}{q}\quad x\qquad cy+da\;\;[\sqcap\;\;0]$$
$$+\;2\beta\,\ldots$$

et rursus addatur prima
multiplicatio ducta in $\dfrac{\gamma}{a}$ . . . . $\dfrac{\gamma b}{a^2}\ldots\pm\dfrac{\gamma d}{q}\qquad+\dfrac{\gamma c}{a}+\gamma d$

In aequatione data sectionis Conicae pro x ponendo ejus valorem fit

$$\frac{b}{a}\;xy\;\;\frac{\pm\frac{a}{q},\frown\mp\frac{a}{q}dx^2+dy^2}{2a}\;+\;cy\;+\;da.$$

$$\text{vel}\qquad xy\;\;-\frac{da^2}{2bq^2}x^2\;\;\pm\frac{ad}{2bq}y^2\;+\;\frac{a}{b}cy+\frac{da^2}{b}$$

$$\frac{d\;(\overset{+}{\mp})y}{(\overset{+}{\pm})f(\overset{+}{\pm})x}\sqcap\frac{y}{a\pm\frac{a}{q}x}\,.\qquad\text{Unde}\;\;\frac{d}{y}\,(\overset{+}{\mp})\,1\sqcap\frac{(\overset{+}{\pm})\frac{q}{a}f(\overset{+}{\pm})\overline{\pm\frac{q}{a}z\mp\frac{q^2}{a}}}{z}$$

$$(e)\qquad\qquad\qquad(\tfrac{f}{a})$$

$$\text{vel}\;\;\frac{d}{y}\boxed{(\overset{+}{\mp})\,1}-\frac{(\overset{+}{\pm})\frac{qf}{a}(\overset{+}{\mp})\pm\frac{q^2}{a}}{z}\sqcap(\overset{+}{\pm})\pm\frac{q}{a}\;(\overset{+}{\pm})\,1.$$

---

4 *Dazu am unteren Rand:* $2ax\pm\frac{a}{q}x^2\sqcap y^2$. Ergo $x\sqcap\dfrac{\mp\frac{a}{q}x^2+y^2}{2a}$.

7 *Dazu am rechten Rand:* $z\sqcap q\pm x$. Ergo $x\sqcap\pm z\mp q$.

5 $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{xy}$ *(1)* $\dfrac{\pm\frac{a}{q},\frown\mp\frac{a}{q}x^2-y^2}{2a}$ *(2)* $\dfrac{\pm\frac{a}{q},\frown\mp\frac{a}{q}dx^2-dy^2}{2a}$ *L ändert Hrsg.* 6 $-\dfrac{da^2}{bq^2}x^2\;\mp\dfrac{ad}{bq}y^2$ *L ändert Hrsg.* 8 (e) *(1)* (f) *(2)* $(\frac{f}{a})$ *L* 9–296,1 $\frac{q}{a}(\overset{+}{\pm})1$ *(1)* $\dfrac{y(\overset{+}{\mp})d}{x}\sqcap{}^{z}$ *(2)* az² *(3)* adz |+ *ändert Hrsg.* | aey . . . adx | + *ändert Hrsg.* | aey *L* 10 $x\sqcap\mp\frac{a}{q}x^2+y^2$ *L ändert Hrsg.*

---

7 $\dfrac{d\;(\overset{+}{\mp})y}{(\overset{+}{\pm})f(\overset{+}{\pm})x}$: Vgl. den Ansatz in S. 34 Z. 8, der noch ohne zusammengesetzte Doppelvorzeichen auskommt, und jenen in S. 293 Z. 1, welcher an deren Stelle einfache Doppelvorzeichen einsetzt.

$$adz - aey \sqcap fyz, \text{ vel } adq \;\text{ǂ}\; adx - aey \sqcap fyq \;\text{ǂ}\; fyx.$$

$$\begin{array}{ccccc}
\dfrac{[\text{ǂ}]\frac{\beta}{q}\;x^2}{c+\frac{\gamma c}{a}} &
\dfrac{-\frac{\beta}{a}\;y^2}{c+\frac{\gamma c}{a}} &
\dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\frac{b}{a}\;xy \\[1ex] \frac{\gamma b}{a^2} \end{array}\right.}{c+\frac{\gamma c}{a}} &
\dfrac{\left\{\begin{array}{l} \text{ǂ}\frac{ad}{q}\;x\;\boxed{+y} \\[1ex] +2\beta \\[1ex] \text{ǂ}\;\frac{\gamma d}{q} \end{array}\right.}{c+\frac{\gamma c}{a}} &
\dfrac{\left\{\begin{array}{l} +da \\[1ex] +\gamma d \end{array}\right.}{c+\frac{\gamma c}{a}} \\[3ex]
 & & -\dfrac{b}{ac}\;\ldots & \ddagger\dfrac{ad}{qc} & -\dfrac{da}{c}
\end{array}$$

$$\begin{array}{c}
\boxed{\frac{b}{a}}\,xy \;\text{ǂ}\; \dfrac{ad}{q}\;x + cy + da \quad \sqcap \quad 0 \\[1ex]
+2\delta \qquad\qquad \dfrac{\delta}{a}y^2 \;\text{ǂ}\, \dfrac{\delta}{q}x^2 \\
\hline
\dfrac{b}{a} \\[1ex]
+2z \qquad\qquad -\dfrac{z}{a}y^2 \;\text{ǂ}\, \dfrac{z}{q}x^2
\end{array}$$

Videndum an ex duobus locis datis alii quilibet fabricari possint, incognitis non mutatis. Esto unus $\frac{b}{a}xy \;\text{ǂ}\; \frac{ad}{q}x + cy + ad \sqcap 0$. alter $2ax \;\text{ǂ}\; \frac{a}{q}x^2 - y^2 \sqcap 0$. Ergo secundum

---

11 *Am Rand:* ponendo $x \sqcap \frac{\gamma}{a}z + c$ et $y \sqcap \frac{\delta}{a}w + h$

8–10 $\text{ǂ}\frac{\delta}{q}\mathrm{x}^2$ *(1)* conferatur cum $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}$ *(2)* $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *(a)* a *(b)* $+2\frac{\langle\delta\rangle}{\mathrm{a}} - \frac{\langle\delta\rangle}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2$ *(c)* +2z *L* 11 ex *(1)* qvibus *(2)* duobus *L* 11 f. possint. |, *(1)* ⟨termin⟩ *(2)* incognitis non mutatis. *erg.* | Esto *L* 12–297,1 secundum *(1)* posteriore *(2)* priorem *L* priorem $x \sqcap \dfrac{y^2 \ddagger \frac{a}{q}x^2}{2a}$, qui valor substitutus in priore, dabit $\frac{b}{a}\,xy\ \dfrac{\dagger\frac{ad}{q}y^2 - \frac{a^2d}{q^{[2]}}x^2}{2a} + cy + ad$, vel $\dfrac{by^3}{2a^2}$ $(\omega\alpha)\dfrac{a}{2[a]q}x^2y$ loco $\frac{b}{a}xy$. Contra ex posteriore fiet $\dfrac{2\cancel{d}\frac{b}{\cancel{d}}xy + 2acy + 2a^2d}{\ddagger\frac{ad}{q}}$ $\dagger\frac{a}{q}x^2 - y^2 \sqcap 0$ vel $\frac{b}{a}xy + cy + ad, \llcorner\, \dagger\frac{a}{q}x^2 - y^2 \lrcorner \frown [\ddagger]\dfrac{ad}{q} \sqcap 0.$

$$\begin{array}{llll} 2\dfrac{b}{a}xy & \dfrac{\dagger\frac{ad}{q}y^2 - \frac{a^2d}{q^{[2]}}x^2}{2a} & +2cy\ \dagger\dfrac{ad}{q}\ x & +2ad \\ \quad +\dfrac{\delta}{a}y^2 & \ddagger\dfrac{\delta\cancel{d}}{q\cancel{d}}x^2 & & -2\delta\ \ldots \end{array}$$

$$\frac{b}{a}y \dagger \frac{ad}{q} + \frac{cy}{x} + \frac{ad}{x} \sqcap 0.$$

Ergo satis observo, ex duobus locis datis utcunque compositis non semper posse tertium produci, quem velis. Posse semper produci terminum quem velis, sed produci alios quos nolis. Difficultatem a. esse rem omnem reducere, ad certos terminos.

1 dabit *(1)* $\overset{\langle y^2\rangle \ddagger \frac{a}{q}x^2}{\overset{\vee}{\frac{b}{a}xy}}$ *(2)* $\overset{\langle\frac{2b}{a}x\rangle \dagger \frac{a}{q}x^2}{\overset{\vee}{\frac{b}{a}xy}}$ *(3)* $\frac{b}{a}xy$ *L* 6 f. $\dagger\frac{ad}{q} | \frac{z}{z}$ *gestr.* $| + \ldots 0$ *(1)* Apparet *(2)* Ergo *L* 8 f. produci. | , qvem ... terminos. *erg.* | *L* 9–298,1 terminos. *(1)* $\dfrac{d - (\langle\text{—}\rangle)y}{}$ *(2)* $\dfrac{1\langle\text{— —}\rangle\,\overline{(\alpha,\alpha\omega)}y}{}$ *(3)* $\dfrac{d\cancel{y} - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}y\cancel{y}}{\overline{(\alpha,\alpha\omega)}f\overline{(\alpha\omega,\alpha)}x}$ *L*

2 $(\omega\alpha)$: Die Darstellung von Doppelvorzeichen mittels griechischer Kleinbuchstaben und ihre Identifikation mit der Notation, wie sie im Stück bis hier verwendet wird, erläutert Leibniz in S. 136 Z. 16 bis S. 141 Z. 14.

$$\frac{d\cancel{y} - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\, y\cancel{y}}{\overline{(\alpha,\alpha\omega)}\, f\, \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\, x} \sqcap \frac{\overset{\substack{2ax\,\overline{(\alpha\omega)}\,\frac{a}{q}x^2\\ \vee}}{y\cancel{y}}}{a\,\overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,\frac{a}{q}x} \quad \text{ponamus} \quad x \sqcap \frac{y^2}{2a}\,\overline{(\omega\alpha)}\,\frac{\cancel{d}}{\cancel{d}}\,\frac{x^2}{2q}$$

$$y^2 \sqcap 2ax\,\overline{(\alpha\omega)}\,\frac{a}{q}x^2$$

$$\sqcap \cancel{x} + \frac{a\cancel{x}}{a\overline{(\alpha\omega)}\frac{a}{q}x} \sqcap \frac{d,\frown \dfrac{2a\cancel{x}\overline{(\alpha\omega)}\frac{a}{q}x^{\cancel{2}}}{\cancel{y}} - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,2a\cancel{x}y - \overline{(\alpha,\alpha\omega)}[\frac{a}{q}]x^{\cancel{2}}y}{\overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,fy\,\overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,xy}$$

fiet $\overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,afy\ \ \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,axy\ \ \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,\frac{a}{q}fyx\ \ \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,x^2y \sqcap 2ad^2\ \ \overline{(\alpha\omega)}\,\frac{a^2d}{q}x^2\ \ \overline{(\alpha\omega)}\,\frac{2a^2d}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2 - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,2a^2y - \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\frac{2a^2}{q}xy - \overline{(\alpha,\alpha\omega)}\,axy - \overline{(\alpha\omega,\alpha)}\,\frac{a}{q}x^2y.$

Si tres sint aequationes duos habentes terminos incognitorum communes, illi duo termini semper aequationum illarum collatione tolli possunt. Ut esto $\frac{c}{a}xy^2 + \frac{d}{a}y^2x + a^3$

---

1 *Am Rand:*

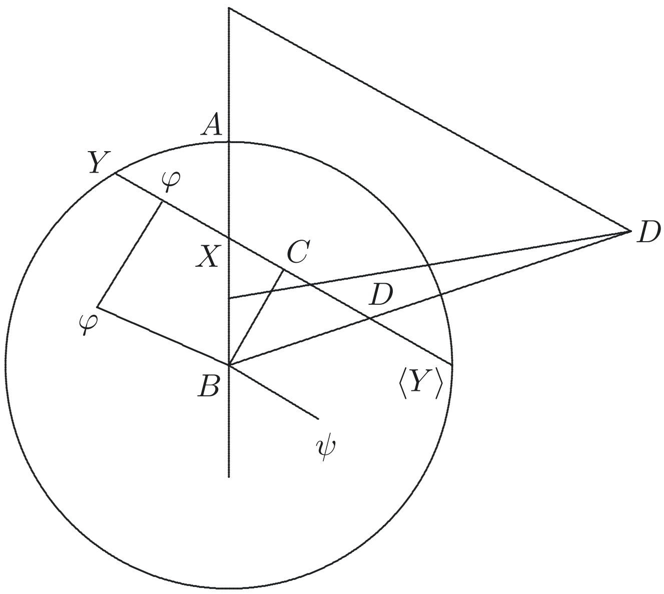
$$\frac{g}{a}\,2ax^2 \ddagger \frac{g\cancel{d}}{q\cancel{d}}\,x^3$$
$$\vee$$
$$ad\cancel{y} + ey^{\cancel{2}} + \frac{g}{a}y^{\cancel{2}}x \sqcap hy^{\cancel{2}} + \frac{k}{a}y^{\cancel{2}}x$$

1 $\sqcap \frac{\dots}{a\,\overline{(\alpha\omega,\alpha)}\frac{a}{q}x}$ *(1)* ⊓ *(2)* posons *(3)* ponamus *L* 5 Si *(1)* duae *(2)* tres *L* 6 aequationum *(1)* duarum *(2)* illarum *L*

---

1 $\overline{(\alpha\omega,\alpha)}$: Leibniz greift hier den Ansatz von S. 295 Z. 7 wieder auf, wobei er nun die auf griechischen Buchstaben basierende Notation der Doppelvorzeichen verwendet. Anstelle von $\dagger$ schreibt er folgerichtig $\overline{(\alpha,\alpha\omega)}$, für $\ddagger$ verwendet er jedoch inkonsequenterweise $\overline{(\alpha\omega,\alpha)}$. Eben diese Gleichsetzung hatte er bereits in S. 139 Z. 12 vorgenommen (dort durch Herausgebereingriff bereinigt). Auch in dem auf Juni 1674 datierten Stück VII, 1 N. 41 S. 244 Z. 15 f. findet sich eine ähnliche Inkonsistenz, nämlich die Gleichsetzung von $\ddagger$ mit $(\alpha\omega,\omega)$. 3 fiet: Die folgende Gleichung leidet unter einer größeren Anzahl an Fehlern.

$+y^2d \sqcap 0$ et $\dfrac{f}{a}xy^2 + \dfrac{g}{a}y^2x + b^3 + x^2d$, tolli possunt xy^2, et y^2x earum collatione, quod ita ostendo.



[*Fig. 1*]

Viam tandem reperisse visus sum, aequationes quibus continetur xy perducendi ad circulum. Esto centro B. radio BA circulus descriptus et punctum in circumferentia ejus, Y a quo ordinata ad radium BA, angulum faciens datum YXB. Ex B centro in ordinatam

3 *Dazu am gegenüberliegenden Rand:* Sic potius: $\varphi\varphi \sqcap X\psi \sqcap x$. $\psi D \sqcap d$. $X\varphi \sqcap \varphi$.

2–4 ostendo. *(1)* xy^2, in utraqve aeqvatione reddatur terminus purus. *(2)* Vi⟨—⟩ *(3)* Viam *L* 4 xy *(1)* facile *(2)* perducendi *L* 5 Esto *(1)* radio BA *(2)* centro *L* 6 datum. *(1)* YAX producatur YX, si opus est donec *(2)* YXB *L*

3 *Fig. 1*: Die Figur ist aufgrund von starker Überarbeitung mit vielen Löschungen und daraus folgendem, seinerseits zu Papierverlust führendem Tintenfraß nur eingeschränkt lesbar. So lässt sich etwa nicht mehr feststellen, welchen Punkt Leibniz als Ende der Strecke $X\psi$ bezeichnen wollte. Eine Streichung der Figur ist angedeutet. 4 Viam: Vgl. hierzu dagegen noch VII, 1 N. 129 S. 830 Z. 10 f., N. 130 S. 835 Z. 11–15 und N. 131 S. 856 Z. 3–5 sowie fig. 5 u. 6.

YX productam si opus est, ducatur perpendicularis BC. Quoniam Angulus YXB datus est, datus erit etiam angulus BXC, et ratio rectarum BC. CX. BX. Ponatur $BX \sqcap x$. erit $BC \sqcap \frac{c}{a}x$. posito $\frac{BC}{BX} \sqcap \frac{c}{a}$. Radius circuli ponatur b. erit $CY \sqcap \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}$ et $XC \sqcap \sqrt{x^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}$, sive $x\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$ eritque YX seu $y \sqcap \sqrt{b^2 - \frac{c^2}{a^2}x^2}\,(\mp)\,x\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}$. Quod $(\mp)$ significat $-$ si angulus YXB est obtusus ut si in figura, at idem significaret $+$, si angulus esset acutus. Ergo $y^2\,(\pm)\,\frac{2yx}{a}\sqrt{a^2-(c^2)} + \frac{x^2\boxed{a^2 - x^2c^2}}{\boxed{a^2}} \sqcap (b^2)\boxed{-\frac{(c^2)}{a^2}x^2}$

sive fiet $y^2\,(\pm)\,\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}yx + x^2 - (b^2) \sqcap 0$.

Literae autem $c.\,b.$ mutentur in alias ne aequivocationem pariant, et ponatur:

$$y^2\,(\pm)\,\frac{\sqrt{a^2-\theta^2}}{a}yx + x^2 - (\lambda^2) \sqcap 0.$$

At aequatio data fuit $\frac{b}{a}xy \mp \frac{ad}{q}x + cy + ad \sqcap 0$ et si pro $\mp\frac{ad}{q}x$ substituatur ejus valor

1 Angulus *(1)* YAX *(2)* YBX *(3)* YXB *L* 2 BXC, *(1)* ei aeqvalis, ergo et ⟨—⟩ *(2)* et *L* 3 $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{BX}} \sqcap \frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}$. *(1)* | Unde *nicht gestr.* | CY $\sqcap$ b *(2)* Radius *L* 6 acutus. *(1)* ponamus autem hoc ⟨loco nisi⟩ si *(2)* ergo *L* 7 f. $\sqcap$ 0. *(1)* Jam aeqvatio data est $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}$ *(2)* Jam aeqvatio data est $\frac{(\mathrm{b})}{\mathrm{a}}\mathrm{xy}$ *(3)* literae *L* 10 $\sqcap$ 0 *(1)* dividantur omnia per $\mp\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{q}}$. *(2)* et *L* 10 pro *(1)* x simplicius substituatur ejus valor $\frac{\mathrm{y}^2 \pm \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}}$, *(a)* fiet $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{a}}\mathrm{xy}, \mp\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{q}} \frown \frac{\mathrm{y}^2 \pm \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}} + \mathrm{cy} + \mathrm{ad}$. *(b)* et multiplicentur omnia per *(aa)* $\delta\alpha$ *(bb)* $\frac{\delta}{\mathrm{a}}$ fiet $\frac{\delta \mathrm{b}}{\mathrm{a}^2}\mathrm{xy},, \mp\frac{\mathrm{ad}\delta}{\mathrm{qa}}, \frown \frac{\mathrm{y}^2 \pm \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{2\mathrm{a}} + \frac{\delta}{\mathrm{a}}\mathrm{cy} + \frac{\mathrm{ad}\delta}{\mathrm{a}}$. addantur *(aaa)* $2\mathrm{ax} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(bbb)* $\frac{2\gamma \mathrm{a}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} \mp \frac{\mathrm{a}\gamma}{\mathrm{aq}}\mathrm{x}^2 - \frac{\gamma}{\mathrm{a}}\mathrm{y}^2$ *(2)* $\mp\frac{\mathrm{ad}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}$ *L*

---

7 $\frac{\sqrt{a^2-c^2}}{a}yx$: Der Faktor 2 ist hier verloren gegangen. Dies hat Folgen bis S. 302 Z. 1.

$\ddagger \frac{ad}{q} \frown \frac{y^2 \underline{\ddagger} \frac{a}{q}x^2}{2a}$ fiet $\frac{b}{a}xy \ddagger \frac{\cancel{d}d}{2q\cancel{d}}y^2 - \frac{ad}{2q^2}x^2 + cy + ad \sqcap 0.$ et dividendo omnia per $\ddagger \frac{d}{2q}$, fiet:

$$\ddagger \frac{2qb}{ad}xy + y^2 \underline{\ddagger} \frac{a}{q}x^2 \ddagger \frac{2d}{q}cy \ddagger 2qa \sqcap 0.$$

Porro in circulo assumto in figura loco rectae BX, quam appellavimus x, adhibeatur recta XD, quae ad ipsam $BX \sqcap x$ in ratione sit data, et appelletur x, tunc BX erit $\sqcap \frac{\mu}{a}x$ et aequatio ad circulum erit: $y^2 \,(\underline{\ddagger})\, \frac{\mu\sqrt{a^2-\theta^2}}{a^2}yx + \frac{\mu^2}{a^2}x^2 - \lambda^2.$

Conferatur aequatio $\quad y^2 \,(\underline{\ddagger})\, \frac{\mu\sqrt{a^2-\theta^2}}{a^2}yx + \frac{\mu^2}{a^2}x^2 - \lambda^2$

$$\begin{array}{llllllll}
\text{vel} & y^2 & +2\varphi\; y & (\underline{\ddagger})\frac{\mu\sqrt{a^2-\theta^2}}{a^2}\; yx & (\underline{\ddagger})\frac{\mu\sqrt{a^2-\theta^2}}{a^2}\varphi\; x & +\frac{\mu^2}{a^2}\; x^2 & -\lambda^2 \\
 & & & & & & +\varphi^2 \\
\text{cum altera} & y^2 & \ddagger\frac{2dc}{q}\; y & \ddagger\frac{2qb}{ad}\; yx & \ddagger\frac{2a\psi}{q}\; x & \ddagger\frac{a}{q}\; x^2 & \ddagger 2qa \\
 & & \ddagger\frac{2qb}{ad}\psi \ldots & & & & \ddagger\frac{a}{q}\psi^2
\end{array}$$

8 *Dazu am Rand:* ponendo $y+\varphi$ pro y

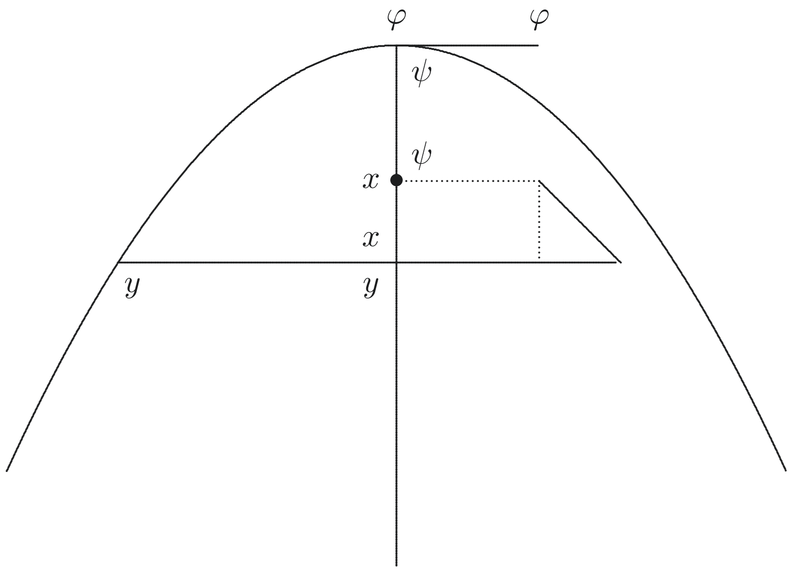
10 *Dazu am Rand:* ponendo $x+\psi$ pro x

4 Porro *(1)* loco x *(2)* in *L* 5 $\sqcap$ x *erg. L* 5 et *(1)* ideo appelletur *(a)* μ *(b)* $\frac{\theta}{\text{a}}$x *(2)* appelletur *L* 6 f. $-\lambda^2$ *(1)* Conferantur hae duae aqvationes *(2)* Conferatur *L* 10 cum *(1)* alia *(2)* altera *L*

3 $\ddagger\frac{2d}{q}cy$: Richtig wäre $\ddagger\frac{2q}{d}cy$. Der Fehler wirkt sich bis S. 302 Z. 2 aus. 10 altera: Bei der Substitution von x durch $x+\psi$ in der aus Z. 3 stammenden Gleichung übernimmt Leibniz die bereits enthaltenen Fehler und ändert zudem irrtümlich das Doppelvorzeichen von $\frac{a}{q}$ in $\ddagger$.

fiet $\mu \sqcap \sqrt{\dagger \frac{a^3}{q}}$. Ponatur $(\overline{\ddagger}) \sqcap \dagger$ si placet, fiet $\sqrt{a^2 - \theta^2} \sqcap \frac{2qba^2}{ad\mu}$ sive fiet $\theta^2 \sqcap -\frac{4q^2b^2a^2}{d^2\mu^2}$ $+a^2$. Porro $\varphi \sqcap \dagger \frac{dc}{q} \dagger \frac{2qb}{ad}\psi$, sive $\psi \sqcap \frac{\varphi \ddagger \frac{dc}{q}}{\dagger \frac{2qb}{ad}}$, et idem $\psi \sqcap \frac{q^2b}{a^2d}\varphi$ fiet $\varphi \sqcap \frac{\dagger \frac{dc}{q}}{1 - \frac{q^2b}{a^2d}}$. Data φ datur et ψ. et utraque data, λ.

Constructio ergo ita absolvetur:



[*Fig. 2*]

2 idem *(1)* $\psi \sqcap$ *(a)* $\cancel{\dagger}\varphi\cancel{\mu}$q *(b)* $\boxed{\frac{\mu\sqrt{\mathrm{a}^2 - \theta^2}}{\mathrm{a}^2}}$ *(c)* $\frac{\langle - \rangle}{\mathrm{qad}}$ *(2)* $\psi \sqcap L$

---

2 Porro: In der folgenden Gleichung geht der Faktor 2 sowohl vor φ als auch vor $\ddagger \frac{dc}{q}$ verloren.

2 fiet: Die zum Wert für φ führende Umformung ist nicht korrekt ausgeführt.

Pro x seu abscissa ex axe Sectionis Conicae datae ponatur $(x) + \psi$. Imo hoc quidem modo ad constructionem veniri non potest quia aut x aut y coincidere non poterunt.

---

2 *Unter dem Text Nebenrechnung ohne Bezug zum Stück:*

$$\begin{array}{l}
20 - 18 - 1 \\[4pt]
\dfrac{18}{20} \Big| \dfrac{9}{10} \\[8pt]
\cancel{20}\ \dfrac{9}{\cancel{1}0} \frown 20 \\[8pt]
\dfrac{1\cancel{8}}{\cancel{2}0} \frown \begin{array}{c}\cancel{20} \\ 1\frac{1}{2}\end{array}
\end{array}$$

1 Pro *(1)* y. seu *(a)* applicata *(b)* ordinata perpendiculari *(2)* x. *L*

30. DUAE AEQUATIONES II
[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 288–289. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 855 B

Datierungsgründe: Vgl. N. 29.

[*Teil 1*]

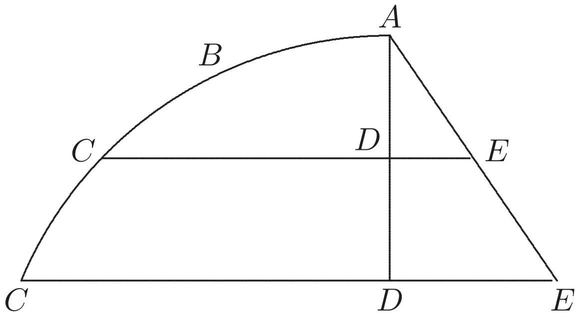
Duae sunt datae aequationes:

$$\begin{array}{llllll}
\text{Aeq. 1.} & \ddagger\,(\ddagger)\,\dfrac{a}{q}\,xy & \ddagger\,\dfrac{ad}{q}\,x & \ddagger\,(\ddagger)\,a\,y+da, & \sqcap & 0 \\
 & (\ddagger)\;1 & & (\ddagger)\;f & & \\
\text{vel} & \dfrac{b}{a}\,xy & \ddagger\,\dfrac{ad}{q}\,x & +\;c\,y+da & \sqcap & 0.
\end{array}$$

Et altera ad sectionem Conicam universalem

$$\text{Aeq. 2.}\qquad 2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 - y^2 \sqcap 0.$$

Quaeritur modus efficiendi duas aequationes alteram ad circulum, alteram ad sectionem Conicam Universalem, earundem incognitarum, angulique ejusdem.

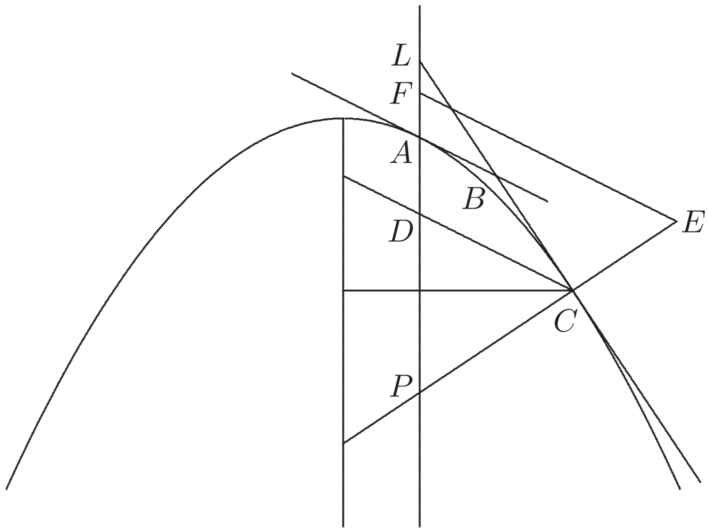


[*Fig. 1*]

8 Aeq. 1. *erg. L* 10 vel ... 0. *erg. L* 12 Aeq. 2. *erg. L*

8 Aeq. 1.: Vgl. die Anmerkung zu S. 294 Z. 14–18.

Esto arcus circuli ABC, diameter AD sinus rectus CD sinus versus abscissa AD: Angulo quolibet DAE ducatur recta AE et CD producatur in E et CE appelletur y, et DE $\frac{\gamma}{a}x$ et $AD \sqcap x$. Fiet $\sqrt{2ax - x^2} \sqcap y - \frac{\gamma}{a}x$. Fietque: $2ax - x^2 \sqcap y^2 + \frac{\gamma^2}{a^2}x^2 - 2\frac{\gamma}{a}xy$.



[*Fig. 2*]

Esto sectio Conica ABC, cujus diameter AD, vertex A, ordinata sed non perpendicularis CD, perpendicularis ad curvam ECP, punctum datum ex quo perpendicularis E, distantia ejus a diametro, parallela ordinatae, EF tangens LC. Quaeritur AD. Triangula FEP et DCP similia sunt. Datur autem $FE \sqcap d$, et $AF \sqcap f$. Et vocabimus $AD \sqcap x$, et $DC \sqcap y$, et $DP \sqcap p$.

Est autem $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. Item est: $\frac{d}{y} \sqcap \frac{(\overset{+}{\mp})f\,(\overset{+}{\mp})x\,(\overset{+}{\mp})p}{p}$. Sed cum tres sint incognitae adhuc alia opus est aequatione, quae valorem exprimat ipsius p. Quod in eo

1 AD *(1)* ordinata CD $\sqcap$ y *(2)* sinus rectus *L* 3 et AD $\sqcap$ x *erg. L* 7 eius *(1)* a perp *(2)* a diametro *L* 9 f. DP $\sqcap$ p. *(1)* | Sed possumus *nicht gestr.* | qvoqve investigare *(2)* Est autem *L* 11 ipsius p. *(1)* Ducatur tangens LC. constat esse *(2)* qvod *L*

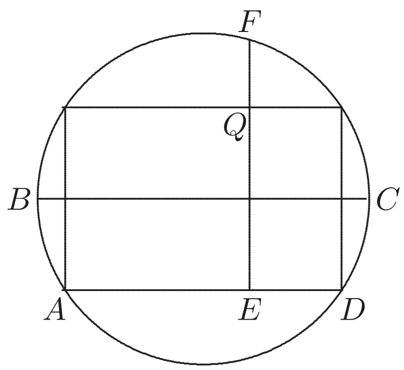
---

10 $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$: Wenn die Ordinate nicht senkrecht auf der (hier als *diameter* bezeichneten) Achse steht, ist die allgemeine Kegelschnitt-Formel nicht gültig. 10 $\frac{d}{y} \sqcap \frac{(\overset{+}{\mp})f\,(\overset{+}{\mp})x\,(\overset{+}{\mp})p}{p}$: Diese Gleichung ist äquivalent zur ersten Gleichung in S. 295 Z. 7. Vgl. auch den Ansatz in S. 293 Z. 1.

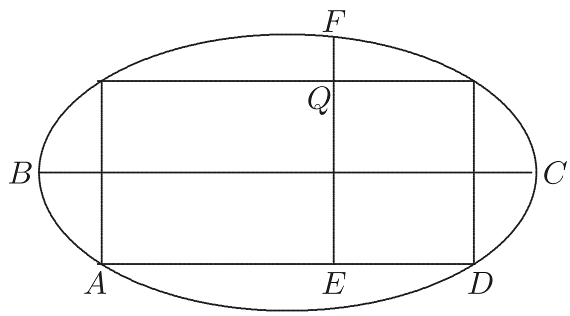
constabit, si ipsam EC vel PC cogitemus esse omnium possibilium minimam. Datur angulus EFP. video rem difficilioris calculi fore, si angulus non sit rectus.

In Aeq. 1. pro $\frac{ad}{q}x$ substituatur ejus valor ex aeq. 2. ubi $x \sqcap \frac{y^2 \ddagger \frac{a}{q}x^2}{2a}$. Pro $\frac{ad}{q}x$ fiet $\frac{d}{2q}y^2 \ddagger \frac{da}{2q^2}x^2$, et habebimus $\frac{b}{a}xy \ddagger \frac{d}{2q}y^2 - \frac{da}{2q^2}x^2 + cy + da$. Ponatur jam $z \sqcap y + \frac{\delta}{a}x$ tolli poterit xy. Sed angulus quem z et y comprehendent non erit amplius rectus.

[*Teil 2*]



[*Fig. 3*]



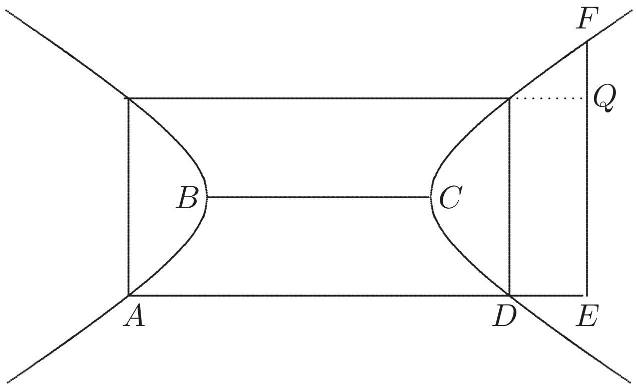
[*Fig. 4*]

Rectangulum $DEA \sqcap$ rectangulo EFQ in circulo. At in Ellipsi est, ut axis seu latus transversum BC ad rectum. Quae cum in circulo aequalia sint, ideo et Rectangula ista aequalia sunt.

---

8 f. *Dazu am Rand:* $\frac{DEA}{EFQ} \sqcap \frac{q}{a}$

1 ipsam *(1)* PE, *(2)* EC | vel PC *erg.* | cogitemus *L* 2 EFP. *(1)* datur ratio E *(2)* video *L* 8 f. latus *(1)* rectum, ad transversum *(2)* rectum BC ad transversum *(3)* transversum *L* 9 et | Triangula *ändert Hrsg.* | ista *L* 11 $\frac{\mathrm{DEA}}{\mathrm{EFQ}} \sqcap$ | $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *ändert Hrsg.* | | Ergo in parabola DAE $\sqcap$ 0 id est positis *gestr.* | *L*



[*Fig. 5*]

In Hyperbola ut BC ad latus rectum ita AED (vel DEA) rectang. ad EFQ. Idem in parabola. Ponatur lateris transversi ad rectum ratio $\dfrac{b}{z-b}$, linea $AD \sqcap \dfrac{dq}{z-b}$. Et DE [$\sqcap$] y, et $QF \sqcap v$, et $QE \sqcap \dfrac{zq}{b}$ fiet $DEA \sqcap \dfrac{dq}{z-b}y - y^2$, et $EFQ \sqcap \dfrac{zq}{b}v + v^2$, et quia $\dfrac{\dfrac{dq}{z-b}y - y^2}{\dfrac{zq}{b}v + v^2} \sqcap \dfrac{b}{z-b}$, fiet aequatio, quae est $\dfrac{qd}{b}y - y^2 + \dfrac{z}{b}y^2 \sqcap \dfrac{zq}{b}v + v^2$, quae est ad Hyperb. Parab. Ellips.

---

3 *Hierzu weiter oben am Rand:* $\dfrac{z-b}{b} \sqcap \dfrac{r}{t}$. Ergo $\dfrac{z}{b} \sqcap \dfrac{r}{t} + 1$.

2 f. Idem *(1)* ad *(2)* in | parabolam ponatur. *ändert Hrsg.* | lateris *(a)* recti ad transversum ratio $\dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}$ *(b)* transversi *L* 4 fiet *(1)* aeqvatio: d *(2)* DEA *L*

---

3 $\dfrac{b}{z-b}$: Siehe auch die Anmerkung zu S. 280 Z. 1. 5 $\dfrac{qd}{b}y - y^2 + \dfrac{z}{b}y^2 \sqcap \dfrac{zq}{b}v + v^2$: Die Vorzeichen von y^2 und $\dfrac{z}{b}y^2$ in dieser Gleichung sind vertauscht. Dies belastet die Berechnungen bis S. 308 Z. 10.

Seu ponendo $y \sqcap e+h$, et $v \sqcap w+k$, fiet:

$$\frac{qd}{b}e+\frac{qd}{b}h \begin{cases} -\;\; e^2 \\ +\frac{z}{b} \end{cases} \begin{cases} -\;\; 2eh \\ +\frac{z}{b} \end{cases} \begin{cases} -\;\; h^2 \\ +\frac{z}{b} \end{cases} \sqcap \frac{zq}{b}w+\frac{zq}{b}k+w^2+2wk+k^2.$$

Sive ponendo y pro e, et v pro w,

$$\begin{array}{ccccccc} -\;\; y^2 & +\frac{qd}{b} & y & \boxed{+\frac{qdh}{b}} & \sqcap\; v^2 & \frac{zq}{b} & v \\ +\frac{z}{b} & \boxed{-2h} & & -\frac{zq}{b}k & & +2k & \\ & \boxed{+\frac{2zh}{b}} & & -k^2 & & & \\ & & & \boxed{-h^2} & & & \\ & & & \boxed{+\frac{z}{b}h^2} & & & \end{array}$$

Ut rem absolutius constituamus, ita agendum est: Ratio laterum Rectanguli inscribendi esto $\frac{c}{a}$. Latus unum, DA, esto $\sqcap l$. Latus alterum EQ erit $\sqcap \frac{c}{a}l$. Jam ED esto e,

---

5 f. *Dazu am Rand:* $-1+\frac{z}{b} \sqcap \frac{-b+z}{b}$

5–9 *Dazu am Rand:* $\frac{z}{b}$ data est et ideo pro ea aliquid substitui potest, quod in parabola significat 1. Restat quaerenda tantum $\frac{q}{b}$, et d. et h. et k. seu 4 incognitae.

1 w + g., *L ändert Hrsg.* 3 $+\frac{\mathrm{zq}}{\mathrm{b}}$ *(1)* $\mathrm{g}+\mathrm{w}^2+2\mathrm{wg}+\mathrm{g}^2$. *(2)* $\mathrm{k}+\mathrm{w}^2+2\mathrm{wk}+\mathrm{k}^2$. *L*

5–10 $\begin{array}{l}\frac{\mathrm{zq}}{\mathrm{b}} \\ +2\mathrm{k}\end{array}$ v *(1)* conferatur cum aeqvatione data: *(2)* conferatur cum aeqvatione data $\begin{array}{l} -\frac{\beta}{\mathrm{r}}\mathrm{y}^2+\frac{\mathrm{rml}}{\mathrm{g}^2} \\ \qquad\;\; -\frac{\mathrm{r}^2\mathrm{n}}{\mathrm{g}^2} \\ \qquad\;\; +\frac{\mathrm{l}^3}{8\mathrm{g}^2} \\ \qquad\;\; +\frac{\beta\mathrm{l}}{2\mathrm{r}} \end{array}$ *(3)* Ut *L* 10 f. laterum | Trianguli *ändert Hrsg.* | inscribendi *L* et FQ esto w. Erit $AED \sqcap e \frown l - e \sqcap le - e^2$. Rectangulum vero $EFQ \sqcap \frac{c}{a}lw + w^2$. Jam $\dfrac{le - e^2}{\frac{c}{a}lw + w^2} \sqcap \dfrac{q}{a} \sqcap \dfrac{\delta}{\gamma - \delta}$.

Ex quatuor indeterminatis $l.\,c.\,\delta.\,\gamma$ manifestum est determinari duas tantum. Nam per hanc aequationem determinatur una et, data δ datur et γ, quia datur $\dfrac{\delta}{\gamma - \delta}$ ergo restant indeterminatae duae. In parabola vero etiam ipsa ratio laterum, DA, ad QE, cum infinita sit, determinata est, ideoque restaret tantum incognita una. Respondeo etsi infinita non ideo est data. Conferemus ergo aequationem superiorem cum data:

$$\begin{array}{cc} -\dfrac{\beta}{r} & \\ \boxed{\boxed{+\dfrac{l^2}{4}}} & \end{array} y^2 \quad \odot\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} +\dfrac{rml}{2g^2} \\ -\dfrac{r^2 n}{g^2} \end{array}\right\} ☿ \\ \boxed{-\dfrac{l^3}{8g^2}} \\ -\dfrac{\beta l}{2r} \end{array}\right. y \quad -\frac{r^3 p}{g^2} \sqcap v^2 \quad ☽\left\{\begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} +\dfrac{rm}{g} \\ \boxed{-\dfrac{l^2}{4g}} \end{array}\right\} ♀ \\ -\dfrac{\beta}{r}g \end{array}\right. v$$

Habemus ergo in summa quantitates indeterminatas: $q.\,\dfrac{d}{b}.\,h.\,k.\,\dfrac{\beta}{r}.\,g$. Et aequationes collatitias tantum 4, ergo duae ex his quantitatibus pro arbitrio definiri possunt. Ac

1 AED *(1)* y $\frown$ *(a)* c *(b)* $\mathrm{l} - \mathrm{y} \sqcap \mathrm{ly} - \mathrm{y}^2$ *(2)* $\mathrm{w} \frown \mathrm{l} - \mathrm{w} \sqcap \mathrm{lw} - \mathrm{w}^2$ *(3)* | w *ändert Hrsg.* | $\frown \mathrm{l} - \mathrm{e} \sqcap \mathrm{le} - \mathrm{e}^2$ *L*

1 f. Iam | $\dfrac{\mathrm{le} - \mathrm{e}^2}{\frac{\mathrm{c}}{\mathrm{a}}\mathrm{l} + \mathrm{w}^2}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}} \sqcap$ *(a)* $\dfrac{\mathrm{b}}{\mathrm{z} - \mathrm{b}}$ *(b)* $\dfrac{\langle \mathrm{t} \rangle}{\langle \mathrm{r} \rangle}$ *(c)* $\dfrac{\langle \mathrm{m} \rangle}{\langle \mathrm{r} \rangle}$ *(d)* $\dfrac{\delta}{\gamma - \delta}$ *L*

3 qvatuor *(1)* incognitis l. *(2)* indeterminatis *L* 3 determinari *(1)* unam tantum, nisi in parabola, ubi *(2)* duas *L* 5 duae. *(1)* pro diversis autem incognitis seu arbitrariis in superiori aeqvatione, sumendae d et z. nam in parabola, ratio lateris recti ad transversum *(2)* In *L* 5 laterum, | DE *ändert Hrsg.* |, ad *L* 6 ideoqve *(1)* restarent tantum incognitae duae. *(2)* restaret *L*

8–11 $-\frac{\beta}{r}y^2 \ldots v$: Vgl. diese Gleichung mit den sich jeweils in Details unterscheidenden Gleichungen in S. 263 Z. 4–6, S. 272 Z. 4–7 und S. 287 Z. 9–12.

proinde g. ponatur $\sqcap$ r. et ponatur k. $\sqcap$ 0, habebitur $\dfrac{\beta}{r}$. per aeq. 1, q. per ultimam, d. et h. per secundam et 3$^{\text{tiam}}$. Rectius h. ponemus $\sqcap$ 0 quam k.

Atque si g ponatur $\sqcap$ r. et $h \sqcap 0$, habebimus:

per (1) $\beta \sqcap \dfrac{+rb-zr}{b}$ per (2) $\dfrac{qd}{b} \sqcap \odot - \dfrac{\beta l}{2r}$ $k \sqcap \dfrac{-\frac{z}{b}q + \rightmoon}{2}$ per (4).

Pro $\dfrac{z}{b}$ ponatur γ, fietque $k^2 \sqcap \dfrac{-\gamma^2q^2+2\gamma q\rightmoon + \rightmoon^2}{4}$. Unde per aequat. 3. erit $2\gamma^4q^2-4\gamma q\rightmoon+\gamma^2q^2\,\boxed{-2\gamma q\rightmoon}+\rightmoon^2 \sqcap -4rp$ sive ordinando $q^2-\dfrac{4\gamma\rightmoon}{2\gamma^4+\gamma^2}q \sqcap \dfrac{-\rightmoon^2-4rp}{2\gamma^4+\gamma^2}$. Habetur ergo q. ac proinde et d.

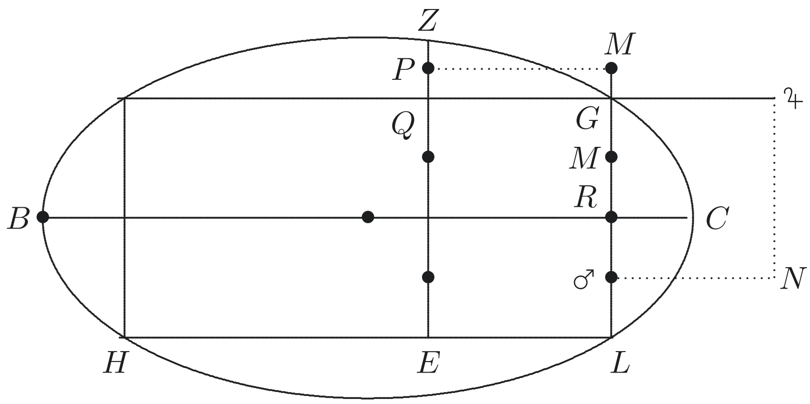
Rectius fortasse $\dfrac{l^2}{4}y^2$. explicabitur, quia et in Circulo explicanda est. Constructio haec erit: BC Lateri Transverso primario sectionis Conicae datae, recte collocato circumscribatur rectangulum cujus laterum ratio data. Latus autem transversum in qualibet sectione Conica ita recte positum intelligo, ut duos axis ejusdem vertices conjungit, quales sunt in Ellipsi duo vertices oppositi, in Hyperbola, vertices oppositarum sectionum, quas pro una figura habeo, quemadmodum in Ellipsi, eo discrimine quod in Ellipsi convergunt, in Hyperbola divergunt sectiones. Parabolam autem pro Hyperbola aut Ellipsi habeo infiniti lateris transversi. Circumscribi autem ita intelligo, ut latus transversum

4 per (1) *erg. L* 4 per (2) *erg. L* 4 f. per *(1)* (2). ideoqve $\mathrm{k}^2 \sqcap$ *(a)* $\dfrac{\mathrm{z}^2}{4\mathrm{b}^2}\mathrm{q}^2 - \dfrac{2\mathrm{z}\rightmoon\mathrm{q}}{4\mathrm{b}} + \dfrac{\rightmoon^2}{4}$ *(b)* $\dfrac{\mathrm{z}^2\mathrm{q}^2\mathrm{b} - 2\mathrm{z}\rightmoon\mathrm{qb} + \rightmoon^2\mathrm{b}^2}{4\mathrm{b}^2}$ Unde per aeqvat. (3) erit $\dfrac{\mathrm{z}^2}{2\mathrm{b}^2}\mathrm{q}^2 - \dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}\mathrm{q}\rightmoon$ *(2)* (4). pro $\dfrac{\mathrm{z}}{\mathrm{b}}$ *L* 6 erit *(1)* z *(2)* $\dfrac{\gamma^4\mathrm{q}^2 - 2\gamma\mathrm{q}\rightmoon + \gamma^2\mathrm{q}^2\,\boxed{+2\gamma\mathrm{q}\rightmoon} + \rightmoon^2}{4} \sqcap -\mathrm{r}^2\mathrm{p}$ *(3)* $2\gamma^4\mathrm{q}^2 - 4\gamma\mathrm{q}\rightmoon + \gamma^2\mathrm{q}^2\,\boxed{-2\gamma\mathrm{q}\rightmoon} + \rightmoon^2$ *L* 8 $\dfrac{\mathrm{l}^2}{4}\mathrm{y}^2$ *(1)*, non *(2)*. explicabitur *L* 9 primario *erg. L* 9 recte collocato *erg. L* 10 cujus ... data. *erg. L* 11 Conica *(1)* ⟨voco⟩, qvod duos eius vertices *(2)* ita | recte *erg.* | positum *L* 13 qvas *(1)* reapse *(2)* pro *L* 13 habeo, *(1)* nisi q *(2)* qvemadmodum *L* 14 f. *(1)* Elli *(2)* Parabolam ... Hyperbola *(a)* et *(b)* aut Ellipsi ... transversi *erg. L*

---

5 $k^2 \sqcap \dfrac{-\gamma^2q^2+2\gamma q\rightmoon + \rightmoon^2}{4}$: Die Vorzeichen der beiden ersten Summanden im Zähler des Bruches sind vertauscht. 5 aequat. 3.: Die in der folgenden Zeile angegebenen, unter Verwendung des falschen Wertes für k^2 vorgenommenen Umformungen dieser Gleichung leiden zusätzlich unter weiteren Fehlern.

cuidam alteri rectanguli lateri parallelum sit, et medium ejus in centrum rectanguli incidat. Unde dici poterat Rectangulum sectioni Conicae ita adscribatur, ut centrum ejus coincidat cum centro sectionis; et latus alterum sit axi parallelum.



[*Fig. 6*]

Hujus rectanguli unum latus quod axi parallelum HL esto $\dfrac{dq}{z-b}$, sive $\dfrac{dqb}{b, \frown z-b}$, id est pro $\dfrac{d}{b}$ ponendo δ, pro $\dfrac{b}{z-b}$ ponendo $\lambda \sqcap 1-\gamma$ dicemus fore ad q. in composita ratione δ, et λ ponendo λ rationem lateris transversi ad rectum. Alterum LG erit ad q. in ratione γ. Producatur LG in M, ita ut recta GM sit k. Producatur G in ♃, ita ut G♃ sit $\sqcap \dfrac{♃}{2}$ et ab M versus L sumatur recta M♂, $\sqcap \dfrac{♂}{2}$. Completoque rectangulo ♃M♂ centro N, radio

---

5 *Am Rande:* $\dfrac{d\cancel{q}b \;\; {}^{q\cancel{b}}}{\cancel{b}z-b}$ $\quad \dfrac{\cancel{q}z}{\cancel{b}}$

1 cuidam *erg. L* 1 et *(1)* per eius cen *(2)* medium *L* 5 parallelum *(1)* est, AD *(2)* HL *L* 6 pro *(1)* $\frac{\mathrm{q}}{\mathrm{b}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{b}}$ *L* 6 ponendo *(1)* $1-\gamma$ *(2)* ⟨d⟩ *(3)* $\lambda \sqcap$ *L* 6 ad q. *erg. L* 7 lateris *(1)* recti ad tra *(2)* transversi *L* 7 alterum *(1)* ut QE, *(2)* LG *L* 7 f. ratione *(1)* $\lambda + 1$. *(2)* γ *L*

---

9 rectangulo ♃M♂: Weder handelt es sich bei ♃M♂ im Allgemeinen um ein Rechteck, noch ist der Radius des folgenden Kreises einleuchtend gewählt.

$\sqrt{+\frac{\text{♃}^2}{4}-\frac{\text{♂}^2}{4}}$ describatur circulus, qui secabit sectionem Conicam datam in puncto Z ex qua si ducatur ordinata $ZP.$ ad $MP.$ parallelam $HL.$ erit ZP, ipsa $y.$ quaesita.

Imo $q.$ determinabitur ex eo, quod rectanguli circumscripti laterum ratio datur, ac proinde $q.$ ita calculabimus. Ratio laterum rectanguli est composita ex $\frac{d}{b} \sqcap \delta$, et $\frac{b}{z-b} \sqcap \lambda$ ad $\frac{z}{b} \sqcap \gamma$. ergo est $\frac{\delta\lambda}{\gamma}$ ad 1. Diximus HL esse $\frac{dqb}{b \frown z-b}$ erit ergo $\sqcap t \mp 2CR$ seu, $t \mp 2w$ jam $2rw \mp \frac{r}{t}w^2 \sqcap \frac{z^2q^2}{4b^2}$. Conferatur cum prima aequatione $\frac{q}{b} \sqcap \dfrac{t \mp 2w, \frown \frac{z-b}{b}}{d}$, et $q^2 \sqcap \frac{t^2 \mp 4tw + 4w^2}{d^2}, \frown \frac{r^2}{t^2} \frown b^2 \sqcap 2rw \mp \frac{r}{t}w^2, \frown \frac{4}{\gamma^2}$. Pro parabola neglectis quae non multiplicantur per t^2, fiet: $r^2b^2\cancel{t^2} \sqcap 8\frac{rd^2w\cancel{t^2}}{\gamma^2}$. Id est in parabola erit $w \sqcap \frac{r\gamma^2}{[8]\delta^2}$. Sed brevius ex prima statim aequatione $\frac{dq}{br} \sqcap 1.$ seu $q \sqcap \frac{br}{d}$ et $\frac{zq}{b} \sqcap \gamma\frac{r}{\delta}$.

Pro $\frac{d}{b}$ ponatur δ, pro $\frac{b}{z-b}$ ponatur λ, et ideo $\frac{z-b}{b} \sqcap \frac{1}{\lambda}$, et $\frac{z}{b} \sqcap \frac{1}{\lambda}+1$, seu $\frac{1+\lambda}{\lambda}$. Ponatur jam $HL \sqcap \delta\lambda q$, et LG alterum rectanguli adscribendi latus $\frac{1+\lambda}{\lambda}q$. Datur autem λ, et quia supponitur dari $\frac{HL}{LG}$ supponitur dari et δ. Jamque calculus

---

4 *Am Rande:* $\frac{t\gamma q}{r} \sqcap t$. Ergo $\frac{\gamma q}{r} \sqcap 1$ et $q \sqcap \frac{r}{\gamma}$ et $\gamma q \sqcap r$.

6 *Hierzu am Rand:* $CR \sqcap w$

1 puncto *(1)* qvaesito L. *(2)* Z *L* 2 ordinata *(1)* ad ⟨+⟩ *(2)* ZP. *(a)* ordinatam *(b)* ad MP parallelam *(aa)* LI erit LP *(bb)* HL. *L* 3 qvod *(1)* latera sub ⟨—⟩ *(2)* rectanguli *L* 4 rectanguli *(1)* est *nicht gestr.* d *(2)* est *L* 5 ad 1. *(1)* item q *(2)* diximus *(a)* H *(b)* L *(c)* HL *L* 5 ergo *(1)* zq *(2)* $\sqcap$ *(a)* q $\mp$ 2CR *(b)* t *L* 7 pro parabola *erg.* *L* 8 $2r^2b^2\cancel{t^2} \sqcap \cancel{8}\frac{rd^2w\cancel{t^2}}{\gamma^2}$ *L ändert Hrsg.* 10 $\frac{1}{\lambda}+1.$ *(1)* ponaturqve *(2)* seu *L* 12–313,1 calculus *(1)* investitur *(2)* repetatur *L*

repetatur. HL seu $\delta\lambda q \sqcap BC \mp 2CR$. seu $t \mp 2w$, ponendo $w \sqcap CR$. Ob naturam sectionis Conicae universalem RG id est $\dfrac{LG}{2}$ sive $\dfrac{1+\lambda}{2\lambda}q$, ita fit ex CR, at posita ut dixi $CR \sqcap w$, futura sit RG seu $\dfrac{1+\lambda}{2\lambda}q \sqcap \sqrt{2rw \mp \dfrac{r}{t}w^2}$. Unde $q^2 \sqcap \dfrac{2rw \mp \frac{r}{t}w^2, \frown 4\lambda^2}{1+2\lambda+\lambda^2}$ at ex priori aequatione erit $q^2 \sqcap \dfrac{t^2 \mp 4tw + 4w^2}{\delta^2\lambda^2}$, comparandoque hos duos valores inter se, et in locum λ substituendo $\dfrac{t}{r}$, et pro λ^2 $\dfrac{t^2}{r^2}$, fiet:

$$8\,\delta^2\frac{t^4w}{r^3} \mp 4\frac{t^3\delta^2}{r^3}w^2 \sqcap t^2 \mp 4tw + 4w^2, +2\frac{t^3}{r} \mp 8\frac{t^2}{r}w + 8\frac{t}{r}w^2, +\frac{t^4}{r^2} \mp 4\frac{t^3}{r^2}w + 4\frac{t^2}{r^2}w^2$$

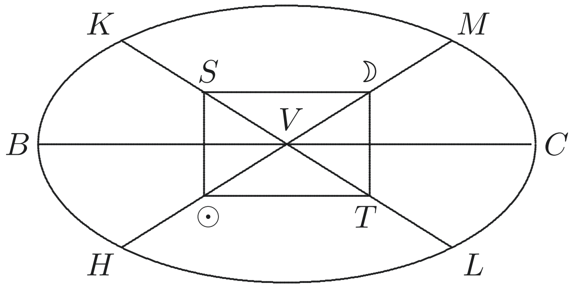
Vel ponendo $\dfrac{1+\lambda}{\lambda} \sqcap \gamma \sqcap \dfrac{z}{b}$, fiet:

$$\frac{2rw \mp \frac{r}{t}w^2}{\gamma^2} \sqcap \frac{t^2 \mp 4rtw + 4w^2}{\delta^2\lambda^2} \quad \text{sive} \quad \frac{w^2 \left\{ \begin{array}{l} \pm 4rt\gamma^2 \;\; w \;.... \\ +\dfrac{2\delta^2t^2}{r} \end{array} \right.}{-4 \mp \frac{r}{t}} \sqcap \frac{t^2}{-4 \mp \frac{r}{t}}$$

Quae aequatio plana est, et ipsa w, sive extractione radicis, sive circulo descripto, statim habetur. Habita autem w, habetur et q.

9 w, *(1)* ope *(2)* sive *L* 10–314,2 et q. *(1)* qvanqvam *(2)* Sed hac aeqvatione *(a)* in circu *(b)* non nisi in Parabola opus est *(3)* Attamen *L*

8 sive: In der ersten Gleichung dieser Zeile ist auf der linken Seite der Faktor 4 verloren gegangen. Bei der Umformung zur zweiten Gleichung sind zudem die Nenner der ersten nicht korrekt berücksichtigt worden.



[*Fig. 7*]

Attamen tanto ambitu non est opus, nam sive sectio Conica est Ellipsis aut Hyperbola vel circulus, quo casu nullo opus est calculo, ad constructionem per lineas. Nam ad rectangulum, data laterum ratione ipsis adscribendum, ita tantum agi opus est, rectangulum quodlibet ST datam habens laterum rationem pro arbitrio assumtum, ita describatur, ut latus ejus, quod scilicet volumus axi, sectionis sit parallelum, et centrum idem cum V centro figurae. Rectae $\odot V$ ☽, et TVS, utrinque producantur dum sectioni conicae occurrant in $H.L.M.K$, quae puncta juncta dabunt rectangulum quaesitum. Pro Parabola autem, ubi centrum infinite abest, calculo exigendum est, quod non potest linearum ductu; at calculus ille fit facillimus, et una aequationum sufficit. Sed conferamus eas probae causa: $\delta\lambda q \sqcap t \ddagger 2w$, ergo $\frac{\delta t}{r} q \sqcap t$. vel $q \sqcap \frac{r}{\delta}$. Unde $HL \sqcap \frac{\delta\lambda r}{\delta}$, sive $HL \sqcap \frac{t}{r} r$, sive $HL \sqcap t$. At $LG \sqcap \gamma q$, sive $\frac{\gamma r}{\delta}$. Est autem $\gamma \sqcap \frac{r}{t} + 1$, neglectaque $\frac{r}{t}$, ut infinite parva, fiet $LG \sqcap \frac{r}{\delta}$. Eritque $\frac{HL}{LG} \sqcap \frac{t}{\frac{r}{\delta}} \sqcap \frac{\delta\lambda q}{\gamma q} \sqcap \frac{\frac{t}{r}}{\frac{\frac{1}{\lambda}+1}{\delta}} \sqcap \frac{t}{\frac{r}{\delta}}$.

1 *Bezeichnung in der Figur: (1)* W *(2)* K *L* 3 vel circulus, *erg. L* 5 qvodlibet *(1)* datam AB *(2)* ST *L* 8 H. L. M. W *L ändert Hrsg.* 13 $\frac{t}{\frac{r}{\delta}}$ *(1)*, jam fuerat $\sqcap$ *(2)* $\sqcap \frac{\delta\lambda q}{\gamma q}$ *L*

Hoc cum altera aequatione conciliemus, ubi $\frac{LG^2}{4} \sqcap 2rw$, $\frac{LG}{2}$ appelletur z, fiet $z^2 \sqcap 2rw$, quae aequatio priori contradicere non potest, quia duarum est indeterminatarum. Unde ecce brevissimam methodum qua rectangulo dato simile parabolae concentricum ascribi potest. Ratio laterum rectanguli dati, dividatur per $\dfrac{\lambda}{\frac{1}{\lambda}+1}$, vel $\dfrac{\lambda}{\frac{1+\lambda}{\lambda}}$, sive duplicata ratio lateris transversi ad rectum et transversum, dividatur per rationem simplicem, 1 unitate auctam vel brevius neglecta unitate, ratio laterum Rectanguli dividatur per rationem lateris transversi ad rectum, residuum ducatur in latus rectum.

---

6 f. *Hierzu am Rand:* $\dfrac{\frac{HL}{LG}}{\frac{t}{r}} \frown r$ sive $\dfrac{HL \frown r^2}{LG\, t}$.

1 $\frac{\mathrm{LG}^2}{4}$ *(1)* $\sqcap$ *(2)* $\boxed{\text{seu} \frac{\mathrm{r}^2}{4\delta^2}}$ *(3)* $\sqcap$ 2rw, *(a)* sive r $\sqcap$ $4\delta^2$w appell *(b)* $\frac{\mathrm{LG}}{2}$ *L* 4 f. sive *(1)* posita *(2)* duplicata ratio *(a)* laterum *(b)* lateris *(aa)* recti *(bb)* transversi *L* 6 laterum | Trianguli *ändert Hrsg.* | dividatur *L* 7 rationem *(1)* laterum *(2)* lateris *(a)* recti *(b)* transversi *L* 7 rectum, *(1)* product *(2)* residuum *L*

31. DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONUM SOLIDARUM UNIVERSALI
[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 188–193 u. LH 35 I 17 Bl. 5–6. 4 Bog. 2°. 12 S. — Bogenmarkierungen (1) auf LH 35 XIII 3 Bl. 188 r°, (2) auf LH 35 I 17 Bl. 5 r° u. (4) auf Bl. 192 r°. LH 35 XIII 3 Bl. 190–191 ohne Markierung entspricht Bogen (3).
Cc 2, Nr. 854 A, 855 A tlw.

Datierungsgründe: Die Studien N. 31, 32, 34, 35, 36, 37 stehen in engem Zusammenhang und stützen sich auf die Vorarbeiten in N. 24–30. Das Wasserzeichen der Papiere ist für die Zeit von Mai 1674 bis Januar 1675 belegt. Die verwendeten Doppel- und Mehrfachvorzeichen gebraucht Leibniz vorwiegend bis Ende 1674. Für die Kegelschnitte verwendet Leibniz als Typen Kreis, Ellipse, Hyperbel und Parabel, ein sich schneidendes Geradenpaar und die Gerade erwähnt er zwar bereits in N. 10 sowie im vorliegenden Stück, aber erst in N. 42 fügt er das Geradenpaar zu den Figuren hinzu. Diese Erweiterung beruht vermutlich auf Überlegungen in der auf Oktober 1674 datierten Untersuchung N. 33 zur Konstruktion der Kegelschnitte aus den Brennpunkten. N. 32, das direkt an N. 31 anschließt, und die Studie N. 34 zum Problem der *Minima ad conicam* befinden sich auf demselben Träger, in letzterer wird auf die auf Oktober 1674 datierte Studie VII, 5 N. 7 verwiesen, und Leibniz wechselt von der in dieser Gruppe bisher gebrauchten Bezeichnungsweise von *latus rectum* bzw. *transversum* der Kegelschnitte mit dem Paar r, t zu a, q. N. 35 nimmt die Überlegungen von N. 34 wieder auf, wobei Leibniz nacheinander mit den Tangenten- bzw. Normalenmethoden von Hudde, Descartes und Sluse arbeitet, in N. 36 schließlich mit der Methode von Fermat. Die berechneten Größen gehen in N. 37 ein.

De constructione aequationum solidarum universali

Esto Aequatio solida data, quomodocunque affecta

$$\begin{array}{rcccccc} & y^4 & +ly^3 & +rmy^2 & +r^2ny & +r^3p & \sqcap 0 \\ \text{vel} & y^2 \frown y^2 & +ly \frown y^2 & +rmy^2 & +r^2ny & +r^3p & \sqcap 0 \end{array}$$

Pro y^2 ponatur ejus valor arbitrarius $gv - \dfrac{1}{2}y + c^2$, et habebimus

---

25 *Dazu am Rand*: Pro c^2, ponetur rectius ψr.

21 de ... universali *erg. L auf Bl. 192 r°*

---

22 Esto Aequatio: vgl. N. 27 u. 28. 25 Pro y^2: vgl. N. 24 S. 249 Z. 1.

$$g^2v^2\boxed{-glvy}+2gc^2v,\boxed{\boxed{+\frac{l^2}{4}y^2}}\boxed{-lc^2y},$$

$$+c^4,,\boxed{+lgvy}\boxed{\boxed{-\frac{l^2}{2}y^2}}\boxed{+lc^2y},,$$

$$+rmgv-\frac{rml}{2}y\ +rmc^2,,+r^2ny\ +r^3p\quad\sqcap 0.$$

Abjectis quae se destruunt, $-glvy+lgvy$, item $-lc^2y+lc^2y$ et pro $+\frac{l^2}{4}y^2-\frac{l^2}{2}y^2$, posito $-\frac{l^2y^2}{4}$, substitutoque ejus valore $-\frac{l^2gv}{4}+\frac{l^3}{8}y-\frac{l^2c^2}{4}$, totaque aequatione divisa per g^2, ac denique ordinata, habebimus:

$$\left.\begin{array}{l}
*\ \text{♃}\left\{\begin{array}{ll}
\begin{array}{l} -\frac{rml}{2}y \\ +r^2n \\ +\frac{l^3}{8} \\ \hline\hline g^2 \end{array}
&
\begin{array}{l} +c^4 \\ \ldots +rmc^2 \\ \ldots +r^3p \\ -\frac{l^2c^2}{4} \\ \hline\hline g^2 \end{array}
\end{array}\right.
\quad +v^2\ \text{♂}\left\{\left.\begin{array}{l} +2\cancel{g}c^2v \\ +rm\cancel{g} \\ -\frac{l^2}{4}\cancel{g} \\ \hline\hline g^{\cancel{2}} \end{array}\right\}\sqcap 0\right.
\\ \hline
\left\{+y^2 \quad +\frac{l}{2}\ \ldots -c^2 \qquad -g \quad \ldots\right.
\\ \hline
\end{array}\right\}\sqcap 0.$$

Huic aequationi, si auferatur arbitraria assumta: $-y^2+gv-\frac{l}{2}y+c^2$ ut lineolis inclusam vides orietur Aequatio ad circulum.

---

4 *Dazu am Rand*: NB.

14 *Darunter*: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$

3 f. $+r^3p$ *(1)*, sublatisqve q *(2)* Rur *(3)* $\sqcap$ 0. *(a)* Pro $\frac{l^2}{2}y^2$ ponatur rursus eius valor $-\frac{l^2}{2}gv+\frac{l^3}{4}y-\frac{l^2c^2}{2}$ *(b)* Abjectis *L* 4 item … $+lc^2y$ *erg. L*

At si addas eandem aequationem arbitrariam per $\mp\frac{r}{t}$ rationem lateris recti ad transversum sectionis Conicae datae multiplicatam, nempe $\pm\frac{r}{t}y^2 \mp\frac{r}{t}gv \pm\frac{rl}{2t}y \mp \frac{r}{t}c^2 \sqcap 0$, fiet aequatio ad sectionem Conicam datam,

$$\pm\frac{r}{t}y^2 \quad \left\{ \begin{array}{lllll} -\frac{rml}{2}y & +c^4 & +v^2 & +2c^2g & v \\ +r^2n & +rmc^2 & & +rmg & \ldots \\ +\frac{l^3}{8} & +r^3p & & -\frac{l^2}{4}g & \ldots \\ \pm\frac{rlg^2}{2t} & -\frac{l^2c^2}{4} & & \mp\frac{r}{t}g^3 & \ldots \\ \overline{\overline{}} & & & \overline{\overline{}} & \\ g^2 & \mp\frac{r}{t}c^2g^2 & & g^2 & \\ & \overline{\overline{}} & & & \\ & g^2 & & & \end{array} \right\} \sqcap 0.$$

Duo ergo inventa sunt Loca Aequationis propositae, alter ad sectionem Conicam datam, alter ad Circulum, quorum intersectione solvitur problema.

Sed ut rectarum g. et c. determinatio habeatur, comparanda est haec aequatio cum alia ejusdem formae ad eandem sectionem conicam datam.

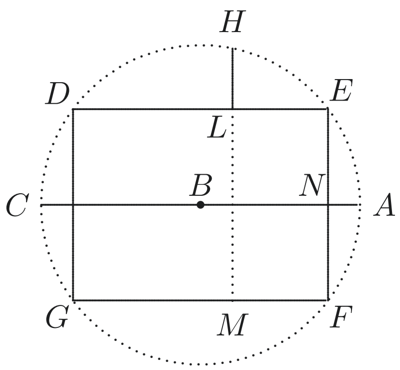


fig. 1.

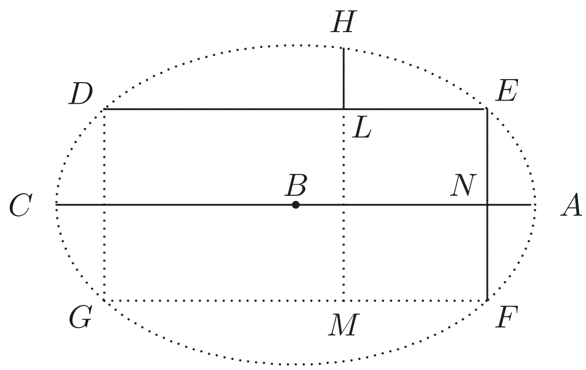


fig. 2.

2 $+\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{gv}$ *L ändert Hrsg.*

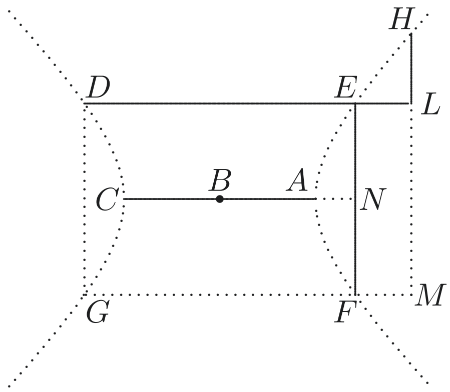


fig. 3.

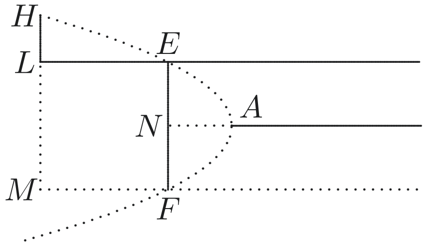


fig. 4.

Sit Sectionis Conicae datae centrum B. axis seu Latus transversum primarium, Duos vertices oppositos conjungens, ABC. Centro eodem B. describatur rectangulum $DEFG$, cujus latus DE, axi AC parallelum sit, quod ego appello: Rectangulum Sectioni Conicae adscribere. In DE producta si opus est, sumatur punctum L, ita ut DL sit ⊓ DE ǂ EL ductaque HLM, quae ipsi GF productae si opus est ad angulos rectos occurrat in M. et ipsi Sectioni Conicae in H. Constat ex Conicis rectangulum DLE esse ad rectangulum MHL ut Sectionis Latus transversum ad ejusdem latus rectum. Quod in fig. 1. 2. et 3. id est in Circulo, Ellipsi et Hyperbola nullam habet difficultatem. Tantum in Circulo considerandum est, quoniam latus rectum et transversum aequalia sunt, etiam duo rectangula DLE et MHL aequalia esse. In Hyperbola considerandum est, harmoniae causa oppositas Sectiones pro una figura habendas, cujus aliquod centrum cogitari potest, non minus ac Ellipseos, etsi in Ellipsi oppositae portiones concurrant in unam lineam in se redeuntem, cum oppositae sectiones hyperbolae divergant. At parabola considerari potest, quantum in rem praesentem, velut Hyperbola, sed cujus centrum, et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc. Neque enim aliter parabola ab Hyperbola differt, quam quod parabolae latus transversum est infinitum. Quanquam ergo puncta B. C. D. G. in parabola assignari non possint, quoniam recta AC infinita est, calculus tamen certis observationibus adhibitis, nihilo secius

19 est, *(1)* non ideo minus tamen calculus *(2)* calculus *L*

3 describatur rectangulum: vgl. N. 27 u. N. 30 Teil 2. 7 Constat: vgl. ARCHIMEDES, *De conoidibus et sphaeroidibus*, prop. III u. XII–XIV; APOLLONIOS, *Conica*, III, 17.

procedet. Eadem ad Triangulum quoque suo modo applicari possent, si operae pretium foret. Jam ponatur $DE \sqcap \frac{t\delta q}{r^2}$ et $EF \sqcap \frac{\gamma q}{r}$, ponendo $\frac{\gamma}{r} \sqcap \frac{r}{t} + 1$. Denique sit $EL \sqcap x$, et $LH \sqcap z$, erit $DLE \sqcap +\frac{t\delta q}{r^2}x \ddagger x^2$, et $MHL \sqcap \frac{\gamma q}{r}z + z^2$. Erit ergo $\dfrac{\frac{t\delta q}{r^2}x \ddagger x^2}{\frac{\gamma q}{r}z + z^2} \sqcap \frac{t}{r}$, vel $\sqcap \dfrac{1}{\frac{r}{t}}$ et multiplicando per crucem fiet $\frac{+\delta q}{r}x \ddagger \frac{r}{t}x^2 + z^2 + \frac{\gamma q}{r}z \sqcap 0$ ponendoque $x \sqcap y + h$, et $z \sqcap v + k$ habebimus:

$$\left.\begin{array}{llllllll}
\ddagger\frac{r}{t}y^2 & \ddagger\frac{r}{t}2h & y & \ddagger\frac{r}{t}h^2 & +v^2 & +2k & v \\
 & -\frac{\delta q}{r} & \ldots & -\frac{\delta q}{r}h & & +\frac{\gamma q}{r} & \ldots \\
 & & & +k^2 & & & \\
 & & & +\frac{\gamma q}{r}k & & &
\end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quam aequationem patet ejusdem esse formae cum priore, ad sectionem Conicam. Jamque tentandum est, an A e q u a t i o n i b u s c o l l a t i t i i s, quas voco, quibus singuli Termini unius singulis alterius conferuntur, lineae indeterminatae definiri possint. Sunt autem lineae incognitae, sive assumtae omnino 6, nempe: g. c. δ. q. h. k; quanquam accuratius loquendo debeant censeri 5, quia q. et δ haberi debent pro una, cum una determinata, et alter determinetur. At aequationes collatitiae sunt tantum tres, nam cum

5 *Dazu am Rand*: NB. Signa $\begin{array}{l} +v^2 + 2k\ v \\ +\frac{\gamma q}{r} \end{array}$ mutanda in $-$ etc.

2 f. deniqve ... LH $\sqcap$ z *erg. L* 10 aeqvationem | arbitrariam *erg. u. gestr.* | patet *L* 10 priore *(1)* inventa; *(a)* qvod *(b)* cumqve utraqve *(2)* ad *L* 12 lineae ... possint *erg. L* 13 sive | pro arbitrio *gestr.* | assumtae *L* 13–15 qvanquam ... determinetur *erg. L*

16 mutanda: Leibniz hat stattdessen die Vorzeichen in den ersten drei Spalten der Gleichung in Z. 6–9 umgekehrt.

termini duo, primus et penultimus $\pm\frac{r}{t}y^2$, et $+v^2$ sint in utraque aequationum conferendarum, hinc ex collatione trium reliquorum terminorum, secundi tertii et ultimi, non nisi tres nascuntur a e q u a t i o n e s   c o l l a t i t i a e. Quod tantum abest, ut noceat, ut contra plurimum prosit. Erit enim in nostra potestate, duas minimum indeterminatas determinare pro nostro arbitrio, valorem scilicet illis attribuendo, qui caetera laborem calculi, minuat; quod artis constructionum analyticae mihi non minimum stratagema videtur. Fateor calculum futurum fuisse compendiosiorem in Speciem, omissis exempli causa, c^2 et k: Sed qui tentabit exitum reperiet difficilem, sentietque resolutione aequationum collatitiarum deveniri plerumque ad unam quandam ex pluribus natam, sed solidam. Quod utique proposito nostro contrarium est, cum absurdum sit, ad aequationem solidam construendam alterius aequationis solidae praeconstructione uti, nisi ea sit multo facilior data. Haec causa est etiam cur ex multis aequationibus, quarum locus est sectio Conica data, eam elegerim, quae Rectangulo inscripto construitur, quoniam ea plurimarum indeterminatarum capax est, idque exemplo Praeclarissimi Geometrae Renati Francisci Slusii. Malui etiam ad collatitias aequationes habendas locis uti, seu aequationibus duarum incognitarum earundem; quam, ut in Cartesii et Commentatorum ejus Scriptis tantum fieri video, duabus aequationibus altera data, altera factitia, ex duarum linearum intersectione orta, unius ejusdemque utrobique incognitae. Quoniam hac ratione omnes incognitae sunt in una aequatione, in altera nullae. At si locis utamur, saepe evenit, ut hic quoque evenire vides, ut divisa dispersaque sit difficultas, quod ad eam facilius superandam non exigui est momenti. Atque has quidem observationes necessitas ipsa mihi ad institutum urgendum contumaci, expressit. Nam aequationum collatitiarum ad loca seu aequationes duarum incognitarum determinandas adhibitarum, exemplum in

1 primus et penultimus *erg. L*   4 potestate, *(1)* duos minimum terminos, (nam δ, et q pro uno habere debere, mox patebit, qvia una determinata eo ipso *(2)* duas *L*   6 minuat; *(1)* qvae mihi videtur non contemnenda *(2)* qvod non est infinitam *(3)* qvod *L*   7 Fateor *(1)* et expertus *(2)* calculum *L*   9 collatitiarum *(1)* plurium in unam, facta ad solidum ascendi, *(2)* facta, *(3)* deveniri *L*   14 est *(1)*. Malui etiam ad collatitias aeqvationes habendas locis uti, seu aeqvationibus duarum incognitarum; *(a)* qvam *(b)* exemplo praeclarissimi Geometrae Renati Francisci Slusii, *(2)*, idqve *L*   23 incognitarum *(1)* usus sit, definiendas, *(2)* determinandas *L*

---

14 exemplo: vgl. R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 51–54.   17 fieri: z. B. R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 89 f.; Fl. de Beaune, *Notae breves*, 1659, *DGS* I S. 137 f.; Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 322–324.

iis quae extant de Analysi scriptis vidi nullum et alioquin ex formulis Constructionum apud alios proditis nullam reperiri ita generalem, ut ad quamlibet aequationem solidam una eademque methodo datae cujuslibet sectionis conicae ope construendam adhiberi posset. Hunc ut ad ipsas aequationes collatitias veniamus, explicemus k, (: quoniam indeterminatas supernumerarias habemus :) et faciamus $2k \sqcap \frac{2c^2g}{g^2} + 2b$. vel $\frac{c^2}{g} + b \sqcap k$ fiet per collationem duorum Terminorum ultimorum, $\frac{\gamma q}{r} \sqcap \frac{+rm - \frac{l^2}{4} \mp \frac{r}{t}g^2}{g} - 2b$ cumque γ. r. m. l. t. sint cognitae et b arbitraria etiam q, cognita erit, modo g pro arbitrio assumatur, vel contra. Cognita autem q, cognita etiam erit δ ut mox ostendam. Porro collatis duobus terminis secundis, fiet $\pm\frac{2rh}{t} - \frac{\delta q}{r} \sqcap \frac{-\frac{rml}{2} + r^2n + \frac{l^3}{8} \pm \frac{rlg^2}{2t}}{g^2}$. Quod si jam ponamus g pro arbitrio assumtam, habebitur etiam h, excepta parabola, ubi, $\pm\frac{2rh}{t}$, item $\pm\frac{rlg^2}{2tg^2}$, evanescunt, unde fit aequatio absurda, seu duas cognitas δq, et g, conferens, nisi absurditati praeveniatur certum valorem ipsi g. tribuendo. Nam ut mox ostendam in parabola $\frac{\delta q}{r}$ facit r. Fiat ergo aequatio inter $-r$ et $\frac{-\frac{rml}{2} + r^2n + \frac{l^3}{8} \pm \frac{rlg^2}{2t}}{g^2}$ seu $-rg^2 \sqcap -\frac{rml}{2} + r^2n + \frac{l^3}{8} \pm \frac{rlg^2}{2t}$ seu potius $g^2 \sqcap \frac{-\frac{rml}{2} + r^2n + \frac{l^3}{8} - \lambda\frac{r^3}{t}\boxed{+\frac{r^3}{t}}}{-r \mp \frac{rl}{2t}}$. Unde ponendo in caeteris sectionibus $\lambda\frac{r^3}{t} \sqcap -\frac{rml}{2} + r^2n + \frac{l^3}{8}$, habebimus in caeteris sectionibus praeter parabolam $g \sqcap r\sqrt{\frac{r}{t}}$ in parabola vero si l sit $\sqcap 0$. seu si aequationis propositae secundus terminus absit, habebimus $g^2 \sqcap rn$. Ita g pure habebitur, quare et q (: sumta b pro arbitrio :) et per consequens δ. In parabola autem poterit poni $h \sqcap 0$:

4 veniamus, *(1)* ajo ipsam g pro arbitrio assumi posse, exempli gratia aeqvalem r. nisi parabolam comprehendere esset animus. In termino ultimo ponamus k $\sqcap$ *(2)* explicemus *L* 7 et b arbitraria *erg. L* 18 (: sumta ... conseqvens δ. *erg. L*

In aliis non item. Et ut universaliter loquamur pro h, ponatur $\frac{\theta r}{t}$ eritque ergo $h \sqcap 0$ in parabola. Habentur ergo pure pleraeque indeterminatae, nempe: q. δ. h. g resta[n]t c, vel k inveniendae per aequationem collatitiam terminorum tertiorum, quod facile ita fiet:

$$\frac{\boxed{+c^4} + rmc^2 + r^3p - \frac{l^2c^2}{4} \mp \frac{r}{t}c^2g^2}{g^2} \sqcap \pm\frac{2r}{t}h^2 - \frac{\delta q}{r}h \boxed{+\frac{c^4}{g^2}} + \frac{4c^2b}{g} + 4b^2 + \frac{\gamma qc^2}{rg} + \frac{2\gamma qb}{r}.$$

Dantur autem h et q et δ, quare dabitur et c. sumta b pro arbitrio, ut supra. Nolo autem ipsius b. valorem nunc quidem in calculo generali determinari, ut in cujuslibet construentis arbitrio sit, applicare cuilibet casui proposito, et explicatis h. et q. (nam δ explicatione non indiget, nisi in parabola, ubi δq ponitur $\sqcap r^2$) talem assumere b, ut quanta maxima potest calculi pars, destruatur.

Habemus ergo indeterminatas omnes, nam b est absolute arbitraria, ac proinde poni potest $\sqcap 0$ quando vel p vel h, valet aliquid. At quando tam p quam h evanescunt potest sumi $\sqcap r$. Tantum notandum pro h, substituendum esse $\frac{\theta r}{t}$. Restat quod explicandum promisi, quomodo ex data $\frac{\delta q}{r}$ detur $\frac{\gamma q}{r}$ vel quia γ data est, quomodo ex data q. detur δ et viceversa. Nimirum Rectanguli DEF latus DE est $\frac{\delta tq}{r^2}$, et latus EF est $\frac{\gamma q}{r}$. Pone

---

3 *Daneben:* ⊕

4 *Darüber:* ⊕

1 eritqve *(1)* $\mp\theta \mp \frac{\delta q}{r} \sqcap -\frac{rml}{2}$ etc etc id est *(a)* $\theta \sqcap 0$ *(b)* in parabola $\theta \sqcap 0$. *(2)* ergo | et *gestr.* | $h \sqcap 0$ *L* 3 f. fiet *(1)* $\boxed{\frac{c^4}{g^2}} + \frac{4bc^2}{g}$ *(a)* $+b^2\langle$ — — $\rangle$ *(b)* $+\frac{\gamma qc^2}{rg} + \frac{b}{r}\boxed{-\frac{c^4}{g^2}} - \frac{\frac{rmc^2}{g} - \frac{l^2c^2}{4g} \mp \frac{r}{t}\frac{q^2c^2}{g}}{q} \sqcap -4b^2 - \frac{r^3p}{g^2} \mp \frac{r}{t}h^2 - \frac{2\gamma qb}{r} - \frac{\delta qh}{r}$ datur ergo valor ipsius c^2, *(aa)* vel k *(bb)* et ipsius k per consequens *(2)* Rectius aeqvatio collatione terminorum tertiorum fit haec, explicando k, *(3)* | : *erg. Hrsg.* | $\frac{\boxed{+c^4} + rmc^2 + r^3p - \frac{l^2c^2}{4} \mp \frac{r}{t}c^2g^2}{g^2}$ *L* 12 Tantum ... $\frac{\theta r}{t}$ *erg. L*

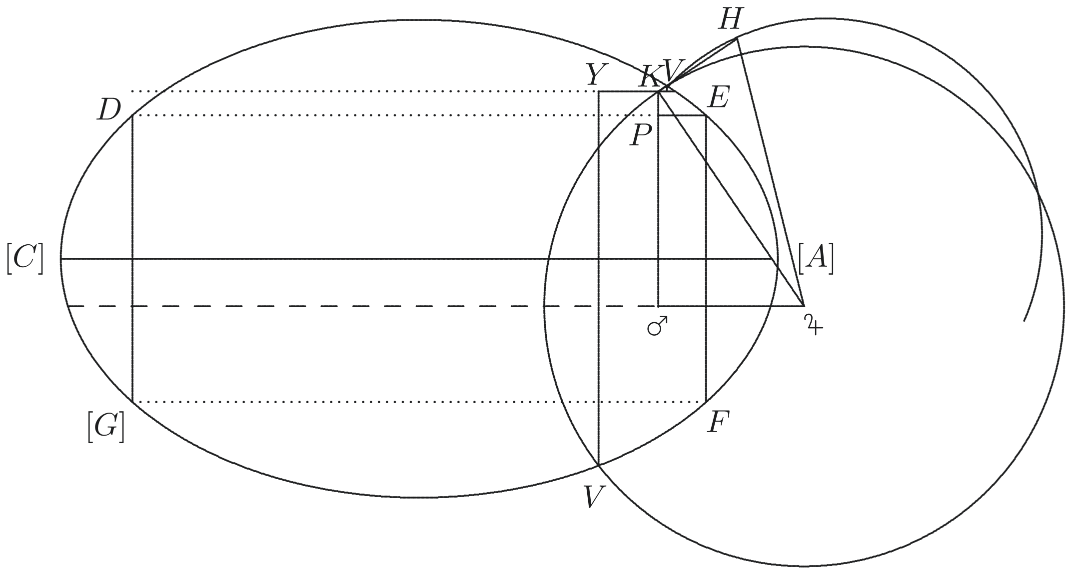
enim δ dari, dabitur etiam $\dfrac{\delta t}{\gamma r}$ ratio laterum, vicissim pone q dari, dabitur et $\dfrac{\gamma q}{\langle r\rangle}$, unum latus, et si δq detur dabitur et $\dfrac{\delta tq}{r^2}$ latus alterum. At sive alterutru⟨m⟩ ⟨l⟩atus sive ratio laterum detur, datur rectangulum. Nam sive DE sive EF detur, etiam al⟨terum⟩ ⟨d⟩atur, priore enim ad sectionem Conicam ita applicata uti res postulat, ex ea ducenda tantum p⟨er⟩pendicularis quae sectioni Conicae occurrat. Et si ratio laterum datur, tantum rectangulum aliquod datae laterum rationis circa centrum sectionis conicae datae describendum est, et rectae ex centro per rectanguli angulos ductae sectionem Conicam in punctis $DEGF$ secabunt.

Sed haec in parabola fieri non possunt. Veniendum est ergo ad calculum, quem inibimus saltem in parabola, ut ostendamus, quomodo ex uno dato per calculum reliqua haberi queant.

DE seu $\dfrac{dtq}{r^2} \sqcap CA \mp 2AN$ seu $2t \mp 2w$. Ergo in parabola abjecta w, quippe finita, erit $\dfrac{dtq}{r^2} \sqcap 2t$, sive $\dfrac{\delta q}{r^2} \sqcap 1$, vel $\delta q \sqcap r^2$. Ergo $\dfrac{\gamma q}{r}$ separatim determinari potest per aequationem in Parabola. Nam EN seu $\dfrac{EF}{2}$ seu $\dfrac{\gamma^2 q^2}{4r^2} \sqcap rw$. Assumto ergo valore ipsius $\dfrac{\gamma q}{r}$, ut supra fecimus, habebitur q. et quia in parabola habetur δq, habebitur et δ. In aliis sectionibus longe difficilior est calculus, sed non necessarius, quia res ductu linearum transigi potest. Determinatis ergo omnibus incognitis, jam ad constructionem ita veniemus:

Sectioni conicae datae ascribatur Rectangulum, $DEFG$, sectioni concentricum, latus habens DE, axi sectionis AC, parallelum, ita ut latus alterum, EF, sit $\dfrac{+rm - \dfrac{l^2}{4} \mp \dfrac{r}{t}g^2}{g} - 2b$ sumta b pro arbitrio, et $g^2 \sqcap \dfrac{-\dfrac{rml}{2} + r^2 n + \dfrac{l^3}{8} - \lambda\dfrac{r^3}{t}}{-r \mp \dfrac{r}{2t}l}$ sumta scilicet rursus λ pro arbitrio. Datur ergo latus rectanguli EF, quia $l.\ m.\ n.\ r.\ t.$ dantur, et $b.\ \lambda.$ arbitrariae sunt. Quare et alterum ejusdem rectanguli latus DE, datur. Nam latere EF ita sectioni

10 inibimus *(1)* universalem *(2)* saltem *L*



[*Fig. 5*]

applicato, ut curvam utrobique attingat in E et F, et axi AC, sit ad angulos rectos, tantum ex E educenda est perpendicularis, donec sectioni aut ejus sectioni oppositae occurrat in D, quare habebitur et ED. in qua sumatur versus D, recta $EP \sqcap +h$ vel $\mu\dfrac{r}{t}$ seu $\sqcap \dfrac{-\dfrac{rml}{2} + r^2n + \dfrac{l^3}{8} \ddagger \dfrac{rlg^2}{2t} \ddagger \dfrac{\delta qg^2}{t}}{\ddagger\dfrac{g^2}{2t}}$ quae in parabola $\sqcap$ 0, et ex puncto P erigatur normalis PK in partes ab F aversas, cujus valor sit k, vel $\dfrac{c^2}{g} + b$. posito ipsius c valore, quem aequatio superior ostendit et ducatur per K indefinita KY, ipsi axi sectionis datae parallela. Resumatur nunc aequatio ad circulum supra inventa, sumendoque:

4 f. +h | vel *(1)* θ *(2)* $\mu\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ *erg.* | , seu *L* 5 qvae ... $\sqcap$ 0 *erg.* *L* 7 f. ostendit *(1)*. Resumatur *(2)* et ... Resumatur *L*

1 *Fig. 5*: Leibniz konstruiert die Figur zunächst mit dem Kreis um ♃ mit dem Radius K♃. In N. 37 bemerkt er die Unstimmigkeit und konstruiert nun den Kreis mit Radius ♃$H = \sqrt{♃K^2 + KH^2}$. In Fig. 5 fügt er nachträglich den Punkt H und die Strecke HK ein und ergänzt einen Kreisbogen mit Radius ♃H, ohne die Figur komplett zu überarbeiten.

$\dfrac{-\frac{rml}{2}+r^2n+\frac{l^3}{8}+\frac{lg^2}{2}}{g^2} \sqcap ♃$ et $\dfrac{2c^2+rm-\frac{l^2}{4}-g^2}{g}$ posito $\sqcap ♂$. Ac proinde v posita $w-\dfrac{♂}{2}$, et posita $y \sqcap e-\dfrac{♃}{2}$. aequatio ad circulum fiet $\begin{array}{l}+\dfrac{♃^2}{4}\\ -\dfrac{♂^2}{4}\end{array} - e^2 \sqcap w^2$ et radius circuli erit $\dfrac{\sqrt{+♃^2-♂^2}}{2}$, cujus ut inveniatur centrum ita tantum procedendum est: In recta PK producta si opus est versus F; sumatur recta $K♂$, $\sqcap \dfrac{♂}{2}$ et ex puncto $♂$ ad partes A, sumatur recta $♂♃ \sqcap \dfrac{♃}{2}$ perpendicularis ad $K♂$, junctaque $K♃$ velut radio, ac centro $♃$ describatur circulus, qui ubi sectionem conicam datam secabit, in V, ex illis punctis perpendiculares VY demittantur in rectam KY indefinitam, et habebitur KY definita, una pluresve, aequalis y quaesitae. Atque haec quidem constructio universalis vel ideo brevissima censeri debet, quod omnia numeris rationalibus et geometrice tamen, transiguntur ideoque non pluribus opus est linearum ductibus quam quos hic feci. Tantum pro c^2 pone ab initio ψr.

Dedi praecedente semiplagula constructionem universalem geometricam, cujuslibet problematis solidi, paucissimis linearum ductibus: Modo Termini cogniti Aequationis solidae, $(: y^4, +ly^3+rmy^2+r^2ny+r^3p \sqcap 0 :)$ nempe l, m, n, p. habeantur in numeris rationalibus, aut sint rationales inter se et per consequens, cum r, unitate assumta, sin minus, ita saltem instituenda res est, ut ea eligatur unitas, quae sit commensurabilis plerisque, et eatenus certe ductuum compendium fiet, ac res nihilo secius geometrice transigentur. Et vero considerandae sunt problematis dati literae cognitae fundamentales, ut $a.\,q.\,d.\,f.$ in calculo problematis perpendicularium ad sectiones Conicas ducendarum. Quae certe quantum ad usum semper assumi possunt rationales invicem. Quoniam tamen fatendum est, geometricam constructionem etiam ad irrationalia extendi, ubi arithmetica constructio non nisi mechanica fit; tentandum est, ut constructionem problematum solidorum generalem, nonnihil reddamus breviorem. Quem in finem in ipsa construendi formula duas reliquimus lineas arbitrarias, nempe b, et λ. quarum ope destrui calculi pars

7 indefinitam, *erg. L* 12 geometricam *erg. L* 15 per conseqvens *erg. L*

magna potest, facta applicatione ad casus particulares. Sed ut in genere tamen aliquid praestemus: Considerandum est quae lineae saepe simul reperiantur, ut inde una fieri queat: Uti $rm+\frac{l^2}{4}$ appellentur βr, ducta in $\frac{l}{2}$, dabunt $\frac{+rml}{2}+\frac{l^3}{8}$, sive $\frac{\beta rl}{2}$. Sed et saepe simul reperiri video: $rm+\frac{l^2}{4}\mp\frac{r}{t}g^2 \sqcap \text{♉}r$ vel ejus loco $rm+\frac{l^2}{4}+g^2$, illud in sectione Conica data construenda, hoc in circulo. Itemque tam unum quam alterum duci in $\frac{l}{2}$. Itaque $\beta r\mp\frac{r}{t}g^2 \frown \frac{l}{2}, -r^2n$ (vel $\rho r^2\mp\frac{rl}{2t}g^2$) appelletur μr^2. et $\beta r+g^2, \frown \frac{l}{2}-r^2n$ appelletur πr^2. Sed $\frac{\beta rl}{2}-r^2n$, quia etiam saepe simul, appellentur ρr^2, erit $g \sqcap \dfrac{-\rho r^2-\dfrac{\lambda r^3}{t}}{\mp r\mp\dfrac{rl}{2t}}$ et EP seu $h \sqcap \frac{\mp 2\mu r^3+2\delta qg^2}{tg^2}$ et $\text{♃} \sqcap \frac{-\pi r^2}{g^2}$ et $\frac{\mp 2\mu r^3+2\delta qg^2}{t}$ vocetur ωr^2. vel $\omega r^2 \sqcap hg^2$ vel $h \sqcap \frac{\omega r^2}{g^2}$ et $\text{♂} \sqcap \frac{2\psi r+\beta r+g}{g}$. Separationem istam lubens facio, quia nihil necesse est, g assurgere ad quadratum, et $\frac{2\psi r+\beta r}{g}$ esto ξ, erit $\frac{\gamma q}{r} \sqcap \xi\mp\frac{r}{t}g-2b$ et $\text{♂} \sqcap \xi+g$. Posui

3 qveat: *(1)* ac primum *(a)* in valore EF et g simul reperies $\mathrm{r}+\frac{\mathrm{l}}{2}$, saepe *(aa)* dein⟨d⟩e r *(bb)* qvod poterimus appellare β deinde *(b)* in nominatore ipsius g reperies $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}+1$, qvod appellavimus γ, ductum in r rursus in ipsius g nominatore reperitur ductum in β nominatorem ergo valoris ipsius g, scribemus: $\mp\frac{\beta\gamma}{\mathrm{r}}$ *(2)* uti *L* 6 (vel … g^2) *erg. L* 8 seu h *erg. L* 8 $\frac{\mp 2\mu \mathrm{r}^3+2\delta \mathrm{qg}^2}{\mathrm{t}}$ *(1)* et si $\underbrace{\mathrm{rm}+\frac{\mathrm{l}^2}{4}}_{\beta\mathrm{r}}+\mathrm{g}^2$, vocemus $\varphi\mathrm{r}$, fiet et $\text{♂} \sqcap \frac{2\mathrm{c}^2+\mathrm{g}^2}{\mathrm{g}}$ *(2)* vocetur *L* 10 qvadratum | , et … $\text{♂} \sqcap \xi+\mathrm{g}$ *erg.* | *(1)* Et qvia $\psi\mathrm{r}$ posui loco c^2, *(2)* posui *L*

3 $rm+\frac{l^2}{4}$: Richtig wäre $rm-\frac{l^2}{4}$. Leibniz verwendet den Wert konsequent weiter, wechselt aber in N. 36 S. 379 Z. 8 zu $rm-\frac{l^2}{4}$.

autem ψr loco c^2, quia nihil necesse est assurgere ad quadratum. Ergo valor ipsius ψr est $\dfrac{\text{ǂ}\dfrac{r}{t}\dfrac{\omega^2 r^4}{g^2}\ \text{ǂ}\ \dfrac{\delta q}{r}\omega r^2 + 4b^2g^2 + \dfrac{2\gamma qb}{r}g^2 - r^3p}{\underbrace{+\,rm + \dfrac{l^2}{r}\ \text{ǂ}\ \dfrac{r}{t}g^2}_{\text{♉}r}\ \underbrace{-\,4bg - \dfrac{\gamma q}{r}g}_{\xi}}$. Sunt ergo lineae ducendae,

$$EF \sqcap \frac{\text{♉}r^2}{g^2} - 2b, \boxed{\text{vel } \frac{\beta r}{g}\ \text{ǂ}\ \frac{r}{t}g - 2b} \sqcap \frac{\gamma q}{r}$$

$$g \sqcap \frac{-\dfrac{\beta rl}{2} + r^2n - \lambda\dfrac{r^3}{t}}{\text{ǂ}r\ \text{ǂ}\ \dfrac{rl}{2t}}$$

$$EP \sqcap \frac{\text{ǂ}\text{♉}r^3\ \underline{\text{ǂ}}\ r^3n + \delta qg^2}{+rg^2} \sqcap h$$

$$\psi r \sqcap \frac{\text{ǂ}\dfrac{h^2r}{t}\ \text{ǂ}\ \dfrac{dqhg^2}{r} + 4b^2g^2 + \dfrac{2\gamma qb}{r}g^2 - r^3p}{\text{♉}r - 4bg - \dfrac{\gamma q}{r}g}$$

$$PK \sqcap \frac{\psi r}{g} + b$$

λ. et b. sunt quantitates arbitrariae.

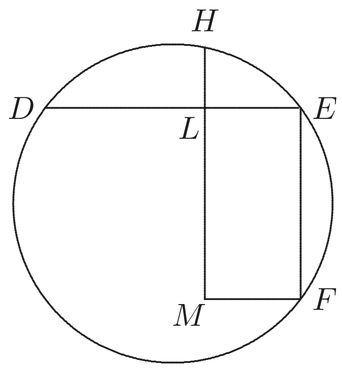
$$K\text{♂} \sqcap \frac{2\psi r + \beta r}{2g} + \frac{g}{2}$$

$$\beta r \sqcap rm + \frac{l^2}{4}$$

$$\text{♂♃} \sqcap \frac{-\beta rl - g^2l + 2r^2n}{2g^2}$$

$$\text{♉}r[g] \sqcap \beta rg\ \text{ǂ}\ \frac{r}{t}g^3$$

Habemus ergo regulam generalem construendi problema solidum datum, ope sectionis Conicae datae, speciei cujuslibet, methodo in omnibus sectionibus Conicis uniformi. Experiar an aliam brevius obtinere liceat:



[*Fig. 6*]

Dictum est supra in circulo DLE, aequari MHL. Appellemus ut ante EL, x, et HL, z. DE autem appellemus e, et EF appellemus 2φ. Erit aequatio, $ex - x^2 \sqcap 2\varphi z + z^2$. ponendoque $x \sqcap v+h$ et $z \sqcap w+k$ fiet: $ev+eh - v^2 - 2hv - h^2 \sqcap \varphi w + \varphi k + w^2 + 2kw + k^2$ sive ordinando: $\begin{array}{l} +eh \\ -h^2 \\ -2\varphi k \\ -k^2 \end{array} \begin{array}{l} +e \\ +2h \ldots \\ \\ \\ \end{array} \begin{array}{l} v - v^2 \sqcap w^2 + 2\varphi \; w. \\ \qquad\qquad\quad +2k \ldots \\ \\ \\ \end{array}$ Unde et valorem ipsius w inveniemus adjiciendo utrique aequationis parti $\dfrac{\varphi^2 + 2\varphi k + k^2}{4}$ et aequatio haec orietur:

$$\underbrace{w + \varphi + k}_{2\lambda} \sqcap \sqrt{\begin{array}{l} +eh \\ -h^2 \\ -2\varphi k \\ -k^2 \end{array} \left\{ \dfrac{\begin{array}{l} +\varphi^2 \\ +2\varphi k \\ +k^2 \end{array}}{4} \right\} \begin{array}{l} +e \;\; v - v^2 \\ \lambda^2 + 2h \\ \\ \\ \end{array}} \; A.$$

Esto jam aequatio ad sectionem Conicam $y \sqcap \sqrt{2ax \mp \dfrac{r}{t}x^2}\, B$. Primum ponendo $x \sqcap v$ videamus quod eventurum sit, nam si res non succedit, valorem mutabimus: At y esto $\sqcap w + \varphi + k - \psi$. fietque $B + \psi \sqcap A$. et quadrando $B^2 + 2\psi B + \psi^2 \sqcap A^2$, unde ordinando:

$$\begin{array}{llllll} +1 & v^2 & -e & v & -\lambda^2 & \sqcap \; -2\psi B. \\ \mp\dfrac{r}{t} & & -2h & & -eh & \\ \overset{\frown}{\odot} & & +2a & & +h^2 & \\ & & \overset{\frown}{\text{☽}} & & +2\varphi k & \\ & & & & +k^2 & \\ & & & & +\psi^2 & \\ & & & & \overset{\frown}{\text{☿}} & \end{array}$$

et rursus quadrando atque ordinando

$$\begin{array}{llllll} \odot^2 \, v^4 & +2\odot\,\text{☽}\, v^3 & +2\odot\text{☿} \;\; v^2 & [+]2\,\text{☽}\text{☿} \;\; v & +\text{☿}^2 \sqcap 0. \\ & & +\text{☽}^2 \;\;\ldots & -\,8\psi^2 a \ldots & \\ & & \pm 4\psi^2\dfrac{r}{t} \;\ldots & & \end{array}$$

2 dx $-$ x^2 *L ändert Hrsg.* 3 dv $+$ eh *L ändert Hrsg.* 7 y $\sqcap$ *(1)* $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$ *(a)* ponendoqve y $\sqcap$ w, et *(b)* ponamus x *(2)* $\sqrt{2ax \mp \frac{r}{t}x^2}$ *L* 8 mutabimus: *(1)* et $\varphi +$ k, vocabimus ψ *(2)* at *L*

Quae aequatio factitia, conferatur cum data, cujus constructio quaeritur, nempe:

$$\odot^2 v^4 + \odot^2 l v^3 + \odot^2 amv^2 + \odot^2 a^2 nv + \odot^2 a^3 p \sqcap 0.$$

Unde statim habetur $☿ \sqcap \odot ap$. et $☽ \sqcap \dfrac{\odot l}{2}$ et $\psi \sqcap \sqrt{\dfrac{2\,☽☿ - \odot^2 a^2 n}{8a}}$. Sed inde ipsius ψ. valor adhuc semel habetur ex aequatione collatitia 3^tia^ quod est absurdum. Huic rei facile remedium haberemus, nisi parabolam comprehendere constituissemus, possemus enim ponere $\dfrac{r}{t}$ quidem cognitam, sed tam t, quam r ignotam, ex quibus nota fieret alterutra, ponendo ψ. multiplicatam vel divisam per alteram. Ponendo enim loco ψ aliam, ut $\omega\dfrac{\sqrt{at}}{a}$, erit $\psi^2\dfrac{r}{t} \sqcap \dfrac{\omega^2 atr}{a^2 t}$, sive $\dfrac{\omega^2 r}{a}$ ac proinde ope duorum ipsius ψ valorum ipsae indeterminatae, ω, et r, vel ω et t, determinarentur idemque variis modis aliter effici, sed in parabola hoc non prodest, quia $4\psi^2\dfrac{r}{t}$ evanescit etsi ponamus ψ continere in se t, fiet infinite magnum, ac caetera evanescent. Remanebitque tantum $8\psi^2 a$. Quare in parabola saltem necesse est ut explicetur ipsa, et fiat $x \sqcap v + \aleph$ ponendo $\aleph \sqcap \mu - \dfrac{\mu\xi}{t}$, ita ut ipsa ξ arbitraria sit, modo semper linea ordinaria intelligatur. Eodem modo pro ψ, ponemus $\dfrac{\omega\theta}{a}$ ita ut θ etiam sit arbitraria. Utile autem erit intelligi in parabola $\xi \sqcap a$, et $\theta \sqcap a$. In caeteris autem sectionibus, fiet $\theta \sqcap t$, et $\xi \sqcap t$. Quare in sectionibus caeteris omnia per $\aleph$ multiplicata erunt $\sqcap 0$, in parabola omnia per $\aleph\dfrac{r}{t}$ multiplicata, restabit ergo tantum $+\dfrac{8\omega^2\theta^2\mu a}{a^2} - \dfrac{8\omega^2\theta^2 a\mu\xi}{a^2 t}$ seu $\gimel$ adjicienda ad $☿^2$.

2 $+\odot^2$a^{2}nv$+$ *(1)* $\odot^2$a^{2}p^2 *(2)* $\odot^2$a^{3}p *L* 4 collatitia *erg. L* 5 haberemus, *(1)* si enim parabola tantum nobis res esset, neqve *(2)* nisi *L* 13 intelligatur *(1)*, Unde resumendo, fiet: $\begin{smallmatrix}+1\\ \mp\frac{r}{t}\end{smallmatrix}$ *(2)* Eodem *L*

17 $-\dfrac{8\omega^2\theta^2\mu \mathrm{a}}{\mathrm{a}^2} - \dfrac{8\omega\theta^2 \mathrm{a}\mu\xi}{\mathrm{a}^2\mathrm{t}}$ *L ändert Hrsg.*

3 $☿ \sqcap \odot ap$: Leibniz berechnet den Wert ☿ aus dem Ansatz $\odot^2 a^2 p^2$ für den konstanten Term der Gleichung vor der Änderung zu $\odot^2 a^3 p$.

His positis erit ut ante $☽ \sqcap \frac{\odot l}{2}$. per collatitiam terminorum secundorum; et per tertios et $☿^2 \sqcap \frac{\odot^4 a^2 m^2 - 2\odot^2 am\, ☽^2 \;ǂ\; \frac{8\odot^2 am\omega^2\theta^2 r}{a^2 t} + \frac{16\omega^4\theta^4 r^2}{a^4 t^2}}{2\odot^2}$ per collatitiam Terminorum tertiorum et $☿^2 \sqcap \odot^4 a^4 n^2 + \frac{16\odot^2 a^2 n\omega^2\theta^2 a}{a^2}, + \frac{64\omega^4\theta^4 a^2}{a^4}$ per collatitiam Terminorum quartorum. Et denique $☿^2 \sqcap \odot^2 a^3 p + \frac{8\omega^2\theta^2\mu a}{a^2} - \frac{8\omega^2\theta^2\mu a\xi}{a^2 t}$ per collatitiam terminorum quintorum seu ultimorum.

Hi tres valores conferendi inter se, ut inveniatur tum θ, tum ω, tum μ, tum r, nam r inventa habetur et t. Quibus lineis inventis habetur constructio universalis problematis propositi. Sed operae pretium est, inquirere in particulares, tam sectionis conicae communis, tam parabolae, et primum in sectione conica communi habemus:

$$☽ \sqcap \frac{\odot l}{2},\ ☿ \sqcap \odot ap. \text{ et } \frac{\omega t}{a} \sqcap \sqrt{\frac{2\, ☽☿ - \odot^2 an}{8a}}. \text{ Porro } \frac{\omega^2 t^{\cancel{2}} r}{a^2 \cancel{t}} \sqcap \frac{ǂ\odot am \ ‡\ 2\odot☿ \ ‡\ ☽^2}{4}.$$

$\frac{\omega^{\cancel{2}}\cancel{t}r}{a^{\cancel{2}}} \times \frac{\cancel{\omega t}}{\cancel{a}}$ dabit $\frac{\omega r}{a}$. Datur autem $\frac{\omega t}{a}$ ergo et collatione eorum daretur denuo $\frac{r}{t}$ quae ratio tamen jam habetur, quod est absurdum, aliter ergo formanda res est.

Pone loco ψ esse $\frac{\omega\sqrt{at}}{a}$. Ergo $\psi^2 \sqcap \frac{\omega^2\cancel{a}t}{a^{\cancel{2}}}$, seu $\frac{\omega^2 t}{\cancel{a}} \sqcap \frac{2\, ☽☿ - \odot^2 an}{8\cancel{a}}$ per collatitiam terminorum quartorum. Et $ǂ\frac{4\omega^2 tr}{at} \sqcap 2\odot☿ + ☽^2 - \odot^2 am$ per terminos tertios, unde rursus manifestum est nihil duci posse, quare methodus ista, quicquid agamus minime succedit, nec remedium particulare in quibusdam sectionibus, sic adhiberi potest. Omissis ergo caeremoniis istis, ponemus simpliciter $x \sqcap v + \mu$.

7 et t. *(1)* id autem ex praecedentibus nullo *(2)* hi autem valores statim manifesti sunt. *(3)* qvibus *L*
13 f. per ... qvartorum. *erg. L*

2 tertios: Beim Koeffizientenvergleich unterlaufen Leibniz mehrere Versehen. 10 $☿ \sqcap \odot ap$: Leibniz verwendet den Wert aus S. 330 Z. 3. Hinzu kommen weitere Fehler.

$$\text{Unde}\quad \begin{array}{llll} +1\ v^2 & -e \quad v & -\lambda^2 & \sqcap \quad -2\psi B. \\ \mp\dfrac{r}{t} & -2h & -eh & \\ \odot & +2a & +h^2 & \\ & \mp\dfrac{2r\mu}{t} & +2\varphi k & \\ & \text{☽} & +k^2 & \\ & & +\psi^2 & \\ & & +2a\mu & \\ & & \mp\dfrac{r}{t}\mu^2 & \\ & & \text{☿} & \end{array}$$

Unde quadrando et ordinando:

$$\begin{array}{llllll} \odot^2\ v^4 & +2\odot\ \text{☽}\ v^3 & +2\odot\text{☿}\ v^2 & +2\ \text{☽☿}\quad v & +\text{☿}^2 & [\sqcap 0] \\ & & +\ \text{☽}^2 & \pm\dfrac{8\psi^2 r\mu}{t}v & -8\psi^2 a\mu & \\ & & \pm 2\psi^2\dfrac{r}{t} & -8\psi^2 a & \cancel{\mp}\dfrac{4\psi^2 r\mu^2}{t} & \end{array}$$

Conferendo cum aequatione data, quae supra, statim habetur ☽. per terminos secundos, jam conferantur duo valores ipsius ☿. Ex terminorum tertiorum cum quartis collatione fiet: $\dfrac{\mp 2\psi^2\dfrac{r}{t} - \text{☽}^2 + \odot^2 am}{2\odot} \sqcap \dfrac{\mp\dfrac{8\psi^2 r\mu}{t} + \odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a}{2\ \text{☽}}$ atque ita quidem valor

---

13 *Links daneben:* NB. 4 error calculi in sequentibus hinc sine dubio ortus. *Rechts daneben*: $\pm$

16 $\dfrac{\mp\dfrac{8\psi^2\mathrm{r}\mu}{\mathrm{t}} + \odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{n} + 8\psi^2\mathrm{a}}{2\ \text{☽}}$ *(1)* sed haec rursus in parabola non succedunt ob evanescentem incognitam ψ, qvia per t divisa est. *(2)* atqve *L*

---

10 Unde: Die folgende Gleichung enthält zwei Rechenfehler, wie Leibniz später erkennt und anmerkt. Sie beeinträchtigen die weitere Rechnung. In S. 343 Z. 5–8 setzt Leibniz mit der korrigierten Gleichung an.

ipsius ψ in parabola statim habetur, quia ibi datur $\dfrac{\mu}{t} \sqcap 0$. Ponamus ergo $\dfrac{\mu}{t}$ dari ubique, in omni Sectione Conica, seu sumi pro arbitrio, et ejus loco ponamus $\dfrac{\theta}{a}$ cognitam, collatisque ipsius ☿ valoribus ex terminis tertiis et quartis, ut proxime fecimus, fiet $\psi^2 \sqcap \dfrac{-2☽^3 + 2\odot^2 am☽ - 2\odot^3 a^2 n}{16\odot a \mp \dfrac{16\odot r\theta}{a} \pm \dfrac{4☽a}{q}}$ hoc $\frown$ $+8a\mu \mp \dfrac{4r\mu\theta}{a}$ $+\odot^2 a^3 p$ fit $\sqcap$ ☿^{2}. Unde patet memorabili exemplo, posse indeterminatas esse supernumerarias, etsi tot sint quot aequationes collatitiae, hic enim collatis duobus valoribus ipsius g. habetur valor ipsius ψ, per μ. Ergo eliminata etiam ψ, habetur aequatio in qua supersunt ☿ et μ. et nihil tamen superest, quo unum eorum eliminari possit, ergo μ potest sumi pro arbitrio, (non ☿ ob parabolam) determinatur ergo et r, et ☿.

Exempli causa $bcd \sqcap \aleph^3$. $\dfrac{bc^2a}{d} \sqcap \gimel^3$. $\dfrac{b^2a^{\langle 3\rangle}}{cd} \sqcap \beth^3$. Conferantur duo ipsius b, valores, ex aeq. 1. ergo $\dfrac{\aleph^3}{cd} \sqcap \dfrac{\gimel^3 d}{c^2 a}$, sive $\aleph^3 ca \sqcap \gimel^3 d^2$, sive $c \sqcap \dfrac{\gimel^3 d^2}{\aleph^3 a}$. Unde tertia aequatio ita fiet: $\dfrac{b^2a^4\aleph^3}{\gimel^3 d^3} \sqcap \beth^3$. Unde patet quando eadem indeterminata in tribus aequationibus collatitiis, et tot sunt collatitiae aequationes quot indeterminatae esse indeterminatam supernumerariam.

Caeterum si ex caeteris quoque aliquae in omnibus aequationibus reperiantur, id quidem nihil amplius ad rem pertinet; haec quidem, quantum arbitror, a nemine animadversa. Continetur autem in his observationibus ars constructionum.

Caeterum quia contingere potest, ut ☽ sit $\sqcap 0$ ideo satius est conferre alios duos ipsius ☿ valores, ex termino tertio et 5$^{\text{to}}$, quia tunc semper extat ☿, neque unquam fit

---

17 *Dazu am Rand*: Error puto, nam cum ad μ explicandam venitur, alia rursus exhibetur aequatio pro ψ et ☿; ut infra patebit.

1 datur *(1)* $\dfrac{\mu}{\mathrm{t}} \sqcap 0$ *(2)* $\dfrac{\psi}{\mathrm{t}} \sqcap 0$ *(3)* $\dfrac{\mu}{\mathrm{t}} \sqcap 0$ *L*

---

19 valores: Leibniz übernimmt die fehlerhaften Werte aus S. 332 Z. 13.

$\sqcap$ 0 nisi in Circulo, ubi $\odot \sqcap 0$ sed tunc nec solidum est problema. Ex Terminis Tertiis: $\mercury^2 \sqcap \dfrac{\odot^4 a^2 m^2 - 2\odot^2 am \rightmoon^2 \mp \dfrac{4\odot^2 am\psi^2 r}{t}, + \rightmoon^4 \pm \dfrac{4 \rightmoon^2 \psi^2 r}{t} + \dfrac{4\psi^4 r^2}{t^2}}{4\odot^2}$ et quintis seu ultimis $\mercury^2 \sqcap \odot^2 a^3 p + \overset{4 \frown 2}{(8)} \psi^2 a\mu \pm \dfrac{4\psi^2 r\mu\theta}{a}$. Unde sumta pro arbitrio ipsa θ valor ipsius $\psi^2\mu$ substituendus in aequatione collatitia Terminorum quartorum, fiet enim:

$$2 \rightmoon\mercury + \frac{\odot^4 a^2 m^2 - 2\odot^2 am \rightmoon^2 \mp \dfrac{4\odot^2 am\psi^2 r}{t} + \rightmoon^4 \pm \dfrac{4 \rightmoon^2\psi^2 r}{t} + \dfrac{4\psi^4 r^2}{t^2} - \odot^4 a^3 p}{+2a \pm \dfrac{r\theta}{a},, \frown 2\odot^2,, \smile \pm \dfrac{r}{t}}$$

$$-8\psi^2 a \sqcap \odot^2 a^2 n.$$

Unde quando $\rightmoon$ extat potest ψ sumi pro arbitrio, et habebitur $\mercury$, sin $\rightmoon$ sit $\sqcap$ 0, et $\dfrac{1}{t}$ quoque $\sqcap$ 0 ac per consequens $\theta \sqcap 0$ tunc $\mercury$ quoque hic evanescet, cum valor ejus eo casu ex aliis terminis, tertio vel ultimo, ipsa jam ψ definita, detur. Si vero $\rightmoon$ sit $\sqcap$ 0. nec tamen $\dfrac{1}{t}$ tunc duae restabunt indeterminatae, $\dfrac{\theta}{a}$, (vel $\dfrac{\mu}{t}$), et ψ, quarum altera pro arbitrio definiri potest. Caeterum si $\dfrac{1}{t}$ sit $\sqcap$ 0. tunc $2\rightmoon\mercury$ et $\odot^2 a^2 n$ et $8\psi^2 a$ semper evanescent, eritque inter reliqua aequatio, seu ipsa fractio tota fiet $\sqcap$ 0. ac per consequens negligi poterit denominator ejus. Habebitur ergo jam et $\mercury \sqcap \dfrac{\mp \dfrac{2\psi^2 r}{t} - \rightmoon^2 + \odot^2 am}{2\odot}$. Unde patet si $\dfrac{1}{t} \sqcap 0$ seu si sectio Conica est parabola, tunc ψ sine $\mercury$, et $\mercury$ sine ψ aequatione pura definiri posse; sin $\dfrac{1}{t}$ sit valoris cujusdam assignabilis, tunc si $\rightmoon$ non extat, definietur ψ sine $\mercury$ ope θ cum alterutra (θ vel ψ, pro arbitrio sumi queat :), et postea $\mercury$ per ψ. Sin denique et $\rightmoon$ et $\dfrac{1}{t}$ assignabilis est, tunc poterit ψ simul ac θ sumi pro arbitrio. Patet ergo postremum ipsius $\mercury$ valorem semper ipsum pure explicare, cum non nisi ψ supponat, ψ

7 et habebitur $\mercury$, *erg. L* 11 et $8\psi^2$a *erg. L* 15 non *erg. L* 16 sine $\mercury$ | *(1)* ope θ, cum alterutra (θ vel ψ) pro arbitrio sumi qveat. *(2)* ope θ, ... qveat :) *erg.* | , et *L*

autem semper sine ☿, vel pro arbitrio, vel per aequationem oblatam definiatur. Hic jam valor conferatur cum significatione ipsius ☿, fiet:

$$\frac{\mp\frac{2r}{t}\psi^2 - \text{☽}^2 + \odot^2 am}{2\odot} \sqcap \frac{-\varphi^2 - 2\varphi k - k^2}{4} - eh + h^2 + 2\varphi k + k^2 + \psi^2 + 2a\mu \mp \frac{r}{t}\mu^2$$

Porro ex data ψ habetur μ, modo scilicet et θ vel sit $\sqcap 0$ vel pro arbitrio definita, pono vero ψ definitam esse, quia in parabola certe definita est, nobis autem universaliter est loquendum, ideoque restant indeterminatae $\varphi.\ k.\ e.\ h.$ ex quibus ipsarum $e.\ h.$ summa definita est aequatione collatitia secundorum terminorum (quippe $\frac{r\mu}{t}$ jam a nobis haberi suppono), unam ergo ex illis nempe e per h definitam habemus. Restant ergo indeterminatae $\varphi.\ k.\ h$, ex quibus duae quaelibet, velut s e m p e r s u p e r n u m e r a r i a e, a nobis pro arbitrio definiri possunt. Ponantur si placet $\sqcap 0$ et sex termini novissimae aequationis non parvo compendio evanescent; et definita habebitur residua φ^2.

Denique in parabola sciendum est ipsius ψ^2 valorem simplicissime ex ultima aequatione ipsam ☿ continente haberi, fractione enim evanescente quia per $\frac{r}{t}$ multiplicatur, (nominatore ejus per $\frac{r}{t}$ diviso) restabit $2\,\text{☽☿} - 8\psi^2 a \sqcap \odot^2 a^2 n$, et evanescente ☽, quando secundus terminus deest, fiet $8\psi^2 a + \odot^2 a^2 n \sqcap 0$.

Restat ut generaliter ostendam, quomodo μ detur per ψ. collatione duorum ipsius ☿^{2} valorum supra dictorum, nempe

$$\mu \sqcap \frac{\odot^4 a^2 m^2 - 2\odot^2 am\,\text{☽}^2 \mp 4\odot^2 am\psi^2\frac{r}{t} + \text{☽}^4 \mp 4\,\text{☽}^2\psi^2\frac{r}{t} + 4\psi^4\frac{r^2}{t^2} - \odot^4 a^3 p}{+4\odot^2 \frown „\, 8\psi^2 a \mp 4\psi^2 + \frac{\theta}{a}} \sqcap$$

$$\frac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a, -2\,\text{☽☿}}{\pm 2\frac{r}{t}\psi^2} \sqcap 0.$$

Unde sequitur semper esse $\mu \sqcap \frac{0a^2}{\frac{2r}{t}\psi^2}$ seu 0 quando $\frac{1}{t} \sqcap 0$. Cui rei remedium quaeremus, ponendo $0a^2 \sqcap \frac{a^2}{a}$ et $t \sqcap a^2$, fiet: $\mu \sqcap \frac{a^2 \frown a^2}{\pm 2a\psi^2 r} \sqcap a$.

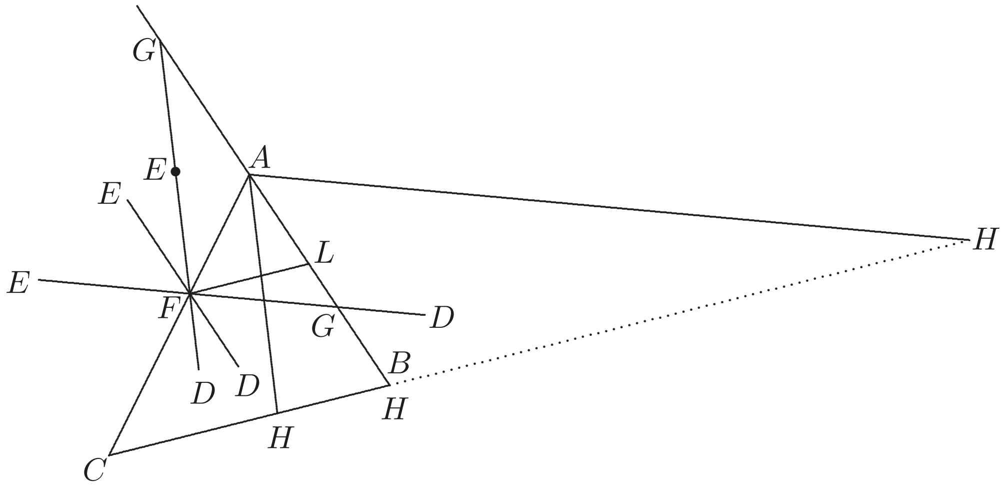
6 indeterminatae | s e m p e r supernumerariae *gestr.* | φ. k. e. h. *L* 13 ipsam ☿ continente *erg. L* 20 seu 0 *erg. L*

Unde videtur sequi μ esse $\sqcap$ 0 in parabola revolvemurque ad priores difficultates ut scilicet, ipsius ☿ valor bis per cognitas habeatur, erit enim $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,☽☿}{\ddagger 2\frac{r}{t}\psi^2}$. Atqui repertum est $\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,☽☿$ esse $\sqcap$ 0. quando $\dfrac{1}{t}$ est $\sqcap$ 0, seu quando t. infinite longa, ergo etiam μ erit $\sqcap$ 0. Quod est contra institutum. Sed huic malo remedium, sane mirabile ita opinor inveniemus: Verum est $\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,☽☿$ esse $\sqcap$ 0. id est differentiam inter duo solida, aequari cuidam solido infinite parvo, quod erit, si placet, $a\aleph\beta$, ponendo $\beta \sqcap 1$ seu lineae infinite parvae. Erit ergo $\mu \sqcap \dfrac{\aleph a\beta t}{\ddagger 2r\psi^2}$ et quia t est $\dfrac{\gimel a}{\beta}$ seu linea infinite magna, divisa scilicet per unitatem, ideoque fiet valor ipsius μ, hic: $\dfrac{\aleph a^2\beta\gimel}{\ddagger 2r\psi^2\beta}$ sive $\dfrac{\ddagger\aleph a^2\gimel}{2r\psi^2}$. Patet ab initio rectius fuisse transferre $\ddagger$ in numeratorem fractionis: Ita cessaret signum ambiguum, sed quicquid ejus sit, res eodem redibit quodcunque habeat signum, valor ipsius μ. Nisi forte dicere velimus, utrumque valorem esse adhibendum, ac proinde circulum qui secare debet, fore duplicem, quod vix putem. Sed pendent ista ex intima et caliginosissima infiniti natura.

Inspice figuras Conicarum apud Schotenium in lib. 2. Cartesii, ex iis clare patet parabolam esse mediam inter Hyperbolam et Ellipsin, in eo quod communis sectio, seu linea sectioni et Triangulo, communis, utrinque producta, convenit in D cum aliquo laterum Trianguli, vel extra conum sive Triangulum ABC, quo casu sectio est Hyperbola, vel intra conum, quo casu sectio est, Ellipsis, vel angulum facit nullum, sive parallela est, quo casu sectio est parabola, pone enim rectam aliquam esse datam, AB et duci aliam, ED. quae inclinetur vel versus A, vel versus B, vel neque versus A, neque versus B. Unde

3 $+2\,☽☿$ *L ändert Hrsg.* 6 cuidam *(1)* superficiei, qvae erit $\frac{\mathrm{a}^3}{\mathrm{a}}$, si placet, seu a^2 *(2)* solido *L* 7 ponendo ... parvae *erg. L* 7 $\mu \sqcap$ *(1)* $\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{t}}{\ddagger 2\mathrm{r}\psi^2}$ *(2)* $\frac{\aleph\mathrm{a}\beta\mathrm{t}}{\ddagger 2\mathrm{r}\psi^2}$ *L* 7 est *(1)* $\frac{\mathrm{a}^2}{\beta}$ *(2)* $\frac{\gimel\mathrm{a}}{\beta}$ *L* 8 hic: *(1)* $\frac{\mathrm{a}^4}{\ddagger 2\mathrm{r}\psi\beta}$, sive $\frac{\ddagger\mathrm{a}^4}{2\mathrm{r}\psi^4}$ *(2)* $\frac{\aleph\mathrm{a}^2\beta\gimel}{\ddagger 2\mathrm{r}\psi^2\beta}$ *L* 12 qvod *(1)* creditu difficile *(2)* vix *L* 20 neqve versus | E *ändert Hrsg.* | , neqve *L*

14 figuras Conicarum: vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 207–216.



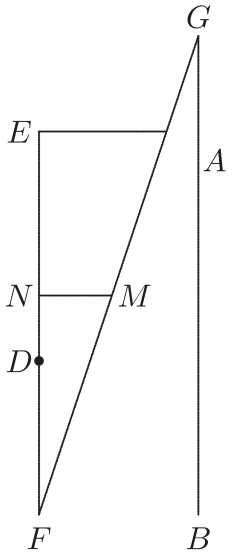
[*Fig. 7*]

patet ED communem sectionem Trianguli et parabolae, si tantillum inclinetur sursum versus A dare Hyperbolam, si tantillum deorsum versus B, fieri Ellipsin. Et si Triangulum quod conum generavit, ponatur esse ABC. portionem ipsius indefinitae ED. duo Trianguli ejus crura AB. AC, jungentem, nempe FG esse latus sectionis transversum et F. G. esse vertices oppositos oppositarum sectionum. Latus autem rectum ita invenitur, ducatur linea AH transiens per verticem Trianguli A, ipsi ED parallela, occurrens ipsi CB. basi Trianguli productae si opus est, in H. (In parabola vero AH, et AB coincidunt.) Et ipsis AH, HC, FL (ducta FL parallela CB) quarta proportionalis erit sectionis latus rectum.

Hinc patet ipsarum $\aleph$ et $\gimel$, absolute indeterminatum esse valorem. Attamen si determinetur $\aleph$, nempe unitas infinite parva, seu minima, determinari etiam $\gimel$ sectionisque latus transversum, quod ita ostendo:

ED, sit parallela rectae AB, explicemus autem parallelismum per inclinationem infinite parvam, ita, ut sumta NF, ipsa NM, sit infinite parva, patet si NF sit linea vera, NM fore infinite parvam, et si NF sit infinite parva, NM fore infinities infinite parvam, assumi ergo duo possunt pro arbitrio NF, et NM ad determinandam infinitam FD. Quare patet aequatione ista $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,\text{☽☿}}{\pm 2\frac{r}{t}\psi^2}$, valorem ipsius μ in parabola

5 f. et ... sectionum *erg.* L   8 Trianguli *(1)* (qvae in parabola est CB, prod *(2)* productae L



[*Fig. 8*]

manere indefinitum, nec proinde quicquam obstare, quo minus altera aequatione ex terminis ultimis collatis sumta, quae est $\text{☿}^2 - 8\psi^2 a\mu \ddagger \frac{4\psi^2 r\mu^2}{t} - \odot^2 a^3 p \sqcap 0.$ seu

$$\text{☿}^2 \llcorner - 4a, \frown \frac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,\text{☽☿}}{\ddagger \frac{r}{t}} \lrcorner \ddagger \frac{\overbrace{\odot^2 an + 8\psi^2 a - 2\,\text{☽☿}}\ \square}{+\frac{r}{t}\psi^2} - \odot^2 a^3 p \sqcap 0.$$

Nam si ☿ et ψ jam dantur, definietur valor ipsius μ, seu valoris ejus in hanc aequationem inserti, nam t quantitas arbitraria est. Oblitus sum tamen hic inserere $\frac{\theta}{a}$ in explicatione loco $\frac{\mu}{t}$ atque ita μ non ascendisset ad quadratum. Idque adhuc faciendum, modo adhuc meminisse velimus cum $\frac{\theta}{a}$ sit arbitraria in parabola $\frac{\mu}{t}$ restitui posse.

Ut ergo tandem valores in unum collectos exhibeamus: Erit breviter $\text{☽} \sqcap \frac{\odot l}{2}$.

3 $\sqcap$ 0. | determinetur recta fit *erg. u. gestr.* | seu *L* 4 f. $\sqcap$ 0 *(1)* determinetur *(2)* Et explicabimus ita ipsam μ, qvando aeqvati *(3)* | determinetur *nicht gestr.* | *(4)* Nam *L* 6 inserti, *(1)* potest enim qvantitas aliqva esse arbitraria, etsi *(2)* nam *L*

Aeq. 1.) ex term. 3. $\mercury \sqcap \dfrac{\mp 2\psi^2 \dfrac{r}{t} - \leftmoon^2 + \odot^2 am}{2\odot}$, et Aeq. 2) Ex Term. 4. $\psi^2 \sqcap \dfrac{+\odot^2 a^2 n - 2\,\leftmoon\mercury}{-8a \pm 8\dfrac{r\theta}{a}}$, et $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,\leftmoon\mercury}{\pm\dfrac{2r}{t}\psi^2}$. Ex Terminis quartis, sed rectius universaliter loquendo ibi pro $\dfrac{\mu}{t}$, substituemus $\dfrac{\theta}{a}$, eritque $\theta \sqcap \dfrac{\odot^2 a^2 n + 8\psi^2 a - 2\,\leftmoon\mercury}{\pm\dfrac{2r}{a}\psi^2}$. Hunc valorem frustra cum ipsius ψ^2 valore conferemus, futura enim esset identica collatio.

At μ rectius exprimemus per valorem, universalem, quem in parabola quoque investigare licet nempe Aeq. 3) $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2 a^3 p - \mercury^2}{-8\psi^2 a \mp \dfrac{4\psi^2 r\theta}{a}}$. Ex Terminis ultimis. Unde his tribus aequationibus inter se conferendis utendum, ad calculum absolvendum.

Jam juncta Aequatione prima et secunda, habetur $\mercury$, fiet enim

$$2\odot \frown \mercury \sqcap -\leftmoon^2 + \odot^2 am,, \mp \frac{2r}{t} \frown \frac{\odot^2 a^2 n - 2\,\leftmoon\mercury}{-8a \pm \dfrac{8r\theta}{a}},$$

---

4 *Dazu am Rand*: NB. Etsi hae duae aequationes μ. et θ sic explicantes non serviant pro calculo absolvendo, probationi tamen eorum quae diximus inserviunt, patet enim ex his valoribus quod $\dfrac{\mu}{t} \sqcap \dfrac{\theta}{a}$ ut assumsimus.

1 et *(1)* $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2 \mathrm{a}^2\mathrm{n} + 8\psi^2\mathrm{a} - 2\,\leftmoon\mercury}{\pm\dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\psi^2}$ | et *nicht gestr.* | *(2)* Aeq. 2) *L* 2 $\dfrac{+\odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{n} - 2\,\leftmoon\mercury}{-8\mathrm{a} \pm 8\dfrac{\mathrm{r}\theta}{\mathrm{a}}}$, *(1)* sive $\psi^2 \sqcap$ *(2)* sive explicato $\mercury$ erit $\psi^2 \sqcap \dfrac{\odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{n},, -2\,\leftmoon\{\frown\}\dfrac{\dfrac{2\psi^2\mathrm{r}}{\mathrm{t}} - \leftmoon^2 + \odot^2\mathrm{am}}{2\odot}}{8\mathrm{a} \pm \dfrac{8\mathrm{r}\theta}{\mathrm{a}}}$ *(3)* et $\mu \sqcap \dfrac{\odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{n} + 8\psi^2\mathrm{a} - 2\,\leftmoon\mercury}{\pm\dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\psi^2}$. *(a)* ac deniqve $\mercury^2 \llcorner \dfrac{\odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{n} + 8\psi^2\mathrm{a} - 2\,\leftmoon\mercury}{\pm\dfrac{2\mathrm{r}}{\mathrm{t}}}$, $\frown -8\mathrm{a} \mp \dfrac{4\mathrm{r}\theta}{\mathrm{a}} \lrcorner \sqcap \odot^2\mathrm{a}^2\mathrm{p}$ Ex Terminis *(aa)* Tertiis *(bb)* ultimis sed et $\mu \sqcap$ *(b)* sed *(c)* Ex *L* 2 f. universaliter loquendo *erg. L* 8 habetur $\mercury$ | pure *gestr.* |, fiet *L*

$$\text{sive } ☿ \sqcap \left.\frac{-☽^2 + \odot^2 am,, \dfrac{\mp \dfrac{2r}{t}\odot^2 a^2 n}{-8a \pm \dfrac{8r\theta}{a}}}{2\odot + \dfrac{4☽r}{t, \frown -8a \pm \dfrac{8r\theta}{a}}}\right\}$$ qui est valor ipsius ☿ purus, si $\frac{\theta}{a}$ pro arbitrio assumatur, nam ☽ jam datur. Ergo et ψ^2 habetur pure cum ejus valorem non alia incognita quam ☿ ingrediatur, quae habetur. Quare postremo etiam μ inventa est, quae ψ et ☿ pure inventas supponit. Inventa μ, habetur et t et r, quia enim $\frac{\theta}{a} \sqcap \frac{\mu}{t}$ erit $t \sqcap \frac{a\mu}{\theta}$. Datur ergo t, quia $\frac{\theta}{a}$ vel $\frac{a}{\theta}$ jam ante dabatur quippe arbitraria, et nunc inventa est etiam μ, data vero t, datur et r, quia $\frac{r}{t}$ datur, aequalis ipsi $\frac{a}{q}$ rationi lateris recti ad transversum Sectionis Conicae datae, ideo $r \sqcap \frac{ta}{q}$ vel $r \sqcap \frac{a^2\mu}{\theta q}$ et $\frac{8r\theta}{a} \sqcap \frac{8a\mu}{q}$.

Nunc tempus est ut ad valores ipsarum quantitatum brachygraphicarum nempe ☿ et ☽ progrediamur nam $\odot$ nota est. Est autem ☽ $\sqcap -e - 2h + 2a$. et

$$☿ \sqcap \overbrace{-\lambda^2 - eh + h^2}^{} + 2\varphi k + k^2 + \psi^2 + 2a\mu \mp \frac{r}{t}\mu^2$$
$$\frac{-\varphi^2 - 2\varphi k - k^2}{4}$$

Atque ita supersunt indeterminatae (praeter θ,) adhuc, 4, nempe $e.\ h.\ \varphi.\ k.$ et aequationes sunt tantum duae, quibus determinentur; duabus ergo ex illis dare possumus valorem pro arbitrio, ponamus eas $\sqcap 0$, quales sunt h, et k. Nam $e.\ h.$ non possunt simul poni aequales 0, et de caetero $h.$ et k utilissime negliguntur, cum sint addititiae ultra loci ad circulum, naturam. Fiet $e \sqcap -\frac{\odot l}{2} + 2a$. Item fiet: $\varphi^2 \sqcap 4\psi^2 - 4☿ + 2a\mu \mp \frac{r}{t}\mu^2$.

Occurrit hic difficultas nova, quam non provideram, nimirum, neque ☿ neque ψ^2, neque μ pure haberi, quia supponitur ipsa r, at vero r supponit ipsam μ jam inventam. Quid si ponamus $\mu r \sqcap \xi a$. Est autem $t \sqcap \frac{qr}{a}$, ergo erit $\frac{r\mu}{t} \sqcap \frac{\xi a^2}{rq}$. Certe $\frac{r\mu}{t}$ pro arbitrio sumi

1 *Am Rand*: atqve ita nostra θ, evanesceret, an ergo rectius, ponendo *gestr.* *L* 4 supponit. *(1)* valor jam *(2)* Valor jam ipsius $☿^2$ inventus *(3)* Inventa *L* 4 et r *erg.* *L* 5 qvippe arbitraria *erg.* *L*

non potest, alioquin haberetur μ, quia habetur $\frac{r}{t}$. Restabit ergo semper incognita quantitas neque valores quaesiti pure habebuntur. Huic rei remedium quaerere ita tentemus: Pro $\frac{\mu}{t}$, ponemus $\frac{\xi a}{\psi^2}$. Unde Aeq. 2. ex Terminis 4^tis^ loco $-8a\psi^2 \pm \frac{8r\mu\psi^2}{t} \sqcap +\odot^2 a^2 n - 2\,\text{☽☿}$, dabit: $8a\psi^2 \pm 8r\xi a \sqcap \odot^{[2]} a^2 n - 2\,\text{☽☿}$ et pro ☿ ponendo ejus valorem ex Aeq. 1. Terminorum Tertiorum, fiet: $8a\psi^2 \pm 8r\xi a \sqcap \odot^{[2]} a^2 n, \llcorner\llcorner - 2\,\text{☽}, \frown \llcorner \frac{2\psi^2 \frac{r}{t} - \text{☽}^2 + \odot^2 am}{2\odot} \lrcorner\lrcorner\lrcorner$.

Et per valorem ipsius μ, seu $\frac{\xi at}{\psi^2}$ fiet $\xi at \sqcap \frac{\odot a^3 p - \text{☿}^2}{-8a \mp 4r\frac{\xi a}{\psi^2}}$. Ergo collatis his valoribus

$$\frac{\pm 8\xi ar}{\xi at} \sqcap \frac{\pm 8r\psi^2}{t} \sqcap \frac{\odot^2 a^2 n - 2\,\text{☽☿} - 8a\psi^2}{\odot^2 a^3 p - \text{☿}^2, \smile \frac{-8a\psi^2 \mp r\xi a}{\boxed{\psi^2}}} \text{ sive}$$

$$\begin{aligned} \pm 8r\psi^2\odot^2 a^3 p - \pm 8r\psi^2\text{☿}^2 \quad \sqcap \quad & -8\odot^2 a^3 nt\psi^2 + 16\,\text{☽☿}a\psi^2 t + 64a^2 t\psi^4 \\ & +\odot^4 a^2 n^2 t - 4\odot^2 a^2 n\,\text{☽☿}t - 16\odot^2 a^3 n\psi^2 t \\ & +4\,\text{☽}^2\text{☿}^2 t + 32\,\text{☽☿}a\psi^2 t + 64a^2 t\psi^4 \end{aligned}$$

Ponatur si placet $r \sqcap \frac{\beta a^2}{\psi^2}$, prior pars aequationis fiet: $\pm 8\beta a^5\odot^2 p \mp 8\beta a\text{☿}^2$. Ergo $t \sqcap \frac{q\beta a^2}{a\psi^2}$, ergo $\frac{\beta a}{t} \sqcap \frac{\beta a}{\frac{q\beta a^2}{a\psi^2}}$, sive $\frac{\psi^2}{q}$, unde $\frac{-8\odot a^3 n\psi^2 \text{ etc.}}{\pm 8a^4\odot^2 p \mp 8\text{☿}^2} \sqcap \frac{q}{\psi^2}$. Quare rursus exitus nullus.

Explicemus $\mp 8r\psi^2\text{☿}^2$ et ponamus $r \sqcap \beta - \gamma$, quod solum nos turbat erit

$$\boxed{-4\,\text{☽}^2 \mp 8r\psi^2}\,\text{☿}^2 \sqcap \frac{\left\{\begin{array}{lll} 4\psi^4 \frown \frac{\beta^2 - 2\beta\gamma + \gamma^2}{t^2} & \pm 4\,\text{☽}^2\psi^2 \frown \frac{\beta-\gamma}{t} & \mp 4\psi^2\odot^2 am \frown \frac{\beta-\gamma}{t} \\ \qquad + \text{☽}^4 & -2\,\text{☽}^2\odot^2 am & \\ & +\odot^4 a^2 m^2 & \end{array}\right.}{4\odot^2 \smile \boxed{\mp 8\psi^2 \frown \frac{\beta-\gamma}{t},, - 4\,\text{☽}^2}}$$

11 $\mp 8\beta a\text{☿}^2$: Richtig wäre $\pm 8\beta a^2\text{☿}^2$. Das Versehen beeinträchtigt die weitere Rechnung.

Ut omnia quae supersunt tentemus, videndum an ope Analyseos Numericae res ita disponi possit, ut ponendo $\psi^2☿^2$ ab uno latere aequationis, et caetera ab altero, incognitae $\psi.☿.\beta.\gamma.t$, ita assumi queant, salva indeterminatione, ut utrobique extrahi queat radix. Idque non rectius fiet, quam conferendo cum Canone illo admirabili 6 Terminorum, sed cum prolixus fiat calculus iste, qui constructionem facillimam redditurus est, ideo tantum superest nunc quidem explorandum, resumtis primis aequationibus an liceat loco ψ^2 ponere $\dfrac{\delta☿}{a}$. et an ea res quicquam conferat ad solutionem. Unde aequationes fundamentales tres: $\dfrac{\odot^2am - ☽^2}{2\odot \pm \dfrac{2\delta r}{ta}} \sqcap ☿$, ex Term. 3. Item fiet ex Term. IV. $☿ \sqcap \dfrac{\odot^2a^2n}{+2☽ \pm \dfrac{8r\mu\delta}{ta} - \dfrac{8\delta a}{a}}$. Quibus collatis habebimus: $2☽ \pm \dfrac{8r}{t}\dfrac{\mu\delta}{a} - \dfrac{8\delta a}{a}, \frown \odot^2am - ☽^2, \sqcap \odot^2a^2n, \frown 2\odot \pm 2\delta\dfrac{r}{ta}$ sive $\delta \sqcap \dfrac{\odot^2a^2n, \frown 2\odot_{\llcorner\llcorner} - 2☽, \frown \odot^2am - ☽^2{}_{\lrcorner\lrcorner}}{\pm\dfrac{8r\mu}{ta} - 8_{,,} \frown \odot^2am - ☽^2{}_{,,,} \mp \dfrac{2r}{ta} \frown \odot^2a^2n}$, vel si malimus attollere ☿ ad quadratum, in omnibus tribus Aequationibus fundamentalibus, habebimus Aequationes tres:

$$(1)\quad ☿^2 \sqcap \frac{\odot^4a^2m^2 - 2\odot^2am☽^2 + ☽^4}{+\odot^2 \pm \dfrac{8\odot\delta r}{ta} + \dfrac{4\delta^2r^2}{t^2a^2}} \quad \text{item:}$$

$$(2)\quad [☿^2 \sqcap]\frac{\odot^4a^2n^2}{4☽^2 \pm \dfrac{32☽r\mu\delta}{ta} - 32☽\delta, + \dfrac{64r^2\mu^2\delta^2}{t^2a^2} \mp \dfrac{128r\mu\delta^2}{ta} + 64\delta^{\langle 2\rangle}} \quad \text{et}$$

$$(3)\quad ☿^2 \sqcap +8\delta☿\mu \pm \frac{4\delta☿r\mu^2}{at} + \odot^2a^3p.$$

Sed nec hinc exitum video, cum semper assurgatur ad cubum, etiamsi ☽ ponas $\sqcap 0$, imo etsi p sit $\sqcap 0$. Quare ad ultimum remedium, sane infallibile, sacramque anchoram confugiendum est, tollendo scilicet 2^{dum} terminum, ex utraque aequatione, factitia pariter, et data; quo facto habebitur indeterminata supernumeraria, et quae inde oritur calculi prolixitas non redundabit in constructionem, quia arbitraria supernumerariae determinatio plurimum calculi destruet. Praeterquam quod aliae adhuc supernumerariae in

8 ex Term. 3.: Leibniz rechnet mit dem fehlerhaften Wert von S. 332 Z. 13. In der Folge kommen weitere Versehen hinzu.

ipsis ☽ et ☿ latent, ut hac quidem arte, si qua ulla alia, perveniri posse videatur ad rem frustra hactenus optatam, ope Analyseos inveniendi constructiones breves et elegantes, quod unum hactenus Geometrae vulgares poterant objicere arti novae.

Resumta ergo aequatione

$$v^4 \quad \frac{+2\cancel{\odot}\,\text{☽}}{\odot\cancel{2}}v^3 \quad \frac{\text{♃}\left\{\begin{array}{l} +2\odot\text{☿}a\ v^2 \\ +\text{☽}^2 \quad \ldots \\ \pm\dfrac{4r}{t}\psi^2 \quad \ldots \end{array}\right. \text{♀}\left\{\begin{array}{l} +2\,\text{☽☿} \quad v \\ -8\psi^2 a \quad \ldots \\ \pm\dfrac{8r\psi^2\mu}{t} \quad \ldots \end{array}\right. \text{♂}\left\{\begin{array}{l} +\text{☿}^2 \\ -8\psi^2 am \\ \pm\dfrac{4r\mu^2}{t} \end{array}\right.}{\odot^2} \quad \sqcap 0$$

tollatur terminus secundus, id est fiat $v \sqcap z - \dfrac{2\,\text{☽}}{4\odot}$, in aequatione factitia, sed et in aequatione data fiat $y \sqcap w - \dfrac{l}{4}$, est autem aequatio data: $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0$. Ergo pro y substituto ejus valore, fiet:

$$\begin{array}{llllllll} w^4 & \boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{4l}{4}w^3 \\ +\ l\quad w^3 \end{array}} & \begin{array}{l} +6l^2 \\ -\dfrac{3l^2}{4} \end{array} & \begin{array}{l} w^2 \\ \ldots \end{array} & \begin{array}{l} -4l^3 \\ +\dfrac{3l^3}{16} \end{array} & \begin{array}{l} w \\ \ldots \end{array} & \begin{array}{l} +l^4 \\ -\dfrac{l^4}{64} \end{array} & \sqcap 0 \\ & & +am & \ldots & -\dfrac{2aml}{4} & \ldots & +\dfrac{aml^2}{16} & \text{Aequatio data} \\ & & \beth & & +a^2n & \ldots & -\dfrac{a^2nl}{4} & \\ & & & & \gimel & & +a^3p & \\ & & & & & & \text{ת} & \end{array}$$

9 in aeqvatione factitia *erg. L*

$$\text{Et } z^4 \quad \boxed{\begin{array}{l} -\frac{4\frown 2\,\text{☽}}{4\odot}z^3 \\ +l\quad w^3\end{array}} \quad \left.\begin{array}{lllll} +6\frown\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2} & z^2 & +4\frown\frac{8\,\text{☽}^3}{64\odot^3} & z & +\frac{16\,\text{☽}^4}{256\odot^4} \\ -3\frown\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}\frown\frac{2\,\text{☽}}{\odot} & \ldots & -3\frown\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2}\frown\frac{2\,\text{☽}}{\odot} & \ldots & -\frac{8\,\text{☽}^3}{64\odot^3}\frown\frac{2\,\text{☽}}{\odot} \\ \text{♃}\frown & \ldots & -2\frown\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}\frown \text{♃} & \ldots & +\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2}\frown \text{♃} \\ & & \text{♀}\frown & \ldots & -\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}\frown \text{♀} \\ & & & & +\text{♂} \end{array}\right\}\sqcap 0.$$

Aequatio factitia

Imo superest aliud quoque sublevamentum, idque eo utilius est, quod priori jungi potest, licet enim efficere, ut aequatio quaelibet terminum aliquem habeat datum, ita tamen ut non ideo minus primus sit purus, et secundus absit: Quae ad hunc quidem usum applicuit nemo. Exempli causa volo efficere ut quantitas cognita tertii termini, aequationis datae, sit eadem cum tertii termini cognita aut pro cognita, supposita, aequationis factitiae. Nimirum incognita datae sit w, factitiae z. Et fiat $w \sqcap \aleph z$. Unde habebimus:

In data $\aleph^4 \; * \; 6l^2 \quad \aleph^2 z^2$ + etc. et divisis omnibus per $\aleph^4$ terminus tertius fiet:

$$\begin{array}{l} -\frac{3l^2}{4} \\ [+\,am] \end{array}$$

$$\frac{+6l^2 - \frac{3l^2}{4} + am}{\aleph^2} \sqcap 6\frown\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2} - \frac{3\frown 2\,\text{☽}}{4\odot}\frown\frac{2\,\text{☽}}{\odot} + \text{♃}.$$

1–5 *Nebenrechnungen*:

$$z^2 - 2\frown\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}z + \frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2}$$

$$z^3 - 3\frown\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}z^2 + 3\frown\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2}z - \frac{8\,\text{☽}^3}{64\odot^3}$$

$$z^4 - 4\frown\frac{2\,\text{☽}}{4\odot}z^3 + 6\frown\frac{4\,\text{☽}^2}{16\odot^2}z^2 - 4\frown\frac{8\,\text{☽}^3}{64\odot^3}z + \frac{16\,\text{☽}^4}{256\odot^4}$$

6 aliud *(1)* remedium, possumus enim q⟨vae⟩ *(2)* qvoqve *L*

Ergo erit $\sqrt{\dfrac{+6l^2 - \dfrac{3l^2}{4} + am}{6 \frown \dfrac{4\,☽^2}{16\odot^2} - 3 \frown \dfrac{2\,☽}{4\odot} \frown \dfrac{2\,☽}{\odot} + \text{♃}}} \sqcap \text{א}$. Et hoc supposito ipsius א valore tertius terminus utrobique erit idem, nec nisi duae restabunt aequationes collatitiae, sed ut valor ipsarum ♃. ♀ et ♂ habeatur, (neque enim ille opinor quasi plane incognitus quaeri aut quasi plane arbitrarius assumi potest,) ideo restituenda est incognita v, nempe $z \sqcap v + \dfrac{2\,☽}{4\odot}$. Redibit aequatio factitia initialis, eodemque valore in data ultime producta loco z substituto, et inde facta nova, valores ipsarum ♃. ♀. ♂ indagari deberent atque ita omnis illa subtilitas mutationum (demta forte termini ejusdem productione) fuisset inutilis. Itaque credo hac reductione careri posse, sufficit enim dicere aequationem factitiam productam cujus incognita est z, construi ope circuli cujusdam et datae conicae sectionis, quae scilicet tres terminos habet cum data communes. Id enim negari non potest, ac proinde et datam, si per collationem explicentur indeterminatae. Et nunc quidem, ut prolixitatem calculi evitemus, ponemus ☽ $\sqcap$ 0. eritque aequatio factitia,

$$\begin{array}{llllllllll}
z^4 & * & a\text{♃} & z^2 & a^2\text{♀} & z & \text{♂}a^3 & \sqcap & 0. & \text{et cum data sit:} \\
w^4 & * & a\text{ב} & w^2 & a^2\text{ג} & w & +\text{ת}a^3 & \sqcap & 0. & \text{ponendo } w \sqcap \text{א}z\text{, habebimus:} \\
\text{א}^4 z^4 & * & a\text{ב}\text{א}^2 & z^2 & a^2\text{א}\text{ג} & z, & +\text{ב}a^3 & \sqcap & 0 & \text{sive} \\
z^4 & * & \dfrac{\text{ב}a}{\text{א}^2} & z^2 & \dfrac{\text{ג}a^2}{\text{א}^3} & z & +\dfrac{\text{ב}a^3}{\text{א}^4} & \sqcap & 0 & \text{et quoniam desideramus in}
\end{array}$$

utraque aequatione pro incognita ipsam z habente, factitia pariter et data, terminum 3tium esse eundem, erit $\dfrac{\text{ב}a}{\text{א}^2} \sqcap a\text{♃}$ vel $\text{א} \sqcap \sqrt{\dfrac{\text{ב}\cancel{a}}{\text{♃}\cancel{a}}}$ eritque aequatio data: $z^4 * a\text{♃}z^2\ a^2\text{ג}\sqrt{\dfrac{\text{♃}^3}{\text{ב}^3}}z + \dfrac{a^3\text{ת}\text{♃}^2}{\text{ב}^2}$. Unde habemus Aequationes collatitias duas, $\text{♀}\cancel{a^2} \sqcap \cancel{a^2}\text{ג}\sqrt{\dfrac{\text{♃}^3}{\text{ב}^3}}$, et $\text{♂}\cancel{a^3} \sqcap \dfrac{\cancel{a^3}\text{ת}\text{♃}^2}{\text{ב}^2}$.

Ergo ex posteriore fiet $\text{♃} \sqcap \sqrt{\dfrac{\text{♂}\text{ב}^2}{\text{ת}}}$, ac proinde $\text{♀} \sqcap \text{ג}\sqrt{\dfrac{\dfrac{\text{♂}\text{ב}^2}{\text{ת}}\sqrt{\dfrac{\text{♂}\text{ב}^2}{\text{ת}}}}{\text{ב}^3}}$, sive $\dfrac{\text{♀}^2\text{ב}}{\text{ג}^2\text{♂}} \sqcap \sqrt{\dfrac{\text{♂}}{\text{ב}}}$ sive $\dfrac{\text{♀}^4\text{ת}^2}{\text{♂}^2\text{ג}^4} \sqcap \dfrac{\text{♂}}{\text{ת}}$, ac reducendo: $\text{♀}^4\text{ת}^3 \sqcap \text{♂}^3\text{ג}^4$, vel $\text{♀}^4 \sqcap \dfrac{\text{♂}^3\text{ג}^4}{\text{ת}^3}$. Est autem $\text{♀}a^2 \sqcap \dfrac{-8\psi^2 a \mp \dfrac{8r\psi^2\mu}{t}}{\odot^2}$,

3 f. qvasi *(1)* incognitus *(2)* plane *(a)* indeterminatus *(b)* incognitus *L*

et $\text{♂}a^3 \sqcap \dfrac{+a^2\text{☿}^2 - 8\psi^2 a\mu \pm 4\frac{r}{t}\mu^2\psi^2}{\odot^2}$. Unde patet porro esse $a^{\cancel{3}}\text{♂} \sqcap \dfrac{\text{☿}^2\cancel{a^2}}{\odot^2} + \cancel{a^2}\text{♀}\mu$, vel $\text{♂}^4 - \dfrac{4\text{☿}^2}{\odot^2}\text{♂}^3 + \dfrac{6\text{☿}^4}{\odot^4}\text{♂}^2 - \dfrac{4\text{☿}^6}{\odot^6}\text{♂} + \dfrac{\text{☿}^8}{\odot^8} \sqcap \text{♀}^4\mu^4 \sqcap \dfrac{\text{♂}^3\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3}$.

In hac ergo aequatione

$$a^4\text{♂}^4 - \frac{4\text{☿}^2a^3\text{♂}^3}{\odot^2} + \frac{6\text{☿}^4a^2\text{♂}^2}{\odot^4} - \frac{4\text{☿}^6a\text{♂}}{\odot^6} + \frac{\text{☿}^8}{\odot^8} \sqcap \frac{\text{♂}^3\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3}$$

patet omnes includi aequationes determinatrices datas, sed malum in eo esse, quod ב plane evanuit, quod verendum est, ne solutionem reddat indeterminatam et cuilibet problemati convenientem, quod tamen videtur esse impossibile. Imo sciendum est, inventa ♂, utique dari et ♃ per ב. At ♀ vel ope ♃, ac proinde per ב, vel etiam simpliciter per ♂, sine ב interveniente, inveniri posse, at, ut dixi ♃ sine ב interveniente non haberi.

Videamus ergo quid liceat assumere pro arbitrio, ac ponamus si placet $\text{♀} \sqcap 0$. fiet $\text{♂}a^4\text{ת}^3 \sqcap \mu^4\text{ג}^4$, et explicando $\text{♂}a^3$, fiet:

$$-8\psi^2a\mu \pm \frac{4r}{t}\mu^2\psi^2 \sqcap \frac{\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3a}, \text{ vel } \frac{\mu^3\text{ג}^4}{\text{ת}^3a} \sqcap -8\psi^2a \pm \frac{4r}{t}\mu\psi^2.$$

Sumtaque μ pro arbitrio, velut cognita, fiet $\psi^2 \sqcap \dfrac{\mu^3\text{ג}^4}{\text{ת}^3a, \frown -8a \pm \frac{4r}{t}\mu}$ sed nondum ad istam assumtionem arbitrariam provolandum est, sunt enim duae in summa aequationes collatitiae, ergo duae etiam indeterminatae sint necesse est, saltem regulariter: Idque fiet, si nunc explicemus etiam ♀, uti ♂ explicuimus. Est autem $\text{♀} \sqcap \sqrt{④\dfrac{\text{♂}}{\text{ת}}} \frown \sqrt{\dfrac{\text{♂}\text{ג}^2}{\text{ת}}}$, et quia $\text{♂} \sqcap \dfrac{\mu^4\text{ג}^4}{a^4\text{ת}^3}$ fiet $\text{♀} \sqcap \dfrac{\mu\text{ג}}{a\text{ת}} \frown \dfrac{\mu^2\text{ג}^3}{a^2\text{ת}^2} \sqcap \dfrac{-8\psi^2a \pm \frac{8r}{t}\psi^2\mu}{a^2}$ quae aequatio praecise eadem est cum priore, nec inde quicquam determinatur. Veniemus ergo ad explicationem

2 f. $\dfrac{\text{♂}^3\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3}$ *(1)* et ponendo ☿. *(2)* videbimus jam an aliqvid liceat assumere pro arbitrio, ac ponamus si placet $\text{☿} \sqcap 0$ fiet $\text{♂}^4 \sqcap \dfrac{\text{♂}^3\mu^4}{\text{ב}^3\text{ת}^3}$, sive $\text{♂} \sqcap \dfrac{\mu^4}{\text{ב}^3\text{ת}^3}$ et explicando ♂, fiet: $-8\psi^2\mathrm{a}\cancel{\mu} \pm 4\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mu^{\cancel{2}} \sqcap \dfrac{\mu^{\cancel{4}\,3}}{\text{ב}^3\text{ת}^3}$ *(3)* In *L* 8 per ב *(1)* |, et *nicht gestr.* | ope ♃ inventae *(a)* dari et o⟨p⟩ *(b)* vel etiam sine *(2)*. At *L* 14 est, *(1)* nam μ sumta pro arbitrio etiam ♃ et ♂ *(2)* valde enim mirum videtur eadem semper provenire, qvalemcunqve ponas μ. *(3)* sunt *L*

ipsius ♃, cumque sit $\text{♃} \sqcap \sqrt{\frac{\text{♂}\text{ב}^2}{\text{ת}}}$, explicatione ipsius ♂ facta erit $\text{♃} \sqcap \sqrt{\frac{\mu^4\text{ג}^4\text{ב}^2}{a^4\text{ת}^4}}$, sive $\sqcap \frac{\mu^2\text{ג}^2\text{ב}}{a^2\text{ת}^2} \sqcap \text{♃} \sqcap +2\text{☉☿}a + \text{☽}^2 \pm 4\frac{r}{t}\psi^2$. Unde habetur facillima ipsarum μ et ψ. comparatio, si ☿ et ☽ ponuntur $\sqcap 0$. Ac praeclarae habentur constructiones pro aequationibus quadratoquadraticis secundo et ultimo termino non simul carentibus, modo constructio per parabolam fieri non debeat, per Ellipsin enim et Hyperbolam praeclare admodum fient. Sed ut ad parabolam simul et ad Cubicas Aequationes accommodemus, difficile. Si tantum parabolae accommodare Quaestio sit, non tamen et problemati cubico, tantum vel ☿ vel ☽ relinquenda est aequalis alicui sive determinato, sive indeterminato, et statim habebitur μ, per ipsum; atque ita si alterutrum eorum pro arbitrio assumamus, alterum habebitur pure. Sed si aequatio quarto termino careat, seu quando $\frac{\text{ת}\text{♃}^2}{\text{ג}^2} \sqcap 0$. tunc intelligi debet $\text{ת} \sqcap 0$. et $\mu \sqcap 0 \sqcap \text{ת}$, et fiet $\frac{\text{ג}^2\text{ב}}{a} \sqcap 2\text{☉☿} + \pm\frac{4r}{t}\psi^2$. Ex his patet ut universalis fiat solutio, debere ☿ relinqui, quia vero ita arbitraria manet indeterminata, hinc nobis permissum est vel eam pro arbitrio definire, vel novam fingere aequationem, quem in finem Aequationem superiorem $\text{♂}.\,\text{☿}.\,\mu.$ continentem dissuemus in duas, ita scilicet ut utraque pars exitum facilem det incognitis, nempe $a^4\ \text{♂}^4 \begin{array}{l} -\frac{4\text{☿}^2a^3}{\text{☉}^2} \\ -\frac{\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3} \end{array} \text{♂}^3 + \frac{6\text{☿}^4a^2}{\text{☉}^4}\ \text{♂}^2 \sqcap 0.$

et: $-\frac{4\text{☿}^6a}{\text{☉}^6}\text{♂} + \frac{\text{☿}^8}{\text{☉}^8} \sqcap 0$ et per posteriorem fiet: $4a\text{☉}^2\text{♂} \sqcap \text{☿}^2$; et hunc valorem ipsius ☿^2 substituendo in priori, habebimus: $a^4\text{♂} - 16a^4\text{♂} - \frac{\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3} + 96a^4\text{♂} \sqcap 0.$

Unde praeclare habetur exitus in Ellipsi parabola et Hyperbola, modo problema propositum sit quadratoquadraticum, nam si cubicum sit, ת est $\sqcap 0$, et $\frac{\mu^4\text{ג}^4}{\text{ת}^3} \sqcap 0$ unde sequitur aequatio impossibilis, nimirum inter 16 et 95. Quodsi ergo volumus constructionem habere universalem, considerandum est, alione adhuc modo dissui possit aequatio superior, ita ut res plana aequatione utrobique exitum reperiat, exempli causa ponamus:

3 f. aeqvationibus *(1)* solidis *(2)* qvadratoqvadraticis secundo et *(a)* qvarto *(b)* ultimo *L*

$-\frac{4\mercury^6 a^2\mars}{\odot^6}+\frac{6\mercury^4 a^2\mars^2}{\odot^4}+\frac{\mercury^8}{\odot^8}\sqcap 0$ et $a^4\mars^4-\frac{4\mercury^2 a^3}{\odot^2}\mars^3-\frac{\mu^4\gimel^3}{\text{ח}^3}\mars^3\sqcap 0$. Ex priore aequatione habebimus: $\frac{4a^2\mars\mercury^2}{\odot^2}+6a^2\mars^2+\frac{\mercury^4}{\odot^4}\sqcap 0$. Ex posteriore $\mars\sqcap\frac{\frac{4\mercury^2 a^3}{\odot^2}+\frac{\mu^4\gimel^4}{\text{ח}^3}}{a^4}$ sed resolutione facta, eadem plane redit difficultas. Assumamus ergo novam pro arbitrio quantitatem, ut $\frac{6\mercury^4 a^2}{\odot^4}\mars^2-\frac{4\mercury^6 a}{\odot^6}\mars+\frac{\mercury^8}{\odot^8}-\frac{\mercury^4\xi^4}{\odot^4}\sqcap 0$. sive $6a^2\mars^2-\frac{4\mercury^2 a\mars}{\odot^2}+\frac{\mercury^4}{\odot^4}-\xi^4$. seu $4a^2\mars^2-4\frac{\mercury^2 a\mars}{\odot^2}+\frac{\mercury^4}{\odot^4}\sqcap\xi^4-2a^2\mars^2$ et pro ξ^4 ponendo $\mars^2\lambda^2$, habebimus: $(\dagger)2a\mars(\ddagger)\frac{\mercury^2}{\odot^2}\sqcap\mars\sqrt{\lambda^2-2a^2}$.

Jam aequatio residua, subtracta nova, fit $a^4\mars^4-\frac{4\mercury^2 a^3\mars^3}{\odot^2}+\mars^2\lambda^2\mercury^4-\frac{\mars^3\mu^4\gimel^4}{\text{ח}^3}\sqcap 0$ vel $a^4\mars^2-\frac{4\mercury^2 a^3\mars}{\odot^2}+\lambda^2\mercury^4-\frac{\mars\mu^4\gimel^4}{\text{ח}^3}$. Jam paulo ante $-\frac{\mercury^2}{\odot^2}\sqcap -2a\mars(\dagger)\mars\sqrt{\lambda^2-2a^2}$. Fiet ergo $a^4\mars^2+4a^3\mars^2,\frown -2a(\dagger)\sqrt{\lambda^2-2a^2}+\lambda^2\mars^2\frown(\odot^2\frown +2a\dagger\lambda^2-2a^2)\square.\ +\lambda^2\mercury^4-\frac{\mars\mu^4\gimel^4}{\text{ח}^3}$.

Unde posito $\text{ח}\sqcap 0$ tunc $\mars$ habetur ope λ. Pro μ incognita substituamus $\gamma\sqrt{\sqrt{\frac{\mars}{a}}}$, tunc pro $-\frac{\mars\mu^4\gimel^4}{\text{ח}^3}$ fiet: $-\frac{\mars^2\gamma^4\gimel^4}{a\text{ח}^3}$. Sin ponas $\mu\sqcap\delta\sqrt{\frac{\mars}{a}}$ fiet $-\frac{\mars^3\delta^4\gimel^4}{a^2\text{ח}^3}$. Si priorem valorem eligimus, tunc evanescet θ, hic quidem, et sumta λ pro arbitrio habebitur γ. In $\mars$ vero ex reliquo calculo inquirendum erit. Nimirum $\jupiter a\sqcap 2\odot\mercury\ddagger 4\frac{r}{t}\psi^2\sqcap a\sqrt{\frac{\mars\beth^2}{\text{ח}}}$, sive pro $\mars a$ ponendo $\saturn^2$ fiet $2\odot\saturn a\frown\sqrt{-2\dagger\frac{\sqrt{\lambda^2-2a^2}}{a}}\ddagger 4\frac{r}{t}\psi^2\sqcap\frac{a\saturn\beth}{\sqrt{\text{ח}a}}$. Sed hoc non procedit nam ψ^2 evanescente in parabola orietur aequatio impossibilis, si λ^2 pro arbitrio assumta sit, itaque posita $\frac{r}{t}\sqcap 0$. λ^2 determinabitur ab aequatione, alioquin, ab arbitrio. Et quando λ determinatur ab aequatione poterit $\saturn$, et per consequens $\mars$ pro arbitrio sumi. Sed ut universalis sit processus, et ut semper liceat $\mars$ vel $\saturn$ sumere pro arbitrio, ideo pro ψ^2 ponemus $\pi\saturn$,

9 substituamus *(1)* $\gamma\sqrt{}$ ④ $\frac{\odot}{a}$ fiet aeqvatio haec *(2)* $\gamma\sqrt{\sqrt{\frac{\odot}{a}}}$ *(3)* $\gamma\sqrt{\sqrt{\frac{\mars}{a}}}$ *L*   15 $\frac{r}{t}\sqcap 0$. *(1)* explicanda est *(2)* λ^2 determinabitur *L*   15 f. determinatur *(1)* ab arbitrio, $\saturn$ *(2)* ab *L*

fietque aequatio generalis $2\odot a \frown \sqrt{-2 \mp \frac{\sqrt{\lambda^2 - 2a^2}}{a} \pm 4\frac{r}{t}\pi \sqcap \frac{\beth a}{\sqrt{\text{ח} a}}}$ semperque ♂ poterit sumi pro arbitrio, sed λ sumetur pro arbitrio, quando $\frac{r}{t}$ non est 0. Sumta ergo ♂ pro arbitrio, et inventa γ per superiora habetur μ per λ, Universalius loquendo, possemus π, semper assumere pro arbitrio, unde haberetur et ψ, per ♄. Atque ita λ semper definiretur, non pro arbitrio sed ex aequatione, ope $\frac{r\pi}{t}$, etc. et constructio universalis erit.

Inventas habemus ergo, universaliter, γ ex supposita λ, et λ, ex supposita $\frac{r\pi}{t}$ (id est λ absolute in parabola). Unde accedente θ vel ♄, habentur μ, et ☿. Restat ergo explicatio ipsius ☿^{2} ad rem plene determinandam, caeterae enim quantitates explicatae sunt. Et quia in ☿ aliae plures supersunt incognitae, poterimus audacter pro arbitrio assumere, ♂ vel ♄ et π. definitasque habebimus: μ, et λ, et ☿. Nam $\frac{\frac{a^2\beth^2}{\text{ח} a} \mp 8\frac{r\pi\beth a}{t\sqrt{\text{ח} a}} + \frac{16r^2}{t^2}\pi^2}{4\odot^2 a^2}, \frown a \sqcap -2a \mp \sqrt{\lambda^2 - 2a^2}$. Quae si rursus quadrentur addito prius $+2a$, utrique aequationis parti habebitur valor ipsius λ pure, quod ut brevius sub aspectum cadat, fiet:

$$\frac{\frac{\beth a}{\sqrt{\text{ח} a}} \mp 4\frac{r}{t}\pi}{2\odot a},\square,, \frown a\ ,,,+2a,,,\square,,,,\ +2a^2,,,,\sqcap \lambda^2 (1).$$

Sumtis ergo θ et π pro arbitrio λ^2 habetur pure, quare et

☿$^2 \sqcap +2a$♂$(\pm)$♂$\sqrt{\lambda^2 - 2a^2}$ (2).

Quare et γ, fiet enim aequatio haec:

$$\gamma^4 \sqcap \llcorner - a^4 + 8a^4(\pm)4a^3\sqrt{\lambda^2 - 2a^2} - \lambda^2\text{☿}^2\lrcorner \frown \frac{a\text{ח}^3}{\gimel^4}\ (3).$$

Est autem $\mu \sqcap \gamma\sqrt{\sqrt{\frac{\theta}{a}}}$ (4).

Unde sequitur si ח sit $\sqcap$ 0. seu si aequatio data sit Cubica, etiam termino secundo carens, tunc γ et per consequens et μ fore $\sqcap$ 0. Est etiam in nostra potestate talem

8 sunt. *(1)* Ac proinde sumtis θ et ⟨—⟩ *(2)* Et *L* 14 pure *(1)* et $\gamma^4 \sqcap -\mathrm{a}^4 + 8\mathrm{a}^4 \pm 4\mathrm{a}^3\sqrt{\lambda^2 - \mathrm{a}^2} - \llcorner\llcorner\llcorner\lambda^2\llcorner\llcorner \frown \odot^2 \frown \llcorner 2\mathrm{a} \mp \sqrt{\lambda^2 - 2\mathrm{a}^2}\lrcorner\lrcorner\square\lrcorner$ *(2)*, qvare *L* 20 $\sqcap$ 0 *(1)* Est enim $\mu \sqcap$ *(2)* Si velimus ☿ esse $\sqcap$ 0 potest π talis assumi, ut debitus oriatur valor ipsius λ *(3)* Est *L*

assumere ipsam π cum arbitraria sit, ut inde oriatur valor, qui faciat ☿ esse 0. et tunc quidem valor ipsius ♂ nihil ne ad ☿ quidem conferet nec proinde nisi ad μ, et ψ.

Nam est $\psi \sqcap \sqrt{\sqrt{\theta a \pi}}$ (5).

Porro (6) $♂a^3$ est $\sqcap$ $(☿^2 a^2) 2a^3 ♂ (\ddagger) a^2 ♂ \sqrt{\lambda^2 - 2a^2}, (-8\psi^2 a\mu) - 8\sqrt{♂ a \pi^2} \frown a\gamma \sqrt{\sqrt{\frac{\theta}{a}}} \ddagger 4\frac{r}{t}\gamma^2 \sqrt{\frac{♂}{a}}$.

Unde patet si ☿ et μ simul sunt $\sqcap$ 0 etiam ♂ fore $\sqcap$ 0. Quare et ψ (nisi in valore ipsius π aliquid mutemus). Id ergo evitandum. Caeterum ex hac nova aequatione apparet, non posse simul et ♂ et π pro arbitrio sumi. Pone $☿^2 \sqcap ♂\text{ק}$. Cumque posita π pro arbitrio habita sit λ, pure, per aeq. 1. Ideo in aequatione 2. divisis omnibus per ♂ habetur et ק pure. Unde aequatio sexta dat:

$♂a^3 \sqcap ♂\text{ק}a^2 - 8\sqrt{♂a\pi^2} \frown a\gamma\sqrt{\sqrt{\frac{♂}{a}}} \ddagger 4\frac{r}{t}\gamma^2\sqrt{\frac{♂}{a}}$ et pro ♂ substituto $\frac{\oplus^2}{a}$, et divisis omnibus per $\oplus$ fiet:

$$\oplus a^2 \sqcap \text{ק} \oplus a - 8\pi \frown a\gamma\sqrt{\frac{\oplus}{a}} \ddagger \frac{4r}{t}\gamma^2\oplus \text{ sive } \oplus \frown \underbrace{a^2 - \text{ק}a}_{\text{ל}} \ddagger 4\frac{r}{t}\gamma^2 \sqcap -8\pi \frown a\gamma\sqrt{\frac{\oplus}{a}}$$

et quadrando utrobique

$$\oplus\cancel{2}, \frown \text{ל}^2 \ddagger 8\frac{r}{t}\text{ל}\gamma^2 + 16\frac{r^2}{t^2}\gamma^4 \sqcap \frac{\cancel{\oplus}}{a} \frown 64\pi^2 a^2 \gamma^2.$$

---

3 *Dazu am Rand*: Nunc tandem apparet quod ipsius explicatio adhuc restet.

11 *Dazu am Rand*: Nota quod supra ♄ nunc $\oplus$.

1 ipsam *(1)* θ, cum arbitraria sit, ut $☿^2$ fiat 0 *(2)* π cum *L* 6 fore $\sqcap$ 0. *(1)*, substituendo pro θ ♂, $\frac{\oplus^4}{a^3}$ *(2)* qvare *L* 8 sumi *(1)*, et satius esse pro arbitrio *(2)* An sic: aeqvationem ultimam separabimus in duas, et ponamus $♂a^3 \sqcap$ ☿ *(3)*. pone *L*

Jam per Aeq. 3. $\gamma^4 \sqcap \text{ס}a^3 - \lambda^2 \oplus^2 \frac{\text{ק}}{a} \frown a\frac{\text{ת}^3}{\text{ג}^4}$. Unde patet in parabola facile haberi $\oplus$, et γ. et in parabola etiam ת $\sqcap 0$. Extra parabolam sumenda π talis, ut ל fiat $\sqcap 0$.

His artibus res haud dubie exitum reperit, sed ut omnia ad summam facilitatem perducantur, venit in mentem utramque aequationem datam pariter et factitiam reducere ad Cubicam, et tum demum sublato rursus 2$^{\text{do}}$ termino, tertium reddere similem, ac supererit non nisi una aequatio collatitia.

Primum ergo posito ☽ $\sqcap 0$ aequatio factitia erit quae supra $z^4 * + a♃z^2 + a^2♀z, ♂a^3 \sqcap 0$. Cujus loco per regulam a Cartesio aliisque ante et post ipsum traditam, ponetur: $y^6 + 2a♃y^4 \begin{matrix} +♃^2 \\ -♂^2 \end{matrix} y^2 - a^2♀^2 \sqcap 0$ vel posito ♃ $\sqcap 0$. fiet $y^6 * -♂^2y^2 - a^4♀^2 \sqcap 0$. et habemus aequationem cubicam secundo termino carentem.Jam resumenda est data secundo termino carens:

$$\begin{array}{llllllll} w^4 & * & +a\text{ב} & w^2 & a^2\text{ג} & w & +\text{ת}a^3 & \sqcap 0. \text{ ex qua eodem plane modo fiet:} \\ v^6 & & +2a\text{ב} & v^4 & +\text{ב}^2 & v^2 & -a^2\text{ג}^2 & \sqcap 0. \\ & & & & -\text{ת}^2 & & & \end{array}$$

2 *Dazu am Rand*: NB. Erravi in eo quod posui 2$^{\text{do}}$ termino aequationis datae sublato, etiam adhuc ת fore 0, si fuit a^3p.

10 *Dazu am Rand*: Sed et in eo hic erratum quod ea aequatione cubica cum qua confertur ultima data non construitur aequatione factitia proposita; reducta enim directe data non construitur. Rectius cuncta procedent ponendo ☽ et ♂ $\sqcap 0$ et ita aequationem datam ad Cubicam ejusdem formae 2$^{\text{do}}$ termino carentem reducendo.

2 etiam *(1)* γ *(2)* ת $\sqcap 0$ *(a)* tunc faciendum etiam ♄ $\sqcap 0$ | qvod absurdum, qvia non est in potestate *erg.* |, aut fore $\oplus$ 0 | seu ♂ *erg.* | Unde rursus absurdum, aut faciendum ut π dividatur per γ, unde absurdum, qvia etiam fieret $\psi \sqcap 0$ qvia $\psi \sqcap \pi\oplus$, nisi ponamus π dividi per γ. tunc enim π | vel alia eius loco *erg.* | restituetur | et manebit arbitria *erg.* |; Extra parabolam sumenda π talis, ut ל fiat $\sqcap 0$. *(b)* Extra *L*

8 per regulam: Vgl. Fr. VIÈTE, *De aequationum recognitione et emendatione*, 1615, S. 102 f. (*VO* S. 145 f.); R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 79 f.; Fl. de BEAUNE, *Notae breves*, 1659, *DGS* I S. 137; Fr. DULAURENS, *Specimina mathematica*, 1667, S. 215.

Unde tollendo secundum Terminum scribemus: Ponendo $v^2 \sqcap s^2 - \frac{2a\beth}{3}$, erit

$$\begin{array}{rl|l|lll}
 & v^6 \sqcap s^6 & -3 \frown \frac{2a\beth}{3} s^4 & +3 \frown \frac{a^2\beth^2}{9} & s^2 & -\frac{8a^3\beth^3}{27} \\
\text{et } 2a\beth v^4 \sqcap & \underline{\qquad\quad} & +2a\beth \qquad s^4 & -4\frac{a^2\beth^2}{3} & \dots & +\frac{24(8)a^3\beth^3}{(9)27} \\
 & & & \left\{\begin{array}{l} \beth^2 \\ -\text{ת}^2 \end{array}\right. & \begin{array}{l} \dots \\ \dots \end{array} & \left\{\begin{array}{l} -\frac{2a\beth^3}{3} \\ +\frac{2a\text{ת}^2\beth}{3} \end{array}\right. \\
 & & & & & -a^2\gimel^2
\end{array}$$

Pro qua aequatione scribemus: $s^6 * a^3\beta s^2 + a^5\gamma \sqcap 0$. et ponendo $s^2 \sqcap \frac{\aleph y^2}{a}$ fiet $\frac{\aleph^3}{a^3}y^6 * a^{[2]}\beta\aleph y^2 + a^5\gamma \sqcap 0$, sive $y^6 * \frac{a^5\beta}{\aleph^2}y^2 + \frac{a^8\gamma}{\aleph^3} \sqcap 0$ ac debet esse $\frac{a^5\beta}{\aleph^2} \sqcap -2\male^2$, sive $\aleph \sqcap a^2\sqrt{\frac{\beta[a]}{-2\male^2}}$, sive $\aleph \sqcap \frac{a}{\male}\sqrt{-\beta a}$. Atque ita fiet ex aequatione data: $y^6 * -\male^2 y^2 + \frac{a^8\gamma\male^3}{a^4\sqrt{-\beta^3 a}}$, conferenda cum $y^6 * -\male^2 y^2 - a^4\female^2$ ponendoque $\gamma \sqcap -\theta$, et $\female \sqcap \frac{\male\text{ש}}{a}$, fiet aequatio collatitia unica: $\frac{a^{\cancel{8}2}\theta\male}{\cancel{a^4}\sqrt{-\beta^3 a}} \sqcap \cancel{a^2}\text{ש}^2$.

32. CONSTRUCTIO AEQUATIONUM SOLIDARUM UNIVERSALIS CONTINUATA

[September – Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 287–288. 1 Bog. 4°. 2 S. auf Bl. 287. Auf Bl. 288 N. 34.
Cc 2, Nr. 855 F

Datierungsgründe: s. N. 31.

Resumamus ergo: Aequatio factitia est: $v^4 + \dfrac{2☽}{☉}v^3 + \dfrac{♃a}{☉^2}v^2 + \dfrac{☿a^2}{☉^2}v + \dfrac{♂a^3}{☉^2} \sqcap 0.$

Aequatio data quadrato-quadratica: $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0.$

Sublato secundo termino, scribemus: $w^4 \;\; * \;\; + a\text{ב}w^2 + a^2\text{ג}w + a^3\text{ת} \sqcap 0.$

et reducendo ad cubicam, $\dfrac{t^6}{a^3} + 2\cancel{a}\text{ב}\dfrac{t^4}{a^2} + \begin{array}{l} a^2\text{ב}^2 \\ -\,a^2\text{ת}^2 \end{array}\dfrac{t^2}{a} - a^4\text{ג}^2$, et ponendo $s \sqcap \dfrac{t^2}{a}$, fiet aequatio

cubica talis: $s^3 + 2\text{ב}\,s^2 + \begin{array}{l} \text{ב}^2 \\ -\,\text{ת}^2 \end{array} s - a\text{ג}^2 \sqcap 0.$

cujus radices ita multiplicari possunt, ut unam habeat cum factitia simili terminum communem. De quo postea, nunc tentare operae pretium duxi facillimam omnium machinationem, secundo termino non sublato: Nimirum, habemus:

15–354,7 *Dieser Abschnitt wurde von Leibniz durch Umrahmung isoliert.*

13–15 $\sqcap$ 0 *(1)* et sublato termino secundo: *(2)* qvae *(3)* cuius *L*

8 Resumamus: vgl. den Schlussabschnitt von N. 31 ab S. 351 Z. 7. 11 reducendo: Leibniz geht aus von $t^6 + 2a\text{ב}t^4 + a^2\text{ב}^2t^2 - a^2\text{ת}^2t^2 - a^4\text{ג}^2$ und dividiert unvollständig durch a^3. In der folgenden Substitution ist die Unstimmigkeit behoben.

$v^4 + \frac{2\,\text{☽}}{\odot}\, v^3 + \frac{\text{♃}a}{\odot^2}\, v^2 + \frac{\text{☿}a^2}{\odot^2}\, v + \frac{\text{♂}a^3}{\odot^2} \sqcap 0$, aequationem factitiam, et

$y^4 + \quad l\, y^3 + am\, y^2 + a^2 n\, y + \quad a^3 p \sqcap 0$. aequationem datam; ponatur $v \sqcap \frac{\aleph y}{a}$, fiet ex aequatione factitia:

$$\frac{\aleph^4}{a^4}\, y^4 + \frac{2\,\text{☽}\aleph^3}{\odot a^3}\, y^3 + \frac{\text{♃}a\aleph^2}{\odot^2 a^2}\, y^2 + \frac{\text{☿}a^2\aleph}{\odot^2 a}\, y + \frac{\text{♂}a^3}{\odot^2} \quad \sqcap 0$$

divisisque omnibus per $\frac{\aleph^4}{a^4}$, fiet:

$$y^4 + \frac{2\,\text{☽}a}{\aleph\odot}\, y^3 + \frac{\text{♃}aa^2}{\odot^2\aleph^2}\, y^2\ [+]\ \frac{\text{☿}a^2a^3}{\odot^2\aleph^3}\, y + \frac{\text{♂}a^3a^4}{\odot^2\aleph^4} \sqcap 0$$

ponendoque $\frac{\text{♃}\cancel{a}a^2}{\odot^2\aleph^2} \sqcap \cancel{a}m$, fiet $\aleph \sqcap \frac{a}{\odot}\sqrt{\frac{\text{♃}}{m}}$. Sed parum, hinc, opinor, lucri.

Ponamus jam $s \sqcap \frac{v\aleph}{a}$, fiet $\quad \frac{\aleph^3}{a^3}\, v^3 + 2\beth\frac{\aleph^2}{a^2}\, v^2 \left.\begin{matrix} +\beth^2 \\ \\ -\text{ת}^2 \end{matrix}\right\} \frac{\aleph}{a}\quad v - \quad a\gimel^2 \quad \sqcap 0.$

Divisisque omnibus per $\frac{\aleph^3}{a^3}$, fiet: $\quad v^3 + \frac{2\beth a}{\aleph}\quad v^2 \left.\begin{matrix} +\beth^2 \\ \\ -\text{ת}^2 \end{matrix}\right\} \frac{\aleph}{a^2}\quad v - \frac{a\gimel^2 a^3}{\aleph^3} \sqcap 0.$

$$\text{Aequatio factitia:}\quad \cancel{\odot^2}\, v^4 + \frac{2\cancel{\odot}\,\text{☽}}{(\aleph)\odot}\, v^3 + \frac{\begin{matrix} 2\odot\text{☿} \\ +\ \text{☽}^2 \\ \pm\ \frac{r}{t}\psi^2 \end{matrix}}{\odot^2(\aleph^2)}\, v^2 \left\{ \frac{\begin{matrix} +\ 2\,\text{☽}\text{☿} \\ \pm\ \frac{8r}{t}\psi^2\mu \\ -\ 8\psi^2 a \end{matrix}}{\odot^2(\aleph^3)} \right.\, v \left\{ \frac{\begin{matrix} +\ \text{☿}^2 \\ -\ 8\psi^2 a\mu \\ \pm\ \frac{4r}{t}\psi^2\mu^2 \end{matrix}}{\odot^2(\aleph^4)} \right.$$

conferenda cum $\quad \odot^2\, v^4 + \odot^2 l \quad v^3 + \odot^2 am\, v^2 \quad + \odot^2 a^2 n\, v \quad + \odot^2 a^3 p \ \sqcap 0.$

Erit Aeq. 1. $\text{☽} \sqcap \frac{\odot l}{2}$ ex Term. 2. Aeq. 2 $\text{☿} \sqcap \frac{\odot^2 am - \text{☽}^2 \pm \frac{r}{t}\psi^2}{2\odot}$. Ex Term. 3. In quarto termino factitiae reperitur $\psi^2\mu$, cujus valor substituatur ex quinto, ubi $\psi^2\mu \sqcap \frac{+\text{☿}^2 \pm \frac{4r}{t}\psi^2\mu^2 - \odot^2 a^3 p}{8a}$, fietque ex terminis quartis:

$2\,\text{☽☿}, \mp \frac{r}{ta} \frown \llcorner \text{☿}^2 \pm \frac{4r}{t}\psi^2\mu^2 - \odot^2 a^3 p \lrcorner - 8\psi^2 a \sqcap \odot^2 a^2 n$ et ex hac aequatione erit: $\psi^2 \sqcap \frac{2\,\text{☽☿} \llcorner \mp \frac{r}{ta} \frown \llcorner \text{☿}^2 - \odot^2 a^3 p \lrcorner\lrcorner - \odot^2 a^2 n}{+8a + \frac{4r^2}{t^2 a}\mu^2}$. At supra $\psi^2 \sqcap \frac{\odot^2 a^2 n + 2\,\text{☽☿}}{+8a \mp 8\frac{r}{t}\mu}$. Sed ut rem rectius complectamur, considerandum est $+8\psi^2 a \mp 8\frac{r}{t}\psi^2\mu \sqcap 2\,\text{☽☿} - \odot^2 a^2 n$ ex Terminis quartis, et $8\psi^2 a \mp 8\frac{r}{t}\psi^2 \frown \mu, \sqcap \text{☿}^2 - \odot^2 a^3 p \mp 4\frac{r}{t}\psi^2\mu^2$. Ex Terminis 5^{tis}. Ergo jungendo $2\,\text{☽☿}\mu - \odot^2 a^2 n\mu \sqcap \text{☿}^2 - \odot^2 a^3 p \mp \frac{4r}{t}\psi^2\mu^2$ et pro $\frac{r}{t}\psi^2$, substituendo ejus valorem ex terminis tertiis, fiet: $2\,\text{☽☿}\mu - \odot^2 a^2 n\mu \sqcap \text{☿}^2 - \odot^2 a^3 p + 2\odot\psi\mu^2 + \text{☽}^2\mu^2 - \odot^2 am\mu^2$. Item jungendo duos absolutos ipsius ψ^2 valores fiet:

$\odot^2 a^2 n + 2\,\text{☽☿} \frown 8a + \frac{4r^2}{t^2 a}\mu^2 \sqcap 2\,\text{☽☿}\llcorner\llcorner\llcorner \mp \frac{r}{ta} \frown \llcorner\llcorner \text{☿}^2 - \odot^2 a^3 p \lrcorner\lrcorner\lrcorner - \odot^2 a^2 n \lrcorner\lrcorner\lrcorner\lrcorner \frown + \lrcorner\lrcorner + 8a + \frac{8r}{t}\mu$. Habemus ergo duas aequationes, in quibus solae ex incognitis μ et ☿. Ex priore, ita investigabimus ☿, nempe:

$$\text{☿}^2 + 2\odot\mu^2\ \text{☿} + \llcorner \odot\mu^2 - \text{☽}\mu, \square \lrcorner \sqcap \odot^2 a^3 p - \text{☽}^2\mu^{\langle 2\rangle}\langle -\odot\rangle^2 am\mu^2 - \odot^2 a^2 n\mu \llcorner + \odot\mu^2 - \text{☽}\mu \lrcorner \square.$$
$$-2\,\text{☽}\mu\ \ldots$$

Unde $\text{☿} + \odot\mu^2 - \text{☽}\mu \sqcap \sqrt{\odot^2 a^3 p - \text{☽}^2\mu^2 \text{ etc.}}$. Ex altera fiet:

1 Term. 3. *(1)* | Aeq. 3. *erg.* | $\psi^2 \sqcap \frac{-\odot^2 \mathrm{a}^2\mathrm{n} + 2\,\text{☽☿}}{+8\mathrm{a} \mp 8\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mu}$ Ex term. 4. ponatur $\text{☿} \sqcap \frac{\mu\beta}{\mathrm{a}}$, fiet ex Terminis ultimis Aeq. 4. $\mu^2\beta^2 - 8\psi^2\mathrm{a}\mu \pm \frac{4\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\psi^2\mu^2 \sqcap \odot^2\mathrm{a}^3\mathrm{p}$ *(2)* in *L* 5 At supra *erg.* *L*

$$\text{☿}^2 \;\frac{\boxed{\dfrac{\left\{\begin{array}{l} +\;2\,\text{☽},\frown\llcorner +8a+\dfrac{8r}{t}\,\mu\lrcorner\;\text{☿} \\ -\;2\,\text{☽},\frown\;+8a+\dfrac{4r^2}{t^2a}\,\mu^2 \ldots \end{array}\right.}{8a+8\dfrac{r}{t}\mu,\frown\;ǂ\;\dfrac{r}{ta}}}}{2\oplus}\qquad \oplus^2a^2 \;\sqcap$$

$$\frac{\odot^2a^2n,\frown 8a+\dfrac{4r^2}{t^2a}\mu^2+\odot^2a^3p\frown 8a+\dfrac{8r}{t}\mu\;\ldots\;\oplus^2\,a^2}{\dfrac{8a+\dfrac{8r}{t}\;\mu}{8a+\dfrac{8r}{t}\;\mu,\frown\;ǂ\,\dfrac{r}{ta}}}$$

fietque:
$$\text{☿}\;\frac{\begin{array}{r} +\,\text{☽},\frown+8a+\dfrac{8r}{t}\,\mu \\ +\,8a+\dfrac{4r^2}{t^2a}\mu^2 \end{array}}{8a+\dfrac{8r}{t}\mu\frown ǂ\dfrac{r}{ta}}\;\sqcap\;\sqrt{\frac{\odot^2a^2n,\frown\,8a+\dfrac{4r^2}{t^2a}\mu^2\text{etc.}}{8a+\dfrac{8r}{t}\mu\frown ǂ\dfrac{r}{ta}}\qquad \odot^2a^2.}$$

Junctisque his duabus aequationibus, aequatio habebitur nova continens solam μ, sed ad altiores justo terminos assurgentem. Igitur satius est elisa μ, retinere ☿. fietque ex aequationum duarum ultimarum priore:

$$\mu^2\;\frac{\begin{array}{c}-\,2\;\text{☽}\,\text{☿}\;\mu\\ +\odot^2a^2n\end{array}}{2\odot\text{☿}+\text{☽}^2-\odot^2am}\;\ldots.\;\sqcap\;\frac{\odot^2a^3p-\text{☿}^2}{2\odot\text{☿}+\text{☽}^2-\odot^2am}\;\ldots.$$

$$\text{Unde}\quad\mu\;\frac{-\,\text{☽}\text{☿}+\dfrac{\odot^2a^2n}{2}}{2\odot\text{☿}+\text{☽}^2-\odot^2am}\quad\sqcap\;\sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$$

Sed altera aequatio non dat valorem ipsius μ, nisi, quando t est finita. Nam t, [si] sit infinita nulla in ea extat μ. ideoque ista inutilia universali solutioni. Res ergo eo reducenda esset, ut Terminis secundis sublatis, reductaque aequatione data quadratoquadratica ad Cubicam et sublato rursus secundo termino, et uno termino eodem facto, non nisi unica supersit aequatio collatitia; multae vero indeterminatae, unde plurimae rursus arbitrariae aequationes assumi possunt.

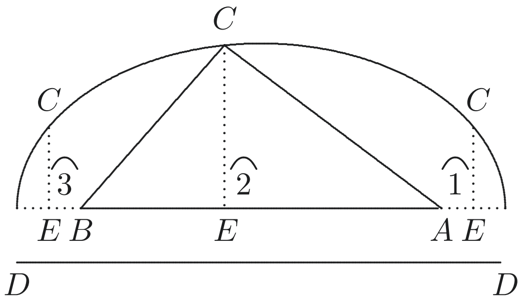
33. SCHEDIASMA DE FOCIS CONICARUM
Oktober 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 280–281. 2 Bl. 4°. $3\frac{1}{2}$ S.
Cc 2, Nr. 787

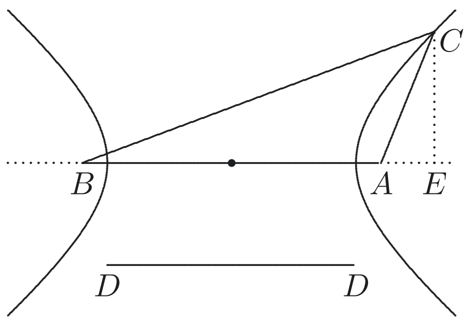
33_1. SCHEDIASMA DE FOCIS CONICARUM, PARS PRIMA

S c h e d i a s m a d e F o c i s C o n i c a r u m, Octob. 1674

Invenire locum, unde ductae ad data duo puncta rectae datam faciant summam, aut dato differant intervallo. Quod ita reperiemus:



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Datorum punctorum distantia AB appelletur, a, data summa vel datum intervallum, b. Ex puncto loci quaesiti assumto, C, demittatur perpendicularis in AB productam si opus est, CE, appellanda y, et AE vocetur x. Erit $AC^2 \sqcap y^2 + x^2$, porro $\overset{\frown}{1}$ $EB \sqcap AB +$ AE, vel $\overset{\frown}{2}$ $AB - AE$, vel $\overset{\frown}{3}$, $AE - AB$, ergo $EB \sqcap (\pm)a(\pm)x$, ejusque quadratum, $EB^2 \sqcap$

6 S c h e d i a s m a ... 1674 *erg.* *L* 8 intervallo. | *(1)* prior locus est Hyperbola, posterior *(2)* posterior locus est Hyperbola, prior Ellipsis. *gestr.* | Qvod *L* 8–10 reperiemus: *(1)* Datum intervallum *(2)* Datorum *L*

$a^2(\dagger)2ax+x^2$. Ergo $CB^2 \sqcap a^2(\dagger)2ax+x^2+y^2$. Jam $AC \dagger CB \sqcap b$, ergo $-\sqrt{y^2+x^2}+b \sqcap \dagger\sqrt{a^2(\dagger)2ax+x^2+y^2}$, et quadrando utrobique: $y^2 \boxed{+x^2} -2b\sqrt{y^2+x^2}+b^2 \sqcap a^2(\dagger)2ax \boxed{+x^2} \boxed{+y^2}$ et ordinando: $\boxed{y^2}+\underbrace{b^2-a^2}_{d^2}(\ddagger)2ax \sqcap 2b\sqrt{y^2+x^2}$, et quadrando, fiet: $\dfrac{d^4(\ddagger)4d^2ax+4a^2x^2}{4b^2} \sqcap y^2+x^2$. Unde apparet si a seu AB sit major quam b seu D locum esse ad Hyperbolam; sin contra ad Ellipsin. Si a sit infinite parva locum esse ad Circulum, si $\dfrac{a^2}{b^2}x^2$, sit dupla ipsius x^2, locum esse ad Hyperbolam circularem seu latera rectum transversumque aequalia habentem. Si a aequetur ipsi b locum esse ad nihil seu impossibilem, si b sit $\sqcap$ 0. locum fore ad punctum, quae clarius apparent aequatione hunc in modum ordinata atque explicata[:]

$$y^2 \quad \begin{matrix}+1\\-\dfrac{a^2}{b^2}\end{matrix} \quad x^2 \quad (\dagger) \quad \dfrac{\begin{cases}+b^2\\-a^2\end{cases}}{b^2} \quad \begin{matrix}ax\\ \cdot\,\cdot\end{matrix} \quad \dfrac{\begin{cases}-b^4\\+2b^2a^2\\-a^4\end{cases}}{b^2} \quad \sqcap \quad 0$$

vel $b^2y^2+d^2y^2(\dagger)d^2ax-d^4 \sqcap 0$.

Exempli causa ponendo b infinite parvam, vel a infinitam aequatio correcta, caeteris destructis dabit $+x^2(\dagger)ax+a^2 \sqcap 0$ quae est ad punctum. Explicato signo $(\dagger)$ quemadmodum necesse est, ut $\ddagger\ ax-x^2$ fiet quantitas nihilo major, quia $a \sqcap \sqrt{-x^2 \ddagger ax}$. Ergo $+ax-x^2 \sqcap a^2$ et $a \sqcap x$. Ad punctum autem esse patet, quia non nisi unica est in incognita, nempe x, ergo non nisi tot esse possunt puncta C, quot aequatio $ax-a^2 \sqcap x^2$, admittit radices, nempe ad summum duo.

7 ipsi b *(1)* locum esse ad Parabolam, deniqve *(2)* vel si b $\sqcap$ nihil locum esse ad punctum *(3)* locum *L* 8 ad *(1)* lineam rectam | si *erg., nicht gestr.* | *(2)* punctum *L* 14 f. $-\mathrm{d}^4 \sqcap 0$ *(1)* Unde illud qvoqve intelligitur ut locus fiat ad parabolam ipsam b cogitari debere infinite parvam, *(a)* Unde *(b)* Ergo *(2)* Exempli *L* 16 ad *(1)* parabolam *(2)* punctum *L* 18 a $\sqcap$ x *(1)* in parabola *(2)* Ad *L*

13 b^2: Richtig wäre $4b^2$. Leibniz rechnet konsequent weiter. Der Fehler beeinträchtigt die weitere Rechnung bis Z. 19 und wird auch in die Gleichungen S. 359 Z. 13–16 sowie S. 360 Z. 18–20 übertragen.

Ut autem ad Parabolam quoque et Lineam rectam perveniamus, duae sunt viae[,] una ex mutata nonnihil Quaestione sive formula problematis, altera explicatis ipsius aequationis incognitis. ⟨Sciendum est autem⟩ Parabolam hoc habere cum circulo commune, ut flexus ejus non nisi ab uno dependeat. Unde patet lapsum esse Cartesium cum ideo negavit a Circulo cum circulo vel recta expectari debere Mesolabum, quia Circuli flexus non nisi ab uno pendeat: Eodem enim argumento nec Parabola cum Circulo sufficeret, nec Hyperbola laterum recti transversique aequalium. Porro Quaestio ita formatur: Invenire locum unde ductae ad data duo puncta infinito intervallo distantia rectae, differentiam vel summam habeant datam, sed ita reformata aequatio dabit locum ad punctum, ut supra. Aliquid ergo adjiciendum est, et ars formandi quaestionem ex ipsis aequationis visceribus eruetur, explicando, x, scilicet $x \sqcap v+c$, sive $x^2 \sqcap v^2+2cv+c^2$. Unde aequatio explicata:

$$\begin{array}{llllll} b^2y^2 & +\ b^2v^2 & +\ b^2 \frown 2cv & +\ b^2c^2 & -b^4 & \sqcap 0 \\ & -\ a^2\ldots & -\ a^2 & -\ a^2\ldots & +2b^2a^2 & \\ & & (\mp)\ +\ b^2 \frown a\ldots & (\mp)\ +\ b^2ac & -a^4 & \\ & & \ldots\ -\ a^2 & \ldots\ -\ a^2\ .. & & \end{array}$$

3 f. *Darunter:* falsum

1 duae sunt viae *erg. L* 5 cum ... recta *erg. L* 7 formatur: *(1)* Invenire locum unde ductae hinc ad punctum qvoddam constans, illinc ad rectam qvandam, sed constante angulo, rectae, datam faciant summam, aut dato differant intervallo *(2)* Invenire *L* 9 punctum, *(1)* y^2 *(a)* + b *(b)* + x^2 *(2)* + a^2x^2 $(\mp)$ $a^3x + 2b^2a^2 \sqcap 0$ sive: x^2 $(\mp)$ $ax + 2b^2 \sqcap 0$ Unde $x^2 \sqcap (\pm)\ ax + 2b^2$ Unde $b^2 \sqcap \dfrac{(\pm)\ ax - x^2}{2}$, ac proinde a est major qvam x, id est, qvia x indefinita est, erit a major qvalibet recta assignabili, at $(\mp)$ debet explicari per −. *(3)* ut *L* 11 explicando, *(1)* terminos vel y. vel x, vel alterutrum. Attamen si statim ab initio apparet, *(a)* fie *(b)* | ponendo enim *nicht gestr.* | $y \sqcap v + c$, sive $y^2 \sqcap v^2 + 2cv + c^2$, et $x \sqcap \omega + d$, sive $x^2 \sqcap \omega^2 + 2d\omega + d^2$ *(2)* x, scilicet ... sive $x^2 \sqcap v^2+$ | $2dv + d^2$ *ändert Hrsg.* | Unde *L*

3 f. ⟨Sciendum ... dependeat: Leibniz hat den Satz angestrichen und mit „falsum“ verworfen. Dies betrifft auch die Folgerung bis Z. 7. 4 f. negavit: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 96.

Sed video ne sic quidem profici quicquam, quia nova arbitraria c, ad quadrata non pervenit. Sed videor tamen reperisse mihi remedium sane admirandum, quodque non cuivis, nec statim veniret in mentem, nempe considerandum est, quod primus opinor observavi, ductu lineae infinitae in infinite parvam, seu nihil, fieri lineam finitam, sive communem. Quare ponendo, b et a, aequales inter se, fiet $b^2 - a^2 \sqcap 0$. Est autem $b^2 - a^2$, quantitas facta ex $b{-}a$, $\sqcap 0$ in $b{+}a$, ergo $b^2{-}a^2 \sqcap 2a0$ vel $2a\beta$ et $-b^4{+}2b^2a^2{-}a^4 \sqcap -4a^20^2$, idem est si $b + a$, ponantur $\sqcap 0$. Nam $b^2 - a^2$, fiet ex $b + a \sqcap 0$ ducta in $b - a$ quae est aliquid. Et vero res semper eodem redit, quia $b^2 - a^2 \sqcap a^2 - b^2$, in hoc casu, ut arbitror, quanquam id sit exactius discutiendum, nimirum: Quia $-a \sqcap b$, eo casu, fiet: $2b0$, si fuisset $b + a$ in $a - b$, fiet $a^2 - b^2$, et $2a0$, signa ergo contraria redduntur. Unde patet si a sit linea infinita, $b^2 - a^2$, esse lineam finitam quandam duplicatam, etsi qualis illa sit hinc non exprimatur, nisi ipsa 0 sit explicata vel ipsa infinita a. Sed etsi ea non explicatur, hoc nihil nocebit, nam per eam dividi poterunt omnia, ac proinde evanescet, ponamus hanc lineam imaginariam, sive abstractam, l, fiet:

$$\frac{l^4}{\beta^2}y^2 \;+\; 2l\beta c\,v \;+\; l\beta c^2 \sqcap 0$$

$$(\text{ǂ})\qquad l^3..\ (\text{ǂ})\ l^3c$$

Sed ita non nisi y^2, quare non licet facere, a, vel l, infinitam, atque ita habebimus:

$$\begin{array}{lllll} a^2y^2 + 2a\beta\,v^2 & + & 4a\beta c\,v & + & 2a\beta c^2 \sqcap 0. \\ & (\text{ǂ}) & 2a^2\beta\,.. & (\text{ǂ}) & 2a^2\beta c \\ & & & - & 4a^2\beta^2 \end{array}$$

2 pervenit. *(1)* Si tamen placeat inde locum facere ad lineam rectam, ratio in promtu est, ponendo 2c(ǂ)a $\sqcap$ 0. et fiet aeqvatio: by $\sqcap \sqrt{+\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}$v, sive y $\sqcap \dfrac{\sqrt{\mathrm{a}^2 - \mathrm{b}^2}}{\mathrm{b}}$v qvae est ad lineam rectam. Verum enim vero cum aeqvationem potissimum, ad Parabolam qvaeramus, eius hanc demum reperi viam, subtiliorem, qvam ut statim aut cuivis in mentem venire possit. *(a)* Ponendo scilicet tam b, qvam a esse ut *(b)* b ponatur infinite parva, ita enim fiet ex aeqvatione ab initio proposita, nam ipsa c, opus non est, fiet inqvam: *(c)* Ponatur $+\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2 \sqcap 0$, sive b $\sqcap$ a *(2)* subtilio *(3)* Sed *L* 3 nempe *(1)* primum *(2)* constat applicatione lineae infinitae *(3)* considerandum *L* 5 ponendo, *(1)* b, a. c, *(2)* b, et a. esse infinitae et *(3)* b et *L* 5 $\mathrm{b}^2 - \mathrm{a}^2 \sqcap 0$. *(1)* vel $\sqcap \beta^2$ Ponamus porro c esse lineam qvadratice infinitam, sive $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}^2}{\beta}$ ponendo β infinite parvam, fiet $\mathrm{c}^2 \sqcap \dfrac{\mathrm{a}^4}{\beta^2}$, *(2)* Est *L* 14 abstractam, l, *(1)* fiet ex aeqva *(2)* |ponamus *nicht gestr.*| deniqve c esse qvadratice *(3)* fiet: *L* 15 + $2\mathrm{l}\beta\mathrm{c}^2$ *L ändert Hrsg.* 16 (ǂ) $2\mathrm{l}^3\mathrm{c}$ *L ändert Hrsg.* 17 y^2, *(1)* restabit locus ad Hyperbol *(2)* qvare *L*

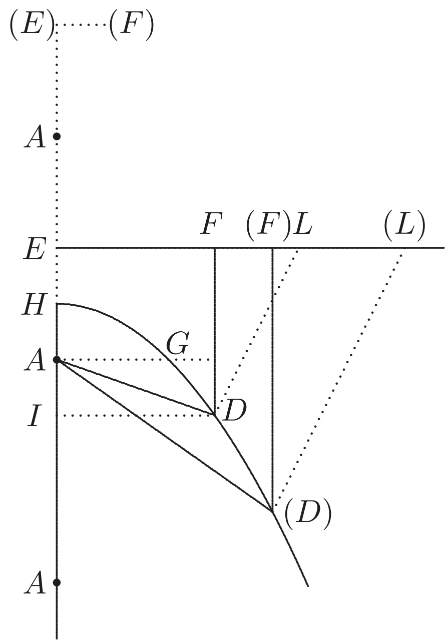
Sed ut locus ad parabolam fiat, ita formanda est quaestio locum invenire punctorum, unde ductae duae rectae, altera ad punctum constans, altera ad rectam constantem angulo dato; sint inter se aequales. Quid vero si quaestio sit ut datam summam vel datum intervallum habeant, quid si ad duas rectas constantes angulo constante.

33_2. SCHEDIASMA DE FOCIS CONICARUM, PARS SECUNDA

Octob. 1674

Schediasmatis de focis Conicarum pars 2^{da}.

Locus punctorum unde ductae ad duo constantia puncta lineae rectae habeant summam vel differentiam aequalem est ad vel Ellipsin vel Hyperbolam, ut ostendi, in praecedente. Locus punctorum unde ductae ad punctum constans; item ad rectam constantem angulo constante rectae sint inter se aequales est ad parabolam; explicandum quod fiat si habeant tantum summam vel differentiam aequalem.



[*Fig. 1*]

12–362,1 aeqvalem. *(1)* Angulus ille constans ponatur talis, ut recta *(2)* Ducatur L

Ducatur directrix HA ejusmodi ut sit parallela ipsis ducendis DF. et facilitatis causa angulus EFD ponatur rectus. Ipsa AE vocetur a. EF vel ID sit x. et FD vel EI sit y. AI est $\text{⁺ǂ}\,\underset{y}{EI}\,\text{⁺‡}\,\underset{a}{AE}$. Objicies sufficere poni $AI \sqcap \text{ǂ}EI\,\text{‡}\,AE$. et locum ipsius A ultra E. omitti posse. Nam tunc res eodem tandem rediret ac si lineam EF etiam longius removissemus. Respondeo tunc vero AD et DF non forent semper aequales, sed differentiam semper haberent datam, summamve. Unde video etiam nullum novum oriri locum, si ponas a puncto dato tum ad punctum constans, tum ad rectam constantem, angulo constante duci duas rectas summam differentiamve habentes datam. Retineamus ergo interim $AI \sqcap \text{⁺ǂ}\, y\, \text{⁺‡}\, a$. erit $AD \sqcap \sqrt{y^2 + a^2 \,\text{ǂ}\, 2ay + x^2} \sqcap y$. fiet $\boxed{y^2} + a^2 \,\text{ǂ}2ay + x^2 \sqcap \boxed{y^2}$. Unde patet ǂ debere esse $\sqcap -$ et ⁺ǂ ⁺‡ $\sqcap$ ǂ ‡. Si faciamus $AD \sqcap \sqrt{y^2 + a^2 \,\text{ǂ}\, 2ay + x^2} \sqcap \text{⁺ǂ}\, y\, \text{⁺‡}\; b$. ut scilicet summa vel differentia ipsius AD et DF sit aequalis datae b. res eodem modo redibit. Sed quid si non AD et DF, sed AD et DL. quae ad rectam EL. angulum semper facit constantem, sed obliquum; ipsi AD perpetuo parallela intelligatur; fiet aequatio: $\sqrt{y^2 + a^2 \,\text{ǂ}\, 2ay + x^2} \sqcap \dfrac{c}{a}y + b$. et fiet: $y^2 + a^2 \,\text{ǂ}\, 2ay + x^2 \sqcap \dfrac{c^2y^2}{a^2} + \dfrac{2cb}{a}y + b^2$ sive ordinando:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & y^2 & \text{ǂ} & 2a\ y & + x^2 & + a^2 & \sqcap 0 \\ -\dfrac{c^2}{a^2} & & - & \dfrac{2cb}{a}\ .. & & -b^2 & \end{array}$$

et ponendo $a \sqcap b$ fiet:

$$\begin{array}{ccccc} 1 & y^2 & \text{ǂ} & 2a\ y & + x^2 \sqcap 0. \\ -\dfrac{c^2}{a^2} & .. & - & 2c\ .. & \end{array}$$

Quam pro variis ipsarum c. et a. explicationibus ad omnes conicas possibiles applicari posse patet.

Ex hoc itaque fundamento sane novo inveniri potest instrumentum unum idemque, in quo mutatis tantum magnitudinibus quarundam rectarum in describendis constantium, sive mutatis partium instrumenti intervallis; omnes Ellipses, Hyperbolae, parabolae, et si

9 $\sqcap$ y. *(1)* Ei addatur FD $\sqcap$ y fiet: *(2)* fiet *L* 9 ǂ2ay *(1)* $\sqcap \boxed{y^2}$ et $a^2 \sqcap$ ‡2ay− Et qvia y |et a *erg.*| semper ponitur affirmativa, *(a)* debet et *(b)* cum de locis qvaeritur, erit ‡ $\sqcap$ + itaqve pro AI $\sqcap$ ⁺ǂ EI ⁺‡ AE, poni debet: AI $\sqcap$ ǂEI ‡ AE. ita enim fiet: $a^2 \sqcap +2ay$. *(2)* $+x^2 \sqcap \boxed{y^2}$ *L*

velis etiam Circuli et rectae describi possint. Et hac arte forte describi poterunt Conicae, quarum foci longissime absint exiguis licet instrumentis. Et credo ex eo fundamento etiam Ottii pendere instrumentum.

Ut ad Circulum applicetur esse debet: $\frac{a^2 - c^2}{a^2} \sqcap 1$. sive $a^2 - c^2 \sqcap a^2$, sive c infinite parva. Sed ita A. fiet circuli centrum. Licet hoc ergo dare non possit, quae sperari jussit Ottius; habemus tamen Instrumentum omnium opinor commodissimum ad usum communem pro Conicis describendis.

Videndum an mutetur calculus si pro $\frac{c}{a}y$ ponamus $\frac{a}{c}y$. vel aliter. Item an licet efficere ut EF transeat per A.

Ut portiones Conicarum describantur, etsi earum foci longissime absint ab instrumento; commodissime obtinebitur ope Coni. Sed tunc pro circulo opus erit sectione Coni non basi parallela, sed subcontraria.

Adde interim, quae mihi de Circulo attulit Perraultius.

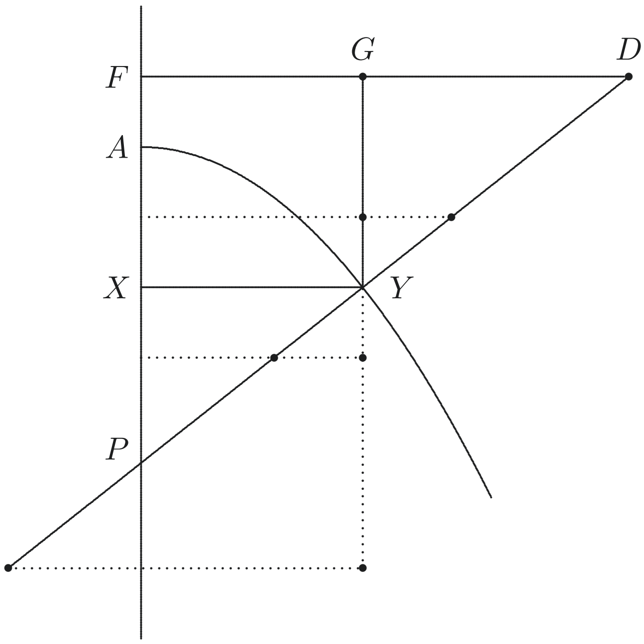
3 instrumentum: J. Ott, *Cogitationes physico-mechanicae de natura visionis*, 1670, Widmungsbrief. 13 attulit: Leibniz bezieht sich vermutlich auf eine mündliche Mitteilung Perraults.

34. EX PUNCTO DATO MINIMAM DUCERE I
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 287–288. 1 Bog. 4°. 2 S. auf Bl. 288. Auf Bl. 287 N. 32.
Cc 2, Nr. 856 A

Datierungsgründe: s. N. 31.

Ex puncto dato minimam ducere ad sectionem Conicam datam:



[*Fig. 1*]

Esto punctum datum D, minima quaesita DY, ducenda ad sectionem conicam cujus vertex A. ordinata ex puncto Y quaesito in axem demissa $XY \sqcap y$. et quam illa ex axe inde a vertice A abscindit, nempe AX, esto $\sqcap x$. DY, producta si opus est, occurrat axi in P sitque $XP \sqcap p$. Datur porro DF distantia puncti D ab axe, $\sqcap d$. Datur et $AF \sqcap f$. distantia puncti F, a vertice A.

$GD \sqcap d - y$, vel $-d + y$. vel $+d + y$. sive ${}^{+}\!\mp\, d\, {}^{+}\!\pm\, y$ et $GY \sqcap FX \sqcap$ (1) $f + x$. vel (2) $x - f$ (3) $f - x$ (4) $f - x$. Quare satius duarum ambiguitatum coitandarum causa non GY, vel GD, sed potius PY quaerere. Nam erit $FP \sqcap + f + x + p$ eritque

$$\begin{array}{ccccc} - & . & + & . & + . \\ - & . & + & . & + . \\ + & . & - & . & - . \end{array}$$

$FP \sqcap ({}^{+}\!\mp)\, f\, ({}^{+}\!\pm)\, x\, ({}^{+}\!\pm)\, p \sqcap \dfrac{dp}{y}$. Est autem $y \sqcap \sqrt{2ax \mp x^2}$, ergo quadrando fiet: $+f^2 - 2fx - 2fp, +x^2 + 2px + p^2 \sqcap \dfrac{d^2p^2}{2ax \mp x^2}$ et multiplicando

$$\begin{array}{llllllll} \mp\, x^4 & \pm\, 2f & x^3 & \mp\quad f^2 & x^2 & +\, 2af^2 & x & -\, d^2p^2 \sqcap 0. \\ & \mp\, 2p & & \pm\, 2fp & & -\, 2afp & & \\ & +\, 2a & & \mp\quad p^2 & & +\, 2ap^2 & & \\ & & & -\, 4fa & & & & \\ & & & +\, 4pa & & & & \end{array}$$

Tentandum est an haec aequatio ad cubicam reduci queat arte quam dicam: Sumatur alia aequatio, cujus incognita x. duas habet radices aequales, nempe $x^2 - 2ex + e^2$, multiplicetur per aliam $\mp x^2 + cx + ha \sqcap 0$. fiet

---

1 f. *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{ll} + d - y & 1 \\ + d - y & 2 \\ - d + y & 3 \\ + d + y & 4 \end{array}$$

7 $\sqcap \dfrac{\mathrm{dp}}{\mathrm{y}}$ *(1)*, et explicando x *(2)* Est *L*

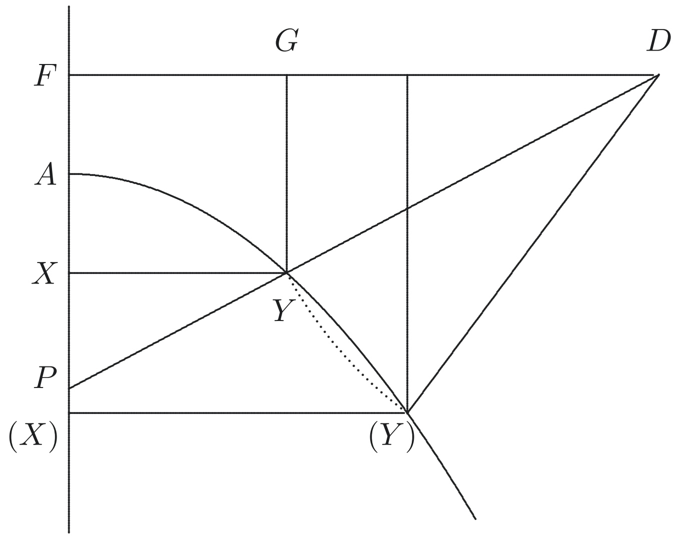
---

1 ${}^{+}\!\mp\, d\, {}^{+}\!\pm\, y$: Richtig wäre ${}^{+}\!\mp\, d\, {}^{+}\!\mp\, y$. Der Vorzeichenfehler beeinträchtigt die Rechnung bis Z. 13.

7 $\sqrt{2ax \mp x^2}$: Richtig wäre $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$. Leibniz rechnet konsequent weiter, hinzu kommt ein Fehler in Z. 10. Die Versehen wirken sich nicht weiter aus. Ab S. 366 Z. 11 rechnet Leibniz mit dem korrekten Ansatz.

$$\begin{array}{llll} \mp x^4 \pm 2ex^3 & \mp\ \ e^2x^2 & +\ \ e^2cx + e^2ha & \sqcap 0. \\ \quad + c & \ldots - 2ec & \ldots - 2eha & \\ & \quad + ha & & \end{array}$$

Habemus duas aequationes conferendas, unde 4 collatitiae, nam, et 4 indeterminatae, *e. c. h. p.*



[*Fig. 2*]

Rectius, ut aequatio quam quaerimus duas habeat radices aequales, centro D, radio DY describatur circulus, qui curvam conicam secabit in duobus punctis Y et (Y). Quare ut DY minima ad curvam sit, necesse est distantiam duorum punctorum Y et (Y) esse infinite parvam. Datur jam recta $DF \sqcap d$, datur recta $AF \sqcap f$, datur recta $XY \sqcap y \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, datur recta $GD \sqcap d - \sqrt{2ax \mp \left[\frac{a}{q}\right]x^2}$ datur GY seu $FX \sqcap f + x$. Jam $DY \sqcap s$. Ergo

$$s^2 \sqcap \underbrace{d^2 + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 - 2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}}_{d^2 - 2dy + y^2} + f^2 + 2fx + x^2;$$

9 ut | curva DY minima *ändert Hrsg.* | sit *L*

Hic duas habemus vias alteram communem, eliminandi y, et tunc quidem communi opus est methodo tangentium, alteram retinendi, et tunc mea opus est tangentium methodo, ubi conferenda aequatio data cum alia factitia duarum incognitarum, quarum quaelibet duas habeat radices aequales; a qua methodo etsi novitas me nonnihil absteneat, video tamen ita statim obtentum iri, ni fallor, ut aequationis locus sit ad circulum, cujus intersectione cum sectione conica data solutum esset problema, modo s^2 sublata esset, x^2, et y^2 non mutatis. Videamus an alio modo s^2 tolli possit.

Nimirum ob Triangula similia DGY, et YXP, DFP patet esse $\dfrac{DY \sqcap s}{PY} \sqcap \dfrac{GD \text{ seu } d-y}{XY \sqcap y}$. Jam $PY^2 \sqcap XY^2 + XP^2$, et $XP \sqcap a \mp \dfrac{a}{q}x$, vel rectius $\dfrac{DY \sqcap s}{\underset{\sqrt{d^2+FP^2}}{\underset{\wedge}{DP}}} \sqcap \dfrac{GY \sqcap f+x}{FP \sqcap f+x+a \mp \dfrac{a}{q}x}$. Jam et $s^2 \sqcap \dfrac{f^2+2fx+x^2}{FP^2} \frown d^2 + FP^{[2]}$. Item $\dfrac{d-y}{d} \sqcap \dfrac{f+x}{f+x+a \mp \dfrac{a}{q}x}$ vel $\dfrac{d-y}{f+x} \sqcap \dfrac{d}{f+x+a \mp \dfrac{a}{q}x}$. Sed et est, $\dfrac{d-y}{f+x} \sqcap \dfrac{y}{a \mp \dfrac{a}{q}x}$. Multiplicando utrobique per crucem, fiet illic:

$$\boxed{df}\ \boxed{+xd} + ad \mp \frac{a}{q}xd - yf - yx - ay \pm \frac{a}{q}yx\ \boxed{-df}\ \boxed{-dx} \sqcap 0$$

Quoniam ergo nulla apparet ratio tollendi s^2, ita ut duo loca statim oriantur alter ad circulum alter ad sectionem conicam datam; ideoque ab aequatione inventa auferamus signum radicale, fietque

$$8d^2ax \mp 4d^2\frac{a}{q}x^2 \sqcap d^2 + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2 + f^2 + 2fx + x^2 - s^2, \square$$

8 YXP, | DFP *erg.* | patet esse *(1)* $\frac{\mathrm{s}}{\mathrm{DP}} \sqcap \frac{\mathrm{s}}{\mathrm{PY}} \sqcap \frac{\mathrm{d-y}}{\mathrm{y}}$ jam PY $\sqcap$ *(2)* $\frac{\mathrm{DY} \sqcap \mathrm{s}}{\mathrm{PY}}$ *L* 10 f. $\frac{\mathrm{d-y}}{\mathrm{d}} \sqcap \frac{\mathrm{f+x}}{\mathrm{f+x+a} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}$ *(1)* Ex superiori analogia: sy $\sqcap$ *(2)* alibi autem habuimus d − y *(3)* vel *L* 11 Sed *(1)* alibi ostensum est, esse *(2)* et *L*

2 mea ... tangentium methodo: vgl. VII, 5 N. 7_1 S. 62 f.

et pro $d^2+f^2-s^2$, ponendo ta, quadratum $+2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2+x^2+2fx+ta$, quaerendum, est, et rursus contrahamus, pro $+2a+2f$, ponemus b. et pro $\mp\dfrac{a}{q}+1$, ponemus $\dfrac{\gamma}{a}$ et quaerendum quadratum hujus quantitatis: $+\dfrac{\gamma}{a}x^2+bx+ta$, et quadrando

$$\begin{array}{l} \dfrac{\gamma^2}{a^2}x^4+\dfrac{2\gamma b}{a}x^3+2\gamma t\,x^2 \;„+2btax+t^2a^2 \sqcap 0. \\ \qquad\qquad\qquad\quad +\,b^2\;\ldots \end{array}$$

Aequatio data, quod si ergo in $x^2-2ex+e^2$, ponatur ducta $\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^2+cx+ha$, fiet: aequatio factitia

$$\left.\begin{array}{rlllll} \dfrac{\gamma^2}{a^2}\,x^4 & -\dfrac{2\gamma^2 e}{a^2}\,x^3 & +\dfrac{\gamma^2e^2}{a^2}\,x^2 & +\;e^2c\quad x & +\,e^2ha \\ & +\quad c\quad\ldots & -\;2ec\;\ldots & -\,2eha\ldots & \\ & & +\;\;ha\;\;\ldots & & \end{array}\right\}\sqcap 0.$$

$+\,c-\dfrac{2\gamma^2}{a^2}e \sqcap \dfrac{2\gamma}{a}b$. per Term. 2. et $t \sqcap \dfrac{e\sqrt{ha}}{a}$ per Term. ult. et $t \sqcap \dfrac{e^2c-2eh[a]}{2ba}$ per penult. Ergo $\dfrac{\sqrt{ha}}{a} \sqcap \dfrac{ec-2ha}{2ba}$. Ergo ex tertio $\dfrac{2\gamma e\sqrt{ha}}{a}+b^2 \sqcap \dfrac{\gamma^2e^2}{a^2}-2ec+ha$ sive $\dfrac{\sqrt{ha}}{a} \sqcap \dfrac{-b^2+\dfrac{\gamma^2e^2}{a^2}-2ec+ha}{2\gamma e}$, ergo hoc $\sqcap \dfrac{ec-2ha}{2ba}$ seu rectius sic ex ult. $h \sqcap \dfrac{t^2a^2}{ae^2}$, et ex penult. $t \sqcap \dfrac{e^2c-\dfrac{2t^2a^2}{ae}}{2ba}$, item ex antepen.: $t \sqcap \dfrac{+\dfrac{\gamma^2}{a^2}e^2[-2ec+ha]-b^2}{2\gamma}$ et pro c, substituendo ejus valorem; ad difficiles iterum aequationes assurgemus; rectius ergo, opinor sic: Termino x^2, utrobique subscribemus 0, poterimus caetera velut similia etiamnum comparare, nam si similia tractentur similiter manent similia: Atque ita etiam ex incognitis aliquam habebimus supernumerariam; atque ita conferendo, $+c-\dfrac{2\gamma^2}{a^2}e \sqcap \left[\dfrac{2\gamma}{a}\right]b$ sive $c \sqcap \dfrac{2\gamma^2}{a^2}e+\dfrac{2\gamma}{a}b$ ex terminis secundis et $c \sqcap \dfrac{2bta+2eha}{e^2}$ ex terminis 4^{tis}, et

18 conferendo, | ponendoqve h esse datam *gestr.* | + c *L*

$t \sqcap \dfrac{e\sqrt{ha}}{a}$ ex terminis 5^{tis}. Ergo $\dfrac{2\gamma^2}{a^2}e + \dfrac{2\gamma}{a}b \sqcap \dfrac{\dfrac{2ba\cancel{e}\sqrt{ha}}{a} + 2\cancel{e}ha}{e^{\cancel{2}}}$ fiet: $\dfrac{2\gamma^2}{a^2}e^2 + \dfrac{2\gamma b}{a}e \sqcap 2b\sqrt{ha} + 2ha$, item $\dfrac{2\gamma e\sqrt{ha}}{a} + b^2 \sqcap \dfrac{\gamma^2 e^2}{a^2} - 2ec + ha$ Ex terminis 3^{tiis} et pro h, substituendo $\dfrac{\delta^2}{a}$, fiet aequatio prior $\dfrac{\cancel{2}\gamma^2}{a^2}e^2 + \dfrac{\cancel{2}\gamma b}{a}e \sqcap 2\cancel{A}b\delta + \cancel{2}\delta^2$, et posterior: $\dfrac{2\cancel{A}\gamma e\delta}{a} + \cancel{2}b^2 \sqcap \dfrac{\cancel{2}\gamma^2}{a^2}e^2 - \dfrac{2\cancel{A}\cancel{e^2}\delta b + 2\cancel{A}\cancel{e^2}\delta^2}{\cancel{e^2}} + \cancel{2}\delta^2$. Ergo ex posteriori $2b\delta + \delta^2 \sqcap \dfrac{\gamma^2}{a^2}e^2 - \dfrac{2\gamma e\delta}{a} - b^2$, seu $\sqcap \dfrac{\gamma^2 e^2}{a^2} + \dfrac{\gamma b}{a}e$. Ergo $+\dfrac{2\gamma e\delta}{a} + b^2 + \dfrac{\gamma b e}{a} \sqcap 0$. Ergo $e \sqcap \dfrac{-b^2 a}{2\gamma\delta + 2\gamma b}$.

4 $+\cancel{2}\delta^2$ *(1)* | , et *nicht gestr.* | *(a)* utrobiqve tollendo: *(b)* signa posterioris aeqva *(2)* Ergo *L*

---

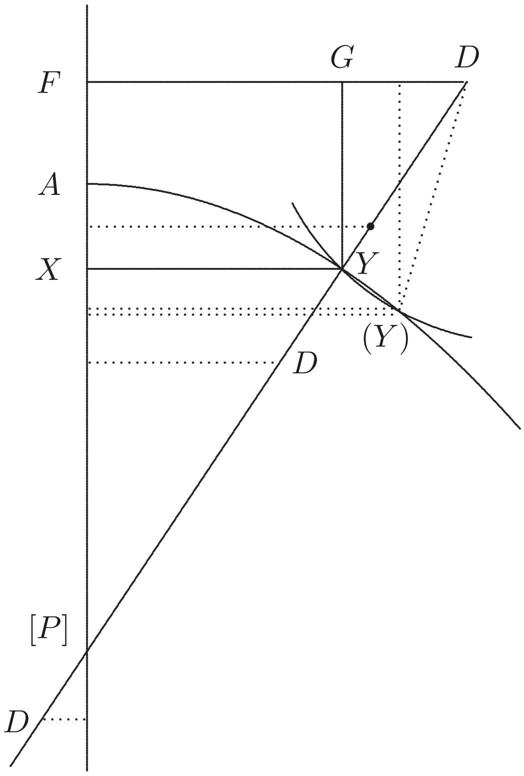
3 $\sqcap 2\cancel{A}b\delta$: Richtig wäre $\cancel{2}b\delta$. Das Versehen beeinträchtigt die weitere Rechnung.

35. EX PUNCTO DATO MINIMAM DUCERE II
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 186–187. 1 Bog. 4°. 4 S.
Cc 2, Nr. 856 C

Datierungsgründe: s. N. 31.

Ex puncto dato minimam ducere ad sectionem
Conicam datam:



[*Fig. 1*]

Punctum datum esto D, sectio conica data AY, cujus axis AX, distantia puncti dati ab axe, $DF \sqcap d$ et distantia puncti F a vertice erit $AF \sqcap f$. Centro D, radio DY describi debet circulus; qui curvam AY tangat in Y, sive qui secet in duobus punctis Y, et (Y) distantiae infinite parvae; ponamus punctum D. esse vertice A, altius, et ipsa curva exterius, ut in figura vides; erit GY, $\sqcap FA + AX$, et $GD \sqcap DF - XY$; et ponendo $AX \sqcap x$, et $XY \sqcap y$, sive $\sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, et DY, $\sqcap s$, fiet:

$$s^2 \sqcap d^2 - 2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}\ x^2} + 2ax \mp \frac{a}{q}\ x^2, +f^2 + 2fx + x^2 \text{ sive}$$

$$2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}\ x^2} \sqcap d^2 + 2ax \mp \frac{a}{q}\ x^2 + f^2 + 2fx + x^2 - s^2$$

et ponendo $+1 \mp \frac{a}{q} \sqcap \frac{\gamma}{a}$, et $2ax + 2fx \sqcap bx$. et $d^2 + f^2 - s^2 \sqcap ta$ fiet aequatio

$$2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}\ x^2} \sqcap +\frac{\gamma}{a}x^2 + bx, +ta \text{ et quadrando:}$$

$$8d^2ax \mp \frac{4d^2a}{q}x^2 \sqcap \frac{\gamma^2}{a^2}x^4 + \frac{2\gamma b}{a}x^3 + 2\gamma tx^2, +b^2x^2 + 2btax + t^2a^2 \text{ et ordinando:}$$

---

9 *Nebenbetrachtung:* $d^2 + f^2 \sqcap h^2$ fiet $\boxed{h^2} - 2d\sqrt{2ax + 2ae \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}ex \mp \frac{a}{q}e^2}$ $\boxed{+bx} + be \boxed{+\frac{\gamma}{a}x^2} + \frac{\gamma}{a}2ex \boxed{\boxed{+e^2}} \sqcap \boxed{h^2} - 2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}\ \boxed{+bx}\ \boxed{+x^2}$. Fiet ergo quadrando utrobique: $\boxed{8d^2ax} + 8d^2ae \boxed{\mp 4d^2\frac{a}{q}x^2} \mp 4d^2\frac{a}{q}ex \mp 4d^2\frac{a}{q}e^2 + b^2e^2 + 4be^2x + 4e^2x^2 - 4d\sqrt{2ax \text{ etc.}}\ \frown, be + 2ex \sqcap \boxed{8d^2ax}\boxed{\mp 8d^2\frac{a}{q}x^2}$ abjectisque rursus quae assurgunt ad e^2 fiet $8d^{\cancel{2}}ae \mp 4d^{\cancel{2}}\frac{a}{q}ex \sqcap be + 2ex, \frown 4\cancel{d}\sqrt{\ldots}$ sive $16d^2\frac{a^2}{q^2}e^2x^2 \mp 64d^2\frac{a^2}{q^2}e^2x + 16d^2\frac{a^2}{q^2}e^2x^2 \sqcap b^2e^2 + 4be^2x + 4e^2x^2, \frown\ ,, 16, \frown\ 2ax + 2ae \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}ex \mp \frac{a}{q}e^2$.

1 AX, | vertex A *gestr.* | distantia *L*

$$\begin{array}{llllll}\dfrac{\gamma^2}{a^2}\,x^4 + \dfrac{2\gamma}{a}b\;x^3 & +\;2\gamma t & x^2 & +\;2bta\;x & +\;t^2a^2 \sqcap 0\\ & +\;\;b^2 & \ldots & -\;8d^2a & \\ & \ddagger\;\dfrac{4d^2a}{q} & \ldots & & \end{array}$$

Restat una conditio ad determinandam hanc aequationem, quod scilicet incognita x duas habet radices aequales, quam multiplicando per

$$4 \qquad\quad 3 \qquad\quad 2 \qquad\quad 1 \qquad\quad 0$$

Huddeniano invento; habebimus aequationem novam:

$$\begin{array}{llll}4\dfrac{\gamma^2}{a^2}\,x^4 + \dfrac{6\gamma b}{a}\,x^3 & +\;\;4\gamma t & x^2 & +\;2bta\;x\\ & +\;\;2b^2 & & -\;8d^2a\\ & \ddagger\;\dfrac{8d^2a}{q} & & \end{array}$$

Ergo $t \sqcap \dfrac{\begin{array}{ll}4\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^3 + \dfrac{6\gamma b}{a}x^2 + 2b^2 & x - 8d^2a\\ \qquad\qquad \ddagger\dfrac{8d^2a}{q} & \end{array}}{-4\gamma x - 2ba}$ possuntque diversi indagari valores ipsius t, ut inde eliciatur simplicissimus.

Sed satius est, opinor, in hoc quidem exemplo, Cartesii methodum sequi, is nimirum aequationem indeterminatam duas radices aequales habentem $x^2-2ex+e^2 \sqcap 0$ per aliam aeque arbitrariam, multiplicare jubet, sumatur: $\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^2+cx+h^2$ qua ducta in $x^2-2ex+e^2$, fiet aequatio factitia similis datae, nempe

$$\begin{array}{llllll}\dfrac{\gamma^2}{a^2}\,x^4 & -\;\dfrac{2\gamma^2 e}{a^2}\,x^3 & +\;\dfrac{\gamma^2}{a^2}e^2\;x^2 & +\;\;e^2c\;\;x & +\;h^2e^2 \sqcap 0.\\ & +\;\;\;c\;\;\;\ldots & -\;\;2ec\;\;\ldots & -\;2eh^2\;\ldots & \\ & & +\;\;h^2\;\;\ldots & & \end{array}$$

11 f. possuntqve ... simplicissimus *erg. L*

7 invento: J. HUDDE, *Epistolae duae*, 1659, *DGS* I S. 507–516. 13 methodum: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 40–49, insbesondere S. 45.

Quae si conferatur datae superiori, tunc habebimus Aequationes collatitias sequentes, ex Term. 2: $c \sqcap \frac{2\gamma b}{a} + \frac{2\gamma^2}{a^2}e$. Ex Term. 5. $h \sqcap \frac{ta}{e}$. Restant Termini tertius et quartus, unde aequationes hae:

Ex quarto $2bta - 8d^2a \sqcap +2e^2\frac{\gamma b}{a} + \frac{2e^3\gamma^2}{a^2} - \frac{2t^2a^2}{e}$.

Ex tertio $2\gamma t + b^2 \ddagger \frac{4d^2a}{q} \sqcap \frac{\gamma^2}{a^2}e^2 - \frac{2\gamma be}{a} - \frac{2\gamma^2}{a^2}e^2 + \frac{t^2a^2}{e^2}$. Posterior multiplicetur [per] $-2e$, fiet

$$2\gamma et - 2b^2e \dagger \frac{8d^2ae}{q} \sqcap -\frac{2\gamma^2}{a^2}e^3 + \frac{4\gamma b}{a}e^2 + \frac{4\gamma^2}{a^2}e^3 - \frac{2t^2a^2}{e^2}$$

et tolli possunt utrobique illic quidem, $+\frac{2e^3\gamma^2}{a^2} - \frac{2t^2a^2}{e^2}$, hic $-\frac{2\gamma^2}{a^2}e^3 + \frac{4\gamma^2}{a^2}e^3 - \frac{2t^2a^2}{e^2}$ et habebitur aequatio nova, in qua t, non assurgit ultra radicem, nec e ultra quadratum. Nempe $2\gamma et - 2b^2e \dagger \frac{8d^2a}{q}e \sqcap 2\,\cancel{4}\frac{\gamma}{a}be^2 + 2bta - 8d^2a \boxed{-2e^2\frac{\gamma}{a}b}$. Ergo

1 seqventes, *(1)* Ex Term. 4. c $\sqcap \dfrac{+2bta - 8d^2a + 2\cancel{e}\frac{t\langle-\rangle a}{e}}{e^2}$ *(2)* ex *L* 2 Term. 5. *(1)* t $\sqcap \frac{he}{a}$ |, vel *nicht gestr.* | *(2)* h $\sqcap \frac{ta}{e}$ *L* 5 Ex | qvinto *ändert Hrsg.* | 2γt *L* 5 $+\frac{t^2a^2}{e^2}$ *(1)* | posterior multiplicetur per $-\frac{2}{e}$, fiet *(a)* $-\frac{4\gamma t}{e} - \frac{2b^2}{e} \dagger \frac{4d^2a}{e}$ *(b)* $-4\gamma te - 2b^2e \dagger 4d^2ae \sqcap -\frac{\gamma^2}{a^2}e^3 + \frac{2\gamma b}{a}e^3 + \frac{2\gamma^2}{a^2}e^3 - \frac{2t^2a^2}{e^2}$ *gestr. u. wieder gültig gemacht* | *(aa)* multi *(bb)* et ablata utrobique $-\frac{2t^2a^2}{e^2}$ seu valore eius ex una posito in altera fiet: t $\sqcap \dfrac{+\frac{2b^2}{e} \ddagger \frac{4d^2a}{e} - \frac{\gamma^2}{a^2}e + \frac{2\gamma b}{a} + \frac{2\gamma^2e^2}{a^2} + \frac{2e^2\gamma b}{a} + \frac{2e^3\gamma^2}{a^2} + 8d^2a}{2\gamma + 2}$ *(2)* posterior *L*

10 $\boxed{-2e^2\frac{\gamma}{a}b}$ | qvae aeqvatio est ad Parabolam *gestr.* | Ergo *L*

---

5 Ex tertio: Die folgenden Rechnungen werden durch mehrere Versehen bis S. 374 Z. 12 beeinträchtigt.

$$\left.\begin{array}{l} e^2 \\ \odot \end{array}\left\{\begin{array}{l} -\ 2\gamma ta\ \ e + \dfrac{\odot^2}{4} \\ +\ 2b^2a \\ \dfrac{\ddagger \dfrac{8d^2a^2}{q}}{2\gamma b} \end{array}\right. \right. \sqcap \frac{\left.\begin{array}{r} 8d^2a^2 \\ -\ 2bta^2 \end{array}\right\}}{2\gamma b} + \frac{\odot^2}{4} \text{ sive } e \sqcap \sqrt{\frac{8d^2a^2 - 2bta^2}{2\gamma b} + \frac{\odot^2}{4}} - \frac{\odot}{2}.$$

Videamus tantum, an possit fieri: $\dfrac{8d^2a^2 - 2bta^2}{2\gamma b} + \cancel{\dfrac{\odot^2}{4}} \sqcap \cancel{\dfrac{\odot^2}{4}} + \odot z + z^2$. Debet fieri: $\dfrac{-bta^2 + 2\gamma taz}{2\gamma b} \sqcap \dfrac{2b^2a \ddagger \dfrac{8d^2a^2}{q}}{\dfrac{2\gamma b}{z}} + z^2$ fietque: $t \sqcap \dfrac{2b^2az \ddagger \dfrac{8d^2a^2}{q}z + 2\gamma bz^2}{-ba^2 + 2\gamma az}$ sive $\dfrac{zam}{-ba + 2\gamma z} \sqcap t$. Erit ergo $e \sqcap \dfrac{\odot}{2} + z - \dfrac{\odot}{2} \sqcap z \sqcap x$. Quo valore, in locum t substituto, fiet

$$2\gamma amx + \ b^2 \ddagger \frac{4d^2a}{q} \sqcap -\frac{\gamma^2}{a^2}x^2 - \frac{2\gamma b}{a}x + \frac{a^4m^2}{+b^2a^2 - 4\gamma bax + 4\gamma^2x^2}$$

sive $\sqrt{\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^2 + \dfrac{2\gamma b}{a}x + \begin{array}{l} b^2 \\ \ddagger\dfrac{4d^2a}{q} \end{array}} \sqcap \dfrac{a^2m}{-ba + 2\gamma x, \square}$, dividatur a^4m^2, in partes duas $a^4v^2 - pa^5$ fietque $\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^2 + \dfrac{2\gamma b}{a}x + \begin{array}{l} b^2 \\ \ddagger\dfrac{4d^2a}{q} \\ + \dfrac{pa^5}{-ba + 2\gamma x, \square} \end{array} \sqcap \dfrac{v^2}{-ba + 2\gamma x, \square}$, et ponendo $\dfrac{pa^3}{-ba + 2\gamma x, \square} \sqcap \dagger\dfrac{4d^2a}{q}$ fiet: $\dfrac{\gamma}{a}x + b \sqcap \dfrac{va^2}{-ba + 2\gamma x}$, sive $\dfrac{2\gamma^2}{a}x^2 \begin{array}{l} \boxed{-\ \ \gamma b} \\ +\cancel{2}\gamma b\ \ldots \end{array} x \ -b^2a \sqcap va^2$. Est autem $v \sqcap \sqrt{pa + m^2}$, et $p \sqcap \dfrac{\dagger\dfrac{4d^2\cancel{a}}{q} \frown \llcorner\llcorner - ba + 2\gamma x \lrcorner\ \square}{a^{\cancel{3}2}}$.

Nota quotiescunque aequationi ea tantum conditio deest, ut ad duas aequales radices determinetur, toties duo maximi termini incognitae duas aequales valores habentis, tolli possunt. Ut esto aequatio

$$\begin{array}{ccccc} x^4 + & lx^3 + & max^2 + & na^2x + & pa^3 \sqcap 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 4 & 3 & 2 & 1 & 0 \end{array}$$

determinanda ad duas aequales radices: Ergo prima multiplicatio dabit:

$$x^3 + \frac{2max^2 + 3na^2x + 4pa^3}{l} \sqcap 0, \text{ posterior dabit:}$$

$$x^3 + \frac{3lx^2 + 2max + na^2}{4} \sqcap 0. \text{ Ergo:}$$

$$\begin{array}{l} \dfrac{2ma}{l}x^2 + \dfrac{3na^2}{l}x + \dfrac{4pa^3}{l} \sqcap 0. \text{ Elegans satis observatio.} \\ -\dfrac{3l}{4} \qquad -\dfrac{ma}{2} \qquad -\dfrac{na^2}{4} \end{array}$$

In aequatione alibi inventa circa hoc problema: $dp\ (\pm)yp \sqcap (\mp)yf(\pm)yx$. Et pro p, ponatur $\sqrt{s^2 - y^2}$, fiet $s^2 - y^2 \sqcap \dfrac{+y^2f^2 - 2y^2xf + y^2x^2}{d^2(\pm)2dy + y^2}$. Et pro $\sqrt{s^2 - y^2}$, reddendo p, fiet: $p \sqcap \dfrac{\mp yf(\pm)yx}{d(\pm)y}$, pro y, ponatur ejus valor[,] fiet: $\dfrac{dp}{(\mp)f\,\underbrace{(\pm)x(\pm)p}_{(\pm)w}} \sqcap \sqrt{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}$

7 radices *(1)* et jungendo: *(2)* : ergo *L* 13 $\dfrac{+\mathrm{y^2f^2 - 2y^2xf + y^2x^2}}{\mathrm{d^2(\pm)2dy + y^2}}$ | sive $\mathrm{s^2 - y^2} \sqcap \dfrac{\mathrm{2axf^2 \mp \frac{a}{q}x^2f^2 - 4ax^2f \mp \frac{2a}{q}x^3f \mp 2ax^3 \mp \frac{a}{q}x^4}}{\mathrm{d^2(\pm)2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2}}$ *gestr.* | Et *L* 14–376,1 $\sqrt{\mathrm{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}}$ *(1)* et qvadrando $\dfrac{\mathrm{d^2p^2}}{}$ *(2)* et *L*

12 alibi: Leibniz übernimmt die Formel aus N. 29 S. 295 Z. 7, allerdings unterlaufen ihm Schreibfehler. Richtig wäre $dp\,(\mp yp) = (\mp)yf(\mp)yx$. Weitere Versehen beeinträchtigen die Rechnung bis S. 376 Z. 6. 13 ponatur: Leibniz setzt nun $s = PY$, nicht wie zuvor $s = DY$.

et pro $x+p$, ponatur w, quam w possumus considerare velut eandem, quia puncta A. et P. immobilia sunt, utcunque duo sint puncta X et Y quare ipsam p explicare utile est, per $\sqrt{s^2-y^2}$: Nimirum $FP \sqcap (\overset{+}{\mp})f(\overset{+}{\pm})w \sqcap \dfrac{d\sqrt{s^2-y^2}}{y}$, haec aequatio tantum unam habet incognitam, duarum radicum aequalium nempe y, ergo $+f^2y^2-2fwy^2+w^2y^2 \sqcap d^2s^2-d^2y^2$, sive $y^2 \quad \dfrac{-d^2s^2}{-2fw+w^2+d^2} \sqcap 0$. conferenda cum $y^2-2ey+e^2$. In locum y^2, substituatur $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2$, fiet: $x^2 \mp 2qx \ddagger \dfrac{\frac{2q}{a}d^2s^2}{-2fw+w^2+d^2} \sqcap 0$. Imo nondum conferri potest, quia nondum satis determinata, est, ut nulla alia restet determinatio quam ad duas aequales radices, pro s^2, substituatur ejus valor p^2+y^2, pro p^2, fiet $a^2 \mp \dfrac{2a^2}{q}x+\dfrac{a^2}{q^2}x^2$, et pro y^2, fiet $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2$ sed nec sic procedere puto, quia ita nimium determinationis assumtum est, videamus tamen, videtur enim in nostra esse potestate, vel s explicare, vel w? Ita est, sed non debuisset puto explicari p.

Venit mihi in mentem res notabilis, nimirum aequationes similes comparari posse, etsi non sublatis signis radicalibus: ut ecce aequationem superiorem

$$-2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}+\frac{\gamma}{a}x^2+bx+ta \sqcap 0$$

si jam alia indeterminata, duas habens radices aequales similis propositae haberetur, comparatione facta, solvi posset problema licet non quadraremus aequationem, quinque

1 ponatur | v, qvam v *ändert Hrsg.* | *(1)* necesse est esse eandem, seu *(2)* possumus *L* 3 est, *(1)* est autem $\sqcap$ a $\mp \frac{a}{q}$x. fiet: $\dfrac{\mathrm{da} \mp \frac{\mathrm{da}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}{(\overset{+}{\mp})\mathrm{f}(\overset{+}{\pm})\mathrm{v}} \sqcap \sqrt{2\mathrm{ax} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}$, et qvadrando *(2)* per $\sqrt{\mathrm{s}^2-\mathrm{y}^2}$ *(a)*, fietqve: $\dfrac{\mathrm{d}\sqrt{\mathrm{s}^2-\mathrm{y}^2}}{(\overset{+}{\mp})\mathrm{f}(\overset{+}{\pm})\mathrm{v}} \sqcap$ *(b)*: Nimirum *L* 5 $\sqcap$ 0. *(1)* conferatur cum simili duarum radicum aeqvalium $\mathrm{y}^2-\mathrm{y}^2$, ex

$$\begin{array}{r}
\mathrm{y} - \mathrm{y}\\
\mathrm{y} - \mathrm{y}\\
\hline
-\ \mathrm{y}^2 + \mathrm{y}\\
+\mathrm{y}^2 - \ \mathrm{y}^2 \quad\\
\hline
+\mathrm{y}^2 - 2\mathrm{y}^2 + \mathrm{y}^2
\end{array}$$

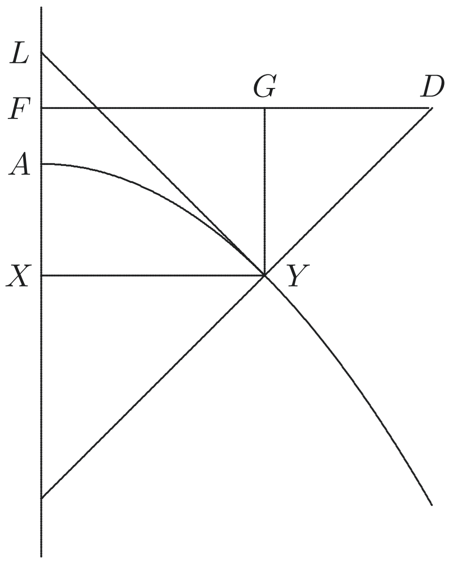
(2) multiplicetur per y + m, *(3)* conferenda *L*

erunt collatitiae, adeoque tribus opus incognitis novis $\sqrt{x^2 - 2ex + e^2}$, $\frown$ $\llcorner\sqrt{x^2 - 2ex + e^2}$ $\frown$ $h + \frac{gx}{a}$,,$\lrcorner$. Ergo $\quad h \quad x^2 + \frac{g}{a}\,x^3 - 2eh \quad x \ + e^2h.$

$$-\frac{2eg}{a}\ldots \qquad\qquad + \frac{ge^2}{a}\ \ldots$$

Sed in eo video difficultatem ut indeterminatam fundamentalem per alias multiplicando similem datae satisque indeterminatarum obtineamus: Quaeritur an non utramque multiplicare ita liceat, item, an non liceat explicare ipsam x, in data, ut ita nanciscantur omnes terminos necessarios.

Unum quoque inquirendum restat, an aequatio duarum indeterminatarum determinari possit ad duas radices aequales utriusque incognitae, dum primum secundum unam, deinde secundum alteram ordinatur; et termini ita qui bis occurrunt bis multiplicantur, secundum terminos progressionis arithmeticae; tale quid dignoscere mihi videor, ex methodo tangentium Slusiana. Videndum tantum an ea methodus a locorum tangentibus transferri possit ad tangentes seu perpendiculares ex punctis datis:



[*Fig. 2*]

4 ut *(1)* datam qvandam fact *(2)* indeterminatam *L* 6 explicare *(1)* terminos, qvosdam, ut *(2)* ipsam *L* 13–378,1 datis: *(1)* vide figuram in prima omnium scheda *(2)* LX ⊓ l. *L*

11 f. ex methodo tangentium: vgl. R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20./30. Januar 1672/1673, S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni/3. Juli 1673, S. 6059). 16 vide: s. Fig. 1 in N. 5.

$LX \sqcap l$. Caetera ut ante, fiet $\dfrac{x+f}{d-y} \sqcap \dfrac{y}{l}$. $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ sive $\cancel{2}al \mp \dfrac{\cancel{2}a}{q}xl \sqcap 2\cancel{4}ax \mp \dfrac{\cancel{2}a}{q}x^2$, sive $l \sqcap \dfrac{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2}{a \mp \dfrac{a}{q}x}$. Ergo $2ax^2 \mp \dfrac{a}{q}x^3 + 2afx \mp \dfrac{af}{q}x^2 \sqcap dy - y^2$, $\frown$, $a \mp \dfrac{a}{q}x$. $xl + fl \sqcap dy - y^2$, et $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, erit: $xl + fl \sqcap dy - 2ax \pm \dfrac{a}{q}x^2$, seu $\dfrac{y^2}{a \mp \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{dy - y^2}{x+f}$. Fiet: $\dfrac{y}{a \mp \dfrac{a}{q}x} \sqcap \dfrac{d-y}{x+f}$. Ergo $\dfrac{d}{y} \sqcap \dfrac{x+f+a \mp \dfrac{a}{q}x}{a \mp \dfrac{a}{q}x}$ ac proinde $\dfrac{d^2}{2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2} \sqcap \dfrac{\dfrac{\gamma^2}{a^2}x^2 + \dfrac{2n\gamma}{a}x + n^2}{a^2 \mp \dfrac{2a^2}{q}x + \dfrac{a^2}{q^2}x^2}$.

$$
\begin{array}{llllll}
\mp \dfrac{\gamma^2}{qa}\,x^4 & [\mp]\,\dfrac{2n\gamma}{q}\,x^3 & \mp\,\dfrac{n^2a}{q}\,x^2 & +\ 2an^2\ \ x & -\,a^2d^2 \sqcap 0 \\
 & [+]\,\dfrac{2\gamma^2}{a}\ \ldots & +\ 4n\gamma\ \ldots & \pm\,\dfrac{2d^2a^2}{q}\ \ldots & \\
 & & -\,\dfrac{d^2a^2}{q^2}\ \ldots & &
\end{array}
$$

vel $\mp \dfrac{a}{qy}x - \dfrac{x}{d-y} \sqcap -\dfrac{a}{y} + \dfrac{f}{d-y}$. Ergo $x \sqcap \dfrac{-\dfrac{a}{y} + \dfrac{f}{d-y}}{\mp \dfrac{a}{qy} - \dfrac{1}{d-y}} \sqcap \sqrt{q^2 \mp y^2\dfrac{q}{a}} \pm q$.

2 $\mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^3$ | $-$ *ändert Hrsg.* | 2afx *L* 3 $-2\mathrm{ax}$ | $\mp$ *ändert Hrsg.* | $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2$ *L* 8 $\mathrm{x} \sqcap$ | $\dfrac{-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{y}} + \frac{\mathrm{f}}{\mathrm{d-y}}}{\mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{qy}} - \mathrm{d} + \mathrm{y}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L*

36. CONSTRUCTIO PROBLEMATIS SOLIDI DATI I
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 4 + 7. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 855 A teilw.

Datierungsgründe: s. N. 31.

Constructio Problematis Solidi dati,
ope sectionis Conicae datae, et Circuli inventi

Esto problema solidum datum: $y^4+ly^3+rmy^2+r^2ny+r^3p \sqcap 0$. Ponatur $\beta r \sqcap rm-\dfrac{l^2}{4}$. et $\theta r^2 \sqcap -\dfrac{\beta rl}{2}+r^2n$. Rectae b, et λ sumentur pro arbitrio. $g^2 \sqcap \dfrac{\theta r^2-\dfrac{\lambda r^3}{t}}{-r \mp \dfrac{rl}{2t}}$. $\psi \sqcap \dfrac{\beta r}{g} \mp \dfrac{r}{t}g$. $\dfrac{\gamma q}{r} \sqcap \psi-2b$. $\dfrac{\gamma}{r} \sqcap \dfrac{r}{t}+1$. Sectionis Conicae latus rectum r, transversum t, quod transversum in parabola est infinitum. Vel $\mu\dfrac{r}{t} \sqcap \pm\dfrac{2\theta r^2t}{g^2}+l+2r \sqcap 0$. si ponamus $\dfrac{\gamma q}{r} \sqcap 0$; et $\lambda \sqcap 0$. (Imo faciamus, ut ita sit ubique, posito $\dfrac{\gamma q}{r} \sqcap 0$[.)]

$\mu \sqcap \pm\dfrac{2\theta rt^2}{g^2}+\dfrac{lt}{r}+\dfrac{2t\delta q}{r^2}$ (quod in Parabola $\sqcap 0$, ut calculus dabit). Porro $\dfrac{t\delta q}{r^2}$ ex data $\dfrac{\gamma q}{r}$ ita habetur: Sectio conica data descripta intelligatur $DCGFAE$; ut vides figura 1.

9 Rectae ... arbitrio *erg. L* 10 $+1$. *(1)* Sectionis conicae datae latus rectum sit r, transversum t. Descripta ergo intelligatur eiqve applicetur recta EF, *(a)* $\sqcap \psi \sqcap \dfrac{\beta \mathrm{r} \mp \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{g}^2-2\mathrm{bg}}{\mathrm{g}}$ *(b)* $\dfrac{\beta \mathrm{r}}{\mathrm{g}} \mp \dfrac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}\mathrm{g}-2\mathrm{b} \sqcap$ *(aa)* $\psi-2\mathrm{b}$ *(bb)* $\dfrac{\gamma \mathrm{q}}{\mathrm{r}}$ *(2)* Sectionis *L* 14 habetur *(1)*, sectioni conicae datae | DCGFAE *erg.* | ascribatur Triangulum *(2)*: Sectio *L*

8 Ponatur: vgl. N. 31 S. 327 Z. 3. 14 vides: vgl. die Fig. 1–4 in N. 31 S. 318 Z. 14 – S. 319 Z. 1.

quae est circuli, fig. 2. quae est Ellipseos, figura 3. quae est Hyperbolae, et fig. 4. quae est parabolae, ita scilicet ut duae sectiones sive portiones oppositae, DCG, FAE, duos habentes vertices oppositos, A. C. per axem sive sive latus transversum primarium AC. junctos, unam sive figuram sive sectionem constituere intelligantur, quod in Ellipsi et Circulo non habet opus admonitione, nam in illis duae portiones oppositae conveniunt; in Hyperbola autem ubi divergunt, admonendum utique fuit; in Parabola vero multo magis, ubi una sectione descripta EAF, alteram describi impossibile est, cum sit alterius ut ita dicam mundi, sive infinite distet abhinc, nam Parabola potest intelligi Hyperbolae genus, sed cujus latus transversum AC sit longitudinis infinitae. Quod ergo in ea describendo fieri non potest, calculo supplebitur, ut mox patebit.

Sectioni ita descriptae applicetur recta $ENF \sqcap \frac{\gamma q}{r}$ ab axe ad angulos rectos bisecta in N, et utrinque ad curvam terminata: Denique ex puncto E vel F, educatur normalis ED, vel FG, quae scilicet sectioni oppositae occurrat in D. vel G. Ea erit $\frac{t\delta q}{r^2}$ quaesita. In Parabola autem ubi ED, quippe infinita duci non potest, calculus docet esse $\delta q \sqcap r^2$ ac proinde μ esse $\sqcap 0$ ut praedixi, nec proinde ductu illo esse opus.

$$2\psi b\boxed{-4b^2}$$

$$0 \sqcap -\varphi \ddagger \frac{\ddagger\frac{2r^3}{t^3}\mu^2 - \frac{\delta q\mu}{t}\boxed{+4b^2} + \frac{2\gamma qb}{r} - \frac{r^3p}{g^2}}{\boxed{\frac{\psi - 4b + \frac{\gamma q}{r}}{g}\ \text{seu}}\ \frac{-6br + 2\psi r}{g}}$$

$$\text{♃} \sqcap \frac{\theta r^2}{g^2} + \frac{l}{2} \qquad \text{♂} \sqcap \frac{2\varphi r + \beta r}{g} - g$$

---

18 *Dazu am Rand:* $\varphi r \sqcap c^2$

2 sive portiones *erg. L*

Explicatis ergo literis ad constructionem ita veniemus: In recta ED sumatur ab E versus D. recta $EP \sqcap \frac{\mu r}{t}$ erigaturque extra rectangulum DEF perpendicularis $PK \sqcap \frac{\varphi r}{g} + b$. In eadem recta, producta si opus est, sumatur a plaga E versus plagam F recta $K♂ \sqcap \frac{♂}{2}$ et ex puncto ♂ a plaga C versus plagam A, parallela axi AC, recta $♂♃ \sqcap \frac{♃}{2}$. Denique puncto ♃ velut centro, radio, $\sqrt{\frac{+♃^2 + ♂^2}{4} + \frac{\varphi^2 r^2 + \beta r^2 \varphi + r^3 p}{g^2} - \varphi r}$ describatur circulus, qui secabit sectionem Conicam datam in punctis Y ex quibus in rectam indefinitam, axi parallelam per punctum K transeuntem demissae perpendiculares YV, erunt y quaesitae.

Applicemus hanc constructionem ad casum praesentis problematis Minimae ex puncto dato ad parabolam ducendae, ubi ex aequatione generali fit haec particularis:

$$\begin{array}{l} \text{ǂ}\,\frac{q^2}{a} y^4 * ({}^{+}\text{ǂ} \;\; {}^{+}\ddagger)\; \ddagger\, 2q^2 f y^2 \;({}^{+}\ddagger)\; \text{ǂ}\!\equiv 2dq^2 ay * \sqcap 0 \\ \qquad\qquad\qquad \ddagger\, 2q^2 a \end{array}$$

et divisis omnibus per $\text{ǂ}\,\frac{q^2}{a}$, fiet aequatio haec: $y^4 * ({}^{+}\text{ǂ}\; {}^{+}\ddagger)\; 2fay^2 \;({}^{+}\text{ǂ}\!\equiv)\; 2da^2 y * \sqcap 0.$
$\qquad + \; 2a^2$

Ergo $l \sqcap 0$. $m \sqcap ({}^{+}\text{ǂ})\,({}^{+}\ddagger), \frown 2f + 2a$. $n \sqcap ({}^{+}\text{ǂ}\!\equiv)\; 2d$. $r \sqcap a$. $p \sqcap 0$. Ergo $\beta \sqcap m$. $\theta \sqcap n$. $g^2 \sqcap -nr$. $\psi \sqcap \frac{mr}{\sqrt{rn}}$. $\frac{\gamma}{q} \sqcap q$. $q \sqcap \frac{mr}{\sqrt{rn}} - 2b$. $\delta q \sqcap r^2$. $\mu \sqcap 0$.

$$\varphi \sqcap \boxed{4b^2} + \frac{2mrb}{\sqrt{-rn}} \boxed{-4b^2} \frown \frac{g \sqcap \sqrt{-rn}}{-6br + \frac{2mr^2}{\sqrt{-rn}}} \text{ sive } \varphi \sqcap \frac{2mrb}{-6br + \frac{2mr^2}{\sqrt{-rn}}}.\; ♃ \sqcap \frac{nr^2}{-nr} \text{ seu}$$

$\sqcap -r$. $♂ \sqcap \frac{4mr^2 b}{-6br\sqrt{-rn} + 2mr^2} + \frac{mr}{\sqrt{-rn}} - \sqrt{-rn}.$

2 erigaturqve | *(1)* in partes HE *(2)* extra rectangulum DEF *erg.* | perpendicularis *L* 3 sumatur *(1)* versus F *(2)* a plaga *L* 4 plaga *(1)* F versus plagam E, sumat *(2)* C versus *L* 6 punctis *(1)* V *(2)* Y ex *L* 18–382,1 $-\sqrt{-\mathrm{rn}}$ *(1)* Recta EP $\sqcap$ 0. Recta PK *(2)* Veniamus *L*

1 In recta ED: vgl. Fig. 5 in N. 31 S. 325 Z. 1. 6 in punctis Y: Leibniz vertauscht hier nachträglich die Punktbezeichnungen V und Y entsprechend der Verwendung in Fig. 1 von N. 37 S. 392 Z. 1.

Veniamus ad lineas quae ducendae sunt, ut appareat constructionis ipsius facilitas et difficultas, $EP \sqcap 0$. $PK \sqcap \dfrac{2mrb}{-6br + \dfrac{2mr^2}{\sqrt{-rn}}} + b$. $\text{♂♃} \sqcap -\dfrac{r}{2}$. $K\text{♂} \sqcap \dfrac{2mr^2b}{-6br\sqrt{-rn} + 2mr^2} + \dfrac{mr}{2\sqrt{-rn}} - \dfrac{\sqrt{-rn}}{2}$.

Quoniam b in nostro arbitrio est, ponamus hic talem, ut $\dfrac{2mr^2b}{-6br\sqrt{-rn} + 2mr^2}$ sit $\sqcap \dfrac{\sqrt{-rn}}{2}$, fiet $b \sqcap \dfrac{+2mr^2\dfrac{\sqrt{-rn}}{2}}{2mr^2 + 6r\sqrt{-rn}}$. Jam $\dfrac{\varphi r}{\sqrt{-rn}} \sqcap +\dfrac{\sqrt{-rn}}{2}$ ergo $\varphi \sqcap -\dfrac{n}{2}$ et $PK \sqcap -\dfrac{n}{2}\boxed{+\dfrac{2mr^2\dfrac{\sqrt{-rn}}{2}}{2mr^2 + 6r\sqrt{-rn}}}\ \dfrac{1}{\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{-rn}}{2}} + \dfrac{3}{mr}}$, et $K\text{♂} \sqcap \dfrac{mr}{2\sqrt{-rn}}$. Jungatur recta $\text{♃}K$, et ex puncto K, ad eam rectam normalis erigatur KH quae possit $\dfrac{\dfrac{h^2r^2}{4} + nmr^2}{-nr}, + \dfrac{nr}{2}$, sive $+\dfrac{nr}{4} + mr$ ac centro ♃, radio $\text{♃}H$, describatur circulus, qui parabolam secabit in punctis Y, ex quibus demissae in rectam KV indefinitam, axi parallelam perpendiculares YV

---

7 f. *Auf der Gegenseite:* $\dfrac{m^2}{4n} + \dfrac{r^2}{4} + \dfrac{nr}{4} + m^2$

3 f. $-\dfrac{\sqrt{-\mathrm{rn}}}{2}$ *(1)* ♃Y radius: $\sqcap$ *(2)* Jungatur recta *(a)* ♃♂ *(b)* ♃K et ex K erigatur perpendicularis ad eam KH qvae possit: *(3)* Qvoniam *L* 5 b $\sqcap \dfrac{+2\mathrm{mr}^2\dfrac{\sqrt{-\mathrm{rn}}}{2}}{2\mathrm{mr}^2 + 6\mathrm{r}\sqrt{-\mathrm{rn}}}$ *(1)* et erit $\varphi \sqcap \dfrac{\sqrt{-\mathrm{rn}}}{2} \frown \dfrac{\mathrm{r}}{\dfrac{\sqrt{-\mathrm{rn}}}{2}}$, sive erit $\varphi \sqcap$ r. Jam *(2)* Jam *L* 6 recta *(1)* KI *(2)* K♂ *(3)* ♃K *L*

---

5 fiet *b*: Die folgende Rechnung ist durch mehrere Versehen beeinträchtigt.

erunt y quaesitae, quae axi parabolae ordinatim applicatae, puncta parabolae dabunt, ad quae ducta recta ex puncto dato parabolae perpendicularis est: Brevissime sic[:] Sit linea quaedam, b, cujus valor $\dfrac{1}{\sqrt{-n}+\dfrac{3}{m}}$. Ejus duplum subtrahatur a $\dfrac{m}{\sqrt{-n}}$, residua recta EF applicetur parabolae datae, ita ut axi sit normalis, et curvam utrinque attingat in punctis E. et F, in ea ultra E producta sumatur EK (vel PK, nam puncta E. et P. hic coincidunt), quae sit differentia inter supradictam b, et $-\dfrac{n}{2}$. Rursus ex K retrogradiendo in eadem linea sumatur K♂ $\sqcap \dfrac{m}{2\sqrt{-n}}$. Ex ♂ ducatur versus D axi parallela ♂♃ $\sqcap \dfrac{r}{2}$. Jungatur recta ♃K, et ex puncto K ad eam normalis erigatur KH, quae possit $+\dfrac{nr}{4}+mr$, denique centro ♃, radio ♃H erigatur circulus, qui Parabolam secabit in punctis Y, unde demissae in KV indefinitam axi parallelam erunt y quaesitae, quae ordinatim ad angulos rectos axi parabolae applicatae, designabunt puncta, ad quae ex puncto D ductae rectae, ipsi parabolae perpendiculares sunt.

Quia $\sqrt{-n}$ haberi Geometrice non potest, ideo pro $-n$, poni potest ξ.

Veniamus nunc ad constructionem Ellipseos cujus aequatio est:

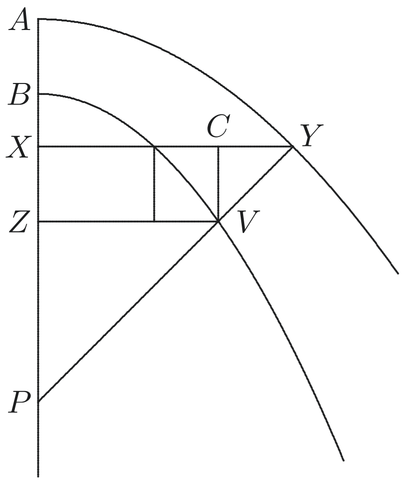
$$-\frac{\Box a-q}{a}y^4 \;{}^{+}\!\ddagger\; 2d \frown a-qy^3({}^{+}\!\ddagger\;{}^{+}\!\ddagger)-2q^2f$$
$$-\;\;qf^2$$

Melius est resumere analogiam, et quaedam contrahendi causa mutare: Ex calculo illic patet, si $({}^{+}\!\ddagger)$ $\ddagger$ q $({}^{+}\!\ddagger)$ $f \sqcap 0$. tunc in omni sectione Conica problema fieri planum, et constructionem brevissimam; quare datae sectioni describatur tantum similis; ita ut

2 est: *(1)* Brevissime ergo sic *(a)* pro parabola *(b)* parabolae datae applicetur recta *(aa)* $\frac{\mathrm{mr}}{\sqrt{-\mathrm{rn}}}$ *(bb)* $\frac{\mathrm{m}}{\sqrt{-\mathrm{n}}}$ *(aaa)* $-\frac{2}{\frac{2}{\sqrt{-\mathrm{n}}}}$ *(bbb)* -2b | posita b $\sqcap \frac{1}{2\sqrt{-\mathrm{n}}+\frac{3}{\mathrm{m}}}$ *erg.* |, EF, ita ut *(aaaa)* ab axe eius bisecetur ad *(bbbb)* axi sit normalis, et curvam attingat utrinqve. *(aaaaa)* Ex puncto E, ducatur intra parabolam indefinita ED, axi parallela *(bbbbb)* perpendicu *(ccccc)* in ipsa ultra E continuata, sumatur EK (vel PK. qvia puncta E. et P hic coincidunt) *(2)* Brevissime *L* 7 ex ♂ *(1)* erigatur *(2)* ducatur *(a)* versus verticem A, axi AE, *(b)* versus *L* 12 f. sunt *(1)* Nota pro n substituatur $-$ *(2)* Qvia *L* 13 poni *(1)* debet e. g. *(2)* potest *L* 17 mutare *(1)* |, ponamus: *nicht gestr.* | d$({}^{+}\!\ddagger)$y $\sqcap$ z. et *(a)* facere *(b)* fiet $(\Box+\mathrm{d}({}^{+}\!\ddagger)\mathrm{y},)$ *(2)*: Ex *L*

f tunc eveniat qualem desideramus, retenta q, ad eam ducatur minima quod utique brevissime fit, cum ex calculo proposito atqui minima ad unam continuata est etiam minima ad alteram et forte alteram ne duci quidem necesse est, sed sufficit intelligi.

Videamus quid ad duas sectiones Conicas similes sive parallelas requiratur:



[*Fig. 1*]

$AX \sqcap x$. $BZ \sqcap z$. $XY \sqcap y$. $ZV \sqcap v$. Constat esse $XP \sqcap a \mp \frac{a}{q}x$, et $ZP \sqcap b \mp \frac{b}{t}z$. Item $y \sqcap \sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, et $v \sqcap \sqrt{2bz \mp \frac{b}{t}z^2}$. Jam $\frac{y}{v} \sqcap \frac{a \mp \frac{a}{q}x}{b \mp \frac{b}{t}z}$ sive $\frac{2\cancel{a}x \mp \frac{\cancel{a}}{q}x^2}{2\cancel{b}z \mp \frac{\cancel{b}}{t}z^2} \sqcap \frac{a^{\cancel{2}} \mp \frac{2a^{\cancel{2}}}{q}x + \frac{a^{\cancel{2}}}{q^2}x^2}{b^{\cancel{2}} \mp \frac{2b^{\cancel{2}}}{t}z + \frac{b^{\cancel{2}}}{t^2}z^2}$.

$$\boxed{\text{Unde } \frac{b}{2z \mp \frac{z^2}{t}} \boxed{+\frac{\mp\frac{2b}{t}z + \frac{b}{t^2}z^2}{2z \mp \frac{1}{t}z^2}} \mp \frac{b}{t} \sqcap \frac{a}{2x \mp \frac{x^2}{q}} \mp \frac{a}{q} \text{ sive } \frac{bt}{\frac{2zt \mp z^2}{\cancel{t}}} + \frac{b}{t} \sqcap \frac{aq}{\frac{2xq \mp x^2}{\cancel{q}}} + \frac{a}{q}}$$

Vel $\frac{bt^2 + 2zbt \mp bz^2}{2zt^2 \mp z^2t} \sqcap \frac{aq^2 + 2xaq \mp ax^2}{2xq^2 \mp x^2q}$, sed nondum omnes conditiones exhausimus, superest enim ut alia adjiciamus. Jam $\underset{x-e}{\underset{\wedge}{BX}} \sqcap z - a \ddagger \frac{a}{q}x + b \ddagger \frac{b}{t}z$, et $\underset{x}{\underset{\wedge}{AX}} \sqcap \underset{e}{\underset{\wedge}{AB}} + BX$.

Ergo $z \sqcap \dfrac{x - e + a - b \ddagger \frac{a}{q}x}{1 \ddagger \frac{b}{t}}$. Ponamus $1 \ddagger \frac{a}{q} \sqcap \frac{\gamma}{a}$. et $1 \ddagger \frac{b}{t} \sqcap \frac{\pi}{a}$ et $-e + a \sqcap h$. $\dfrac{\pi}{\frac{b}{t}} \sqcap$ $\dfrac{1 \ddagger \frac{b}{t}}{\ddagger \frac{b}{t}} \sqcap \dfrac{\ddagger t}{b} + 1, \sqcap \omega$ fiet $z \sqcap \dfrac{\gamma x + ha + ba}{\pi}$. Ergo $\dfrac{y}{v} \sqcap \dfrac{a \ddagger \frac{a}{q}x}{b \ddagger \dfrac{\gamma x + ha + ba}{\boxed{\dfrac{\pi}{\ddagger\left(\frac{b}{t}\right)}\omega}}}$; ideoque

$$\frac{aq^2 + 2xaq \ddagger ax^2}{2xq^2 \ddagger x^2q} \sqcap \frac{bt^2 + \dfrac{\gamma x + ha + ba}{\pi \smile 2bt} \ddagger \dfrac{\gamma^2x^2 + 2\gamma xha + 2\gamma xba + h^2a^2 + 2hba^2 + b^2a^2}{\pi^2 \smile b}}{2zt^2 \ddagger z^2t}$$

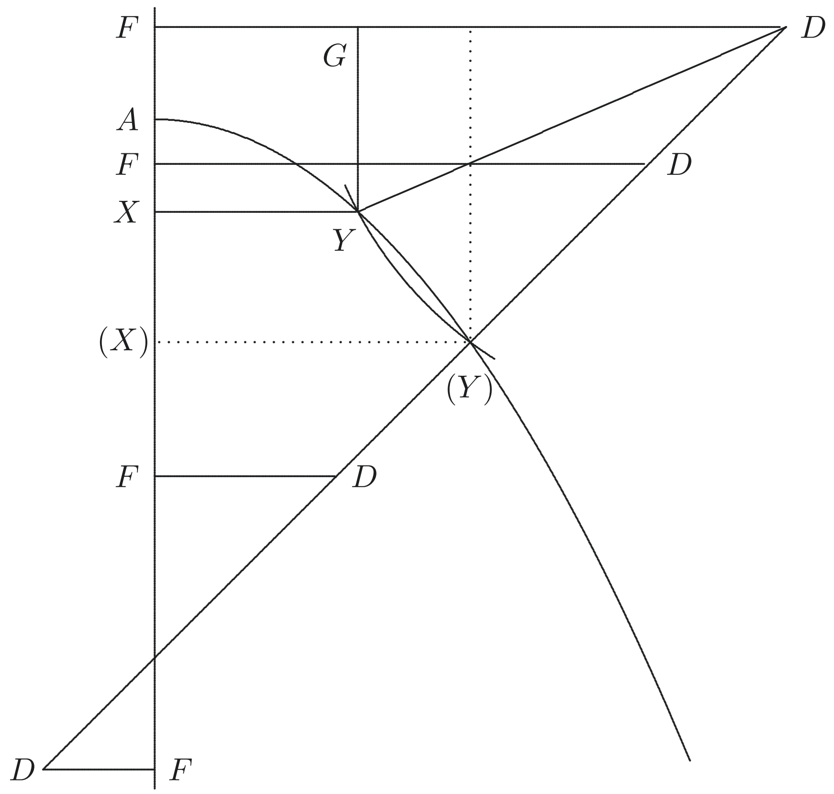
sive

$$\frac{aq^2}{2xq^2 \ddagger x^2q} + \frac{a}{q} \sqcap \frac{bt^2}{\dfrac{\gamma x + ha + ba}{\pi \smile 2t^2} \ddagger \dfrac{\gamma^2x^2 + 2\gamma xha + 2\gamma xba + h^2a^2 + 2hba^2 + b^2a^2}{\pi^2 \smile t}} + \frac{b}{t}.$$

Cum ergo una tantum aequatio habeatur, et duae dentur incognitae b, et t. patet vel alterutram earum, vel rationem earum pro arbitrio assumi posse. Ponatur $\frac{a}{q} \sqcap \frac{b}{t}$, fiet $\dfrac{aq^2}{2xq^2 \ddagger x^2q} \sqcap \dfrac{bt^2}{2zt^2 \ddagger z^2t}$. et dividendo utrumque per $\frac{a}{q} \sqcap \frac{b}{t}$ fiet $\dfrac{q^2}{2xq \ddagger x^2} \sqcap \dfrac{t^2}{2zq \ddagger z^2t}$ et

1 adjiciamus *(1)* datur nobis *(a)* XZ | vel VC *erg.* | est *(b)* x − z *(c)* ZV $\sqcap \dfrac{\text{CY} \frown \text{ZP}}{\text{CV}}$ *(d)* XY $\sqcap \dfrac{\text{CY} \frown \text{ZP}}{\text{ZY}}$ ergo XZ $\sqcap$ ZV $\frown$ *(2)* Jam *L* 3 $\dfrac{\text{y}}{\text{v}} \sqcap \dfrac{\text{a} \ddagger \frac{\text{a}}{\text{q}}\text{x}}{\text{b} \ddagger \dfrac{\gamma\text{x} + \text{ha} + \text{ba}}{\boxed{\dfrac{\pi}{\ddagger\left(\frac{\text{b}}{\text{t}}\right)}\omega}}}$ *(1)*. Jam ut v quoque et y alteram ex altera derivemus: *(2)*; ideoqve *L*

dabitur π. eritque $t \sqcap \frac{qb}{a}$. Exprimamus z per $\frac{ma+ba}{\pi}$ et z^2 per $\frac{a^2m^2+2ma^2b+b^2a^2}{\pi^2}$. Quae aequatio resoluta fiet cubica quia t ducenda in z^2. Si ponatur $h+b \sqcap 0$ foret semper eadem ratio seu $z \sqcap \frac{\gamma}{\pi}x$. Quod notabile Theorema. Pone t dari; id enim necesse, ut calculus ⟨p⟩rimae fiat brevis, fiet: $\frac{a}{b} \frown \frac{1 \ddagger \frac{1}{q}x}{1 \ddagger \frac{1}{t}z} \sqcap \frac{y}{v}$ seu $b \sqcap \frac{va}{y} \frown \frac{1 \ddagger \frac{1}{q}x}{\boxed{1 \ddagger \frac{1}{t}z}} \sqcap \frac{+h-z+\frac{\gamma}{a}x}{\boxed{1 \ddagger \frac{1}{t}z}}$.



[*Fig. 2*]

1 exprimamus *(1)* | z^2 per *nicht gestr.* | $ca+bp+\frac{nb^2}{a}$ | et *nicht gestr.* | *(2)* z per *L*

Unica restat experiunda Methodus, indivisibilium, seu Fermatiana, quae calculum egregie contrahit. Pone scilicet circulum secare sectionem Conicam, in punctis $Y(Y)$ sed ea coincidere, seu $X(X)$ esse infinitae parvitatis.

Patet autem $DY^2 \sqcap s^2$ esse $\sqcap GY^2 + DG^2$, jam GY seu $FX \sqcap [+]\ AF + AX$ sive

$$\begin{array}{l} -\ AF + AX \\ -\ AF + AX \\ +\ AF - AX \end{array}$$

$(\alpha\omega\omega\alpha)\ f+\ (\alpha\alpha\alpha\omega)\ x \sqcap GY$. et $DG \sqcap +\ DF - y$, sive $(\alpha\alpha\omega\alpha)\, d + (\omega\omega\alpha\alpha)\, y$. Compendii

$$\begin{array}{l} +\ DF - y \\ -\ DF + y \\ +\ DF - y \end{array}$$

autem in scribendo causa, pro $(\alpha\omega\omega\alpha)\ f$ ponemus simpliciter f, pro $(\alpha\alpha\omega\alpha)\, d$, ponemus simpliciter d, quia non aliter occurrunt d et f. et pro $(\alpha^3\omega)\, x$ ponemus $(\beta)x$, pro $(\alpha^2\omega^2)\, y$ fiet $(\gamma)y$. quia eaedem literae non aliter in calculo occurrunt. Erit ergo $GY \sqcap f + x$. et $DG \sqcap d + y$. Ergo erit $s^2 \sqcap +f^2 + 2(\beta)x + x^2 + d^2 + 2d(\gamma)y + y^2$, et pro y substituto ejus valore $\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$, fiet: $s^2 \sqcap f^2 + 2(\beta)2fx + x^2 + d^2 + (\gamma)2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} + 2ax \mp \frac{a}{q}x^2$, et contrahendo βραχυλόγως, fiet: $s^2 \sqcap h^2 (\sqcap f^2 + d^2) + bx$ (ponendo $b \sqcap \beta 2f + 2a) + \frac{\delta}{a}x^2)$ (ponendo $\frac{\delta}{a} \sqcap \frac{1}{1} \mp \frac{a}{q}$) $+(\gamma)2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2}$. At idem

$$s^2 \sqcap h^2 + bx + be + \frac{\delta}{a}x^2 + \frac{2\delta}{a}\ ex + \frac{\delta}{a}e^2 + (\gamma)2d\sqrt{2ax + 2ae \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}\ ex\ \mp \frac{a}{q}e^2}.$$

Deletis communibus abjectisque e^2 fiet:

$$+\ (\gamma)2d\sqrt{2ax \mp \frac{a}{q}x^2} \sqcap be + \frac{2\delta}{a}\ ex + \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

et quadrando utrobique fiet:

$$8d^2ax \mp \frac{4d^2a}{q}x^2 \sqcap b^2e^2 + \frac{4\delta}{a}be^2x + \frac{4\delta^2}{a^2}\ \underbrace{e^2x^2, +2be + \frac{4\delta}{a}\ ex}\ \frown\ (\gamma)2d\sqrt{\ldots\ldots} + gd^2ax \mp$$

$$4d^2a^2e \mp \frac{4d^2a}{q}x^2 \mp 8d^2aex \mp \frac{4d^2a}{q}e^2,$$

13 f. ponemus | (β) *erg.* | x, pro $(\alpha^2\omega^2)$y *(1)* | ponemus y *nicht gestr.* *(2)* fiet *L* 20 abjectisqve e^2 *erg.* *L*

et rursus deletis communibus, abjectisque e^2, fiet:

$$2be + \frac{4\delta}{a}\, ex, \frown -2d\sqrt{\ldots\ldots} \sqcap \mp 4d^2ae \mp \frac{8d^2a}{q}\, ex,$$

et quadrando utrobique fiet:

$4b^2\cancel{e^2} + \frac{16\delta}{a} b\cancel{e^2}x + \frac{16\delta^2}{a^2}\cancel{e^2}x^2 \frown 4d^2, \frown 2ax \mp \frac{a}{q}x^2$ (abjectis scilicet omnibus in radice contentis per e multiplicatis,) $\sqcap \cancel{e^2} \frown 16d^4a^2 \frown \boxed{1+\frac{x}{q}\square}\, 1 + \frac{2x}{q} + \frac{x^2}{q^2}$. Divisis omnibus per e^2, ordinataque aequatione habebimus:

$$\mp \frac{4\cancel{a^2}}{q}\cancel{d^2} \frown \frac{\cancel{16}\delta^2}{a^{\cancel{2}}} x^4 \mp \frac{4\cancel{a}}{q} \frown \frac{\cancel{16}\delta b}{\cancel{a}}\cancel{d^2}\, x^3 + 8\cancel{a}\cancel{d^2} \frown \frac{\cancel{16}\delta b}{\cancel{a}}\, x^2 - \frac{2\cancel{32}d^{\cancel{4}2}a^2}{q}x - \cancel{16}d^{\cancel{4}2}a^2 \sqcap 0$$

$$+ 8a\cancel{d^2} \frown \frac{\cancel{16}\delta^2}{a^2} \quad \ldots\ldots - \frac{\cancel{16}d^{\cancel{4}2}a^2}{q^2} \quad \ldots\ldots$$

vel $x^4 + \frac{ba}{\delta}\, x^3 \mp \frac{2bqa}{\delta}\, x^2 \pm \frac{d^2a^3}{2\delta^2}x \pm \frac{d^2a^3q}{4\delta^2} \sqcap 0.$

$$\mp\ 2q \qquad \pm \frac{d^2a^3}{4q\delta^2} \ \ldots$$

Est autem δ in parabola $\sqcap a$, in circulo $\sqcap 0$. Unde in circulo $+\frac{\cancel{d^2}\cancel{a^2}}{4}x^2 + \cancel{d^2}a^{\cancel{3}}x + \cancel{d^2}\cancel{a^2}q \sqcap 0$ fieretque: $x^2+2ax+a^2 \sqcap -2aq+a^2$, sive fieret $x \sqcap \sqrt{-a^2}-a$ sive $x^2+2ax+a^2 \sqcap 0$, sive $x \sqcap -a$, quod est absurdum, latet ergo error in calculo. Igitur pro constructione Ellipseos redeamus ad calculum a nobis ab initio inventum exploratae veritatis resumtaque analogia, et ponendo: $\pm\ (^{+}\mp)\ q\ (^{+}\dagger)\ f \sqcap h$, et $d \sqcap (^{+}\mp)\ d$, et $1 \mp \frac{q}{a} \sqcap \frac{\delta}{a}$. Stabit analogia generalis: $\dfrac{d^2 + \frac{2\delta d}{a}y + \frac{\delta^2}{a^2}y^2}{h^2} \sqcap \dfrac{y^2q}{a^2q \mp y^2a}$. Ergo si $d \sqcap 0$. problema erit planum, item si $h \sqcap 0$.

11 $\sqcap$ 0. *(1)* Unde nisi error in calculo insit, erit | in Circulo *erg.* | x $\sqcap$ 2q. qvod utiqve absurdum, necesse est ergo in calculo erratum esse. *(2)* Unde *L*

Ponendo $aq \ddagger y^2 \sqcap z^2$ fieret $\dfrac{d+\dfrac{\delta}{a}y}{h} \sqcap \dfrac{y\sqrt{q}}{z}$, et duas habebimus aequationes: $\dfrac{dz+\dfrac{\delta}{a}yz}{h} \sqcap y$. Aequatio autem illa est ad circulum $aq \ddagger y^2 \sqcap -z^2$ modo scilicet signa in caeteris pro re nata mutemus, ut res postulat; imo generaliter ponendo az^2, pro $aq \ddagger y^2a$, fiet altera aequatio: $\dfrac{d+\dfrac{\delta}{a}y}{h} \sqcap \dfrac{y}{z}\,\dfrac{\sqrt{q}}{a}$. Hinc patet optime construi problema ope Circuli et cujusdam Hyperbolae latus rectum transversumque aequalia habentis: $\dfrac{d+\dfrac{\delta}{a}y}{h} \sqcap \dfrac{y\dfrac{\sqrt{q}}{a}}{\sqrt{aq \ddagger y^2}}$. Pone $\dfrac{y\dfrac{\sqrt{q}}{a}}{\sqrt{aq \ddagger y^2}} \sqcap \dfrac{\dfrac{\delta}{a}y}{h} + \dfrac{y}{z}$, erit $\dfrac{d}{h} \sqcap \dfrac{y}{z}$. et: $\sqrt{\dfrac{q}{a}z} \sqcap \dfrac{z\delta}{ah} \frown \sqrt{aq \ddagger y^2} + \sqrt{aq \ddagger y^2}$, et $aq \ddagger y^2 \sqcap \dfrac{\dfrac{q}{a}z^2}{1+z\dfrac{\delta}{ah},\ \square}$, sive $y \sqcap \dfrac{\ddagger\dfrac{q}{a}z^2}{1+z\dfrac{\delta}{ah}} +$ [*bricht ab*]

Aequatio ordinata erit:
$$\ddagger\frac{\delta^2}{a^2}ay^4 \ddagger 2\delta dy^3 \ddagger \begin{array}{l} d^2a^2 \\ +\ \delta^2 q\ \ldots \\ -\ h^2q\ \ldots \end{array} y^2 + 2\delta dqay + d^2a^2q \sqcap 0.$$

Atque ita nunc quidem modum ostendemus, quo constructio in Ellipsi quoque et Hyperbola sic satis brevis reddi possit. Tantum ergo ponemus $g \sqcap r$. et $\varphi \sqcap 0$. idque universaliter, adeoque in ipsa quoque parabola observari potest. Imo male, id non procedit, nisi in parabola: Ex aequatione simplici valoris φ fiant duae, nempe $b \sqcap \dfrac{r^3p}{g^2}$.

1 $\sqcap \dfrac{\mathrm{y}\sqrt{\mathrm{q}}}{\mathrm{z}}$, *(1)* et solvi poterit problema nullo *(2)* et *L* 2 $\sqcap$ y. *(1)* ⟨—⟩ potius aq $\ddagger$ y^2 $\sqcap$ $\pm$ z^2 qvae est ad circulum; *(2)* aeqvatio *L* 3 postulat *(1)*. Caeterum ex his patet in parabola problema esse planum *(2)*; imo *L* 6 $+\dfrac{\mathrm{y}}{\mathrm{z}}$, *(1)* erit $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{h}}\mathrm{z} \sqcap \mathrm{ya}$ *(a)* una aeqvatio et altera: *(b)* et $\dfrac{\mathrm{ya}}{\mathrm{z}}$ *(2)* erit *L* 14 aeqvatione *(1)* $-\varphi \frown \underbrace{6\mathrm{br}+2\psi\mathrm{r}} \pm \dfrac{2\mathrm{y}^3}{\mathrm{t}^3}\mu\mathrm{g} - \underbrace{\dfrac{\delta\langle\mathrm{q}\rangle}{\mathrm{t}}\mathrm{g}+2\psi\mathrm{bg}-\dfrac{\mathrm{r}^3}{\mathrm{g}}\mathrm{pg}}_{\mu} \sqcap 0$ pone $-\varphi \frown 6\mathrm{br}+2\psi\mathrm{r}-\delta\mathrm{qge} \sqcap 0$ *(2)* simplici *L*

Unde habetur valor φ. Quod si jam (extra parabolam,) ponatur $\theta \sqcap -6br + 2\psi r$, sive $\sqcap -6br + \dfrac{2\beta r}{g} \mp \dfrac{r}{t}g$ habetur g ex supposita b. Sed non ponenda $b \sqcap \dfrac{r^3 p}{g}$. Possumus etiam facere $\dfrac{\gamma q}{r} \sqcap 0$. atque ita sumere g talem ut fiat $\mu\dfrac{r}{t} \sqcap 0$ quod mea sententia omnium optimum est, quia universalis fit constructio.

4 constructio | , excepta parabola *gestr.* | *L*

37. CONSTRUCTIO PROBLEMATIS SOLIDI DATI II
[Oktober 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 216. 1 Bl. 4°. $1\frac{1}{2}$ S.
Cc 2, Nr. 857

Datierungsgründe: s. N. 31.

Constructio Problematis solidi dati, ope Circuli cujusdam, et Sectionis Conicae datae formula generali omnibusque pariter Conicarum speciebus, et Aequationum formis, communi.
Quod hactenus ad Solutiones Universales Problematum Conicorum desiderabatur.

Esto Problematis solidi propositi aequatio inventa: $y^4+ly^3+rmy^2+r^2ny+r^3p \sqcap 0$.

________ $r \sqcap 1$. latus sectionis conicae datae rectum unitasque constructionis

________ t latus ejusdem transversum

________ l ________ $\theta \sqcap -\dfrac{\beta l}{2}+n$

______ m ______ λ arbitraria

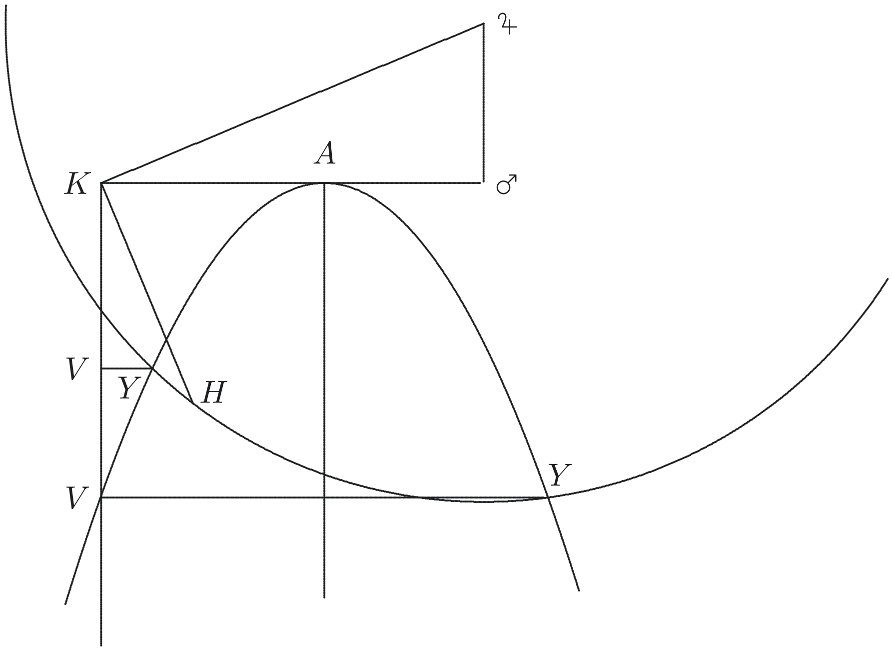
______ n ________ $g^2 \sqcap \dfrac{\theta}{-1 \mp \dfrac{l}{2t}}$

_____ p. ________ $\psi \sqcap \dfrac{\beta}{g} \mp \dfrac{g}{t}$

__________ $\beta. \sqcap m-\dfrac{l^2}{4}$ ________ $\varphi \sqcap -g\psi+\dfrac{p}{g\psi}$ seu $-\beta \mp \dfrac{g^2}{t}+\dfrac{p}{-\beta \mp \dfrac{g^2}{t}}$

16 *r. Sp.* g^2 *(1)* $\sqcap \theta-\frac{\lambda}{\mathrm{t}}$, $\smile \mathrm{r} \mp \frac{1}{2\mathrm{t}}$ *(2)* $\sqcap$ *L* 17 f. *r. Sp.* $\mp\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{t}}$ *(1)* ____ b arbitraria ____ $\gamma \sqcap \frac{1}{\mathrm{t}}+1$. *(2)* ____ φ *L*

14–18 Leibniz übernimmt die Werte für θ, g^2, ψ und β aus N. 36 S. 379 Z. 8–10. 18 seu: Aus dem Ansatz folgt $-\beta \pm \dfrac{g^2}{t}+\dfrac{p}{\beta \mp \dfrac{g^2}{t}}$.



[*Fig. 1*]

Constructio haec erit: Sectionem Conicam datam in vertice A tangat recta $AK \sqcap -\frac{\psi}{2} + \frac{p}{g^2\psi}$. Producatur in alterum sectionis latus, ultra A, in ♂, donec fiat A♂ $\sqcap \frac{-\psi+\beta-g}{2}$. Unde normaliter exeat a vertice A recedens, ♂♃ $\sqcap -1 \ddagger \frac{l}{2t}$. Jungatur recta ♃$K$ et ex K erigatur normalis KH, quae possit $\frac{\varphi^2+\beta\varphi+p}{g^2} - \varphi$. Centro ♃ radio ♃$H$. descriptus Circulus secabit sectionem Conicam in punctis Y, unde demissae in rectam indefinitam KV, axi parallelam perpendiculares YV, erunt aequationis propositae Radices, y. Quod desiderabatur ad problematum Conicorum solutiones Universales.

3 $+\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{g}^2\psi}$. *(1)* (in eadem producta si opus est, recedat ab A, recta K♂ $\sqcap$ *(a)* $\frac{2\varphi+\beta}{\mathrm{g}} - \mathrm{g}$ *(b)* $-2\psi + \frac{2\mathrm{p}}{\mathrm{g}^2\psi} + \beta - \mathrm{g}$. sive compendiosius,) ab AK, ex A, auferatur $\frac{\psi}{2}$, residuoqve duplicato addatur $+\beta - \mathrm{g}$. ut habeatur recta K♂ *(2)* producatur *L* 7 perpendiculares | KV *ändert Hrsg.* |, erunt ... Radices | qvaesitae *gestr.* |, y. *L*

Sane mutatis quibusdam, certis casibus calculus aliquanto brevior reddi potest sed cum praejudicio universalitatis; cujus in hoc problematum genere major habenda est ratio: Id ipsum enim maximum calculi compendium est, casus tum pro curvarum in problemate propositarum generibus, tum pro punctorum in quaestione datorum situ varios; una aequatione universali, sed et una ejusdem aequationis constructione complecti.

Universalia ergo Conica, Geometriae partem a Desarguesio et Pascalio synthetica methodo coeptam, nunc arte analytica absolutam arbitror: Nam et aequationes semper haberi possunt generales; quod est totidem theoremata condere, et constructiones problematum omnium quae in data quadam sectione Conica desiderantur, (modo sursolida non sint) perinde ac si semper plana essent, lineis tantum rectis ac circularibus effici possunt.

Caeterum constructio ista etiam sic satis brevis censeri debet, quod intelligetur, si si conferatur illis quae extant. Nam praeterquam quod universalis extat nulla; etiam particulares plerumque admodum impeditae sunt. Nam quam Cartesius dedit ope Parabolae datae, requirit tolli terminum 2^{dum}; Schotenius aliam subjecit, ubi ea sublatio non requiritur, sed quae cubicas tantum contineat, ad quadrato-quadraticas non assurgat. Adscripsit et Huddenianam ope Hyperbolae asymptotos normales habentis, sed et haec praeparatione opus habet aequationis, ut omnes ejus radices fiant reales, seu ut signa + et − sese alternatim consequantur.

Constat autem praeparationibus aequationum valde intumescere solere calculum, et *l. m. n. p.* cognitas terminorum quantitates ad valores assurgere admodum prolixos.

Unus quod sciam Slusius constructionem dedit omnibus aequationum formis communem, sed ope parabolae tantum datae. At qui methodum generalem dederit solvendi problema solidum datum ope Ellipseos aut Hyperbolae datae, mihi certe non succurrit; tantum abest, ut quisquam unam omnibus Curvis conicis problematisque solidis communem formam ante me exhibuerit.

1 calculus *(1)* non paulo *(2)* aliqvanto *L* 6 Conica, *(1)* scientiae *(2)* Geometriae *L* 13 extant |, particularibus *gestr.*|. Nam *L* 17 Hyperbolae *(1)* latera rectum *(2)* asymptotos *(a)* perpendiculares *(b)* normales *L* 21 qvantitates *(1)* valores obtinere *(2)* ad *L* 23 datae *(1)*, non Hyperbolae. Sed *(2)* At *L*

6 Universalia: vgl. die Erl. zu N. 10 S. 77 Z. 8. 14 dedit: R. Descartes, *Geometria*, *DGS* I S. 67–106. 15 subjecit: Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 328–330. 17 Adscripsit: *a. a. O.*, S. 325–328. 22 dedit: R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 93–95.

38. DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONIS SOLIDAE DATAE
[Oktober – Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 163–164. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 852 C

Datierungsgründe: Aufbauend auf den Ergebnissen von N. 31 führt Leibniz in den Studien N. 38, 39, 40, 41 eine weitere Reihe von Untersuchungen zur Konstruktion der allgemeinen Lösung solider Probleme und speziell zum Problem der *minima ad conicam* durch. Diese münden zunächst in N. 42 in einen weiteren Entwurf für eine Gesamtdarstellung, der selbst wiederum die Grundlage für N. 43 bildet. Das Wasserzeichen der Papiere ist für die Zeit von Mai 1674 bis Januar 1675 belegt. Die verwendeten Doppel- und Mehrfachvorzeichen gebraucht Leibniz vorwiegend bis Ende 1674.

Quaerimus Constructionem Aequationis solidae datae per sectionem Conicam datam, et circulum, formula, omnibus pariter Aequationum formis, et Sectionum Conicarum Speciebus, communi, quod ad constructiones Problematum Conicorum Universales, hactenus desiderabatur.

Quaerenda ergo est Aequatio quaedam quadrato-quadratica factitia ex conicae sectionis indefinitae cum Circulo intersectione orta, quae sufficientem habeat numerum situmque quantitatum indeterminatarum, ita ut postea conferendo singulos terminos aequationis factitiae, cum singulis datae respondentibus; sit quod determinari possit.

Intersectio conicae sectionis cum circulo optime explicatur per duos Locos, alterum ad sectionem Conicam indefinitam, alterum ad circulum, ita ut duae incognitae utriusque loci, aut sint eaedem aut addendo adimendove, reddi possint eaedem. Intelligo autem l o c o s qui explicant relationem Ordinatarum ad Abscissas, et nunc quidem locis tantum illis utar, facilioris calculi causa; in quibus ordinatae sunt abscissis perpendiculares.

Loci omnes ad sectionem Conicam indefinitam, circulumve, quales dixi, neutram habent incognitarum, ultra quadratum adscendentem, neutram etiam incognitarum in alteram ductam: Nam si altera incognitarum in alteram ducta est, et ordinatae sunt perpendiculares, locus non nisi ad Hyperbolam esse potest.

Loci quales postulamus omnium compositissimi sunt hi: ad sectionem conicam datam indefinitam: $\ddagger\frac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. ad Circulum vero: $-x^2 + ex + \theta a \sqcap y^2 + \lambda y$.

15 qvaedam *(1)* solida *(2)* qvadrato-qvadratica *L*

Sed quoniam sectio Conica supponitur data, hinc fit ut b. aliquando non sit indeterminata, nam in Parabola semper aequivalebit lateri recto.

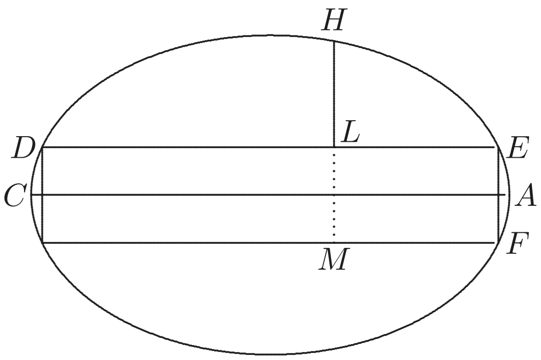


fig. 1

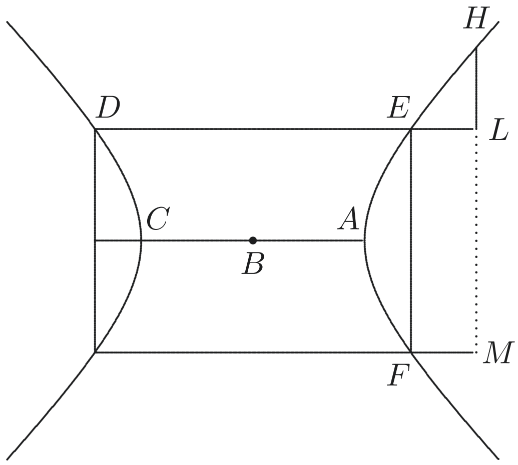


fig. 2

Ut autem locum hunc assumtum ad locum quendam ad sectionem Conicam datam, reducamus, cogitandum est, si sectioni Conicae, inscribatur rectangulum concentricum DEF latere DE axi AC parallelo et ex puncto in curva sumto H, demittatur HL perpendicularis in DE productam si opus est, fore rectangulum DEL, ad rectangulum MHL, ut latus transversum seu axis sectionis, ad latus ejus rectum. Quod in Parabola quoque recta et circulo locum habet, ut alibi ostendi. Posito jam latere recto sectionis $2a$, transverso $2q$, et recta DE posita $\frac{qs}{a}$ et $EF \sqcap ☿$ et $EL \sqcap v$, et $HL \sqcap z$. fiet $DEL \sqcap \frac{qs}{a}v \text{ǂ} v^2$, et MHL erit $☿z + z^2$. et $\frac{DEL}{MHL} \sqcap \frac{1}{\frac{a}{q}}$ factaque per crucem multiplicatione fiet: $sv + \frac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 + ☿z$.

4 qvendam *(1)* compertum, qvem *(2)* ad *L*   10 posita *(1)* $\frac{\mathrm{t}\delta\mathrm{q}}{\mathrm{r}^2}$, et EF $\sqcap \frac{\gamma\mathrm{q}}{\mathrm{r}}$, posito $\frac{\gamma}{\mathrm{r}} \sqcap 1 + \frac{\mathrm{r}}{\mathrm{t}}$ fiet DLE $\sqcap \frac{\mathrm{t}\delta\mathrm{q}}{\mathrm{r}^2} \text{ǂ} \mathrm{x}^2$ et EL $\sqcap$ z *(2)* $\frac{\mathrm{qs}}{\mathrm{a}}$ *L*

7 *DEL*: Gemeint ist das Rechteck *DLE* mit den Seiten *DL* und *LE*. Leibniz schreibt meistens *DEL*.   9 alibi: N. 27 u. N. 31.

Ponendoque $v \sqcap x + \text{♀}$, et $z \sqcap y + \text{♂}$, fiet:

---

1 *Nebenbetrachtung:* Utile poni $v \sqcap \frac{\text{☽}}{a} x + \text{♀}$. ad efficiendum ut b maneat indeterminata. Caeteraque nihilo secius procedent sed tunc pro aequatione: $\text{ǂ} \frac{a}{q} x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$, ponendum: $\text{ǂ} \frac{a\,\text{☽}^2}{qa^2} + bx + ca \sqcap$ etc. Similiter w explicabitur, non per $x + \text{♃}$, sed per $\frac{\text{☽}}{a} x + \text{♃}$, et assumta ad circulum aequatio talis erit: $-\frac{\text{☽}^2}{a^2} x^2 + ex + \theta a \sqcap y^2 + \lambda y$.

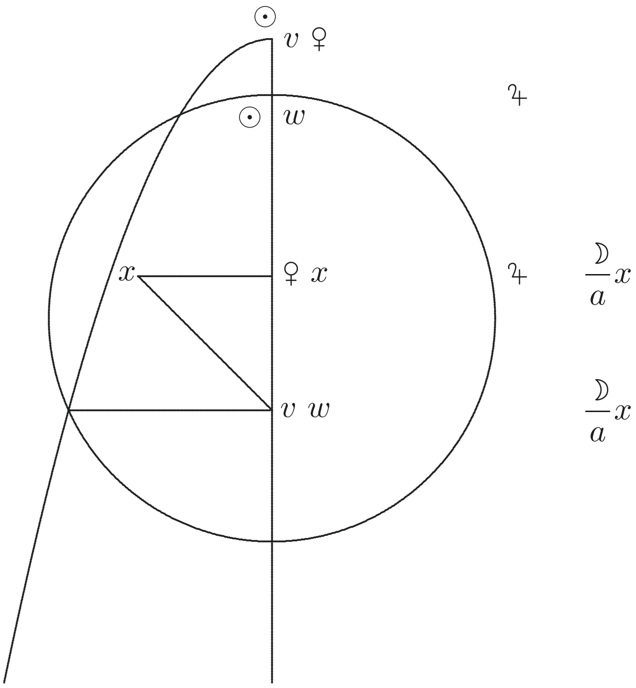


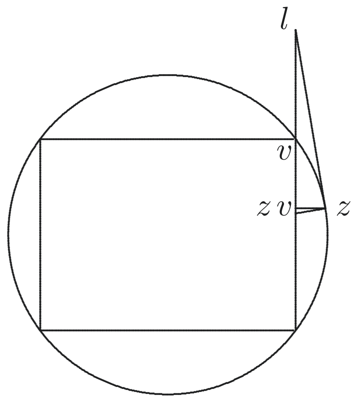
fig. 4

4 etc. *(1)* et ita nullus inde fructus, assumta aeqvatio fiet: $\frac{\odot}{\mathrm{a}} \mathrm{x}^2 + \mathrm{bx} + \mathrm{ca} \sqcap$ *(2)* Unde | aeqvatio ad circulum comperta *nicht gestr.* | erit similiter: $-\frac{\text{☽}^2}{\mathrm{a}^2} \mathrm{w}^2 + \frac{\gimel\,\text{☽}}{\mathrm{a}} \mathrm{w} \sqcap \mathrm{y}^2 + \mathrm{dy}$, conferenda cum $-\frac{\text{☽}^2}{\mathrm{a}^2} \mathrm{w}^2$ *(3)* similiter *L* 6 fig. *(1)* 5 *(2)* 4 *L*

$sx + s♀ \mp \frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}♀x \mp \frac{a}{q}♀^2 \sqcap y^2 + 2♂y + ☿y + ☿♂$. et ordinando:

Inspice fig. 4, ibi, ut res procedat debet ♀ aequari ♃ plus differentia perpetua inter v, et w quam vocabimus ☉. Erit ergo $w \sqcap v -$ ☉ $\sqcap x +$ ♃. At $v \sqcap x +$ ♀. ergo $+$ ♀ $-$ ☉ $\sqcap$ ♃, definita ergo ♃, definietur ☉. Unde patet hanc multiplicationem radicis procedere. Idem etiam in ipsis ordinatis fieri potest. Hoc facto optimum foret multiplicare aequationem ad circulum per $\mp\frac{a}{q}$, fiet $\mp\frac{a}{q}\,\frac{☽^2}{a^2}[x^2] \pm \frac{a}{q}ex \pm \theta a \sqcap \pm\frac{a}{q}y^2 \pm \frac{a}{q}\lambda y$, conferendo cum aequatione ad sectionem Conicam datam tolletur utrobique $\mp\frac{☽^2}{a^2}\,\frac{a}{q}x^2$, et habebitur x pure, unde poterit eliminari restabitque tantum y, fietque aequatio in qua duae erunt supernumerariae quod exequi postea operae pretium erit, nisi forte sit commodius y^2 utrinque elidere.

Am oberen Rand: $2av \mp \frac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 + ☿z$, quaeritur tangens, fiet: $2al \mp \frac{2a}{q}lv \sqcap 2z^2 + ☿z$. Unde $l \sqcap \frac{2z^2 + ☿z}{2a \mp 2av}$.



l. autem tangentis distantia in axe. Est autem $z^2 \sqcap lp$, erit: $z^{\cancel{2}} \sqcap \frac{2z^{\cancel{2}}p + ☿\cancel{z}p}{2a \mp 2av}$. sive $\frac{p}{2a \mp 2v} \sqcap \frac{z}{2z + ☿}$.

1–398,4 *Nebenbetrachtung, gestr. und durch Zusatz* non delendum *wieder gültig gemacht*: NB. si $s \sqcap 0$ (nempe si ⟨—⟩ $\sqcap 0$) erit ♀ $\sqcap v$, et ♂ $\sqcap z$, et forent x et $y \sqcap 0$ circulusque descriptus in E tanget Conicam, ⟨jam⟩ punctum E erit quaesitum.

---

11 $l \sqcap$: Leibniz schreibt im Nenner $2av$ statt $\frac{2a}{q}v$ und in der letzten Gleichung nur noch $2v$.

$$\begin{array}{llll} \ddagger\frac{a}{q}x^2 & +s\ \ x & +s\venus & \sqcap y^2+2\mars y. \\ & \ddagger\frac{2a}{q}\venus\ldots & \ddagger\frac{a}{q}\venus^2 & +\mercury\ldots \\ & & -\mars^2 & \\ & & -\mercury\mars & \end{array}$$

quam conferendo cum $\ddagger\frac{a}{q}x^2+bx+ca \sqcap y^2+dy$ fiet: $b \sqcap s \ddagger \frac{2a}{q}\venus$. Aeq. 1. $ca \sqcap +s\venus \ddagger \frac{a}{q}\venus^2-\mars^2-\mercury\mars$. Aeq. 2. $d \sqcap 2\mars+\mercury$. Aeq. 3. vel Aequationes collatitiae sunt tres, indeterminatae quoque nunquam nisi tres sunt, quia duae s et $\mercury$ altera alteram determinat; vel (in parabola) altera, s. jam est determinata, valet enim $2a$ in parabola, ut postea ostendam. Quod si ergo constructionem universalem ad Parabolam, Hyperbolam et Ellipsin quaerimus, cogemur praeterquam in parabola ponere $s \sqcap 2a$. Quo facto etiam definita erit $\mercury$ per ductum linearum; ergo et $\mars$ per aeq. 3. Quare et $\venus$ per aeq. 2. Ergo et b per aeq. 1. Fiat $\mars t \sqcap ca$, erit aequatio 2^da^ $\begin{array}{l}\mars^2+\mercury\mars\\ +t\ldots\end{array} \sqcap 2a\venus \ddagger \frac{a}{q}\venus^2$ quae est ad sectionem conicam datam, ejusque ope statim habetur $\venus$, insigni constructionis compendio.

Jam aequatio ad Circulum $-x^2+ex+\theta a \sqcap y^2+\lambda y$, conferatur cum aequatione ad Circulum sibi simillima, cujus cognita est descriptio, nempe $-w^2+\gimel w \sqcap y^2+\lambda y$.

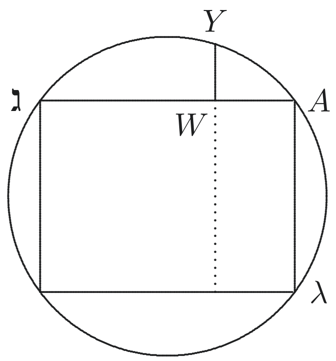


fig. 3

7 f. determinat; *(1)* et qvod est peius (in parabola) s valet a *(2)* vel *L* 11 erit $\mercury$. *(1)* Ergo et $\mars$. *(2)* per *L* 12 aeq. 1. *(1)* Valor ipsius $\mars$ ex aeq. 2. est hic, $\mars \sqcap \frac{\mathrm{d}-\mercury}{2}$. ergo *(2)* fiat *L*

Constituto nimirum rectangulo $ʒA\lambda$, fig. 3. posito $ʒA \sqcap ʒ$, et $\lambda A \sqcap \lambda$ et circa illud descripto circulo, tunc enim posita $AW \sqcap w$, et $WY \sqcap y$. haec quam dixi prodibit aequatio. Jam ponendo $w \sqcap x + ♃$, fiet $-x^2 - 2♃x - ♃^2 \sqcap y^2 + \lambda y$ fietque

$$\begin{array}{l} -x^2 - 2♃x \;\; - ♃^2 \\ + \lambda \;\; \ldots \;\; + ʒ♃ \end{array}$$

$-2♃ + ʒ \sqcap e$ et $-♃^2 + ʒ♃ \sqcap \theta a$ et in aeq. 2. pro $ʒ$ substituendo ejus valorem ex Aeq. 1,
Aeq. 1 Aeq. 2
nempe $ʒ \sqcap e + 2♃$, fiet in aeq. 2. $-♃^2 + ♃e + 2♃^2 \sqcap \theta a$ sive $e♃ + ♃^2 \sqcap \theta a$.

Resumtis ergo duabus primis aequationibus, altera ad sectionem Conicam datam, indefinitam, altera ad Circulum, ex posteriore ad Circulum, habebitur $y^2 \sqcap -x^2 + ex + \theta a - \lambda y$. Quo valore in aequatione ad conicam substituto fiet

$$\begin{array}{l} \mp\dfrac{a}{q}x^2 \;\; + b\,x \;\; + ca \\ +1 \ldots - e \ldots - \theta a \\ \hline -\lambda + d \end{array} \sqcap \boxed{\begin{array}{l} -\lambda\; y \\ +d \ldots \end{array}}\, y.$$

Pro $\dfrac{\dfrac{a}{q}+1}{-\lambda + d}$ ponamus $\dfrac{\pi}{a^2}$, pro $\dfrac{+b - e}{-\lambda + d}$ ponamus $\dfrac{\beta}{a}$ ac denique pro $\dfrac{+ca - \theta a}{-\lambda + d}$ ponamus μ, unde fiet: $y \sqcap \dfrac{\pi}{a^2}x^2 + \dfrac{\beta}{a}x + \mu$, quem valorem in aequatione alterutra inserendo, ponendoque $\pi \sqcap a$ aequatio inde producetur talis:

$$\begin{array}{llll} x^4 + \dfrac{2a\xi}{\gamma}\,x^3 & + \dfrac{2a\psi}{\gamma}\,x^2 & + \dfrac{2\xi\psi a^3}{\gamma^2}\,x & + d\psi a^3 \sqcap 0 \\ & + \;ad & + \dfrac{d\xi a^3}{\gamma^2} & - \;ca^3 \\ & + \dfrac{a\xi^2}{\gamma^2} & - \;ba^2 & \\ & \pm \dfrac{a^2}{q} & & \end{array}$$

ponendo scilicet $\beta \sqcap \dfrac{\xi\pi}{\gamma}$ et $\dfrac{\mu}{\pi} \sqcap \dfrac{\psi}{\gamma}$. Calculus qui hanc aequationem produxit, reperietur in scheda in fol. sub sign. $\oplus$, qua de constructionibus ipsis fuse, nisi quod ω pro b, et δ pro d, et φ pro c. Sed hic jam notandum est, si b. sit determinata, et $\xi \sqcap 0$. absente

20 in scheda: N. 31 S. 323 Z. 4.

scilicet aequationis datae cum qua factitia ista comparari debet termino secundo, tunc oriri absurdum, collatitionem scilicet inter duas quantitates cognitas in termino quarto. Nec remedium ei rei habebitur, si ponas pro d, aliam $\dfrac{\Delta a}{\xi}$, tunc enim fateor Δ determinari in termino quarto, posita licet $\xi \sqcap 0$. sed in termino tertio et 2[do] aliud incommodum inde oriri, quod scilicet Δ per ξ infinite parvam diviso, caetera evanescant.

Operae pretium ergo est ad ea recurrere quae pag. praecedente margini ascripsi, et quae figura 4[ta] explicui: Erunt enim aequationes duae, altera ad sectionem Conicam datam: $\ddagger \dfrac{a\,\rightmoon^2}{qa^2} + bx + ca \sqcap y^2 + dy$, altera ad Circulum nempe: $-\dfrac{\rightmoon^2}{a^2}x^2 + ex + \theta a \sqcap y^2 + \lambda y$. Unde per Aeq. ad Circulum erit $y^2 \sqcap -\dfrac{\rightmoon^2}{a^2}[x^2] + ex + \theta a - \lambda y$, eoque valore in aequatione ad Conicam substituto, fiet: $y \ \sqcap \ \dfrac{\begin{array}{l}\ddagger \dfrac{\rightmoon^2}{qa}\, x^2 \ + b\, x \ \ + ca \\ + \dfrac{\rightmoon^2}{a^2} \ldots - e \ldots - \theta a\end{array}}{+d - \lambda}$. $d - \lambda$ appellemus (π). $\ddagger \dfrac{a}{q} + 1, \sqcap \left(\dfrac{\gamma}{a}\right)$, $+b - e \sqcap \beta$. $+c - \theta \sqcap \mu$. fiet $y \sqcap \dfrac{\dfrac{\gamma\,\rightmoon^2}{a^3}x^2 + \beta x + \mu a}{\pi}$ eritque

$$y^2 \sqcap \frac{\dfrac{\gamma^2\,\rightmoon^4}{a^6}x^4 + \dfrac{2\gamma\,\rightmoon^2}{a^3}\beta x^3 + \dfrac{2\gamma\,\rightmoon^2}{a^3}\mu a x^2 + \beta^2 x^2 + 2\beta\mu a x + \mu^2 a^2}{\pi^2}.$$

Hos valores aequationi ad circulum inserendo, multiplicandoque omnia per π^2, et dividendo per $\dfrac{\gamma^2\,\rightmoon^4}{a^6}$ atque ordinando fiet:

7 figura 5[ta] *L ändert Hrsg.* 14 f. et ... $\dfrac{\gamma^2\,\rightmoon^4}{\mathrm{a}^6}$ *erg. L*

6 ascripsi: s. o. die Nebenbetrachtung zu S. 396 Z. 1.

$$\begin{array}{l} x^4 + \dfrac{2a^3}{\gamma \rightmoon^2}\beta x^3 + \dfrac{2a^4}{\gamma \rightmoon^2}\mu\, x^2 + \dfrac{2\beta\mu a^7}{\gamma^2 \rightmoon^4}\, x + \dfrac{\mu^2 a^8}{\gamma^2 \rightmoon^4} \sqcap 0 \\ \qquad\qquad\qquad + \dfrac{a^6\beta^2}{\gamma^2 \rightmoon^4}\ldots + \dfrac{\lambda\pi\beta a^6}{\gamma^2 \rightmoon^4}\ldots + \dfrac{\lambda\pi\mu a^7}{\gamma^2 \rightmoon^4} \\ \qquad\qquad\qquad + \dfrac{\lambda\pi a^3}{\gamma \rightmoon^2}\ldots - \dfrac{e\pi^2 a^6}{\gamma^2 \rightmoon^4}\ldots - \dfrac{\theta a^7\pi^2}{\gamma^2 \rightmoon^4} \\ \qquad\qquad\qquad + \dfrac{\pi^2 a^4}{\gamma^2 \rightmoon^2}\ldots \end{array}$$

Conferendo cum $x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx + a^3p \sqcap 0$ fiet: $\dfrac{a^3}{\gamma \rightmoon^2}\beta \sqcap \dfrac{l}{2}$. per Term. 2. et ponendo $\mu \sqcap 0$. fiet per Term. 3. $\dfrac{\lambda\pi a^3}{\gamma \rightmoon^2} \sqcap am - \dfrac{l^2}{4} - \dfrac{\pi^2 a^4}{\gamma^2 \rightmoon^2}$, vel quia $\pi \sqcap d - \lambda$, fiet $\dfrac{d\lambda - \lambda^2}{\gamma \rightmoon^2}a^3 \sqcap am - \dfrac{l^2}{4} - \dfrac{d^2 - 2d\lambda + \lambda^2}{\gamma^2 \rightmoon^2}a^4$, eoque valore in ejus in locum in Termino quarto

1+5 $\sqcap 0$ *(1)* posita jam $\dfrac{a^3\beta}{\gamma \rightmoon^2} \sqcap \xi$. et $\dfrac{a^3\mu}{\gamma \rightmoon^2} \sqcap \psi$. et $\dfrac{\pi a^3}{\gamma \rightmoon^2} \sqcap \varphi$ elidetur $\gamma \rightmoon^2$, et fiet aeqvatio

$$\begin{array}{llllll} x^4 + 2\xi x^3 & + \; 2\psi & x^2 & + 2\psi a & x & + \psi^2 a^2 \sqcap 0 \\ & + \; \xi^2 & \ldots & + \lambda\varphi\xi & \ldots & - \lambda\varphi\psi a \\ & + \; \varphi\lambda & \ldots & - e\varphi^2 & \ldots & - \theta a\varphi^2 \\ & + \; \dfrac{\pi\varphi a}{\gamma} & \ldots & & & \end{array}$$

Rursusque pro $\varphi\lambda$ ponendo δa, $\pi\varphi$ ponendo ϖa^2, pro $e\varphi^2$, ponendo ωa^2, pro $\theta a\varphi^2$, ponendo υa^3 fiet:

$$\begin{array}{llllll} x^4 + 2\xi x^3 & + \; 2\psi & x^2 & + 2\xi\psi a & x & + \psi^2 a^2 \sqcap 0 \\ & + \; \xi^2 & & + \; \delta a\xi & \ldots & + \delta a^2\psi \\ & + \; \delta a & & - \varpi a^2 & \ldots & - \upsilon a^3 \\ & + \; \dfrac{\varpi a^2}{\gamma} & & & & \end{array}$$

conferatur cum $x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx + a^3p$. fiet *(a)* $\upsilon \sqcap -p$ *(b)* ponendo $\psi \sqcap 0 \quad \xi \sqcap \dfrac{l}{2}$. et $\upsilon \sqcap -p$. et $\dfrac{l^2}{2} + \delta a + \varpi a \sqcap am$, sive $\delta a \sqcap am - \dfrac{l^2}{4} - \varpi a$ ergo $+\omega a^2 \sqcap -a^2n + am\dfrac{l}{4} - \dfrac{l^3}{8} - \varpi al$, vel $\dfrac{a\pi}{\gamma \rightmoon^2} \sqcap -a^2n + am\dfrac{l}{2} - \dfrac{l^3}{8} - \dfrac{l}{2}\;\dfrac{\pi^2 a^4}{\gamma^2 \rightmoon^2}$ explicando terminos omnes $\delta a \sqcap \varphi\lambda$, et $\varphi \sqcap \dfrac{\pi a^3}{\gamma \rightmoon^2}$, et $\pi \sqcap +d - \lambda$, fiet $\delta a \sqcap \dfrac{d\lambda - \lambda^2}{\gamma \rightmoon^2}$ eodem modo $\dfrac{\pi^2 a^4}{\gamma \rightmoon^2}$ (seu $\dfrac{\varpi a^2}{\gamma}$) valent $\dfrac{d^2 - 2d\lambda + \lambda^2}{\gamma \rightmoon^2}a^4$, ac deniqve $\omega a^2 \sqcap e$ *(2)* fiet *(3)* conferendo cum $x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx + a^3p \sqcap 0$ fie *(4)* conferendo *L* substituto fiet: $-a^2n\boxed{-\frac{a^2ml}{2\gamma}+\frac{l^3}{8\gamma}+\frac{d^2-2d\lambda+\lambda^2}{\gamma^3\,\rightmoon^2}a^5\frac{l}{2}} \sqcap \frac{d^2-2d\lambda+\lambda^2}{\gamma^2\,\rightmoon^4}a^6e$. Unde patet magnam nobis esse libertatem explicandi, ponendo enim $\frac{a^4}{\rightmoon^4} \sqcap 1$, cognita erit e. et quae supersunt incognitae duae, d et λ utique duabus etiam aequationibus facile definientur. Unde patet $\rightmoon$ potuisse omitti, eoque omisso, calculum resumemus.

Aequationes nimirum sunt duae, altera ad circulum, altera ad sectionem Conicam datam. Aequatio ad sectionem conicam datam est: $\mp\frac{a}{q}x^2+\overset{b}{(2a)}x, +ca \sqcap y^2+dy$. ponendo $s \sqcap 2a$, universalitatis causa: altera ad circulum: $-x^2+ex+\theta a \sqcap y^2\ +\lambda y$. Ergo ex aequatione ad Circulum $y^2 \sqcap -x^2+ex+\theta a-\lambda y$. eumque valorem ipsius y^2 inserendo in aequatione ad Conicam datam, fiet $y \sqcap \frac{\begin{array}{l}\mp\frac{a}{q}\,x^2+2a\;x\;\;+ca\\ +1\ldots-e\;\;\ldots-\theta a\end{array}}{+d-\lambda}$, sive $\frac{\frac{\gamma}{a}x^2+\beta x+\mu a}{\pi} \sqcap y$. et $y^2 \sqcap \frac{\frac{\gamma^2}{a^2}x^4+\frac{2\gamma\beta}{a}x^3+2\gamma\mu x^2, +\beta^2x^2+2\beta\mu ax+\mu^2a^2}{\pi^2}$. Ejusque valoris puri ipsius y ope eliminando y in aequatione ad circulum, fiet aequatio unius tantum incognitae, multiplicatis scilicet omnibus per π^2, et divisis per $\frac{\gamma^2}{a^2}$.

$$\begin{array}{llllll}
x^4+\frac{2\beta a}{\gamma}x^3 & \boxed{+\frac{2\mu a^2}{\gamma}}\,x^2 & & \boxed{+\frac{2a^3\beta\mu}{\gamma^2}}\,x & \boxed{+\frac{a^4}{\gamma^2}\mu^2} & \sqcap 0.\\
 & +\frac{a^2\beta^2}{\gamma^2}\;\ldots & & & & \\
 & +\frac{\pi a\lambda}{\gamma}\;\ldots & & +\frac{\pi a^2\lambda\beta}{\gamma^2}\;\ldots & \boxed{+\frac{\pi a^3\lambda\mu}{\gamma^2}} & \\
 & +\frac{\pi^2a^2}{\gamma^2}\;\ldots & & -\frac{\pi^2a^2e}{\gamma^2}\;\ldots & -\frac{\pi^2a^3}{\gamma^2}\theta &
\end{array}$$

7 $+\lambda$y *(1)* seu mutatis omnibus signis + x^2 − ex − θa $\sqcap$ *(2)* ergo *L*

Quae aequatio plane convenit cum superiore, si modo quae illic est quantitas $\frac{a^2}{☽^2}$, ponatur hic $\sqcap 1$.

Ponamus jam $\mu \sqcap 0$. ut calculum contrahamus, et ipsam e, definita β, pro cognita habeamus, est enim $\beta \sqcap \overset{s}{\boxed{2a}} - e$. Definitur autem β statim per termin. 2. Aequationes collatitiae exurgent tales, conferendo cum $x^4 + lx^3 + amx^2 + a^2nx + a^3p \sqcap 0$.

$\frac{\beta a}{\gamma} \sqcap \frac{l}{2}$ per Term. 2. ideoque $e \sqcap 2a \mp \frac{a}{q}♀ - \frac{l\gamma}{2a}$.

In Term. 3. pro $\frac{\beta^2 a^2}{\gamma^2}$, substituendo ejus valorem $\frac{l^2}{4}$ et pro π ponendo $d - \lambda$, fiet: $\frac{+ad\lambda - a\lambda^2}{\gamma} \sqcap -\frac{l^2}{4}\ \frac{-d^2 + 2d\lambda - \lambda^2}{\gamma^2}\ a^2 + am$, per Term. 3^{t}.

Et pro $\frac{\pi a\lambda}{\gamma}$, vel $\frac{ad\lambda - a\lambda^2}{\gamma}$ substituendo in Term. 4 ejus valorem, inventum per Term. 3^{t}. fiet $\frac{+d^2 - 2d\lambda + \lambda^2}{\gamma^2}a^2, \frown 2a \mp \frac{a}{q}♀ - \frac{l\gamma}{2a} \sqcap a^2n, + \frac{l^3a}{8\gamma} + \frac{d^2 - 2d\lambda + \lambda^2}{\gamma^2}\ \frac{l}{2}a^3 - \frac{a^2ml}{2\gamma}$.

Unde $\frac{d^2 - 2d\lambda + \lambda^2}{\gamma^2}a^2 \sqcap \dfrac{a^2n + \frac{l^3a}{8\gamma} - \frac{a^2ml}{2\gamma}}{2a \mp \frac{a}{q}♀ - \frac{l\gamma}{2a}, -\frac{la}{2\gamma}}$ sive $\frac{da - \lambda a}{\gamma} \sqcap \sqrt{\dfrac{a^2n + \frac{l^3a}{8\gamma} - \frac{a^2ml}{2\gamma}}{2a \mp \frac{a}{q}♀ - \frac{l\gamma}{2a}, -\frac{la}{2\gamma}}}$.

Unde $\lambda\sqrt{\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}} \sqcap -\frac{l^2}{4} - \frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots} + am$ sive $\lambda \sqcap \dfrac{-\frac{l^2}{4} + am}{\sqrt{\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}}} - \sqrt{\frac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}}$. Fiat $\frac{lt}{2\gamma} \sqcap a$. $-\frac{l\gamma}{2a} \sqcap -\frac{ls}{2\gamma}$,

---

12 *Randbemerkung:* Pro t. et s. utile in his lineis alias literas assumi, ne confundantur cum s inprimis paginae primae, et pag. post hanc sequentis.
NB. a, seu quantitas pro unitate assumta, in aliam datam quantitatem transmutatur, utiliter; quia ita ubique inferciri potest quantitas data, et ipsa transmutatio est facilis.

---

10 fiet: Leibniz unterlaufen bei der Substitution Versehen, welche die weitere Rechnung beeinträchtigen. Die fehlerhaften Werte werden in S. 406 Z. 1 f. übernommen.

et $\dfrac{\cdots\cdots}{\cdots\cdots}$ fiet: $\dfrac{\frac{altn}{2\gamma}+\frac{l^3a}{8\gamma}-\frac{a^2ml}{2\gamma}}{\frac{2lt}{2\gamma}\ddagger\frac{lt}{2\gamma q}\text{♀}-\frac{ls}{2\gamma}-\frac{la}{2\gamma}}$, divisisque omnibus per $\dfrac{l}{2\gamma}$, fiet: $\dfrac{atn+\frac{l^2a}{4}-a^2m}{2lt\ddagger\frac{t}{q}\text{♀}-s-a}$. Habita jam $\dfrac{\pi a}{\gamma}$ nullo negotio habetur $\dfrac{\pi^2a^2}{\gamma^2}a\theta\sqcap a^3p$, per t e r m i n u m u l t i m u m, sive $\theta\sqcap\dfrac{\gamma^2p}{\pi^2}$ sive $e\text{♃}+\text{♃}^2\sqcap\dfrac{\gamma^2pa}{\pi^2}$.

Atque ista quidem succedunt indubie, sed auguror tamen calculum fieri breviorem, si retenta y, ipsa x eliminetur. Nimirum $x^2\sqcap -y^2-\lambda y+ex+\theta a$ ex aequatione ad Circulum, substituatur ille valor in aequatione ad Conicam, fiet $\ddagger\frac{a}{q}y^2\ddagger\frac{a}{q}\lambda y\ddagger\frac{a}{q}ex\ddagger\frac{a}{q}\theta a+bx+ca\sqcap y^2+dy$ fietque: $x\sqcap\dfrac{\begin{array}{l}\frac{\gamma}{a}y^2\quad+d\,y\ddagger\frac{a^2}{q}\theta\\ \qquad\ddagger\frac{a}{q}\lambda\quad-ca\end{array}}{\ddagger\frac{a}{q}e+b}$, sive, ut iisdem quibus ante terminis utamur, ne novo calculo opus sit: $\dfrac{\frac{\gamma}{a}y^2+\beta y+\mu a}{\pi}\sqcap x$. erit eadem quae ante aequatio, nisi ubi illic λ, nunc substituatur e, et contra in secunda linea, (valore $e\,x$ qui ante fuit $\lambda\,y$) signa mutentur, et in ultima linea termini medii, nempe $-\dfrac{\pi^2a^2e}{\gamma^2}\ldots$ signum $-$ mutetur in $+$, caeteris manentibus: His positis in parabola semper dabitur π. Hinc extra parabolam licebit ponere tam $\mu\sqcap 0$ quam $e\sqcap 0$. habebiturque constructio omnium quae fingi possunt in hoc genere elegantissima. In parabola ope secundi termini statim dabitur d. In parabola non licebit ponere $e\sqcap 0$ ut sit quod ope tertii Termini determinetur; quodsi ergo nunc universalitatem quaerimus, relinquemus e ubique, tollemus μ ubique, (evanescent 4 quantitates). Inde ponemus $\ddagger\frac{a}{q}e+b\sqcap 2a$, quod in parabola statim constat.

11 dabitur π. *(1)* In omnibus ope secundi termini statim dabitur e. ac proinde licet ponere e $\sqcap$ 0. *(2)* Hinc *L* 12 qvam e $\sqcap$ 0 *erg. L* 13 elegantissima *(1)*; At in Parabola, qvia π datur, et e qvoqve, ideoqve relinqvenda est μ, ut sit qvod ope tertii termini determinetur *(2)*. In *L*

In caeteris ex termini 3[tii] aequatione, ubi π jam posita a, inventa e, et ejus valore cum hac $\mp\dfrac{a}{q}e + b \sqcap 2a$ retento, quod determinat b, effici potest.

Sed ut ista cum aequationibus superioribus s. ♀. ♂. ☿ explicantibus conciliari possint sic agendum, pro s pone $r \mp \dfrac{a}{q}$♀ fiet $b \sqcap r$. Ergo per praecedentia determinata habebitur r, ergo et ☿. Quare et ♂, ergo et ♀. Quae omnia optime succedunt: Imo restat in earum evolutione eadem semper difficultas; optimum ergo sic agere, ut universalis quidem sit calculi constructionisque regula, sed intelligatur in parabola $\pi \sqcap 2a$, in caeteris $e \sqcap 0$. Sed ne quis calculi error obrepat, placet aequationem istam, in qua scilicet λ pro e prioris ponenda, et signa quae dixi mutanda, quasi re integra exequi: Aequationis ad circulum $-x^2 + ex + \theta a \sqcap y^2 + \lambda y$, mutemus omnia signa, fiet $x^2 - ex - \theta a \sqcap -y^2 - \lambda y$. sive $x^2 - ex - \theta a + y^2 + \lambda y \sqcap 0$. Unde omissis stellulatis, quippe multiplicatis per μ.

$$\begin{array}{llllll}
y^4 + \dfrac{2\beta a}{\gamma}y^3 & + \quad * & + \quad * & + \quad * & & \\
& + \dfrac{a^2\beta^2}{\gamma^2} & y^2 & & & \\
& - \dfrac{\pi a e}{\gamma} \ldots & - \dfrac{\pi a^2 \beta e}{\gamma^2} & y & * & \sqcap 0 \\
& + \dfrac{\pi^2 a^2}{\gamma^2} \ldots & + \dfrac{\pi^2 a^2 \lambda}{\gamma^2} \ldots & - \dfrac{\pi^2 a^3 \theta}{\gamma^2} & &
\end{array}$$

Haec aequatio factitia ex intersectione Circuli et sectionis Conicae datae specie indefinitae, comparetur Aequationi datae, ope Circuli cujusdam et sectionis conicae datae specie indefinitae, construendae, nempe $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0$. Fiet $\dfrac{\beta a}{\gamma} \sqcap \dfrac{l}{2}$

---

16 *Randbemerkung:* NB. in aequationibus planis aut omnes sunt radices imaginariae, aut nulla.

2 f. potest *(1)* qvo facto ponendo ♂ $\sqcap$ 0. in aeqvationibus superioribus, b *(2)* sed *L* 8 istam | secundi calculi *gestr.* |, in *L* 10 f. *Nebenbetrachtung* $-$♂d $-$ ♂^{2} $\sqcap$ ca Ergo $\dfrac{\mathrm{d} + ♂}{\mathrm{a}} \sqcap \dfrac{\mathrm{c}}{♂}$ sive $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{a}} \sqcap \dfrac{\mathrm{c}}{♂} - \dfrac{♂}{\mathrm{a}} \sqcap \dfrac{\mathrm{ca} + ♂^2}{♂\mathrm{a}}$ *gestr. L* 16 datae specie *erg. L*

per Terminos 2$^{\text{dos}}$. Ergo $\frac{\pi ae}{\gamma} \sqcap +\frac{l^2}{4}+\frac{\pi^2a^2}{\gamma^2} - am$ per Terminos 3$^{\text{tios}}$. Et $\frac{\pi^2a^2}{\gamma^2}\lambda \sqcap +\frac{l^3a}{8\gamma}+\frac{\pi^2a^3l}{2\gamma^3}-\frac{a^2ml}{2\gamma}+a^2n$, per Terminos 4$^{\text{tos}}$, vel $\lambda \sqcap \frac{el}{2\pi}+\frac{n\gamma^2}{\pi^2}$ et $\frac{\pi\cancel{a^3}\theta}{\gamma^2} \sqcap \cancel{a^3}p$ per terminos ultimos.

Quoniam autem λ semper extat incognitaque est, quaeremus ejus valorem, qui est generaliter: $\lambda \sqcap \dfrac{+\frac{l^3a}{8}\gamma^2+\pi^2a^3l-\frac{a^2ml}{2}\gamma^2+a^2n\gamma^3}{\pi^2a^2\gamma}$. Jam ponendo $\pi \sqcap \frac{\psi\gamma}{a}$, et $\frac{l}{2} \sqcap \frac{\gamma\xi}{a}$ fiet $\cancel{\psi^2}\lambda \sqcap \dfrac{+\frac{l^2\xi}{4}+\psi^2\xi+am\xi+a^2n}{\psi^2}$. Brevius inventa quantitas $\frac{\pi ae}{\gamma}$, multiplicetur per $\frac{l}{2\gamma}$, producto addatur a^2n, aequabitur $\frac{\pi^2a^2}{\gamma^2}\lambda^2$ sive erit $\lambda \sqcap \frac{\cancel{\pi}\cancel{a}el\cancel{\gamma^2}}{2\pi^{\cancel{2}}a^{\cancel{2}}\cancel{\gamma^2}}+\frac{\cancel{a^2}n\gamma^2}{a^2\pi^2}$ sive $\lambda \sqcap \frac{el}{2\pi}+\frac{n\gamma^2}{\pi^2}$ per Terminos quartos. Terminorum tertiorum aequatio denique dabit $e \sqcap \dfrac{\frac{l^2}{4}-am}{\frac{\pi a}{\gamma}}+\frac{\pi a}{\gamma}$, per Terminos tertios. $\theta \sqcap -\frac{p\gamma^2}{\pi^2}$ per Terminos ultimos. Denique $\beta \sqcap \frac{l\gamma}{2a}$ per Terminos secundos. Sciendum autem alterutram e, vel π assumi posse diversimode, pro casibus diversis, et in Parabola π significare $2a$, in Hyperbola et Ellipsi e significare 0. seu esse nihilo aequale; imo hoc mox corrigetur. Unde patet memorabile sane inventum, ratio scilicet constructionum non minus facilis per Hyperbolam aut Ellipsin, quam per

5 $\lambda \sqcap \dfrac{+\frac{l^3a}{8}\gamma^2+\pi^2a^3l-\frac{a^2ml}{2}\gamma^2+a^2n\gamma^3}{\pi^2a^2\gamma}$ *(1)* | sive ponendo *nicht gestr.* | $a \sqcap \frac{\gamma\xi}{a}$, et $\pi \sqcap \frac{\psi\gamma}{a}$, *(a)* fiet $\frac{l^3\gamma^3\xi}{a}+\frac{\psi^2\gamma^2}{\cancel{a^2}} \frown \frac{\gamma\xi}{a} \frown \cancel{a^2} - \cancel{a}ml\frac{\gamma^2\xi}{\cancel{a}}+a^2n\gamma^3$ *(b)* fiet $\lambda \sqcap \frac{+l^3\xi}{8}+\pi^2\xi^3l-\frac{\xi^2al}{2}+a^2n$ $\psi^2\lambda \sqcap +\frac{l^3\xi}{8a}+\frac{\psi^2\xi l}{2a}-\frac{\cancel{a}\xi ml}{\cancel{a}}+a^2n$ *(2)* Jam *L*   8 aeqvatio *(1)* optime efficietur non tam calculo qvam linearum ductu *(2)* deniqve *L*   12 imo ... corrigetur *erg. L*

1 $\frac{\pi^2a^2}{\gamma^2}\lambda \sqcap$: s. o. Erl. zu S. 403 Z. 10.

Parabolam. Est autem $\beta \sqcap \mp\frac{a}{q}\lambda$. $\boxed{\text{Unde } d \sqcap \frac{l\gamma}{2a} \pm \frac{ael}{2\pi q} \pm \frac{an\gamma^2}{\pi q^2}.}$ Ergo $d \sqcap \frac{l\gamma}{2a} \pm \frac{a}{q}\lambda$, et quia μ seu $\pm\frac{a}{q}\theta - c \sqcap 0$, ideo erit $c \sqcap \mp\frac{ap\gamma^2}{q\pi^2}$. Denique $\pi \sqcap \mp\frac{a}{q}e + b$, quarum alterutra arbitraria est π, vel e.

Tantum videndum restat quomodo illa c o m p e r t i s a d s e c t i o n e m conicam locis applicentur, erat locus assumtus $\mp\frac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. Esto locus compertus $2az \mp\frac{a}{q}z^2 \sqcap v^2$, quem explicando fiet b. determinata, exitu caeteroquin non obstructo. Ergo commodissimum est generaliter ponere $s \sqcap 2a$. Habetur ergo ☿ ergo et ♂, ergo et ♀. Ergo et b. Ergo et π et e. Ergo omnia. Nimirum $e \sqcap \mp\frac{q}{a}\pi \pm b$, Hinc erit:

$$\begin{array}{l} \mp\ \dfrac{a}{\gamma}\ \pi^2 \pm\dfrac{ab}{\gamma}\pi \sqcap \dfrac{l^2}{4} - am \\ -\ \dfrac{a^2}{\gamma^2}\ .. \end{array}$$

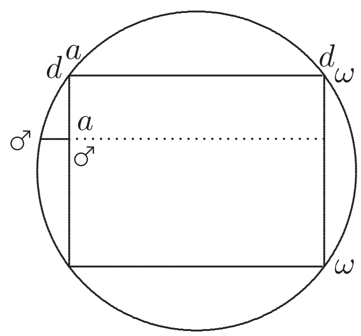
sive $\pi^2 \dfrac{\pm b\gamma}{\mp\gamma - \dfrac{a}{\gamma}}\pi \sqcap \dfrac{\dfrac{l^2}{4} - am}{\mp\dfrac{a}{\gamma} - \dfrac{a^2}{\gamma^2}}$, vel $\dfrac{\dfrac{l^2}{4}\gamma^2 - am\gamma^2}{\mp\dfrac{a}{\gamma} - \dfrac{a^2}{\gamma^2}}$, ponendoque $a \sqcap \dfrac{\gamma\xi}{a}$ fiet: $\dfrac{\dfrac{l^2}{4} - am}{\dfrac{\xi}{a} - \dfrac{\xi^2}{a^2}}$,

---

9 f. *Nebenbetrachtung:* $\frac{\gamma}{a} \sqcap 1 \mp \frac{a}{q}$, seu $\frac{q \mp a}{q}$.

1 Ergo ... $\pm\frac{a}{q}\lambda$ *erg. L* 5 f. +dy | Esto locus compertus *gestr. u. wieder gültig gemacht* | 2az *L* 6 f. obstructo *(1)* sed commodissimum fortasse non e ponere $\sqcap$ 0, sed ♀ fiet b $\sqcap$ s. ca $\sqcap$ −d♂ + ♂^{2}, *(a)* sive ♂ $\sqcap$ 0 *(b)* et ☿ $\sqcap$ d − 2♂. $\mp\frac{a^2p\gamma^2}{q\pi^2} \sqcap$ −d♂ + ♂^{2}. sed qvia video π opus esse ad ♂ et ☿ ergo et ad b, vel s, fieret circulus *dazu nicht gestr.* $\mu\omega\rho$ *(2)*. Ergo *L*

seu $\dfrac{\frac{l^2a^2}{4}-a^3m}{\xi a-\xi^2}$, vel etiam: $\dfrac{\frac{l^2}{4}\gamma-am\gamma}{ǂa-\xi}$, sive π^2 ‡ $\dfrac{b\gamma\pi}{\gamma-a}$ ⊓ $\dfrac{\frac{l^2}{4}\cancel{\gamma^2}-am\cancel{\gamma^2}}{ǂ\frac{\gamma-a,\frown a}{\gamma^2}}$. π autem sic invenietur geometrice, a potentia ipsius $\frac{l}{2}$ auferatur rectangulum am, residuum esto φ^2. Recta ǂ$\gamma-a$ vocetur ψ. Fiat quadratum quod sit ad γ^2, ut φ^2 est ad ψa, a quo auferatur aliud, quod sit ad b^2 in duplicata ratione γ ad ψ, lateri residui addatur per signum ǂ rectarum ψ. β. γ quarta proportionalis et fiat alia quae sit ad ǂq, ut ipsa est ad a. Unde si auferatur ǂb, [*Satz bricht ab*] Ipsarum $2\pi, l, e$ quartae proportionali addatur recta quae sit ad n, in duplicata ratione γ ad π, et fiet λ. Ipsa ǂλ multiplicetur per rationem lateris recti sectionis Conicae datae ad transversum et productum auferatur a recta quae sit ad $\frac{l}{2}$ ut γ ad a. et habebitur d. At θ est ad $-p$, in duplicata ratione γ ad π. et c ad θ, ut ǂ a ad q.



[*Fig. 5*]

Ut jam ♀. s. ♂. ☿ inveniamus, sic agendum est tandem; b sumenda est diversimode, nempe in Parabola ⊓ $2a$, in Hyperbola et Ellipsi ⊓ 0. In parabola, autem ♀ poterit poni

2 geometrice, *(1)* fiat qvadratum qvod sit ad potentiam ipsius γ, ut est differentia inter *(a)* qvadrati *(b)* potentiam ipsius $\frac{\mathrm{l}}{2}$ et qvadratum aeqvale rectangulo am; ad rectangulum *(2)* a potentia *L*   2 f. φ^2 *(1)*, jam fiat ut *(a)* φ^2 *(b)* rectangulum *(2)* Recta *L*   10–12 ad q. *(1)* Ablata ☿ aliunde nota (ob sumtam s ⊓ 2a) a d restabit ♂ *(2)* Ut *L*

6 si auferatur ǂb,: Danach folgt ein Einfügungszeichen #, der zugehörige Text fehlt jedoch.

$\sqcap$ 0, ergo semper s ♀ $\mp \dfrac{a}{q}$♀^{2} erit $\sqcap$ 0, ergo fiet universaliter ♂d + ♂^{2} $\sqcap$ ca, sive ponendo $c \sqcap a + \omega$, fiet ♂d + ♂^{2} $\sqcap$ $a^2 + \omega a$, tantum circa rectangulum ωd describatur circulus, sumtaque a, habebitur ♂ ut vides in figura.

Si tantum signorum causa notetur, in talibus efficiendum ut certo constet duo quadrata esse signorum oppositorum; (nam etsi ♂ esset falsa, tamen quadratum ejus est quantitas vera) ideo a cognita hic utiliter adhibetur: Inde duae ω et d, vel eorundem sunt signorum, nempe vel +, et tunc relinquantur, vel −, tunc omnia signa mutentur; sin diversorum, efficiendum est semper ut alicubi quadratum est −, latus sit −. Haec ideo noto, quia generalia sunt. Pro abscissa sumenda est ea ex duabus quae pro incognitis sumantur, quae diversa habet signa lateris et quadrati. Sed quid si ea signa utrobique sint eadem, tunc nullam video rationem sic applicandi ad circulum, id ergo explicatione praeveniendum est. Et adjiciendum, ut signa vera quantitatibus a, et ω opposita reddantur.

Notabile est, quod ipsae lineae praeparatoriae, v. g. ♂ plures uno possunt habere valores, unde plures uno circuli describendi, ut omnes habeantur radices aequationis; nisi forte ex omnibus tandem prodit semper Circulus idem. Notandum etiam constructionem qua hic usus sum problematum planorum videri unam tantum exhibere radicem cum tamen sint plures. Imo sunt etiam plures, producitur enim −♂d + ♂^{2}, non solum ex ♂ in $-d$ + ♂, sed etiam ex −♂ in d − ♂ et quia ♂ $\sqcap \sqrt{-a^2 + \omega a + \dfrac{d^2}{4}} + \dfrac{d}{2}$ vel ♂ $\sqcap$ $+\dfrac{d}{2} - \sqrt{\ldots\ldots\ldots\ldots}$. Ex data ♂ statim habetur ☿, et hinc si vis s. extra Parabolam, et porro ex s, ♀. In parabola s jam tum habetur et ♀ est nulla. Eodem modo quo ♂ invenitur et ♃ et hinc ג. Nota potest etiam constructionibus Cartesii *Geom.* lib. 1. inveniri ♂ et ♃, notando tantum, quod quando signa quadratorum eaedem, recta ducitur in centrum; sin minus ducatur parallela radio. Residuum erit e.

---

1 *Am Rande:* $b \sqcap r \sqcap s \pm \dfrac{a}{q}$♀

8 semper *(1)* | ut *nicht gestr.* | + sit in loco, ubi *(2)* ut *L*

---

3 figura: Die Konstruktion in Fig. 5 ergibt ♂$(d +$ ♂$) = a(\omega - a)$. 22 constructionibus: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–16.

39. DE AEQUATIONE SOLIDA DATA CONSTRUENDA
[Oktober – Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 161–162. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 852 B

Datierungsgründe: s. N. 38.

Aequatio solida data $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0$. construenda ope sectionis Conicae datae et Circuli. Sit sectonis Conicae latus rectum, $2\,a$, transversum, $2\,q$. Aequatio factitia ad conicam datam specie indefinitam: $\text{ǂ}\ \dfrac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. ad Circulum quaesitum: $-x^2 + ex + \theta a \sqcap y^2 + \lambda y$. Ergo per Aeq. ad Circulum erit: $x^2 \sqcap + ex + \theta a - y^2 - \lambda y$. Substituatur hic valor ipsius x^2, in aequatione ad Conicam, fiet : $\begin{array}{l} \text{ǂ}\ \dfrac{a}{q}ex \\ +b \end{array} \text{ǂ}\ \dfrac{a^2}{q}\theta\ \text{‡}\ \dfrac{a}{q}y^2\ \text{‡}\ \dfrac{a}{q}\lambda y \sqcap y^2 + dy - ca$

$$\text{Ergo } x \sqcap \frac{\begin{array}{l} +1, y^2 + \ d\ \ y\ \text{‡}\ \dfrac{a^2}{q}\theta \\ \text{ǂ}\dfrac{a}{q}\ ..\ \ \text{ǂ}\ \dfrac{a}{q}\lambda\ \ - ca \end{array}}{\text{ǂ}\dfrac{a}{q}e + b} \text{ sive per compendium } x \sqcap \frac{\dfrac{\gamma}{a}y^2 + \beta y}{\pi}.\ \text{ponendo } \text{‡}\ \frac{a^2}{q}\theta$$

14–411,1 *Nebenrechnungen:* $\dfrac{\gamma}{a} \sqcap 1\ \text{ǂ}\ \dfrac{a}{q}$. Ergo $\gamma \sqcap a\ \text{ǂ}\ \dfrac{a^2}{q}$ seu $\gamma \sqcap \dfrac{aq\ \text{ǂ}\ a^2}{q}$. $b \sqcap 2a$. $c \sqcap \text{‡}\dfrac{a}{q}\theta$. $e \sqcap \dfrac{\pi - b}{\text{ǂ}\dfrac{a}{q}}$. $d \sqcap \underset{\displaystyle \dfrac{l\gamma}{2a}}{\underset{/\backslash}{\beta a}}\ \text{‡}\ \dfrac{a}{q}\lambda$.

---

14 ponendo: Leibniz vereinfacht den aus N. 38 übernommenen Ansatz, indem er die konstanten Terme im Zähler des Bruches eliminiert.

$-ca \sqcap 0$. Erit $x^2 \sqcap \dfrac{\dfrac{\gamma^2}{a^2}y^4 + \dfrac{2\gamma\beta}{a}y^3 + \beta^2 y^2}{\pi^2}$. Quibus valoribus puris ipsarum x et x^2, in aequatione ad Circulum substitutis, fiet:

$$\left.\begin{array}{l} y^4 + \dfrac{2a}{\gamma}\beta y^3 + \dfrac{a^2}{\gamma^2}\beta^2 y^2 - \dfrac{ea^2\pi\beta}{\gamma^2}y - \dfrac{\theta a^3\pi^2}{\gamma^2} \\ \qquad\qquad - \dfrac{e\pi a}{\gamma} .. + \dfrac{\pi^2 a^2\lambda}{\gamma^2} .. \\ \qquad\qquad + \dfrac{\pi^2 a^2}{\gamma^2} .. \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Quam aequationem factitiam incognitae unius, conferendo cum data, fiet:

Per Term. 2. $\dfrac{a}{\gamma}\beta \sqcap \dfrac{l}{2}$. Unde $\beta \sqcap \dfrac{l\gamma}{2a}$.

Per Term. 3. $\dfrac{e\pi a}{\gamma} \sqcap \dfrac{l^2}{4} + \dfrac{\pi^2 a^2}{\gamma^2} - am$. Est autem $e \sqcap \dfrac{\pi - b}{\dagger\dfrac{a}{q}}$ seu $e \sqcap \dagger q\dfrac{\pi}{a} \ddagger 2q$, seu $\sqcap \dagger q, \frown \dfrac{\pi - 2a}{a}$. Unde $\dfrac{e\pi a}{\gamma} \sqcap \dfrac{\pi^2 q - \pi bq}{\ddagger\gamma}$ fietque $\begin{array}{l}\ddagger \dfrac{q}{\gamma}\pi^2 \dagger \dfrac{bq}{\gamma}\pi \sqcap \dfrac{l^2}{4} - am. \\ - \dfrac{a^2}{\gamma^2} .. \end{array}$

9–412,2 *Nebenrechnungen:* $\ddagger\dfrac{q}{\gamma} - \dfrac{a^2}{\gamma^2} \sqcap \dfrac{\ddagger q\gamma - a^2}{\gamma^2}$ sive $\dfrac{\ddagger\dfrac{a^2 q}{a} - 2a^2}{\gamma^2}$. Unde $\dfrac{a^2\pi^2}{\gamma^2}$ $\dfrac{\dagger\dfrac{2qa^2}{\gamma}\pi}{\ddagger q - 2a} \sqcap \dfrac{\dfrac{l^2}{4}a - a^2 m}{\ddagger q - 2a}$.

9–412,1 $-\mathrm{am}$ *(1)* Unde $\dagger\dfrac{a}{q}\pi^2\dfrac{\cancel{\dagger}\dfrac{a}{\cancel{q}} \frown \cancel{\dagger}\, b\cancel{q}}{\ddagger\, q - \dfrac{a^2}{\gamma}}\pi \sqcap \dfrac{l^2 - am}{\dfrac{\ddagger\dfrac{q}{\gamma} - \dfrac{a^2}{\gamma^2}}{\dagger\dfrac{a}{q}}}$ sive $\sqcap \dfrac{l^2 - am}{\dfrac{-q^2}{\gamma a} \ddagger \dfrac{aq}{\gamma^2}} \sqcap \dfrac{-\gamma^{\cancel{2}}q^2 \ddagger \cancel{\gamma}a^2 q}{a\gamma^{\cancel{3}2}}$ *(2)* per L

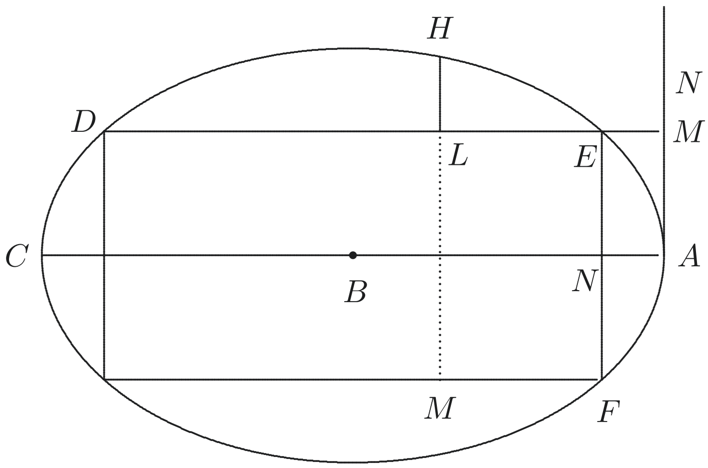
---

9 $\sqcap \dfrac{\pi^2 q - \pi bq}{\ddagger\gamma}$: Im Nenner müsste $\dagger\,\gamma$ stehen. Der Fehler geht in die folgende Gleichung ein.

Per T e r m. 4. $\lambda \sqcap \dfrac{le}{2\pi} + \dfrac{n\gamma^2}{\pi^2}$. sive $\lambda \sqcap \dfrac{l\pi^{\cancel{2}}e + 2n\cancel{\pi}\gamma^2}{[2]\pi^{\cancel{3}\,2}}$. Est autem $\dfrac{e}{\pi} \sqcap \dfrac{\pi - b}{\ddagger\dfrac{a}{q}\pi} \sqcap \dfrac{\pi - 2a}{\ddagger\dfrac{a}{q}\pi}$.

Per T e r m. ult. $\theta \sqcap -p\dfrac{\gamma^2}{\pi^2}$.

Jam ostendamus quomodo Aequatio $\ddagger\dfrac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. revocetur ad sectionem Conicam datam.



[*Fig. 1*]

Inscriptum sit sectioni Conicae rectang. illum concentricum, DEF. centro B. axe AC, cui parallela DE. Constat esse rectang. DLE ad rectang. MHL, ut latus rectum $2a$, ad transversum $2q$. si scilicet puncto in curva sumto H, inde demittatur perpendicularis in DE, nempe HL. Appellemus $AN \sqcap \odot$, erit $DE \sqcap 2q \ddagger 2\odot$. sEL appellemus v erit $DLE \sqcap$

8 rectang. | DEL *ändert Hrsg.* | ad L

---

8 Constat: Es gilt umgekehrt $DLE : MHL = q : a$. Das Versehen wirkt sich nicht weiter aus.

$2q \pm 2\odot \pm v, \frown v, \sqcap 2qv \pm 2\odot v \pm v^2$. At $ML \sqcap EF \sqcap \mercury$. Ergo $MHL \sqcap \mercury + z, \frown z \sqcap \mercury z + z^2$. Ergo $\dfrac{2qv \pm 2\odot v \pm v^2}{\mercury z + z^2} \sqcap \dfrac{q}{a}$ sive $\dfrac{1}{\frac{a}{q}}$. Ergo $2av \pm \dfrac{2\odot a}{q}v \pm \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap \mercury z + z^2$. Ergo ponendo $2a \pm \dfrac{2a\odot}{q} \sqcap s$. fiet $sv \pm \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap \mercury z + z^2$, et explicando v, et z. ponendo $v \sqcap x + \venus$ et $z \sqcap y + \mars$. fiet:

$$\begin{array}{llll}
\pm \frac{a}{q}x^2 & \pm \frac{2a\venus}{q}\, x & \pm \frac{a}{q}\venus^2 \sqcap y^2 & + 2\mars\, y \\
& + \; s \;\; .. & + \; s\venus & + \; \mercury \;\; .. \\
& & - \; \mars^2 & \\
& & - \; \mercury\mars &
\end{array}$$

Quam cum assumta comparando, erunt aequationes collatitiae sequentes:

(1) $b \sqcap \pm\dfrac{2a}{q}\venus + s$

(2) $ca \sqcap \pm\dfrac{a}{q}\venus^2 + s\venus - \mars^2 - \mercury\mars$

(3) $+d \sqcap 2\mars + \mercury$

(4) $s \sqcap 2a \pm \dfrac{2a}{q}\odot$

(5) $\dfrac{\mercury^2}{4} \sqcap 2a\odot \pm \dfrac{a}{q}\odot^2$

Per Aeq. 1. et 4, erit $b \sqcap \pm\dfrac{2a}{q}\venus + 2a \pm \dfrac{2a}{q}\odot$. Posita jam $b \sqcap 2a$ fiet $\venus \sqcap -\odot$. Ergo $s \sqcap 2a \mp \dfrac{2a}{q}\venus$. $\dfrac{\mercury^2}{4} \sqcap -2a\venus \pm \dfrac{a}{q}\venus^2$. $\mercury\mars \sqcap \dfrac{d - \mercury}{2}, \frown \mercury \sqcap \dfrac{d\mercury - \mercury^2}{2}$. Ergo $-\mercury\mars \sqcap \dfrac{-d\mercury + \mercury^2}{2}$.

---

2 f. *Nebenrechnungen:* $\dfrac{2q \pm 2\odot \sqcap DE}{2a \pm \frac{2a}{q}\odot \sqcap s}$. $s \sqcap 2q \pm 2\odot, \frown \dfrac{a}{q}$. Ergo $\dfrac{2q \pm 2\odot}{2q \pm 2\odot, \frown \frac{a}{q}} \sqcap \dfrac{DE}{s} \sqcap \dfrac{q}{a}$.

$-\mars^2 \sqcap \frac{-d^2+2d\mercury-\mercury^2}{4}$. Ergo $ca \sqcap \boxed{\mp\frac{a}{q}\venus^2} + 2a\venus \pm \frac{2a}{q}\venus^2\,\frac{-d^2\boxed{+2d\mercury}-\mercury^2}{4}\;\frac{\boxed{-d\mercury}+\mercury^2}{2}$.

Ergo $\begin{array}{c}ca\\+d^2\end{array} \sqcap 2a\venus \pm \frac{a}{q}\venus^2 + \frac{\mercury^2}{4}$. Ergo $\frac{\left\{\begin{array}{l}ca\\+d^2\end{array}\right.}{2} \sqcap 2a\venus \mp \frac{a}{q}\venus^2$ vel $\sqcap \frac{\mercury^2}{4}$. Quod profecto elegans est theorema. $s \sqcap \frac{\mercury^2}{4\venus}$.

Aequatio factitia ad Circulum facillime etiam exhibetur: $x^2+y^2+ex+\theta a-\lambda y \sqcap 0$. conferenda cum $\omega^2+x^2-\varpi\omega+\xi x \sqcap 0$. Explicetur $\omega \sqcap y+\leftmoon$, fiet:

$$\begin{array}{llll} y^2 + 2\leftmoon y & + & \leftmoon^2 & + x^2 + \xi x \sqcap 0. \\ -\varpi & .. & -\varpi\leftmoon & \end{array}$$

Conferendo fiet $e \sqcap \xi$. $\lambda \sqcap \varpi - 2\leftmoon$. sive $\varpi \sqcap \lambda + 2\leftmoon$. Unde $-\varpi\leftmoon \sqcap -\lambda\leftmoon - 2\leftmoon^2$. Ergo $\theta a \sqcap -\lambda\leftmoon - \leftmoon^2$. Facile ergo habetur $\leftmoon$ ergo et ϖ.

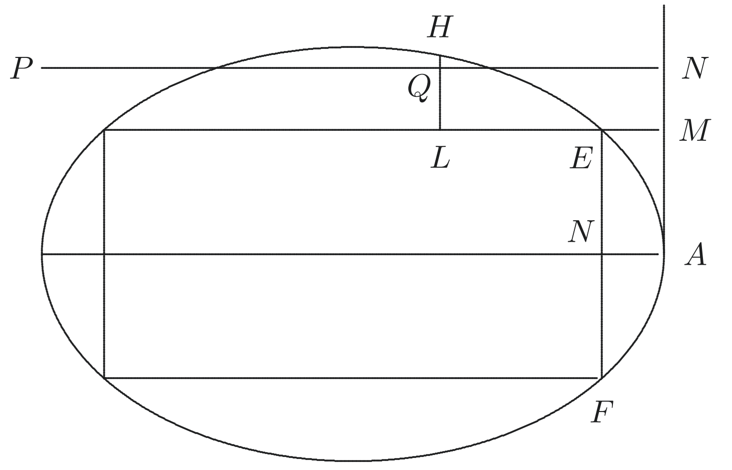
Habemus ergo formulam, construendi problema solidum quodlibet sine reductione, per conicam specie indefinitam, datam.

Rectangulum Sectioni Conicae concentricum inscriptum intelligatur, cujus unum latus axi perpendiculare $\mercury$ seu EF ita ut $\mercury^2$ sit $2ca+2d^2$. Unde alterum DE statim ipso linearum ductu definitur. Sumatur $EM \sqcap AN$. id est producatur DE donec occurrat tangenti verticis in M. Ut recta ML, sive v, sit $\sqcap EL+AN$ seu $x+\odot$ seu $x-\venus$. Brevius ergo et rectius sic loquemur, ex vertice A, in tangente ejus sumatur recta $AM \sqcap \frac{\venus}{2}$, porro

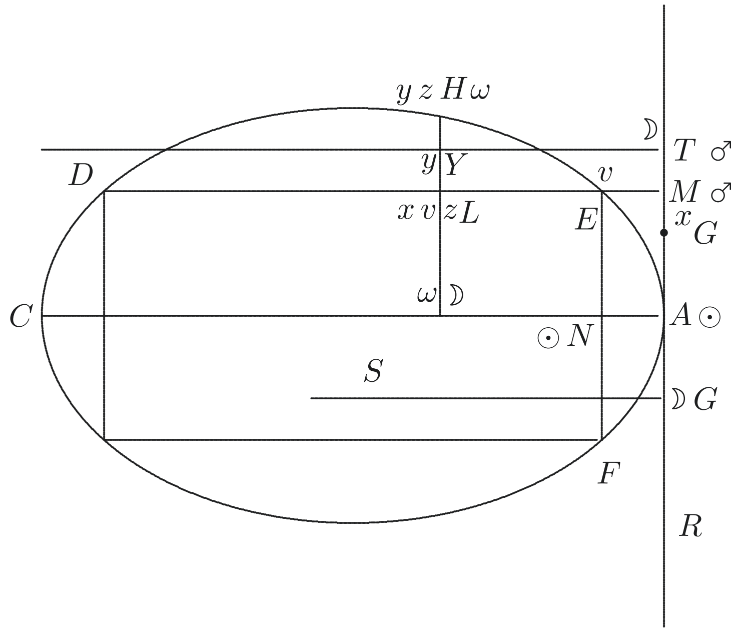
1 $\frac{-\mathrm{d}^2+2\mathrm{d}\mercury-\mercury^2}{4}$ *(1)* Ergo ca $\sqcap \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\cancel{\venus^2} + \cancel{2\mathrm{a}\venus} \pm \frac{2\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\cancel{\venus^2}$, $\frac{-\mathrm{d}^2+2\mathrm{d}\mercury\boxed{-\mercury^2}}{4} - \frac{\mathrm{d}\mercury+\mercury^2}{2}$, fiet $4\mathrm{d}^2 \sqcap \frac{\mercury^2}{2}$ $-\cancel{2\mathrm{a}\venus} \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\cancel{\venus^2}$ Ergo $\frac{\left\{\begin{array}{l}\mathrm{ca}\\+\mathrm{d}^2\end{array}\right.}{2} \sqcap \frac{\mercury^2}{4}$ *(2)* Ergo *L* 11 per *(1)* lineam *(2)* conicam *L* 13 axi *(1)* parallelum $2\mathrm{q} \mp 2\odot$, alterum *(2)* perpendiculare *L*

---

2 Ergo $\begin{array}{c}ca\\+d^2\end{array}$: Die Folgerung ist nicht richtig und beeinträchtigt mit weiteren Fehlern die folgenden Überlegungen. 4 Aequatio: Leibniz setzt die Kreisgleichung nun anders an als zu Beginn des Textes S. 410 Z. 9.



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

2 *Fig. 3*: Leibniz hat wie in Fig. 2 in der Figur und im zugehörigen Text für den Punkt T zunächst die Bezeichnung N verwendet und anschließend unvollständig korrigiert.

♂ est $\sqcap$ ☿ $-d$. Ergo ultra M sursus sumatur $MN \sqcap$ ♂ $\sqcap$ ☿ $-d$. Unde ab initio dici poterat debere ex MA sumi versus L, in tangente verticis, rectam $\frac{3☿}{2} - d$. seu $3\frac{\sqrt{2ca+2d^2}}{2} - d \sqcap AN$. Ducatur indefinita NP, tangenti verticis perpendicularis in qua ex puncto L curvae demissa LQ. perpendicularis satisfacit aequationi ad Conicam datam.

Erratum nonnihil est, resumatur novissima: $EL \sqcap v$, $HL \sqcap z$. Jam $v \sqcap x +$ ♀. vel $x -$ ⊙. Ergo $x \sqcap v +$ ⊙. Producatur ergo DE in partes A, in M ita ut EM, sit $\sqcap AN$, id est ducta tangente verticis Conicae indefinita producatur DE dum ei occurrat in M: Erit $ML \sqcap x$. Porro $z \sqcap y+$♂. et ♂ $\sqcap$ ☿$-d$. sumenda ex M versus H. si d est minor ☿, et versus A, si major. Verbo dici poterat statim ab initio in tangente verticis AT, $\frac{3☿}{2} - d$, ex T versus H. ducatur indefinita Y ipsi Axi sectionis parallela. Ex qua demissa ex puncto quodam sectionis H, perpendicularis HY erit y, posita TY esse x. Jam quia $\omega \sqcap y +$ ☽ ergo ex T versus A, sumenda est $TG \sqcap$ ☽. Ex G in partes F sumatur porro recta ♌ nempe GR. Per eadem G ducatur indefinita axi parallela, in qua sumatur versus C, recta $GS \sqcap e$. Per tria puncta R. G. S. transiens circulus secabit curvam in punctis, ex quibus demissae in TY perpendiculares erunt y, seu radices aequationis propositae, verae quidem, si punctum intersectionis est a parte E, falsae si a parte F.

Nunc ut ista problemati cuidam applicemus quale est minimam ex puncto dato ad Conicam datam ibi vocando $\dfrac{d(^{+}\ddagger)y(^{+}\ddagger) \ddagger \frac{yq}{a}}{(^{+}\ddagger) \ddagger q(^{+}\dagger)f} \sqcap \dfrac{y}{\frac{a}{q}\sqrt{\frac{aq^2 \ddagger y^2q}{a}}}$ sive

1 f. poterat *(1)* sumi *nicht gestr.* *(2)* debere *L* 9 f. verticis, | *(1)* AN *(2)* AT *erg.* | $\frac{3☿}{2} - \mathrm{d}$, *(a)* versus H, $\sqcap$ AN. Ex N *(b)* sumatur *nicht gestr.* *(c)* ex *(aa)* ⟨N⟩ *(bb)* T *L* 11 ex *(1)* centro sectionis *(2)* puncto *L* 12 posita | NY *ändert Hrsg.* | esse *L* 12 ex *(1)* N *(2)* T versus *L* 12 est *(1)* ☽ *(2)* NG *(3)* TG $\sqcap$ ☽ *L* 15 in | ND *ändert Hrsg.* | perpendiculares *L* 18 f. qvale … datam *erg.* *L*

18 Nunc: Die folgende Rechnung wird durch mehrere Versehen beeinträchtigt.

$\dfrac{a^2d^2 + \dfrac{2a\mu d}{\cancel{a}}y + \dfrac{\mu^2}{\cancel{a^2}}y^2}{\psi^2 a^2} \sqcap \dfrac{y^2 q}{a^2 q \ddagger y^2 a}$. Et multiplicando per Crucem:

$$\begin{array}{llllll} y^4 \ddagger \dfrac{2da}{\mu}\, y^3 & \ddagger\dfrac{a^2d^2}{\mu^2}\, y^2 & +\dfrac{2a^2qd}{\mu}\, y & +\dfrac{a^3d^2q}{\mu^2} \sqcap 0 \\ & +aq \quad .. & & \\ & -\dfrac{\psi^2 aq}{\mu^2} \quad .. & & \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} l & am & a^2n & a^3p \\ & /\backslash & /\backslash & /\backslash \\ & \ddagger\dfrac{l^2}{4} & \ddagger aql & +\dfrac{l^2aq}{4} \\ & +aq & & \\ & -\dfrac{qa\psi^2}{\mu^2} & & \end{array}$$

$\dfrac{l^2}{4} - am \sqcap \dfrac{l^2}{4} \ddagger \dfrac{l^2}{4} + aq + \dfrac{\psi^2 aq}{\mu^2}$ seu $\dfrac{\varphi l^2}{4a}$. (φ in Hyp. $\sqcap 0$.) Jam aequatio qua π inveniri debet talis est:

---

1 *Nebenrechnungen:* $1 \ddagger \dfrac{a}{q} \sqcap \dfrac{\gamma}{a} \sqcap \dfrac{q \ddagger a}{a}$. $1 \ddagger \dfrac{q}{a} \sqcap \dfrac{a \ddagger q}{a} \sqcap \dfrac{\mu}{a}$

Nebenbetrachtung: $\beta \sqcap {}^{+}\!\ddagger$. $\psi \sqcap \beta - f$. $\varphi \sqcap \ddagger\dfrac{a}{q}\beta - \beta$. $\gamma \sqcap a \ddagger \dfrac{a^2}{q}$. $\mu \sqcap a \ddagger q$. Male, $\psi \sqcap ({}^{+}\!\ddagger) \ddagger q({}^{+}\!\dagger) f$. Ergo error fuit in constructione, si in ea φ explicata, sin minus error in ea erit nullus.

13 $\beta \sqcap {}^{+}\!\ddagger$ | a *gestr.* | $\psi \sqcap \beta - \mathrm{f}$ *L*

---

13 $\beta \sqcap$: vgl. N. 14 S. 159 Z. 2–6.

$$\frac{a^2\pi^2}{\gamma^2} \sqcap \frac{a\pi}{\gamma} \frown \frac{\text{ǂ}2qa}{\text{ǂ}q + a \sqcap \mu} \quad \boxed{-\frac{\varphi l^2}{4a\mu}} \quad -\frac{a^2q}{\mu} + \frac{a^2q\psi^2}{\mu\mu^2}$$
$$-\frac{\varphi a^2 d^2 \cancel{a}}{4\mu^2 \cancel{a}\mu}$$

Sunto hae lineae quarum una sit ad $-\varphi$ in duplicata ratione d ad 2μ, altera ad q in duplicata ratione ψ ad μ, tertia sit $-q$. Inter summam earum et rectam $\frac{a^2}{\mu}$ media proportionalis $\aleph$ tangat extremitate sua Circulum cujus radius $\text{ǂ}\frac{2qa}{\mu}$. Ex altero extremo ducatur recta transiens per centrum circuli, si valor summae linearum est affirmativus, et normalis ad tangentem, si negativus seu nihilo minor. Portio ejus inter punctum unde educitur et circuli circumferentiam intercepta, est quaesita $\frac{a\pi}{\gamma} \sqcap \xi$. Habetur ergo et π, cum habeantur a, et γ. Auferatur ab ea $2a$. Habebitur $\text{ǂ}\frac{a}{q}e$. Habetur ergo e. Fiat recta quae sit ad e, ut $\text{ǂ}\frac{l}{\mu}$ ad π. Et alia quae sit ad n. in duplicata ratione γ ad π. Harum summa dabit λ. Subtrahendo $\text{ǂ}\frac{a}{q}\lambda$ ab $\frac{l\gamma}{2a}$. habebitur d. (Cumque sit $\theta \sqcap -\frac{l^2q\gamma^2}{a^2\pi^2}$ seu $\theta\xi^2 \sqcap l^2q$ fiat θ ad q, in duplicata ratione l ad ξ et c ad a, ut $\ddagger\ \theta$ ad q. seu) Fiant θ ad q, et $\ddagger\ c$ ad a. in duplicata ratione l ad ξ. Ex inventis θa, et λ inveniatur ☽. prorsus ut ex $\aleph$ et $\text{ǂ}\frac{2qa}{\mu}$ inventa est ξ. cujus ☽ duplum additum ad λ facit ♌. Recta quae possit $ca + \frac{d^2}{2}$ duplicata appelletur ☿. His lineis praeparatoriis inventis caetera statim absolvuntur ut dixi.

Nota cum Minima ducitur ex puncto extra Sectionem dato aequatio proposita duas habet radices aequales, seu necesse est Circulum cujus intersectione cum Conica solvitur

3 lineae *(1)* $\frac{\varphi \mathrm{d}^2}{4\mu^2} - \mathrm{a} + \frac{\mathrm{q}\psi^2}{\mu^2}$ *(2)* qvarum *L* 3 2μ, *(1)* | altera *nicht gestr.* | sit $-$a, tertia sit *(2)* altera *L* 4 tertia sit *(1)* $-$q *(2)* $-$a *L ändert Hrsg.* 5 proportionalis *(1)* applicetur Circulo cujus radius | ǂ *erg.* | $\frac{2\mathrm{qa}}{\mu}$ *(a)* qvem uno *(b)* ita ut eum tangat extremo *(2)* $\aleph$ tangat *L*

problema tangere sectionem Conicam datam. Igitur sumta aequatio duarum radicum aequalium generalis: $x^2+2\varepsilon x+\varepsilon^2 \sqcap 0$ ducatur in aliam $x^2+\aleph x+a\beth \sqcap 0$, fiet

$$\left.\begin{array}{llll} x^4+\aleph\ x^3 & +\ a\beth\ x^2 & & \\ \quad +2\varepsilon\ .. & +2\varepsilon\aleph\ .. & +2a\beth\varepsilon\, x & \\ & +\ \varepsilon^2\ .. & +\ \varepsilon^2\aleph\ .. & +\varepsilon^2 a\beth \end{array}\right\} \sqcap 0$$

quae conferenda datae: $x^4+lx^3+amx^2+a^2nx+a^3p \sqcap 0$. $\aleph \sqcap l-2\varepsilon$. $\beth \sqcap \dfrac{a^2p}{\varepsilon^2}$ etc. Sed video sic quidem exitum non reperiri, quia non satis habemus incognitarum, sunt enim aequationes collatitiae quatuor, indeterminatae tantum tres. Remedium melius non video, quam, ut aequatio proposita attollatur ad aliam uno gradu altiorem, multiplicando eam per $x+q \sqcap 0$. fiet data

$$\left.\begin{array}{llllll} x^5+l\ x^4 & +am\ x^3 & +\ a^2n\ x^2 & +\ a^3p\ x & & \\ \quad +q\ ... & +\ ql\ \ ... & +aqm\ .. & +a^2qn\ .. & +a^3qp \end{array}\right\} \sqcap 0$$

Supponendum est autem et q esse indeterminatam. Jam loco $x^2+\aleph x+a\beth \sqcap 0$. sumatur $x^3+\aleph x^2+a\beth x+a^2\gimel \sqcap 0$ qua ducta in $x^2+2\varepsilon x+\varepsilon^2 \sqcap 0$ fiet

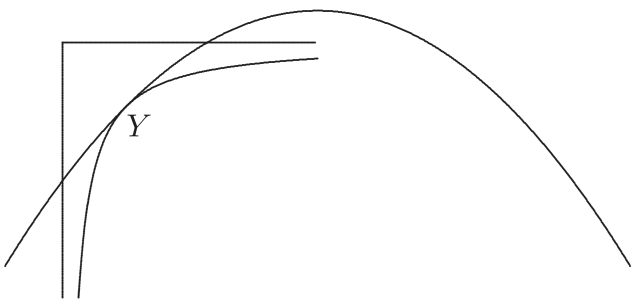
$$\left.\begin{array}{lllll} x^5+\aleph\ x^4 & +\ a\beth\ x^3 & +\ \ a^2\gimel\ x^2 & & \\ \quad +2\varepsilon\ .. & +2\varepsilon\aleph\ .. & +2a\beth\varepsilon\ .. & +2a^2\gimel\varepsilon\, x & \\ & +\ \varepsilon^2\ \ .. & +\ \varepsilon^2\aleph\ \ .. & +\varepsilon^2 a\beth\ .. & +\varepsilon^2a^2\gimel \end{array}\right\} \sqcap 0$$

Has aequationes similes inter se conferendo, sunt collatitiae quinque at vero et incognitae habentur quinque, nempe: $\aleph$. $\beth$. $\gimel$. q. ε. Elisis ergo reliquis tandem habebitur ε.

Primum ergo $\aleph \sqcap l+\overset{\frac{\varepsilon^2a^2\gimel}{a^3p}}{\overset{\vee}{q}}-2\varepsilon$. ex Term. 2. $q \sqcap \dfrac{\varepsilon^2a^2\gimel}{a^3p}$. ex Term. ult. Ex term. penult. erit: $a^3p+\dfrac{\varepsilon^2a\gimel n}{p} \sqcap 2a^2\gimel\varepsilon+\varepsilon^2a\beth$ etc. Video hac arte haberi quidem novam aequationem exhibentem valorem ipsius ε, sed eam fore satis altam, absolvamus tamen saltem ut

18 collatitiae *(1)* qvatuor at vero et ordinatae habentur qvatuor, *(2)* qvinqve *L* 19 $\aleph$. $\beth$. $\gimel$. q. ε. | Ergo qvamlibet ex illis excepta ε pro cognita assumere licet *gestr.* | Elisis *L*

effectus appareat. Erit $\beth \sqcap \frac{a^2p}{\varepsilon^2}+\frac{\gimel n}{p}-\frac{2a\gimel}{\varepsilon}$. Ergo ex terminis tertiis aequatio orietur talis: $\frac{a^3p}{\varepsilon^2}+\frac{a\gimel n}{p}-\frac{2a^2\gimel}{\varepsilon}+2\varepsilon l+\frac{2\varepsilon^3\lambda}{ap}-3\cancel{4}\varepsilon^2\ \boxed{+\varepsilon^2} \sqcap am+\frac{\varepsilon^2\gimel l}{ap}$ sive $a^4p^2+\varepsilon^2a^2\gimel n-2a^3p\gimel\varepsilon+2\varepsilon^3apl+2\varepsilon^5\lambda-3\varepsilon^4ap \sqcap am\varepsilon^2ap+\varepsilon^4\gimel l$. Eritque $\gimel \sqcap \frac{a^4p^2+2\varepsilon^3apl+2\varepsilon^5\lambda-3\varepsilon^4ap-am\varepsilon^2ap}{\varepsilon^4l-\varepsilon^2a^2n[+2a^3p\varepsilon]}$. Inventos valores $\gimel$. $\aleph$. $\beth$. q. inserendo in aequatione ex terminis quartis elicienda, habebitur aequatio quae ascendet ad gradum octavum. Habemus ergo duas aequationes ejusdem incognitae unius, quod sufficit ad inveniendam radicem utrique aequationi communem, descripto enim Circulo, qui aequationem quamlibet una cum curva apta solvat, horum duorum circulorum intersectio, et quidem hoc loco, ut arbitror contactus dabit radicem utrique aequationi communem: Si duae radices aequales essent, sed non sibi propinquae seu immediatae, uti fieri potest in curvis in se redeuntibus, ut Ellipsi fieri potest, ut duo circuli se non tangant, sed secent. Interim videndum est, an aliae sint viae breviores.



[*Fig. 4*]

Duo sunt loca: Unus $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ ad Sectionem Conicam datam specie indefinitam, et alter $\frac{\varphi}{a}yx \mp \frac{da}{q}x+(\psi)y+ad$ [$\sqcap 0$]. ad Hyperbolam circa asymptotos, ponendo $\frac{\varphi}{a} \sqcap \mp\frac{\beta}{q}-\frac{\beta}{a}$. et $\beta \sqcap \pm a$ et $(\psi) \sqcap \beta-f$. ad differentiam ipsius ψ sine parenthesi quo in superiore constructione usi sumus. Jam si circulus Constructor Sectionem Conicam datam tangit, necesse est aequationem habere duas radices aequales; si habet duas radices aequales, necesse est etiam Hyperbolam illam tangere sectionem Conicam datam in puncto

10 seu immediatae *erg. L*

quaesito Y. Nam si secaret signum foret unam tantum radicem esse realem, reliquas imaginarias, cum tamen revera duae semper sint reales, neque enim circulus sectioni Conicae in uno puncto occurrere potest, nisi eam tangat; at si tangit habemus duas radices aequales. Ex qua ratiocinatione sequitur nullum esse posse problema cubicum, cujus duae sint radices imaginariae. Et ut verbo dicam omne problema solidum sursolidum, altiusve in infinitum duas habere radices reales. Omnem enim lineam Circulus aut tangit, in duobus punctis, aut secat; omne autem problema linea apta et Circulo solvi potest. Sed hoc cum aliis ratiocinationibus pugnat. Pone enim dari aequationem quadraticam imaginariam, ea utique duas habet radices imaginarias. Omnis enim quadratica aut utramque radicem habet veram aut neutram. Eam multiplica in aequationem simplicem linearem, habebis aequationem cubicam, quae non video quomodo e. g. circulo et parabola solvi queat, cum circulus ille Parabolam aut tangat aut secet, aut plane non attingat; si tangit aut secat, aequatio duas habet radices reales aequales si tangit, inaequales si secat. Sin non attingit, utique omnes habet imaginarias. Exemplo utamur ex Schoten p. 287. $x^2 - 4ax + 5a^2 \sqcap 0$. fiet radix $\sqcap 2 + \sqrt{-1}$ vel $\sqcap 2 - \sqrt{-1}$. Ad haec non habeo quod dicam, nisi ex eo quod Circulus constructor Locum alterum construentem tangit, non sequi aequationem duas habere radices aequales. Sequitur tamen eam ad instar habentis resolvi posse. Nam si aequatio unam habet radicem realem, utique necesse est, locum constructorem, e. g. Parabolam a Circulo constructore tangi; illud tamen non sequitur, eandem parabolam ab alia curva constructrice tactum iri. Interim quia illud interea verum est, Circulum constructorem et locum tangere sese; hinc jam novam aequationem, seu novum locum ducemus: Et quia praeclaro artificio a Schotenio pag. 280. exposito ex ipsa aequatione agnosci potest quando unam tantum habet radicem realem, ideoque ex ipsa aequatione agnoscere poterimus, circulum constructorem locum tangere. Etsi quando duae sunt radices aequales id quidem agnoscere non possimus hoc pacto. Si vero aliunde novimus, ut in nostro Minimae ad Conicam ex puncto extra conicam, exemplo Aequationem non habere duas radices reales inter se diversas; tunc si ex ipsa aequatione apparet, eam posse habere duas radices veras; vel duas radices falsas; sequitur eas esse aequales. Quo posito

16 seqvi *(1)* problema *(2)* aeqvationem *L*

---

14 Exemplo: Vgl. Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 287 f. Die Homogenitätsfaktoren a bzw. a^2 hat Leibniz der Gleichung hinzugefügt, nicht aber den Lösungen. 22 artificio: *a. a. O.*, S. 280.

hanc consequentiam ducemus, quod non tantum circulus constructor tangat locum, sed etiam quod duo quaelibet alia loca tangant sese. Unde jam problema facillime resolvetur, duo loca ex ipso problemate prodeuntia determinando ad Tangentes. Nunc vero ut saltem circuli locique constructoris tangentes conferamus, necesse est credo, illa loca esse ordinatarum rectangularum, neque enim credo Methodi Tangentium quibus utimur ad ordinatas obliquangulas porriguntur. Jam ex qualibet aequatione solida duo possunt fieri loca alter ad sectionem conicam datam alter ad circulum, is qui est ad sectionem conicam datam est

$$\ddagger \frac{a}{q}y^2 \; \frac{\left\{\begin{array}{l} + \dfrac{am}{2}l\,y - \dfrac{a^3p}{g^2} \\ - a^2n \;\; .. \\ - \dfrac{l^3}{8} \;\; .. \\ \ddagger \dfrac{alg^2}{2q} \;\; .. \end{array}\right.}{g^2} \quad \sqcap \quad \begin{array}{l} v^2 + \dfrac{am}{g}v, \\ - \dfrac{l^2}{4g} \\ \ddagger \dfrac{a}{q}g \end{array}$$

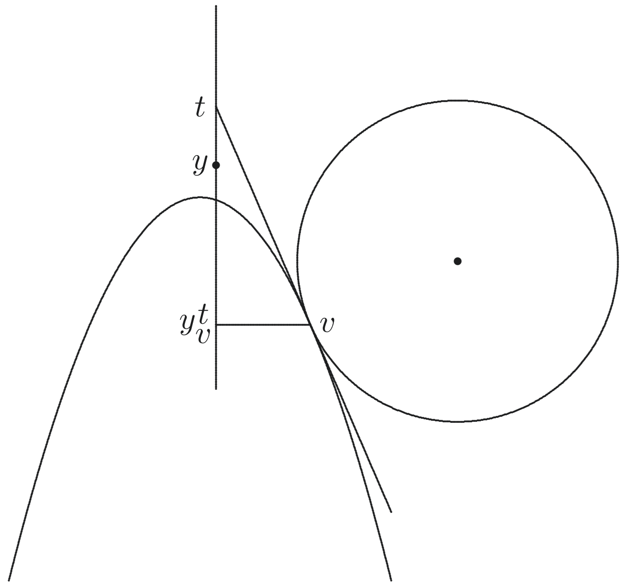
vel per brachylogiam $\ddagger \frac{a}{q}y^2 + 2ay + ca \sqcap v^2 + dv$.

Unde Aequatio ad circulum fit: $-y^2 + \begin{array}{c} 2a \\ -\dfrac{\gamma l}{2a} \end{array} y + ca \sqcap v^2 + \begin{array}{c} d \\ -\dfrac{\gamma g}{a} \end{array} v\,..$

Ex v et y quaeramus t. idque in utraque aequatione separatim, methodo tangentium qualem Slusius publicavit:

Fiet ex aeq. ad Conicam: $\ddagger \frac{2a}{q}ty + 2at \sqcap 2v^2 + dv$. sive $t \sqcap \dfrac{\cancel{2}v^2 + \dfrac{d}{2}v}{\ddagger \dfrac{\cancel{2}a}{q}y + \cancel{2}a}$.

18 publicavit: vgl. R.-Fr. de Sluses Tangentenbrief in: *Philosophical Transactions* VII, Nr. 90 vom 20. (30.) Januar 1672 (1673), S. 5143–5147 (Nachtrag in VIII, Nr. 95 vom 23. Juni (3. Juli) 1673, S. 6059).



[*Fig. 5*]

Ex aequatione ad Circulum:
$$-2yt + \begin{array}{c}2a\\ -\frac{\gamma l}{2a}\end{array}\, t \sqcap 2v^2 + \begin{array}{c} d \\ \frac{-\gamma g}{a}\,..\end{array}\, v, \text{ sive } t \sqcap \frac{v^2 + \begin{array}{c}\frac{d}{2}\\ -\frac{\gamma g}{2a}\,..\end{array}\, v}{-y+2a-\frac{\gamma l}{2a}}$$

Conferendo hos duos ipsius t valores, fit:
$$\frac{v+\frac{d}{2}}{\mp\frac{a}{q}y + a} \sqcap \frac{v + \begin{array}{c}\frac{d}{2}\\ -\frac{\gamma g}{2a}\end{array}}{-y+2a-\frac{\gamma l}{2a}}$$

Et multiplicando per crucem:
$$-vy - \frac{d}{2}y, +2av + \frac{d}{2}v - \frac{\gamma l}{2a}v - \frac{d\gamma l}{4a} \sqcap \mp\frac{a}{q}vy \mp \frac{ad}{2q}y \pm \frac{\cancel{a}\gamma g}{2\cancel{a}q}y, +av + \frac{da}{2} - \frac{\gamma g}{2}$$

---

3 sive $t \sqcap$: Im Nenner müsste $-y + a - \frac{\gamma l}{4a}$ stehen. Im Verlauf der Rechnung kommen zusätzliche Fehler hinzu.

Cherchons à present (t) par v, et la premiere Equation donnera: $\pm\frac{2a}{q}y^2 + 2ay \sqcap 2v(t) + d(t)$.

Et nous aurons: $\dfrac{\pm\frac{\cancel{2}a}{q}y^2 + \cancel{2}ay}{\cancel{2}v + \frac{d}{2}} \sqcap (t)$ et ex secunda: $\dfrac{\begin{matrix}-2y^2 + 2ay\\ -\frac{\gamma l}{2a}..\end{matrix}}{v + d - \gamma\frac{q}{a}} \sqcap (t)$.

Explicandoque y^2, et caetera multiplicando per crucem, habebimus:

$$\pm\frac{a}{q}gv^2 \mp \frac{a}{q}\,\frac{l}{2}yv, \pm\frac{dag}{q}v \mp \frac{dal}{2q}y; \mp\gamma gv \pm \frac{\gamma l}{2}y, , +ayv\boxed{+day} - \gamma qy \sqcap$$

$$-2gv^2 + \frac{lyv}{\cancel{2}}, , \boxed{-\frac{dgv}{\cancel{2}} + \frac{dly}{2\cancel{4}}}, , , +2ayv, \boxed{+day}, -\frac{\gamma lyv}{2a} - \frac{\gamma ldy}{4a}$$

Jungendae sunt hae duae aequationes: In priore est $\frac{\gamma}{a}yv$. Translato scilicet $-yv$ in latus $\pm\frac{a}{q}vy$. Junctis his aequationibus in unum, ut destruatur yv, habebimus residuam aequationem ad parabolam, in qua sola est ex quadratis v^2, pura si velis, divisis omnibus per ejus multiplicantem, $-2g$. Cui si componatur aequatio ad parabolam, $y^2 - gv + \frac{ly}{2} \sqcap 0$ habebimus novam aequationem ad circulum, diversam a priore, et problema fiet planum, si modo illud verum est, circulum constructorem tangere Conicam datam. Sed metuo ne

---

4–6 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{rrrr} y^2 \sqcap & & gv - & \frac{l}{2}y \\ & \pm & \frac{a}{q}gv \mp & \frac{aly}{2q} \\ & - & gv + & \frac{ly}{2} \end{array}$$

8 $\pm\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$vy. *(1)* in posteriore est *(a)* $\pm\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *(b)* $\underbrace{\frac{\mathrm{lyv}}{2} + 2\mathrm{ayv} - \mathrm{ayv} + \mathrm{lyv}}_{\frac{\gamma}{\mathrm{a}}\mathrm{lyv}} - \text{etc}$ *(2)* Junctis *L*

natura rerum his aliter praeviderit. Forte enim circulus constructor non tangit, sed secat, et simul ostendit solutionem, alterius casibus cum punctum intra est. Sed hoc tamen contingere posse vix putem.

Videndum an non et Hyperbola tangat sectionem conicam datam. Aequatio ad Hyperbolam est $yx \text{ ǂ } \frac{da^2}{q\varphi}x + \frac{a\psi}{\varphi}y + \frac{a^2d}{\varphi} \sqcap 0$. Ergo: x mult. per $y \text{ ǂ } \frac{da^2}{q\varphi}$ vel per v. eritque $y \sqcap v \text{ ‡ } \frac{da^2}{q\varphi}$. Ergo habebimus: $vx + \frac{a\psi}{\varphi}v \text{ ‡ } \frac{da^3\psi}{q\varphi^2} + \frac{a^2d}{\varphi}$. Et rursus ponendo $x + \frac{a\psi}{\varphi} \sqcap z$. fiet $zv \sqcap \text{ ǂ } \frac{da^3\psi - a^2dq\varphi}{q\varphi^2}$. Explicando si punctum est extra Conicam erit $^{+}\text{‡} \sqcap +$. et $^{+}\text{ǂ} \sqcap +$. Unde $\varphi \sqcap \text{ ‡ } \frac{a^2}{q} - a$ et $\psi \sqcap a - f$.

1 enim *(1)* Circulus *(2)* circuli constructores sunt duo ambiguis scilicet existentibus lineis praeparatoriis, et simul ostendent *(3)* circulus *L* 7 Explicando ... Conicam *gestr. u. wieder gültig gemacht L* 8 a − f. | Unde explicando fiet: $\varphi^2 \sqcap \frac{\mathrm{a}^4}{\mathrm{q}^2} \text{ ǂ } \frac{2\mathrm{a}^3}{\mathrm{q}} + \mathrm{a}^2$ Unde fiet: *gestr.* | *L*

40. PROBLEMATUM CONSTRUCTIO PER CURVAM ET CIRCULUM [Oktober – Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 159–160. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 852 A

Datierungsgründe: s. N. 38.

Problematum Constructio per Curvam ei rei aptam, et Circulum, duobus modis fieri potest, vel reducendo ad Aequationem, eamque aequationem tractando methodo quadam aequationibus omnibus ejusdem gradus communi; vel revocando ad analogiam, assumtaque deforis nova incognita formando duos locos, quorum alter sit ad Curvam propositam, alter ad circulum. Si ad aequationem deventum est, tunc duae rursus sunt methodi alter Cartesii, qui invenit aequationem factitiam, unius incognitae, ope rectae quae simul ad Circulum, et ad Curvam datam, ejusdem anguli ordinata est eamque factitiam comparat datae; alter Slusii, qui productam aequationem rursus transmutat in Analogiam, assumtaque deforis incognita duo inde facit loca alterum ad circulum, alterum ad Curvam propositam, et eum qui est ad curvam propositam comparando cum alia factitia ad eandem Curvam, eo ipso etiam determinet alterum locum ad Circulum. Ex gr. Methodo ejus secundum sensum literarum scheda illa qua ista persecutus sum, explicatarum tantum ponendo $c \sqcap 0$, et pro r ponendo a, et pro t, ponendo q fit ad sectionem Conicam datam ex problemate solido quolibet aequatio talis:

12 f. eamqve . . . datae *erg. L* 15 et *(1)* sed qva ratione Proble *(2)* eum *L* 17 eius *(1)* fit aeqvatio ad Conicam datam, *(2)* secundum *L* 18 tantum . . . ponendo q *erg. L*

11 methodi: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–106; R.-Fr. de Sluse, *Mesolabum*, 1668, S. 51–95, vgl. N. 16. 17 scheda: N. 31.

$$\ddagger\frac{a}{q}y^2 \left\{\begin{array}{l} +\frac{aml}{2} \\ -a^2n \\ -\frac{l^2}{8} \\ \ddagger\frac{alg^2}{2q} \\ \hline g^2 \end{array}\right. y \quad -\frac{l^3p}{g^2} \sqcap v^2 \begin{array}{l} +\frac{am}{g} \\ -\frac{l^2}{4g} \\ \ddagger\frac{a}{q}g \end{array} v$$

Hanc conferamus cum aequatione ad sectionem conicam datam

$$\ddagger\frac{a}{q}y^2 \quad \begin{array}{l} +\frac{3a}{q}\,\venus y \\ +s \end{array} \quad \begin{array}{l} \ddagger\frac{a}{q}\venus^2 \\ +s\venus \\ -\mars^2 \\ -\mercury\mars \end{array} \sqcap v^2 \quad \begin{array}{l} +2\mars\, v \\ +\mercury \end{array}$$

habemus indeterminatas g. s. $\venus$. $\mercury$. $\mars$. numero quatuor. Aequationes autem collatitias habemus tantum tres. Accedet ergo aequatio quarta: ipsarum s et $\mercury$ relationem explicans, scilicet $s \sqcap 2a \ddagger \frac{2a}{q}\odot$, at $2a\odot \ddagger \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap \mercury^2$. Est ergo in nostra potestate determinare quiddam. Sed ob parabolam circumspectione opus est, non licet facere g aequalem cuidam cognitae, ⟨non⟩ licet ponere $2\mars + \mercury$. aequalem cuidam cognitae. Tentandum an liceat ponere $\mars \sqcap 0$, vel $\venus \sqcap 0$. et utrum horum sit commodius. Sed ne inutili labore tempus feram, substituam aequationem factitiam $\ddagger\frac{a}{q}y^2 + 2ay + ca \sqcap v^2 + dv$. Cujus descriptionem ad conum jam superiore plagula exquisite dedi, fiet ex Term. 2. aequatio

16 commodius. *(1)* Neglecta $\venus$ sit s $\sqcap \frac{\text{cogn.}}{\text{g}^2} + \frac{\text{cogn.}}{\text{q}}$ seu s $\sqcap \frac{+\text{a}^2}{\text{g}^2} \ddagger \frac{\text{al}}{2\text{q}} \sqcap 2\text{a} \ddagger \frac{2\text{a}\odot}{\text{q}}$ *(2)* Sed *L*

18 dedi: N. 39.

haec: $2ag^2 \pm \frac{alg^2}{2q} \sqcap +\frac{aml}{2} - a^2n - \frac{l^3}{8}$, habetur ergo g. Sed jam vicissim $c \sqcap -\frac{pa^2}{g^2}$ et $d \sqcap \frac{am - l^2 \mp \frac{a}{q}g^2}{g}$. Habentur ergo indeterminatae omnes breviter satis atque eleganter; quare et habetur aequatio ad circulum,

$$\begin{array}{cccccc} \dfrac{\begin{cases}\frac{aml}{\langle 2\rangle}\\ -\langle a^2n\rangle\\ -\frac{\langle l^2\rangle}{8}\end{cases}}{g^2} & y & -y^2 & -\frac{a^3p}{g^2} & \sqcap & v^2\,\dfrac{\begin{cases}+am\\ -\frac{l^2}{4}\end{cases}}{g} \\ -\frac{l}{2} & & & & & -g\end{array}$$

sive

$$\begin{array}{cccccc} -\,y^2 & + & 2a\,y & +\,ca \sqcap v^2 & & +d\;v \\ & - & \frac{\gamma l}{2a} & & - & \frac{\gamma g}{a^2}\ldots\end{array}$$

Rectis quippe c. et d, et g. jam inventis.

Harum duarum methodorum, nescio an altera alteri brevitate ce⟨dat⟩. Ut scilicet vel loca compares locis; vel aequationem unius cognitae datam, factitiae hujus incognitae, utrobique enim video perutile esse ut b fiat $\sqcap 2a$.

Restat nunc ut subtilius quiddam perscrutemur, an scilicet Problemata etiam ad Aequationem non revocata, atque Analogiis expressa, ad duo loca, quorum alter sit ad circulum, alter ad Conicam datam, reduci queant. E. g. Analogia est problematis minima-

---

1 *Nebenbetrachtung*: Pone $a \sqcap \frac{ld}{a}$. $\frac{2d}{a}g^2 \pm \frac{ag^2}{q} \sqcap \frac{am}{2} - dn - \frac{l^2}{8}$. $g^2 \sqcap \frac{\frac{am}{\cancel{2}} - 2dn - \frac{l^2}{4}}{4}$.

rum ad sectionem Conicam ex puncto dato, est: $\dfrac{d+\dfrac{d}{a}y}{\text{☽}} \sqcap \dfrac{y}{\sqrt{a^2 \ddagger \dfrac{a}{q}y^2}}$. Considerandum est autem, quod si universalem ad Conicam specie indefinitam quaerimus aequationem, et alteram ad Circulum, uti certe quaerimus: tunc vel quaerimus ut ordinatae sint ad angulos rectos, eoque casu evitandum est rectangulum ex ductu duarum incognitarum in se invicem, vel cogimur hoc rectangulum admittere, simulque et ordinatas obliquangulas. Et vero ne in excludendo utique difficillimum fuerit, (etsi fieri certo possit) laboremus; ideo ante omnia operae pretium est Aequationes duarum incognitarum omnia habentes loca completa, easque tum ad Circulum, tum ad sectionem Conicam datam revocare. Hoc enim semel in universum praestito postea per βραχυλογιαν literis pro quantitatibus prolixis utemur, nec nisi sine discrimine duas secundi gradus aequationes duarum incognitarum, omnia habentes loca completa formabimus. Demonstratum jam est a me, quomodo aequatio secundi gradus duarum incognitarum omnia loca, demto rectangulo ex duabus incognitis facto, habens completa, e. g. $\ddagger\dfrac{a}{q}z^2 + 2az + ca \sqcap v^2 + dv$ ad sectionem Conicam datam, cujus latus rectum a, transversum q. universali quadam ratione applicetur.

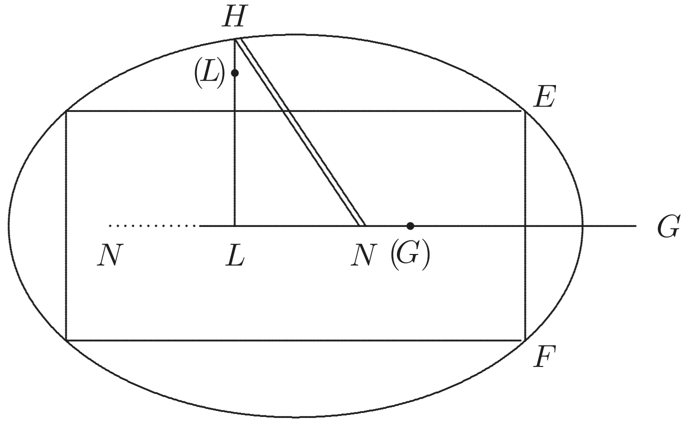


fig. 1.

1 *Dazu*: NB. d hic significat aliquid aliud quam paulo ante. *Durch Umrahmung isoliert*: d est distantia puncti dati ab Axe Conicae. $\text{☽} \sqcap \pm(^{+}\ddagger)q(^{+}\dagger)f$. f distantia a vertice, sumta in axe.

Esto ergo $GL \sqcap z$ et $LH \sqcap v$. Ducatur jam recta HN ita ut angulus LHN sit datus, sive ut data sit ratio HN ad HL, ponendo $\dfrac{HL}{HN} \sqcap \dfrac{a}{e}$. Jam ponamus $GN \sqcap x$. et $HN \sqcap y$ erit $HL \sqcap y\dfrac{a}{e}$, antea ν, et $LN^2 \sqcap y^2 - \dfrac{a^2}{e^2}y^2$, ac proinde $LN \sqcap y\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$, eritque GL, antea z, nunc $\sqcap x + y\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$ vel $x - \sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$, sed quoniam in nostra potestate est eligere utram velimus GN, sive x, ideo ponemus $z \sqcap x + y\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$. Hoc ergo ipsarum v, et z, valore in ipsarum locum substituto, fiet aequatio:

$$\mp\frac{a}{q}x^2 \mp \frac{2a}{q}xy\sqrt{\ldots} \mp \frac{a}{q}y^2 \frown \llcorner 1-\frac{a^2}{e^2}\lrcorner + 2ax + 2ay\sqrt{\ldots} + ca \sqcap \frac{a^2}{e^2}y^2 + \frac{da}{e}y.$$

Divisis omnibus per $\dfrac{a}{q}$, atque ordinando, fiet:

$$\begin{array}{llllll} x^2 & +2xy\sqrt{\ldots} & \mp 1-\dfrac{a^2}{e^2}\ y^2 & +2qx & +2q\sqrt{\ldots}\ y & +cq \sqcap 0 \\ & & -\dfrac{qa^{\cancel{2}}}{\cancel{a}e^2} & & -\dfrac{dq}{e} \quad \ldots & \end{array}$$

Si figura proposita sit circulus, a et q ponendae aequales, ac de caetero pro d ponatur λ, et pro c ponatur θ , sed loco $2ax$ ponatur gx, fietque aequatio:

2 Jam |neglectis z et v, *gestr.*| ponamus L 7 f. $\dfrac{da}{e}$y *(1)* et ordinando, divisis omnibus prius per $\dfrac{a^2}{e^2}$, fiet: *(2)* Hinc ut obiter *(3)* ponatur $\mp\dfrac{a}{q}, \frown \dfrac{a^2}{e^2}„ - \dfrac{a^2}{e^2} \sqcap \dfrac{\beta}{a} \mp \dfrac{e^2\cancel{a}}{qa^{\cancel{2}}}x^2 \mp \dfrac{e^2}{aq}xy\sqrt{\ldots}$ fiet ordinando: $\dfrac{a^2}{q\beta}x^2 \mp \dfrac{2a^2}{q\beta}\sqrt{\ldots}xy + y^2 +$ *(4)* divisis L 9–11 $+cq \sqcap 0$ *(1)* Nisi forte optimum putes, solam x relinquere liberam, dividendo omnia per 2a, Unde fiet aeqvatio talis:

$$\left.\begin{array}{llllll} \mp\dfrac{1}{2q}x^2 \mp \dfrac{1}{q}\sqrt{\ldots}xy \mp \dfrac{1}{2q} \frown & 1-\dfrac{a^2}{e^2} & y^2 & +x & +\dfrac{1}{q}\sqrt{\ldots} \quad y & +c \\ & \dfrac{a}{e^2} & \ldots & & -\dfrac{d}{eq} \quad \ldots & \end{array}\right\} \sqcap 0$$

Unde, si *(2)* Si L

$$-x^2 \pm 2\sqrt{\ldots}\,xy - y^2 + gx \begin{array}{c}\mp\sqrt{\ldots}\\ \frac{-\lambda a}{e}\ \ldots\end{array}\ y + \theta a \sqcap 0.\ \text{ad circulum.}$$

Sed hic jam rem observo valde notandam, si sic agas, non posse in parabola reperiri xy. Unde constructiones universales problematum xy habentium, valde reddentur intricatae. Huic rei remedium inveni, quod nunc dicam.

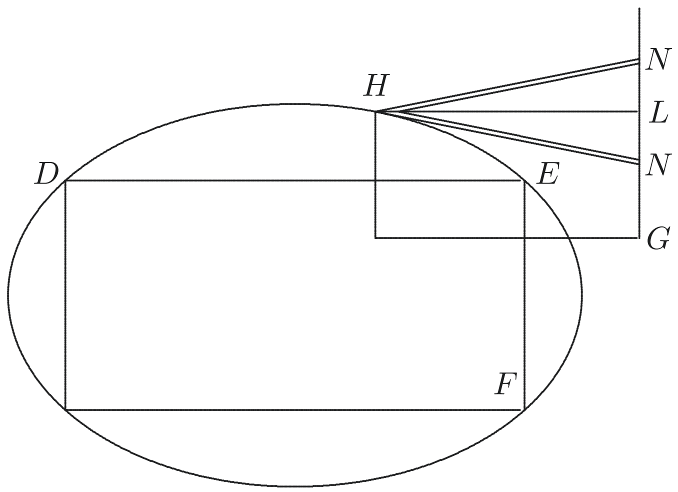


fig. 2.

Ordinata quae ante fuit in parallelam axi, nunc in parallelam tangentis axem ad verticem ducatur. Caeteris omnibus servatis iisdem, nisi quod pro v ponemus z et contra et pro y ponemus x, et contra. Nempe $GN \sqcap y$. et $HN \sqcap x$. Ergo $HL \sqcap \frac{a}{e}x$, antea z. et $LN \sqcap x\sqrt{1-\frac{a}{e}}$ eritque GL, antea v, $\sqcap y + x\sqrt{\ldots}$. Hoc ergo ipsarum z et v valore in ipsarum locum substituto, fiet aequatio:

1 f. *Nebenbetrachtung*: $z^2 + v^2 + gz + \lambda v + \theta a \sqcap 0$.

$$x^2 + y^2 (\mp) 2\sqrt{\ldots}\,vx + gx \ \begin{array}{c}(\pm)\ g\sqrt{\ldots}\\ +\ \frac{\lambda a}{e}\ \ldots\end{array}\ y + \theta a \sqcap 0.$$

$$\begin{array}{llll} \ddagger\,\dfrac{a^3}{qe^2}\,x^2 & +\dfrac{2a}{e}\;\;x & +ca \;\sqcap\; y^2 + 2xy\sqrt{\ldots} + dy \\ 1-\dfrac{a}{e},\frown -1 \frown\;\ldots & -d\sqrt{\ldots}\;\ldots & \end{array}$$

Atque ita aequationem obtinuimus ad sectionem Conicam datam, cujus nullus plane locus vacet. Etsi termini omnes non sint indefiniti. Nimirum definita d. per term. y. habetur e, per Term. x. Unde jam xy et x^2 sua sponte sequuntur, sed si fuisset pro $2ax$, adhibita bx, tunc definita d per y, et e per xy, haberetur b per x, et solae restarent definiendae per has, quae semper, x^2 et y^2.

Et quoniam plagula proxime praecedente, qua constructionem hujus aequationis, $\ddagger x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$ quaesivimus ad sectionem Conicam datam; posueramus $b \sqcap 2a$, quod ad aequationes datas factitiis comparandas perutile fuit. Operae pretium tamen est ostendere, quomodo aequatio, omnes habens terminos indefinitos praeter summos, (x^2 et y^2,) ad conicam datam construi possit. Quoniam enim id possibile est, fieri potest, ut et necessarium sit.

Aequatio ad sectionem Conicam comperta plurimarum incognitarum est: $sv \ddagger \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap$ $\mercury z + z^2$. Ponendo $s \sqcap 2a \ddagger \dfrac{2a\odot}{q}$ et $2a\odot \ddagger \dfrac{a}{q}\odot^2 \sqcap \mercury^2$ et explicando v per $x + \venus$ et z per $y + \mars$. fiet aequatio talis:

$$\begin{array}{llllll} \ddagger\dfrac{a}{q}\;x^2 & \ddagger\dfrac{2a}{q}\venus\,x & \ddagger\dfrac{a}{q}\venus^2 & \sqcap & y^2 & +2\mars\;y \\ & +s\;\;\ldots & +s\venus & & & +\mercury\;\;\ldots \\ & & -\mars^2 & & & \\ & & -\mercury\mars & & & \end{array}$$

1 f. *Nebenbetrachtung*: Unde Aeq. ad Circulum

$$\left.\begin{array}{l} -x^2 \;+\dfrac{ag}{e}\;\;x \;+\; \theta a - x^2 \;-\; 2\sqrt{\ldots}\;\;xy \;-\; \lambda y \\ \qquad -d\sqrt{\ldots}\;\;.. \end{array}\right\}\sqcap 0.$$

9 quaesivimus: N. 38.

Quam aequationem compertam, conferendo cum assumta: $\frac{a}{q}x^2+bx+ca \sqcap y^2+dy$. fiet $b \sqcap \mp\frac{2a\text{♀}}{q}+s$. $ca \sqcap \mp\frac{a\text{♀}^2}{q}+s\text{♀}-\text{♂}^2-\text{☿}\text{♂}$. $d \sqcap 2\text{♂}+\text{☿}$. Has aequationes conjungendo: $s \sqcap 2a\frac{2a\odot}{\mp q}$. Ergo $s \sqcap 2a\frac{\text{☿}^2 \mp \frac{a}{q}\odot^2}{\mp q}$ sive $s \sqcap 2a \mp \frac{1}{q}\text{☿}^2 - \frac{a}{q^2}\odot^2$. At eadem $s \sqcap b \pm \frac{2a}{q}\text{♀}$. Ergo $2a \mp \frac{1}{q}\text{☿}^2 - \frac{a}{q^2}\odot^2 \sqcap b \mp \frac{2a}{q}\text{♀}$. Ergo pro ☿^2 ponendo ejus valorem $2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2$, fiet $2a \mp \frac{2a\odot}{q}\boxed{+\frac{a}{q^2}\odot^2}\boxed{-\frac{a}{q^2}\odot^2} \sqcap b \pm \frac{2a}{q}$. Quod satis elegans est Theorema. Et me movit supra, ut quoniam in illis constructionibus nonnihil in meo arbitrio erat, facerem universaliter, (quod in parabola semper contingit) $b \sqcap 2a$, et $\text{♀} \sqcap \odot$. Sed nunc quidem, ubi pono b non esse in nostra potestate, vel saltem ☿. continuandus porro calculus est ad $\odot$ et ♀ investigandas. Nimirum quoniam praeterea $\text{♂} \sqcap \frac{d-\text{☿}}{2}$. et $\text{♂}^2 \sqcap \frac{d^2-2\text{☿}d+\text{☿}^2}{4}$ erit $-\text{☿}\text{♂} \sqcap \frac{-\text{☿}d+\text{☿}^2}{2}$. Item quia $s \sqcap b \pm \frac{2a}{q}\text{♀}$ erit $s\text{♀} \sqcap b\text{♀} \mp \frac{2a}{q}\text{♀}^2$. Ergo $ca \sqcap \mp\frac{3a}{q}\text{♀}^2 + b\text{♀}\frac{-d^2-2\text{☿}d+\text{☿}^2}{4} - \text{☿}d + \frac{\text{☿}^2}{2}$, sive $ca+\frac{d^2}{4} \sqcap \frac{3a}{q}\text{♀}^2+b\text{♀}+\frac{3}{4}\text{☿}^2-\frac{3d}{2}\text{☿}$. Pone $2a-b \sqcap \psi$, fiet: $\pm\frac{a}{q}\text{♀} \sqcap +\frac{\psi}{2} \mp \frac{a}{q}\odot$. ideoque $\mp\frac{3a^2}{q^2}\text{♀}^2 \sqcap \mp\frac{3\psi^2}{4}-\frac{3a}{q}\psi\odot \mp \frac{3a^2}{q^2}\odot^2$, et $b\text{♀} \sqcap \pm\frac{qb}{2a}\psi - b\odot$. Unde fit tandem

$$\left\{\begin{array}{c} ca \\ +\frac{d^2}{4} \\ \pm\frac{3\psi^2}{4} \\ \frac{\mp\frac{qb}{2a}\psi}{3} \end{array}\right\} \text{☽}a \quad \begin{array}{llll} \sqcap \mp\frac{\cancel{3}a^2}{q^2}\odot^2 & +\frac{\cancel{3}a}{q}\psi\odot & +\frac{\cancel{3}}{4}\text{☿}^2 & -\frac{\cancel{3}d}{2}\text{☿} \quad \text{Aeq. (A)} \\ & -\frac{b}{3} \quad \ldots & & \end{array}$$

---

11 *Nebenbetrachtung*: Quando $b \sqcap 2a$, tunc $\psi \sqcap 0$.

Addatur jam Aequationi (A) aequatio ad sectionem Conicam: $-\frac{a\odot}{2} \pm \frac{a}{4q}\odot^2 - \frac{\mercury^2}{4} \sqcap 0$ facta ex $-2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2 - \mercury^2 \sqcap 0$ Aeq. (B) divisa per 4 fiet:

$$\left.\begin{array}{llllll} -\,\text{☽}a & \mp\frac{a^2}{q^2} & \odot^2 & -\frac{a}{q}\psi & \odot & -\frac{d}{2}\mercury \\ & \pm\frac{a}{4q} & \dots & -\frac{b}{3} & \dots & \\ & & & -\frac{a}{2} & \dots & \end{array}\right\} \sqcap 0.\ \text{Aeq. (C).}$$

Eidem aequationi (A) jam addatur eadem Aeq. B. multiplicata prius per $\frac{a}{q}$, et fiet:

$$\left.\begin{array}{llllll} -\,\text{☽}a & -2a & \odot & +\frac{1}{4} & \psi^2 & -\frac{d}{2}\psi \\ & +\frac{a}{q}\psi & \dots & -1 & \dots & \\ & -\frac{b}{3} & \dots & & & \end{array}\right\} \sqcap 0.\ \text{Aeq. (D).}$$

Dividatur Aeq (C) per $\mp\frac{a^2}{q^2} \pm \frac{a}{4q} \sqcap \frac{\omega a}{q^2}$ et Aeq (D) per $\frac{-3}{4}$, ac denique addantur sibi invicem, fiet

1 *(1)* Jungatur *(2)* Auferatur *(3)* Auferatur *(4)* Addatur jam | Aeqvationi (A) *erg.* | aeqvatio *L*

1 Conicam: *(1)* $2\mathrm{a}\odot \mp \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\odot^2$ *(a)* $\mp$ *(b)* $+\mercury^2 \sqcap 0$ Aeq. (B) *(2)* $-\frac{\mathrm{a}\odot}{2}$ *(a)* $+\frac{\mathrm{a}}{4\mathrm{q}}\odot^2 + \frac{\mercury^2}{4}$ *(b)* $\pm\frac{\mathrm{a}}{4\mathrm{q}}\odot^2$ *L*

4–6 Aeq. (C.) *(1)* Ab eadem Aeqvationi (A) auferatur *(2)* Eidem *L*

1 aequatio: Leibniz unterlaufen bei den Umformungen der Gleichung $2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap \mercury^2$ wiederholt Vorzeichenfehler.

$$
\begin{array}{lll}
-\dfrac{\text{☽}\cancel{a}q^2}{\omega\cancel{a}} & +\odot^2 & \left\{\begin{array}{l} +\dfrac{a}{4}\psi \quad \odot \quad -\dfrac{dq^2}{\omega a} \quad \text{☿} \quad +\text{☿}^2 \quad \sqcap 0 \\ -\dfrac{b}{3} \quad \ldots \quad -\dfrac{2d}{3} \quad \ldots \\ -\dfrac{a}{2} \quad \ldots \end{array}\right. \\
+\dfrac{4\,\text{☽}}{3} & & \\
& & \hline \quad \dfrac{\omega a}{q^2} \\
& & \left\{\begin{array}{l} -2a \quad \ldots \\ +\dfrac{a}{q}\psi \quad \ldots \\ -\dfrac{b}{3} \end{array}\right. \\
& & \hline \quad \dfrac{3}{4}
\end{array}
$$

Quae Aequatio est ad Circulum, et si cum Aeq. superiore B. ad sectionem Conicam datam construatur, Circuli et sectionis Conicae datae intersectione habebuntur $\odot$ et ☿ quaesitae. Quare ope sectionis Conicae datae construi poterit aequatio: $\dfrac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. Unde sequitur etiam, ut paulo ante notatum est ope sectionis Conicae construi posse, aequationem quadraticam omnia habentem loca repleta, omnesque terminos, exceptis duobus summis, indefinitos ab aliisque independentes, qualis est $\dfrac{f}{a}x^2 + gx + ca \sqcap y^2 + \dfrac{h}{a}xy + dy$. Sunt enim $g.\ c.\ h\ (f).\ d.$ a se invicem independentes; at f pendet ab h, vel si malis $h.$ ab f. Atque hoc quidem est totum illud quod ope sectionis

---

18–436,4 *Nebenbetrachtung*: Si duae sint aequationes duarum earundem incognitarum, et in una sit locus, qui in altera non est, tunc locus ille qui in altera non est, nulla arte tolli potest, Imo jam deprehendi modum, quo tolli potest terminus quivis, duarum aequationum quarumlibet, nempe si duae sint aequationis diversae eundem habentes terminum communem, utique ille terminus tolli potest atqui semper haberi pos-

14 ut ... est *erg. L*

Conicae datae praestari potest. Si vero f et h postulentur a se invicem independentes, tunc impossibile est, problema construere ope sectionis Conicae datae, facile tamen est ipsum construere, ope infinitarum ejusdem speciei sectionis Conicae specie indefinitae, datae.

Sed redeamus ad artes speciales, quibus in Problematis propositis constructio per Circulum et Conicam datam facilis reddi potest. Ut in problemate minimarum ex puncto dato ad sectionem Conicam datam ducendarum. Duae sunt Aequationes, altera $\dfrac{a \ddagger \frac{a}{q}x}{y} \sqcap \dfrac{f + \frac{\beta}{a}x}{d + \frac{\beta}{a}y}$ (D) ex natura minimae Conicae; altera: $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ (E), sive $\dfrac{2a \ddagger \frac{a}{q}x}{y} \sqcap \dfrac{y}{x}$, (sive $\ddagger \dfrac{ax}{qy} + \dfrac{a}{y} \sqcap \dfrac{y}{x} - \dfrac{a}{y}$. Unde $\dfrac{y}{x} - \dfrac{a}{y} \sqcap \dfrac{f + \frac{\beta}{a}x}{d + \frac{\beta}{a}}$). Aequatio D. reducta dat:

---

sunt duae aequationes diversae, eundem habentes terminum communem; quod probo: Omnes aequationes dissimiles sunt diversae. Semper autem haberi possunt duae aequationes dissimiles ejusdem termini una careat, quem altera habet. Rursus e r r o r in hac ratiocinatione, quaeruntur scilicet duae termino quem tollere volumus carentes. At hoc methodo semper quidem unam habemus sed ea eadem cum ea quam jam habemus.

7 f. *Nebenbetrachtung*: f pro $(^{+}\ddagger)f$, $\dfrac{\beta}{a} \sqcap (^{+}\ddagger)1$.

1 vero f *(1)* sit *(2)* etiam postulatur ab aliis *(3)* et *L* 8 *Nebenbetrachtungen* | $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. Unde $2ax \ddagger \frac{2a}{q}x^2 \sqcap 2y^2$, id est $\cancel{2}al \ddagger \frac{\cancel{2}a}{q}xl \sqcap \cancel{2}y^2$ et $1 \sqcap \dfrac{y^2}{a \ddagger \frac{a}{q}x}$ $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, jam ut $\dfrac{d(\ddagger)y}{f((\ddagger))} \sqcap \dfrac{1+x}{y}$ *gestr.* | *L*

$$\begin{array}{llll} ad & +\beta\ y & \ddagger\dfrac{da}{q}\ x & \ddagger\dfrac{\beta}{q}\ yx \quad \sqcap 0 \\ & -f\ \ldots & & -\dfrac{\beta}{a}\ \ldots \end{array}$$

Aequationes ergo sunt Aeq. (A) $2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, et

$$\left.\begin{array}{llll} \ddagger\dfrac{\beta}{q}\ xy & \ddagger\dfrac{da}{q}\ x & +\beta\ y & +ad \\ -\dfrac{\beta}{a}\ \ldots & & -f\ \ldots & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Multiplicemus posteriorem per arbitrariam quandam sive indeterminatam, $\dfrac{\mu}{a}$, fiet

$$\begin{array}{lllll} \ddagger\dfrac{\beta\mu}{qa}\ yx & \ddagger\dfrac{d\mu}{q}\ x & +\dfrac{\beta\mu}{a}\ y & +d\mu \sqcap 0. & \text{Aeq. (B)} \\ -\dfrac{\beta\mu}{a^2} & & -\dfrac{f\mu}{a} & & \end{array}$$

Quoniam autem in aequatione altera est yx, nec, quantum invenio tolli potest, ideo problema servatis iisdem incognitis, quod vellem brevitatis causa; ad Circulum et sectionem Conicam datam construi non potest, nisi ordinatis adhibitis obliquis. Igitur aequatio (A) mutanda est in aliam ad ordinatas obliquas; prorsus ut paulo ante fecimus, ponendo tantum z in locum x et contra, et v in locum y et contra. Ordinata autem sectionis Conicae intelligenda est in tangentem verticis. Vide fig. 3.

---

1 f. *Nebenbetrachtung*: $\pi d + \dfrac{\pi\psi}{a}y \ddagger \dfrac{d\pi}{q}x + \dfrac{\varphi\pi}{a^2}yx$

1 f. *Nebenrechnung:*

$$\left|\begin{array}{lllllllll} & \pi\mathrm{d} & + \dfrac{\pi}{\mathrm{a}}\psi & \mathrm{y} & + \dfrac{\mathrm{d}\pi}{\mathrm{q}} & \mathrm{x} & + \dfrac{\pi\varphi}{\mathrm{a}^2} & \mathrm{xy} & \textit{gestr.} \\ + & \omega\mathrm{d} & + \dfrac{\omega}{\mathrm{a}}\psi & \ldots & + \dfrac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{q}} & \ldots & + \dfrac{\omega\varphi}{\mathrm{a}^2} & \ldots & \end{array}\right| \quad L$$

14 fig. *(1)* 2. pag. sup. *(a)* pone scilicet GN ⊓ v et HN ⊓ Z. GL ⊓ y et *(b)* pone scilicet *(2)* 3. *L*

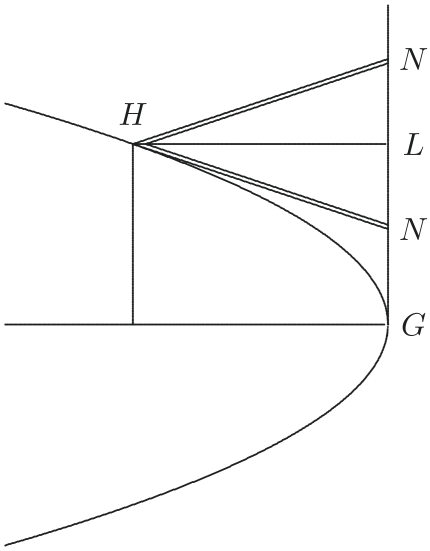


fig. 3

Cum sit $GL \sqcap y$ et $LH \sqcap x$. erit $GN \sqcap v$ et $HN \sqcap z$. Posita jam $\frac{x}{y}$ seu $\frac{HL}{HN} \sqcap \frac{a}{e}$ erit $x \sqcap \frac{a}{e}z$. et LN^2 erit $z^2 - \frac{a^2}{e^2}z^2$ sive $LN \sqcap z\sqrt{1-\frac{a^2}{e^2}}$, eritque $GL \sqcap GN + LN$, sive $y \sqcap v + z\sqrt{1-\frac{a^2}{e^2}}$. Repertis ergo ipsarum x, et y valoribus in Aeq. (A) substitutis, fiet

$$\left.\begin{array}{lllll} \dfrac{2a^2}{e}\; z & \mp\dfrac{a^3}{qe^2}\; z^2 & -v^2 & -2\sqrt{\dots} & vz \\ & -1+\dfrac{a^2}{e^2}, \quad \dots & & & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sqcap 0. \\ \text{Aeq. (C)} \end{array}$$

Iisdem substitutis in Aequatione (B), prodibit Aequatio (D) ejusmodi:

$$\left.\begin{array}{lllll} +\dfrac{\beta\mu}{qa}\; z^2 & \mp\dfrac{\beta\mu}{qa} \frown \dfrac{a}{e}\; vz & \mp\dfrac{d\mu a}{qe}\; z & [+]\; \dfrac{\beta\mu}{a}\; v & +d\mu \\ -\dfrac{\beta\mu}{a^2} & -\dfrac{\beta\mu}{a^2} \quad \dots & \left.\begin{array}{l} +\dfrac{\beta\mu}{a} \\ -\dfrac{f\mu}{a} \end{array}\right\}\sqrt{\dots}\dots & -\dfrac{f\mu}{a}\dots & \end{array}\right\} \begin{array}{l} \sqcap 0 \\ \text{Aeq. (D)} \end{array}$$

Addatur aequatio (C) multiplicata prius per arbitrariam quandam $\frac{\pi}{a}$

$$\begin{array}{lllll} \dfrac{a^2\pi^2}{qe^2}\; z^2 & -\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\dots} & \dots -\dfrac{\pi}{a}v^2 & +\dfrac{2a\pi}{e} & \dots \\ -1+\dfrac{a\pi}{e^2}\dots & & & & \end{array}$$

$\sqcap 0.$ Aeq. E.

Brachylogiae causa faciemus imposterum: $\frac{\beta\mu}{a} - \frac{f\mu}{a} \underset{*}{\sqcap} \frac{\psi\mu}{a}$. $*$

Productum seu Aequatio (E) dividatur per cognitam ipsius v^2, nempe per $-\frac{\pi}{a}$. Fiet aequatio:

$$\left.\begin{array}{l} \left.\begin{array}{lll} \frac{\dots}{-\frac{\pi}{a}}\, z^2 & \left\{\begin{array}{l} \frac{\mu a}{e\varphi} \\[2ex] \frac{-2\frac{\pi}{a}\sqrt{\dots}}{-\frac{\pi}{a}} \end{array}\right. & \begin{array}{l} vz \; \boxed{+v^2} \; \frac{\dots}{-\frac{\pi}{a}}\, z \quad \frac{\dots}{-\frac{\pi}{a}}\, v \; \frac{d\mu}{-\frac{\pi}{a}} \\[2ex] \dots \end{array} \end{array}\right\} \begin{array}{l}\sqcap 0.\\ \text{Aeq. (F)}\end{array} \\[2ex] \text{Haec Aeq. (F) addatur Aeq. (C) fiet:} \\[1ex] ǂ\, \frac{a^3}{qe^2} \dots \quad -2\sqrt{\dots} \quad \dots \boxed{-v^2} + \frac{2a^2}{e} \quad \dots \end{array}\right\} \begin{array}{l}\sqcap 0.\\ \text{Aeq. (G)}\end{array}$$

Producta Aequatio G, carebit termino v^2 . Dividatur per cognitam Termini z^2 nempe

$$\frac{ǂ\frac{a^2\pi}{qe^2} - 1 + \frac{a\pi}{e^2}}{-\frac{\pi}{a}}\; ǂ\, \frac{a^3}{qe^2}, \text{ sive per } \frac{\boxed{ǂ\frac{a^2\pi}{qe^2}} - 1 + \frac{a\pi}{e^2}\boxed{\ddagger\frac{a^2\pi}{qe^2}} + \frac{\varphi}{\mu}}{-\frac{\pi}{a}}.$$

1 Brachylogiae ... $*$ *erg. L* 2 seu Aeqvatio (E) *erg. L* 2 per *(1)* $ǂ\frac{\beta\mu}{\mathrm{qa}} - \frac{\beta\mu}{\mathrm{a}^2}$ sive βραχυλόγως per $\frac{\mu}{\varphi} - \frac{\pi}{\mathrm{a}}$ *(2)* $-\frac{\pi}{\mathrm{a}}$ *L* 7 *(1)* | Ab *nicht gestr.* | haec Aeq (F) auferatur Aeq (C), fiet: Aeq. (G) *(2)* haec *L* 9 termino v^2. *(1)* Resumta Aeqvatio E dividatur per $ǂ\frac{\mathrm{a}^2\pi}{\mathrm{qe}^2} + \frac{\mathrm{a}\pi}{\mathrm{e}^2} - 1$, sive βραχυλόγως per $\frac{\gamma\pi}{\mathrm{e}^2} - 1$ ponendo $\frac{\gamma}{\mathrm{a}} \sqcap 1\, ǂ\, \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ | At vero *nicht gestr.* | *(a)* habemus jam tum Aeqvationem, qvod in hoc problemate feliciter ad calculum contrahendum evenit, *(b)* habemus jam tum Aeqvationem, nempe D, caret termino z^2. Eam ergo *(2)* Dividatur *L* 10–440,1 $\frac{\boxed{ǂ\frac{\mathrm{a}^2\pi}{\mathrm{qe}^2}} - 1 + \frac{\mathrm{a}\pi}{\mathrm{e}^2}\boxed{\ddagger\frac{\mathrm{a}^2\pi}{\mathrm{qe}^2}} + \frac{\varphi}{\mu}}{-\frac{\pi}{\mathrm{a}}}$ *(1)* sive βραχυλόγως, per $\frac{\psi\pi}{\mathrm{e}^2} - 1\, ǂ\, \frac{\mathrm{a}^3\mu}{\varphi\mathrm{e}^2\mathrm{q}, \smile \frac{\mu}{\gamma} + \frac{\pi}{\mathrm{a}}}$ fiet: *(2)* Qvod anteqvam faciamus, *(3)* Qvod *L*

Quod antequam faciamus, notabimus tantum, in eadem aequatione G, cognitam ipsius vz, nempe $\dfrac{\dfrac{\mu a}{e\varphi} - \dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\ldots}}{-\dfrac{\pi}{a}} - 2\sqrt{\ldots}$, posse similiter contrahi, reducendo enim partes ejus ad communem denominatorem, fiet $\dfrac{\dfrac{\mu a}{e\varphi}\boxed{-\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\ldots}}\boxed{+\dfrac{2\pi}{a}\sqrt{\ldots}}}{\dfrac{\pi}{a}}$.

Reducemus ergo et cognitam ipsius z, ad unum partium denominatorem, nempe $\dfrac{\ddagger\dfrac{d\mu a}{qe} + \dfrac{\psi\mu}{a}\sqrt{\ldots} + \dfrac{2a\pi}{e}}{-\dfrac{\pi}{a}} + \dfrac{2a^2}{e}$ fiet $\dfrac{\ddagger\dfrac{d\mu a}{qe}\boxed{+\dfrac{2a\pi}{e}} + \dfrac{\psi\mu}{a}\sqrt{\ldots}\boxed{-\dfrac{2a\pi}{e}}}{-\dfrac{\pi}{a}}$. Atque ita Aequatio G. commutabitur in Aequationem (H) quae sit talis:

$$\left.\begin{array}{l} z^2 * v^2 \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{llllllll} -\dfrac{\mu a}{e\varphi} & vz & +\dfrac{\psi\mu}{a} & v & \ddagger\dfrac{d\mu a}{qe} & z & +d\mu \\ -\dfrac{2\mu\sqrt{\ldots}}{\varphi} & .. & & & +\dfrac{\psi\mu}{a}\sqrt{\ldots} & .. & \end{array}\right\}}{-1+\dfrac{a\pi}{e^2} \quad \ddagger\dfrac{\varphi}{\mu} - \quad y\dfrac{\pi}{a}} \end{array}\right\} \sqcap 0. \text{ Aeq. H.}$$

Quoniam autem in hoc problemate feliciter ad calculum contrahendum, evenit, ut jam habeamus aequationem, nempe D in qua sola ex incognitis v ascendat ad quadratum, ideo divisam per cognitam ipsius v^2, nempe $\dfrac{\mu}{\varphi}$, addemus aequationem (H).

Quare id quod addemus ipsi (H) erit tale:

$$\begin{array}{lllllllll} v^2 & +\dfrac{a}{e} & .. & +\dfrac{\psi\varphi}{a} & .. & \ddagger\dfrac{d\varphi a}{qe} & .. & +d\varphi \\ & & & & & +\dfrac{\psi\varphi\sqrt{\ldots}}{a} & .. & \end{array}$$

$\Bigg\}\ \sqcap 0.$ Aequatio ad Circulum

Quae ut contrahahtur quantum possibile est, ideo faciemus $-1 + \frac{a\pi}{e^2} \mp \frac{a^3\mu}{qe^2\varphi} \sqcap 1$. Quod utique facile est nobis, cum π pro arbitrio assumta sit, nec alibi in tota aequatione producta reperiatur, faciemus ergo $\frac{+e^2q\varphi \mp a^3\mu}{aq\varphi} \sqcap \pi$. et summa producta erit 1, ac proinde in aequatione producta plane omitti poterit, cum unitas dividendo nil mutet; conferatur jam aequatio ad Circulum producta, cum alia aequatione ad Circulum comperta, factitia, simili,

$$\begin{array}{cccccccc} z^2 & -v^2 & +\sqrt{\ldots}\,vz & +g\sqrt{\ldots}\;v & +gz & +\theta a & \sqcap 0 \\ & & & -\dfrac{\lambda a}{e} & \ldots & & \end{array}$$

statim habetur θ. per μ. cumque ab ipsa θ nihil vicissim dependeat potest pro cognita haberi. Restant Aequationes collatitiae tres. Indeterminatae vero numero quatuor, e. μ. g. λ. Collatione cognitarum ipsius vz fiet aequatio haec: $\sqrt{\ldots} \sqcap \dfrac{\frac{\mu}{\varphi} + 1, \frown \frac{a}{e}}{\frac{2\mu}{\varphi} + 1}$, vel $\frac{\mu + \varphi}{2\mu + \varphi} \frown \frac{a}{e} \sqcap \sqrt{\ldots}$, vel $1 - \frac{\mu}{2\mu + \varphi}, \frown \frac{a}{e} \sqcap \sqrt{\ldots}$ et utrobique quadrando fiet $1 - \frac{2\mu}{2\mu + \varphi} + \frac{\mu^2}{4\mu^2 + 4\mu\varphi + \varphi^2} \sqcap \dfrac{1 - \frac{a^2}{e^2}}{\frac{a^2}{e^2}}$ vel $\sqcap \frac{e^2}{a^2} - 1$. Ex cognitis ipsius z, pro $\sqrt{\ldots}$ substituendo ejus valorem inventum, fiet: $\frac{da}{qe},, + \frac{\psi}{a}, \frown + \frac{\varphi + \mu}{2\mu + \varphi},,, \frown \frac{a}{e}, \frown \varphi + \mu \sqcap g$. Sumta ergo μ pro arbitrio, habetur e, vel contra; et his habitis, g et habita g etiam λ. Non licet tamen ponere $\mu + \varphi \sqcap 0$, alioquin enim fieret aequatio $z^2 + v^2 \sqcap 0$ et $\sqrt{\ldots} \sqcap 0$. et angulus non obliquus sed rectus. Et tamen nondum videre possim quid nos talem suppositionem facere prohibeat; fierent autem duo loca: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$, et $x^2 + y^2 \sqcap 0$ quorum intersectione solveretur problema; sed hoc utique absurdum est, tunc enim d. et f. nihil ad rem pertinerent. Etsi vellem id revincere posse a priori ex calculo ipso. Vid. plag. seq.

10 tres. *(1)* Incognitae *(2)* Indeterminatae *L*

---

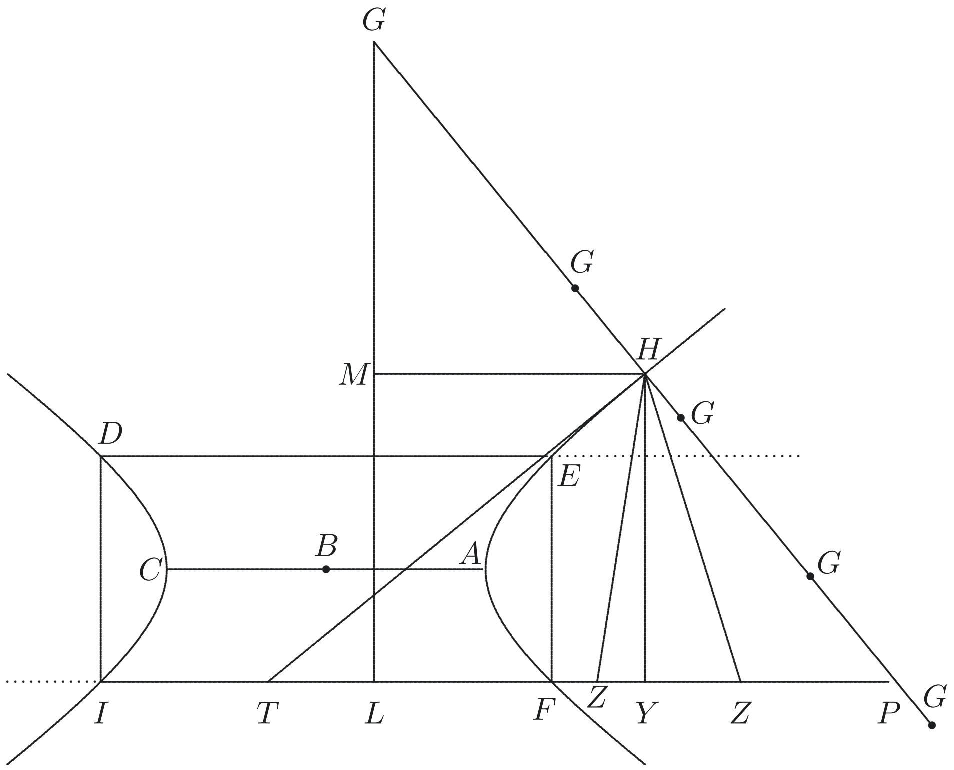
20 Vid.: N. 41.

41. EX PUNCTO DATO MINIMAM SIVE PERPENDICULAREM DUCERE [Oktober – Dezember 1674]

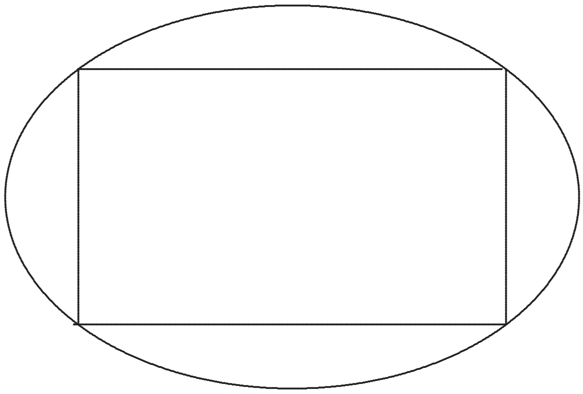
Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 73–74. 1 Bog. 2°. 4 S. — Zusätzliche Nebenbetrachtungen und Rechnungen auf LH 35 XIII 3 Bl. 195 (= VII, 1 N. 132).
Cc 2, Nr. 856 B

Datierungsgründe: s. N. 38.

Ex puncto dato minimam sive perpendicularem ducere ad sectionem conicam datam specie indefinitam



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]

Punctum datum esto G. ex quo ad Sectionem Conicam $A\,E\,H$ ducenda est perpendicularis. Putetur factum quod postulatur, et punctum Sectionis Conicae esse H. Ipsi Sectioni Conicae utrinque completae inscriptum intelligatur Rectangulum concentricum $DEFI$ id est cujus centrum B idem sit cum centro sectionis, et latus aliquod IF, axi sectionis AC parallelum, et anguli quatuor D. E. F. I, sectioni datae aut ejus oppositae occurrant. In latus IF productum si opus est ex puncto quaesito H demittatur perpendicularis HY, et puncto dato G, perpendicularis GH eidem occurrat in puncto P, producta si opus est, perpendicularis GH. In puncto quaesito H curvam tangere intelligatur recta TH. ipsi IF productae si opus est occurrens in T.

Nunc ut ad calculum nobis gradum faciamus, ponamus latus rectum curvae, a, latus vero transversum sive axem AC, appellemus q. Recta IF esto $2b$. et $EF \sqcap 2e$, et $GL \sqcap d$. ($^{+}\dagger$)$LF \sqcap f$ et $FY \sqcap x$. et $HY \sqcap y$.

Nunc ex natura Sectionis Conicae in genere aequationem habemus hanc, alibi a me demonstratam: $\pm\dfrac{a}{q}x^2 + y^2 - 2bx + 2ey \sqcap 0$. Superest ergo ut ex iis quae in problemate data sunt quaeramus aequationem ad circulum, earundem incognitarum cum aequatione ad sectionem conicam, ita enim intersectione ejus et Conicae datae, solvetur

4 concentricum *erg. L* 8 et ... GH *erg. L* 10 productae ... est *erg. L*

14 alibi: Vgl. N. 27 S. 282 Z. 4–11.

problema. Ut compendio ad aliam adhuc aequationem perveniamus quae reliquas problematis conditiones includat, quaeramus rectam TY sive t methodo tangentium nota. Fiet $2y^2 + 2ey \sqcap \mp\dfrac{2a}{q}tx + 2bt$, et fiet $t \sqcap \dfrac{y^2+ey}{\mp\dfrac{a}{q}x+b} \sqcap TY$. Porro y seu HY est media proportionalis inter TY seu t et $YP \sqcap p$. seu $\dfrac{y^2p+eyp}{\mp\dfrac{a}{q}x+b} \sqcap y^2$. Erit $p \sqcap \dfrac{\mp\dfrac{a}{q}xy+by}{y+e} \sqcap YP$.

Jam ob Triangula GMH, HYP similia est ut GM (seu GL [)] ad LY ita HY ad YP, sive $\dfrac{d+\dfrac{\beta}{a}y}{f+\dfrac{\beta}{a}x} \sqcap \dfrac{y}{p}$. Nota autem hoc loco ob signorum multiplicem ambiguitatem ex vario situ puncti G ortam, me appellasse $\pm LF \sqcap f$. et ut varia signa ipsi x, hoc loco praefigenda evitarem, quae methodo mea aliquando repetitis characteribus exprimenda essent, posuisse $\dfrac{\beta}{a} \sqcap (\pm)1$. Explicando ergo p erit analogia talis: $\dfrac{d+\dfrac{\beta}{a}y}{f+\dfrac{\beta}{a}x} \sqcap \dfrac{\cancel{y}}{\dfrac{\mp\dfrac{a}{q}x\cancel{y}+b\cancel{y}}{y+e}}$, sive $\dfrac{d+\dfrac{\beta}{a}y}{f+\dfrac{\beta}{a}x} \sqcap \dfrac{y+e}{\mp\dfrac{a}{q}x+b}$. Ac proinde $\mp\dfrac{da}{q}x+db \mp\dfrac{\beta}{q}xy+\dfrac{\beta}{a}by \sqcap fy+\dfrac{\beta}{a}xy+ef+\dfrac{\beta e}{a}x$ sive fiet aequatio altera:
$$\begin{array}{llll} \dfrac{\beta}{a}\;xy & +\dfrac{be}{a}\;x & +f\;\;y & +ef \sqcap 0 \\ \mp\dfrac{\beta}{q}\;.. & \mp\dfrac{da}{q}\;... & -\dfrac{\beta}{a}\;... & -db \end{array}$$
Aeq. (2) quae est ad Hyperbolam lateris recti transversique aequalis ad asymptotos rectangulas et cum Aeq. (1) $\pm\dfrac{a}{q}x^2+y^2-2bx+$

7 me *(1)* literis ⟨—⟩lti *(2)* appellasse *L*   10 $\mp\dfrac{\beta}{q}$xy $+\dfrac{\beta}{a}$by *erg. L*   11 $\sqcap$ 0. *(1)* sive per Brachylogiam: $\dfrac{\beta}{a}$xy − cx + sy + ga $\sqcap$ 0 Aeq. (2) Qvam et conferendo cum *(2)* Aeq. (2) *L*

6 sive: Leibniz übernimmt den folgenden Ansatz aus N. 40 S. 436 Z. 7 f.

$2ey \sqcap 0$. ad Conicam datam conjuncta utique sufficeret ad solvendum problema; nisi nunc quidem Aequationem ad Circulum quaereremus. Quoniam autem in Aeq. 2. habetur xy, ideo Aequatio ad Circulum quaerenda non potest ordinatas habere ad angulos rectos. Quare etiam locus ad Sectionem Conicam transmutandus est in alium, ordinatarum obliquarum.

Igitur angulo quolibet pro arbitrio assumto ZHY, ex puncto Conicae quaesito H, recta intelligatur duci HZ ipsi IF productae si opus est, occurrens in Z. Quoniam Triangulum ZYH rectangulum est, unusque obliquorum, datus sive assumtus data erit ratio laterum, esto ergo $\dfrac{HY}{HZ} \sqcap \dfrac{h}{a}$. HZ appellemus v, et FZ vocemus z. Erit $\dfrac{y}{v} \sqcap \dfrac{h}{a}$, sive $y \sqcap \dfrac{h}{a}v$. Porro quoniam HZ possumus intelligere ductam vel supra Y versus F, vel infra Y versus P. ponamus ductam infra Y, et erit FZ seu $z \sqcap FY + YZ$, seu $x + YZ$. Erit ergo $x \sqcap z - YZ$. Est autem $YZ \sqcap \sqrt{v^2 - \dfrac{h^2}{a^2}v^2}$ sive $v\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}$. Erit ergo $x \sqcap z - v\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}}$. Et $x^2 \sqcap z^2 - 2zv\sqrt{1 - \dfrac{h^2}{a^2}} \begin{matrix} +\,1 \\ -\dfrac{h^2}{a^2} \end{matrix}\, v^2$ et $xy \sqcap \dfrac{h}{a}vz^2 - \dfrac{h}{a}\sqrt{\ldots}v^2$. Quibus valoribus ipsius y et x in aequationibus 1. et 2. substitutis, ex Aeq. 1 fiet

$$\text{Aeq. (3)}\quad \underset{(l)}{\pm\frac{a}{q}\,z^2}\quad \underset{(\text{♉})}{\mp\frac{2a}{q}\sqrt{\ldots}\;zv}\quad \underset{(m)}{\begin{matrix}\pm\dfrac{a}{q} \\ \dfrac{\gamma h^2}{a^3}\left\{\begin{matrix}\mp\dfrac{h^2}{aq}\;.. \\ +\dfrac{h^2}{a^2}\;..\end{matrix}\right.\end{matrix}}\; v^2\quad \underset{(n)}{-2b\,z}\quad \underset{(p)}{\left\{\begin{matrix}+2b\sqrt{\ldots}\,v \\ +\dfrac{2eh}{a}\quad ..\end{matrix}\right.}\quad \sqcap\; 0$$

Ex 2. Aeq. fiet

13 et xy $\sqcap \ldots \sqrt{\ldots}\mathrm{v}^2$ *erg. L*

$$\text{Aeq (4) } 0z^2 \begin{array}{c} \\ (q) \end{array} \left\{\begin{array}{l} \frac{\beta h}{a^2}.. \\ \pm\frac{\beta h}{qa}.. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} -\frac{\beta h}{a^2}\sqrt{\ldots}\,.. \\ \mp\frac{\beta h}{qa}\sqrt{\ldots}\,.. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{l} +\frac{\beta e}{a}\,.. \\ \pm\frac{de}{a}\,.. \end{array}\right. \left\{\begin{array}{ll} -\frac{\beta e}{a}\sqrt{\ldots}\,.. & \left\{\begin{array}{l} +ef \\ -dl \end{array}\right. \\ \mp\frac{de}{a}\sqrt{\ldots}\,.. & \\ +\frac{fh}{a}\qquad .. & (c) \\ -\frac{\beta h}{a^2}\qquad .. & \end{array}\right\} \sqcap 0.$$

$$\qquad\qquad (w) \qquad\quad (r) \qquad\qquad (s) \qquad\qquad (t)$$

$$\text{Unde Aeq. ad Circulum: } v^2+x^2 \mp \frac{2ra}{q}\sqrt{\ldots}\,vx + rp\,a\;x + rn\;\;y$$
$$\frac{\begin{array}{l} +\,l\;\;w\qquad ..\;+\;t\;a\,..+ls\;\;..+\;l\;c \\ -\,m\,..\qquad ..\;-\,m\,..\,..-ms\,..-\,m\,.. \end{array}}{-rl \sqcap \pm\frac{a}{q} \frown -r \sqcap \mp\frac{ra}{q}}$$

Unde $2\sqrt{\ldots}+\dfrac{lw-mw}{-rl} \sqcap 2\sqrt{\ldots}$. Ergo $l-m \sqcap 0$. Ergo vel g ut in Circulo, vel in caeteris $h \sqcap 0$. Sed hinc absurdum. Tota enim aequatio inferior seu (4) evanescit. Tantum ergo ponatur $x \sqcap z+\sqrt{\ldots}v$, non $z-\sqrt{..}v$, neque $-z+\sqrt{\ldots}v$ sed punctum Z cadet inter F et Y. atque ita absurditas cessabit.

Ad eundem calculum aliter perveniemus: Sie ex eodem puncto ducta perpendiculari ad Sectionem Conicam, ordinata non ad latus rectanguli inscripti productum, sed in axem Conicae sectionis demittatur. Qua ordinata appellata y, et abscissa x, erit aequatio: $2ax \mp \dfrac{a}{q}x^2 - y^2 \sqcap 0$ Aeq. (1). Et ob Triangula similia erit $\dfrac{d+\frac{\beta}{a}y}{f+\frac{\beta}{a}x} \sqcap \dfrac{y}{a\mp\frac{a}{q}x}$. Est enim $p \sqcap a \mp \dfrac{a}{q}x$. Unde $da+\beta y \mp \dfrac{da}{q}x \mp \dfrac{\beta}{q}xy \sqcap fy+\dfrac{\beta}{a}yx$. Unde

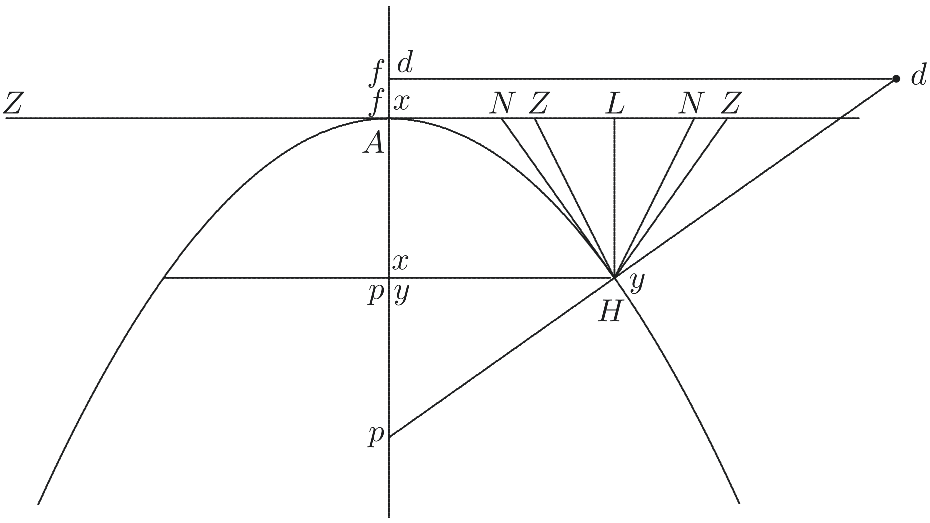
---

6 *Darüber:* $\gamma \sqcap a \mp \dfrac{a^2}{q}$.

7 $\sqcap 2\sqrt{\ldots}$ *(1)* Arbitraria ad Circulum factitia: v^2+z^2 *(a)* + gz *(b)* + $2\sqrt{\ldots}$ vz − gz − g$\sqrt{\ldots}$ v $\sqcap 0$. Hinc collatitiae *(2)* Ergo *L*

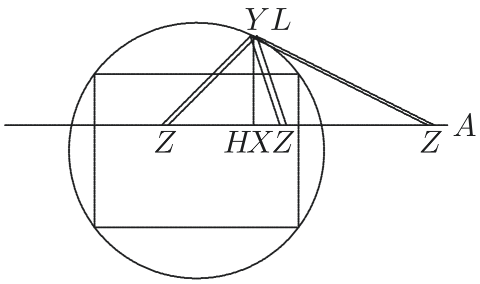
$$\frac{\varphi}{a}\left\{\begin{array}{l}\mp\dfrac{\beta}{q}yx\\[2ex] -\dfrac{\beta}{a}\end{array}\right. \quad \psi\left\{\begin{array}{l}+\beta\ y\mp\dfrac{da}{q}x+da\sqcap 0 \text{ Aeq. (2)}\\[2ex] -f\ ..\end{array}\right.$$

sive per brachylogiam: $\dfrac{\varphi}{a}yx+\psi y\mp\dfrac{da}{q}x+ad\sqcap 0.$

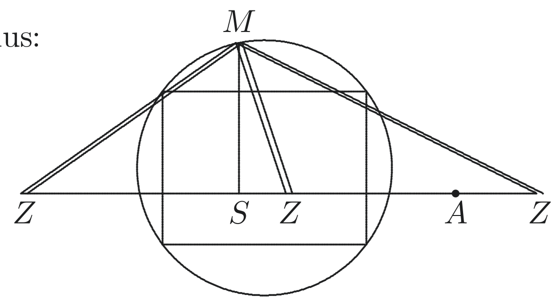


[*Fig. 3*]

3–449,17 *Nebenbetrachtung:* Si Z. caderet ultra A. fieret $AL\sqcap ZL-AZ$. Sed si Z. cadat ultra L. constanter erit $AL\sqcap -ZL+AZ$.



Imo sic potius:



Esto $AS\sqcap s$. $HS\sqcap t$. $HZ\sqcap z$. $AZ\sqcap v$. $\dfrac{HS}{HZ}\sqcap\dfrac{a}{e}$. HS seu $t\sqcap\dfrac{a}{e}z$. $t^2\sqcap\dfrac{a^2}{e^2}z^2$. $zs\sqcap$

Ex puncto quaesito H. ad Tangentem verticis AL ducatur recta z sive HN ita ut angulus HNL sit obliquus, recta HL est perpendicularis. Recta ergo z vel supra vel infra L cadere potest. Ponatur HL ad HZ seu $\dfrac{x}{z}$ ut a ad e. Erit $x \sqcap \dfrac{a}{e}z$ et AL seu y erit $\sqcap AZ(\ddagger)ZL$ sive $y \sqcap v(\ddagger)ZL$. Est autem $ZL \sqcap z\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$. Ergo $y^2 \sqcap v^2(\ddagger)2\sqrt{\ldots}vz+z^2 \frown 1-\dfrac{a^2}{e^2}$. Et hos valores aequationibus inserendo,

---

$z\sqrt{1-\dfrac{a^2}{e^2}}$. $AS \sqcap AZ-SZ$. sive $s \sqcap v(\ddagger)z\sqrt{m}$. Ergo $s^2 \sqcap v^2(\ddagger)2vz\sqrt{m}+z^{[2]} \frown {}_{[,]}\, 1-\dfrac{a^2}{e^2}$. Jam explicemus aequationem $s^2+t^2-gx-\theta a \sqcap 0$ omisso λt scilicet quia ut postea apparebit inutili fiet:

$$\begin{array}{lllllll} v^2 & +1\ \ z^2 & (\ddagger)\ 2vz\sqrt{m} & -g & (\ddagger)g\sqrt{m}z & -\theta a & \sqcap\ 0. \\ & \boxed{\begin{array}{l} -\dfrac{a^2}{e^2} \\ +\dfrac{a^2}{e^2} \end{array}} & & & & & \end{array}$$

Quae ut concilietur cum $w^2+r^2-mr+nw \sqcap 0$ potest poni $v \sqcap 0$ in Schemate sequenti: Sive conferenda cum $w^2+r^2-mr+nw \sqcap 0$. Esto $r \sqcap s+\odot$ et $w \sqcap t+\rightmoon$. fiet:

$$\begin{array}{llllll} t^2 & +2\rightmoon\, t & +\ \rightmoon^2 & +s^2 & +2\odot\, s & \\ & +n\ \ \ldots & +\odot^2 & & -m\ \ \ldots & \\ & & -m\odot & & & \\ & & +n\rightmoon & & & \end{array}$$

Omittatur $\rightmoon$ fiet $\lambda \sqcap n$. $\theta a \sqcap +m\odot-\odot^2$. $g \sqcap m-2\odot \sqcap -\psi$. Ergo $m \sqcap -\psi+2\odot$. Ergo $m\odot \sqcap -\psi\odot+2\odot^2$. Ergo $-da \sqcap -\psi\odot+\odot^2$ vel $da \sqcap \psi\odot-\odot^2$.

Daneben: $z^2 \sqcap -x^2$. Ergo $\dfrac{z}{-x} \sqcap$ [*bricht ab*]

3 AL | seu x *erg.*, *ändert Hrsg.* | erit L

ex Aeq. 1 fiet Aeq. (3)
$$\frac{2a^2}{e}\;z\qquad \frac{\gamma a}{e^2}-1\left\{\begin{array}{l} \text{ǂ}\,\dfrac{a^3}{qe^2}\;z^2\;\; -v^2\;(\ddagger)2\sqrt{\ldots}vz \qquad\qquad \sqcap 0\\ -1 \\ +\,\dfrac{a^2}{e^2}\end{array}\right.$$

Et ex aeq. 2. fiet Aeq. (4)
$$\begin{array}{lllll} (\text{ǂ})\psi\sqrt{\ldots}\;z & \dfrac{\varphi}{e} & z^2\;\; * & \dfrac{\varphi}{e}vz\;\; +da & \sqcap 0.\\ \text{ǂ}\;\dfrac{da^2}{qe}\;\; .. & & & & \end{array}$$

Prioris aequationis signis mutatis eam ita scribemus:

Aeq. (5)
$$(m)\left\{\begin{array}{l} -\dfrac{\gamma a}{e^2}\\ +1 \end{array}\right.\; z^2 - \frac{\gamma a}{e^2}z^2\;(p) - \frac{2a^2}{e}\qquad z\;\;(l)\;+v^2\;(\text{♉})\;(\text{ǂ})2\sqrt{\ldots}\;vz\;\;(n)\quad(b)$$
$$\qquad\qquad\qquad ..$$

relictis signis

Aeq. (4)
$$(r)\quad \frac{\varphi}{e}\sqrt{\ldots}\;..\qquad (t)\left\{\begin{array}{l} (\text{ǂ})\psi\sqrt{\ldots}\;..\\ \text{ǂ}\;\dfrac{da^2}{qe}\qquad .. \end{array}\right.\;(q)\;\; *\;\;(w)\;+\frac{\varphi}{e}\quad ..\;\;+\psi v+da$$

Unde fiet Aequatio ad Circulum:

$$\left.\frac{\begin{array}{l} v^2+z^2\;+r\;\;p\;\;z\;\;(\text{ǂ})\;\;2r\sqrt{\ldots}\;\;vz\\ \qquad\quad +\,l\;\;z\;\;..\;\;+\;\;l\;\;\dfrac{\varphi}{e}\quad ..\quad +\,l\;\;\varphi\;\;v\;+\,l\;\;d\\ \qquad\quad +\,m\;..\;\;..\;\;+\;\;m\;..\quad ..\quad -\,m\;..\;\;..\;-\,m\;.. \end{array}}{-r}\right\}\sqcap 0.$$

Conferendo cum factitia ad Circulum:
$$v^2+z^2-gz+2\sqrt{\ldots}\;vz-\;g\sqrt{\ldots}\;v-\theta a\sqcap 0.$$
$$\qquad\qquad\qquad\qquad +\frac{\lambda a}{e}\quad ..$$

Habebimus Aequationes collatitias sequentes, quarum ope ante invenietur e seu obliquitas anguli, per collationem terminorum vz, unde: $2\sqrt{\ldots}\sqcap\dfrac{(\text{ǂ})2r\sqrt{\ldots}+l\dfrac{\varphi}{e}-m\dfrac{\varphi}{e}}{-r}$. Unde jam patet primum signum (ǂ) debere explicari per $+$, alioquin $2\sqrt{\ldots}$ destruetur utrobique, et e fieret infinite longa, unde caetera absurda sequentur quae supra. Quare

18–451,2 Zu weiteren Rechnungen und Überlegungen zu diesem Abschnitt s. VII, 1 N. 132.

fiet: $2\sqrt{\ldots}\sqcap -2\sqrt{\ldots}\ \dfrac{+\frac{l\varphi}{e}-\frac{m\varphi}{e}}{-r}$, sive si mavis $\frac{4e}{\varphi}\sqrt{\ldots}\sqcap\frac{l-m}{-r}$. Sed $-r\sqcap-\frac{\varphi a}{e}\sqrt{\ldots}$. Ergo $\frac{4e}{\varphi}\sqrt{\ldots}\frown-\frac{\varphi}{a}\sqrt{\ldots}\sqcap l-m$. Ergo $-4a+\frac{4a^3}{e^2}\sqcap l-m$, sive $\sqcap a-m$. Nam l aequivalet hoc loco a seu unitati. At $-m\sqcap\frac{\gamma a^2}{e^2}-a$. Ergo $l-m\sqcap\cancel{a}+\frac{\gamma a^2}{e^2}-\cancel{a}$ et $-4a+\frac{4a^3}{e^2}\sqcap\frac{\gamma a^2}{e^2}$. Ergo $-4ae^2\sqcap\gamma a^3-4a^3$, sive $e^2\sqcap\frac{-\gamma a+4a^2}{4}$. Inventa ergo est e. Jam conferendo terminos z.

Erit $-g\sqcap p\,\frac{+at-mt}{-r}$ sive: $-\frac{2a^2}{e}\ \dfrac{+\psi\sqrt{\ldots}\mp\frac{da^2}{qe},\frown\boxed{\llcorner\underbrace{a-m}\lrcorner}\frac{\gamma a^2}{e^2}}{-r\sqcap-\frac{\varphi a}{e}\sqrt{\ldots}}$ fiet: $\dfrac{\dfrac{\frac{d^2a^8\gamma^2}{q^2e^4}}{-\frac{\gamma}{a}}-\frac{\omega^2a^6}{e^2}}{\varphi^2a^2}\sqcap$

---

3 *Am Rande:* $\sqrt{}-\gamma a_{[,]}+b\sqcap x$. Ergo $\underset{0}{\cancel{\gamma a}}\sqcap x^2-2bx+\underset{+\gamma a}{b^2}$. $\gamma+4a\sqcap\delta$.

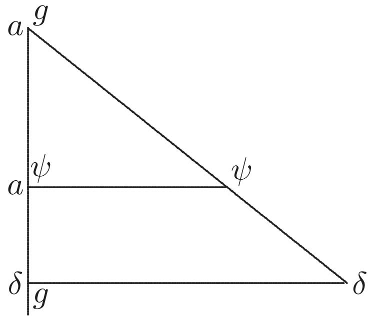
1 mavis *(1)* $\frac{4e\sqrt{\ldots}}{\varphi}\sqcap\frac{al-ma}{r}$ Est autem $l\sqcap a$. sive unitati: et $-m\sqcap\gamma\frac{a^2}{e^2}-a$ Ergo $\frac{4e\sqrt{\ldots}}{\varphi}\sqcap\frac{\gamma a^2}{e^2}$ *(2)* $\frac{4e}{\varphi}\sqrt{\ldots}$ *L* 1 $-r\sqcap-\frac{\varphi a}{e}\sqrt{\ldots}$ *(1)* Unde $\frac{4e\sqrt{\ldots}}{\varphi}\sqcap\frac{l-m}{a},\frown\frac{e\sqrt{\ldots}}{\varphi}$. *(a)* Ergo $4a\sqcap$ *(aa)* $\frac{l-m}{\langle - \rangle}$ *(bb)* $l-m$ *(b)* Jam $-m\sqcap+\frac{\gamma a^3}{e^2}-a$, et $l\sqcap a$ | seu unitati *erg.* | . Ergo $l-m\sqcap\cancel{a}+\frac{\gamma a^3}{e^2}-\cancel{a}$. Ergo $4a\sqcap\frac{\gamma a^3}{e^2}$. sive $e^2\sqcap\frac{\gamma a}{4}$ *(2)* Ergo *L* 5 $\dfrac{+\psi\sqrt{\ldots}\mp\frac{da^2}{qe},\frown\boxed{\llcorner\underbrace{a-m}\lrcorner}\frac{\gamma a^2}{e^2}}{-r\sqcap-\frac{\varphi a}{e}\sqrt{\ldots}}$ *(1)* sive *(2)* sive $+\varphi ag\sqcap-\frac{2a^2}{e}+e\psi\sqrt{\ldots}\mp\frac{da^2}{q},\frown\frac{\gamma a^2}{e^2}$ $\boxed{\text{Est autem } \frac{a^2}{e^2}\sqcap\frac{4}{-\frac{\gamma}{a}+4},\ \text{sive}\ \sqcap\frac{4a}{-\gamma+4a}}$ *(a)* | $1-\frac{a^2}{e^2}\sqcap 1-\frac{4}{-\frac{\gamma}{4}+4}$. Ergo $\sqcap\frac{\gamma}{a}+4-4$. Ergo $\sqcap-\frac{\gamma}{a}$ *nicht gestr.* | Qvoniam autem $\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}$ est qvantitas inexplicabilis *(b)* Ergo $\varphi ge\sqcap-2a^3+e\psi\sqrt{\ldots}\frac{\gamma}{a}\mp\frac{da^2}{q}e\frown\frac{4\gamma}{-\gamma+4a}$ sive $\varphi ged\sqcap-8a^3\gamma+ea^2\gamma\psi\sqrt{-\frac{\gamma}{a}}\mp\frac{da^2}{q}e\gamma$. Tollenda irrationalitas, est enim talis radix inexplicabilis, ideo tollendum est signum radicale *(aa)* fiet: *(bb)* et primum ordinetur sic: $\varphi ged+\underbrace{8a^3\gamma\pm\frac{da^2}{q}e\gamma}\sqcap$

$$\cancel{\varphi^2}\cancel{a^2}g^2 + \frac{2\omega a^3}{e\varphi a}g.\ \frac{a}{e} \frown \begin{cases} -\psi\gamma a & -\ \varphi\gamma\dfrac{a^2}{e}\ \ldots \\ +2\varphi a^2 & +\ \dfrac{2\varphi a^3}{e^{\cancel{2}}}\ \ldots \\ \dfrac{\omega a^3}{e} & \end{cases}$$

. Faciamus $\varphi a \sqcap \dfrac{a^{[2]}c}{e}$ erit $e\varphi \sqcap ac$. Unde

$$\frac{-d^2a^{\cancel{9}5}\gamma}{q^2e^2\cancel{a^4}c^2} - \frac{\omega^2a^{\cancel{6}2}}{\cancel{a^4}c^2} \sqcap g^2 + \frac{2\omega a^{\cancel{3}}}{\cancel{a^2}c}g.$$

Constructio autem ipsius g. ita habebitur. Suppono lineas φ. et ψ. γ. ductas, quod nullo negotio fit, d. a. q. datae sunt. e sic invenietur. Quaeratur media proportionalis inter a, et $-\dfrac{\gamma}{4} + 4a$. Ea erit e.



[*Fig. 4*]

Fiat $\delta a \sqcap \psi\gamma$, seu recta quae sit ad γ, ut ψ ad / vel recta quae sit ad ψ, ut γ ad a.

$\mathrm{ea}\gamma\psi\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\mathrm{a}}}$. Unde $\varphi^2\mathrm{e}^2\mathrm{d}^2\ \mathrm{g}^2$ ☿ $\begin{cases} +\ 16\mathrm{a}^3\gamma\ \varphi\mathrm{ed\ g} + \text{☿}^2\mathrm{a}^6 \sqcap -\ \mathrm{e}^2\mathrm{a}^2\gamma^3\psi^2 \\ \ddagger\ \dfrac{\mathrm{da}^2\mathrm{e}}{\mathrm{q}}\ \ldots.\ .. \end{cases}$ $2\varphi\mathrm{eda}^3$. In Ellipsi, ubi ǂ valet $-$, et $\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ $\sqcap \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{a}}$ ibi non opus est ista qvadratione tandem $\dfrac{-\mathrm{l}\psi + \mathrm{m}\psi}{\mathrm{r}} \sqcap -\mathrm{g}\sqrt{\ldots} + \dfrac{\lambda\mathrm{a}}{\mathrm{e}}$. sive $-\dfrac{\varphi\mathrm{a}}{\mathrm{e}}\mathrm{g}\sqrt{\ldots} \sqcap -\lambda\varphi\mathrm{e} - \dfrac{\gamma\mathrm{a}^2}{\mathrm{e}^2}$ sive $-\mathrm{g}\sqrt{-\dfrac{\gamma}{\mathrm{a}}} \sqcap -\dfrac{\gamma\mathrm{a}^2}{\mathrm{e}^2}$ *(3)* fiet: *L* 4 sunt. *(1)* Inveniatur $\dfrac{\gamma\mathrm{a}^2}{\mathrm{e}^2}$, seu $\dfrac{4\gamma\mathrm{a}^2}{-\gamma\mathrm{a} + 4\mathrm{a}^2}$ seu $\dfrac{4\gamma\mathrm{a}}{-\gamma + 4\mathrm{a}}$. Id est inveniatur linea qvae sit ad γ ut 4a, ad $-\gamma + 4\mathrm{a}$. Inveniatur et ipsis e. φ. a. qvarta proportionalis seu recta qvae sit ad φ, ut e ad a. seu *(a)* qvae *(b)* cuius ratio ad φ sit in subduplicata ratione *(aa)* $\dfrac{4\mathrm{a}}{-\gamma + 4\mathrm{a}}$ *(bb)* $\dfrac{-\gamma + 4\mathrm{a}}{4\mathrm{a}}$ *(cc)* Item inveniatur $\dfrac{\gamma\mathrm{a}^3}{\mathrm{q}^2\mathrm{e}^2}$, *(aaa)* qvi *(bbb)* seu *(2)* e sic *L*

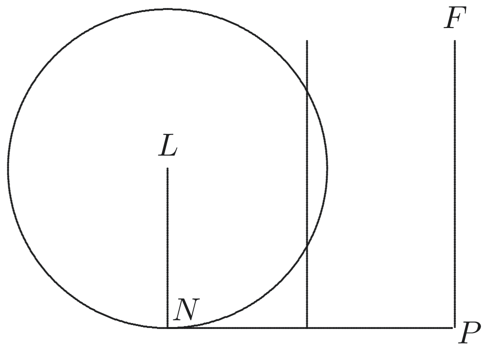
ipsis $a.\ \psi.\ \gamma.$ quarta proportionalis. Summa ipsarum $-\delta + 2\varphi$ appelletur ω.
item ipsis $a.\ e.\ \varphi.$ .... $\sqcap\ c \sqcap \dfrac{e\varphi}{a}$.
item $c.\ \omega.\ a.$ .... $\sqcap\ \dfrac{\omega a}{c} \sqcap \mu$.

Quaeratur recta quae sit ad compositam rationem γ ad q. et a ad q, et $4a$ ad $-\gamma+4a$. Compendii causa vocabimus π ad a. Aequatio erit ejusmodi: $-\dfrac{\pi}{a}\ \underset{\frac{\mu^2 d^2}{\omega^2}}{\cancel{\xi^2}} - \mu^2 - 2\mu g \sqcap g^2$.

Radio 2μ describatur circulus. Sumatur recta, quae possit $-\dfrac{\pi d^2}{a} - \omega^2$, mutatis tamen hujus valoris signis, si eum contingat explicatione ipsarum π et ω reperiri negativum seu nihilo minorem: fiat alia quae sit ad μ, ut ipsa ad ω: quam vocemus ϖ.

Centro L, Radio $LN \sqcap 2\mu$ describatur circulus, quem recta $\varpi \sqcap NP$ extremitate sua tangat. Quod si jam valor potestatis dictae fiat negativus erigatur ex altero ipsius ϖ extremo PF normalis in partes N. Sin fiat affirmativus ducatur recta PL. Recta inter punctum P, et aliud quo Circulo occurrit, intercepta erit g quaesita.

3 f. $\dfrac{\omega \mathrm{a}}{\mathrm{c}} \sqcap \mu$. *(1)* Et alia ξ qvae sit ad μ, ut d ad ω. Fiat qvadratum, qvod sit ad qvadratum ipsius ξ in composita ratione $\dfrac{\gamma \mathrm{a}}{\mathrm{q}^2} \sqcap \dfrac{\mathrm{qa}^2 \mp \mathrm{a}^3}{\mathrm{q}^3}$ et $\dfrac{4\mathrm{a}}{-\gamma + 4\mathrm{a}}$ seu *(a)* et $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\mathrm{a}^2}$ *(b)* Hoc qvadratum *(aa)* addatur qvadrato ipsius ξ. *(bb)* appelletur *(2)* Qvaeratur recta *(a)* qva π *(b)*, qvae sit ad *(aa)* ipsam ξ in *(bb)* compositam *L* 4 a ad q. *(1)* qvam rationem compendii causa vocabimus π ad a, erit ea recta $\dfrac{\pi\xi}{\mathrm{a}}$. Rectangulum sub ipsa et ξ, *(a)* nempe *(b)* erit $\dfrac{\pi}{\mathrm{a}}\xi^2$ Jam ad haben *(2)* et 4a *L* 5 ejusmodi: *(1)* $-\pi\xi^2 - \mathrm{e}^2 \sqcap \mathrm{g}^2$ *(2)* $-\dfrac{\pi}{\mathrm{a}}$ *L* 6 circulus. *(1)* qvem tangat recta *(a)* $\dfrac{\mathrm{e}^2}{\omega}$ *(b)* | $\dfrac{\cancel{\mu}}{\omega}$, $\frown \sqrt{\dfrac{\pi \mathrm{d}^2}{\cancel{\omega}\mathrm{a}^2} - \omega^2} \sqcap \dfrac{\varpi}{\mu}$ $\dfrac{\mu}{\omega} \sqcap \dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{c}}$ *nicht gestr.* | *(2)* Sumatur recta | ϖ *erg. u. gestr.* |, qvae *(a)* sit latus qvadrati cuius valor *(b)* possit *L* 8 f. vocemus ϖ. *(1)* Centro ⟨—⟩ tangat *(2)* centro *L* 10 negativus *(1)* | ducatur *nicht gestr.* | recta *(2)* erigatur *L*



[*Fig. 5*]

$$\text{Jam } \frac{\lambda a}{e} - g\sqrt{-\frac{\gamma}{a}} \sqcap \frac{l-m, \frown \psi \text{ seu } \dfrac{\gamma a^2}{e^2}\psi}{-rm - \dfrac{\varphi}{e}\sqrt{\ldots}}, \text{ fiet } \frac{+\lambda a\cancel{\varphi}}{e\cancel{^2}}\sqrt{-\frac{\gamma}{a}} - g \frown \frac{\cancel{\varphi} a}{\cancel{e}} - \frac{\gamma}{a} \sqcap \frac{\gamma a\psi}{-\varphi e}.$$

$$\text{Ergo } \frac{\lambda a}{e}\sqrt{-\frac{\gamma}{a}} \sqcap -\frac{\gamma a\psi}{\varphi e} - \frac{\gamma g}{a}, \text{ et } -\frac{\lambda^2 a^{\cancel{2}}\cancel{\gamma}}{e^2\cancel{a}} \sqcap \frac{\gamma^{\cancel{2}}a^2\psi^2}{\varphi^2 e^2} + \frac{2\gamma^{\cancel{2}}\cancel{a}\psi g}{\varphi e\cancel{a}} + \frac{\gamma^{\cancel{2}}g^2}{a^2}.$$

$$\frac{\lambda^2 a^2}{e^2} \frown -\frac{\gamma}{a} \sqcap \frac{+\dfrac{\gamma^2 a^2\psi^2}{\varphi^2 e^2} + \dfrac{2\gamma^2 ag\psi}{\varphi ea} + \dfrac{\gamma^2 g^2}{a^2}}{-\dfrac{\gamma}{a}}, \text{ sive } \lambda^2 \sqcap \frac{-\dfrac{\gamma\psi}{\varphi} - \dfrac{\gamma ge}{a^2}}{-\dfrac{\gamma}{a}}.$$

Unde sequi videtur λ esse quantitatem imaginariam, nisi rursus quadres, fiet enim: $\lambda^4 \sqcap \gamma^4 \frown \dfrac{\psi}{\varphi} + \dfrac{\gamma e}{a^2}, \smile \dfrac{\gamma^2}{a^2}$. Sed ita non habebimus desideratum.

Videamus an rem sic de integro commodius instituere liceat. Duas habemus aequationes, alteram ad sectionem Conicam datam:

$$m\pi\, z^2 \quad \pi p \quad z \; +a\pi v^2 \; \ddagger\; 2a\pi\sqrt{\ldots}\, vz \qquad * \qquad * \qquad \sqcap \; 0 \text{ , alteram:}$$

$$\gamma\omega\, z^2 \; +\omega t\, z \qquad * \qquad + \quad w\omega \quad .. \; +\psi\omega av \; +da^2\omega \; \sqcap \; 0.$$

---

9 f. *Nebenbetrachtung:* $z^2 \quad \begin{matrix} a\pi \\ +\,\omega\, ta \end{matrix} \quad \begin{matrix} z \\ .. \end{matrix} \; +a\pi\, v^2 \; \begin{matrix} \ddagger\, 2a\pi \\ +w\omega \end{matrix} \sqrt{\ldots}\, vz \; +\psi\,\omega av \; +da^2\omega$

5 f. *Nebenbetrachtung:* $z^2 \sqcap -x^2$. ergo $z^4 \sqcap x^4$ *gestr. L*

Junctis his duabus aequationibus per arbitrarias multiplicatis, dividamus omnia per $m\pi + r\omega$, fiet: $z^2 \, \dfrac{\left\{ \begin{array}{lll} a\pi pz + a\pi v^2 & \ddagger\, 2a\pi\sqrt{\ldots}\; vz & \quad * \\ +\,\omega ta & +\,w\omega & +\,da^2\omega \end{array} \right.}{m\pi + r\omega} \sqcap 0.$

Ponamus jam $\dfrac{\pi a}{m\pi + r\omega}$ significare 1. Videamus an praeterea adhuc effici queat, ut sit $\dfrac{\ddagger 2a\pi r\sqrt{\ldots} + w\omega r}{m\pi + r\omega} \sqcap +2r\sqrt{\ldots}$. Nimirum $\ddagger \dfrac{2a\pi\sqrt{\ldots}}{m\pi + r\omega}$ significat: $\ddagger 2r\sqrt{\ldots}$.

Et $\dfrac{w\omega r + m\pi w}{m\pi + r\omega} \sqcap w$. Ergo $\dfrac{+w\omega}{m\pi + r\omega} \sqcap w - \dfrac{m\pi wa}{m\pi a + r\omega a}$, seu, $w - \dfrac{mw}{a}$.

Ergo $(\ddagger)\ 2r\sqrt{\ldots} + w - \dfrac{mw}{a} \sqcap (\ddagger)\ 2r\sqrt{\ldots}$, cum autem r sit $\sqcap \dfrac{\varphi}{e}\sqrt{\ldots}$ hinc irrationalitas evanescit, et fit $(\ddagger)\ \dfrac{\varphi}{e} \frown \llcorner 1 - \dfrac{a^2}{e^2} \lrcorner + w - w \frown \begin{array}{c} -\dfrac{\gamma a}{e^2} \\ +1 \end{array} \sqcap \dfrac{\varphi}{e}, \frown 1 - \dfrac{a^2}{e^2}$, sive: $\begin{array}{c} \ddagger \dfrac{\varphi}{e} \\ -\dfrac{\varphi}{e} \end{array} \frown \begin{array}{c} +1 + \dfrac{w\gamma a}{e^2} \\ -\dfrac{a^2}{e^2} \end{array} \sqcap 0.$

Multiplicatis omnibus per e^2, aequatio qua indagandus est valor ipsius e, fiet plana. Et quia $w \sqcap \dfrac{\varphi}{e}$, hinc fiet: $(\ddagger)1 - 1, \frown 1 - \dfrac{a^2}{e^2} + \dfrac{\gamma a}{e^2} \sqcap 0$. At $\dfrac{\gamma}{a} \sqcap 1 \ddagger \dfrac{a}{q}$. Et in parabola $\dfrac{\gamma a}{e^2} \sqcap \dfrac{a^2}{e^2}$. Hinc in parabola $(\ddagger)\ 1 - 1, \frown 1 - \dfrac{a^2}{e^2} + \dfrac{a^2}{e^2}$ sive $(\ddagger)\ 1 - 1,\ (\ddagger)\ \dfrac{a^2}{e} + \dfrac{a^2}{e^2} + \dfrac{a^2}{e^2} \sqcap 0$. Ergo in parabola ponendo $(\ddagger)$ esse $-$, fiet $\dfrac{3a^2}{e^2} \sqcap 2$; sive $e^2 \sqcap \dfrac{3}{2}a^2$. In caeteris conicis sic agemus. $(\ddagger)\ 1 - 1\ (\overline{\ddagger})\ \dfrac{a^2}{e^2} + \dfrac{a^2}{e^2} + \dfrac{a^2}{e^2} \ddagger \dfrac{a^3}{qe^2} \sqcap 0$. Ergo posito $(\ddagger)$ esse $-$, fiet $e^2 \sqcap \dfrac{3a^2 \ddagger \dfrac{a^3}{q}}{2}$.

453,10–454,1 $+da^2\omega \sqcap 0$ *(1)* dividamus unam per w, posteriorem per $\ddagger$2a priorem, ut utrobiqve habeatur vz pure jungendoqve postea has duas aequavtiones unam ab alia subtrahenda, *(a)* fiet: *(b)* et praeterea multiplicando omnia per certam arbitrariam, fiet: $\begin{array}{llll} \ddagger \dfrac{m}{2}\pi\ z^2 & \ddagger \dfrac{p\pi}{2a}\ \ z & \ddagger \dfrac{\pi}{2}v^2 & \sqcap 0 \\ -\dfrac{\nu\pi}{wa} & -\dfrac{t\pi a}{w\cancel{a}}\,.. & -\dfrac{\psi\pi a}{w}v - \dfrac{da^2}{w} & \end{array}$ *(2)* Junctis *L* 4 $+2r\sqrt{\ldots}$. *(1)* Et hoc qvidem perfacile effici potest, si $\ddagger$ significat $-$ *(2)* nimirum *L* 6 $\sqcap (\ddagger)\ 2r\sqrt{\ldots}$ *(1)*. Qvae aeqvatio cum sit absurda, opus est alia rursus additione *(2)*, cum *L*

Tantum illud jam quaerendum, quomodo effici possit, ut signum $\sqrt{\ldots}$ in aequatione factitia ad circulum, et in vera ad circulum, signum habeant contrarium. Aut si illud effici non poterit, erit e. infinita. Quo posito e, posse sumi infinitam omnia per e. divisa et evanescent, et aequatio resumi poterit, facta scilicet ex compositione duarum primitivarum ad obliquas, mutatis tantum ut supra unius signis, quae scilicet est:

$$\left.\begin{array}{llllllllll}
-\dfrac{\gamma a}{e^2} & z^2 & -2\dfrac{a^2}{e} & z & +v^2 & \text{ǂ}2\sqrt{\ldots} & vz & & & \\
+1 & .. & & & & & & & & \\
\dfrac{\varphi}{e}\sqrt{\ldots} & .. & (\text{ǂ})\varphi\sqrt{\ldots} & .. & * & +\dfrac{\varphi}{e} & .. & +\psi v & +da & \\
 & & \text{ǂ}\dfrac{da^2}{qe} & .. & & & & & &
\end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Conferenda cum factitia ad circulum:

$$z^2 \quad (\pm)g\sqrt{\ldots} \quad z \quad +v^2 \quad \text{ǂ}2\sqrt{\ldots} \quad vz \quad -gv \quad -\theta a \quad \sqcap 0.$$

Collatis terminis vz, fiet $\cancel{\text{ǂ}2\sqrt{\ldots}} + \dfrac{\varphi}{e} \sqcap \cancel{\text{ǂ}2\sqrt{\ldots}} + 0$. Ergo $\dfrac{\varphi}{e} \sqcap 0$. Ergo e est infinita. Ergo $1 - \dfrac{a^2}{e^2} \sqcap 1$. Ergo $\sqrt{\ldots} \sqcap 1$. Ergo abjectis quae per e dividuntur et explicando ǂ per $-$ aequatio data fiet:

$$\begin{array}{lllllll}
z^2 & -\psi z & +v^2 & -2vz & +\psi v & +da & \sqcap\ 0.
\end{array}$$

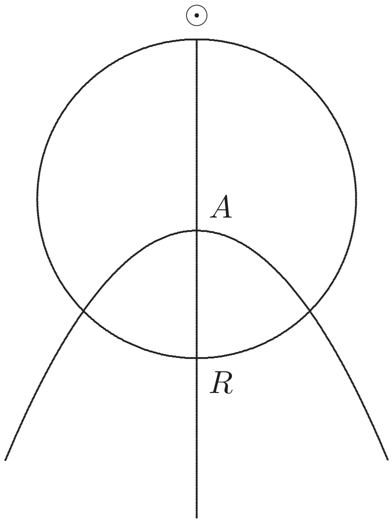
Conferenda cum: $z^2 \ +g.. \ +v^2 \ -2vz \ -gv \ -\theta a \ \sqcap 0.$

Quae collatio succedit felicissime, ut adeo tantum opus sit ponere $\psi + g \sqcap 0$. et $\theta + d \sqcap 0$. seu $g \sqcap -\psi$ et $\theta \sqcap -d$. Posita ergo $m \sqcap -\psi$, et $-da \sqcap -\psi\odot - \odot^2$, sive $da \sqcap \psi\odot + \odot^2$. Hinc sequitur ultra axem sectionis conicae sumendum esse $A\odot \sqcap \odot$ et circa diametrum $-\psi$ sive $\odot R$ describendum esse circulum qui sectionem Conicam secabit

15 f. *Dazu am Rande:* Vide quae ad marginem pag. praeced.

13 f. et … per $-$ *erg. L*

21 Vide: vgl. die Nebenbetrachtung zu S. 453 Z. 9 f.

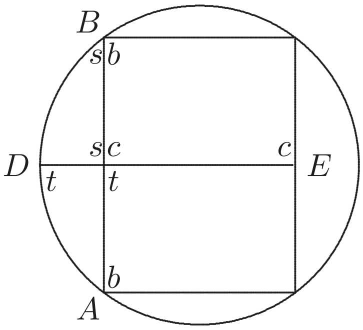


[*Fig. 6*]

in punctis quaesitis. Sed haec rigorose examinanda sunt. Occurrunt enim difficultates. Primum quod quando $-\psi$ est quantitas nihilo minor, non videatur circa ipsam describi posse diameter, huic respondetur si sit aequatio ad circulum talis: $-bs - s^2 \sqcap \langle t^2 \rangle$, tunc s sumendoque esse quantitatem negativam, $\sqcap -\omega$, et fiet aequatio $+b\omega - \omega^2 \sqcap t^2$. Sed una

---

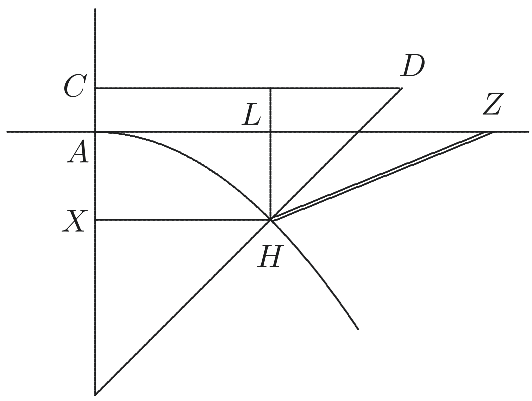
2 *Nebenbetrachtung*: $b - s \frown s$ seu $bs - s^2 \sqcap ct + t^2$. Si $c \sqcap 0$. fiet $bs - s^2 \sqcap t^2$. Ergo b est diameter.



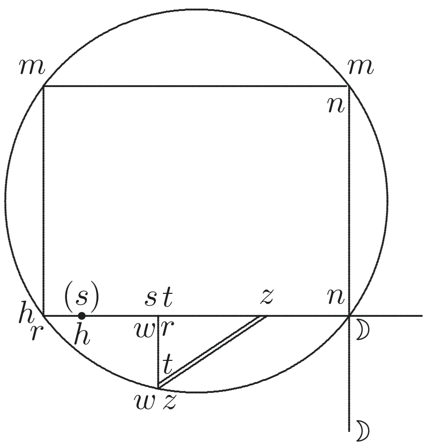
3–5 *Dazu am Rand*: An forte dicemus quando quantitas illa est nihilo minor non versus R, sed in partes aversas sumendamque esse diametrum, sed tunc circulus non attinget Conicam.

restat difficultas longe major, quod scilicet circulus hoc modo semper in duobus punctis curvam secabit, cum tamen videatur non habere nisi unam radicem quando punctum datum est extra Conicam. Nec vero ut in parabola evenit, constructione particulari alibi data circulus hoc modo partim in vertice partim alibi curvam secare potest. Non video ergo quomodo haec constructio conciliari possit, cum altera ad Parabolam. Taceo aliam difficultatem quae ex duplici ipsius ⊙ valore oriri potest. Possum equidem efficere ut non cadat $A\odot$ in axem, vel relinquendo ☽ negligendo ⊙ item negligendum reliquendo n, item nihil negligendo et supernumeraria sumendo pro arbitrio. Sed non video interim a priori, cur non in axe, ut dixi sumere liceat, non ergo inde deberet sequi absurdum.

Operae pretium rem in parabola experiri: $2ax \sqcap y^2$. $\dfrac{d-y}{f+x} \sqcap \dfrac{y}{a}$, sive $da \begin{smallmatrix}-ay\\ -f..\end{smallmatrix} - xy \sqcap 0$.



[*Fig. 7*]



[*Fig. 8*]

$HZ \sqcap z$. $AZ \sqcap v$. Ergo x sive $HL \sqcap \dfrac{a}{e}z$. et $x^2 \sqcap \dfrac{a^2}{z^2}z^2$. AL sive $y \sqcap v - \sqrt{1 - \dfrac{a^2}{e^2}}\,z$. et $y^2 \sqcap v^2 - 2\sqrt{\ldots}vz + \begin{array}{l}1\\ -\dfrac{a^2}{e^2}\end{array} z^2$. Hinc ex aequ. priore fit: $\dfrac{2a^3}{e}z \sqcap v^2 - 2\sqrt{\ldots}vz + \begin{array}{l}1\\ -\dfrac{a^2}{e^2}\end{array} z^2$.

11 *Darunter:* $n \sqcap 0$. ☽ $\sqcap 0$.

13 fit: *(1)* $2ax \sqcap 2av$. $2a\sqrt{\ldots}\ z \sqcap \dfrac{a^2}{e^2}z^2$, ex posteriore: $da - a^2z - \dfrac{a}{e}zv + \dfrac{a}{e}\sqrt{\ldots}z^2 \sqcap 0$ *(2)* $\dfrac{2a^3}{e}z$ *L*

Ex posteriore: $da - av + a\sqrt{\ldots}z - \frac{a}{e}zv + \frac{a}{e}\sqrt{\ldots}z^2 [\sqcap 0.]$

Omissis quae per e, dividuntur, quippe infinite parvis, conjunctisque his duabus aequationibus in unam, ea ordinata ita stabit: $v^2 + z^2 - vz + da \begin{array}{l} -a \\ -f \end{array} v \begin{array}{l} +a \\ +f \end{array} z \sqcap 0.$ ..

Sed satis video eundem plane calculum pro qualibet sectione Conica oriri quod nescio an fieri queat, $da + \frac{\psi^2}{4} \sqcap \frac{\psi^2}{4} + \psi\odot + \odot^2$. sive $(\text{ǂ})\ \odot\ (\text{ǂ})\ \frac{\psi}{2} \sqcap \sqrt{da + \frac{\psi^2}{4}}$. Ergo $\odot \sqcap \text{ǂ}\sqrt{da + \frac{\psi^2}{4}} - \frac{\psi}{2}$. Nimirum aequatio conferenda cum comperta ad circulum superiore. Habemus ergo valorem ipsius g. et θ. Invenienda jam r, et w. Est autem $w \sqcap t$, et $t \sqcap x$. $r \sqcap s + \odot$. Jam $s \sqcap y$ etc. $h \sqcap 2\odot + m$. Est autem $\odot^2 - \psi\odot + \frac{\psi^2}{4} \sqcap -da + \frac{\psi^2}{4}$. Ergo $(\text{ǂ})\ \odot\ (\text{‡})\ \psi \sqcap \sqrt{-da + \frac{\psi^2}{4}}$. Hinc primum impossibilitas, quando da, major quam $\frac{\psi^2}{4}$, at tamen puto ei succurri potest sic: Et mutatis omnibus signis fiet: $-\odot^2 + \psi\odot - \frac{\psi^2}{4} \sqcap +da - \frac{\psi^2}{4}$. Sed nihil inde.

2 parvis, *(1)* caeterisqve ordinatas, fiet *(2)* conjuctisqve *L* 6 cum *(1)* data ad circulum unde fit *(2)* comperta *L* 8 etc. *(1)* Re recte expensa jam video non posse obliqvam esse ad circulum cuius rectangula ad Circulum non est. Rem ergo de integro mox exacte aggrediar. Primum enim aeqvatio simplex $\varphi \mathrm{ayx} + \psi \mathrm{y} + \frac{\mathrm{da}}{\mathrm{q}}\mathrm{x} + \mathrm{da} \sqcap 0$ ad Circulum accommodanda est, addatur ei altera ad Conicam, fiet: $\varphi \mathrm{ayx} - \mathrm{y}^2 \text{ ǂ } \frac{\mathrm{q}}{\mathrm{a}}\mathrm{x}^2 + \frac{2\mathrm{q}}{\mathrm{a}}\mathrm{x} + \psi\mathrm{y} + \mathrm{da} \sqcap 0$. Haec aeqvatio jam est sed non satis video sic qvidem fieri non
$\text{ǂ}\frac{\mathrm{da}}{\mathrm{q}}$ ..
posse divide per ψ fiet: *(2)* h $\sqcap$ *L* 9 $\frac{\psi^2}{4}$, *(1)* et m $\sqcap 2\odot - \psi$, fiet h $\sqcap 4\odot - \psi$. *(2)* at *L* 10 sic: *(1)* qvaerendo - $\odot$ *(2)* qvaerendo $\odot$ falsam, $\sqcap$ seu ♀ $\sqcap -\odot$ fiet ♀$^2 + \psi$♀$ + \psi^2 \sqcap -$da *(3)* Et *L*

42. DE FORMULA CONSTRUENDI
[Oktober – Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 165–166. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 853

Datierungsgründe: s. N. 38.

De formula construendi
Problema solidum quodlibet, per Sectionis Conicae datae, specie indefinitae, et Circuli inventi, intersectionem.

Quaerimus constructionem Aequationis solidae datae per Conicam datam, et Circulum, formula omnibus pariter aequationum formis, et conicarum speciebus, communi; quod ad multa utile, ad nonnulla necessarium est. Nam nondum memini videre constructionem problematis solidi cujuslibet, sine ulla praeparatione ejus, per Ellipsin aut Hyperbolam datam quamlibet; praeparationibus autem solet intumescere calculus, et constructio reddi intricata. Cartesius dederat constructionem problematis solidi cujuslibet per datam parabolam tantum; sed sublato ante termino secundo aequationis construendae, quare merito Illustris Geometra, Renatus Franciscus Slusius aliam constructionem attulit, quae praeparatione nulla indigeret, sed et ipse per datam Parabolam tantum. At de quaerenda constructionum formula, quae non omnibus tantum aequationum formis, sed et Conicarum speciebus communis sit, ne cogitatum est quidem, quoniam Universalia conica a Desarguesio et Pascalio synthetice coepta, per Analysin provehere nondum quisquam instituerat; cum tamen satis constet, synthesin difficiliorum problematum solutionem vix nisi casu dare. Analysi autem effecisse me arbitror, ut problematum Conicarum omnium, quae plusquam solida non sunt, constructio rectis et circulis tantum, ad planorum instar, et quod plus est, solutione universali, nulla speciei sectionis mentione facta; haberi possit.

---

14 dederat: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–106. 17 attulit: R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 93–95. 20 coepta: Es ist nicht sicher, dass Leibniz zu diesem Zeitpunkt bereits die Originalpublikationen von G. DESARGUES, *Brouillon project*, 1639, und Bl. PASCAL, *Essay pour les coniques*, 1640, kannte; vgl. die Erl. zu N. 10 S. 77 Z. 8.

Esto Problema Solidum cujus Aequatio sit $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0$. Sit sectionis conicae datae latus rectum $2a$, transversum $2q$. Quaeritur centrum radiusque circuli, cujus intersectione cum conica data, radices aequationis propositae inveniantur.

Sumamus aequationes duas arbitrarias duarum incognitarum x et y. omnia habentes loca repleta,

alteram ad sectionem conicam datam, $\text{ǂ}\ \frac{a}{q}x^2 \ +\ bx \quad ca \ \sqcap\ y^2 \ +\ dy,$

alteram ad Circulum quaesitum: $-\ x^2 \ +\ ex \ +\ \theta a \ \sqcap\ y^2 \ +\ \lambda y.$

Hae quomodo referantur altera ad conicam suam, altera ad circulum, infra descripta figura ostendemus, nunc cum calculo tantum nobis res erit. Jam ut alteram incognitarum x, eliminemus, quaerendus est primum valor purus ipsius x. Qui habebitur invento prius valore quadrati ejus, x^2, est autem per Aequationem ad Circulum, $x^2 \sqcap ex + \theta a - y^2 - \lambda y$. Quo valore in aequatione ad Conicam in locum ipsius x^2 substituto, fiet

$$\text{ǂ}\frac{a}{q}ex\ \text{ǂ}\ \frac{a^2}{q}\theta\ \ddagger\frac{a}{q}y^2\ \ddagger\ \frac{a}{q}\lambda y + bx\ ca \sqcap y^2 + dy.$$

Eritque $x \sqcap \dfrac{\begin{array}{llll} \text{ǂ}\ \frac{a}{q}\ y^2 + d \quad y & \boxed{\ddagger\frac{\theta a^2}{q}} & ca \\ +\ 1\ldots\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q}\lambda\ldots & \boxed{\ddagger\frac{\theta a^2}{q}} & \text{ǂ}\ \frac{a^2}{q}\theta \end{array}}{\text{ǂ}\frac{a}{q}e + b}$ sive per brachylogiam:

4 arbitrarias *erg. L* 6 +bx *(1)* $\ddagger\frac{\theta a^2}{q}$ *(2)* ca *L* 13 $\text{ǂ}\ \frac{a}{q}$ex *(1)* $\boxed{\text{ǂ}\frac{a\theta}{q}a}\ \ddagger\ \frac{a}{q}y^2 \ddagger \frac{a}{q}\lambda y + bx\ \boxed{\ddagger\frac{\theta a^2}{q}}$ *(2)* $\text{ǂ}\frac{a^2}{q}\theta$ *L*

14 Eritque $x \sqcap$: Leibniz unterlaufen bei der Umformung Versehen, die er nicht konsequent korrigiert. Der letzte Term im Zähler des Bruches müsste $\ddagger\frac{a^2}{q}\theta$ lauten. Durch die folgende Substitution wirkt sich der Fehler nicht weiter aus.

$$x \sqcap \frac{\frac{\gamma}{a}y^2 + \beta y \quad \mu a}{\pi}. \text{ Eritque } x^2 \sqcap \frac{\frac{\gamma^2}{a^2}y^4 + 2\frac{\gamma}{a}\beta y^3 + 2\gamma\mu y^2, +\beta^2 y^2, +2\beta\mu a y[+\mu^2 a^2]}{\pi^2}.$$

Inventis ergo puris ipsarum x, et x^2 valoribus et in earum locum in aequatione ad circulum $+x^2 - ex - \theta a + y^2 + \lambda y \sqcap 0$ substitutis divisisque omnibus per $\frac{\gamma^2}{a^2}$, et multiplicatis per π^2, aequatio ordinata prodibit ejusmodi:

$$\left.\begin{array}{cccccccc}
y^4 & +\frac{2a}{\gamma}\beta y^3 & +\frac{a^2}{\gamma^2}\beta^2 & y^2 & \boxed{\frac{2a^3\beta\mu}{\gamma^2}} & y & \boxed{+\frac{a^4}{\gamma^2}\mu^2} \\
 & & \boxed{+\frac{2\mu a^2}{\gamma}} & \ldots & & & \\
 & & -\frac{a\pi e}{\gamma} & \ldots & -\frac{a^2\pi e\beta}{\gamma^2} & \ldots & \boxed{-\frac{a^3\pi e\mu}{\gamma^2}} \\
 & & +\frac{a^2\pi^2}{\gamma^2} & \ldots & +\frac{a^2\pi^2\lambda}{\gamma^2} & \ldots & -\frac{a^3\pi^2\theta}{\gamma^2}
\end{array}\right\} \sqcap 0.$$

Cujus A e q u a t i o n i s f a c t i t i a e, si termini singuli cum singulis datae $y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2ny + a^3p \sqcap 0$ conferantur, orientur A e q u a t i o n e s C o l l a t i t i a e sequentes, numero quatuor, cum quantitates indeterminatae sunt quinque: β. π. e. λ. θ, neglecto scilicet μ, sive posito $\sqcap 0$.

$\frac{a}{\gamma}\beta \sqcap \frac{l}{2}$ p e r T e r m. 2 . Unde $\beta \sqcap \frac{l\gamma}{2a}$.

$\frac{a\pi e}{\gamma} \sqcap \frac{l^2}{4} + \frac{a^2\pi^2}{\gamma^2} - am$. p e r t e r m. 3 . Unde $e \sqcap \frac{\frac{l^2}{4} - am}{\frac{\pi a}{\gamma}} + \frac{\pi a}{\gamma}$.

5–8 *Nebenbetrachtung*: $\mu \sqcap 0$. $b \sqcap 2a$. $e \sqcap$ [*bricht ab*]

1 x $\sqcap$ *(1)* $\frac{\frac{\gamma}{a}y^2 + \beta y *}{\pi}$. nam $\pm\frac{\theta a^2}{q} + \frac{\theta a^2}{q} \sqcap 0$. | ac proinde omitti potest; *nicht gestr.* | *(2)* $\frac{\frac{\gamma}{a}y^2 + \beta y \quad \mu a}{\pi}$ *L*

$\lambda \sqcap \dfrac{el\gamma}{2\pi} + \dfrac{n\gamma^2}{\pi^2}$ per Term. 4.

$\theta \sqcap -p\dfrac{\gamma^2}{\pi^2}$ per Term. 5. et ult.

$e \sqcap \text{ǂ}\dfrac{q}{a}\pi \ddagger 2q$. ponendo $b \sqcap 2a$. Ergo per Term. 3. $\text{ǂ}\dfrac{\cancel{a}q}{\gamma\cancel{a}}\pi^2 \ddagger \dfrac{2aq\pi}{\gamma} \sqcap \dfrac{l^2}{4} - am$. quae $-\dfrac{a^2}{\gamma^2}\ldots$ etiam adaptari potest, ut construi queat per sectionem Conicam datam.

Restant nunc explicandae β et π. Est autem β assumta pro $d\,\text{ǂ}\,\dfrac{a}{q}\lambda$. Ergo fiet $d \sqcap \beta \ddagger \dfrac{a}{q}\lambda$. Est item π assumta pro $\text{ǂ}\dfrac{a}{q}e + b$. Jam paulo ante inveneramus e, ac proinde

1 $\lambda \sqcap$ *(1)* $\dfrac{\mathrm{e}\beta}{\pi}$ *(2)* $\dfrac{\mathrm{el}}{2\pi}$ *L ändert Hrsg.* 2 f. ult *(1)* Nulla autem est aeqvatio super, qva definiatur qvae sola ex indeterminatis restat, π, eius ergo valorem varie assumemus, prout speciei sectionis conicae datae, qva ad construendum utemur, conveniet, ut jam dicam. Valet π idem qvod $\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{e}+\mathrm{b}$. In Parabola autem $\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{e} \sqcap 0$. et $\mathrm{b} \sqcap 2\mathrm{a}$, ergo in Parabola et $(\pi) \sqcap 2\mathrm{a}$. In Ellipsi autem et Hyperbola, qvanqvam varii possint assignari valores, comperi tamen per Analysin exqvisitissimam ad calculi pariter et constructionis facilitatem plurimum facere, si in illis ponatur $\mathrm{b} \sqcap 0$. et per conseqvens $\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{e} \sqcap (\pi)$. Sed nihil haec detrahunt solutionis *(a)* varietat *(b)* universalitati, *(aa)* nisi aliqvae ex illis *(bb)* sufficit enim easdem semper *(aaa)* lineas *(bbb)* rectas eodem modo adhiberi | in constructione *erg.* |, etsi magnitudo earum major minorqve, et interdum etiam infinita vel infinite parva seu nihilo aeqvalis sit, prout cuiusqve *(aaaa)* figurae *(bbbb)* curv *(cccc)* sectionis Conicae natura *(aaaaa)* exigit aut casu etiam in problemate ⟨—⟩ *(bbbbb)* aut casuum etiam problematis ipsius, varietas exigit. *(aaaaaa)* porro $\mathrm{d} \sqcap \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\lambda$ *(bbbbbb)* deniqve $\mathrm{d} \sqcap \beta \ddagger \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\lambda$. Habemus ergo qvantitates assumtas omnes, plane | ac pure, *erg.* | definitas: b. θ. d. e. λ. si illud tantum adjiciamus, qvia $\pi \sqcap \text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{e} + \mathrm{b}$. et supra inventum est e vel $\dfrac{\pi - \mathrm{b}}{\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}}$ esse $\sqcap$ *(2)* Ergo $\mathrm{e} \sqcap \dfrac{\mathrm{l}^2 - \mathrm{am}}{\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}^2\mathrm{e}}{\mathrm{q}\gamma} + \frac{2\mathrm{a}^2}{\gamma}}\,\text{ǂ}\,\dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{e}}{\mathrm{q}\gamma} + \dfrac{2\mathrm{a}^2}{\gamma}$. sive $\text{ǂ}\dfrac{\mathrm{a}^2\mathrm{e}^2}{\mathrm{q}\gamma} + \dfrac{2\mathrm{a}^2\mathrm{e}}{\gamma} \sqcap \dfrac{\mathrm{l}^2}{4} - \mathrm{am}, + \dfrac{\mathrm{a}^4\mathrm{e}^2}{\mathrm{q}^2\gamma^2}\,\text{ǂ}\,\dfrac{4\mathrm{a}^4\mathrm{e}}{\mathrm{q}\gamma^2} + \dfrac{4\mathrm{a}^2}{\gamma^2}$ sive $\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{e}^2$ *(3)* $\mathrm{e} \sqcap$ *L*

$\dfrac{\pi - b}{\mp\dfrac{a}{q}}$ esse $\sqcap$ $\dfrac{\dfrac{l^2}{4} - am}{\dfrac{\pi a}{\gamma}} + \dfrac{\pi a}{\gamma}$, fiet: $\pi^2 \dfrac{\dfrac{-ba\pi}{\gamma} \sqcap \mp\dfrac{l^2 a}{4q} \pm \dfrac{a^2 m}{q}}{\dfrac{a}{\gamma} \pm \dfrac{a^3}{\gamma^2 q}}$ quod sufficit ut ipsius π valor p l a n e p u r e q u e haberi possit, si modo et b haberi intelligatur. Sed quoniam nulla superest aequatio quae nobis definiat ipsam b, ideo talis attribuendus est ei valor pro natura scilicet sectionis Conicae qua ad construendum utimur, qui nobis laborem calculi constructionisve in solutionibus saltem casuum particularium minuat, et comperi, Analysi sane exquisitissima, vix aliter exitum reperiri, quam si ponamus in Hyperbola et Ellipsi $b \sqcap 0$. Quo casu fiet $\mp\dfrac{a}{q}e \sqcap \pi$ et $\pi^2 \sqcap \dfrac{\mp\dfrac{l^2 a}{4q} \pm \dfrac{a^2 m}{q}}{\dfrac{a}{\gamma} \pm \dfrac{a^3}{\gamma^2 q}}$. Ita habebitur π pure, et e per π. Sed in Parabola, ubi $\mp\dfrac{a}{q}e \sqcap 0$, erit $\pi \sqcap b$. at in eadem Parabola b semper $\sqcap 2a$. Ergo in parabola et $\pi \sqcap 2a$.

Omnes ergo quantitates assumtas, b. θ. d. e. λ, habemus plane pureque d e f i n i t a s : et nunc tempus est ostendendi, ⟨quom⟩odo loca duarum aequationum,

alterius ad sectionem Conicam datam, $\mp \dfrac{a}{q}x^2 + bx \pm \dfrac{a^2}{q}\theta \sqcap y^2 + dy$,

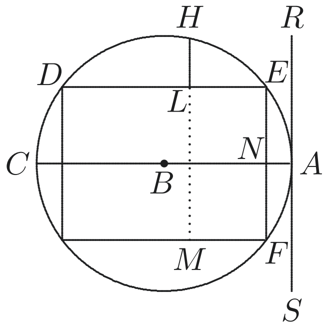
et alterius ad Circulum quaesitum: $- x^2 + ex + a\theta \sqcap y^2 + \lambda y$,

descripta intelligi possint.

Quod ut appareat, conemur aequationes hasce assumtas reducere ad alias compertas, simillimas, quales sunt ad datam sectionem Conicam $sv \mp \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 + ☿z$, et ad circulum quaesitum: $-w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \lambda y$. Quarum ut appareat descriptio, consideranda est haec sectionum Conicarum proprietas universalis, qua ad constructiones problematum nullam reperi commodiorem:

4 pro ... utimur *erg.* *L* 5 calculi *(1)* caetera *(2)* in casibus saltem particularibus, *(a)* pro natura *(b)* na *(3)* constructionisve *L* 14 f. possint. *(1)* Sectioni Conicae inscriptum *(2)* Qvod *L*

18 proprietas universalis: APOLLONIOS, *Conica*, III, 17; Leibniz kennt sie vermutlich aus R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 52 f.; vgl. die Erl. zu N. 27 S. 280 Z. 1.



[*Fig. 1*]

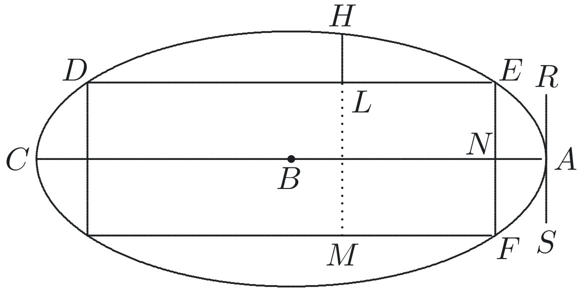


fig. 2

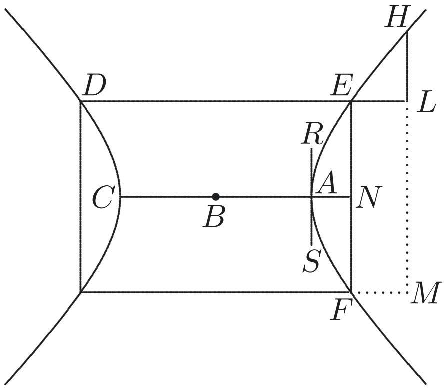


fig. 3.

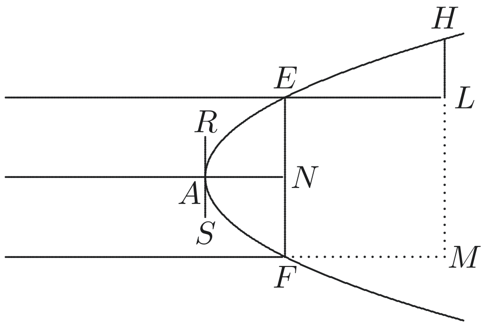


fig. 4.

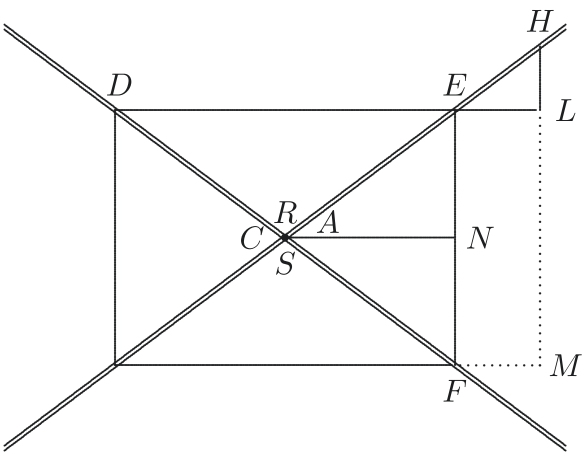


fig. 5

1 fig. *(1)* 1 *(2)* 2 *L* 2 fig. *(1)* 2 *(2)* 3 *L*

Sectioni Conicae datae $DCFAE$ (oppositas enim sectiones sive portiones, non in Hyperbola minus, ubi divergunt, vid. fig. 3, quam in Ellipsi ubi in unam lineam concurrunt, vid. fig. 2. pro una figura habeo) inscribatur rectangulum concentricum DEF, cujus unum latus DE, axi seu lateri transverso sectionis AC, parallelum. Sumto in curva puncto H, demittatur in rectam DE, productam si opus est, perpendicularis, HL, eaque producta in M, ita ut LM sit aequalis EF, scimus rectangulum DEL, esse ad rectangulum MHL, ut sectionis datae latus transversum AC. est ad latus ejus rectum RS. Cujus theorematis demonstratio universalis per calculum Methodi Universalium non difficulter fieri posset, si opus esset, sed ut inde deduci possit aequatio quam dixi nostrae simillima ad sectionem Conicam datam, ideo ponemus $DE \sqcap \dfrac{qs}{a}$, et $EF \sqcap$ ☿, et $EL \sqcap v$, et $LH \sqcap z$. Rectangulum DEL erit $\sqcap \dfrac{qs}{a}v \mp v^2$, et $MHL \sqcap$ ☿$z + z^2$, ergo ob theorema dictum, erit $\dfrac{\dfrac{qsv}{a} \mp v^2}{☿z + z^2} \sqcap \dfrac{q}{a}$, reductaque analogia ad aequationem multiplicatione per crucem, ac deinde multiplicatis omnibus per a divisisque per q, prodibit Aequatio talis: $sv \mp \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 +$ ☿z, quam dixeramus. Eadem et Parabolae applicari possunt fig. 4. Considerari enim potest quantum in rem praesentem velut Hyperbola, sed cujus centrum et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc; neque enim aliter Parabola ab Hyperbola differt, quam quod latus illius transversum est infinitum. Etsi ergo puncta B. C. D. in parabola exhiberi non possint, nec linea DE, vel AC, quippe magnitudine infinitae, duci queant, calculus tamen nihilo secius procedit. Est vero discrimen inter Parabolam et caeteras sectiones magni ad institutum nostrum momenti. In Ellipsi enim et Hyperbola (adde circulum et rectam) una rectarum s, vel ☿ definita, etiam altera habetur, data enim EF, datur DE, vel contra; in Parabola vero s semper est determinata, aequalis scilicet lateri recto Parabolae, at ☿ semper indeterminata, quod calculo facillimo sic ostenditur: In omni sectione Conica est $DE \sqcap CA \mp 2AN$. Est autem

2 fig. 2 *L ändert Hrsg.* 3 fig. 1. *L ändert Hrsg.* 8 universalis *erg. L* 8 Methodi Universalium *erg. L* 9 fieri *(1)* potest | qvod vero nunc foret a praesenti instituto alienum *erg.* | *(2)* posset *L* 10 f. et EL $\sqcap$ v. et LH $\sqcap$ z. *erg. L* 19 f. vero | in hoc negotio *gestr.* | discrimen *L*

---

6 DEL: Gemeint ist das Rechteck DLE mit den Seiten DL und LE. Leibniz schreibt meistens DEL.

in Parabola $DE \sqcap \frac{qs}{a}$, et CA seu latus transversum $\sqcap 2q$, fiet ergo $\frac{qs}{a} \sqcap 2q \text{ǂ} 2AN$. Est autem q. in Parabola infinita, AN, semper finita, negligi ergo potest AN in parabola, et fiet $\frac{qs}{a} \sqcap 2q$ sive $s \sqcap 2a$.

Cum vero etiam A n g u l u s R e c t i l i n e u s , id est figura ex duabus rectis in uno puncto velut vertice concurrentibus composita (sine basi, figurae enim vocabulum, etiam lineis, et linearum aggregatis sive Angulis tribui posse arbitror) superficiei Conicae sectio intelligi possit, qualis est in f i g. 5 . EAF, ideo idem theorema potest et ipsum applicari, tantum cogitandum est latus ejus rectum pariter et transversum infinite parva esse, et puncta R. S. A. C. coincidere in centrum figurae sive duarum sectionum oppositarum, B.

In Circulo autem vide f i g. 1 cum latus rectum et transversum AC, et RS, diametro circuli, ac proinde inter se, aequalia sint, etiam rectangulum DEL, rectangulo MHL aequabitur, idque dudum constat ex *Elementis*; nec dubito theorema hoc in Circulo detectum, caeteris quoque in aliis Conicis, inveniendis, occasionem dedisse. Ut ergo aequationem superiorem compertam, ad circulum quaesitum inde formemus, ponenda est $DE \sqcap \text{ʎ}$, et $EF \sqcap \lambda$, porro $EL \sqcap w$. et $HL \sqcap y$. Ergo rectangulum DEL, erit $\text{ʎ}w - w^2$, et rectangulum $MHL \sqcap \lambda y + y^2$. Unde fit aequatio $-w^2 + \text{ʎ}w \sqcap y^2 + \lambda y$ quam dixeramus. Ut ergo aequationem assumtam, $\text{ǂ}\frac{a}{q}x^2 + bx$ [+] $ca \sqcap y^2 + dy$, reducamus ad aequationem loci ad Conicam datam comperti: $sv \text{ ǂ } \frac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 + \text{☿}z$ ideo hanc postremam explicando

11–14 *Nebenbetrachtung*: $2ax \text{ ǂ } \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. Ergo $x^2 \text{ ǂ } 2qx + q^2 \sqcap \frac{\text{ǂ}qy^2 + q^2a}{a}$. Unde $x \sqcap \sqrt{\frac{\text{ǂ}qy^2 + q^2a}{a}} - q$ seu $\underset{\text{ǂ}x+q}{x \text{ ǂ } q} \sqcap \sqrt{\frac{\text{ǂ}q^2 + q^2a}{a}}$.

14 f. ergo *(1)* problema ad Circulu *(2)* aeqva *(3)* aeqvationem *L* 19 hanc postremam explicando *erg. L*

13 theorema: EUKLEIDES, *Elementa*, III, 35. 14 caeteris: vgl. ARCHIMEDES, *De conoidibus et sphaeroidibus*, prop. III u. XII–XIV; APOLLONIOS, *Conica*, III, 17.

faciamus $v \sqcap x + ♀$ et $z \sqcap y + ♂$. Unde Aequatio ordinata fiet talis:

$$\begin{array}{llllll} \mp\frac{a}{q}x^2 & \mp\frac{2a}{q}♀\, v & \mp\frac{a}{q}♀^2 & \sqcap & y^2 & +2♂\, y, \\ & +\, s\ \ldots & +s♀ & & & +☿\ \ldots \\ & & -♂^2 & & & \\ & & -☿♂ & & & \end{array}$$

qua cum assumta collata, fiet:

$b \sqcap \mp\frac{2a}{q}♀ + s.$

$(ca) \sqcap \mp\frac{a}{q}♀^2 + s♀ - ♂^2 - ☿♂.$

$+d \sqcap 2♂ + ☿.$

Ubi cum prodeant aequationes collatitiae tres, sint autem indeterminatae numero quinque, nempe b. ♀. s. ♂. ☿. potestate atque effectu quatuor tantum, quia extra parabolam data s datur ☿ vel contra; in Parabola vero s semper est definita, ☿ semper indefinita; ideo aliquid in nostro arbitrio est; qua libertate ut recte utamur omnino providendum.

Video autem non aliter exitum commode reperiri. Porro $♀ \sqcap \frac{qb - sq}{\mp 2a}$ ex Aeq. 1. et ideo $♀^2 \sqcap \frac{b^2 - 2bs + s^2}{4\frac{a^2}{q^2}}$, item $♂ \sqcap \frac{d - ☿}{2}$ ex Aeq. 3., et ideo $♂^2 \sqcap \frac{d^2 - 2d☿ + ☿^2}{4}$.

Inserantur hi valores in aeq. 2. fiet:

$$\pm\frac{a^2}{q}\theta \sqcap \frac{\mp b^2 \boxed{\pm 2bs} \mp s^2}{4\frac{a}{q}} \quad \frac{\boxed{\mp sb} \pm s^2}{\frac{2a}{q}} \quad \frac{-d^2 \boxed{+2d☿} - ☿^2}{4} \quad \frac{\boxed{-☿d} + ☿^2}{2},$$

2 $\sqcap z^2 + 2♂z$ *L ändert Hrsg.* 12 f. indefinita; *(1)* imo tantum tres in parabola, ubi et b, *(2)* ideo *L* 14 reperiri *(1)*, qvam si ponatur in parabola $♀ \sqcap 0$. | et per conseqvens $b \sqcap 2a \sqcap s$ *erg.* | extra parabolam $b \sqcap 0$ qvod et ad universalitatem constructionis plurimum confert, nam ita utrovis modo fiet $\frac{a}{q}♀^2 + s♀ \sqcap 0$. in parabola qvidem qvia $♀ \sqcap 0$. in caeteris, qvia a *Dazu Nebenrechnungen, gestr.*: $s \sqcap b \quad \frac{b}{4} \mp s^2 \pm \frac{s^2}{2} \sqcap 0 \quad \frac{b}{4} \mp \frac{s^2}{4} \pm s$ *(2)* porro *L*

sive $\pm\frac{a^2}{q}\theta \sqcap \frac{\mp b^2}{4\frac{a}{q}} - \frac{d^2}{4} \pm \frac{s^2}{\frac{4a}{q}} \frown \llcorner\boxed{\mp\frac{1}{4}\pm\frac{1}{2}}\lrcorner\frac{+\text{☿}^2}{4}$ sive $\underbrace{-\frac{a^3}{q^2}-\frac{b^2}{4}\mp\frac{d^2}{4}}+\frac{s^2}{4} \sqcap \mp\frac{a}{q}\frac{\text{☿}^2}{4}$, sive $\underbrace{\frac{4a^3}{q^2}+b^2\pm\frac{ad^2}{q}}\mp\frac{a\text{☿}^2}{q} \sqcap s^2$ sive $a\theta+\frac{q^2}{4a^2}b^2\pm\frac{qd^2}{4a}\mp\frac{q}{4a}\text{☿}^2 \sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$ (unde in parabola $d \sqcap \text{☿}$.) Sed alia restat quaerenda aequatio, ut duae indefinitae ☿ et s, determinentur. Est autem aequatione simplicissima: $\mp\frac{q}{4a}\text{☿}^2+q^2 \sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$, nam $DE \sqcap \frac{q}{a}s$. Jungendo has duas aequationes, fiet: $a\theta+\frac{q^2}{4a^2}b^2\pm\frac{qd^2}{4a} \sqcap q^2$, qua aequatione superioribus ipsarum θ. et d valoribus collata, in quibus semper includitur b, tandem dabit nobis ipsam b. definitam, qua definita caetera denique omnia habentur. Sed quia sic ad prolixum admodum calculum ducemur, satius erit efficere ut b. definiatur libere sine θ, et d. Quod fiet ponendo $a\theta\pm\frac{qd^2}{4a} \sqcap 0$. Fiet $+\frac{q^2}{4a^2}b^2 \sqcap q^2$, tam in parabola quam extra parabolam, et erit $b \sqcap 2a$. (Quod tanto magis ponendum in caeteris, universalitatis causa, quoniam in Parabola necessarium est. Nam in parabola ubi jam ante $\frac{q^2}{4a^2}b^2 \sqcap q^2$, fiet $a\theta+\cancel{q^2}\pm\frac{qd^2}{4a} \sqcap \cancel{q^2}$.) Hinc cum sit $\pi \sqcap \mp\frac{a}{q}e+b$, fiet $\pi[\sqcap]\frac{a}{q}e+[2]a$. Sed ut ista procedant ne paucitate indeterminatarum laboremus, restituenda est μ in aequatione paginae superioris. Relatio autem ipsa θ

---

4 *Randbemerkung zu* $\mp\frac{q}{4a}\text{☿}^2+q^2 \sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$, *mit Markierung angezeigt*: Error, haec aequatio ad parabolam inepta est.

2 f. sive aθ ... d $\sqcap$ ☿.) *erg. L* 7 habentur. *(1)* Est autem d $\sqcap \frac{\mathrm{l}\gamma}{2\mathrm{a}} \pm \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\lambda$. Sed qvoniam prolixus *(2)* Sed *L* 9 $\pm\frac{\mathrm{qd}^2}{4\mathrm{a}}$ | extra parabolam *gestr.* | $\sqcap$ 0. *L* 10 f. (qvod ... $\sqcap \cancel{q^2}$) *erg. L*

---

1 f. sive $-\frac{a^3}{q^2}$ ... $\sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$: Trotz verschiedener Korrekturen bleiben die Rechnungen fehlerhaft. Leibniz bemerkt im weiteren Verlauf Unstimmigkeiten. 13 in aequatione: s. o. S. 461 Z. 5–8.

ad d, seu aequatio $a\theta \pm \frac{qd^2}{4a}$, facit ut in parabola d sit 0. Unde in parabola etiam β erit 0, aberitque terminus secundus aequationi factitiae, quod instituto nostro adversum est. Sed hoc inevitabile est tamen quia $b \sqcap s$. et $s \sqcap 2a$ in Parabola. Jam ergo detego erroris fontem, scilicet aequatio comparans s, et $\mercury$ nempe $\mp \frac{q}{4a}\mercury^2 + q^2 \sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$, non debet applicari ad parabolam; nec s explicanda per $\mercury$, sed contra $\mercury$ per s. Sumamus jam $EN \sqcap \frac{\mercury}{2}$. $BN \sqcap \frac{qs}{2a}$, id est $BN \sqcap s$. scilicet si $AN \sqcap 0$. comparando ipsi q. Sed nos hoc loco opus habemus ipso AN quod vocabimus $\odot$. At $AN \sqcap DE - q$. Ergo $\sqcap \frac{qs}{2a} - q$. Ergo $q - q$. Ergo 0 in parabola, quod foret absurdum, ideo erroris vitandi causa, etsi interpretatio commoda dari ei possit in parabola, faciemus statim ab initio $DE \sqcap 2q \mp 2\odot$ ponendo $AN \sqcap \odot$.

Unde rectangulum DEL, erit $2qv \mp 2\odot v \mp v^2$. Rectangulum MHL, ut ante $\mercury z + z^2$. Ergo $\frac{2qv \mp 2\odot v \mp v^2}{\mercury z + z^2} \sqcap \frac{q}{a}$. Unde multiplicando per crucem $2aqv \mp 2a\odot v \mp av^2 \sqcap q\mercury z + qz^2$, sive $2av \mp \frac{2a}{q}\odot v \mp \frac{a}{q}v^2 \sqcap \mercury z + z^2$ id est in Parabola $2av \sqcap \mercury z + z^2$. Generaliter autem ponendo $2a \mp \frac{2a}{q}\odot \sqcap s$, fiet ut ante $sv \mp \frac{a}{q}v^2 \sqcap \mercury z + z^2$, et explicando v, et z, ut paulo ante, prodibunt aequationes eaedem, quarum postrema fuerat: $a\theta + \frac{q^2}{4a^2}b^2 \pm \frac{qd^2}{4a} \mp \frac{q}{4a}\mercury^2 \sqcap \frac{q^2}{4a^2}s^2$. Unde quoniam in parabola $b \sqcap 2a$, fiet in ea $d \sqcap \mercury$, et per consequens fieret $\mars \sqcap 0$. Quod rursus absurdum. Forte ergo in illo calculo error, quem examinabo. $b \sqcap \mp \frac{2a}{q}\venus + s$. $ca \sqcap \mp \frac{a}{q}\venus^2 + s\venus - \mars^2 - \mercury\mars$. $d \sqcap 2\mars + \mercury$. Adjiciendaque est quarta ex natura ipsarum

---

16 *Am Rand*: (Unde in Parabola $s \sqcap 2a$.)

2 f. est. *(1)* Qvare non licet in Parabola ponere b $\sqcap$ 2a. *(2)* Sed *L*

s, et $☿$. scilicet $s \sqcap 2a \mp \frac{2a}{q}\odot$, at $2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap ☿^2$. Erit ergo $s \sqcap 2a + \frac{☿^2 \pm \frac{a}{q}\odot^2}{\mp q}$ sive erit $s \sqcap 2a \mp \frac{☿^2}{q} - \frac{a}{q^2}\odot^2$. At idem $s \sqcap b \pm \frac{2a}{q}♀$, erit ergo $2a \mp \frac{☿^2}{q} - \frac{a}{q^2}\odot^2 \sqcap b \pm \frac{2a}{q}♀$ vel pro $☿^2$. ponendo ejus valorem, fiet: $2a + \frac{2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2}{\mp q} - \frac{a}{q^2}\odot^2 \sqcap b \pm \frac{2a}{q}♀$, vel $2a \mp \frac{2a}{q}\odot \sqcap b \pm \frac{2a}{q}♀$. Unde ut hoc obiter excutiam quaeritur an necesse sit in parabola esse $\odot \sqcap -♀$. Sane si abjicias primum $2a$, et b, velut aequalia, caetera aequari consequitur, sed sciendum est, cum $\frac{2a}{q}\odot$ et $\frac{2a}{q}♀$ sint infinite parva, comparatione caeterorum, ideoque statim ab initio negligenda esse; nec videri debere haberi eorum rationem. Verum alia rursus difficultas. In tangentibus investigandis destructis aequalibus sic procedi. Ita est, alia ergo ratio discriminis, nimirum nondum supposuimus $b \sqcap 2a$ nec $b \sqcap s$. sed tantum ab ipsis quantitate infinite parva differre. Si jam sumere liceret $b \sqcap 2a$, foret generaliter (vel saltem extra parabolam, imo generaliter) $\odot \sqcap ♂$, quo posito videamus quid sit secuturum, absolutis reliquis Aequationibus, nimirum cum fit: $☿ \sqcap d - 2♂$, erit $☿♂ \sqcap d♂ - 2♂^2$, et $-☿♂ \sqcap -d♂ + 2♂^2$, fiet $ca \sqcap \mp\frac{a}{q}♀^2 + s♀ - d♂ + ♂^2$, et pro s ponendo $2a \mp \frac{2a}{q}♀$, fiet $s♀ \sqcap 2a♀ \mp \frac{2a}{q}♀^2$, ergo Aeq. (A) $ca \sqcap \mp\frac{a}{q}♀^2 \mp \frac{2a}{q}♀^2 + 2a♀ - d♂ + ♂^2$. Restat adhuc aequatio Aeq. (B) $2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap d^2 - 4d♂ + 4♂^2$, quam (posita ut dixi $\odot \sqcap ♀$) inserendo novissimae aequationi fiet: Aeq. (C) $ca \sqcap \mp\frac{2a}{q}♀^2 + d^2 - 5d♂ + 5♂^2$. Multiplicetur Aeq. (B)

---

1 *Zu* $2a\odot \mp \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap ☿^2$: Error. $\frac{☿^2}{4}$

5 *Über* $\odot \sqcap -♀$: Erratum.

5 $\odot \sqcap -♀$ *(1)* sed hoc non est, qvia eas *(2)* Si *(3)* Sane *L* 9 b ⊓ 2a *(1)* sed b ⊓ s. etsi s a *(2)* nec *L* 10 differre. *(1)* Jam ut investigemus et ♂, ideo secunda aeqvatio ♂ ⊓ *(2)* Si *L*

per 2, fiet $\text{ǂ}\frac{2a}{q}\odot^2 \sqcap 2d^2 - 8d\male + 8\male^2 - 4a\odot$, jam auferendo in utroque ipsius Aeq. (C) latere $\text{ǂ}\frac{2a}{q}\female^2$, et addendo ca, fiet $\text{‡}\frac{2a}{q}\female^2 \sqcap d^2 + 5d\male + 5\male^2 - ca$, junctis his duabus aequationibus fiet $\odot \sqcap \frac{3d^2 - 3d\male + 13\male^2 - ca}{4a}$ aequatio ad parabolam vel ordinando eam fiet: $\male^2 \; \frac{\begin{array}{l} -3d\male - 4a\odot + 3d^2 \\ \qquad\qquad - ca \end{array}}{13} \sqcap 0$. quae est ad Parabolam.

Aequatio (B) multiplicetur per $\frac{5}{4}$ fiet: $\boxed{\begin{array}{c} \frac{5a\odot}{2} \;\text{ǂ}\; \frac{5a}{4q}\odot^2 \\ \ldots - \ldots \end{array}} \sqcap \frac{5}{4}d^2 - 5d\male + 5\male^2$.

Addatur aequationi (C) fiet:

$$ca, +\frac{5}{4}d^2 - 5d\male + 5\male^2 \sqcap \text{ǂ}\frac{2a}{q}\female^2 + d^2 - 5d\male + 5\male^2 + \frac{5a}{2}\odot \;\text{ǂ}\; \frac{5a}{4q}\odot^2$$

3 parabolam *(1)*. Sed adhuc alia facile habebitur aeqvatio ad parabolam, elidendo scilicet utrobiqve $\male^2$, (ut paulo ante $\odot^2$) *(a)* Jungamus inter se aeqvationes (A) et (B) *(b)* vel aliter Multiplicando Aeqvationem (B) per $\frac{\psi}{\mathrm{a}}$ fiet $2\psi\odot \,\text{ǂ}\, \frac{\psi}{\mathrm{q}}\odot^2 \sqcap \frac{\psi \mathrm{d}^2}{\mathrm{a}} - \frac{4\psi \mathrm{d}\male}{\mathrm{a}} + \frac{4\psi\male^2}{\mathrm{a}}$, qvam vocabimus Aeqvationem (C) jungendo inter se aeqvationes (A), et (C). fiet ca, $+2\psi\odot \,\text{ǂ}\, \frac{\psi}{\mathrm{q}}\odot^2 \sqcap \frac{\psi}{\mathrm{q}}\odot^2 + 2\mathrm{a}\odot - \mathrm{d}\male, +\male^2, +\frac{\psi \mathrm{d}^2}{\mathrm{a}} - \frac{4\psi \mathrm{d}}{\mathrm{a}}\male + \frac{4\psi\male^2}{\mathrm{a}}$, | ponamus $\frac{4\psi}{\mathrm{a}} + 1 \sqcap \frac{\varphi}{\mathrm{a}}$ $2\mathrm{a} - 2\psi \sqcap \aleph$ $\text{‡}\mathrm{a} - 4\psi \sqcap \beth$ *erg.* | et ordinando fiet: $\male^2 - \varphi \mathrm{a d}\male - \frac{\varphi\aleph \mathrm{d}\odot}{\varphi} + \frac{\left\{\begin{array}{l} +\mathrm{d}^2\psi \\ -\mathrm{ca}^2 \end{array}\right.}{\varphi} \sqcap 0$. Aeq (D) Multiplicando Aeq. (A) per 4, fiet 4ca $\sqcap \frac{4\psi}{\mathrm{q}}\odot^2 + 8\mathrm{a}\odot - 4\mathrm{d}\male + 4\male^2$, Aeq. (E) Hanc Aeqvationem (E) auferendo ex Aeqvatione (B) fiet: $2\mathrm{a}\odot \,\text{ǂ}\, \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\odot^2 - 4\mathrm{ca} \sqcap \mathrm{d}^2 - 4\mathrm{d}\male + 4\male^2, -4\frac{\psi}{\mathrm{q}}\odot^2 - 8\mathrm{a}\odot + 4\mathrm{d}\male - 4\male^2$, et ordinando, $\odot^2 + 10\mathrm{a}\odot \sqcap * + 4\mathrm{ca}$ *(2)* vel L

2 addendo: Leibniz subtrahiert ca auf beiden Seiten der Gleichung. Ein Vorzeichenfehler beeinträchtigt zusammen mit zusätzlichen Versehen die weiteren Rechnungen.

destruendoque, atque ordinando habebimus: $\odot^2 \; \dfrac{\begin{array}{c}+\frac{5}{2}a\odot-\frac{1}{4}d^2\\ -ca\end{array}}{\ddagger 13\frac{a}{q}} \sqcap 0$

(Parabola $\frac{1}{4}d^2 \sqcap -ca$. Unde non licet in parabola ponere $\mu \sqcap 0$.)

Ex his aequationibus inter se junctis fieret aequatio

$$\left.\begin{array}{l} +\odot^2+\male^2-\dfrac{3d}{13}\male \quad -\dfrac{4a\odot}{13} \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+3d^2\\ -ca\end{array}\right.}{13} \\[2ex] \qquad\qquad\qquad\qquad\quad +\dfrac{5a\ldots}{26} \quad \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+ca\\ +\frac{1}{4}d^2\end{array}\right.}{\ddagger 13\frac{a}{q}} \end{array}\right\} \sqcap 0,$$

quae est ad circulum. Quae cum aequatione ad sectionem Conicam datam $2a\odot \ddagger \frac{a}{q}\odot^2 \sqcap d^2-4d\male+4\male^2$ exhibebit utramque quaesitarum $\male$, et $\female$ vel $\odot$.

Aequatio autem ad circulum, etiam sic brevius enuntiabitur:

$$\odot^2+\male^2-\frac{3d}{13}\male-\frac{3a}{26}\odot \; \aleph\, a \left\{\begin{array}{c} \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+3d^2\\ -ca\end{array}\right.}{13} \\[2ex] \dfrac{\left\{\begin{array}{l}+ca\\ +\frac{1}{4}d^2\end{array}\right.}{13\frac{a}{q}} \end{array}\right\} \aleph\, a \quad \sqcap 0.$$

Cujus ut descriptio pateat: Esto alia arbitraria $\leftmoon^2+\male^2+\frac{3d}{13}\male+\psi\leftmoon \sqcap 0$. et ponendo $\leftmoon \sqcap \odot+\varphi$, fiet: $\odot^2 \begin{array}{l}+2\varphi\odot\\ +\psi\ldots\end{array} +\male^2+\frac{3d}{13}\male \left.\begin{array}{l}+\varphi^2\\ +\varphi\psi\end{array}\right\} \sqcap 0$. et erunt aequationes duae $2\varphi+\psi \sqcap -\frac{3a}{26}$, et $\varphi^2 + \varphi\psi \sqcap \aleph\, a$. Ergo $\psi \sqcap -2\varphi - \dfrac{3a}{26}$, et $\varphi\psi \sqcap -2\varphi^2 - \dfrac{3a}{26}\varphi$. Ergo $+\varphi^2 + \dfrac{3a}{26}\varphi \sqcap -\aleph a$. Constructionem ergo habemus aequationis ad sectionem Conicam datam, $\mp\dfrac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. ponendo $b \sqcap 2a$. per aliam compertam, $sv \mp \dfrac{a}{q}v^2 \sqcap z^2 + \text{☿}z$.

Aequationis autem superioris assumtae ad Circulum, nempe $-x^2+ex+\theta a \sqcap y^2+\lambda y$, facilior longe est per compertam $-w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \lambda y$. prorsus ut in postremo exemplo aequationis ad circulum incognitarum $\odot$ et ♂. Scilicet explicanda est w, per $x+\text{♃}$. fietque

$$\begin{array}{llll} -x^2 & -2\text{♃}x & -\text{♃}^2 & \sqcap y^2 + \lambda y. \\ & +\gimel \ldots & +\gimel\text{♃} & \end{array}$$

Fiet $\gimel \sqcap e + 2\text{♃}$. et $\gimel\text{♃}$ erit $\sqcap \text{♃}e + 2\text{♃}^2$, ergo fiet $\text{♃}^2 + e\text{♃} \sqcap \theta a$. Et compendii verborum causa jungi possunt constructiones harum duarum aequationum ad circulum alterius incognitarum $\odot$. ♂, alterius incognitarum x et y.

Atque ita universalis omnium horum problematum constructio, quanta fieri potuit brevitate, absoluta est, posita $\mu \sqcap 0$, seu $ca \sqcap \ddagger\dfrac{a^2}{q}\theta$ et $b \sqcap 2a$. Neque enim mirum est, cum duae fuerunt indeterminatae supernumerariae. Cum ista demonstranda erunt, tunc lemma praemittetur: Problema, scilicet construere ope sectionis Conicae datae, aequationem $\dfrac{a}{q}x^2 + bx + ca \sqcap y^2 + dy$. Sed hoc postulabit praedemonstrationem universalem Theorematis Conici supra dicti. Si statim accommodassemus ad $\mp\dfrac{a}{q}\omega^2 + 2a\omega \sqcap \upsilon^2$, explicando ω per $x + \text{♄}$ et υ per $y + \text{ח}$ fieret $\mp\dfrac{a}{q}x^2 \mp \dfrac{2a}{q}\text{♄}x \mp \dfrac{a}{q}\text{♄}^2 + bx + b\text{♄} \sqcap y^2 + 2\text{ח}y + \text{ח}^2$

$$\begin{array}{lllllll} \text{et ordinando} & \mp\dfrac{a}{q}x^2 & \mp\dfrac{2a}{q}\text{♄} & x & \mp\dfrac{a}{q}\text{♄}^2 & \sqcap & y^2 + 2\text{ח}y \\ & & +\ 2a & \ldots & +\ 2a\text{♄} & & \\ & & & & -\ \text{ח}^2 & & \\ \text{conferendo cum} & \mp\dfrac{a}{q}x^2 & +\ b & x & +\ ca & \sqcap & y^2 + dy \end{array}$$

14 fuerunt *(1)* arbitrariae supernumerariae *(2)* indeterminatae *L* 14 erunt, *(1)* operae pretium erit lemma uti *(2)* tunc *L*

fiet ח $\sqcap \frac{d}{2}$ et $\mp\frac{a}{q}$♄$^2 + 2a$♄ $\sqcap\ ca + \frac{d^2}{4}$, quae etiam est ad conicam datam, unde statim reperietur ♄, ac denique per ♄, determinabitur b, sed hoc nobis incommodum, calculi nam difficultatem auget, et volumus nos b a notis determinari posse pro arbitrio. Unde superior methodus ope Rectanguli Conicae inscripti praeferenda fuit.

43. DE CONSTRUCTIONE
[Oktober – Dezember 1674]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 I 17 Bl. 1–3. 8–10. 3 Bog. 4°. Textverlauf: Bl. 1, 10, 2, 9, 3, 8. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Math. Schr.* 7, 1863, S. 249–260; 2. (Teildr.) VI, 3 N. 45 S. 414–421 (= Z. 8 – S. 483 Z. 9).
Cc 2, Nr. 861 A

Datierungsgründe: s. N. 38.

De Constructione

Ex quo Algebram ad lineas accommodare Vieta inprimis et Cartesius seculum docuere, agnitum est a plerisque omnibus, ad solvenda in Numeris problemata in quibus rectarum quarundam comparatione cum aliis rectis designatarum, valor ac descriptio quaeritur, nihil fingi posse praestantius; cum omnis difficultas problematis una aequatione inclusa sit, cujus tantum radices quaeruntur; sed illud tamen semper a praestantibus Geometris objectum est, constructiones Geometricas calculi vestigiis nixas plerumque ab illa simplicitate atque elegantia longe abesse, qua veteres implicata saepe problemata per synthesin absolvere. Exemplo nobis esse potest constructio problematum solidorum, ope Circuli et Parabolae quam Cartesius tradidit ubi aequationis quadrato-quadraticae aut cubicae secundum terminum tolli postulat, quo facto constat non mediocriter intumescere aequationem etiam suapte natura simplicissimam. Et ea tamen formula construendi Cartesio tantopere placuit ut omnium quas quis exoptare possit perfectissimam et generalissimam affirmaverit.

Haec cum inter veteres novosque Geometras studio partium calentes agitarentur, moderatiores quanquam imperfectionem cognitae analyseos literalis in constructionibus

8 f. Constructione *(1)* Ex qvo Analysis Characteristica a Vieta *(2)* Ex *L* 10 in Numeris *erg. L* 16 problemata | per synthesin *erg.* | *(1)* dedere *(2)* absolvere *L* 20 f. Et . . . affirmaverit *erg. L* 22 Geometras *(1)* velut inter *(2)* studio *L* 23 cognitae | hactenus *gestr.* | analyseos | literalis *erg.* | in *L*

---

9 f. docuere: Fr. Viète, *In artem analyticam isagoge*, 1591 (*VO* S. 1–12); R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 1–106. 18 tradidit: *a. a. O.*, lib. 3, S. 67–106.

apparere agnoscerent, non ideo tamen repudiandam putavere, tum ob ingentia commoda in ipsa inveniendi arte, quae nullis veterum Datis supplerentur, tum quod spes esset posse aliquando ex ipsa Analysi aditum reperiri ad artem syntheseos, qua constructiones elegantes et veteribus dignae, redderentur.

Mihi quaenam in hoc quoque argumentum incumbendi fuerit ratio, dicam vel ideo, quod plurimum inde lucis instituto meo accessurum arbitrer. Desarguesius et Pascalius filius, praestantes omnium consensu Geometrae rem veteribus, quantum ex servatis eorum scriptis judicari possit, intactam aggressi erant, u n i v e r s a l i a   C o n i c o r u m demonstratione complecti, qua et harmonia sectionum Coni appareret, et proprietates communes observarentur, et constructiones problematum quae in his lineis efficienda proponerentur, fierent universales. Hoc illi institutum si absolvissent, totam nobis Geometriam solidorum sive secundi gradus perfectam insigni compendio dedissent. Sed quoniam synthetica methodo per theoremata praedemonstrata ad propositum eniti voluerant; mirum non est, aditum ad problemata difficiliora reperisse nullum, destituente eos patientia in ea itineris asperitate, et anfractuum multitudine, quae schemata contemplantes, et Conum mente versantes, fatigabat. Quanquam autem opus imperfectum reliquissent, inimitabile tamen reddidisse visi sunt multis. Nam quas ipsi in solido et per synthesin generaliter demonstraverant Conicarum Linearum Harmonias, eas Analytici postea secuti re in planum traducta (quod fateor ingenti labore imaginationem absolvit) nondum exhibuere, ne ipso quidem summo Viro Johanne Wittio excepto, qui tamen Analysin Conicam omnium longissime promovisse videtur.

Hoc cum mihi de Analyseos ac Syntheseos comparatione sententiam dicenti nuper illustris Carcavius objecisset, agnoscentem vera dici, ad tentandum excitavit, qua ratione eousque produci posset Analysis, quo Synthesin perventuram pro desperato habebatur. Aggressus negotium vidi novis quibusdam characteribus opus esse, quibus variae signorum ambiguitates exprimerentur; vidi indivisibile atque infinitum calculo analytico

3 ex | ipsa *erg.* | Analysi *(1)* ad constructiones contrahendas *(2)* aditum *L* 8 erant, *(1)* Scientiam Conicorum *(2)* u n i v e r s a l i a *L* 9 sectionum Coni *erg. L* 16 imperfectum *(1)* reliqvissent, qvae tamen ipsi per synthesin in sol *(2)* reliqverint, *(3)* reliqvissent, *L* 23 vera dici, *erg. L*

---

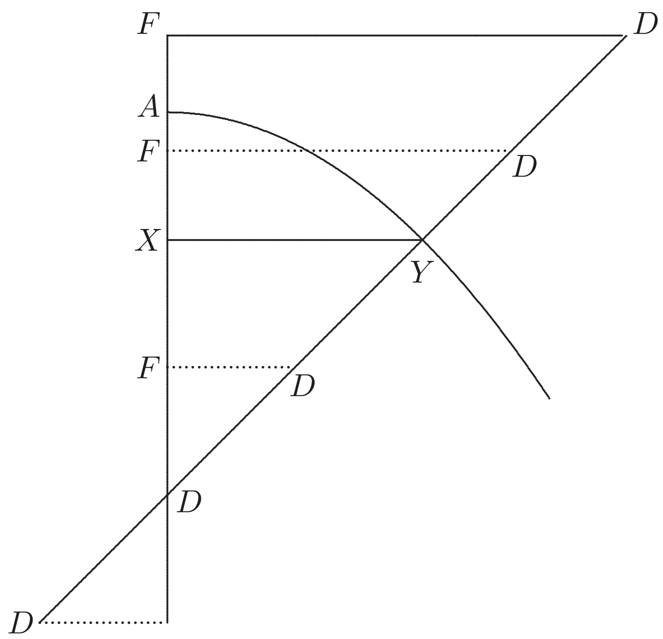
6 Desarguesius et Pascalius: vgl. N. 10 S. 77 Z. 8 Erl. 21 promovisse: J. de Witt, *Elementa curvarum linearum*, 1659, *DGS* II S. 153–340. 22 nuper: vgl. N. 23 S. 245 Z. 12–15.

misceri debere, quod unum non satis observasse videtur profundissimus caetera Cartesius; denique modum reperi analyticum, quo sectiones Conicae perinde tractari possint, ac si unicum extaret figurae cujusdam genus sectionis Conicae nomine; cujus figurae natura aequatione universali explicata, centra, axes, vertices, focos; abscissas, ordinatas, tangentes, perpendiculares; nulla specierum, Hyperbolae, parabolae, Ellipseos, Circuli, rectae, mentione, statim prodat, unde theoremata universalia innumerabilia in promtu fuere, et ad omnium problematum Conicorum aequationibus comprehensibilium solutionem communem mihi strata est via.

Restabat fastigium operis, problema scilicet problematum id genus omnium generale: Formulam reperire, unam sectionibus Conicis et Aequationum formis omnibus, communem construendi problema solidum quod libet, ope Sectionis Conicae datae, et Circuli. Hac enim formula reperta problemata Conica omnia (: modo sursolida non sint :) solo Circulo et recta planorum instar construi, et quod non minoris est momenti solutione Conicis omnibus communi comprehendi possunt. Sin desideretur nec Universalia Conica ad finem perducta censeri possunt. Quod ut appareat exemplum afferri utile est:

Esto problema propositum: ex puncto dato D minimam sive perpendicularem DY ducere ad Conicam datam AY. Patet hoc problema multos complecti casus, nam et quinque sunt Linearum Conicarum genera, Recta, Circularis, Ellipsis, Hyperbola et Parabola, et in qualibet, trium inprimis posteriorum linearum specie, quinque aut minimum quatuor habentur subdistinctiones, pro vario situ puncti dati D, unde si quis problema plene solvere volet, in omnibus linearum specierum generibus, et punctorum datorum casibus, ei novem minimum calculis constructionibusque separatis opus erit; et frustra sperabit absoluto uno calculo supplere caeteros conjectura: cum a me quidem calculo non magis operoso, quam si in uno tantum ex casibus difficilioribus fuisset laboratum, unica communis omnibus lineis casibusque aequatio re-

3 f. figurae | *(1)* aeqvatio *(2)* natura ... explicata *erg.* | , *(a)* tangentes, perpendiculares, *(b)* centra, *L* 7 aequationibus comprehensibilium *erg. L* 10 Formulam *(1)* constructi *(2)* reperire, *(a)* construendi *(b)* unam *L* 14 instar *(1)* construi p *(2)* solvi possunt; *(3)* construi, *L* 20 sunt *(1)* Sectionum *(2)* Linearum *L* 22 specie, *(1)* qvatuor aut minimum tres *(2)* qvinqve *L* 24 ei *(1)* duodecim, minimum, *(2)* novem minimum | aequationibus sive *gestr.* | calculis *L*



[*Fig. 1*]

perta sit; hanc jam aequationem communem, quae generaliter loquendo quadrato-quadratica est, fingamus esse:

$$y^4 + ly^3 + amy^2 + a^2n[y] + a^3p \sqcap 0$$

valore scilicet linearum *l. m. n. p.* ambiguo, ut alibi a me docebitur, patet opus esse formula construendi hanc aequationem generali, quae neque signa, neque valores terminorum moretur, adeo ut quivis ex terminis cognitis *l. m. n. p.* possit intelligi major minorve alio, vel etiam nihilo aequalis; alioquin formula non esset omnibus problematis casibus communis; praeterea formula opus est, quae sit omnibus conicis communis, ita ut ope ejus centrum radiusque circuli, cujus intersectione cum Conica data solvi debet problema, una eademque methodo investigetur, qualiscunque etiam Sectio Conica in problemate data sit.

9 est, *(1)* qvae *(a)* in *(b)* ad intersectionem cuiuslibet Conicae datae, et Circuli qvaesiti applicari possit *(2)* qvae *L*

5 alibi: N. 10.

Formulam autem hujusmodi si dicendum quod res est hactenus prodidit nemo. Cartesiana enim formula Parabolae propria est: Amplissimus Huddenius aliam pro Hyperbola dedit, non minus elegantem. Uterque tamen opus habet praeparatione aequationis, quod calculos plerumque reddit prolixos: inter eos quorum extant in hanc rem meditationes, longissime omnium progressus est Illustris Slusius, cui si in mentem venisset quaerere, quod ego mihi hoc loco proposueram, utique elegantius multo absolvisset; is ergo unam dedit formulam omnibus aequationum formis communem, nec praeparatione indigentem, sed non omnibus Conicarum speciebus: coarctatur enim ad intersectionem parabolae datae et circuli cujusdam inventi. Unde intelligi potest rem constructionum non ita perfectam esse, uti nonnullis auditu potius aut superficiaria lectione, quam attenta meditatione talia aestimantibus videri posset.

Mihi ergo necessarium visum est rem de integro red-ordiri, quod dum facio, novisque artibus Characterum ambiguorum usus institutum urgeo, primum in vias incidi, tam impeditas, ut pene de exitu desperarem[,] formulas enim prolixiores pro nihilo ducebam, nec nisi simplicibus atque elegantibus uti decreveram: hoc me admonuit, non esse statim irrumpendum in calculum; sed accurata meditatione digerenda primum subsidia esse, unde aptiora eligi possint, alioquin evenit, ut in ipso limine superando defatigati, aut resiliamus irriti coeptorum, aut non nisi recollecta mente, novis viribus sumtis; sero ad exitum perducamur. Nolo errationum mearum vestigia describere, quanquam id quoque profecto usus habiturum esset non contemnendos, nisi prolixitas deterreret. Suffecerit hoc loco itinerarium dare cogitationum mearum, ex quo in veram viam coorta subito luce redierant.

C o n s t r u c t i o est determinatio puncti quaesiti ductu linearum: Ergo c o n s t r u c t i o eo censeri debet e l e g a n t i o r quo l i n e a e quas ducere necesse est, s i m p l i c i o r e s p a u c i o r e s q u e sunt. Simpliciores autem censentur Geometricae mechanicis, et inter Geometricas eae quae gradus sunt inferioris, superioribus. Si duae

2 est: *(1)* sunt alii qvi Hyperbola tantum *(2)* | Amplissimus *erg.* | Huddenius *L* 6 proposueram, *(1)* nullum dubium est, qvod *(2)* utiqve *L* 14 f. formulas ... decreveram *erg. L* 15 esse *(1)* velut de improviso *(2)* statim *L* 16 meditatione *(1)* dirigenda *(2)* digerenda *L* 21 loco *(1)* iter meum *(2)* itinerarium *L*

1 f. Cartesiana: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 85–88. 3 dedit: s. Fr. v. SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 324–328. 7 dedit: R.-Fr. de SLUSE, *Mesolabum*, 1668, S. 93–95.

sint ejusdem problematis constructiones; quarum altera paucioribus, altera simplicioribus lineis utatur, posterior praeferenda plerumque est, malim enim profecto decem describere circulos, quam Conchoeidem unam; cum re accurate considerata ad descriptionem Conchoeidis infinitis Circulis, id est motu circuli integri per spatium, opus sit, cujus infinita vestigia pro totidem descriptis circulis haberi possunt. Hinc patet non esse utendum linea superiore, ad problema inferius, nisi ea linea superior jam tum adsit sive quod data sit in problemate, sive, quod alia ex causa describenda fuerit. Exempli causa, si quaestio sit de ratione inveniendi punctum flexus contrarii in Conchoeide, constat problema sua natura esse solidum, sive sectionibus Conicis efficiendum; quia tamen omnia problemata inferiora lineis superioribus solvi possunt; ideo rectius solvetur per conchoeidem datam et circulum; satius enim Conchoeide jam descripta uti, quam novam curvam conicam describere.

Ex his intelligi potest, regulas constructionum elegantium easdem esse cum praeceptis parsimoniae ex arte Oeconomica petitis, ne scilicet inutilibus utamur, aut ne quibusdam utilibus in nostra potestate sitis non utamur. Unde intelligitur data omnia minutim examinanda, ut appareat quid inde erui possit in rem nostram; datae autem sunt tum figurae sive lineae, tum quantitates sive valores quaesitarum linearum earumve potestatum. In datis lineis utique mutari potest nihil; sed quoniam constat, ad eandem lineam quaesitam dati valoris, variis modis posse deveniri, pro vario datarum linearum usu, ideo quaeritur electio modi cujusdam prae caeteris facilis, atque elegantis, id est valor simplicior dato factus ex dato linearum datarum facili in alias transmutatione. Sed quoniam ad ista non ante veniendum est, quam valor linearum pure habeatur, et vero saepe non ipsius Lineae, sed potestatis ejus potestatumve diversarum aggregati, valor habetur, ideo aequationis inde natae quaerendae sunt radices id est valores unus pluresve, qui lineae quaesitae tribuendi sunt ut aequationi datae respondere possit iisque valoribus inventis tum demum de ratione cogitandum est, qua reddi queant simplices. Verum quia saepe valores linearum quaesitarum puri per calculum exacte haberi non possunt, Geometria succurrit defectui Analyseos, et quod ista nominare non potest, efficit intersectione quarundam linearum.

14 petitis, *(1)* ne qvos scilicet sumtus inutiles faciamus et ne *(a)* qvid sterile *(b)* qva bona *(2)* ne *L* 15 utamur *(1)*, qvorum alterum sumtus *(a)* inutiles *(b)* vanos circumscribit, alterum bonis nostris uti frui jubet ne qva scilicet inculta ac sterilia *(2)* Unde *L* 17 f. earumve potestatum *erg. L* 23 non *(1)* ipsarum Linearum, *(a)* aut *(b)* sed potestatum *(2)* ipsius *L* 26 de *(1)* eorum depressione *(2)* ratione *L* 27 calculum *(1)* non nisi difficillime habentur *(2)* exacte *L* 28 defectui *(1)* Arithmeticae et qvod *(2)* Analyseos *L*

Hinc apparet duo esse summa genera constructionum in Geometria, quemadmodum duo sunt genera operationum in Arithmetica; A l g o r i t h m u m , quem vocant q u a t u o r S p e c i e r u m , (: qui additionem, subtractionem, multiplicationem, divisionem, et horum combinationes varias complectitur :), et e x t r a c t i o n e m R a d i c u m. Nam si sit $x \sqcap a - b + \frac{bc}{a} + \sqrt{da}$ patet ad habendam x additione quatuor quantitatum, subtractione unius b, multiplicatione ipsius b per c, et divisione producti per a, ac denique radice ex da, opus esse. Quae ut quam compendiosissime fiant variae artes tum ab ipso c a l c u l o , tum a G e o m e t r i a suppeditantur; a c a l c u l o , ut si addenda sint $1a + 2a + 3a + 4a + 5a, \sqcap x$. ponendo numerum terminorum $5 \sqcap d$, et proxime majorem $6 \sqcap d + 1$, fiet summa $\frac{ad^2 + da}{2} \sqcap x$. seu $15a$; a Geometria, ut si addenda sint $b^2 + c^2$ tantum rectae b. extremo uno, altera c, normaliter imponatur, junctisque reliquis duobus extremis alterius cujusdam lineae ductu, erit hujus lineae quadratum aequale duorum quadratorum datorum summae: quam sane praxin non calculus sed Geometriae pars a calculo independens docet sed artis foret. Ex quo intelligi potest Geometriam quanquam calculo Algebraico subordinata sit scientia, suam tamen quandam peculiarem analysin habere, qua theoremata ipsi propria demonstrentur, et constructiones ultimae calculo quantum licet, contracto, tandem in lineis efficiantur.

Hanc Analysin Geometriae propriam videntur agnovisse ac tenuisse veteres, cujus in eorum scriptis agnoscere mihi videor vestigia quaedam, Algebrae praeterquam, ubi de numeris agebatur, nulla. Et vero quas illi hac arte detexere propositiones nisi dudum haberemus, aegre quibus nunc utimur methodis inveniremus. Ejus artis prima lineamenta mihi videor assecutus, rationemque reperisse, qua inventis Symbolis aptis, constitutisque principiis quibusdam, caetera quadam calculi imitatione fieri possint, ne lineas imaginatione persequi necesse sit, quod nescio an habuerint veteres. Intelligo Clarissimum Aleaumium Vietae aequalem, peculiarem quandam sibi fecisse Characteristicam, qua amici ab eo mira praestari agnoscebant; sed cujus post ejus mortem vestigia superfuere nulla.

17 tandem in lineis *erg.* *L* 21 methodis *(1)* detegeremus *(2)* inveniremus *L* 25 qvandam *(1)* habuisse *(2)* sibi fecisse *L*

25 fecisse: vgl. VI, 3 N. 31 S. 379; dort sind D. Henrion und J. de Beaugrand als Freunde von J. Aleaume genannt.

Ego cum Euclidis *Elementa* nuper attente legerem, quod fateor a me fieri perraro, aut potius si de integro libro quaestio sit, factum hactenus nunquam; tria esse vidi propositionum genera; aut enim ex calculo pendent, quales sunt quae de rationibus ab eo demonstrantur, ac de quadratis, atque incommensurabilibus nonnullae; aut ex linearum ductu, quales sunt quae prioribus libris habentur pleraeque, de angulis, de perpendicularibus, de parallelis; aliae denique ex utrisque subsidiis inter se junctis. Hae propositiones aut Theoremata aut problemata sunt: Theorematum elegantium calculi pariter ac Geometriae haec est natura, ut non possint nisi casu inveniri; nisi quis omnes ordine combinationes notionum (delectu tamen aliquo fateor habito, quod peculiaris quoque artificii est) instituere velit, quo facto eum in theoremata insignia omnia incidere necesse est. At Problematum diversa est ratio: dato enim problemate desideratur ars quaedam solvendi certa, ita ut semper in nostra potestate sit, exitum reperire: sin minus, nota est scientiae imperfectae. Animadverti autem, m u l t a p r o b l e m a t u m c a l c u l i g e n e r a esse in nostra potestate, at problematum Geometriae purae nulla: nam exempli causa problema illud simplicissimum, rectam lineam invenire, cujus quadratum datarum duarum linearum rectarum quadratis sit aequale; quis solveret quaeso, nisi theorema pythagoreum jam extaret. Unde intelligitur horum aliorumque multorum Geometriae purae problematum, solutionem non arti ac methodo, sed memoriae nostrae deberi, veterum autem ingenio ac felicitati; nam forte nec illis methodus fuit. Ingenium autem et felicitatem jungenda esse constat, quando methodus deest; methodus enim hominem mediocrem, quantum ad exitus certitudinem aequat ingenioso; qui de suo invenire possit, aut experto qui memoria ab aliis inventorum polleat; etsi tempore semper distinguantur, quod inexercitatus ac hebes, sed methodo instructus, sibi majus suo quodam jure postulat. Fatendum est ergo Analysin Geometriae hactenus perfectam non esse, cum sint Problemata quorum solutio non nisi per synthesin habetur. Fortasse nulla sunt problemata, (: de iis semper loquor, quae possunt aequatione comprehendi :) quae ex iis quae per synthesin habentur in Geometria pura, accedente Analysi Calculi, solvi non possint;

6 junctis *(1)* Ac duorum qvidem priorum generum illud notavi discrimen *(2)* Hae *L* 7 f. calculi ... Geometriae *erg. L* 10 insignia omnia *erg. L* 13 autem, *(1)* plu *(2)* magnum *(3)* pleraqve problemata *(4)* m u l t a *L* 14 g e n e r a *(1)* (exceptis iis, in qvibus summae serierum qvaeruntur) esse in nostra potestate *(2)* esse *L* 18 arti *(1)* nostrae, sed *(2)* ac *L* 19 fuit. *(1)* Fateor homi *(2)* Fateor qvae in eo genere obtinentur, *(3)* Ingenium *L* 21 ingenioso; *(1)* nec nisi tempore ac promtitudine *(2)* qvi *L* 22 etsi *(1)* promtitudine semper *(2)* tempore *L* 23 qvod *(1)* rudis *(2)* inexercitatus *L* 24 postulat. *(1)* Scientiae autem tum demum per *(2)* Fatendum *L* 24 ergo *(1)* Scientiam *(2)* Analysin *L*

sed elegantissimas omnium constructiones eligere ex calculo dato, res est non nisi ab illa quam supra tetigi, arte symbolica, Geometriae peculiari, expectanda.

Hoc loco vero Symbolicam illam novam non attingemus, cum peculiaris sit operae speculatio, nec valores calculo invenire, nec inventos contrahere docebimus: sed unum nunc explicabimus, quomodo radices aequationum, etiamsi analytice extrahi non possint, Geometrica constructione commode definiantur; ejusque artis specimen dabimus, prodita methodo generali construendi problema solidum quodlibet utcunque affectum, sectione Conica data, circuloque invento, quam eo pluris faciendam arbitror, quo rariore connubio, universalitatem junxit elegantiae ac brevitati.

Quaerimus Constructionem Aequationis solidae cujuscunque, ope sectionis conicae cujuscunque, et Circuli; quaeritur ergo linea quae simul ad sectionem conicam indefinitam, et Circulum ordinata esse possit; ac proinde duos habeat valores duabus aequationibus, duas easdem incognitas habentibus seu duobus locis expressos; unde una denique unius incognitae fiat aequatio, similis datae, cujus singuli Termini, singulis terminis aequationis datae collati, definiant totidem lineas arbitrarias in locis exprimendis assumtas. Unde intelligitur utile esse multiplicare numerum linearum arbitrariarum quoad ejus fieri commode potest nam si quae post omnes aequationes collatitias resolutas supersint poterunt a nobis definiri pro arbitrio; unde apparent modi infiniti construendi problema idem, formula eadem, ex quibus elegantiores eligi possunt. Ut autem lineae arbitrariae multiplicentur locus ad Conicam Circulumve assumendus ille est, qui plurimas lineas recipit.

Quemadmodum inter multa ad eandem curvam loca quidam est simplicissimus, ita vicissim alius omnium maxime compositus habetur: Quemadmodum autem ille ad naturam curvae concipiendam, demonstrandas proprietates, inveniendasque dimensiones; ita alter ad problematum constructionem utilior haberi debet. Lineae Conicae simplicissimus locus, hac ni fallor aequatione universali, Conicis omnibus communi exprimitur: $2ax \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ posito a latere recto q transverso. Omissa parabola, Hyperbolae atque Ellipsis communis aequatio simplicissima haec est: $a^2 \mp \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ et Circuli $a^2 - x^2 \sqcap y^2$.

1 sed *(1)* elegantissimam omnium constructionem *(2)* elegantissimas *L* 4 nec *(1)* valores inventos, reddere docebi *(2)* valores *L* 5 aeqvationum, *erg. L* 8 invento, *(1)* qvae tanto videtur utilior, qvod elegantiam junxit universalitati *(2)* qvam *L* 15 totidem *erg. L* 26 communi | facillime *gestr.* | exprimitur: *L*

Compositus maxime locus ad sectionem Conicam tali aequatione exprimitur:

$$\pm\frac{a}{q}x^2 \;+bx+ca \sqcap y^2+dy,$$

cui respondet talis aequatio ad circulum:

$$-x^2+ex+\theta a \sqcap y^2+\lambda y.$$

Facile autem cuivis Analytices perito ex ipso harum aequationum intuitu patet, nullas alias magis compositas ad sectionem Conicam Circulumve, esse in natura rerum; cum harum quidem omnia loca sint completa, et ad gradus altiores ascendere non liceat. Tantum ergo peculiaris horum locorum descriptio determinatioque exhibenda est, ut ipsarum x et y pariter ac caeterarum, b, c, d, situs cognoscatur.

Hoc autem via analyseos regia sic obtinebitur, si aequatio composita data reducatur ad simplicissimam. Duos enim terminos, dy, et ca, tollere in nostra potestate est, quia duas etiam incognitas pro arbitrio explicare possumus, nempe x, et y. Quod ideo monere volui, quia viam aperit universalem ad loca altiorum etiam curvarum examinanda. Hac enim arte facile intelligi potest, quae loca possint esse ad eandem curvam quorum scilicet unus ex alio fieri potest; unde methodus apparet exhibendi loca curvarum altioris cujusdam gradus simplicissima, unde certus quoque earum numerus innotescet. Eadem methodo aperitur via ad investigandos modos describendi curvam datam: sane enim finitus est numerus locorum, si rectae incognitae x et y parallelae inter se intelligantur. Sed quoniam varios alios earum situs comminisci licet, ut si in Triangulum coeant circa focos quosdam rotatile, ut fit cum Ellipsis aut Hyperbola ex focis quibusdam describitur, hinc fit ut infinita possint intelligi loca ad eandem curvam, quorum tamen pleraque ad constructiones problematum inepta sunt, ubi duabus curvis sese intersecantibus; necesse est y incognitas non tantum ubique easdem, sed et x inter se parallelas esse, et coincidere

1 f. exprimitur: *(1)* $\pm\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2+\mathrm{bx}\sqcap\mathrm{y}^2+\mathrm{cy}$. et ad circulum hac: $-\mathrm{x}^2+\mathrm{dx}\sqcap\mathrm{y}^2+\mathrm{ey}$. *(2)* $\pm\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2$ *L*

11 simplicissimam. *(1)* Cum enim duos sint termini tollendi, dy, et ca, patet *(2)* duos *L* 13 examinanda, *(1)* nam in Conicis ea dudum veterum diligentia, in hoc qvidem negotio enituit, ut rem de integro calculare non sit necesse. Nam post multos ratiocinationum anfractus colligi potest ex eorum scriptis theorema sane universale, sane elegans, qvod nunc exponam: *(2)* Hac *L* 15 curvarum *(1)* secundi | gradus *nicht gestr.* | *(2)* altioris *L* 16 simplicissima, | catalogumqve earum exhibendi *gestr.* | unde *L* 17 via *(1)* recitandi omnes modos *(2)* ad investigandos modos *(a)* possibiles omnes descr *(b)* describendi *L*

20 describitur: vgl. R. DESCARTES, *La Dioptrique*, 1637, S. 90 u. 101.

y, vel contra. Est et alia locorum per abscissas ordinatasque explicatorum praerogativa, ut ad dimensiones inveniendas utilia sint.

Reliqua tamen loca ad descriptiones Curvarum organicas usui esse possunt. Puncta enim curvae cujusdam datae non tantum relatione ad quandam directricem, per perpendiculares sive ordinatas sed et relatione rectarum ad certa quaedam puncta ductarum designari possunt: quae sane expressio longe priore simplicior est, cum non nisi una saepe ordinata opus habeat. Data jam curva punctum quoddam unum plurave invenire ad quod omnia curvae puncta relationem habeant adeo simplicem, ut una incognita exprimi possit, problema credo fuerit supra vires humanas; nisi synthesis succurrat Analysi laboranti; nimirum quod supra dixi Theoremata elegantia vi quadam subita eruere non est in nostra potestate, sed si per combinationes idearum minutim procedas, ipsa sese ordine offerunt meditanti. Ergo primum cogitabimus, si una recta a quolibet curvae puncto ad idem punctum duci possit, eam esse circularem; si a quolibet curvae puncto ad duo quaedam puncta rectarum ductarum summa vel differentia sit cuidam rectae datae aequalis, lineam esse Ellipsin vel Hyperbolam; si a quolibet curvae puncto dato duae ductae lineae brevissimae altera ad punctum quoddam, altera ad rectam quandam sint inter se aequales curvam fore Parabolam; unde sumtis jam pluribus punctis, aliae possunt combinationes institui quibus ordine omnes curvas Geometricas exhiberi posse non est dubitandum; idque ad Geometriae perfectionem plane necessarium est, ut habeatur ratio omnium commodissima describendi curvam. Quo perfecto de caeteris describendi modis infinitis, non erit laborandum, nisi si qui peculiares quosdam usus habere possint. Quales sunt describendi rationes Eccentricae, quibus portiones curvarum longissime a centro focove distantes exiguis tamen machinis perfici possint; quale quiddam in Circuli Sphaeraeve portionum eccentrica tornatione habetur; et memini Johannem Ottium, Analyseos peritissimum simile quiddam nobis in Ellipsi Hyperbola et parabola promittere, quod ad altiores curvas generali methodo produci posse non dubito. Mihi rem consideranti, aptissimus ei usui videtur conus; habita enim exigua Trianguli portione sufficiente, etiam Coni sufficiens portio describi potest, ex quo secari potest portio curvae, utcunque focus ejus longissime

1 f. Est ... sint *erg.* *L* 9 humanas; *(1)* sed synthesi ista absolvenda *(2)* nisi *L* 13 possit, *(1)* lineam esse rectam, deinde *(2)* eam *L* 24 Ottium, | Geometram *gestr.* | Analyseos *L*

25 promittere: J. Ott, *Cogitationes physico-mechanicae de natura visionis*, 1670; vgl. J. Ott an Leibniz, 6. (16.) Juli 1671, II, 1 N. 71 S. 230–232.

absit. Idem ad circulum traduci potest, quia circulus ex cono aliter etiam quam parallele ad axem secari potest; cum scilicet subcontraria quam vocant sectio est. Porro cum eadem sectio aliquando ex pluribus possit secari Conis, eligendus est commodissimus in rem nostram. Addenda sunt in eam rem quae Hookius de descriptione eccentrica superficiei sphaericae explicuit, item quam Wrennus invenit admirabilem Hyperbolae proprietatem; ostendit enim in Conoeidis Hyperbolici superficie infinitas duci posse rectas, idque ad ejus descriptionem applicuit, demonstrationem dedit Wallisius libro *de motu*. Caeterum videndum est, possitne reperiri Conoeidis genus, ex quo omnes aut certe plurimae secundi generis curvae secari possint. Et credibile est, ex trium Conoeidum, parabolici, Hyperbolici, Elliptici sectionibus omnes Curvas secundi gradus effici posse. Addo quemadmodum ex cono secari potest non tantum Parabola, Hyperbola, Ellipsis, sed et recta et circulus; ita ex Conoeide quodam altiore, ut Hyperbolico, forte inferiores quoque lineas, ut ipsas Conicas, imo et rectam circulumque posse secari; uti de recta id Wrennus ostendit. Haec utique non sunt usu vacua; neque enim despero posse aliquando sectiones Conicas imo et Conoeidicas mechanismis quibusdam tolerabilibus exhiberi quantum satis est ad sphaericorum vitrorum speculorumve effectus repraesentandos.

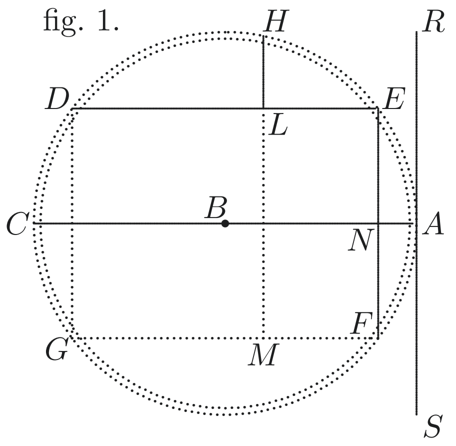
Sed redeundum est ex diverticulo in viam, a locis ad descriptionem utilibus, ad loca constructionibus aptiora. Dixi locum ad sectionem conicam maxime compositum, reduci posse ad simplicissimum arte analytica, tollendi terminos duos *dy* et *ca*. Sed hoc quidem necesse non est, nunc quidem, quoniam jam habetur descriptio loci ad sectionem conicam, neque simplicissimi, neque compositissimi, ad quem noster nullo negotio reducitur; is vero est:

$$\text{ǂ}\,\frac{a}{q}z^2 + \aleph z \sqcap v^2 + \beth v, \text{ ad sectionem Conicam indefinitam,}$$

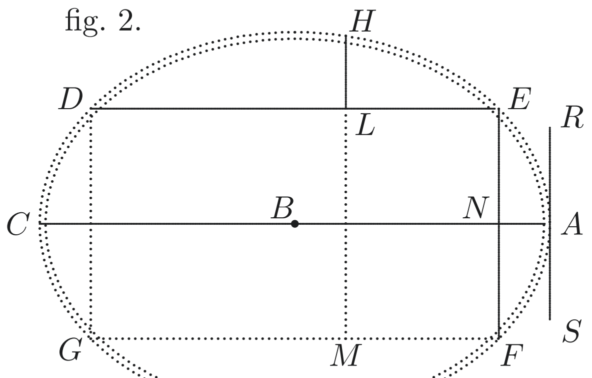
$$\text{et}\quad -w^2 + \gimel w \sqcap y^2 + \daleth y, \text{ ad Circulum}$$

5 item *(1)* qvae Wrennius de admirabile qvadam descriptione *(2)* qvam *L* 10 Curvas *(1)* altiores effici *(2)* secundi *L* 14 f. Conicas | imo et Conoeidicas *erg.* | *(1)* organice descri *(2)* mechanismis *L* 17 f. a locis ... aptiora *erg. L* 18 conicam *(1)* simplicissimum *(2)* maxime *L* 19 sed *(1)* hoc qvidem necesse nunc non est, qvoniam jam aliunde habetur *(2)* hoc priusqvam ostendam, operae pretium duxi exponere *(3)* hoc *L*

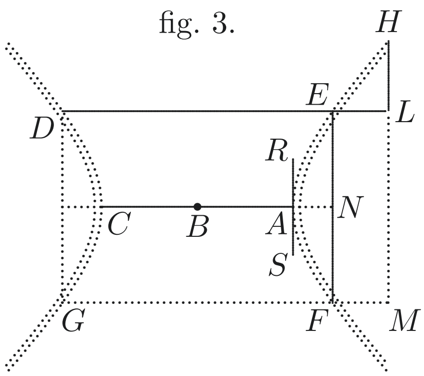
5 explicuit: vgl. R. Hooke, *Micrographia*, 1665, Preface, Bl. [d2] v°–[f2] r°. 6 ostendit: Chr. Wren, *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici*, in: *Philosophical Transactions* IV Nr. 48 vom 21. Juni/1. Juli 1669, S. 961 f. 7 dedit: J. Wallis, *Mechanica*, 1670–71, S. 556–567 (*WO* I S. 929 bis 938).



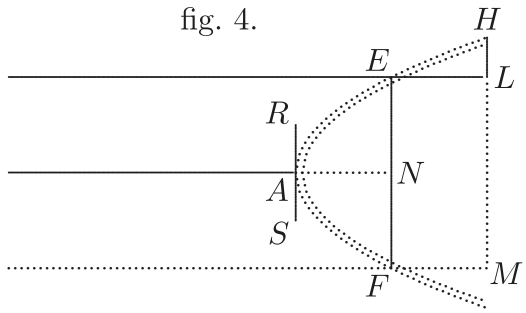
[*Fig. 2*]



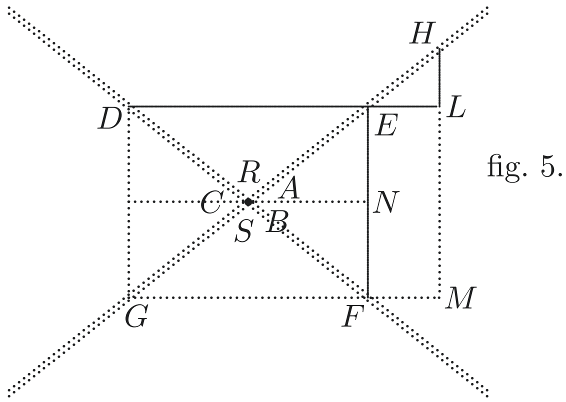
[*Fig. 3*]



[*Fig. 4*]



[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

quarum descriptio haec est: Sit sectionis Conicae datae centrum B, Axis seu latus transversum primarium duos vertices oppositos conjungens ABC. Centro eodem B rectangulum $DEFG$, sectioni Conicae inscribatur, ita scilicet ut aliquod ejus latus DE axi AC parallelum sit et anguli quatuor, D. E. F. G in ipsam lineam terminentur. Sumto jam quolibet in linea puncto, ut H, si perpendicularis inde in rectam DE, productam si opus est, demittatur, nempe HL, erit rectangulum DLE, ad rectangulum MHL, ut sectionis Conicae latus rectum RS. ad ejusdem latus transversum AC. Quod in Circulo fig. 1. Ellipsi fig. 2. Hyperbola fig. 3. Parabola fig. 4. non minus quam in ipsa recta fig. 5. verum esse constabit examinanti; demonstrationem enim generalem quae prolixiuscula est, nunc quidem afferre alienum est ab instituto praesenti. Tantum in circulo considerandum est, quoniam latus rectum et transversum aequalia sunt, etiam haec duo rectangula aequari, quod et in certa Hyperbolae specie, quam Circularem appellare possis, in qua scilicet latus rectum transverso sive axi aequatur, verum est; adde et in angulo rectilineo ERF, qui et ipse sectio superficiei conicae censeri potest, quando rectus est. In Hyperbola considerandum est, harmoniae causa duas oppositas sectiones pro una figura habendas, cujus aliquod centrum B. cogitari potest, non minus ac Ellipseos vel Circuli, etsi in his oppositae portiones concurrant in lineam in se redeuntem, quae in Hyperbola anguloque rectilineo divergunt. Angulus autem rectilineus eo tantum ab

---

8 f. *Nebenbetrachtung:* In fig. 5, $EN^2 \sqcap \frac{a}{q}RN^2$. Erit ergo $EN \sqcap RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et LM seu $2EN$ erit $2RN\sqrt{\frac{a}{q}}$, et $DE \sqcap 2RN$. Esto jam $EL \sqcap x$ erit $HL \sqcap x \frown \frac{RN}{RN}\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive erit $HL \sqcap x\sqrt{\frac{a}{q}}$. Rectangulum DLE, erit $\sqcap 2RN + x, \frown x$ sive $2RNx + x^2$, rectangulum vero MHL erit $\sqcap 2RN\sqrt{\frac{a}{q}} + x\sqrt{\frac{a}{q}}, \frown x\sqrt{\frac{a}{q}}$ sive $2RNx\frac{a}{q} + x^2\frac{a}{q}$. Erit ergo Rectangulum DLE ad rectangulum MHL ut q ad a.

9 generalem *erg.* *L* 17 oppositae *(1)* sectiones in se recurrant *(2)* portiones *L*

---

6 erit: Es gilt das umgekehrte Verhältnis, wie Leibniz in der folgenden Nebenbetrachtung richtig berechnet.

Hyperbola differre intelligi potest, quod latus ejus rectum transversumque sunt infinite parva, et puncta R. S. A. B. C. coincidunt. At Parabola considerari potest, quantum in rem praesentem velut Hyperbola, sed cujus centrum et sectio opposita sint alterius mundi, id est infinite distent abhinc; neque enim aliter parabola ab Hyperbola differt, quam quod latus illius transversum est infinitum; etsi ergo puncta B. C. D. G. in parabola exhiberi non possunt, nec linea DE, vel AC, duci queat, calculus tamen nihilo secius procedit.

44. DE DESCRIPTIONIBUS CURVARUM. ADDE CALCULUM PARABOLAE AD ORDINATAM OBLIQUAM

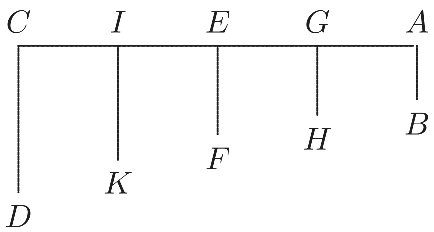
Dezember 1674

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 226–227. 1 Bog. 2°. 4 S. — Am linken Rand von Bl. 226 r°, Rechnungen ohne Textbezug, quer geschrieben (s. u. S. 499 Z. 15–19).
Cc 2, Nr. 831

Xb. 1674.

De Descriptionibus Curvarum.
Adde calculum parabolae ad ordinatam obliquam

Curvae aut per puncta, aut per motum continuum describuntur: Descriptio ergo earum aut Mechanica aut Geometrica est. Descriptio per puncta aut reduci potest ad continuam, aut non potest. Potest in descriptione sectionum Conicarum per puncta; non potest in descriptione per puncta lineae Logarithmicae aut quadratricis, lineaeve cujus ordinatae sint ut arcus. Unde fit ut hae lineae absolute mechanicae appellari possint, priores vero non ideo minus Geometricae appellantur, etsi aliquando mechanice id est per puncta describi soleant.

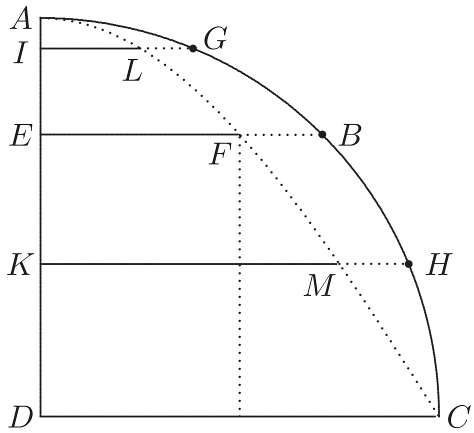


[*Fig. 1*]

Si inter rectas AB et CD. inveniatur proportione media EF et, inter AB et EF, rursus GH. item inter EF et CD rursus IK, ita continuando manifestum est describi lineam logarithmicam; sed quia ita omnia ejus puncta haberi non possunt Mechanica est descriptio. At vero inquies quid refert? dummodo ad usum sufficere. Ego vero nego

9 adde ... obliqvam *erg.* *L*

nisi Geometricas ad usum etiam mechanicum sufficere quando de problematis earum ope solvendis quaeritur. Ut si quis jam ope hujus curvae velit invenire medias proportionales inter duas datas patet eas demum in instrumento suo invenire, quas jam ante multo labore sigillatim inventas, ubi velut in Tabula collocaverat; itaque si aliqua exactitudo quaeritur in instrumentis paulo majoribus; manifestum est laborem ejusmodi curvae describendae fore maximum.



[*Fig. 2*]

Eodem modo de figura arcuum. Bisecto quadrante AC in B ex B in AD ducatur perpendicularis BE, seu sinus rectus arcus AB. In qua sumatur EF aequalis dimidio Radio, seu dimidiae. Eodem modo subsecto arcu AB in G, et BC in H. in punctis axis AD, ipsis G. H. respondentibus, nempe I, et K, applicentur IL, KM, in partes DC, parallelae ipsi DC; ita, ut IL sit quarta pars ipsius DC, et KM tres quartae, quemadmodum arcus AG est quarta pars arcus AC, et arcus AH tres quartae arcus AC. et ita continuando ut semper applicatae ad AD sint ad ipsam DC seu sinum totum, ut arcus ipsis respondentes; ad quadrantem totum figura $ALFM$ per omnia puncta transiens serviet ad anguli, quemadmodum superior ad rationis sectionem.

Sed manifestum est neutrum nisi in exiguis instrumentis, ad usum transferri posse; nam pro magnis opus foret multis operationum millibus pro exiguis autem scimus nec

13 qvemadmodum *(1)* angulus AG est qvarta pars anguli AC, et angulus AH qvarta | pars *nicht gestr.* | *(2)* pars *(3)* arcus *L*   14 semper *(1)* figura *(2)* ordinatae *(3)* applicatae *L*   14 seu sinum totum *erg. L*   15 f. transiens *(1)* , erit homogenea cycloeidi demto ex *(2)* serviet *L*

usum esse tantum cum ista facile aestimando habeantur, nisi prioribus saltem aliisque graphica arte utentibus accommodatam velimus.

In magnis autem quis a tot operationum millibus exactitudinem expectet? Si vero figurae hae exacte per continuum motum describi possent; manifestum est non, nisi in elaboratione instrumentorum quibus ad describendum utimur desiderare exactitudinem: operationem autem postea in omnibus punctis sensibilibus fore exactam. Unde ope hujusmodi instrumentorum sine calculo ex maximis numeris radices extrahi, et tabulis sinuum logarithmorumque careri posset. Praeterquam quod hoc modo praestari possent circa sectionem anguli et rationis problemata infinita, quae per Tabulas non nisi multis tentationibus succederent. Quemadmodum ergo constat per volutionem circuli Geometrice describi posse lineam quadratrici aequipollentem; ita ego reperi per parabolae provolutionem describi posse Curvam eosdem cum logarithmica usus habituram. Itaque Trochoeides circularis est figura Angulorum Geometrica, et Trochoeides parabolica est figura Rationum Geometrica. Illam Mersenno debemus, hac ego primus credo usus sum.

Descriptio Geometrica est per proprietates vel ordinatarum vel Tangentium. Descriptio per proprietates Ordinatarum eadem opera et Analytica est, exhibet enim modum exhibendi per aequationem relationem omnium rectarum ad curvam pertinentium. Sed si descriptio fiat per proprietates tangentium, deest aut ordinata, aut abscissa. Saepe impossibile est aequatione exprimi relationem inter quasdam rectas, ut in Cycloeide aliisve id genus. Id enim demonstrare possunt; non tamen ideo demonstratum est impossibile esse calculum inveniri qui per quandam progressionem transcendentem relationem exprimat.

Descriptio per Tangentium proprietates variis modis fieri potest, ex quibus quatuor inprimis mihi succurrunt: Evolutio, provolutio, Transfiguratio; crementa seu motuum compositiones. Evolutiones describunt Curvas quarum perpendiculares sunt evolutarum tangentes. Provolutiones dant Trochoeides; Transfigurationum exemplum esto, si super-

10 per *(1)* Cycloeidem *(2)* rotationem *(3)* volutionem *L* 12 f. itaqve *(1)* Cycloeides *(2)* Trochoeides *L* 17 exhibendi *(1)* pe *(2)* aeqvationem. Deinde descriptio per proprietates tangentium *(3)* | per *erg. Hrsg.* | aeqvationem *L* 18 tangentium, *(1)* desunt aliqvae ordinatae *(2)* deest *L* 21 qvandam *(1)* aeqvationem *(2)* progressionem *L*

11 reperi: VII, 3 N. 38 S. 489–511. 14 debemus: Leibniz bezieht sich vermutlich auf Bl. PASCAL, *Histoire de la Roulette* (bzw. *Historia trochoidis*), 1658, S. 1.

ficiei cylindricae truncatae basis in rectum extendatur, quam inde figuram seu curvam det; item curva quam punctum quoddam describat durante transfiguratione. Quartum principium est per motuum compositiones, uti ex compositione motus uniformis et motus accelerati, fiet curva parabolica, si directiones eorum angulos faciant rectos. Huc adde Helices spirales aliasque curvas quae non ex diversa celeritatum, sed ex diversa directionum compositione oriuntur. Quod si ultra celeritatum variationes, etiam accedant varietates directionum fient decompositiones, ut in spirali altiori. Porro haec quatuor motus principia tum inter se, tum cum Motu ordinario regularum sese ducentium, per rectam componi possunt. Nam durante evolutione, vel provolutione intelligi potest punctum describens in recta describente aliquo motu moveri, vel alias rectas curvasve a linea describente impelli.

Nunc de motuum compositione quaedam dicam, nam hujus quoque calculum pendere a methodo tangentium inversa, imo a parte ejus de quadraturis, non statim quivis judicaverit.

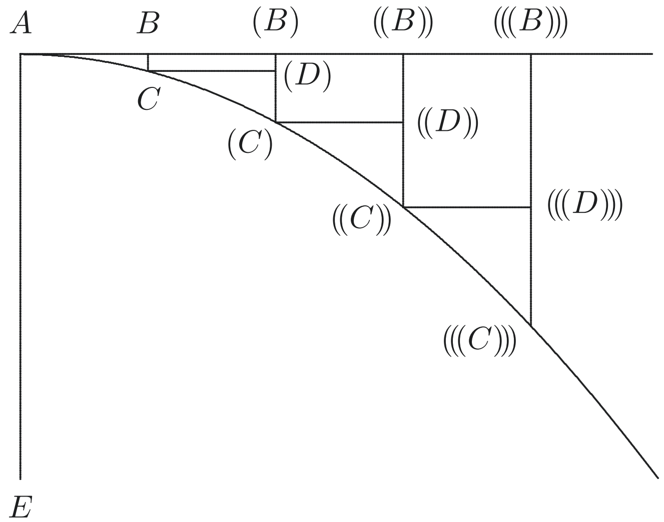


fig. 3.

3 motus *(1)* rectilinei *(2)* uniformis *L* 4 rectos | Huc adde spirales *erg. u. gestr.* | , *(1)* Omnia haec qvatuor principia motus intelligi *(2)* qvod attinet motus uniformes addi possunt spirales *(3)* Huc *L* 5 aliasqve | rectas *ändert Hrsg.* | qvae *L*

Pone rectam AB esse in partes aequales indefinitas divisam, punctis B, indeque duci ordinatas BC ad curvam C. Mensura $C(D)$ sive partes axis infinite parvae; $(D)(C)$ crementa seu differentiae ordinatarum, pone ergo motum uniformem esse directione AB. horizontali in ipsis $B(B)$ et parallelis $C(D)$; motum vero difformem esse directione AE perpendiculari et parallelis BC. Patet ex data motuum uniformis et difformis compositione, quorum directiones angulum faciunt directum, invenire figuram idem esse quod ex data $(D)(C)$ crementorum relatione ad AB abscissas invenire BC ordinatas; seu ex datis differentiis invenire series; seu ex datis seriebus invenire summas seu ex datis figuris invenire quadraturas. Quodsi ergo DC sunt applicatae Trianguli, seu motus directione AE et parallelis uniformiter acceleratus, erit AC parabola, cujus vertex A. axis AE. Quod Galilaeus praeclare observavit. Ut autem parabolae hujus inveniatur latus rectum, videndum est. $B(B)$ vocetur β. AB erit x. $(D)(C)$ erit $\dfrac{\beta x}{a}$. Ad latus ergo rectum parabolae determinandum unico opus est experimento, habito nimirum unico curvae puncto, $((C))$ et per consequens rectis ut $A((B))$ et $((B))((C))$ cum sit $((B))((C)) \sqcap \dfrac{A((B))^2}{2a}$. ponendo $2a$ latus rectum, patet esse $((B))((C))$, $A((B))$ et latus rectum parabolae in ratione continua. Si ipsae $(B)(C)$ non ponantur esse parallelae inter se, sed tendere ad quoddam centrum quemadmodum est centrum terrae calculus erit non paulo difficilior: Quodsi rectae BC neque concurrunt in uno puncto, neque ad quandam rectam angulo dato, sed ad curvam quandam angulo dato; sive ut datum angulum faciant ad curvae tangentes vel perpendiculares, vel quod eodem redit, si angulus quem rectae illae faciunt ad aliam rectam certa progressione mutetur; et adhuc magis si rectae quoque AB, CD, non sunt parallelae, sed concurrant ad quoddam punctum, vel angulum faciant datum ad quandam curvam; tunc calculus erit difficillimus; et multo magis si tres motus inter se componantur, pluresve. Sed quoniam haec exemplo aliquo ostendere prolixius; suffecerit nunc ultra progredi ad faciliora. Pone jam motum in recta AB et parallelis esse acceleratum non minus ac motum in recta AE et parallelis. Quod facile hunc in modum comminisci licet.

1 aeqvales *(1)* qvotcunque *(2)* indefinitas *L* 3 f. AB. *(1)* et parallelis; cuius crementa, ut ipsae B(B) vel C(D), motum vero mutabilem esse CD *(2)* horizontali *L*

11 observavit: G. GALILEI, *Discorsi*, 1638, S. 237–250 (*GO* VIII S. 269–279).

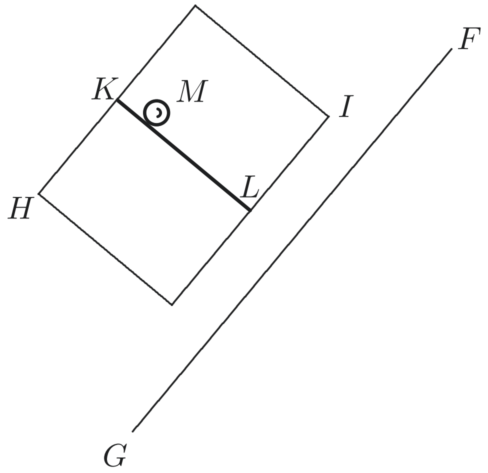


fig. 4.

Pone in plano inclinato FG descendere Tabulam HI, sit in Tabula aliud planum inclinatum, KL, ita ut recta KL sit perpendicularis ad rectam FG et in eo descendat pila M. Patet pilam moveri motu accelerato in FG et parallelis cum Tabula HI, et proprio motu accelerato per KL. Quaeritur qualem lineam describat pila M. Esto ergo $B(B) \sqcap \dfrac{\beta x}{a}$, et si placet $D(C)$ etiam $\dfrac{\beta x}{a}$. Applicata ergo erit semper aequalis abscissae, adeoque linea AC recta. Quod si unus sit crescens alter decrescens, ut si dum Tabula HI descendit per F, pila M ascendat per LK.

Jam inspice figuram 5. Patet incrementa abscissarum esse ut rectas CB. decrementa ordinatarum ut rectas BD. Ipsae ergo ordinatae erunt ad abscissas, ut $AEBD$ ad ACB. Ipsam AB dictae fig. 5. vocemus z. et $CB \sqcap \dfrac{a}{b}z$. erit $ABC \sqcap \dfrac{a}{2b}z^2$. Jam AF esto a. Erit $FB \sqcap a{-}z$. et $BD \sqcap \dfrac{a^2 - az}{b}$. et $FBD \sqcap \dfrac{BD \frown FB}{2} \sqcap \dfrac{a^3 - 2a^2z + az^2}{b} \sqcap \dfrac{a}{b}{,,} \frown \llcorner a{-}z \lrcorner, \square$. Jam cum $\dfrac{ABC}{a}$, aequetur abscissae x, fiet aequatio: $z^2 \sqcap 2bx$ et $z \sqcap \sqrt{2bx}$. Quod in-

8 LK. *(1)* tunc *(a)* ordinat *(b)* abscissa ex recta in qva fit alteratio *(2)* jam *L*

9 Patet: Die folgende Aussage über die Abnahme der Differenzen der Ordinaten ist nicht richtig und beeinträchtigt mit weiteren Versehen die Überlegung bis S. 497 Z. 7.

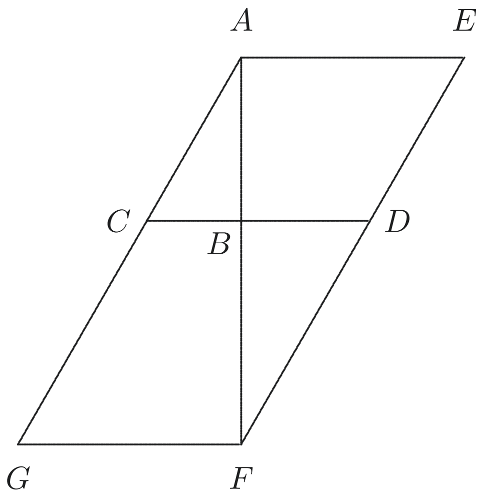


fig. 5.

serendo in aequatione $\dfrac{a - z, \square}{b} \sqcap y$ quae aequatur ordinatae, fiet: $\dfrac{a - \sqrt{2bx}, \square}{b} \sqcap y$. sive $by \sqcap a^2 - 2a\sqrt{2bx} + 2bx$, sive transponendo $2a\sqrt{2bx} \sqcap a^2 + 2bx - by$ et quadrando:

$$\overset{4}{8}a^2bx \sqcap a^4 \boxed{+4a^2bx} - 2a^2by + 4b^2x^2 - 2b^2xy.$$

Quae aequatio videamus an sit divisibilis. An autem semper aut saltem aliquando divisibilis sit aequatio ita reperiemus: Ordinetur secundum x fiet:

$$\begin{array}{lll} x^2 & -\dfrac{a^2}{b}x & +\dfrac{a^4}{4b^2} \\ & -\dfrac{y}{2}.. & -\dfrac{a^2y}{2b} \end{array}$$

Erit aequatio divisibilis per $x \ddagger a$, vel $x \ddagger \dfrac{a^2}{2b}$, vel per $x \ddagger \dfrac{a^2}{b}$. Ordinetur secundum b. fiet:

$$\begin{array}{lll} b^2 & \dfrac{-a^2y}{2x^2 - xy}b & \dfrac{+a^4 - 4a^2bx}{4x^2 - 2xy}. \end{array}$$

Unde divisores: $b \ddagger a$, $b \ddagger \dfrac{a^2}{x}$. Sed ordinando secundum y, patet statim aequationem esse indivisibilem; quia per $y \ddagger$ aliqua cognita dividi aequatio secundum y ordinata non

5 aeqvatio *(1)* si est indivisibilis erit ad Hyperbolam *(2)* videamus *L*

potest, cum y non ascendat ultra simplicem gradum. Unde patet Curvam quam punctum M describet non aliam esse quam Hyperbolam. Nisi xy inde tolli queat explicando, nimirum ponatur $x \sqcap \omega + \frac{1}{4}y$. et $x^2 \sqcap \omega^2 + \frac{1}{2}\omega y + \frac{1}{16}y^2$. Quos valores substituendo in aequatione $x^2 - \frac{1}{2}xy - \frac{a^2}{b}x - \frac{a^2}{2b}y + \frac{a^4}{4b^2} \sqcap 0$. fiet:

$$\begin{array}{llllllll} \omega^2 & +\frac{1}{2}\omega y & +\frac{1}{16}y^2 & -\frac{a^2}{b}\omega & -\frac{a^2}{4b}y & +\frac{a^4}{4b^2} & \sqcap 0 \\ & -\frac{1}{2}\omega y & -\frac{1}{8}.. & & -\frac{a^2}{2b}.. & & \end{array}$$

Unde sequitur nihilominus a M. describi Hyperbolam.

Explicandum est exemplo quodam, quomodo inquirendum sit in curvam, posito parallelas unius directionis ad parallelas alterius directionis facere angulum obliquum.

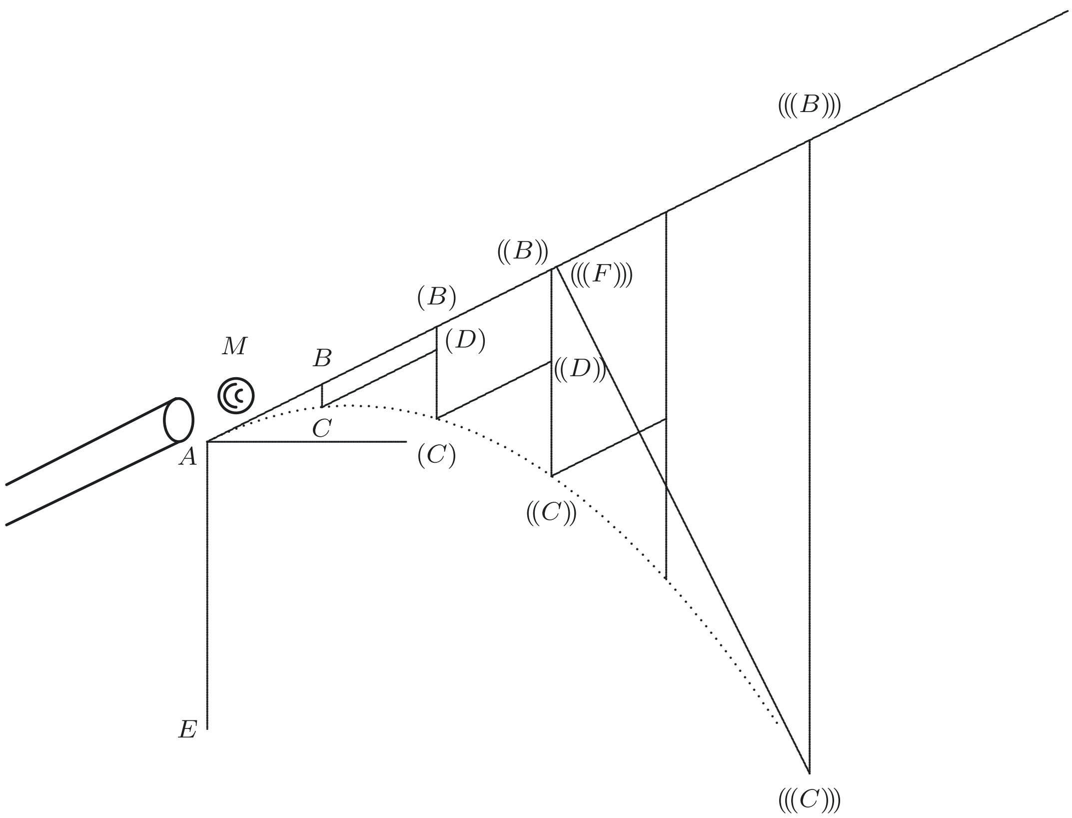


fig. 6.

Inspice figuram 6 et pone pilam M tormento emissam directione AB, quae ad AE lineam directionis gravium angulum faciat obliquum BAE, obtusum vel acutum prout pila sursum, quod hic supponemus deorsumve emittitur; BC parallelae ipsi AE. Manifestum est ipsas DC esse applicatas Trianguli, et ipsas BC applicatas parabolae id est curvam AC fore parabolam si ordinatarum BC eadem progressione servata angulus foret rectus. Nunc autem cum est obliquus inquiramus figuram, AB posita x, erit $BC \sqcap \dfrac{x^2}{2a}$. posito $2a$ esse latus parabolae rectum. Ex puncto curvae (((C))) ducatur (((C)))(((F))) ordinata ad axem AB(((F))) perpendicularis, et alia (((C)))(((B))) obliqua ad axem seu ipso AE parallela, ac proinde perpendicularis ad horizontem. Angulus datus (((F)))(((C)))(((B))) ponatur talis, ut recta BC posita 1. recta CF sit $\dfrac{a}{b}$. Erit ergo $CF \sqcap \dfrac{x^2}{2b}$ et $FB \sqcap \dfrac{x^2}{2a}\sqrt{1-\dfrac{a}{b}}$ sive $\sqrt{\dfrac{x^4}{4a^2}-\dfrac{a^2x^4}{4b^2}}$. Pro $\dfrac{\sqrt{1-\dfrac{a}{b}}}{2a}$ compendii causa ponamus: $\dfrac{1}{2c}$. Unde $FB \sqcap \dfrac{x^2}{2c}$. et $AF \sqcap x \pm \dfrac{x^2}{2c}$. Nempe $x-\dfrac{x^2}{2c}$ in figura praesenti, quando pila sursum projecta est; at contra $x+\dfrac{x^2}{2c}$ cum deorsum: Utile ergo signum ambiguum hoc loco retinere. Jam ponatur $AF \sqcap z$. fiet: $z \sqcap \dfrac{2cx \pm x^2}{2c}$. Ideoque sumendo z pro cognita, et caeteras explicando per ipsam, investigandus est valor ipsius x, per ipsam z, fiet aequatio $\pm 2cz + c^2 \sqcap c^2 \pm 2cx + x^2$. et extrahendo radicem: $\sqrt{c^2 \pm 2cz} \sqcap \ddagger c \ddagger x$. sive $x \sqcap \ddagger\sqrt{c^2 \pm 2cz} \mp c$ eritque $\dfrac{x^2}{2b} \sqcap \dfrac{c^2 \pm 2cz \ddagger\ 2c\sqrt{c^2 \pm 2cz}+c^2}{2b} \sqcap y \sqcap CF$. Quae aequatio ut reducatur, erit transponendo $c^2 \pm cz - by \sqcap \ddagger c\sqrt{c^2 \pm 2cz}$. et quadrando $c^4 \pm 2c^3z - 2c^2by, +c^2z^2 \mp 2cbzy, +b^2y^2 \sqcap c^4 \pm 2cz^3$,

9 horizontem *(1)* | 1 erit *nicht gestr.* | FB $\sqcap$ *(2)* Angulus L

10 FB: Richtig wären $FB = \dfrac{x^2}{2a}\sqrt{1-\dfrac{a^2}{b^2}}$ sowie $\sqrt{\dfrac{x^4}{4a^2}-\dfrac{x^4}{4b^2}}$. Durch die folgende Substitution wirken sich diese Fehler nicht weiter aus.

et destruendo utrobique $c^4 \ddagger 2c^3 z$, fiet: $\dfrac{-2c^2}{b}y + \dfrac{c^2}{b^2}z^2 \dagger \dfrac{2c}{b}zy + y^2 \sqcap 0$. Quae aequatio an sit divisibilis aliquo saltem casu examinandum. Sane si angulus AFC rectus, erit c infinita, adeoque ex aequatione proposita fiet: $z^2 - 2by \sqcap 0$. quae est ad parabolam, eleganti calculi veri indicio. Tantum quaerenda ratio est, quae hic characteribus analyticis exhibentur, concinna quadam Synthesi demonstrandi per ductum linearum. Cum AB ipsi CB vel AE parallela est, c fit infinite parva, et destructis omnibus terminis in quibus est c, fit, $+y^2 \sqcap 0$. Quod indicio est ordinatas quoque infinite parvas, adeoque lineam motus, AC, coincidere cum recta AB. Quod itidem constat. Unum tantum examinandum est, an reductione quadam zy destrui possit. Idque verum est, et inveniemus curvam esse parabolam. Nam faciamus $y \sqcap \omega \ddagger \dfrac{c}{b}z$ et $y^2 \sqcap \omega^2 \ddagger \dfrac{2c}{b}\omega z + \dfrac{c^2}{b^2}z^2$. Unde $\dfrac{-2c^2}{b}\omega \dagger \dfrac{2c^3}{b^2}z$, $\boxed{+\dfrac{c^2}{b^2}z^2}$, $\boxed{\dagger \dfrac{2c}{b}z\omega}$ $\boxed{-\dfrac{2c^2}{b^2}z^2}$, $+\omega^2$ $\boxed{\ddagger \dfrac{2c}{b}\omega z}$ $\boxed{+\dfrac{c^2}{b^2}z^2}$, et destructis destruendis restabit: $\omega^2 - \dfrac{2c^2}{b}\omega \dagger \dfrac{2c^3}{b^2}z \sqcap 0$. aequatio ad parabolam. Sive ergo projectio sit horizontalis, sive inclinata, motus projectorum semper erit in parabola.

[*Rechnungen ohne Textbezug*]

365	11	
2	200	
730	~~1~~1	
3	~~22~~~~0~~0	733
	~~33~~	

1 f. aeqvatio *(1)* est ad Hyperbolam circa Asymptotos; *(a)* qvae *(b)* nisi destrui possit yz *(2)* an *L* 2 examinandum. *(1)* sed errorem inesse suspicor, qvoniam ponendo c $\sqcap$ 0. deberet ex hac aeqvatione fieri aeqvatio ad Parabolam Est autem c. infinita, ideo *(2)* Sed manifestum est non esse, qvoniam si litera c ponatur $\sqcap$ 0. qvod restat y^2 *(3)* Qvodsi *(4)* Sane *L* 4 hic *(1)* analytico calculo *(2)* analyticis literis *(3)* characteribus *L* 5 linearum. *(1)* Videndum est praeterea an aliqvo alio casu aeqvatio ad parabolam haberi possit. Nam tunc sane *(2)* cum *L* 6 et *(1)* angulus fie *(2)* destructis *L* 10 faciamus *(1)* $y + \dfrac{d}{b}z \sqcap \omega$, fiet $y \sqcap \omega + \dfrac{d}{b}z$. et $y^2 \sqcap \omega^2 + \dfrac{2d}{b}\omega z + \dfrac{d^2}{b^2}z^2$. et *(a)* inserendo *(b)* | pro y *nicht gestr.* | vel y^2 inserendo eorum valores, fiet *(2)* $y \sqcap \omega \ddagger \dfrac{c}{b}z$ *L*

45. SIGNORUM AMBIGUORUM TRACTATIO PER LITERAS
[Dezember 1674 – Mai 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 53. 1 Bl. 8°. 1 S. Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 863 H

Datierungsgründe: Die Doppelvorzeichen $\overline{+}$ und $\underline{+}$ finden sich seit Dezember 1674 in Leibniz' Stücken (vgl. VIII, 1 N. 54); neben diesen verwendet er aber bis März 1675 auch noch ihre Vorgänger ǂ und ‡. Die Notation *Omn.* lässt eine Entstehung bis Oktober 1675 annehmen, denn am 29. Oktober 1675 führt Leibniz an dessen Stelle das Integralzeichen $\int$ ein (vgl. VII, 5 N. 40). Allerdings verwendet er die alte Notation vereinzelt auch 1676 noch (so im Juni 1676 in VII, 5 N. 86 S. 569). Der Zusatz zu unserem Stück wird mit einer Bemerkung eingeleitet, welche in gekürzter Form als Randbemerkung in VII, 2 N. 17 S. 183 zu finden ist. Dieses Stück wird auf März – Mai 1675 datiert. — Das Wasserzeichen des Papiers ist für 1675 belegt.

S i g n o r u m   a m b i g u o r u m   t r a c t a t i o   p e r   l i t e r a s,

$$\text{sit } \frac{\gamma}{a} \sqcap \overline{+}1 \quad \text{et } \frac{\delta}{a} \text{ aliud } \overline{+}\,1. \quad \text{et } -\frac{\gamma}{a} \sqcap \overline{+}1$$
$$\text{et } \frac{\gamma^2}{a^2} \sqcap +1 \quad \text{et } \frac{\gamma^4}{a^4} \sqcap +1. \quad \text{etc.}$$
$$\text{et } \frac{\gamma^3}{a^3} \sqcap \frac{\gamma}{a}. \quad \text{et } \frac{\gamma^5}{a^5} \sqcap \frac{\gamma}{a}. \quad \text{etc.}$$

Omnis extractio radicis quadraticae vel quadrato-quadraticae facit signum ambiguum, omnis quadratio vel quadrato quadratio destruit.

15 et *(1)* δ *(2)* $\gamma^2 \sqcap +$ *(3)* $\frac{\gamma^2}{\mathrm{a}^2}+$ | 1 *erg. Hrsg.* | | $\frac{\gamma^4}{\mathrm{a}^2}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap +$ | 1 *erg. Hrsg.* | etc. *L*

14–501,3 sit $\frac{\gamma}{a}$ … $\frac{\gamma}{a}\,b$: Die Nenner a, a^2, a^3, a^5 hat Leibniz jeweils erst nachträglich eingefügt. Vermutlich dient dies dazu, die Größen zu normieren.

$$\text{Unde } \boxed{2}\ \frac{\gamma}{a} \sqcap \boxed{4}\ \frac{\gamma}{a} \text{ etc} \sqcap 1.$$

$$\frac{\gamma \frown -\gamma}{a^2} \sqcap -1.$$

$$\sqrt{②}\ b^2 \sqcap \dagger b \sqcap \frac{\gamma}{a} b$$

at evolutiones aut involutiones exponentium imparium signa non mutant.

Est aliud ambiguitatis genus, quando in medio calculo oritur aequatio quae dividi potest, tunc enim alterutram factricem pro divisione resultante sumere licet.

[*Zusatz in anderer Tinte*]

⊓ ⊓ ⊓ v o c o c o p u l a s. $+$ $-$ † ‡ s i g n a. Possunt et copulae esse quae significant coincidentiam seu identitatem: ut cum duae aequationes coincidentes comparantur: item cum dicitur summam cujusdam seriei aequari cuidam quantitati, ut $\frac{b^2}{2} \sqcap$ Omn y. Sed hoc tamen potius ad copulatum quam copulam pertinet.

1 unde *(1)* $\gamma\ \boxed{2}\ \frac{\gamma}{\mathrm{a}} \sqcap \gamma^2\ \boxed{4}\ \frac{\gamma}{\mathrm{a}}$ *(2)* $\boxed{2}\ \frac{\gamma}{\mathrm{a}}$ *L* 3 *(1)* $\sqrt{③}$ *(2)* $\sqrt{②}$ *(a)* $\frac{\gamma}{\mathrm{a}}$ *(b)* ab ⊓ ‡. *(3)* $\sqrt{②}$ *(a)* ab *(b)* b^2 ⊓ *L* 6 enim *(1)* alterius *(2)* vel haec vel illa pro qvotiente divisionis *(3)* vel div *(4)* vel di *(5)* alterutram *(a)* pro divisore aeqva *(b)* factricem *L* 8–11 ⊓ ⊓ ⊓ ... pertinet *erg. L* 11 tamen *(1)* ad signa *(2)* potius *L*

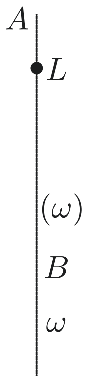
8 ⊓ ⊓ ⊓ ... signa: Vgl. die Randbemerkung in VII, 2 N. 17 S. 183: „NB. +. −. †. ‡. signa[,] ⊓ . ⊓ . ⊓ . copulae.“

46. SIGNA AMBIGUA
[Anfang 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 4 V 10 Bl. 50. Unregelmäßig beschnittenes Blatt, ca 18 × 18 cm, $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 50 r° oben. Darunter Notiz: „*Guilielmi principis Furstenbergici violenta abductio, et injusta detentio*, Parisiis apud Eliam Iosset". Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 863 G

Datierungsgründe: Das Stück verweist auf zwei andere Stücke (Cc 2, Nr. 816 u. VII, 5 N. 18) und vermerkt, dass diese aus dem – mithin zurückliegenden – Monat Dezember 1674 stammen. Das zweite dieser Stücke trägt das Datum 24. Dezember 1674; dies ist der gesicherte *terminus post quem*. Die angefügte Notiz ist dem Schriftbild zufolge in einem Zug mit dem Stück entstanden. In ihr hält Leibniz den Titel eines Buches fest, in welchem ein auf den 14. (24.) September 1674 datiertes Dokument wiedergegeben wird. Das wohl im Herbst 1674 gedruckte Buch wurde im Februar 1675 im *Journal des Sçavans* besprochen und dürfte Leibniz bereits zuvor aus einer anderen Quelle zur Kenntnis gelangt sein.

S i g n a a m b i g u a



[*Fig. 1*]

Efficiendum est, ut signis quibusdam etiam ad ductus linearum accomodatis, appareat quo duci debeant rectae. Exempli causa $A\omega$ esse debet $LB + m$. et $AL \sqcap 1$. ergo $B\omega \sqcap \ddagger m \ddagger 1$. Unde sequitur cum m majus quam 1. $B\omega$ sumi in AB producta, seu addi; cum vero contrarium est, tunc $B\omega$ subtrahi, seu punctum ω cadere intra B et A. Inspice explicationem instrumenti mei Algebraici Xb. 1674. ubi exemplum hoc occurrit.

Nota et casum quo signorum ambiguorum usus haerere videtur, in schediasmate *de Trochoeidibus et relatione Reductarum ad ordinatas*, Xb. 1674.

14 S i g n a a m b i g u a *erg. L* 23 et *(1)* reductione Curvarum ad *(2)* relatione *L*

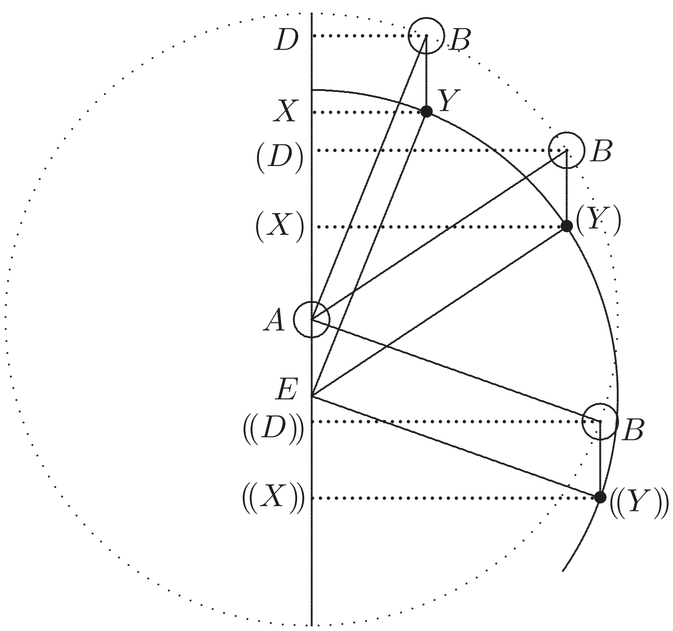
4 Notiz: *Illustrissimi Principis Guillelmi Furstembergii abductio*, 1674. Fürst Wilhelm Egon von Fürstenberg, der Vertreter Kurkölns auf dem in Köln stattfindenden Friedenskongress zur Beendigung des Holländischen Krieges, galt als einflussreicher Parteigänger Frankreichs. Im Februar 1674 wurde er von kaiserlichen Offizieren aus Köln entführt und nach Wien verbracht. In der sich aus der Entführung und Gefangenschaft Fürstenbergs entwickelnden Staatsaffäre beriet Leibniz im Jahr 1674 dessen Bruder Franz Egon von Fürstenberg, den Bischof von Straßburg; vgl. I, 1 N. 316–319. 19–21 Inspice ... occurrit: *Descriptio Constructoris sive Instrumenti Algebraici* (Cc 2, Nr. 816; LH 35 III A 20 Bl. 1–4); das Beispiel findet sich auf Bl. 3 v°. 23 schediasmate: vgl. VII, 5 N. 18 S. 162. 24 *Fig. 1*: Zwischen Figur und Text ist ein rechtwinkliges Dreieck gestrichen.

47. CIRCULUS DESCRIPTUS PER GRAVE EX RADIO LIBERE PENDULUM
[Dezember 1674 – 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 69. Fragment eines Blattes, 17 cm × max. 9 cm. Obere und rechte Kante z. T. schräg beschnitten, die beiden anderen Kanten ursprüngliche Blattränder. Rückseite leer.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Das *signum ambiguum* ŧ verweist auf eine Entstehung frühestens im Dezember 1674.

C i r c u l u s d e s c r i p t u s p e r g r a v e e x r a d i o l i b e r e p e n d u l u m



[*Fig. 1*]

10 C i r c u l u s ... p e n d u l u m *erg. L*

11 *Fig. 1*: Der Kreis BBB ist in Blindtechnik ausgeführt. Auch die Konstruktion der Strecken BY, $B(Y)$ und $B((Y))$ erfolgt mit Hilfe von (hier nicht wiedergegebenen) blind gezogenen Kreisen.

Linea YY quam describit grave Y ex puncto B libere pendulum. Quod punctum circa centrum A radio AB circumfertur. Ex loco ipsius Y in perpendicularem horizonti, per A transeuntem demittantur perpendiculares YX. Et AB ponatur $\sqcap a$, $BY \sqcap b$. et $XY \sqcap y$. et $AX \sqcap x$. Ex punctis quoque B demittantur perpendiculares BD. in eandem, erit $DX \sqcap BY \sqcap b$. et $AD \sqcap x + b$, et quia $DB^2 \sqcap AB^2 - AD^2$, erit: $DB \sqcap XY \sqcap y \sqcap \sqrt{a^2 - x^2 - 2bx - b^2}$. Continuetur DA versus E, faciendo $AE \sqcap b$ erit $EX \sqcap x+b \sqcap z$. et fiet $y^2 \sqcap a^2 - z^2$. Puncta ergo Y omnia ipso puncto A superiora cadent in Circulum centro E. radio $AB \sqcap EY$ descriptum, ad illud usque quod ipsi A respondet ex adverso. Sive omnia puncta Y supra A, aequaliter distant a puncto E. Quod attinet ad inferiora, $((D))B^2 \sqcap y^2 \sqcap AB^2 - AD^2 \sqcap AB^2 - \llcorner AX - \boxed{DX}\, b\lrcorner^2 \sqcap a^2 - x^2 + 2bx - b^2$. Et ponendo $x - b \sqcap z$ fiet etiam $y^2 \sqcap a^2 - z^2$. Jam $AX - AE \sqcap x - b \sqcap EX \sqcap z$. Rursus ergo omnia puncta Y posito B cadere infra E. cadent in Circulum centro E, radio $EY, \sqcap AB$. descriptum. Unde statim apparet idem de caeteris punctis cum B vel Y cadunt intra A et E. Indicari debere, neque enim alia signorum variatio in calculo locum habere potest, quam ea quae evenit dando literis x et b. valorem affirmativum vel negativum, unde in quadratis $a^2 - z^2$, explicando z^2 fit $z^2 \sqcap x^2 \mp 2bx + b^2$. Idem sine calculo facile demonstratur quia ipsae EY ipsis AB semper parallelae et inter parallelas, AE, BY adeoque aequales.

1 YY *erg. L* 6 y $\sqcap$ *(1)* $\sqrt{x^2 + 2bx + b^2 -}$ *(2)* $\sqrt{a^2 - x^2 - 2bx - b^2}$ *L* 6 E, *(1)* ponendo *(2)* faciendo *L* 6 erit | DE *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ x + b *L* 7 ipso ... superiora *erg. L* 8 radio AB $\sqcap$ EY *erg. L* 11 Jam | AD *ändert Hrsg.* | − AE *L* 15 b. *(1)* qva *(2)* signa *(3)* valorem *L*

48. ERRORES IN CARTESII GEOMETRIA
[Januar 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 24. Ca. $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 S.
Cc 2, Nr. 908

Datierungsgründe: Es ist nicht bekannt, wie oft Leibniz mit Roberval, der am 27. Oktober 1675 verstarb, zusammengetroffen ist. Eine Begegnung fand am 9. Januar 1675 in der Académie des Sciences statt, als Leibniz seine Rechenmaschine vorführte. Roberval versprach in derselben Sitzung, dass seine *Éléments de géométrie* bis Ostern druckfertig sein würden (ACADÉMIE ROYALE DES SCIENCES, *Procès verbaux 8, Registre de Mathématiques*, 2 Janvier 1675 – Septembre 1679, S. 2 [irrtümliche Zählung anstelle von Bl. 1 v°]).

Errores in Cartesii *Geometria*

Robervallius mihi dixit errores aliquot a se in *Geometria* Cartesii deprehensos.

Exempli causa lib. 2. pag. 26. edit. Schotenii 1659 haec sunt verba: *Unde si in hac aequatione quantitas* y *nulla sit, aut minor quam nihil, postquam punctum* C. *supposuimus in angulo* DAG *oporteret et illud supponere in angulo* DAE *aut* EAR, *aut etiam* RAG *mutando signa* + *et* − *prout ad effectum hunc requireretur: Quod si vero in quatuor hisce positionibus valor ipsius* y *nullus reperiretur, indicio esset quaestionem casu proposito esse impossibilem.* De his ait Robervallius problema nunquam esse impossibile, non magis quam ex puncto dato perpendicularem ducere ad rectam datam. Et quo casu Cartesius non inveniendo in singulis horum angulorum impossibile putat, eo casu esse in omnibus angulis. Et vero videtur Cartesius vel saltem Schotenius hanc Robervallii objectionem rescivisse. Nam Schotenius cum notas literis A. B. C. etc. adjecisset; hanc in secunda credo editione interpolatam addidit notatam BB inter B et C.

Deinde falsum esse ait regulam, Cartesii, quod tot sint radices verae quot falsae, si signorum tot mutationes quot consecutiones etc.

11 Errores ... Geometria *erg. L*

---

12 errores: vgl. den Brief von P. de Carcavy an Descartes vom 9. Juli 1649, gedr. in R. DESCARTES, *Lettres*, Bd 3, 1667, S. 439–442, insbesondere S. 442 (*DO* V S. 369–376, insbesondere S. 373–374).
23 notatam BB: Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 179–181; dieser Abschnitt ist in der Ausgabe von 1649 nicht enthalten. Schooten hat in BB die von Roberval 1656 wiederholte und von Huygens übermittelte Kritik berücksichtigt (vgl. *HO* XIV S. 413 f.). 24 regulam: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 70.

49. DE GEOMETRICA DESCRIPTIONE FIGURARUM TRANSCENDENTIUM QUADRATRICIUM

Bei den Stücken N. 49_1, N. 49_2 und N. 49_3 handelt es sich um Entwürfe zu einer Studie *De geometrica descriptione figurarum transcendentium quadratricium*, wobei N. 49_3 gegenüber N. 49_1 deutlich erweitert ist und auf dessen Fig. 2 Bezug nimmt. N. 49_1 dürfte kurz vor der auf Januar 1675 datierten N. 49_2 entstanden sein. Während der Abfassung von N. 49_2 hat sich Leibniz entschieden, eine zur Weitergabe geeignete Fassung (N. 49_3) zu erstellen (vgl. N. 49_2 S. 517 Z. 6–8).

49_1. DE GEOMETRICA DESCRIPTIONE FIGURARUM TRANSCENDENTIUM QUADRATRICIUM I
[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 273. 1 Bl. 4°. 2 S. — Auf Bl. 273 r° und v° technische Zeichnungen ohne Bezug zum Text, die vorher notiert wurden (VIII, 2 N. 95). Cc 2, Nr. 897

De geometrica descriptione figurarum transcendentium quadratricium

Si quis Lineam Quadratricem et Lineam Logarithmicam Geometrice describeret, is non tantum Quadraturam Circuli et Hyperbolae daret; sed et rem utraque longe majorem; anguli scilicet et rationis sectionem in data ratione.

Demonstrari autem potest, Lineas, Quadratricem et Logarithmicam non esse Analyticas, id est impossibile esse ut relatio omnium punctorum hujusmodi linea-

15 De ... qvadratricium *erg.* *L* 20 autem | facile *gestr.* | potest, *L*

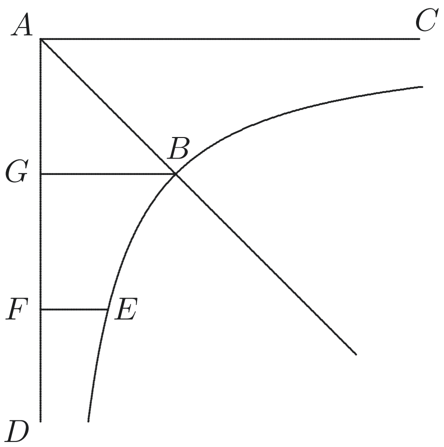
20 Demonstrari ... potest: Leibniz äußert diese Überzeugung bereits im Dezember 1674 (VII, 3 N. 39 S. 574) sowie im Januar 1675 (VII, 5 N. 23 S. 203). Zu seinen Beweisideen vgl. VII, 6 N. 18_1, N. 19 S. 175–177, N. 28 S. 348–350 u. N. 51 prop. LI.

rum ad quandam rectam, aequatione ullius dimensionis assignabilis explicari possit; sunt enim ex earum numero Linearum, quas appello T r a n s s c e n d e n t e s.

Illud quoque demonstrari potest, impossibile esse reperire regulam aequatione explicabilem, qua arcus circuli ad sinum comprehendatur relatio.

Porro ita sentio Quadraturam Circuli et Hyperbolae a Geometris expeti generalem, id est dimensionem portionis datae cujuslibet, unde sectio Rationis et Anguli in data ratione, consequitur.

Quare si quis certum quendam casum solveret, is voto non satisfaceret. Quadraturam ergo Circuli praestantissimam, et qualem optamus non daret, qui integri circuli dimensionem daret, partium non daret. Quoniam Quadraturae Circuli finis et usus est, Sectio anguli universalis. Perinde enim est ac si quis Hyperbolam quadrasse diceret, qui casum daret unicum, quadraturae circuli integri respondentem. Esto enim centro A, vertice B,



[*Fig. 1*]

Asymptotis normalibus AC, AD, descripta Hyperbola (latus rectum transversumque habens aequalia) BE, ducantur BG, EF ipsi AC, parallelae, et ipsi AD occurrentes in punctis G. F. ita ut GF, sit aequalis ipsi AG. Certum est inprimis ex mea Quadraturae

1 dimensionis *(1)* finitae *(2)* assignabilis *L* 4 sinum *(1)* una regula generali exp *(2)* comprehendatur *L* 12 integri | , sive qvod idem est qvadrantis *gestr.* | respondentem. *L*

2 T r a n s s c e n d e n t e s : erstmals in VII, 3 N. 23 S. 266 f. 3 Illud ... potest: s. VII, 6 N. 51 prop. LI. 16–508,1 ex ... demonstratione: III, 1 N. 39 S. 166 u. VII, 3 N. 38_2 S. 386.

Arithmeticae demonstratione; dimensionem spatii Hyperbolici $BGFEB$, aliorumque cognitae ad ipsum rationis, respondere Dimensioni Circuli integri, et partium ejus cognitam ad Circulum integrum rationem habentium, nam quemadmodum Circuli dimensio pendet a summa hujus seriei

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} \text{ etc.}$$

ita dimensio Spatii illius Hyperbolici pendet a summa hujus seriei

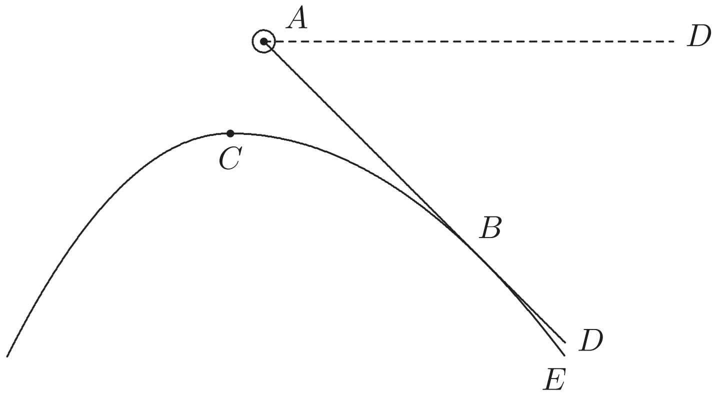
$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{6} + \frac{1}{8} - \frac{1}{10} \text{ etc.}$$

Quemadmodum autem sola portionis hujus Hyperbolicae, ita et sola Circuli totius quadratura etsi per se pulcherrima, animum Geometrarum non explebit; quoniam portionis Circularis aut Hyperbolicae cujuslibet, rationisque et anguli sectio universalis quaeritur. Quod optime perspexere antiqui, comminiscendo Lineam Quadratricem, ut appareret, cum denique Quadraturam Circuli daturam perfectam et qualis desideratur, qui Lineam Quadratricem Geometrice exhiberet descriptam.

Quoniam autem impossibilia frustra optantur, ideo descriptio Linearum Q u a d r a t r i c i s et Logarithmicae a n a l y t i c a , seu aequatione explicabilis non quaeritur, et sufficit exhiberi G e o m e t r i c a m.

Quaeritur ergo an aliqua reperiri possit descriptio sive Constructio Geometrica, quae non simul et analytica sit, hoc enim posito de d e s c r i p t i o n e h a r u m d u a r u m L i n e a r u m G e o m e t r i c a etiam post demonstratam A n a l y t i c a e i m p o s s i b i l i t a t e m , nondum erit desperandum. Explicandum ergo est, quas descriptiones Geometricas appellemus. Excludemus autem ante omnia illas sive Constructiones sive descriptiones, in quibus curvarum quarundam elaboratio in materia solida, et rectarum quarundam ad ipsas (sive earum tangentes) desideratur angulus certa lege durante motu inter describendum servandus mutandus aut reperiendus. Neque enim eum dicemus Geometrice reperisse Tangentem alicujus curvae, qui ad descriptae in materia solida curvae punctum datum regulam applicaverit; aut qui (vide fig. 2.) regulam AD. circa centrum sive punctum datum A, ex quo ad curvam CBE ducenda est tangens, tamdiu circumegerit, donec in curvam materialem CBE impingat in puncto B. quaesito. Quare nec

1 demonstratione; *(1)* totum spatium infinitum *(2)* dimensionem *L* 9 etsi ... pulcherrima *erg. L* 12 perfectam et *erg. L* 13 descriptam *erg. L* 20 f. descriptiones *(1)* Anal *(2)* Geometricas *L* 22 qvarundam *(1)* descriptio in *(2)* elaboratio *L* 23 durante motu *erg. L* 28–509,2 nec *(1)* illum circuli aeqvalem vel circumferentiae dimensionem dedisse dicemus, qvi *(2)* rota *L*



[*Fig. 2*]

rota in plano voluta arcui circuli rectam aequalem exhibitam dicemus; non quod operationes istae non sint exactae et Geometricae, sed quod quaerantur γεωμετρικώτεραι, ut scilicet curvarum dimensio non per applicationem earum in solido elaboratarum, ad mensuram rectam, sive quoddam planum, aut filum, sed per rationem quandam nobiliorem, ubi res non manu sed ratione geritur, perque solos linearum rectarum in lineis rectis, aut circa centra motus. Aliud enim est res ratione aliud experientia invenire; et inter delineationem quadratricis ope fili circumferentiae circumplicati et postea evoluti aut ope rotae in plano volutae, et inter descriptionem ejusdem Quadratricis, per motum cujusdam puncti a solis regulis sive lineis rectis super aliis regulis incidentibus, aut circa centra quaedam actis, tantum inter est, quantum inter duas delineationes ejusdem campi, unam factam ab Agrimensore Geometra, aliam a rustico. Hic enim nihil pronuntiare potest de magnitudine propositi corporis, quod non ipsius mensurae, applicatione exploraverit, illic ex paucissimis datis, sufficientibus, caetera omnia demonstratione derivat. Curvas igitur licet in materia solida non elaboratas neque ad mensuram ipsam applicatas metiri, hoc demum est dimensiones earum Geometricas reperisse.

Descriptiones igitur vel constructiones Geometricas hoc loco appello, quaecunque solarum regularum seu linearum rectarum, vel Tabularum planarum lineis rectis con-

2 f. qvod *(1)* aeqvationes *(2)* operationes *L* 3 exactae et *erg. L* 7 f. inter *(1)* descriptionem *(2)* inventionem omn *(3)* delineationem *L* 10 sive lineis rectis *erg. L* 11 inter *(1)* dimen *(2)* projectionem *(3)* delineationem campi factam *(4)* duas *L* 14 ex *(1)* qvibusdam datis, etiam caetera modo *(2)* paucissimis *L* 14–16 Curvas ... reperisse *erg. L* 17 Descriptiones *(1)* Geometricas *(2)* igitur | vel constructiones *erg.* | Geometricas | hoc loco *erg.* | appello, *L* 18 rectarum, *(1)* aut planarum superficierum in materia solida elaboratarum *(2)* vel *L*

tentarum, in materia solida elaboratarum, incessu super aliis lineis rectis vel planis, aut gyratione circa quoddam centrum absolvuntur: ita ut motus earum ab uno quodam primo motu regantur sive dependeant, qui simpliciter manu, vel alio impulsu quocunque continuo, dari possit instrumento. Quod si negetur, etiam Parabolarum vel aliarum curvarum altioris gradus in plano delineatio negabitur esse Geometrica, nam et illae sic describuntur, unde sequetur nulla problemata, quae ultra aequationem quadraticam ascendunt, Geometrice solvi posse, cujus sententiae absurditatem satis evicit Cartesius, qui ⟨omn⟩es nostri temporis Geometras habet sibi astipulantes. Geometricum enim est, quicquid exactum est. Constructioque sive descriptio quae simul et exacta, et ad solutionem problematis unice necessaria est, utique Geometrica habenda erit.

49_2. DE DESCRIPTIONE GEOMETRICA CURVARUM TRANSSCENDENTIUM
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 271–272. 1 Bog. 2°. 4 S.
Cc 2, Nr. 896

Januarii 1675

De descriptione geometrica curvarum transscendentium quadratricium

Fastigium Geometriae,
deque constructionum differentiis

2 earum *(1)* a se invicem regantur, sive *(2)* ab *L* 6 problemata *(1)* nisi qvae circulo aut recta fiant *(2)*, qvae *L* 17 f. De … qvadratricium *erg. L* 19 f. Fastigium … differentiis *erg. L*

7 evicit: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, lib. 2, *DGS* I S. 17–66.

Methodus generalis quadrandi figuras Geometricas omnes, et in data ratione secandi lineas, superficies, solida naturae cujuscunque, per constructiones Geometricas, rectilineares

Quod diu frustra quaesiveram, et quod denique pro desperato habebam, sub hujus anni principium, denique inveni Methodum Generalem quadrandi figuras omnes. Unde curvarum, linearum, superficierum[,] solidorum, dimensio in data ratione sectio, et problema Geometriae generalissimum, datae magnitudinis figuraeque exhibitio, consequitur.

Primi Geometrarum non nisi rectis circulisque utebantur in plano; problemata autem quae non nisi ope Cylindri aut Coni, id est circini et regulae in solido, usu construi posse videbant Solida appellabant, quod illis nomen hodie mansit. Plato autem post alios ostendit alia quoque curvarum genera in plano utiliter describi. Idque Apollonius in Conici Cylindrique Sectionibus inprimis luculenter monstravit. Alii ad Conchoeides, et Cissoeides, et loca altiora nonnunquam ascendere. Cartesius curvarum classes dedit, ope aequationum, totamque unus problematum Rectilineorum constructionem generali methodo explicuit. Quanquam enim multa restant, quae brevius et elegantius et simplicius, et universalius fieri possint quam ab eo praestitum est, fundamenta tamen ab eo jacta sunt vera et suffectura. Sed sciendum est, ejus methodo problemata non nisi recti-

1 f. *Daneben:* Error

7 data *(1)* magnitudine sectio, et datae magnitudinis exhibitio conseqvitur. *(2)* ratione *L* 8 f. conseqvitur. *(1)* Veteres *(2)* primi *L* 9 utebantur *(1)*; problemata autem in qvibus ex dato cubi cuiusdam aut *(2)* in *L* 13 luculenter *(1)* ostendit *(2)* monstravit *L* 14 altiora *(1)* deniqve *(2)* nonnunqvam *L* 14 curvarum *(1)* classes qvarundam *(2)* classes *L* 15 unus *(1)* Geometriam Rectilineam luculen *(2)* problematum *L* 16 explicuit. *(1)* Ad problemata autem *(2)* qvanqvam *L* 17 est, *(1)* fatendum *(2)* certum est tamen jacta *(a)* eo *(b)* ab eo esse *(c)* esse ab eo *(d)* a Cartesio esse vera, et | latissime *gestr.* | suffectura *(aa)* huius *(bb)* Rectilineae Geometriae *(aaa)* partes *(bbb)* fundamenta. *(aaaa)* Sed *(bbbb)* Interea tamen fatendum est non nisi partem *(aaaaa)* esse, *(bbbbb)* ab eo eamqve faciliorem Geometriae totius *(3)* fundamenta *L*

6 inveni: vgl. VII, 5 N. 27, insbesondere S. 217 Z. 23 – S. 218 Z. 11. 12 ostendit: vgl. Eutokios, *Commentarii in libros Archimedis*, gedr. in *AO* III S. 66–71; Fr. Viète, *Variorum de rebus mathematicis responsorum liber VIII*, 1593, cap. I u. II, Bl. 1 r° – 2 v° (*VO* S. 347–350). 13 monstravit: Apollonios, *Conica*. 13 Alii: Gemeint sind wohl Nikomedes bzw. Diokles. 14 dedit: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 20–24.

linea construi, quae scilicet ad aequationem revocari possunt; quando non nisi rectarum linearum aut spatiorum rectilineorum magnitudo datur aut quaeritur, quando ex dato contento potestatis aut summae ex pluribus ejusdem radicis potestatibus, sive ex datis quibusdam rationibus quarum termini ex quantitatibus cognitis incognitisque conflatae sunt, ipsa[e] radices, ipsae incognitae reperiuntur. Quo reducuntur perpetuo omnes spatiorum rectilineorum sectiones in ratione vel relatione data; et ut verbo dicam, omnes exhibitiones quantitatum rectilinearum datae magnitudinis et figurae.

Sed magnitudines curvas in data ratione secare, in rectilineas vel alias curvilineas transform⟨are⟩ et generalius, quantitates exhibere, positione, quae sint datae magnitudine et figura, fastigium est haud dubie Geometriae, sed ad quod Cartesius ne aspiravit quidem. Videbat aditum obstructum sibi; neque ullum esse in solvendis his problematis usum aequationum et analyticae suae. Agnoscebat quae ab Archimede et ejus discipulis circa Curvilineorum dimensiones inventa sunt, angusta esse, et sagacitati singulari cum bona quadam fortuna conjunctae deberi. Unde de comparatione Geometrica recti et curvi, desperavit, et problemata quadraturarum non attigit; et quae sub analysin cogere non poterat sub Mechanicorum nomine velut desperata reliquit.

Qua in re Vir Magnus quae in veteribus culpat peccata eodem in loco renovavit, nam, cum illis objecisset: Quicquid exactum sit Geometricum esse, et Curvas altiores vel ideo in Geometriam recipiendas, quod sint problemata quae sine illis Geometrice solvi non possint, quemadmodum recte asserit, nullam esse simpliciorem quinquesectionis anguli viam quam per curvae Conicis proximae, (ut Parabolae secundi generis) cum Circulo intersectionem: Ita ego illi objicio, superesse quasdam Curvas, quas ille a Geometricarum numero exclusit, quibus sol⟨is⟩ praeclara maxime Geometriae problemata solvantur, aut certe simplicioribus non solvantur. Nec refert quod analyticae non sint, id est quod aequatione nequeat exhiberi relatio ordinatarum ad abscissas, neque enim ideo minus Geometricae sunt, quod non sunt Analyticae. Cum Geometricum sit, quicquid exacte de-

2 f. dato *(1)* cubi aut alterius potestatis contento, per inferius qvadratum, aut aliam inferiorem ejusdem radicis potestatem, *(a)* sub *(aa)* rat *(bb)* cognito qvodam multip *(b)* secundum cognitam qvandam *(aa)* magnitudinem *(bb)* multiplam co *(2)* contento *L* 8 f. in rectilineas . . . transform⟨are⟩ *erg. L* 12 et analyticae suae *erg. L* 15 curvi, *(1)* et constructionibus *(2)* desperavit *L* 20 f. anguli *(1)* rationem *(2)* viam *L* 26–513,1 Geometricae | non sunt, qvod sunt Analyticae. cum Geometricum sit, qvicqvid exacte *(1)* exhiberi *(2)* determinari non *ändert Hrsg.* | potest *L*

15 desperavit: vgl. *a. a. O.*, S. 39. 16 reliquit: *a. a. O.*, S. 18. 17 culpat: *a. a. O.*, S. 17–19. 20 asserit: *a. a. O.*, S. 96 f.

terminari potest, non quicquid aequationi subjicitur. Sunt enim problemata Geometrica quae ad aequationem revocare et per curvas a Cartesio explicatas, solvere, imposs⟨ibile⟩ est, eadem tamen per curvas a me introducendas, Cartesianis nihilo difficiliores saepe etiam promtius describendas, exacte solvuntur. Quo posito fatendum est eas quoque curvas in Geometriam sed Cartesiana sublimiorem recipiendas esse. Praesertim cum eas habeant conditiones, quas ille in Geometricis suis aliquando requirit, (: vacillat enim in ea re :) nam describuntur motibus a se invicem dependentibus, et qui omnes ab uno quodam primo reguntur, neque aliud postulatur in Constructionibus meis Rectilineis, quam ut regulae quaedam sive lineae rectae, aliae super aliis incedere, aut circa Centra quaedam rotari intelligantur. Cum et celeritates diversarum directionum quibus idem punctum describens in diversas partes simul ferri intelligitur; cognitam ⟨habeant⟩ relationem inter se, et fieri tamen queat, ut spatiorum decursorum relatio non possit aequatione explicari. Quae ut arbitror occasio lapsus Cartesio fuit. Nam in illis quae ab ipso adhibentur curvis, semper non celeritatum tantum puncti describentis secundum diversas directiones, sed et spatiorum decursorum habetur relatio. Unde factum est, ut tanto audacius pronuntiare omnes curvas motibus ab uno quodam pendentibus, linearum rectarum super rectis lineis, aut circa axem motarum, descriptas; analyticas esse sive sub aequationem cogi posse. Unde factum est ⟨ut⟩ solas analyticas agnoverit Geometricas; quod omnes eas quae motibus rectarum super rectis, ab ⟨uno⟩ motu pendentibus describuntur, quasque Geometricas negare non poterat, Analyticas esse putaret.

Nam Cycloeidem et similes, quae describuntur motu rectae aut curvae super alia curva, c e r t a a d c u r v a m a n g u l i l e g e s e r v a t a , etsi Geometricas esse non negem, quoniam exacte describi possunt, excludo tamen a constructionibus problematum, quibus recta curvae aequalis quaeritur. Nam cum rectam circumferentiae quaerimus aequalem, utique satisfactum nobis non putamus, volutione circuli solidi sive rotae super plano; quemadmodum parallelepipedum cylindro aequale Geometrice exhibuisse non putaremus, qui aqua ex cylindro in prisma cavum transfuso aequalitatem metiretur: non quod ea operatio Geometrice exacta non sit; (aquae enim inter effundendum perditae non magis hic rationem habemus, quam portiuncularum ex regulis inter movendum detritarum :) sed quod simpliciorem aliquam ratione potius quam manu rem peragentem extare putemus in natura rerum. Eo discrimine quod est inter rusticum et Geometram agrimensorem. Ille de rerum magnitudine non nisi ab ipso contactu et perpetua mensurae

6 enim *(1)* nonnumqvam *(2)* in *L* 28 operatio *(1)* justa non sit, sed qvod *(2)* Geometrice *L* 32 de *(1)* mensura *(2)* rerum *L*

applicatione pronuntiat; hujus in eo potissimum laus consistit, ut ex datis quantumlicet paucis caetera deducat. Quare quemadmodum mensurae ad mensuratum applicatione uti cum res postulat, vituperio non ducitur; ita si nulla alia ratio reperiri posset, rectas reperiendi curvis aequales; constructionem hujusmodi problematum per Trochoeides aut evolutas, satis Geometricam pronuntiaremus. Sed et ubi de usu quaeritur, saepe cum otium et commoditas est, recte faciet mensor, si mensurae potius quam calculo fidat. Eodem modo fieri potest aliquando, ut in praxi sit commodius evolutione curvae ipsius quam constructione tantum rectilinea uti.

Sed et magni saepe refert, alia problemata natura sua difficiliora ad curvarum Evolutiones sive in rectum extensiones reduxisse. Ita dici potest aliquam ab Archimede inventam Circuli Quadraturam Geometricam, cum ostendisset, extensione circumferentiae in rectum, spatio linea circulari contento, rectilineum aequale haberi potest. Simplicius enim est lineam curvam in rectam, quam spatium curvilineum in rectilineum transformare. Geometricum ergo est sane quicquid exactum est, saepe tamen quod Geometrice factum est, Mechanicum appellatur, cum alia superest ratio Geometrica per naturam rei simplicior.

Itaque ut Constructiones in classes digeramus, considerandum est, alias esse Geometricas alias physicas alias imaginarias alias Mechanicas, et Geometricas rursus Analyticas, alias non Analyticas; item Geometricas alias esse rectilineas alias curvilineas. Omnes analyticae reddi possunt rectilineae, non contra: Perfectissimae omnes analyticae sunt, satisfaciunt enim non tantum voluntati, sed et intellectui, nec tantum magnitudinem quaesitam definiunt, sed et relationem ejus ad datam aequatione exponunt. Rectilineas esse curvilineis simpliciores facile judicari potest: Quis enim neget pulchrius esse magnitudinem curvarum solo rectarum motu contactuque exhibere; quam ipsas curvas in solido elaboratas applicare mensurae: Et quanquam haec constructio non sit Analytica, est tamen analyticae proxima, nam et lineae hoc modo descriptae analyticis proximae sunt, et curvas ipsas quarum magnitudo quaeritur in Elementa quodammodo resolvi manifestum est, quandoquidem magnitudo rectilinea ipsis aequalis ex applicationum tantummodo rec-

5 et *(1)* | cum de *nicht gestr.* | *(2)* ubi de usu qvaestio est *(3)* ubi *L* 6 qvam *(1)* ratiocinationi *(2)* calculo *L* 9 natura sua difficiliora *erg. L* 17 f. Geometricas alias ... rursus *erg. L* 21 f. tantum | magnitudinem *erg.* | | qvaesitum *ändert Hrsg.* | definiunt *L* 28 ex *(1)* constructionum *(2)* applicationum *L*

11 ostendisset: ARCHIMEDES, *Dimensio circuli*, prop. I.

tilinearum portiunculis, in unum motu junctis conflatur. Constructiones rectilineae fieri possunt omnes sine ulla curva in materia quadam solida elaborata; contra curvilineae non possunt fieri nisi ope curvae reapse effictae. Fateor tamen non ideo constructionem fieri curvilineam, quod in ea curva materialis adhibita est: Nam descriptiones conchoeidis veterum, aut paraboloeidis Cartesii fieri solent, motu circuli aut parabolae materialis; et tamen non tantum rectilineae, sed et analyticae sunt; quoniam scilicet eadem Conchoeides aut paraboloeides etiam sine circulo aut parabola materiali describi potest. Cum Cycloeides circulum materialem exposcat. Ratio diversitatis est, quod Circulo materiali in descriptione conchoeidis per rectam quandam incedente, non habetur ratio anguli Curvae circuli ad rectam, sed rectae constantis, exempli causa diametri, secundum quam incedit. Quod in Cycloeide secus est.

Ex ipsis constructionibus Curvilineis, applicationes transformationesve linearum, praeferendae sunt applicationibus aut transformationibus superficierum, et transformationibus (nam applicationibus tunc locus non est) solidorum. Itaque si quis modum ostendit, dimensiones spatiorum revocandi ad dimensiones linearum rem certe praestat egregiam et Geometra dignam. At ille γεωμετρικώτερον qui solo motu rectarum ad rectas, aut circa centra idem praestat. Interea fatendum est, theorema egregium aut constructionem elegantem etiam per lineam minus Geometricam, minus eleganti per magis Geometricam nonnunquam pulchriorem esse: Sed hoc loco non quid pulchrius, sed quid natura prius sit inquiritur. Nam descripta linea logarithmica etiam mediae proportionales quotcunque pulcherrime habentur, et tamen ad eam rem lineae analyticae, ut Conicae, et Conicis altiores a natura destinantur. Eodem modo Quadraturae non per curvarum in solido elaboratarum applicationes aut transformationes, sed per motum linearum rectarum sese in aliis rectis ducentium, aut circa centra rotantium, naturaliter explicari debent. Sunt vero forte alia quaedam problemata longe adhuc difficiliora, et quodammodo in se reflexa quae non nisi per Constructiones curvilineas possunt explicari. Nihil enim inutile et sterile reliquit natura rerum.

C o n s t r u c t i o n e s p h y s i c a s appello, quae fiunt adhibitis motibus quae non sunt in nostra potestate, neque a nobis manu dari possunt, possunt ope rerum naturae, ex-

4 nam *(1)* constructiones per *(2)* descriptiones *L* 19 nonnunqvam *(1)* praeferendam esse; dummodo semel discamus discernere gradus *(2)* pulchriorem *L* 23 per *(1)* compositiones motuum *(2)* motus *(a)* recti li *(b)* rectilineo *(3)* motuum *(4)* motum *(a)* regularum sese ducentium *(b)* linearum *L*

26 f. Nihil ... rerum: vgl. VI, 3 N. 78 S. 566 Z. 11.

hiberi; ita motum continue uniformiter acceleratum, nemo manui suae dare potest. Idem est de alio motus genere quem habent Elateria. Et ope horum motuum dubitari non debet, describi posse aliquando curvas, quae aliter non sint in potestate. C o n s t r u c t i o n e s i m a g i n a r i a s voco, quas fingere possumus, exhibere non nisi mente non possumus. Sunt tamen possibiles, et effici possent a D e o , tales sunt si imaginemur magnitudinem aliquam certa lege crescere aut contrahi aut transformari, aut etiam moveri, cujus reapse praescribendae nulla appareat ratio. Et fieri poterit aliquando ut constructionis quae initio imaginaria apparuit tandem physica aut etiam Geometrica effectio reperiatur. M e c h a n i c a e c o n s t r u c t i o n e s sunt aut Lineares aut Numericae. L i n e a r e s ut in Cyclometria Snellii et Hugenii; N u m e r i c a e ut in mea quae tum appropinquatione ad veras, tum elegantia et simplicitate commendantur. Denique illud observandum est aliud esse Problemata aliud Constructiones in Analyticas, rectilineas et curvilineas, partiri. Prorsus ut aliud est loca aliud problemata esse solida. Quemadmodum enim recte observavit Cartesius in problemate illo a veteribus quaesito et a Pappo relato ex datis positione tribus quatuorve lineis, rectis invenire punctum a quo totidem aliae rectae lineae singulae ad singulas duci possint, quae cum ipsis datos efficiant angulos, et quarum rectangulum sub duabus contentum datam habeat rationem ⟨ad⟩ quadratum tertiae si sint tres, vel ad rectangulum reliquarum duarum si sint quatuor; problema quidem si

1 nemo *(1)* manu dare potest instrumentis. At *(2)* manui *L* 9 aut *(1)* Arithmeticae, aut *(2)* Numericae aut *(3)* Lineares *L* 11 commendantur. *(1)*

C o n s u l t a t i o
an et qvalis Circuli et Hyperbolae Qvadratura
Anguliqve et Rationis sectio universalis,
sperari aut expeti possit

Si qvis L i n e a m Q v a d r a t r i c e m , et L i n e a m L o g a r i t h m i c a m Geometrice describeret, is non tantum Q u a d r a t u r a m C i r c u l i e t H y p e r b o l a e daret; sed et rem utraqve nude et simpliciter considerata, longe majorem, A n g u l i s c i l i c e t e t R a t i o n i s s e c t i o n e m i n d a t a r a t i o n e
Demonstrari autem potest Lineas, Qvadratricem et Logarithmicam non esse A n a l y t i c a s , id est impossibile *(2)* Deniqve *L* 13 prorsus … solida *erg.* *L* 17 habeat *(1)* ⟨relationem⟩ ad *(2)* rationem *L*

10 Snellii et Hugenii: W. Snellius, *Cyclometricus*, 1621, insbesondere prop. XI u. XXXI f., S. 16 bis 19 u. 46–58; Chr. Huygens, *De circuli magnitudine inventa*, 1654, prop. X–XII u. XX, S. 15–21 u. 40–44 (*HO* XII S. 139–149 u. 173–181). 10 mea: vgl. z. B. VII, 6 N. 1 S. 29 f. u. ö. 14 observavit: R. Descartes, *Geometria*, 1659, DGS I S. 11 f. 14 relato: Pappos, *Mathematicae collectiones*, lib. VII.

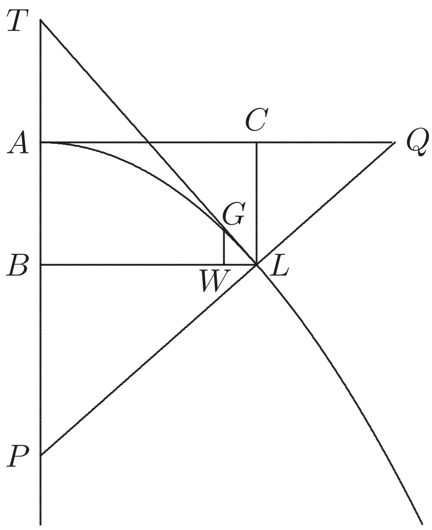
unum aliquod punctum ejusmodi quaeratur, esse planum, locum t⟨a⟩men qui per omnia ejusmodi puncta transeat, esse solidum seu Conicum; ita hic notandum est, si problemata sint rectilinea, constructiones esse analyticas, et si problemata sint curvilinea, constructiones esse rectilineas debere. Et si problemata sint irregularia et ⟨mira⟩ quadam ratione in se reflexa, quorum nonnulla habeo, constructiones admitti curvilineas quando scilicet impossibile est rectilineas inveniri. ⟨Caeterum⟩ operae pretium erit, eadem subjicere sequenti pagina ita dicta, ut ab aliis legi velim; imo vide plagula separata Januarii 1675. *Consultationem de perficienda Geometria.*

Omnia jam problemata Geometrica, aut regularia, aut irregularia sunt. Nimirum semper quicquid sub contemplationem Geometricam cadit, est magnitudo et situs. F i g u r a autem est situs partium inter se. Quanquam plerumque et spatium figura praeditum, figuram appellare soleamus. Porro semper quaerimus aut dato situ magnitudinem nempe dato puncto quodam, aut data linea, aut superficie, una pluribusve, lineas aut spatia (id est superficies vel solida) intercepta, relatione ad aliorum dati situs magnitudines expressa vel etiam magnitudine mensurae cujusdam rectilineae vel etiam, data magnitudinis aut situs parte, quaeritur reliquum. Magnitudines autem intelligimus dari vel calculo quod non est hujus loci, vel positione. Res enim eo semper reducitur quasi positione datae essent. Problemata regularia aut rectilinea, aut curvilinea sunt. Problemata rectilinea sunt, in quibus quaeritur constructio aequationum per loca ad quae sunt aequationes, unde nihil aliud quaeritur quam descriptio loci cujusdam ad quem sint omnes rectae certam relationem ad alias quasdam rectas habentes, convergentes scilicet aut divergentes aut parallelae. Sed et si sint data rectarum illarum parallelarum aut convergentium incrementa; et quaeratur descriptio tunc venimus ad problemata quadraturarum. Et haec duo

9 f. sunt. *(1)* R e g u l a r i a appello, cum qvaeritur alicuius figurae magnitudo, aut contra alicuius magnitudinis figura *(2)* Nimirum semper *(a)* qvaeritur data *(b)* qvicqvid *L* 12 soleamus *(1)* Figu *(2)* Cum autem figura sit situs partium, considerandum est qvid soleat in *(a)* figu *(b)* Geometria pro uno qvodam toto haberi *(3)*. Porro *L* 12 aut *(1)* data *(a)* magnitudine *(b)* figura magnitudinem, aut da *(2)* dato *L* 12 f. magnitudinem *(1)*; aut data magnitudine exempli | causa *nicht gestr.* | *(2)* nempe *L* 13 f. aut *(1)* superficies, aut areas *(2)* spatia *L* 14 dati situs *erg.* *L* 18 f. rectilinea | sive analytica *gestr.* | sunt *L* 19 ad | qvas *ändert Hrsg.* | sunt *L* 22 si *(1)* aliud qviddam qvaeratur, exempli causa *(2)* | fiet *nicht gestr.* | datis *(3)* sint *L* 22 f. incrementa; *(1)* | vel *nicht gestr.* | *(2)* aut relationes earum ad aliqvid ex ipsis his rectis non ex aliis dependens, qvo pertinent problemata in se reflexa; *(3)* et *L*

7 vide: s. N. 49$_3$.

problemata sunt in nostra potestate. Cartesius effecit primus, ut omnis aequatio possit geometrice construi; atque locus aequationum quarumlibet possit describi; Ego primus omnium effeci, rem a Cartesio et aliis desperatam, ut omnis figurae dimensio, seu rectilinea alia ei aequalis possit Geometrice determinari; et ut quaelibet figura perinde ac recta quaedam linea secari possit. Possum ergo sine jactantia et vanitate hoc profiteri: cuilibet curvae exhibere aequalem rectam; quamlibet superficiem quadrare; quodlibet solidum cubare; rationem et angulum in data ratione secare; logarithmos Geometrice construere sive lineam logarithmicam describere; non minus quam veterum quadratricem; a qualibet linea vel figura partem imperatam abscindere; data proprietate tangentium figurae ex positis abscissis [figuram describere]. Sed quod si ad tangentem vel aliam functionem ordinata pariter et abscissa opus sit, exitus sic quidem non reperietur. Si aliae quaedam mirae sint atque extraordinariae relationes, ex quibus positis figurae descriptio invenienda sit, et His omnibus casibus problemata irregularia appello. Ex his intelligi potest Geometriam non nisi de locis agere, sive de motuum vestigiis.



[*Fig. 1*]

3 desperatarum *L ändert Hrsg.* 7 secare; *(1)* qvamlibet curvam, superficiem *(2)* cuiuslibet curvae, superficiei, corpus *(3)* logarithmos *L* 8 f. qvalibet *(1)* curva *(2)* linea *L* 9 data *(1)* relatione tangentium ad abscissas, figuram describere *(2)* proprietate *L*

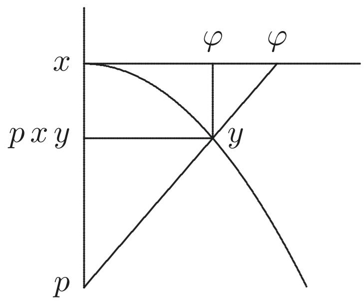
3 effeci: Leibniz bezieht sich vermutlich auf die Studie *Methodus tangentium inversa nunc tandem explicata*, dat. Januar 1675 (VII, 5 N. 27), in der er glaubte, die nachfolgend genannten Probleme gelöst zu haben. 3 desperatam: vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 39.

Sit $AB \sqcap x \sqcap CL$. et $BL \sqcap AC \sqcap y$. et $BP \sqcap p$, et $BT \sqcap t$. et $CQ \sqcap q$. et esse $BP \sqcap p \sqcap \frac{a^2}{y}$. Ergo quia $\frac{q}{x} \sqcap \frac{y}{p}, \sqcap \frac{y^2}{a^2}$. erit $q \sqcap \frac{xy^2}{a^2}$. Si AL appellavissemus z, fuisset $BL \sqcap \sqrt{z^2 - x^2}$. et fiet $BP \sqcap \frac{a^2}{\sqrt{z^2 - x^2}}$. Jam $GW \sqcap \beta$, et $WL \sqcap \lambda$, fiet: $\frac{\lambda}{\beta} \sqcap \frac{BP}{BL} \sqcap \frac{\frac{a^2}{\sqrt{z^2 - x^2}}}{\sqrt{z^2 - x^2}} \sqcap \frac{a^2}{z^2 - x^2}$, et $\lambda \sqcap \frac{a^2 \beta}{z^2 - x^2}$. Ex his s⟨a⟩ltem illud discimus problema[ta] in quibus ad functionem quandam inveniendam ordinatis et abscissis simul opus, aliquando eo reduci posse ut opus sit solis ordinatis; et tunc reducenda sunt ad Trochoeides. Forte et cum utraque opus est ad trochoeides reduci possunt. Semper autem cum ad Trochoeides reduci possunt, ope Trochoeidum reduci poterunt ad Curvas Geometricas, quia Trochoeides describi semper possunt etiam alio modo, postquam inventa est ars a me, omnes metiendi curvas, continuo motu descriptibiles.

Supersunt loca quaedam, difficilioris descriptionis, et plane transcendentia, ut si dentur infinitae quaedam ordinatae, certae progressionis, invenire curvam per ipsas transeuntem, v. g. si sit $AB. \frac{y}{1}$ $CD. \frac{y^2}{2}$, $EF \sqcap \frac{y^3}{3}$ etc. describere curvam per omnia puncta

---

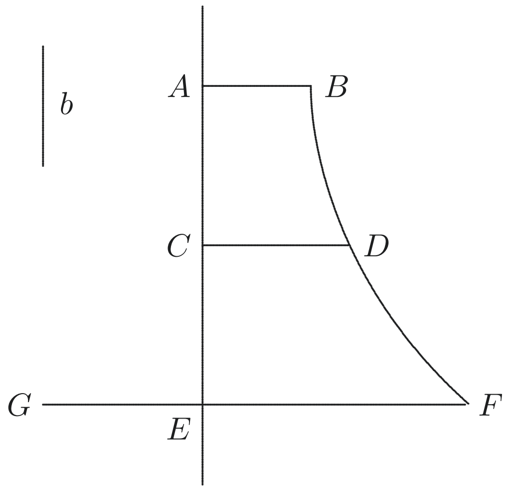
1 f. *Nebenbetrachtung:* $\frac{y}{p} \sqcap \frac{\varphi}{x}$. Ergo si $p \sqcap \frac{a^2}{y}$, fiet $\frac{y^2}{a^2} \sqcap \frac{\varphi}{x}$.



11 supersunt *(1)* curvae qvaedam *(2)* loca *L*

---

9 inventa: Vgl. VII, 3 N. $38_{11\text{-}13}$ von Oktober 1674 sowie die Studien *Schediasma de constructore* (Cc 2, Nr. 827) und *Constructor* (Cc 2, Nr. 815/816) von Dezember 1674.



[*Fig. 2*]

B. D. F. etc. transeuntem sive AC, CE, ponantur infinite parvae, sive, finitae distantiae, si sit AB y, et CD y^2, et EF y^3, ejusdem generis fit curva, sive infinito distent intervallo, sive sint proximae, semper enim fit linea Logarithmica; sed in aliis non puto. Imo forte etiam. Nam media progressionalis inter $\frac{y}{1}$ et $\frac{y^2}{2}$, est: $\dfrac{y^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}$. (: Notandum $y^{\frac{1}{2}}$ esse $\sqrt{y}$. ideoque $y\sqrt{y} \sqcap y^{\frac{3}{2}}$:) Unde sumtis intermediis velut aeque primis, et pro $\sqrt{y}$ vel $\dfrac{y^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}}$ substituendo z, omnia eodem modo irent, ac si initio proposuissemus $\frac{z}{1}$. $\frac{z^2}{2}$ etc.

Sed quae ratio describendi hujusmodi curvam. Ejus ordinata: $\dfrac{ba^{\frac{y}{a}}}{y} \sqcap v$. Ergo $\dfrac{v}{b} \sqcap \dfrac{a^{\frac{y}{a}}}{y}$.

Pone in figura hic, AB, CD, EF esse applicatas logarithmicae et $AE \sqcap y$. $EF \sqcap a^{\frac{y}{a}}$. Hoc modo descripta jam logarithmica facile describetur altera, facile enim per motum quadam regularum applicatione effici potest, ut sit GE sive v, ad EF, sive $a^{\frac{y}{a}}$, ut recta constans b. ad applicatam trianguli seu primanam AE. Hinc cum describi possit, spes

4 proximae, *(1)* qvod non est eius credo in *(2)* semper *L* 5 media *(1)* proportionalis *(2)* progressionalis *L*

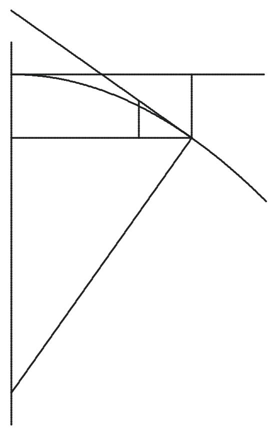
est posse et quadrari; methodo quam postea dicam generali, nempe ipsa $\frac{ba^{\frac{y}{a}}}{y}$, mutanda est in aliam quadrabilem, substituendo pro y alium ejus valorem, quod hic tamen cum fructu facere sic satis difficile, et nec dum reperi. Caeterum hae lineae analyticae Transcendentes nominari possunt; et dantur aliae multae, qualis est quadratrix logarithmicae, nam ea haberi potest, non descriptione tantum; sed et calculo; quoniam terminorum progressionis Geometricae iniri potest summa; eodem modo ope aliarum summarum multas alias figuras transcendentes comminisci licet; easque descriptibiles.

Jam vero hic animadverto necessitatem tertii generis linearum nempe Trochoeidum ad describendas curvas quas alias non video in humana esse potestate. Nimirum si curvae quaedam sint descriptae; quae non sint analyticae, differentiae earum non poterunt calculo investigari, nec proinde et descriptio regularum et motuum compositionibus fieri, et tamen describi possunt ope Tangentium datae; revolutarum: Ut obiter dicam. In linea logarithmica aequatio est haec: $a^{\frac{y}{a}} \sqcap x$. Unde si y haberi posset, absolute quodam expressionis modo, differentia inter hos duos valores, aequabitur applicatae hyperbolae circa asymptotos quod est mirabile et meretur in ejus demonstrationem ex S. Vincentio penitus inquiri; ad similia in aliis curvis comminiscenda. Et ducendam inde methodum generalem producendi Analyticas transcendentes et describendi. Etiam curva quadratrix fingi poterit ut analytica, ob aequationes quibus anguli inveniuntur continue crescentes certo modo exponentium etsi non aequationibus puris. Caeterum aliae quaedam sunt expressiones ordinatarum, ubi non est eadem curva, si ordinatae sint intervallo infinite parvo dissitae, et si finito. Difficile a. curvarum ejusmodi invenire descriptiones. Huc illa Wallisii interpolatio seu curva interpolationibus perpetuis imaginanda. Caeterum nota eam curvam qualis est illa Wallisiana ne Analyticam quidem transcendentem esse, quia non omnes ejus ordinatae exprimi relatione possunt, quia non possunt reperiri mediae progressionales. Ecce jam hic difficillima problemata ejusmodi mediarum progressionalium inveniendarum, seu applicatarum curvae ejus inter datas duas ordinatas dato intervallo interceptarum.

3 lineae *(1)* | pro *nicht gestr.* | analyticis *(2)* analyticae *L* 11 regularum et *erg. L*

15 demonstrationem: vgl. Gr. de Saint-Vincent, *Opus geometricum*, 1647, lib. VI, prop. CXXV bis CXXX, S. 594–597. 22 interpolatio: vgl. J. Wallis, *Arithmetica infinitorum*, 1656, prop. CXCII bis CXCIV und das zugehörige Scholium, S. 193–198 (*WO* I S. 476–478).

Caeterum invenio semper haberi posse et qua⟨d⟩ratricium quadratrices quia momentorum crementorum summa aequatur figurae vel ejus complemento; ergo si crementa sint ordinatis figurae datae proportionalia, momentorum crementorum summa quae habebitur, aequabitur summae figurae quadratricis figurae datae. Eodem modo ad tertias quoque quadratrices et ultra putem, nos progredi posse. Huc nimirum quae Pascalius De summis quadratorum, cuborum etc. Hinc methodus qua figuris non analyticis analyticae symmetrae exhibentur quarum quadratarum ope et illae quadrantur. Nota uti momenta sunt summis quadratorum, seu summis quadratricium symmetra, ita contra sequi videtur summas radicum ex ordinatis esse ipsis earum differentiis symmetras. Videndum an haec consequentia justa. Nam de ea dubito. Caeterum hinc utilitas methodi qua datis figuris etiam non-analyticis analyticae symmetrae reperiuntur: si scilicet describi possint. Idque vel ideo, quia etiam ex reductis invenire figuram problema est quadraturarum, nempe ex datis crementis invenire quadrata summarum. Adde quae Barrovius de tertiis cuborum, et quartis quadrato-quadratorum, ex eisdem reductis.



[*Fig. 3*]

Nota: Ex reductis invenire ordinatas problema dupliciter reduci potest ad quadraturas. Semel, simpliciter dum ita quaeritur quadratura harum reductarum, et quadratri-

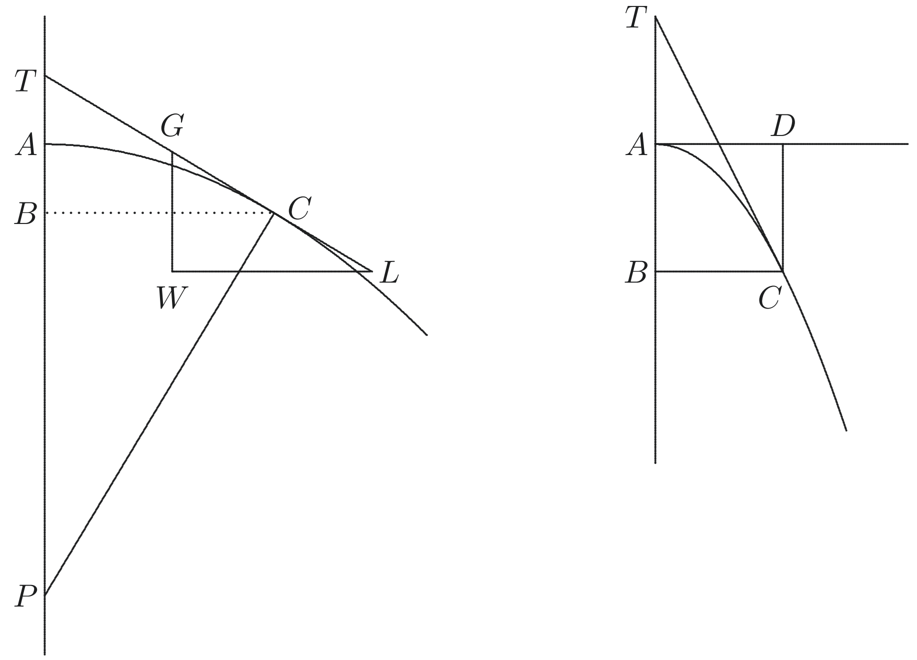
8 contra *(1)* seqvetur *(2)* seqvi *L*

5 f. De summis: Bl. Pascal, *Traité des trilignes*, 1658, S. 3 f. (*PO* IX S. 7–10). 13 de tertiis cuborum: I. Barrow, *Lectiones geometricae*, 1672, S. 85–88 [Marg.]; vgl. VII, 5 N. 43 S. 304–306.

cium quadrata, aliter dum crementa quaeruntur ubi oritur expressio ipsam ordinatam involvens, cujus summa seu ordinata quaeruntur. Hujus considerationis ope perveniri poterit multis casibus ad problematum in se reflexorum reductionem simplicem ad qua-

---

522,16–524,4 *Nebenbetrachtung auf Bl. 271 r^o:*



Nota si ex datis AB dentur PC semper problema reduci potest ad quadraturam. Nam datur momentum curvae ex AB. Ergo et hujus momenti differentiae aequales ipsis WL in curvas GL. Ergo WL in $\sqrt{WL^{[2]} + \beta^2}$. Ergo habetur WL. At ex datis WL. semper datur curva per quadraturam. Si TC detur ex datis BC. dabitur momentum ex AB. Itaque si detur TC ex data AD abscissa dabitur momentum curvae ex vertice, itaque et differen-

---

6 datur momentum: Gegeben ist dadurch nur $PC \cdot \beta = BC \cdot GL$. Die Ordinatendifferenzen WL werden damit noch nicht erhalten. 8 dabitur momentum: Gegeben ist damit $TC \cdot WL = BC \cdot GL$, jedoch nicht $AB \cdot GL$ bzw. GL.

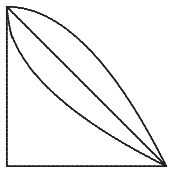
draturas, etiam sine trochoeidibus. Et quae forte per reductas non reducentur poterunt reduci per occurrentes dimidio occurrentium complemento ad ordinatas, auctos, quarum etiam semper habetur summa etc. Denique serviunt et constructiones Geometricae, ad summas serierum numeralium ineundas.

Unum hoc loco restat tradendum, quod est potissimum; Methodus scilicet generalis, qua inveniri potest quadratura figurae cujusque, cujus data est aequatio. Esto aequatio

---

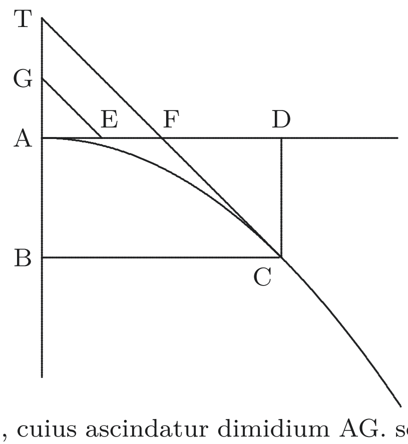
tiae momenti, sive curvae ipsius elementa ex quibus datis invenire curvam reducitur ad quadraturas.

Darüber:

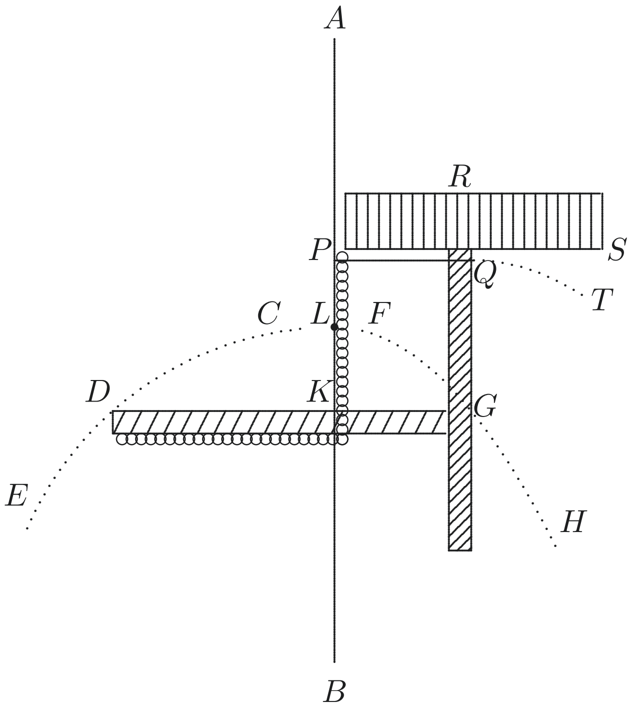


$$TB \sqcap \frac{y\beta}{WL}.\ \text{Jam } TB \sqcap \frac{y^2}{p}.\ \text{Ergo } [\textit{bricht ab}]$$

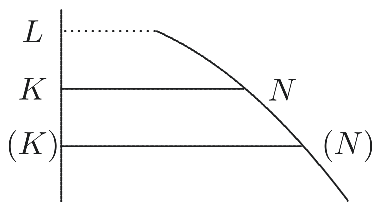
1 Et *(1)* aliae formulae *(2)* qvae *L* 8 qvadraturas | TB $\frown$ WL $\sqcap$ yβ, ergo pro TB substituendo valorem spes affulget etiam ex cognitis TB inveniend⟨i⟩ reliqvas nempe si cognitae ope BC vel AD. Nam TB $\frown$ in diff AD $\sqcap$ TB $\frown$ β erit $\sqcap$ BC seu AD in diff. ipsarum AD seu BC. seu y $\frown$ WL qvod si ergo et TB datur ex y. dabitur WL. seu differentia ipsarum DC. absolute ex y. ergo qvaestio reducitur ad qvadraturam. *(1)* si TB datur ex datis *(2)* Sed si TB datur ex AB, idem sed subtilius sic praestabitur.



a TB auferatur AB $\sqcap$ x restat TA, cuius ascindatur dimidium AG. semper data TB habebitur et TG vel GA. nam AG $\frown$ WL $\sqcap$ AE $\frown$ β. et AE $\frown$ β per alibi ostensa $\sqcap$ y $-$ x $\frown$ WL *gestr.* | *L* ejus quaelibet data: $ax^2 + by^2 + acx + ady + a^2e \sqcap 0$. et quaeratur exempli causa summa omnium y. ex data x. Pro x substituatur valor alius, assumta scilicet aequatione nova pro arbitrio $ax^2 + fz^2 + gzx + ahz + alx + a^2m \sqcap 0$. et ope hujus secundae aequationis assumtitiae, eliminando x. ex priore, data, restabit aequatio in qua non sint nisi duae incognitae y. et z. Quoniam vero literae f. g. h. l. m. sunt arbitrariae, ideo assumantur tales, ut sive ita explicentur, ut summa omnium y secundum hanc novam aequationem, haberi possit, seu ut inde figura producatur, ex earum numero quarum habetur Quadratio quod semper, et infinitis fieri potest modis ex quibus commodiores eligi possunt. Quod si methodum semper velis uniformem, efficies, ut aequatio inde orta fiat similis huic: $y \sqcap z + n$. multiplicatae per aliam quamlibet formulam assumtitiam, ut ad eundem numerum dimensionum reductae comparentur. Porro ex his semper habebitur Quadratrix omnium y quae erit parabola, si aequatio factitia cum hac: $y \sqcap z + n$ vel ejus multipla comparata est.



[*Fig. 4*]



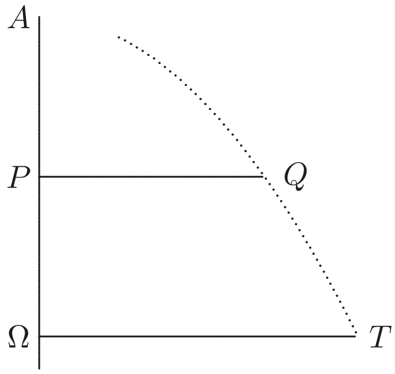
[*Fig. 5*]

7 f. Qvadratio *(1)* analytica, qvod sem *(2)* qvod *L* 8 modis *(1)* describitur figura cuius figurae Qvadratrix *(2)* describi *(3)* ex *L*

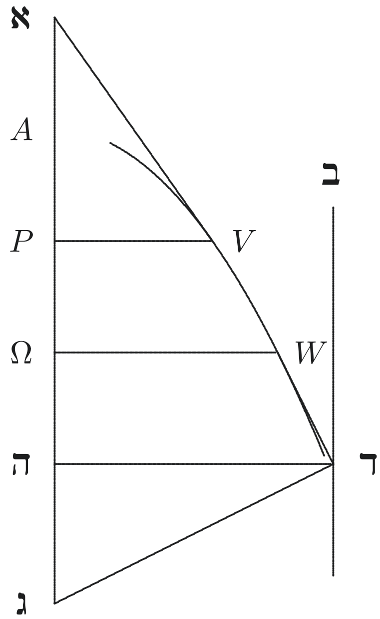
Jam ad directricem quandam unicam AB, uno eodemque motu simul duae describantur curvae Analyticae, una cujus aequatio sit assumtitia: nempe $ax^2 + fz^2 + gzx + ahz + alx + a^2m \sqcap 0$. Quae curva in figura apposita sit CDE; et altera FGH nempe quadratrix factitiae ipsam y continentis. Quae semper est parabola, si ea factitia ipsius $y \sqcap z + n$. multiplae comparata est, sed erit parabola ipsi AB obvertens concavitatem, ita ut sit tangens ejus verticis. Duo ergo erunt puncta describentia, D, G. Ponatur regula DKG. ad AKB perpendicularis continueque descendens in qua styli describentes D, G. semper transverse moventur. Stylus quidem D semper ab AB recedit, stylus G recedit cum FGH est crescens, accedit cum decrescens. Nimirum sumto in directrice puncto fixo ad rem pertinente L, erunt $LK \sqcap z$. $DK \sqcap x$. et crementa ipsarum KG. aequalia $\dfrac{y}{a}$. Prout ergo ipsae KG crescunt, ipsis x vel z. crescentibus (: nam si x crescunt semper et z crescunt :) quod ex cognita crementorum natura facile intelligi potest, tunc etiam stylus G recedet a K. Sin decrescunt accedet. Nimirum ipsae KG sunt ipsis LKN, spatiis curvae factitiae proportionales, ideoque puto tandem semper crescere; crescentibus enim LK crescunt spatia LKN. Jam ipsa DK ducit secum chordam per regulam transeuntem et in K replicatam quae ascendens ad P. in recta APK, ibi tabulam vel regulam PQS deducit in recta APK eodem semper angulo ad rectam ita ut puncto A fixo initio sumto, recta AP semper futura sit aequalis ipsi rectae DK. In eadem autem regula PQS, stylus Q. a regula GR. ipsi AB. parallela perpetuo manente per rectam PS. ipsi KG parallelam ducetur.

Quibus motuum compositionibus, uno regulae per AP, altero styli per PS, describetur curva QT, quadratrix propositae VW sive erit ut recta PQ ad rectam ΩT, ita spatium APV ad spatium $A\Omega W$. et si ponendo $P\Omega$ infinite parva ad ipsam VW ducatur Tangens אVW. producaturque dum דב rectae fixae ipsi $A\Omega$ parallela, occurrat in ד. et ex ד ducatur ipsi דא perpendicularis גד, ipsi אPג occurrens in ג, et alia הד ipsi גהא perpendicularis in ה, translatis perpetuo גה, in ipsas PQ. semper aut coincident, aut rationem habebunt datam cumque ipsa הד semper sit eadem, magnitudine, et pro arbi-

9 decrescens *(1)*; nempe cum crescentibus x crescunt qvae ⟨etiam⟩ facta sunt *(2)* Nimirum *L* 11 ergo *(1)* crementa ipsarum y *(2)* ipsae *L* 14 curvae *(1)* qvadrandae proportionales; *(a)* qvare *(b)* prout spatia illa *(c)* Jam crescentibus LK, sive *(2)* factitiae *L* 24 dum *(1)* rectae fixae | ipsi *nicht gestr.* | *(2)* דב *L*



[*Fig. 6*]



[*Fig. 7*]

trio sumi possit, facile poterit talis assumi, ut גה et PQ. perpetuo sint aequales. Jam generaliter constat ipsas PV, vel ΩW ipsarum הג vel PQ semper esse quadratrices per ea quae alibi a me sunt demonstrata.

Eadem methodo etiam serierum summae inveniri possunt in numeris constructionis Geometricae imitatione. Esto enim series v. g. $\dfrac{1}{x^2}$ pone $x^2 \sqcap y^2 + \dfrac{\beta}{2}y + \dfrac{c^2-\beta^2}{4}$ jam haberi potest summatrix hujus: $z \sqcap \dfrac{a^3}{y^2 + \dfrac{\beta}{2}y + \dfrac{c^2-\beta^2}{4}}$, et describi potest prior adhuc facilius, si ponas $\dfrac{1}{ax}$. et $ax \sqcap y^2 + \dfrac{\beta y}{2}$. Nam habetur summatrix hujus: $\dfrac{a^3}{y^2+\dfrac{\beta}{2}y}$, et cum aequatio $ax \sqcap y^2 + \dfrac{\beta y}{2}$ exacte in numeris possit exhiberi, hinc ope dentium quarundam

4 alibi: Gemeint ist wohl, dass die Summe der Subnormalen nach der Abszissendifferenz gleich ist der Summe der Ordinaten nach der Ordinatendifferenz; vgl. VII, 4 N. 27 prop. 6 S. 467–468. 7 haberi potest: vgl. VII, 3 N. 38_{16} S. 532–533. 8 habetur: vgl. VII, 3 N. 43.

⟨possent⟩ ista definiri, et exhiberi numeri veri forte et in aliis casibus dum non radices ipsas, sed quadrata aliasque potentias in numeris per dentes damus.

49_3. DE GEOMETRICA DESCRIPTIONE FIGURARUM TRANSCENDENTIUM QUADRATRICIUM II
Januar 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 II 1 Bl. 269-270. 1 Bog. 2°. 3 S. auf Bl. 269 r°–270 r°. Cc 2, Nr. 895

Januar. 1675

De geometrica descriptione figurarum transcendentium quadratricium

Consultatio de perficienda Geometria
An scilicet, et qualis Circuli et Hyperbolae Quadratura, Angulique et Rationis Sectio Universalis, sperari aut expeti possit debeatve.

Si quis Lineam Quadratricem et Lineam Logarithmicam Geometrice describeret, is non tantum Quadraturam Circuli et Hyperbolae daret, sed et rem utraque nude atque arcte sumta, longe majorem: Anguli scilicet et Rationis sectionem in data ratione.

Demonstrari autem potest Lineas Quadratricem et Logarithmicam non esse Analyticas, id est impossibile esse ut relatio omnium punctorum hujusmodi linearum ad quandam rectam, aequatione ullius dimensionis assignabilis explicari possit. Sunt enim ex earum numero, quas appello Transcendentes. Illud quoque demon-

8–10 januar. ... qvadratricium *erg. L*

19–529,2 Demonstrari ... relatio: s. die Erläuterungen zu N. 49_1 S. 506 Z. 20 – S. 507 Z. 4.

strari potest impossibile esse regulam aequatione explicabilem reperire, qua arcus Circuli ad sinum, generalis comprehendatur relatio.

Porro ita sentio Quadraturam Circuli et Hyperbolae a Geometris expeti generalem, id est dimensionem non unius tantum casus aut plurium, sed portionis datae cujuslibet, unde sectio rationis et anguli in data ratione consequitur. Quadraturam ergo Circuli perfectam, et qualem optamus, non daret, qui integri circuli dimensionem daret, partium non daret; tametsi pulcherrimum foret theorema, quo ratio diametri ad Circumferentiam analytica exhiberetur. Sed perfectae Circuli quadraturae finis atque usus est, sectio anguli universalis, quam qui daret, descriptaque Geometrice Curva Quadratrice, cuilibet arcui circuli rectam aequalem exhiberet, Problema illud magnum utique Geometrice absolveret. Analytice enim nisi in certis forte casibus solvi non potest. Itaque cum Perfecta sive Generalis quaeritur Circuli Quadratura Geometrica quaeritur non Analytica.

Et vero multa perfecte habentur per Geometriam, quae nondum perfecte habentur per Analysin: nam data aequatione unius incognitae, utcunque affecta, radices ejus semper haberi possunt per Geometriam, post lineas Analyticas sive aequationum capaces, a Cartesio introductas; sed Analysis tum demum perfecta censebitur, cum Aequatio pura reddita est, sive cum valor incognitae quaesitae absolute, et sine ipsius incognitae implicatione haberi potest. Quod nondum semper praestare possumus. Geometrica ergo omnium aequationum resolutio, (: sive quod idem est, Analytica Constructio:) habetur; Analytica Resolutio (si ita loqui licet) non habetur. Itaque Constructione quadam generali, Circuli pariter, et omnium ejus partium dimensionem exhibente; poterimus esse contenti, velut Quadratura Circuli Geometrica perfecta, vel ideo quod Analytica generalis sive perfecta, est impossibilis.

Et vero Quadraturae Circuli Problema non Analyticum, sed Geometricum est: Veteres enim, qui id primi proposuere; de Aequationibus, et Aequationum resolutionibus soliciti non fuere: contenti motibus quibusdam certa regula ac velut lege vinctis, incognitas quantitates exhibere: quorsum omnis eorum de Locis, doctrina collimabat.

27 qvibusdam *(1)* rectarum linearum *(2)* certa *L*

---

12 Analytice ... potest: s. N. 49_1 Erl. zu S. 506 Z. 20. 17 introductas: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, lib. 1, *DGS* I S. 1–16. 21 non habetur: Dies wurde erst im 19. Jh. bewiesen. 24 impossibilis: Dies wurde erst im 19. Jh. bewiesen.

Itaque magno consilio Lineam quandam commenti sunt, quam Quadratricem appellabant, ut intelligeretur, P e r f e c t a m C i r c u l i Q u a d r a t u r a m g e o m e t r i c e d a t u r u m, q u i G e o m e t r i c a m l i n e a e Q u a d r a t r i c i s d e s c r i p t i o n e m i n v e n i r e p o s s e t. Ad imitationem autem Quadratricis, Geometrae quidam nostri temporis L i n e a m L o g a r i t h m i c a m excogitavere, qua descripta, Hyperbolae et omnium ejus partium daretur quadratura, et sectio rationis in data ratione, quemadmodum descripta Quadratrice, ipsam Circuli et omnium ejus portionum dimensionem, et sectionem anguli in data ratione, haberemus.

Quoniam autem impossibilia frustra optantur, ideo d e s c r i p t i o harum duarum Linearum, Quadratricis et ipsae Logarithmicae, A n a l y t i c a seu Aequatione explicabilis, non quaeritur, sed sufficit exhiberi G e o m e t r i c a m. Quaeritur ergo jam an aliqua reperiri possit D e s c r i p t i o v e l C o n s t r u c t i o G e o m e t r i c a quae non sit A n a l y t i c a; hoc enim posito de Descriptione earum Geometrica, etiam post demonstratam Analyticae impossibilitatem, nondum erit desperandum. Explicandum ergo est, quas Descriptiones vel Constructiones, sive generaliter, quasnam operationes Geometricas appellemus.

Excludemus autem ante omnia illas sive constructiones sive operationes, in quibus desiderantur simul haec duo, nempe curvarum quarundam elaboratio in materia solida, et praeterea aliarum quarundam linearum materialium angulus ad ipsas curvas (id est ad earum tangentes) certa lege, durante operatione, servandus, mutandus, aut reperiendus. Neque enim eum dicemus Geometrice reperisse Tangentem alicujus curvae, qui annulum quendam materialem secundum ipsam curvam elaboraverit, et ad punctum in annuli extremitate sive acie datum, regulam quandam in eodem aut parallelo cum acie plano manentem, applicuerit; aut illum qui regulam AD circa centrum sive punctum extra curvam datum, A, mobilem, ad convexas curvae partes positam, tamdiu circa A; versus annulum sive curvam materialem CBE egerit, donec ei impingat in puncto B. Eodemque modo neque rota in plano voluta arcui circuli aequalem in plano rectam Geometrice designari dicemus, cum alioqui Quadraturam Circuli dudum habituri simus. Cujus rei ratio non est, quod ejusmodi operationes, non sint in geometrico rigore exactae, sed quod aliae habeantur aut certe quaerantur γεωμετρικώτεραι, sive minus materiales, magisque

30 aut certe qvaerantur *erg. L*

4 f. Geometrae quidam: z. B. J. Gregory, *Geometriae pars universalis*, 1668, prooemium, und I. G. Pardies, *Elemens de geometrie*, 1671, S. 89 f. 24 *AD*: s. N. 49_1 Fig. 2 S. 509 Z. 1.

rationales; ut scilicet curvarum dimensio detur, non per ipsarummet Curvarum ex solida quadam materia excisarum applicationem ad mensuram quandam rectilineam, planumve aut filum; sed per rationem quandam nobiliorem, ubi res non manu sed ingenio geratur, neque palpetur sensu, sed demonstratione evincatur; subtilissima quadam resolutione curvarum in earum Elementa et causas. Aliud enim est res scientia quadam, aliud experimento sive contactu invenire, et aliud est rusticum aliud Geometram agere. Nam ope fili rotae circumplicati, et postea extensi, aequalem arcui exhibere rectam, cujusvis est ex plebe; sed nulla materiali rota adhibita, solis quibusdam regulis sive lineis rectis materialibus super aliis regulis incedentibus aut circa puncta quaedam sive centra motis, tantundem efficere quantum alius ipsius Rotae annulive materialis applicatione perpetua ad mensuram; hoc demum magno Geometra dignum fuerit Epicherema. Tantum enim interest inter hos duos dimetiendi modos, quantum inter mensurationes agrorum a Geometra et a rustico susceptas. Rusticus enim nihil pronuntiare potest, de magnitudine corporis propositi, quod non perpetua mensurae suae sive perticae applicatione exploraverit, unde fit ut saepe impedimentis quibusdam objectis, ut cum loca aliquando inaccessibilia sunt, nihil agat. Geometra autem ex paucissimis quibusdam datis ad caetera definienda sufficientibus etiam sensu non perspecta, ratione deducit. Eodem modo curvas licet in materia solida non elaboratas, neque ad mensuram ipsam applicatas metiri, hoc demum est, dimensiones earum Geometricas reperire.

Descriptiones igitur sive constructiones Geometricas hoc loco appello, quaecunque solarum regularum sive linearum rectarum, vel Tabularum planarum lineis rectis contentarum, e materia solida elaboratarum, incessu super aliis lineis rectis vel planis inter rectas comprehensis, aut gyratione circa quoddam centrum, absolvuntur: ita ut motus earum ab uno quodam primo motu regantur sive dependeant, qui simpliciter manu aliove impulsu utcunque facto, dari possit instrumento. Nam si regula moveatur circa quoddam centrum, aut incedat super alia quadam regula; eoque motu alias iterum regulas super aliis mobilibus immobilibusque aut circa centra quaedam fixa, aut mobilia moveri cogat; ita ut motus omnis ab uno eodemque primo Mobili in caetera mobilia derivetur; neque in primo impulsu ulla observatione, ullove artificio sit opus, caetera autem mobilia, ex ipso situ suo determinatam accipiant motus directionem, et celeritatum inter se invicem

8 f. regulis | *(1)* sive rectis *(2)* sive ... materialibus *erg.* | super *L* 9 qvaedam *(1)* fixa motis *(2)* sive *L* 12 inter *(1)* dimensiones agrorum a Geometra et a rustico exhibitas *(2)* mensurationes *L* 22 f. inter rectas comprehensis *erg.* *L* 28 derivetur; *(1)* lege qvadam certa *(2)* neqve *L* 30 suo *(1)* certam constantemqve *(2)* determinatam *L*

relationem in quolibet puncto spatii temporisve a nobis per aliarum rectarum Geometrice dabilium rationes mensurabilem; profecto non minus Geometrica erit operatio, quam si uno circino et regula fieret, quandoquidem non nisi circinorum, si placet, ac regularum compositione perficitur, unde magis quidem composita magisque difficilis, sed non minus Geometrica erit. Agnita sunt ista nonnunquam etiam veteribus, et obliterata nonnihil temporum tractu, a Cartesio resuscitata sunt.

Etsi autem verum sit omnem Constructionem sive Descriptionem Geometricam fieri posse sine ulla Curva materiali, eas autem quas hoc loco rejicimus, et alioqui s e m i p e r f e c t a s appellare solemus, semper curvilinea quadam figura e materia quadam elaborata, indigere; sciendum est tamen aliquando etiam adhibitis Curvis materialibus, D e s c r i p t i o n e m n o n m i n u s G e o m e t r i c a m p e r f e c t a m manere. Quemadmodum fit in descriptione C o n c h o e i d i s Veterum, aut Paraboloeidis Cartesianae. Nam in illa Circuli, in hac Parabolae materialis incessu secundum longitudinem cujusdam regulae utimur, nec eo minus tamen descriptio est Geometrica perfecta. Cujus rei causa est, quod nulla habetur ratio anguli quem Circuli aut Parabolae describentis curva in alio atque alio sui puncto, cum recta quadam itidem describente, in alio atque alio puncto ipsi occurrente facit, sed nulla alia praescribitur lex motus, quam ut recta quaedam constans, axis verbi gratia Curvae materialis describentis Rectae directrici parallelus, aut certo quodam modo circa centrum quoddam circumagi, inclinationemque ad directricem mutare intelligatur. Sed si circulus describens super recta quadam volveretur ad describendam Cycloeidem anguli quem recta faceret ad curvam Circuli vel ejus tangentem ratio vel maxime haberetur; foret enim semper infinite parvus, quandoquidem tangens ejus semper in rectam sustinentem incideret. Unde fit ut Conchoeides linea

1 puncto |spatii temporisve *erg.*| a nobis *(1)* mensurabilem *(2)* per *L* 6 f. sunt. *(1)* Sed in eo lapsus videtur vir summus, qvod credidit omnes Lineas Geometricas *(a)* solarum rectarum ad *(b)* super rectis motu descriptas, regularum qvarundam (: qvarum multitudo nonnunqvam substituendo curvam qvandam materialem rescindi potest, *(aa)* in *(bb)* ut per circulum in describenda conchoeide, modo anguli ad curvam materialem inter describendum nulla habeatur ratio :) *(2)* Etsi *L* 18 describentis *(1)* plano *(2)* Rectae *L* 20 f. describens *(1)* ad Circu *(2)* supra plano *(3)* super ... volveretur |ad describendam Cycloeidem *erg.*| anguli qvem *(a)* planum *(b)* recta *L* 21 f. vel eius tangentem *erg.* *L* 22 f. qvandoqvidem *(1)* planum sustinens *(2)* tangens *L* 23 in *(1)* planum sustinens, ad *(2)* rectam *L*

6 resuscitata: R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, lib. 2, *DGS* I S. 17–66.

perfecte Geometrica haberi debeat, et ad problemata solvenda adhiberi possit, quod de Cycloeide dici non potest. Eamque ob causam fit quoque, ut conchoeides Linea etiam sine Circulo materiali describi possit, qui ad contrahendum tantummodo Regularum mobilium numerum adhibitus est. Cycloeidis autem descriptio hactenus cognita circulum materialem exposcit. Quod si quis modum reperiat aliter describendi Cycloeidem, per solas rectas mobiles, aut certe nulla habita ratione anguli ad curvam describentem is eam perfecte Geometricam reddiderit, eademque opera Circulum pariter et omnes ejus partes quadraverit. Neque enim absurdum est, eandem Lineam et perfecte Geometricam, et Semi-Geometricam censeri, pro diversis describendi modis.

Porro etsi primus omnium Cartesius quod sciam, doctrinam de locis punctorum omnium Quaestioni cuidam satisfacientium, sive de Curvis Geometricis in claram quandam lucem protulerit, non absolvit tamen; sed limitibus nimis angustis circumscripsit. Lapsus enim in eo est, quod omnem Lineam Geometricam perfectam, quales sunt quas hactenus descripsi, credidit analyticam; sive ductis ex quolibet ejus puncto ad certam quandam rectam, ordinatis; quae ex ipsa recta a certo quodam puncto fixo initium sumente, portiones abscindant, relationem inter ordinatas et abscissas esse semper aequatione explicabilem: quoniam id in omnibus exemplis, quae in mentem venerant, similibusque aliis infinitis altius atque altius assurgentibus evenire videbat. Sed non animadvertit infinitas alias diversi nonnihil generis comminisci licere, non minus regulares, ac simplices, ac Geometricas, et tamen aequationis incapaces. Quod si eas vel eo ipso e Geometricarum numero excludendas censet, ego in eum eo quo paulo ante pro ipso, argumento utar.

Nimirum quicquid exactum est, Geometricum est, usus tamen ejus non semper Geometricus dicetur. Nam ut dixi campum pertica, arcum filo, vasis capacitatem aqua me-

2 potest. *(1)* Nam huiusmodi *(a)* Lineae non nisi ad illa problemata solvenda adhiberi debemus *(b)* Lineis non nisi ad illa problemata solvenda uti possumus, qvae aliter solvere non licet. Itaqve earum ope non ante Problema Geometrice solutum censebitur, qvam demonstratum sit, impossibile esse, ut per perfecte Geometricas, sive per C u r v a s R e c t i l i n e a r e s Qvae tametsi ita habeant, verum tamen est Conchoei *(2)* Eamqve *L* 16 aeqvatione *(1)* duas indeter *(2)* explicabilem *L* 22 est, *(1)* operatio *(2)* usus *L*

12 protulerit: *a. a. O.* 12 Lapsus: Die durch die von Descartes beschriebenen Mechanismen erzeugten Kurven sind algebraisch. Umgekehrt hat A. B. Kempe im 19. Jh. gezeigt, wie beliebige Polynome vom Grad n durch solche Mechanismen erzeugt werden können. J. J. Sylvester bewies, dass dies für beliebige algebraische Kurven möglich war; 1926 fand Gershgorin einen Konstruktionsmechanismus.

tiri, Geometricum esse non dicemus etsi nihil sit exactius. Nimirum ita receptum est inter Geometras, ut is demum Problema Geometrice solvisse credatur, qui Instrumentum construendi exhibuerit, quod sit simplicissimi generis. Itaque si quis lineam adhibet nonnihil compositam, demonstrandum est ipsi, problema per aliam simpliciorem absolvi non posse. Quare ante omnia examinandum est an problema sit planum, sive an uno circino, unaque regula adhibitis, solvi queat. Et generaliter si problema est Analyticum, sive ad aequationem quandam reductum, videndum est quousque deprimi possit aequatio, ut simplicissimi quantum licet generis curva ad construendum utamur. Quemadmodum autem eo ipso evincitur curvas analyticas, circulo vel etiam Conicis altiores, in Geometriam esse recipiendas, quod sint Problemata quae per ipsas solvi possunt, sine ipsis Geometrice sive exacte solvi non possunt: ita si monstrare possim esse C u r v a s R e c t i l i n e a r e s , id est ope solarum linearum rectarum materialium sive regularum descriptas, quae non sint Analyticae; et tamen ad problematum quorundam constructiones necessariae, eo ipso erunt in G e o m e t r i a m c o n s t r u c t i o n u m recipiendae, nisi, quod est ridiculum, problemata quae solvere possimus, pro insolubilibus haberi malimus. Sint autem Problemata, (: ut sectio anguli et rationis in data ratione, quemadmodum dixi :) quae demonstrare possum aequationis incapacia, et per curvas Analyticas minime solubilia esse, ita jubente natura rerum. Quare si alias invenire possim C u r v a s R e c t i l i n e a r e s , quantum licet simplices, inter caeteras sui generis, caeterum non Analyticas, quas unas omnium simplicissime satisfacere demonstrem, Problema propositum Geometrice solvero; et penitissime finivero, cum nihil amplius quaerendum restet post me. Et si quis aliquando monstret, esse etiam Problemata, quae non nisi ope C u r v a r u m C u r v i l i n e a r i u m , sive per angulos ad curvas describendarum construi queant, is has ipsas Curvas curvilineares, exempli causa Cycloeides, quantum ad hunc usum in G e o m e t r i a m c o n s t r u c t i o n u m admittendas obtinuerit.

9 curvas *(1)* altiores *(2)* analyticas *L* 12 f. regularum | exacte *gestr.* | descriptas *L* 24 curvilineares *erg. L* 25–535,1 obtinuerit *(1)*, cum ego hactenus nullam adhibendi ⟨—⟩ *(2)*. His *L*

11–14 ita ... recipiendae: s. o. zweite Erl. zu S. 533 Z. 12. 17 demonstrare possum: In der Studie *De figuris analyticis figurae analyticae quadratricis capacibus*, dat. Januar 1675 (VII, 5 N. 26 S. 203), begründet Leibniz die damit zusammenhängende Unmöglichkeit der „analytischen“ Kreis- und Hyperbelquadratur (s. auch unten S. 535 Z. 12–17) dadurch, dass die Quadratrix der Alten und die Logarithmuskurve unmöglich „analytisch“ sein könnten.

His ita explicatis, Quaestio huc denique redit; Si quis lineas, Quadratricem et Logarithmicam Geometrice et rectilineariter solo regularum incessu super aliis quibusdam regulis, aut circa centra quaedam gyratione, describere possit, atque ita cuilibet arcui aequalem rectam, et cuilibet rationi respondentem Logarithmum exhibeat; an Quadraturam Circuli et Hyperbolae Geometricam generalem, sive omnes portiones complexam; et sectionem Anguli Rationisque Universalem, perfectam, seu qualis optari debet, invenerit; et quantum ad Geometriam, problemata ista finiverit. Tametsi quantum ad Analysin quaerendum ad huc supersit, etiam post Rectam circumferentiae aequalem Geometrice exhibitam an ratio inter illam rectam et diametrum, numeris, rationalibus vel surdis queat exprimi; quemadmodum dici potest Trisectionem anguli a Cartesio aliisque Geometrice finitam esse, Analytice nondum, quia valor chordae quaesitae arcus subtripli nondum pure absoluteque exprimi potuit a quoquam. Idem igitur hic quoque recte responderi putem, his quae supra dixi positis, Quadraturam Circuli et Hyperbolae, et portionum ex ipsis omnium g e n e r a l e m , et sectionem anguli rationisque u n i v e r s a l e m , Analytice pariter et Geometrice absolutas habitum iri, quia demonstrari potest, loquendo regulariter, et in universum, certis tantum casibus particularibus exceptis, analytice solvi non posse. Qui casus particulares, ex Geometria in Algebram relegabuntur, quaerendumque Analyticis relinquetur an numeris rationalibus surdisve possint explicari, quod non amplius interest Geometriae; quandoquidem exemplo Trisectionis anguli aliisque infinitis patet incognitas per Geometriam tam recte facileque inveniri, cum valores earum analytice habentur, quam cum non habentur, imo saepe cum habentur, in aliam formam, perinde ac si non haberentur converti debere, quo facilius per lineas Geometricas construi possint, quemadmodum in problemate inveniendarum trium mediarum proportionalium ostendit Cartesius.

5 Geometricam *erg. L* 15 potest *(1)* multos esse casus *(2)* analytice *(3)*, loqvendo *L*

---

10 a Cartesio: R. DESCARTES, *a. a. O.*, S. 91–94. 24 ostendit: vgl. *a. a. O.*, S. 67–69.

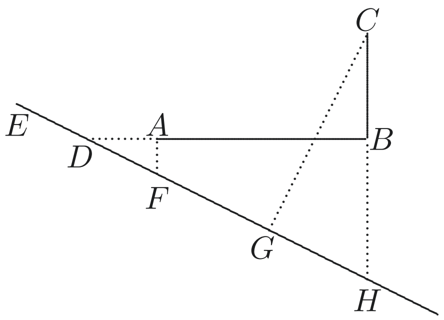
50. MUTATIO AEQUATIONIS CURVAE PRO MUTATA DIRECTRICE
[Januar 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 70. Ca $\frac{2}{5}$ Bl. 4°. $1\frac{1}{3}$ S. Bl. 70 bildete ursprünglich zusammen mit LH 35 XIII 3 Bl. 148 (VII, 5 N. 24) und LH 35 XIII 1 Bl. 355 (VII, 5 N. 25) ein vollständiges Bl. 2°. Bl. 355 v° enthält das ursprüngliche Ende des Textes der Aufzeichnung N. 50, welches Leibniz vor dem Zerschneiden des Blattes weiter unten (Bl. 70 v°) abschrieb und danach oben (Bl. 355 v°) durchstrich.
Cc 2, Nr. 1450

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für Januar 1675 belegt. N. 50 ist nach VII, 5 N. 24 u. VII, 5 N. 25 geschrieben worden. Der Hinweis auf Schootens Methode der Koordinatentransformation in dem auf Januar 1675 datierten Stück VII, 5 N. 26 S. 207 Z. 3–5 dürfte nach N. 50 verfasst worden sein.

Mutatio aequationis curvae pro mutata directrice

Notandum est si nunc hae nunc illae lineae pro directricibus sumantur, mutari valores, et novas emergere quadraturas; et huc transferenda methodus generalis Schotenii qua apparet quantam induere possint varietatem figurae, ordinatae ad varias directrices. Ecce Schotenii figuram.



[*Fig. 1*]

13 Mutatio ... directrice *erg. L* 16 induere *(1)* possit aeqvatio *(2)* possint *L* 16 figurae, *(1)* varias assumtas *(2)* ordinatae *L*

17 figuram: Fr. van Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 177. Leibniz übernimmt die Figur mit den Punktbezeichnungen fast unverändert.

C. est punctum curvae. AB directrix una, CB ad eam ordinata, EF directrix alia. CG ad ipsam ordinata. Omnis varietas inquit in eo consistit; quod cum AB indeterminata relinquitur, seu appellatur x, et CB appellatur y, $DA \sqcap a$, $AF \sqcap b$, tunc CG erit $\dfrac{ab+bx+ay}{\sqrt{a^2+b^2}}$, et $DG \sqcap \dfrac{a^2+ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}$ aut quod adjicio ponendo $ED \sqcap d$ erit si malis $EG \sqcap \dfrac{d\sqrt{a^2+b^2}+a^2+ax-by}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Alio sumto casu quam qui in figura nil nisi signa variabuntur. Unde et haberi potest, si EG sumatur pro abscissa, quanta futura sit ordinata CG. Nota difficultas aliqua, quando valor ipsarum y pure haberi non potest; sed tunc tamen collatione duarum aequationum poterit eliminari. Hac methodo statim inveniri potest, quomodo variari possint ordinatae alicujus figurae. Eadem jam methodo generaliter determinari potest, quomodo alicujus figurae productae, reductae, aliaeque functionem facientes possint variari, producta una sola supposita calculata et ex ea calculando reliquas omnes productas reductasve, et alias functiones. Hoc summi erit usus quando Tabula Curvarum, earumve quadraturarum, centrorum gravitatis, momentorum etc. condenda erit. Eodemque modo investigari poterit quam variis modis variari possit ejusdem curvae progressio.

3 relinqvitur, *(1)* determinando *(2)* seu *L* 3 appellatur y, | DA ⊓ a, AF ⊓ b *erg.* | tunc CG *(1)* vocabitur *(2)* erit *L* 4 adjicio *(1)* aut si *(2)* ponendo *L* 6 f. ordinata | EG. *ändert Hrsg.* | Nota *L* 10 figurae *(1)* abscissae fa *(2)* productae *L* 11 calculata *(1)* et ex ea calculando reliqvas omnes productas reductasve, ex alias functiones Hoc summi erit usus *(a)* ad *(b)* qvando Tabula Curvarum *(aa)* con *(bb)* earumqve qvadraturarum, centrorum Gravitatis; momentorum, *(aaa)* curvarum, *(bbb)* etc. condenda erit: eodem modo investigari poterit qvam variis modis variari possit ejusdem curvae progressio. *(2)* et *L*

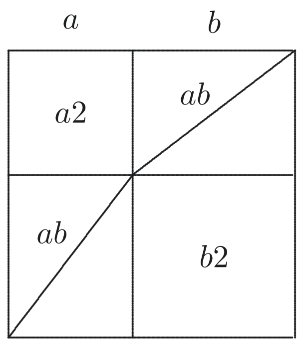
2 inquit: *a. a. O.*, S. 176.

51. LINEA CURVA A DOMINO OSANNAM MIHI PROPOSITA
April 1675

Überlieferung: *LuO* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Ozanam): LH 35 VIII 30 Bl. 37. Ca $\frac{1}{3}$ Bl. 2°, oberer Rand unregelmäßig geschnitten. 1 S. Teil 2 (möglicherweise mit Ausnahme von Fig. 4 u. 5) wurde von Leibniz nach den Gesprächsnotizen geschrieben.
Cc 2, Nr. 940

[*Teil 1*]

[*Ozanam*]

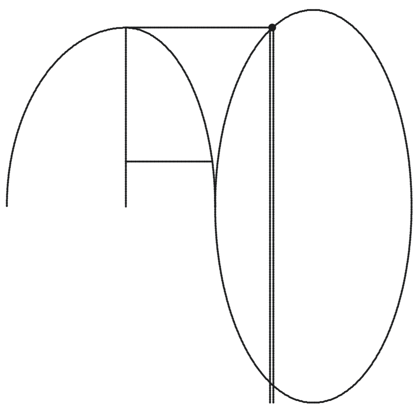


[*Fig. 1*]

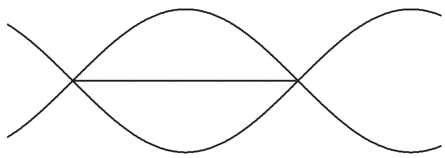
[*Leibniz, quer geschrieben*]

$$\begin{array}{l} a+b \\ \underline{a+b} \\ a^2+2ab+b^2 \sqcap \end{array} \qquad \begin{array}{l} a+b \sqcap c \\ a^2+2ab+b^2 \sqcap c^2 \end{array}$$

[*Leibniz oder Ozanam*]



[*Fig. 2*]

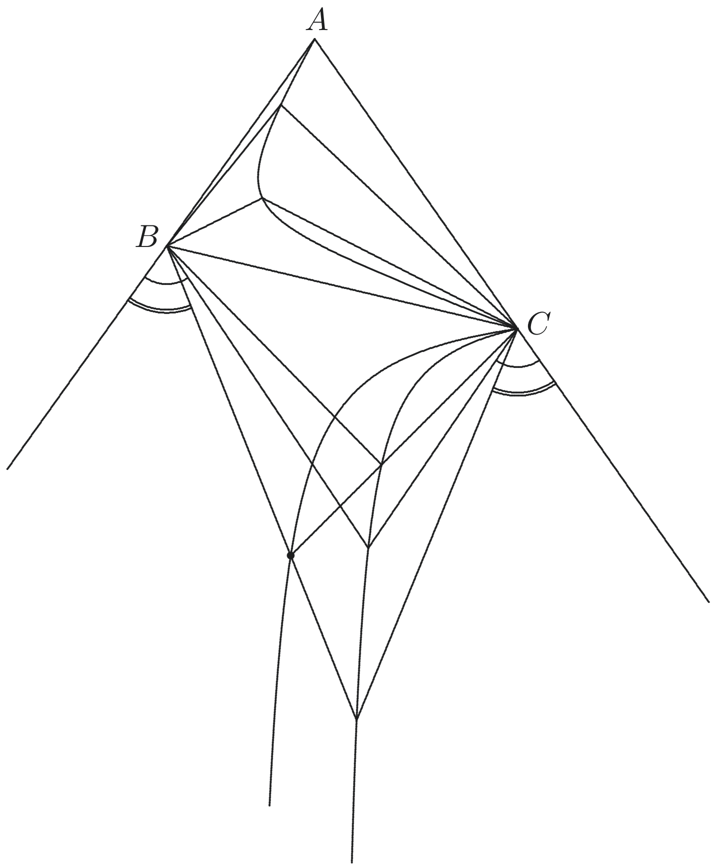


[*Fig. 3*]

[*Teil 2*]

[*Leibniz*]

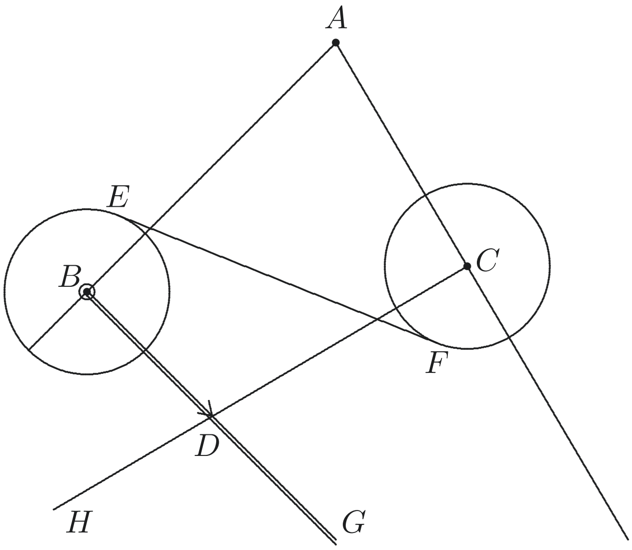
April. 1675



[*Fig. 4*]

Linea curva a Domino Osannam mihi proposita; describenda ita ut sumto in ea puncto D. recta inde ducta ad puncta data B. C. faciat angulum ad rectas AB, AC. aequalem. Hactenus ille.

4 *Fig. 4*: Leibniz hat den oberen Kurvenbogen irrtümlich von A nach C gezogen statt von A nach B. 6 puncto D: s. u. Fig. 5.



[*Fig. 5*]

Describi sic facile faciemus modo a me invento, quo facile describentur infinitae aliae.

Si sint duae Trochleae aequales BE. CF. chorda EF connexae in quarum una fixa regula BDG in altera regula CDH. Trochlea E in unam partem acta, manu ipsam regulam BG. impellente, ipsa CDH ibit in partes contrarias ob chordam EF transversam atque circumligatam ipsi CF, et in ea pariter atque in E, fixam, eundem autem angulum facient semper ad AB et AC, ob motus uniformitatem, posito trochleas esse aequales, et primum angulum fuisse aequalem. Jam una regula super alia ita incedens, ut eam non tangat, impellet super ea ductile punctum, vel stylum, qui describet curvam quaesitam. Si velis angulos non esse eosdem, sed dato differre intervallo, facies ut ab initio eo different intervallo, de caetero ob motus uniformitatem different semper. Quodsi velis ut data sit semper angulorum ratio, efficies data ratione Magnitudinis trochlearum, eadem cum ratione angulorum ab initio. Potes etiam efficere ut data sit ratio post aliquod ademtum ab alterutro. Item ut ratio certo modo mutetur ope fusi (*fusée*) uni vel utrique trochleae applicati.

2 modo ... aliae *erg.* *L* 4 acta, *(1)* trochlea F per *(2)* manu *L* 6 f. autem | ob motus uniformitatem *ändert Hrsg.* | facient *L* 12 Magnitudinis *(1)* chordarum *(2)* trochlearum *L*

52. DESCRIPTIO PARABOLAE PER PUNCTA EX CHORDIS CIRCULI
[September 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIV 1 Bl. 42. 1 Zettel ca 16,7 × 10 cm. Obere Kante geschwungen. 2 S.
Cc 2, Nr. 1081

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für September 1675 belegt.

D e s c r i p t i o   p a r a b o l a e   p e r   p u n c t a   e x   c h o r d i s   c i r c u l i

$$\begin{array}{rr} & x \\ +2a & -x \\ \hline +2ax & -x^2 \end{array}$$

a. $2a \sqcap A[D]$. $BE \sqcap AC \sqcap z$. Curva AE. parabola. $BC \sqcap y$. $AB \sqcap x$. $y^2 \sqcap +2ax - x^2$. $y^2 \sqcap 2ax - x^2$. $2ax\boxed{-x^2, +x^2} \sqcap z^2$. $2ax \sqcap z^2$.

Sed quia ita ordinatae parabolae haberi non possunt, quae sunt diametro circuli majores: ideo aliis modis describetur parabola etiam; sumto puncto extra Circulum DF ut A ductisque ordinatis HG. ad sinus versos DG junctisque AH quae erunt applicatae parabolae. $a^2 + 2bx\boxed{+x^2} + 2bx\boxed{-x^2} \sqcap z^2$ fiet $a^2 + \underset{2b.}{2a}x \sqcap z^2$.

---

7 *In der linken oberen Ecke, teilweise abgeschnitten, als Spalten geschrieben:*

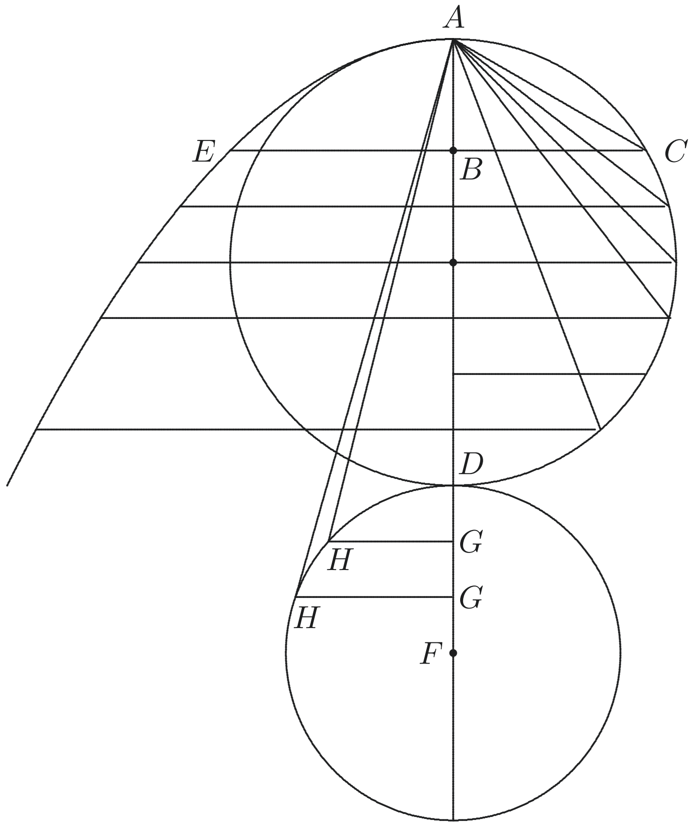
$$\begin{array}{cccccc} \langle\frac{1}{1}\rangle & \langle\frac{1}{3}\rangle & \langle\frac{1}{6}\rangle & \langle\frac{1}{10}\rangle & \frac{1}{15} & \frac{1}{21} \\ \frac{1}{1} & \frac{1}{4} & \frac{1}{10} & \frac{1}{20} & & \end{array}$$

Daneben: 409

9 $y^2 \sqcap$ *darunter* $\sqcap$ $\sqcap$ *gestr. L*   13 a^2 *(1)* $+2ax\boxed{+x^2}+2ax\boxed{-x^2} \sqcap z^2$ fiet a^2+4ax *(2)* $+2bx$ *L*

---

13 Leibniz hat die fehlerhafte Rechnung nur unvollständig korrigiert. Sein Ergebnis folgt aus dem Ansatz $AD = a$, $DF = b$, $DG = x$, $AH = z$.



[*Fig. 1*]

[*Zusatz auf der Rückseite*]

Verte[:] Pro iis quae notavi hodie circa modum describendi parabolam per rectas ex circulo sumtas: Hoc nunc adjicio. Unius circuli ope omnium parabolarum ordinatas in numeris reperiri posse. Nimirum sit Circulus satis magnus ut scilicet diameter ejus sit major maxima ordinata qua opus habemus, parabolae datae. Jam dati circuli chordae facile habentur ex sinubus quae sunt ordinatae parabolae; alterius idem cum circuli diametro latus rectum duplum habentis. Ergo hinc statim et ordinatae datae parabolae habentur, quia sunt in subduplicata ratione laterum rectorum duplorum.

4 sumtas: *(1)* Et inveniendi *(a)* eius *(b)* parabolae *(2)* Hoc *L* 6 f. circuli *(1)* sinus recti fa *(2)* chordae *L* 9 duplorum. *Darunter*: Mons. j'ay achevé aujour *gestr.* *L*

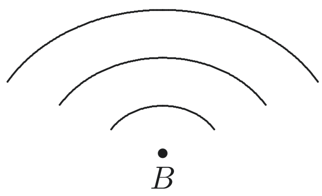
53. FIGURA SIMILIS SEU PARALLELA
[Erste Hälfte Oktober 1675 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 220. 1 Bl. von max. 12 × 13 cm. Oben und rechts unregelmäßige Schnittkanten. 1 S.
Cc 2, Nr. 1072

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück dürfte kurz vor der Studie N. 54 entstanden sein, in der Leibniz die Problemstellung wieder aufgreift.

F i g u r a   s i m i l i s   s e u   p a r a l l e l a

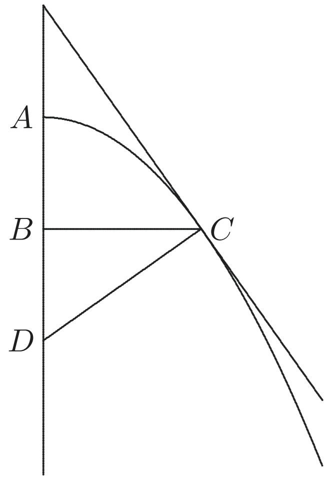
Nova quaedam contemplatio de figuris. Miror mecum saepe, et cogito quod possit intelligi quaelibet figura data utcunque irregularis contrahi in spatium minus, ut si in linea recta longius ab ea recedas, et rursus in minus etc. donec in punctum concurrat.



[*Fig. 1*]

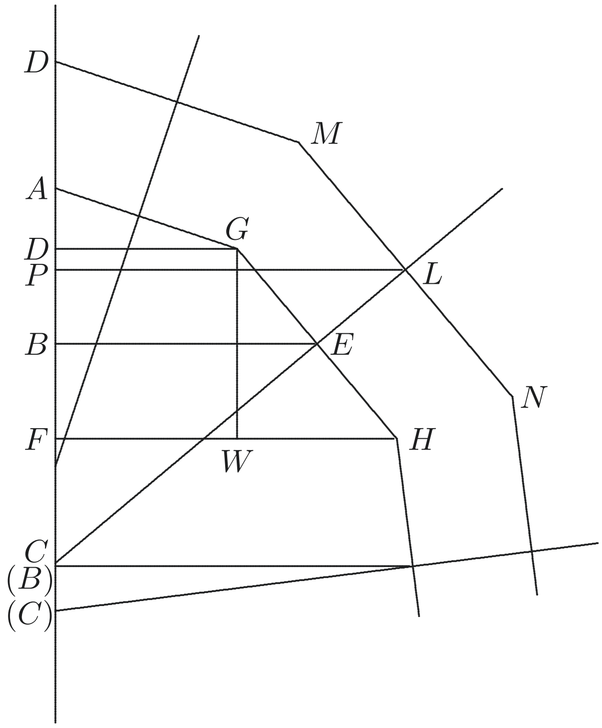
Determinandum jam est punctum, sive ejus locus, in quem redigi videbatur figura, si in linea recta ab ea recedas. Et hoc punctum determinandum pro quolibet situ. Ita si vitra fingas augentia speciem servatu similitudine. An cuilibet constitui possit simile, minus ita arbitror. Quod si jam illud simile minus inscribatur, quaeritur an semper continuata inscriptione ad aliquod centrum perveniatur, et ubi sit illud, et quis sit pro qualibet curva inscribendi modus.

8 F i g u r a ... p a r a l l e l a *erg. L*   13 punctum *(1)* B in *(2)*, sive *L*



[*Fig. 2*]

$AB \sqcap x$. $2ax \sqcap BC^2$. $BD \sqcap a$. Describatur alia curva, talis, ut producta priori perpendicularis sit etiam huic perpendicularis. Videamus qualis inde oriatur curva, et an ex his nova lux ad quadraturas.



[*Fig. 3*]

$AB \sqcap x$. $BE \sqcap y$. $BC \sqcap a$. $y \sqcap \sqrt{2ax}$. DF infinite parva $\sqcap \beta$. Erit FH sive $(y) \sqcap \sqrt{2ax+2a\beta}$. et differentia erit $\sqrt{2ax+2a\beta} - \sqrt{2ax} \sqcap z$ sive $\underset{4}{\boxed{2}}ax + 2a\beta$, $\boxed{+2ax} - 2\sqrt{4a^2x^2+4a^2\beta x} \sqcap z^2$. sive $4ax + 2a\beta - z^2 \sqcap 2\sqrt{\ldots}$, sive:

$$\underset{/}{\boxed{16a^2x^2}}\ \underset{//}{\boxed{+16a^2\beta x}} - 8az^2x, +4a^2\beta^2\ \underset{///}{\boxed{-8a\beta z^2 + z^4}} \sqcap \underset{/}{\boxed{16a^2x^2}}\ \underset{//}{\boxed{+16a^2\beta x}}$$ et fiet:

$a\beta^2 \sqcap 2z^2x$, adeoque $z \sqcap \sqrt{\dfrac{a\beta^2}{2x}} \sqcap WH$. et $GH \sqcap \sqrt{\beta^2 + \beta^2\dfrac{a}{2x}}$. Producta jam quantumlibet perpendiculari CE, et in ea sumta $EL \sqcap \omega$, ponendo E. esse medium punctum ipsius GH. et posita MN parallela GH. ita ut punctum medium ipsius MN sit L. erit $\dfrac{MN}{GH} \sqcap \dfrac{CL}{CE}$. Jam $\dfrac{CL \sqcap \sqrt{2ax+a^2}+\omega}{CE \sqcap \sqrt{2ax+a^2} \sqcap s}$. $\dfrac{PC}{a} \sqcap \dfrac{PL}{y}$. et CL [*bricht ab*]

8 *Darunter:* Vide hoc melius alibi.

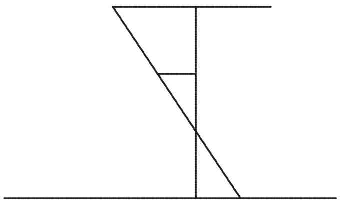
2 $\sqcap$ z *(1)* sive *(a)* $\boxed{2}$ax + 2a$\beta$$\boxed{+2ax}$ *(b)* 4ax + 2aβ − $2\sqrt{4a^2x^2+4a^2\beta x} \sqcap z^2$. adeoqve *(aa)* 2a *(bb)* $4a^2\beta^2 + z^4 - 2a\beta z^2 \sqcap 16a^2x^2 + 16a^2\beta x$. $16a^2x^2 + 16a^2\beta x - 8a$ *(2)* sive *L* 5 $\sqcap$ WH. *(1)* sit jam linea EL *(2)* et GH $\sqcap$ | $\sqrt{\beta^2 + \beta\sqrt{\frac{a}{x}}}$ *ändert Hrsg.* |. *(a)* jam EL sit ω. et *(b)* producta *(aa)* scilicet *(bb)* jam *L* 6 ponendo *(1)* G esse medium *(2)* E. esse *L* 7 ut *(1)* eius *nicht gestr.* *(2)* punctum *L* 8 $\dfrac{CL \sqcap \sqrt{2ax+a^2}+\omega}{CE \sqcap \sqrt{2ax+a^2} \sqcap s}$ *(1)* LP $\sqcap s + \omega \frown$ BC *(2)* $\dfrac{PC}{a}$ *L*

1 DF: Leibniz rechnet im Folgenden inkonsequent mit dem Ansatz $AD = x$, $DG = y$. 4 $-8a\beta z^2$: Richtig wäre $-4a\beta z^2$. Durch die Streichung der Terme mit höherer Dimension der infinitesimalen Größen β und z wirkt sich das Versehen nicht aus. 9 alibi: vgl. N. 54.

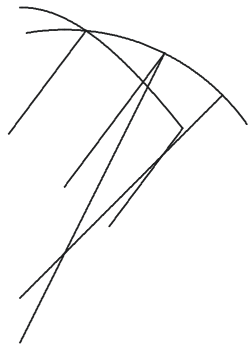
54. DE CURVAE SIMILIS CONSTRUCTIONE
15. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 223. 1 Bl. 2°. $1\frac{1}{4}$ S.
Cc 2, Nr. 1071

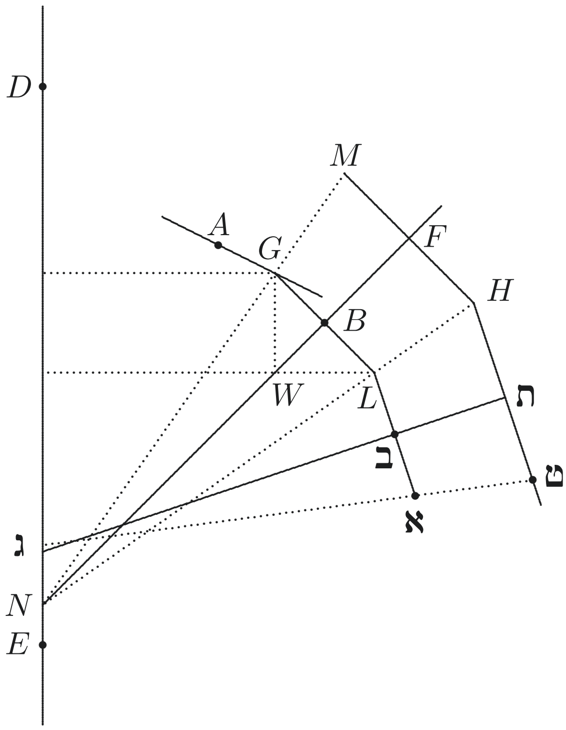
15 Octob. 1675.



[*Fig. 1a*]



[*Fig. 1b*]



[*Fig. 1c*]

Curva ABב ad rectam DE data est; huic aliam similem describere volumus, talem scilicet ut recta uni perpendicularis producta sit etiam alteri perpendicularis. Cum curva quaelibet sit portio peripheriae polygoni infinitanguli ponatur ejus latus unum esse GL. cujus medium punctum B. Educatur perpendicularis BF, occurrens ipsi rectae datae in F. In ea producta versus [HM] sumta BF qualibet, transeat per F, ipsa HM parallela ipsi GL. Producatur BF dum occurrat ipsi DE in N. et junctae NG, NL producantur dum occurrant rectae HM in punctis M. H. et erit MH latus unum polygoni similis quaesiti. Alia latera quaesiti invenientur si sumto latere sequente dati, Lא cujus medium punctum ב. Ducta rursus perpendicularis בג producatur donec occurrat in ח parallelae ipsius Lא transeunti per א, ubi sciendum non posse duci rectam גLH, ob ductam NLH. Sufficit ergo quia habemus jam H. definire ט alterum punctum ductae rectae טאג. Unde non fiet חט $\sqcap$ Hח. et si aliter definissemus in progressu habituri fuissemus remota a se invicem latera dati et circumscribendi.

Aliter ita repraesentabitur, quia non video necessariam bisectionem, sit polygonum datum $EGLD$ fig. 2. Ad EG perpendicularis GC, ad GL, erit perp. LF[,] ad LD erit DH. Sit recta $AHFC$, ad quam omnia curvae puncta referantur. In quam ex punctis G, L. demittantur ordinatae GP, LQ, quarum differentia WL. Sit $AP \sqcap x$. $PQ \sqcap \beta$. $GP \sqcap y$. Aequatio curvae naturam explicans etc. $-y^2 + bx^2 + cx - ey + fyx + g \sqcap 0$.

---

2 *Darüber:* Non est similis.

19 *Nebenbetrachtung:* $y^2 \sqcap a^2 - x^2$. $y^2 \sqcap 2ax - x^2$, $y^2 \sqcap 2al - 2xl$ et $l \sqcap \dfrac{y^2}{2a - 2x}$.

1 | Sit *nicht gestr.* | Curva | ABC *ändert Hrsg.* | ad *L* 6 ea *(1)* producta (vel si placet reducta *(2)* producta *L* 7 GL *(1)* | ita *nicht gestr.* | ut F *(2)* in qva puncto M sumto, qvibus *(3)* producatur *L* 8 f. latus | unum *erg.* | polygoni *(1)* futurae *(2)* similis qvaesiti. *(a)* Jam ut aliud adhuc latus *(b)* Alia latera | qvaesiti *erg.* | invenientur *L* 9 dati, | Bא *ändert Hrsg.* | cuius *L* 18 GP, | WQ *ändert Hrsg.* | , qvarum *L*

---

21 $y^2 \sqcap 2al - 2xl$: Richtig wäre $2y^2 = 2al - 2xl$ und somit $l = \dfrac{y^2}{a - x}$.

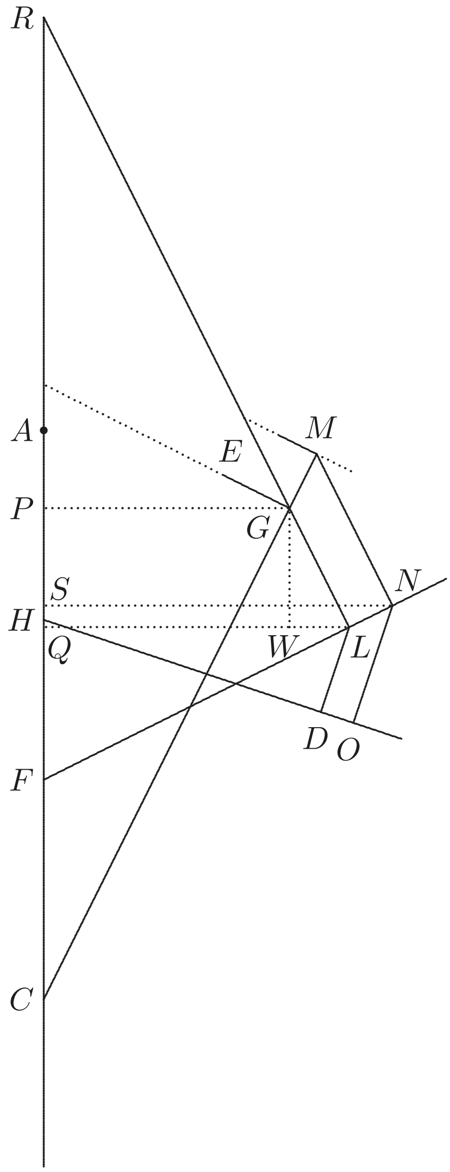


fig. 2.

Scribatur: $2blx + 2cl + fyl \sqcap 2y^2 + ey + fyx$. Adeoque fiet: $\dfrac{2y^2 + ey + fx}{2bx + 2c + fy} \sqcap l \sqcap RQ$. ponendo R esse punctum ubi LG producta occurrit ipsi AP. et erit $WL \sqcap \beta\dfrac{y}{l}$. Producatur

2 Scribatur: Richtig wäre der Ansatz $2blx + cl + fyl = 2y^2 + ey - fyx$. Hinzu kommt ein weiteres Versehen bei der Bestimmung der Subtangente l.

CG in *M*. Sit *GM* ⊓ *ω*. Producantur et *FLN*, *HDO*. ducanturque *MN* parallela *GL*. et *NO* parallela *LD*. Quando *H*. *F*. *C*. non sunt idem punctum; si scilicet continuetur inscriptio ultra punctum intersectionis perpendicularium, tunc enim concavam partem priori convexae invertere incipiet ab ea parte. Ultra punctum concursus duarum extremarum curvae portionis, perpendicularium, non potest continuari inscriptio; in curvis caeteris excepto circulo; non detur unum punctum ubi tota inscriptio desinat, seu dari potest magnitudo tam parva, ut in ea non possit datae figurae inscribi similis. Non igitur ut in circulo, ita et in caeteris datur minima figura inscriptibilis cujus ratio manifeste apparet ex fig. 3.

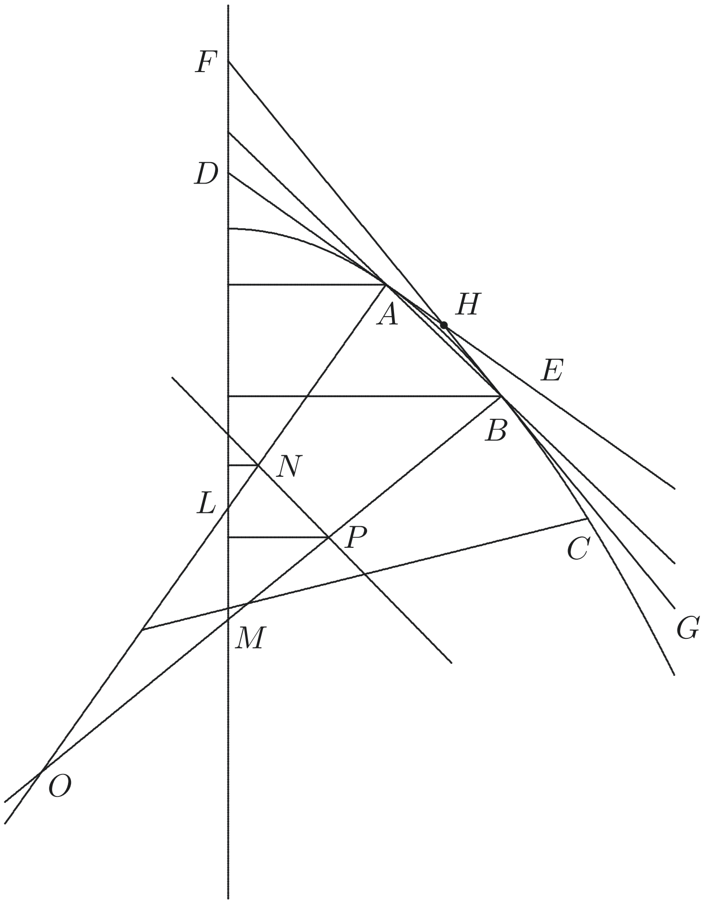


fig. 3.

2 LD. *(1)* Demonstrari ante omnia potest non esse semper eandem curvae speciem, *(2)* qvando *L*

Non igitur datur centrum similitudinis sive diminutionis. Quod ergo an non datur figura quantumvis parva datae similis? Mirum hoc si verum. Videndum jam qualis naturae sit curva ista inscripta vel circumscripta an necessario ejusdem speciei cum data. Sumamus parabolam in exemplum redeamusque ad fig. 2.

$AP \sqcap x$. $PG \sqcap \sqrt{2ax}$. $AQ \sqcap x+\beta$. $WL \sqcap z$. $PQ \sqcap \beta$. $QL \sqcap y+z$. $z \sqcap \sqrt{2ax+2a\beta} - \sqrt{2ax}$. $z^2 \sqcap \underset{2\,.\,.}{2ax} + 2a\beta, \boxed{+2ax} - \sqrt{16a^2x^2+16a^2\beta x}$. $4ax+2a\beta - z^2 \sqcap 4a\sqrt{x^2+\beta x}$. et quadrando: $\boxed{16a^2x^2}\boxed{+16a^2\beta x} - 8axz^2, +4a^2\beta^2 - 4a\beta z^2 + z^4 \sqcap \boxed{16a^2x^2}\boxed{+16a^2\beta x}$ fiet $2xz^2 \sqcap a\beta^2$.

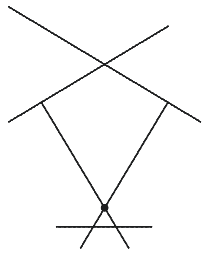
Difficultas in tali constructione, fig. 2. quod scilicet semper deminuetur distantia, ut LN necessario minor quam GM. et DO minor quam LN, ut adeo ad descriptionem curvae circumscribendae hanc progressionem adhibere opus sit quae forte satis difficilis erit. Unde si quis inciperet non a parte E. sed a parte D. contrarium eveniret. Non est ergo haec vera circumscriptio figurae similis. Interim si ejusmodi figura circumscribenda describi posset, continuatis continue circumscriptionibus, deduci poterunt praeclara theoremata de quadratura spatii; inter datam et circumscriptam vel inscriptam ultimam comprehensi.

Similia sunt quae sola magnitudine differunt. Videtur autem cuilibet figurae alteri similis describi posse, sed non puto ei describi posse similiter positam.

Si in perpendicularibus suma[n]tur aequidistantes, ut in fig. 3. erunt duae figurae invicem parallelae, an autem sint similes.

Sint in fig. 3. curvae ABC duo puncta A. B. intervallo infinite parvo dissita: Recta tangens in A, sit DAE. et recta tangens in G sit FBG. Concurrent DE et FG in puncto H. ita ut AHB sit portio polygoni circumscripti, etsi AH, et HB non sint aequales. Juncta AB. erit latus polygoni inscripti. AL et BM perpendicularibus ad tangentes in A, et B. sumantur AN, et BP aequales et jungatur NP, quae erit tangens curvae quaesitae, parallelae, seu aequidistantis, sed ea non erit parallela ipsi AB nisi anguli NAB, PBA sint aequales; quod non fiet nisi A et B a puncto concursus perpendicularium O aequidistent seu sint aequales.

1 datur |centrum *nicht gestr.*| centrum *L* 14 circumscriptionibus, *(1)* semper haberi poterit qvadratura spatii *(2)* deduci *L* 24 inscripti. *(1)* Omnia erunt contraria si non |in *nicht gestr.*| perpendicu *(2)* AL *L*



[*Fig. 4*]

Sed quid si dicas nos punctum B tale eligere posse, ut AO et BO sint aequales. Fateor. Sed videndum an tunc AB futura sit infinite parva, et si possit esse infinite parva, poterimus hoc modo describere curvam datae simul et similem et parallelam, quod magni foret momenti, et noverimus saltem rem succedere pro curvis, ubi id fieri potest; si necesse sit esse determinatam quantitatem ordinariae magnitudinis, si possit sumi valde parva, mechanice ejus ope describi poterit parallela et similis. Videndum an in solo circulo possit esse infinite parva, et non puto, quia Circulus non tantum requirit ut AO et BO sint aequales, sed et ut aliae omnes concurrant in eodem puncto O.

Similes sunt figurae quae sola magnitudine differunt. Similiter positae sunt figurae, quarum latera respondentia parallela sunt. Respondentia sunt quae certo quodam ordine ad se invicem referuntur; cujus ordinis varii modi. Similes et similiter positae sunt quarum latera homologa sunt parallela. Quanquam forte hoc potius sit theorema quam definitio. Similes figuras habere latera proportionalia, est ipsorum definitioni consentaneum; quia scilicet sola magnitudine et loco differunt. Simillima sunt quae solo loco ac tempore differunt; quae seipsis dignosci non possunt, sed loco ac tempore, id est vicinia atque ordine.

Mirum satis circa tangentes. Cum quaeruntur ponimus tangentem curvae (fig. 3.) esse AB. cum inventae sunt possumus ponere tangentem esse DA. dissimulata priore suppositione, et calculare ad inveniendam NP. et alia hujusmodi. Videnda sunt quae Stevinus habet in Geometria, de principis Mauritii methodo ac sua, describendi lineas datis similes et parallelas.

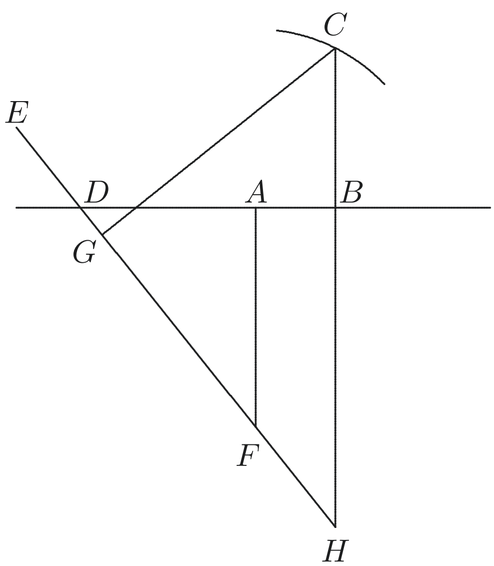
10 sunt | magnitudines *ändert Hrsg.* | qvae *L* 14 Similes *(1)* qvantitates *(2)* figuras *L* 15 et loco *erg. L* 16 est *(1)* iis *(2)* vicinorum ordine, aut praecede *(3)* vicinia *L*

21 habet: vgl. S. STEVIN, *Les oeuvres mathematiques*, 1634, S. 351 f.

55. DE VARIATIONE AEQUATIONIS CURVAE
[Mitte bis Ende Oktober 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 1 Bl. 408–409. Rest eines Bog. 2°: Von Bl. 408 fehlt oben ein Ausschnitt von ca 20 × 18,5 cm, im unteren Drittel ein Streifen von ca 17,5 × 1,5 cm; von Bl. 409 fehlt unten ein Streifen von ca 19,5 × 4 cm. Jeweils $\frac{1}{8}$ S. unten auf Bl. 408 r° u. v°. — Darüber auf Bl. 408 r° Aufzeichnungen zu einem algebraischen Instrument (Cc 2, Nr. 1069, Druck in Band VII, 8), auf Bl. 408 v° gegenläufig Aufzeichnung zur Gleichungslösung (Cc 2, Nr. 00, Druck in Band VII, 8). Auf dem Rest des Trägers VII, 5 N. 33 u. VII, 6 N. 10.
Cc 2, Nr. 1070

Datierungsgründe: Der Text des vorliegenden Stücks wurde von Leibniz nach den gegenläufigen Aufzeichnungen zur Gleichungslösung und den in VII, 6 N. 10 gedruckten Notizen sowie vermutlich kurz nach der auf den 11. Oktober 1675 datierten Studie VII, 5 N. 33 verfasst.



[*Fig. 1*]

Datis positione rectis AB. et EH. adeoque earum puncto concursus D. et in alterutra puncto uno ut A, dabitur DA quam vocemus a. et AF (posito angulo DAF recto, quae occurrat ipsi DH in F.) dabitur et esto b. Sumto in curva puncto C. quolibet inde demittatur perpendicularis CB; quam vocemus y. et ipsam AB vocemus x. Et posita AB abscissa, CB. ordinata habebitur ex natura curvae relatio inter x. et y.

aequatione expressa; ponamus vero puncta curvae non ad rectam AB, sed ad rectam EF, referri, ita ut abscissae sumantur inde a puncto concursus duarum rectarum positione datarum, D, erit DG abscissa, CG ordinata, et appellando $DG \sqcap z$. et $CG \sqcap v$. fiet $z \sqcap \dfrac{a^2 + ax - by}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. et $CG \sqcap v \sqcap \dfrac{ab + bx + ay}{\sqrt{a^2 + b^2}}$; quemadmodum jam calculavit Schotenius, in *Com.* ad lib. 2. *Geom.* Cartes. pag. 177. Sed quoniam nihil necesse est abscissam per CG. incipere a D. puncto concursus et esse DG. ideo sumto E. in recta DG. ubicunque et abscissis positis EG. ponendo $ED \sqcap c$. erit $EG \sqcap v + c$, vel $v - c$, vel $c - v$. Sed nos quia signorum rationem hic non habemus, vocemus EG generaliter $v + c \sqcap \omega$. et fiet: $\omega \sqcap \dfrac{\begin{array}{l} +ab \qquad +bx \quad +ay \\ -c\sqrt{a^2+b^2} \end{array}}{\sqrt{a^2 + b^2}}$. Quod si ergo ope harum duarum aequationum inveniamus valores ipsarum y et x eosque in aequatione ad curvam datam inseramus. Habebimus in ea duas tantum incognitas z et ω et aequationem pro data curva quantumlibet variatam. Unde patet in varianda curva non nisi tres arbitrarias a. b. c. intervenire posse. Et si aequationem datam variemus explicando incognitas per seipsas mutuo simul et per cognitas poterit variatio ex calculo ducta auferri varietati ex lineis ductae. Etsi enim calculus majorem quam lineae varietatem permittere intelligatur, id tamen sic intelligendum est, quod possint intelligi ordinatae tam priores quam posteriores alium facere angulum quam rectum sed sufficit tamen unum ex ipsis esse rectum. Caeterum possunt et aliae intelligi relationes linearum ad lineas, ut quae sint convergentes; ad idem punctum quae vel ad ordinatas quasdam, vel ad abscissas, vel ad alias convergentes referri possunt. Et hae convergentes vel utraeque, vel alterutrae ad curvam ipsam. Unum autem, necesse est interim lineas illas tales esse, ut ad eas opus sit descriptione curvae, ita tamen ut tangentibus curvae, seu applicatione curvae ad planum, aut filum opus non sit. Nota si omnes hae relationes enumerari possent haberemus omnium constructionum possibilium formas.

---

4 calculavit: Fr. van SCHOOTEN, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178. Leibniz übernimmt die Figur samt Punktbezeichnungen mit geringfügigen Änderungen; vgl. auch N. 50. 7 $EG \sqcap v + c$: Richtig wäre im Folgenden z anstelle von v; Leibniz berechnet schließlich $\omega = v - c$ statt $\omega = z + c$.

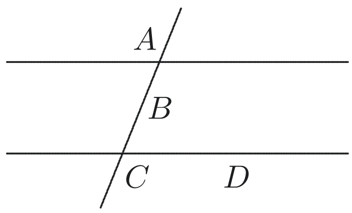
56. CALCULUS ET CONSTRUCTIO
20. Oktober 1675

Überlieferung: *L* Insgesamt gestrichenes Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 16. Der Länge nach ungefähr halbiertes Bl. 2°, ca 35 × 13 cm, links relativ glatte, rechts unregelmäßige Schnittkante. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 16 v°. Auf Bl. 16 r° Cc 2, Nr. 1079 (*LKK* 2, 1976, S. 49–51; Druck in Band VII, 8). — Gedr.: *LKK* 2, 1976, S. 51 f.
Cc 2, Nr. 1080

20. Octob. 1675

C a l c u l u s e t C o n s t r u c t i o

Geometria facit, ut saepe de illis ratiocinemur quae alioqui calculi non videntur capacia, ut nota sectio anguli generalis; vel rationis: item differentia serierum in genere.

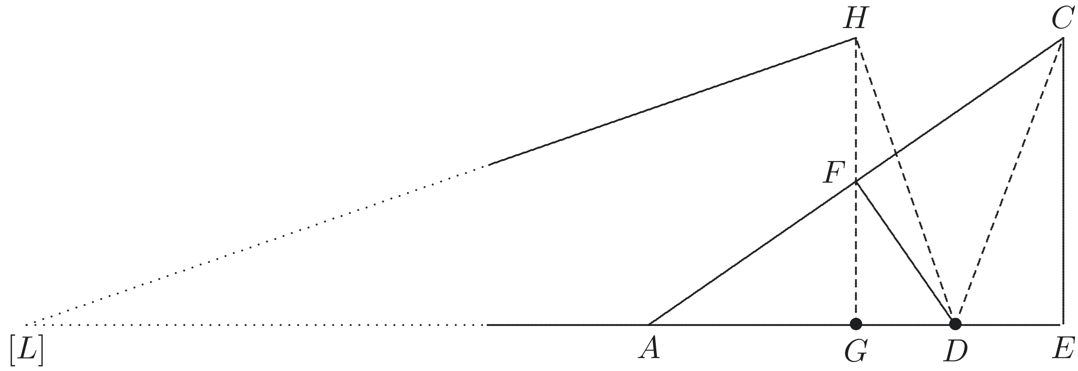


[*Fig. 1*]

Quaedam motu facile demonstrantur, ut parallelas lineas seu aequidistantes eundem facere angulum cum eadem recta, ait P. Fabri demonstrari posse per motum, si angulus BCD moveatur versus A.

8 f. 20. . . . C o n s t r u c t i o *erg. L* 11 nota | sectionis *ändert Hrsg.* | anguli *L* 15–555,2 versus A. | *(1)* lineam *(2)* dato puncto C *(3)* datis . . . A *erg.* | Invenire *L*

14 Fabri: H. Fabri, *Synopsis geometrica*, 1669, S. 83.



[*Fig. 2*]

Datis punctis C et A invenire punctum D talem, ut in linea ADE AD et DC lineae sint aequales. Juncta AC, et bisecta in F perpendicularis FD occurret rectae AD in puncto quaesito D. Si calculo quaesiissemus, fuisset: $AD \sqcap x$. $AE \sqcap a$. $DE \sqcap a - x$. $CE \sqcap b$. Fiet: $\sqrt{b^2 + a^2 - 2ax + x^2} \sqcap x$ adeoque fiet: $b^2 + a^2 - 2ax \boxed{+x^2} \sqcap \boxed{x^2}$ et $x \sqcap \dfrac{b^2 + a^2}{2a} \sqcap \dfrac{b^2}{2a} + \dfrac{a}{2}$.

Constructio ex calculo haec sequetur, bisecetur AE in G et ipsi AG addatur recta GD quae sit ad b, ut b est ad $2a$. Nempe erigatur ex G ipsa GH aequalis ipsi EC, et ex G sumta versus A ipsa $GL \sqcap$ ipsius AE dupla, vel sumta AL ipsius AG tripla, junctaque LH, perpendicularis HD occurrit lineae AE in puncto D. Haec constructio calculo inventa, diversissima a naturali praebet nobis theorema, cujus ope in exiguo campo ad lineas satis magnas inveniamus tertias proportionales, nempe non ipsa $2a$, sed ipsa $\dfrac{b}{2}$ utendum est,

2 in linea ADE *erg. L* 3 aeqvales *(1)* junctis AC, ducatur *(2)* juncta *L* 4 D *erg. L* 6 f. $+\dfrac{\mathrm{a}}{2}$ *(1)* nempe in producta *(a)* AC *(b)* AE *(c)* EA, sumsissemus AE dimidiam nempe AG. *(2)* Nempe bisecetur AE *(3)* Constructio *L* 8 sit *(1)* ut *(2)* ad *L* 8 et ex *(1)* GH *(2)* G *L* 9 GL $\sqcap$ *(1)* 2 *(2)* ipsius *(a)* H *(b)* AE *L* 10 constructio *(1)* differe *(2)* a *(3)* calculo *L* 12 proportionales, *(1)* ut *(2)* nempe *L*

1 *Fig. 2*: Die Abbildung reicht unmittelbar an den von einer Schnittkante gebildeten Seitenrand; ihr mutmaßlich abgetrennter linker Teil ist sinngemäß durch die beiden gepunkteten Linien sowie die Bezeichnung des Punktes L ergänzt.

et erit GD ad $\frac{b}{2}$ ut b est [ad] a, id est ut $\frac{b}{2}$ est ad $\frac{a}{2}$. Et hoc nobis ostendit constructionem qua opus, tantum ergo calculo, hoc a situs natura artificium adhibendum est, ut scilicet media proportionalis, ita locetur, ut problema eas inveniendi postulat, et ita commoditas in eo est, quod ita simul utimur bis eadem linea $\frac{a}{2}$.

$x \sqcap \frac{a^2+b^2}{2a}$ reducitur in Geometria ad hoc problema, rectam ex puncto dato ducere quae rectam positione datam secet in dato intervallo a puncto in ea dato.

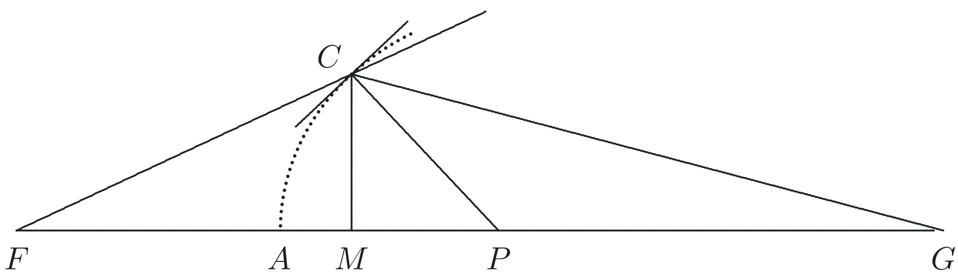
5 f. problema, *(1)* invenire rectam qvae *(2)* rectam ... ducere *(a)* ad rectam datam⟨, ita, ut⟩ aeqvalem *(b)* portioni ex puncto da *(c)* intervallo puncti *(aa)* concursus *(bb)* occursus et puncti alterius in recta data *(d)* qvae L 6 positione datam *erg.* L

57. DE OVALIBUS CARTESIANIS
[Ende Oktober – Anfang November 1675]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 V 12 Bl. 1. Fragment, ca 15 × 7,5 cm, linke Kante gerade, am oberen und unteren Rand unregelmäßig beschnitten, rechts spitz zulaufend (Teil 1). Rückseite leer. Zusammen mit LH 35 V 5 Bl. 3 (VII, 1 N. 33) und LH 35 XIII 1 Bl. 358 (VII, 1 N. 104) bildet es ein ganzes Blatt 2°. Dieses wiederum ist durch Halbierung eines Bogens entstanden, dessen andere Hälfte LH 35 VIII 30 Bl. 12 (r° gedr. als VII, 5 N. 45, v° gedr. als III, 1 N. 68) ist. Auch der von Leibniz durch eine Linie abgetrennte Bereich am oberen Rand und im linken Drittel des Fragments LH 35 V 5 Bl. 3 gehört teilweise zu unserem Stück (Teil 2). Hier finden sich zudem bislang nicht edierte Zusätze zu VII, 1 N. 33 u. zu ebd., N. 104.
Cc 2, Nr. 1422, 1454 tlw.

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papierbogens ist für Oktober bis Dezember 1675 belegt. Das Stück auf der Rückseite des abgeschnittenen Blattes — Notizen zu der als *linea Berthetiana* bezeichneten mathematischen Kurve — trägt das Datum 3. November 1675.

[*Teil 1*]

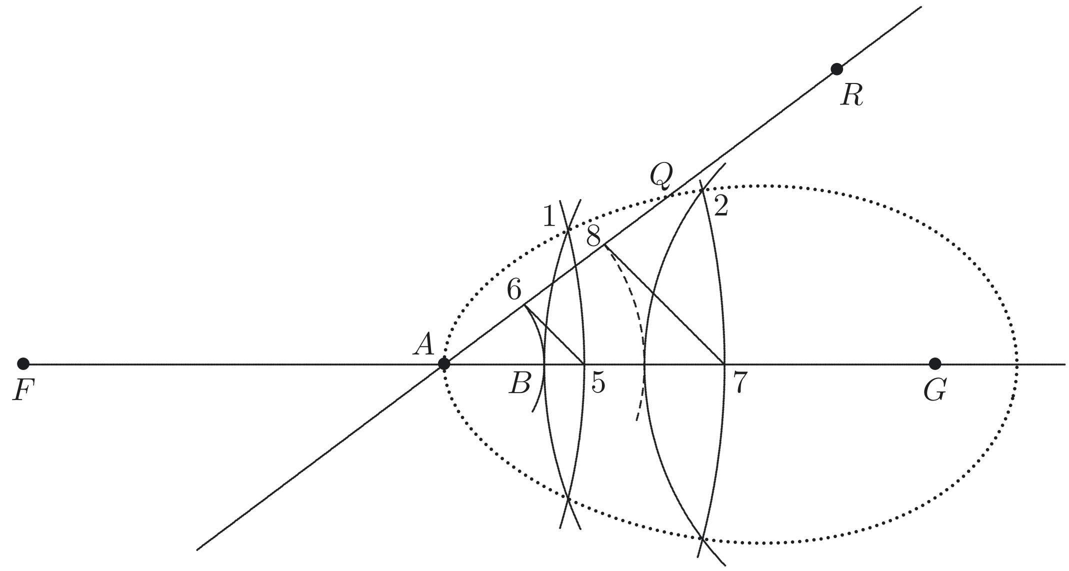


[*Fig. 1*]

17 *Fig. 1*: Vgl. die Figur in R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 43 (auch auf S. 48, 57 u. 58 abgedruckt). Leibniz lässt einige Details aus und ergänzt die in der Vorlage nicht enthaltene Tangente an *AC* in *C*. Descartes' Figur hatte Leibniz bereits in VII, 5 N. 4 (zu datieren auf Sommer 1674) u. VII, 5 N. 17 (aus dem Dezember 1674) dargestellt, dort aber jeweils vollständig.

$CF \sqcap FA + \frac{b}{a}\,\overline{GC - GA}$. Si $b \sqcap a$. erit $CF + GA \sqcap FA + GC$. $CF \sqcap FA + CG - GA$. Ergo $CFGC \sqcap 2FA + 2GC$. $FA - GA \sqcap CF - CG$.

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

$RA \sqcap AG$. $R6 \sqcap GB$. Ergo $AB \sqcap A6$.

---

1 $\overline{GC - GA}$: Hier liegt ein Vorzeichenfehler vor; Descartes' Erläuterungen zu seiner Figur (*a. a. O.*, S. 43) führen nämlich auf die Formel $CF = FA + \frac{b}{a}(GA - GC)$. Diese beschreibt die Descartes'schen Ovale der ersten Klasse. Die von Leibniz angegebene Formel beschreibt zwar ebenfalls Ovale, nämlich die von Descartes als herzförmig bezeichneten Ovale der dritten Klasse (vgl. *a. a. O.*, S. 52 f.); bei diesen liegen jedoch die beiden Brennpunkte F und G von A aus betrachtet auf derselben Seite der Achse. Mit den Cartesischen Ovalen hatte sich Leibniz bereits zuvor befasst; vgl. außer den oben erwähnten VII, 5 N. 4 u. 17 auch ebd., N. 3 u. 14. 1 $b \sqcap a$: In diesem Fall beschreibt die Gleichung kein Oval, sondern eine Hyperbel. Bei Korrektur des Vorzeichenfehlers erhält man eine Ellipse. 4 *Fig. 2*: Die Abbildung zeigt die geometrische Konstruktion eines Cartesischen Ovals der ersten Klasse nach Descartes, *a. a. O.*, S. 50 f. sowie S. 55. Wie Descartes in seiner Vorlage gelangt auch Leibniz dabei eher zu einer gewöhnlichen

[*Zusatz zu VII, 1 N. 104, S. 648 Z. 4 f.*]

$$b \sqcap y, \frown +b - y \sqcap yb - y^2$$

[*Zusatz zu VII, 1 N. 33, S. 206 Z. 21*]

$$\sqrt{2ax - x^2} \qquad \sqrt{[2]ax - \frac{a}{q}x^{[2]}}$$

Ellipse; die Figur ist hier seinen ungefähren Konstruktionsparametern folgend mathematisch richtig wiedergegeben. Leibniz ändert die Vorlage geringfügig ab; so ergänzt er den durch 6 und B verlaufenden Bogen des Kreises mit Mittelpunkt A. Den Bogen eines ebenfalls ergänzten analogen Kreises um A durch 8 zeichnet Leibniz dagegen nur in Blindtechnik ein (hier gestrichelt wiedergegeben). Er verwendet bei der Konstruktion noch eine Anzahl weiterer, hier nicht wiedergegebener Blindlinien, etwa einen Kreisbogen um A durch R und G sowie einige Geraden. 2 $b \sqcap$: Leibniz rechnet fortlaufend: *(1)* $b \sqcap y, +b - y$ *(2)* $y, \frown +b - y \sqcap yb - y^2$.

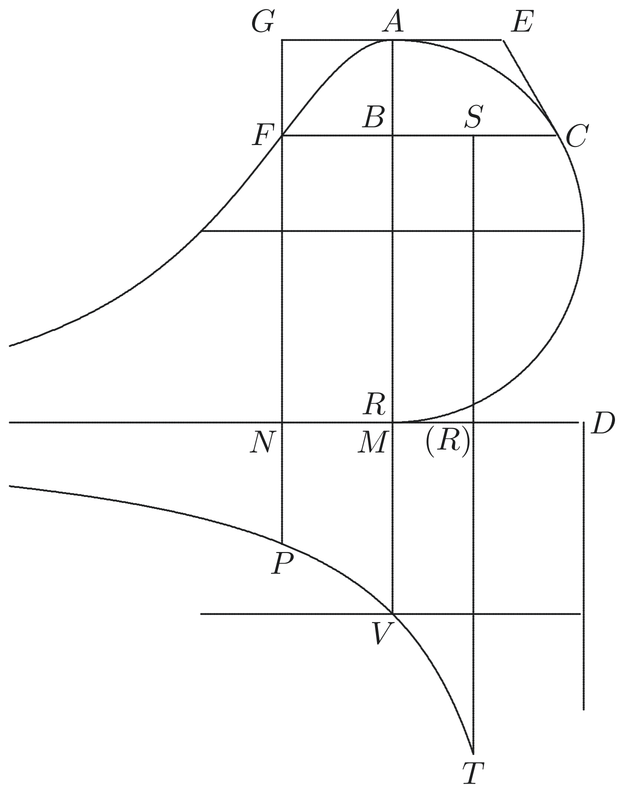
58. IMAGINARIAE USUS AD COMPARATIONEM CIRCULI ET HYPERBOLAE

29. November 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 46. 1 Zettel ca 19,5 × 10,8 cm. Linke Kante unregelmäßig, untere Kante leicht geschwungen. 1 S. auf Bl. 46 r°. Auf Bl. 46 v° fragmentarische Notizen mit binomischen Formeln (Druck in Band VII, 8).
Cc 2, Nr. 1134

29 Novemb. 1675

Imaginariae usus ad comparationem Circuli et Hyperbolae



[*Fig. 1*]

8–10 29 ... Hyperbolae *erg. L*

Certum est quantitates $\sqrt{-1}$. $\sqrt{-a^2}$, seu $a\sqrt{-1}$. $\sqrt{-ab}$ seu $\sqrt{ab}, \frown \sqrt{-1}$. non posse motu designari, adeoque non posse exhiberi, an tamen sint omnino nihil? Non ausim dicere. Ope earum habebimus et quasi Asymptotos in Circulo et Ellipsi. Inveni etiam ope earum haberi posse relationem Circuli et Hyperbolae; sed imaginariae sive indescriptibilis:

Si sit AC arcus circuli[,] diameter AR; AE, CE tangentes $\sqcap FB \sqcap AG$. Vocando radio a, $AG \sqcap z$. $GF \sqcap x$. erit $x \sqcap \dfrac{2az^2}{z^2+a^2}. \sqcap 2a - \dfrac{a^3}{z^2+a^2}$. Jam $z^2+a^2 \sqcap z + \sqrt{-a} \frown z - \sqrt{-a}$ et $MN \sqcap AG \sqcap z$ erit $FN[\sqcap]v \sqcap \dfrac{a^3}{z^2+a^2} \sqcap \dfrac{a^3}{z+\sqrt{-a}, \frown z - \sqrt{-a}}$. Vocemus $a \sqcap 1$. fietque $v \sqcap \dfrac{1}{z+\sqrt{-1}, \frown z-\sqrt{-1}}$. In producta NMD describatur centro D hyperbola, cujus potentia DMV sit -1[,] vertex V, et $DM \sqcap \sqrt{-1}$. Erit $DN \sqcap z+\sqrt{-1}$. et $M(R) \sqcap \sqrt{-1}, -z$ quia $MN \sqcap z$ et $N(R) \sqcap \sqrt{-1}$. Ergo spatiorum $VM(R)T$, et $VMNP$. differentiae cylinder sub $2\sqrt{-1}$. aequabitur cylindro omnium FN quibus habitis circulus habetur.

Haec ideo adduco ut exemplo ostendam quomodo saepe de factitiis ratiocinemur exemplo verorum. An autem quantitas $\sqrt{-1}$. sit omnino nihil, an vero contineat nescio quid discutiendum diligentius. Etsi enim non possit effici, potest tamen quodammodo intelligi, non seipsa sed ope characteris et analogiae, exemplo illius cogitationis quam caecam appello. Et vero quemadmodum sunt incommensurabiles quae sunt potentia commensurabiles, ita sunt imaginariae quarum potentiae sunt reales; seu impossibiles quarum quadrata sunt possibilia, ut $\sqrt{-1}$, cujus quadratum -1 etsi autem ponatur nihil omnino esse in natura tali quantitati respondens; sufficit tamen ejus characterem esse utilem, quia cum aliis junctus realia exprimit.

5 diameter | AB *ändert Hrsg.* | ; AE *L* 8 v $\sqcap \dfrac{1}{z+\sqrt{-1}, \frown z-\sqrt{-1}}$ *(1)* | Descripta ergo Hyperbola cuius *nicht gestr.* | *(a)* latus rectum sit *(b)* semi-latus rectum sit $\sqrt{-1}$ *(c)* | potentia sit -1 *nicht gestr.* | *(2)* in *L* 10 et | MR $\sqcap -$ z $- \sqrt{-1}$ *ändert Hrsg.* | qvia *L* 10 et | NR *ändert Hrsg.* | $\sqcap \sqrt{-1}$ *L* 10 spatiorum | VMRT *ändert Hrsg.* | , et *L*

6 $\dfrac{a^3}{z^2+a^2}$: Im Zähler fehlt der Faktor 2, in der folgenden Zerlegung müsste jeweils $\sqrt{-a^2}$ stehen. Leibniz rechnet konsequent weiter, die Versehen beeinträchtigen die Überlegung nicht grundsätzlich.

59. DE LOCIS
Ende 1675

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 315–316. 1 Bog. 2°. 4 S. Geringfügige Textverluste durch Papierschäden (Tintenfraß, brüchiger Rand) an Bl. 315 unten, anhand der Sicherheitsverfilmung ergänzt.
Cc 2, Nr. 1203_1

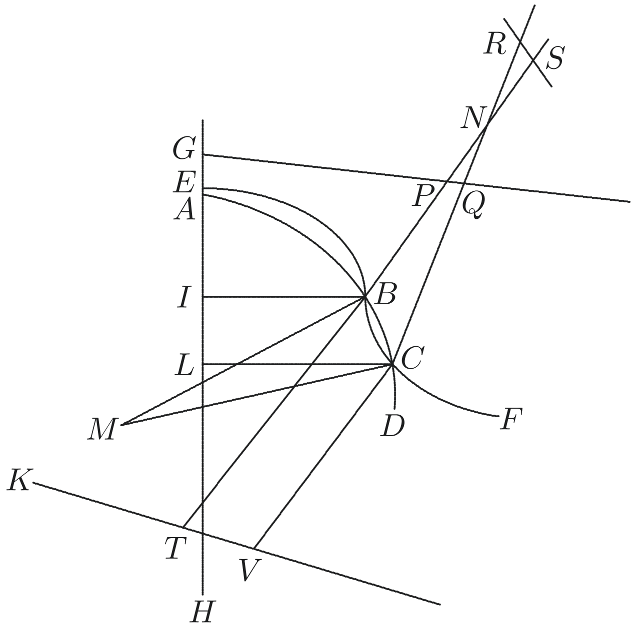
Fine anni 1675

De Locis

Doctrina de Locis mihi nondum satis generaliter tractata videtur, unde factum est, ut construendi ars quoque nondum perfecta sit: praeterquam enim quod communi Algebrae Calculo magnitudo a situ divellitur; cui remedium suo loco quaeremus, fit etiam ut cogamur Aequationes construere per ordinatas quae ex curvae punctis ad abscissas ducantur: quod saepe vim figuris facere et via minime naturali procedere cogit. Cum saepe alio applicatarum genere commodius reperiri possit exitus.

Sunt duae curvae $ABCD$ et $EBCF$ se secantes in punctis B, C. Ex punctis B, C ad rectam quandam positione datam vel sumtam ducantur inter se parallelae BI, CL, angulo GIB sive GLC dato vel sumto. Ex iisdem punctis B, C ad punctum quoddam positione datum vel sumtum ducantur rectae BM, CM. Et sumta GI vel GL parte directricis velut cognita et appellata x, investigetur inde valor ipsius BM vel CM, appellatae y, ex natura lineae, $ABCD$, deinde etiam ex naturae lineae $EBCF$, et habebuntur duae aequationes duarum earundem incognitarum, sive duo loca quorum intersectione solvi potest aliquod problema. Idem est si pro puncto M, sumtum sit N; sed et ponatur duas rectas BN vel CN convergentes in puncto N secari per rectam PQ, et non valorem ipsarum BN, vel CN, sed ipsarum BP, CQ quaeri, vel etiam ubi BN, et CN in puncto N concurrerint, ponantur divergere rursus; et secari a recta RS quaerunturque rursus non BN, CN, sed BS, CR.

13 saepe *(1)* ad *(2)* vim | figuras *ändert Hrsg.* | facere *L* 14 alio *(1)* ordinat *(2)* applicatarum *L* 16 vel sumtam *erg. L* 18 vel GL *erg. L* 19 et appellata x, *erg. L* 19 ipsius *(1)* BI vel CL, *(2)* BM vel CM, | appellatae y, *erg.* | ex *L* 22 sed | et *erg.* | ponatur duas *(1)* lineas etsi *(2)* rectas *L*



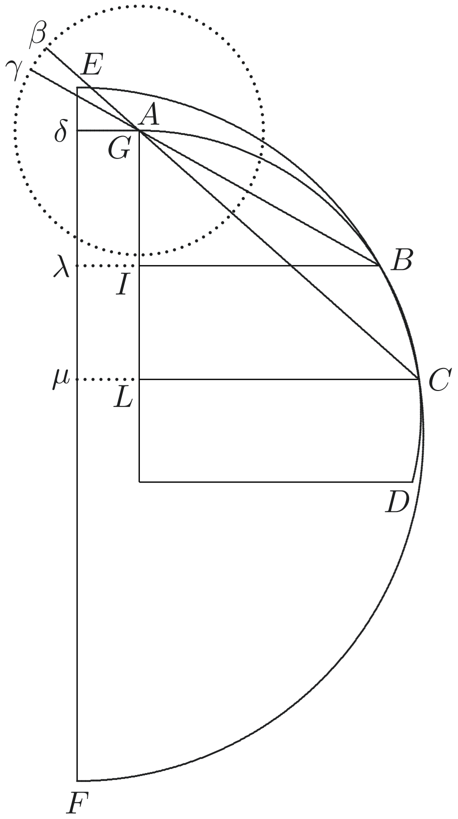
[*Fig. 1*]

Hactenus de rectis convergentibus eodem modo vero et parallelas inter se angulo dato rectae cuidam alteri quam directrici occurrentes examinare possumus; ut si sit recta quaelibet positione data TV, cui ex punctis B, C curvarum intersectionibus, occurrant rectae BT, CV inter se parallelae, et ipsarum BT, CV ex GI, GL investigetur valor. Hactenus applicatas convergentes vel parallelas investigavimus ex abscissis. Sed jam videndum an etiam convergentes ex convergentibus vel parallelis vel parallelae ex parallelis aliis aut convergentibus investigari possint; verbi gratia si IB, LC appellatis x, investigentur unde BT, CV. Quod si procedit poterunt et abscissae ex abscissis investigari, v. g. GI, GL ex KT, KV.

2 de *(1)* lineis *(2)* rectis convergentibus *(a)* superest, ut pa *(b)* eodem *L* 4 data *(1)* BT, *(2)* TV. *L* 5 ipsarum *(1)* BT ex GI, et CV ex *(2)* BT *L* 5 f. valor *(1)* Ultimum superest *(a)* deniqve *(b)* ut convergentes ex aliis convergentibus, vel parallelas ex convergentibus, vel parallelas ex aliis parallelis: vel deniqve abscissas ex *(2)* Hactenus | *(a)* ord *(b)* applicatas *erg.* | convergentes *L* 6 f. jam *(1)* video nihil prohibere si *(2)* videndum *L* 8 convergentibus *(1)* investigantur *(2)* investigari *L* 9 BT, | BV. *ändert Hrsg.* | qvod *L*

1 *Fig. 1*: Die Strecke CN ist in Leibniz' Skizze keine Gerade, was sein Text aber verlangt.

Denique videndum est an ex ipsis WP, WQ investigare liceat BP, CQ sed dubito an ob anguli diversitatem una eademque aequatione explicari queat relatio utraque: Unde nova occurret contemplatio, quomodo unum problema ad duas aequationes revocari queat ob diversas scilicet radices, res maximi si succederet momenti: et quomodo duae aequationes ad unum problema vel unam saltem constructionem revocari possint.



[*Fig. 2*]

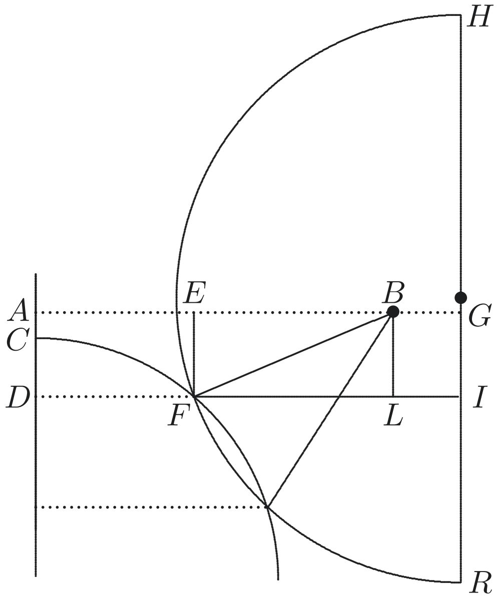
Esto $ABCD$ circulus. G et A coincidant, GI vel $GL \sqcap x$. Constat AB vel AC esse $\sqrt{2ax}$. Centro A intervallo quodam $A\beta$, vel $A\gamma \sqcap b$ describatur circulus et fiet γB vel $\beta C \sqcap b + \sqrt{2ax}$. Pone jam alium esse circulum $EBCF$ radio g qui priorem in duobus punctis B, C secet. $G\delta$ distantia diametrorum esto d, et $E\delta$ distantia verticum esto f.

1 ipsis *(1)* GP, GQ *(2)* WP, WQ *L* 1 sed *(1)* non *(2)* dubito *L* 7 vel GL *erg. L* 7 vel AC *erg. L* 8 $\sqcap$ b *erg. L* 8 f. vel βC *erg. L* 9 $\sqrt{2ax}$ *(1)* . et *(2)* | $\sqcap$ *nicht gestr.* | ⟨—⟩ *(3)* pone *L* 9 EBCF | *(1)* dia *(2)* radio g *erg.* | qvi *L*

Ex B vel C ducantur perpendiculares $B\lambda$, $C\mu$ in EF diametrum Circuli novi, priori diametro GI parallelam, erit $E\lambda \sqcap x + f$. Et $\lambda B \sqcap \sqrt{2gx + 2gf - x^2 - 2fx - f^2}$ et IB erit: $\lambda B - \lambda I$, seu $\lambda B - G\delta$, seu $\lambda B - d$, seu $\sqrt{2gx + 2gf - x^2 - 2fx - f^2} - d$ cujus quadrato addatur GI^2, vel x^2, fiet

$$2gx + 2gf \boxed{-x^2} - 2fx - f^2 - 2d\sqrt{2gx + 2gf - x^2 - 2fx - f^2} + d^2 \boxed{+x^2} \sqcap 2ax.$$

Unde patet additionem Epicycli inutilem fuisse, et aequationem inde effici non nisi planam, quae tamen utilis ad constructiones problematum compendiosas.



[*Fig. 3*]

---

8 *Allgemeine Betrachtung zu Fig. 3:* Loco ordinatae in diametrum poterat ordinata adhiberi ad rectangulum aliquod Circulo inscriptum: imo et obliqua, quae omnia Calculum mire augebunt.

8 *Zum rechten Kreisbogen in Fig. 3:* Nota: B non est Centrum.

1 ducantur *(1)* rectae in *(2)* perpendiculares Bλ, Cμ in *(a)* rect *(b)* EF *L* 2 erit | EI *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *(1)* x+d *(a)* | et *nicht gestr.* | $\lambda\beta$ *(b)* et λB erit $\sqrt{2gx - 2gd - x^2 - 2dx - d^2}$ *(2)* x+f et *(a)* λB^2 | erit *nicht gestr.* | $2gx + 2gf - x^2 - 2fx - f^2$ *(b)* λB $\sqcap$ $\sqrt{2gx + 2gf - x^2 - 2fx - f^2}$ *L* 4 qvadrato: *(1)* qvod est: *(2)* add⟨—⟩ *(3)* addatur GI^2, *(a)* vel ⟨x^2⟩ *(b)* vel x^2, *L*

$AB \sqcap b$. $CD \sqcap x$. $AC \sqcap d$. $EF \sqcap x+d$. $AE \sqcap \sqrt{2ax-x^2}$. Ergo $BE \sqcap b \ddagger \sqrt{2ax-x^2}$. Addantur $BE^2 \sqcap b^2 \ddagger 2b\sqrt{2ax-x^2}+2ax-x^2$ et $EF^2 \sqcap x^2+2dx+d^2$, fiet: $b^2 \ddagger 2b\sqrt{2ax-x^2}+2ax\boxed{-x^2+x^2}+2dx+d^2 \sqcap$ Quadrato a BF.

Esto jam alius circulus, cujus diameter $HR \sqcap 2e$, seu radius e et $BG \sqcap f$ et $HG \sqcap g$ et $HI \sqcap x+g$ et $IF \sqcap \sqrt{2ex+2eg-x^2-2gx-g^2}$. Auferatur inde BG vel $IL \sqcap f$, fiet: $\sqrt{2ex+2eg-x^2-2gx-g^2}\ -f \sqcap FL$ cujus quadrato addatur $\square$, $BL \sqcap GI \sqcap AD \sqcap EF$ fiet

$$2ex+2eg\boxed{-x^2}-2gx-g^2+f^2-2f\sqrt{2ex+2eg-x^2-2gx-g^2}\,\boxed{+x^2}\boxed{+2dx+d^2}$$

$$\sqcap\ b^2 \ddagger 2b\sqrt{2ax-x^2}+2ax\,\boxed{+2dx+d^2}\ \sqcap BF^2.$$

Et ordinando:
$$\begin{array}{rl} 2e\ x\ +\ 2eg & \sqcap\ \ddagger 2b\sqrt{2ax-x^2}\ +\ 2f\sqrt{\begin{array}{l}-x^2-2e\,x+2eg\,.\\ \qquad\ \ -2g\cdot\cdot-\ g^2\end{array}}\\ -\ 2g\ \cdot\cdot\ -\ g^2 & \\ -\ 2a\ \cdot\cdot\ +\ f^2 & \\ +\ b^2 & \end{array}$$

Compendii causa ponatur $2e-2g \sqcap h$ et $2eg-g^2$, ponatur $hg+g^2$, item $f^2+b^2 \sqcap l^2$. Et stabit ita:

$$\odot\quad \begin{array}{rl} h\ x\ +\ 2hg & \sqcap\ \ddagger 2b\sqrt{2ax-x^2}+2f\sqrt{\begin{array}{l}-x^2\ +hx+hg.\\ \qquad\qquad\ +\ g^2\end{array}}\\ -\ 2a\cdot\cdot\ +\ g^2 & \\ +\ l^2 & \end{array}$$ Et quadrando:

8 f. *Am Rande:* NB. Mirum d evanescere et ipsius AC nullam in calculo haberi rationem. Hinc potest duci theorema.

2 EF^2 *(1)*, fiet: *(2)* seu *(3)* $\sqcap$ *(a)* $\mathrm{b}^2+2\mathrm{bd}+\mathrm{d}^2$, *(b)* x^2 *L* 4 $\sqcap$ f | et HI $\sqcap$ *(1)* g *(2)* x + g *gestr.* | et HG *L* 6 −f *(1)* cuius qvadratum erat: *(2)* $\sqcap$ FL *L*

8 f. $2ex \ldots \sqcap BF^2$: Diese Gleichung berücksichtigt nicht, dass die Variable x bei den beiden Kreisen unterschiedlich definiert wird. Beim ersten Kreis wird $x = CD$ gesetzt, beim zweiten $x = HI - HG = GI = AD$. Diese Inkonsistenz belastet die weiteren Berechnungen bis zum Ende des Stückes (vgl. etwa die Gleichung in S. 573 Z. 7). Der Fehler lässt sich beheben, indem man $A = C$ setzt, also $d = 0$ wählt.

$$\begin{array}{llll} + h^2\ x^2 & + h^2 g\ x & + h^2 g^2 & \sqcap + 4b^2 2a\, x - 4b^2\, x^2 + 4f^2 hg \ddagger 4fb \sqrt{\begin{array}{l} x^4 - h\, x^3 - hg\, x^2 + 2ahg\, x \\ \quad -2a \cdot\cdot - g^2 \cdot\cdot + 2ag^2 \cdot\cdot \\ \qquad\quad -2ah \cdot\cdot \end{array}} \\ -2ha \cdot\cdot & + hg^2 & + 2hg^3 & \quad + 4f^2 h \cdot\cdot \quad - 4f^2 \cdot\cdot \quad + 4f^2 g^2 \\ + 4a^2 \cdot\cdot & + hl^2 & + 2hgl^2 & \\ & -2ahg & + g^4 & \\ & -2ag^2 & + 2g^2 l^2 & \\ & -2al^2 & + l^4 & \end{array}$$

Sed ut compendiosius formulam $\odot$ et literarum multitudinem enuntiemus: eam primum dividemus per $[\ddagger 2]b$ fiet:

$$\frac{\left\{\begin{array}{l} h\ \ x \\ -2a \cdot\cdot \end{array}\right.}{\ddagger 2b} + \frac{\left\{\begin{array}{l} + hg \\ + g^2 \\ + l^2 \end{array}\right.}{\ddagger 2b} \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + \frac{2f}{\ddagger 2b} \sqrt{\begin{array}{l} -x^2 + hx + hg \\ \qquad\qquad + g^2 \end{array}}$$

Et brachylogice $\;☽\;$ $\overset{\overset{h.\,a}{\vee}}{\dfrac{m}{b}} x + \overset{\overset{\frac{h.\,g.\,f}{b}}{\vee}}{n} \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + \dfrac{\varphi}{b} \sqrt{-x^2 + hx + (q)b}.$

Ubi literae omnes arbitrariae censeri possunt, excepta q.

Nimirum. $h \sqcap \ddagger 2m + 2a$. $\ddagger 2mg + 2ag + g^2 + f^2 - b^2 \sqcap \ddagger 2bn$. $f \sqcap \ddagger\varphi$. $h \sqcap h$. $hg + g^2 \sqcap qb$ sive $\ddagger 2mg + 2ag + g^2 \sqcap qb$. Ergo $qb + f^2 - b^2 \sqcap \ddagger 2bn$ sive $f \sqcap \sqrt{\ddagger 2bn + b^2 - qb}$

6 f. $+l^4$ *(1)* Mirum satis d. *(2)* et ordinando: $\begin{array}{l} +h^2 \\ -2ha \\ +4a^2 \\ +4b^2 \\ +4f^2 \end{array}$ *(3)* Sed | ut *erg.* | compendiosius *L* 14 et *(1)* brachylogia aeqvivalente: $\underset{\underset{\frac{h.\,a}{b}}{\wedge}}{m}\ x + \underset{\underset{\frac{h.\,g.\,f}{b}}{\wedge}}{n}\ a \sqcap \sqrt{2ax - x^2} + \underset{\underset{\frac{f}{b}}{\wedge}}{p} \sqrt{\ } - x^2 +$ *(2)* brachylogice *L* 15 q. | et b *gestr.* | *L*

1–6 $\ldots \sqcap \ldots$: In der Gleichung ist an einigen Stellen (insbesondere bei allen Koeffizienten von x auf der linken Seite) der Faktor 2 unberücksichtigt geblieben. 16 $f^2 - b^2$: Oben (S. 566 Z. 14) hatte Leibniz noch $l^2 = f^2 + b^2$ und nicht wie hier $l^2 = f^2 - b^2$ gesetzt.

et $\begin{array}{l} g^2 + 2a\;g + \;\; a^2 \\ \mp 2m \cdot\cdot \mp 2am \\ \qquad\quad + \;m^2 \end{array} \sqcap a^2 \mp 2am + m^2 + qb$ sive $g + a \mp m \sqcap \sqrt{\begin{array}{l} \;\; a^2 \;\; + qb \\ \mp 2am \\ + m^2 \end{array}}$ sive

$g \sqcap -a \pm m + \sqrt{\begin{array}{l} \;\; a^2 \;\; + qb \\ \mp 2am \\ + m^2 \end{array}}$. Unde patet ipsas b et a arbitrarias manere.

Jam ergo formulam brachylogicam ordinemus: fiet quadrando utrobique:

$$\frac{m^2}{b^2}x^2+2\frac{mn}{b}x+n^2 \sqcap 2ax-x^2-\frac{\varphi^2}{b^2}x^2+\frac{\varphi^2}{b^2}hx+\frac{\varphi^2}{b^{\cancel{2}}}q\cancel{b}+2\frac{\varphi}{b}\sqrt{\begin{array}{l}-x^4-h\;\;x^3-qb\;\;x^2+2aqbx \\ \qquad\quad -2a \cdot\cdot \;\; +2ah \cdot\cdot \end{array}}$$

Et ordinando:

$$\begin{array}{lllllll} & \frac{m^2}{b^2}\,x^2 & +\,2\frac{mn}{b}\,x & +\;\; n^2 & \sqcap & +2\frac{\varphi}{b}\sqrt{\begin{array}{l}-x^4-\;h\;\;x^3-qb\;\;x^2+2aqbx \\ \qquad\quad -\,2a \cdot\cdot \;\; +2ah \cdot\cdot \end{array}} \\ ☿ & +\;1 \;\; \cdot\cdot & -\;\;2a \;\; \cdot\cdot & -\frac{\varphi^2}{b}q & & \\ & +\frac{\varphi^2}{b^2} \;\; \cdot\cdot & -\;\;\frac{\varphi^2}{b^2}h \cdot\cdot & & & \end{array}$$

Conferatur formulae simili generali:

$$\frac{r}{b}x^2+sx+tb \sqcap 2\frac{\varphi}{b}\sqrt{x^4+\omega x^3+\pi b x^2+\varpi b^2 x}$$

Fiet $m \sqcap \sqrt{rb-b^2-\varphi^2}$. $\varphi \sqcap \sqrt{\dfrac{n^2b-tb^2}{q}}$. $n \sqcap \dfrac{b^{\cancel{2}}s+2ab^{\cancel{2}}+\dfrac{n^2b-tb^2}{qb}\frown h}{2m \sqcap 2\sqrt{rb-b^2+\dfrac{-n^2b+tb^2}{q}}}$.

Qua aequatione reducta habebitur ipsius n valor quadrato-quadraticus sive planus.

5 fiet *(1)* multiplica *(2)* qvadrando *L* 13 f. $\sqrt{\frac{\mathrm{n^2b-tb^2}}{\mathrm{q}}}$ *(1)* n $\sqcap$ $\frac{\mathrm{b}}{\mathrm{2m}}\sqrt{\mathrm{rb-b^2}-\varphi^2}$ *(2)* | n $\sqcap$ $\dfrac{\dfrac{\mathrm{b}^{\cancel{2}}\mathrm{s+2ab^2+n^2b-tb^2}}{\mathrm{qb}^{\cancel{2}}}\mathrm{h},\frown\cancel{\mathrm{b}}}{\mathrm{2m}\sqcap\mathrm{s}\sqrt{\mathrm{rb-b^2}\dfrac{\mathrm{-n^2b+tb^2}}{\mathrm{q}}}}$ *ändert Hrsg.* | qva *L*

De caetero erit $h \sqcap -\omega + 2a$ et $q \sqcap \dfrac{+2a\omega - 4a^2 - \pi b}{b}$. Restat $2aq\cancel{b} \sqcap \text{ɷ}b^{\cancel{2}}$. Unde facilius habetur b, quam a, quod ascendit ad cubum.

Hactenus autem facile est mutatam in aliam mutare, seu ipsi v. g. $\text{ɷ}b^2$, exhibere aequalem ya^2. Maximi momenti est haec reductio ad brachylogiam, ad quamlibet operationem novam, nam alioquin, si omnia ad finem usque calculi reducta fuissent; habuissemus aequationes altissimas, quarum deprimibilitas aegre agnosceretur. Cum tamen vel ex his deprimibiles esse constet. Imo ne id quidem necesse est, ut vel una in his omnibus detur cognita. Possumus ergo supponere $\dfrac{\varphi}{b}$ ut quantitatem ex arbitraria a p l a n e pendentem. Nam postea datae quantitates erunt in aliqua aequatione proposita cum arbitraria hac comparabili.

$$\text{Jam:}\qquad \frac{r}{\varphi}x^2 + \frac{bs}{\varphi}x + \frac{tb^2}{\varphi} \sqcap 2\boxed{\frac{\varphi}{b}}\sqrt{x^4 + \omega x^3 + \pi b x^2 + \text{ɷ}b^2x}.$$

$$\text{Reducendo:}\quad \frac{r^2}{4\varphi^2}x^4 + 2\frac{rbs}{4\varphi^2}x^3 + 2\frac{rtb^2}{4\varphi^2}x^2 + 2\frac{b^3st}{4\varphi^2}x + \frac{t^2b^4}{4\varphi^2} \sqcap x^4 + \omega x^3 + \pi b x^2 + \text{ɷ}b^2x.$$
$$+\frac{b^2s^2}{4\varphi^2}\;\cdot\cdot$$

$$\text{Et ordinando:}\quad \frac{x^4 \; \begin{array}{l} +2\dfrac{rbs}{4\varphi^2}x^3 \\ -\ \omega\ \cdot\cdot \end{array} \left\{ \begin{array}{l} +2\dfrac{rtb^2}{4\varphi^2}x^2 + 2\dfrac{b^3st}{4\varphi^2}x + \dfrac{t^2b^4}{4\varphi^2} \\ +\dfrac{b^2s^2}{4\varphi^2}\ \cdot\cdot\ - \text{ɷ}b^2\ \cdot\cdot \\ -\ \pi b\ \cdot\cdot \end{array}\right.}{\dfrac{r^2}{4\varphi^2} - 1} \sqcap 0.$$

♃

Pro φ et b substituamus eorum valores ex superioribus et habebitur denique aequatio cui alia quaelibet quadrato-quadratica; ac per consequens et cubica poterit comparari;

1 unde facilius *erg. L* 5 novam, *(1)* impedit ne in *(2)* in fin *(3)* in *(4)* in fine calculi *(5)* nam *L*
11 Jam: *(1)* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}\mathrm{x}^2 + \mathrm{sx} + \mathrm{tb}$ *(2)* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{b}}\mathrm{x}^2$ *(3)* $\frac{\mathrm{r}}{\varphi}\mathrm{x}^2$ *L*

1 $h \sqcap -\omega + 2a$: Richtig wäre $h \sqcap -\omega - 2a$. Das Versehen belastet den folgenden Wert für q sowie die Gleichungen in S. 570 Z. 3–5 und S. 570 Z. 11.

ac proinde poterit si ista quidem recta sunt omnis aequatio solida reduci ad planam; inquam si credere fas est. Ad habendum valorem ipsius φ opus est valore ipsius n et b. Et quidem quod attinet b ita procedemus: $2aq\cancel{b} \sqcap \varpi b^{\cancel{2}}$. Ergo $4a^2\omega - 8a^3 - 2a\pi b \sqcap \varpi b^2$, sive $b^2 + 2\dfrac{a\pi}{\varpi}b + \dfrac{a^2\pi^2}{\varpi^2} \sqcap \dfrac{4a^2\omega\varpi - 8a^3\varpi + a^2\pi^2}{\varpi^2}$, sive $b + \dfrac{a\pi}{\varpi} \sqcap \dfrac{\sqrt{4a^2\omega\varpi - 8a^3\varpi + a^2\pi^2}}{\varpi}$ sive $b \sqcap \dfrac{\sqrt{4a^2\omega\varpi - 8a^3\varpi + a^2\pi^2} - a\pi}{\varpi}$.

Porro n ita habebitur, ex superioribus: $n^2 \sqcap s^2 + 4sa$ etc. Prolixiora ista, quam ut adscribit opus sit, interim potest fingi omnia ab initio per $\dfrac{\varphi}{b}$ fuisse divisa, et ita φ in ista novissima aequatione non erit, nec nos turbabit, quod ad b attinet, nec hoc turbabit, est enim a caeteris independens cum a sit arbitraria. Imo plane ipsius b explicatione opus non erit, si ipsam ϖ non velimus esse arbitrariam, sed pro ϖb^2 ponamus $2aqb$, sive si pro ϖb^2 ponamus in aeq. ♃ hanc quantitatem $4a^2\omega - 8a^3 - 2a\pi b$. Optime ergo ita comparemus:

$$\begin{array}{cccccccc}
 & & & B & & A & & \\
 & \dfrac{m^2}{2\varphi b}\, x^2 & + & \dfrac{\cancel{2}mn}{\cancel{2}\varphi}\, x & + & \dfrac{n^2b}{2\varphi} & \sqcap & \sqrt{\begin{array}{l} x^4 - h\,x^3 - qb\;\; x^2 + 2aqbx \\ \qquad\; -2a \cdot\cdot\;\, +2ah \cdot\cdot \end{array}} \\
+ & \dfrac{b}{2\varphi}\;\cdot\cdot & - & \dfrac{\cancel{2}ab}{\cancel{2}\varphi}\;\cdot\cdot & - & \dfrac{\varphi q}{2} & & \\
+ & \dfrac{\varphi}{2b}\;\cdot\cdot & - & \dfrac{\varphi}{2b}h\;\cdot\cdot & & & &
\end{array}$$

Conferenda cum: $\quad \dfrac{r}{b}x^2 + sx + tb \sqcap \sqrt{x^4 + \omega x^3 + \pi b x^2 + \varpi b^2 x}$.

Unde $m \sqcap \sqrt{2r\varphi - b^2 - \varphi^2}$.

$-n^2b + \varphi^2 q + 2\varphi tb \sqcap 0 \quad A.\quad$ Sive $\varphi^2 + 2\dfrac{tb}{q}\varphi + \dfrac{t^2b^2}{q^2} \sqcap \dfrac{n^2b^2 + t^2b^2}{q^2}$, sive $\ddagger\varphi \ddagger \dfrac{tb}{q} \sqcap \dfrac{\sqrt{n^2bq + t^2b^2}}{q}$, sive $\varphi \sqcap \dfrac{\ddagger\sqrt{n^2bq + t^2b^2} - tb}{q}$.

2 inquam *erg.* *L* 7 per *(1)* aeqvationem *(2)* $\dfrac{\varphi}{\mathrm{b}}$ *L* 19–571,1 $\dfrac{\ddagger\sqrt{\mathrm{n^2bq + t^2b^2}} - \mathrm{tb}}{\mathrm{q}}$ *(1)* $\mathrm{n}^2 \sqcap$ *(2)* n $\sqcap$ *(3)* Rectius *(a)* ex aeq. ♄ qvaeremus ⟨m⟩ *(b)* quaeremus primum n, ex *(4)* Deinde: *L*

Deinde: fiet: $2mnb - 2ab^2 - \varphi^2 h \sqcap 2s\varphi b \quad B$.

Jungere aliter licebit duas aequationes A et B quaerendo n primum, nempe ex aeq. A fiet $n \sqcap \sqrt{\ } \dfrac{\varphi^2 q + 2\varphi tb}{b}$. Ex aeq. B erit $n \sqcap \dfrac{2s\varphi b + 2ab^2 + \varphi^2 h}{2bm \sqcap 2b\sqrt{r\varphi - b^2 - \varphi^2}}$. Et quadrando utrobique fiet:

$$\varphi^2 qb + 2\varphi tb^2 \sqcap \frac{4s^2\varphi^2 b^2 + 8s\varphi b^3 a + 4s\varphi^3 bh, +4a^2b^4 + 4ab^2\varphi^2 h + \varphi^4 h^2}{4r\varphi - 4b^2 - 4\varphi^2}.$$

Sed quia hoc nimis alte assurgeret, ejus aequationis ope non φ sed alia nempe h aut a quaerenda est. Ideoque φ pro cognita sumenda est.

Consultissimum forte erit ponere $\mp IF \sqcap \mp f \sqcap \varphi$ esse $\sqcap b \sqcap AB$, seu punctum B rectae AG medium esse. Ita calculus credo non parum contrahetur: et conferendo fiet:

(1) $m^2 + 2b^2 \sqcap rb$. Item (2) $2mn - 2ab - hb \sqcap sb$. Item (3) $n^2 - bq \sqcap tb$.

Item (4) $-h - 2a \sqcap \omega$. Et (5) $-qb + 2ah \sqcap \pi b$. Et denique (6) $2aqb \sqcap \varpi b^2$.

Ex 4. $h \sqcap -2a - \omega$. Ergo in 5. fiet: (5) $qb - 4a^2 - 2a\omega \sqcap \pi b$, et ex 2., fiet: (2) $2mn\boxed{-2ab + 2ab} + \omega b \sqcap sb$. Ex 1. $m \sqcap \sqrt{rb - 2b^2}$. Ex 2. erit $m \sqcap \dfrac{sb - \omega b}{2n}$. Ergo conferendo: $4n^2 r\cancel{b} - 8n^2 b^{\cancel{2}} \sqcap s^2 b^{\cancel{2}} - 2sb^{\cancel{2}}\omega + \omega^2 b^{\cancel{2}}$ sive $b \sqcap \dfrac{4n^2 r}{s^2 - 2s\omega - \omega^2, +8n^2}$. Sed $n^2 \sqcap +tb + bq$. Ergo $\cancel{b} \sqcap \dfrac{4t\cancel{b}r + 4\cancel{b}qr}{s^2 - 2s\omega + \omega^2, +8tb + 8bq}$, sive $b \sqcap \dfrac{4tr + 4qr, -s^2 + 2s\omega - \omega^2,}{+8t + 8q}$ $\sqcap \dfrac{1}{2}r - \dfrac{\llcorner \mp s \pm \omega, \square \lrcorner}{8t + 8q}$.

Jam satis feliciter usi sumus aequationibus, 1. 2. 3. 4. Restant duae expediendae. Nimirum ex 5. reformata fiet: $b \sqcap \dfrac{4a^2 + 2a\omega}{q - \pi}$. Ergo $\dfrac{4a^2 + 2a\omega}{q - \pi} \sqcap \dfrac{t + q, \frown 4r,, -\llcorner \mp s \pm \omega \lrcorner \square}{t + q, \frown 8}$. Ergo multiplicando per crucem:

4 f. fiet: | $\dfrac{\varphi^2 \mathrm{q} + 2\mathrm{btb}}{\cancel{\mathrm{b}^2}}$ *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L* 9 rectae *(1)* AB med *(2)* AG *L* 10–13 | (1) *erg.* | … | (2) *erg.* | … | (3) *erg.* | … | (4) *erg.* | … | (5) *erg.* | … | (6) *erg.* | … | (5) *erg.* | … | (2) *erg.* | *L* 17 1. 2. 3. 4. | 5. *gestr.* | restant *L*

12 (5): Richtig wäre $-qb - 4a^2 - 2a\omega \sqcap \pi b$. Hieraus resultieren Folgefehler bis S. 572 Z. 15.

$$4a^2 8t + 4a^2 8q + 2a\omega 8t + 2a\omega 8q\ [\sqcap]$$
$$+ 4trq + 4q^2 r - 4tr\pi - 4qr\pi, + \llcorner \mp s \pm \omega \lrcorner \square \pi - \llcorner \mp s \pm \omega \lrcorner \square q.$$

Restat $2aq \sqcap \text{ꝏ} b$, sive $b \sqcap \dfrac{2aq}{\text{ꝏ}}$. Conferendo proximo ipsius b valori, fiet: $2\cancel{4}a^{\cancel{2}}\text{ꝏ} + \cancel{2}\cancel{a}\omega\text{ꝏ} \sqcap \cancel{2}\cancel{a}q^2 - \cancel{2}\cancel{a}q\pi$. Ergo $a \sqcap \dfrac{q^2 - q\pi - \omega\text{ꝏ}}{\text{ꝏ}}$. Sed cum in proxima aequatione habeatur a^2, hinc substituendo valorem ipsius a, assurget q ad quadratum et cubum. Quod ut evitetur, rursus aliquid pro arbitrio explicandum est, sed non licet facere $b \sqcap 0$, etsi id valde contraheret calculum, nisi et velimus $BG \sqcap 0$, ergo et $AG \sqcap 0$. Et ita duorum circulorum diametri coinciderent, quod vix puto consultum. Remedium forte commodissimum, ut ponamus $\text{ꝏ} \sqcap q$, fiet: $b \sqcap 2a$ et $a \sqcap q - \pi - \omega$. Imo non sufficit quia reperitur $a^2 q$. Rebus ergo recte expensis optimum facere $\mp s \pm \omega, \square \sqcap yt + qy$. Et fiet: $32a^2 + 16a\omega \sqcap 4rq - 4\pi q - yq + y\pi$. Sed ne hoc quidem satisfacit, nihilominus enim a^2 continebit q^4, q^3, et opus erit simul ponere et $\text{ꝏ} \sqcap q \sqcap a + \pi + \omega$. Atque ita fiet:

$$\begin{array}{lllll} 32a^2 + 16a\omega \;\sqcap & 4\,r\,a & +4\,r\,\pi & +4\,r\,\omega & \boxed{+y\pi} \\ & -4\,\pi\cdot\cdot & -4\,\pi\cdot\cdot & -4\,\pi\cdot\cdot & \\ & -\;\;y\cdot\cdot & \boxed{-\;y\;\cdot\cdot} & -\;\;y\cdot\cdot & \end{array}$$

Atque ita jam formata aequatione ♃, videndum est, an et quibus casibus possibile sit aequationem aliquam solidam seu indivisibilem aequari propositae. Utilissimum foret sed prolixioris calculi. Nihil supponere ne φ quidem $\sqcap b$. Sed omnia integra relinquere ad aequationem usque ultimam, ubi denique pro arbitrio aliqua assumere liceat, ad eam reddendam planam.

Jam cum aequatione ♃ poterit conferri formula aliqua generalis. Ac proinde apparebit quid hac ratione possibile sit. Si vero nulla brachylogia usi fuissemus, prolixissimus redditus fuisset calculus. Sed sub finem unica positio omnia potuisset absolvere.

3 Conferendo *(1)* superiori *(2)* proximo *L* 7 et *(1)* ponamus *(2)* velimus *L* 10 a^2q *(1)* itaqve satius *(2)*. rebus *L* 12 q^3. *(1)* Remedium ergo hoc deniqve tentemus: ponendo *(a)* $32a^2$ *(b)* $4a^2 8t + 4a^{\cancel{2}} 8q + 2\cancel{a}\omega 8q \sqcap 0$ *(2)* et opus *L* 12 $\sqcap a + \pi + \omega$ *erg. L* 23–573,1 absolvere *(1)* Caeterum hac methodo etiam obliqvae *(2)* Ob *(3)* linea *(4)* Caeterum *L*

3 Restat: Richtig wäre $2aq \sqcap \text{ꝏ} b^2$. Es resultieren Folgefehler bis Z. 15. 10 fiet: Die rechte Seite der sich anschließenden Gleichung muss $4rq - 4\pi r - yq + y\pi$ lauten. In der Folge ist auch die Gleichung in Z. 13–15 nicht korrekt.

Caeterum quemadmodum Schotenius praescripsit formulam generalem pro omnibus ordinatarum mutationibus; ita jam formula tentanda est quae omnes applicatae a me adjectae convergentes scilicet et divergentes explicari queant. Interim notabile est, etsi nullum problema solidum hoc modo solvi posset, tamen plana horribiliter difficilia hac ratione posse solvi. Sed jam video denique lineam BF fuisse inutilem, et longe simplicius veniri potuisse ad aequationem, ponendo $DF + IF \sqcap$ cognitae AG: Unde: $\sqrt{2ex + 2eg - x^2 - 2gx - g^2} + \sqrt{2ax - x^2} \sqcap AG$. Unde apparebit quam longe alius sic oriatur calculus; ad quem cum prior reduci possit utique, patet et ipsum esse planum.

1 f. omnibus *(1)* figurarum | mutationibus *nicht gestr.* | *(2)* ordinatarum *L*

1 Schotenius: Vgl. Fr. v. Schooten, *Commentarii*, 1659, *DGS* I S. 176–178. Vgl. auch N. 50 und N. 55.

60. DE CONSTRUCTIONE AEQUATIONUM ALTIORUM GRADUUM
[Januar 1676]

Überlieferung: *L* Notiz: LH 35 XIII 2 b Bl. 108–109. 1 Bog. 2°. Am oberen Rand von Bl. 109 ist ein keilförmiger Streifen von max. 19,8 × 1,7 cm abgeschnitten. 15 Z. auf Bl. 109 v°. Auf dem Rest des Bogens VII, 2 N. 72–74; VII, 5 N. 62–64; Cc 2, Nr. 1117 (Druck in einem späteren Band der Ausgabe).
Cc 2, Nr. 1119

Datierungsgründe: Das Wasserzeichen des Papiers ist für November 1675 bis Februar 1676 belegt. N. 60 ist zwischen den von den Herausgebern auf Januar 1676 datierten Aufzeichnungen VII, 5 N. 63 und VII, 5 N. 64 auf den Bogen geschrieben worden.

Secundum id quod praecipio radices gradus quarti debent esse

$$\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}}}+\sqrt[4]{\ldots}+\sqrt[4]{\ldots}$$

Tres scilicet irrationales [quadrato]quadraticae quae includunt cubicas. Radices gradus quinti erunt

$$\sqrt[5]{\sqrt[4]{\sqrt[3]{a+\sqrt{b}}+\sqrt[3]{a-\sqrt{b}+c}}+\sqrt[4]{\ldots}+\sqrt[4]{\ldots}+d}\ [+]\sqrt[5]{\ldots}+\sqrt[5]{\ldots}+\sqrt[5]{\ldots}$$

Quodsi quadratoquadraticae radici inclusa quantitas sit negativa, non puto constructionem sectione anguli fieri posse, sed ad altiores assurgendum esse curvas. Et quaerendum quaenam sit illa curva, quae in sectionis anguli locum substitui possit. Interea saltem illud hinc videtur sequi, non sufficere Tabulas sinuum et Logarithmorum ad aequationes, sed meo opus esse instrumento aequationum generali ad inveniendas facile radices; et calculo Vietae, ut inveniantur in numeris sine instrumento. Hoc autem longe commodius quam semper novarum uti descriptione curvarum methodo Cartesii. Vera autem ratio cur

11 *(1)* Secundum imaginationem | meam, *nicht gestr.* | *(2)* Secundum *L*

---

11 praecipio: Die Vermutung zur Gestalt der Lösungsformeln für Gleichungen vierten bzw. fünften Grades trifft nicht zu. 20 instrumento: Zu Leibniz’ algebraischem Instrument, dem *Constructor*, vgl. Cc 2, Nr. 815, 816 u. 827 (Druck in Band VII, 8). 21 calculo Vietae: Fr. Viète, *De numerosa potestatum resolutione*, 1600 (*VO* S. 162–228). 22 methodo Cartesii: R. Descartes, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 67–106.

Logarithmi et sinus non sufficiant omnibus radicibus est credo multitudo radicum realium. Radices irrationales servient ad cognoscendam perfectissime problematis analysin, seu ad reductiones sine tentamentis inveniendas. Eaque ratione id obtinemus, ut omne problema quod sub aequationem cadit ad simplicissimum gradum reducatur. Tametsi longe aliud sit, invenire simplicissimas constructiones.

61. HEXAGRAMMUM PASCALIANUM, MYSTICUM UT VOCAT, IDEMQUE SEMPER CONICUM

Januar 1676

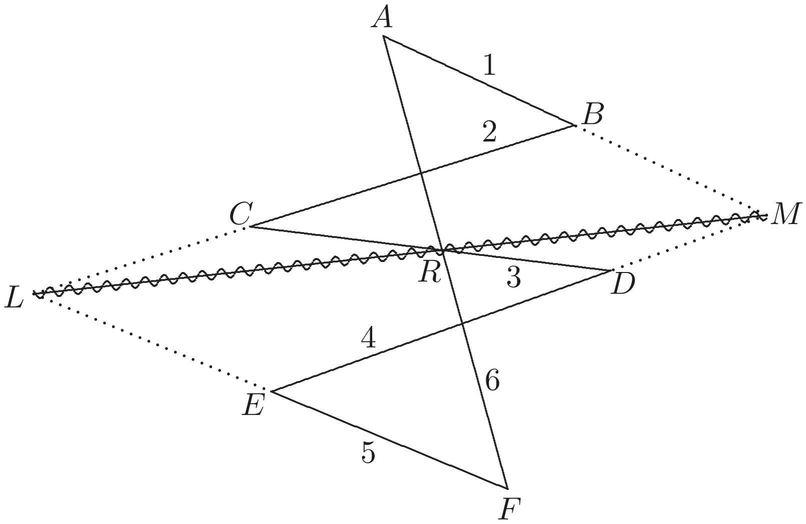
Überlieferung: *LuT* Gesprächsaufzeichnung (Leibniz und Tschirnhaus): LH 35 XV 1 Bl. 12. 1 S. Notizen und Skizzen von Tschirnhaus und nachträgliche Zusätze von Leibniz. Größter Teil eines Blattes 4°. Rückseite leer. Unten wurde ein ca 7 cm hoher Streifen abgeschnitten (= LH 35 XII 2 Bl. 3; VII, 1 N. 88). — Gedr.: 1. GERHARDT, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 195 (tlw. = Z. 14–18 u. S. 577 Z. 2–6). 2. *PO* II, 1908, S. 232 f. 3. COSTABEL, *Traduction française*, 1962, S. 259 f., Faksimile S. 266, franz. Übers. S. 267 f. (Nachdruck 1964, S. 95, 98–100). 4. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Mesnard) II, 1970, S. 1129 f. (mit franz. Übers.). 5. PASCAL, *Oeuvres complètes* (Le Guern) I, 1998, S. 138 f. (mit franz. Übers.).
Cc 2, Nr. 1292

[*Leibniz*]

Januar 1676

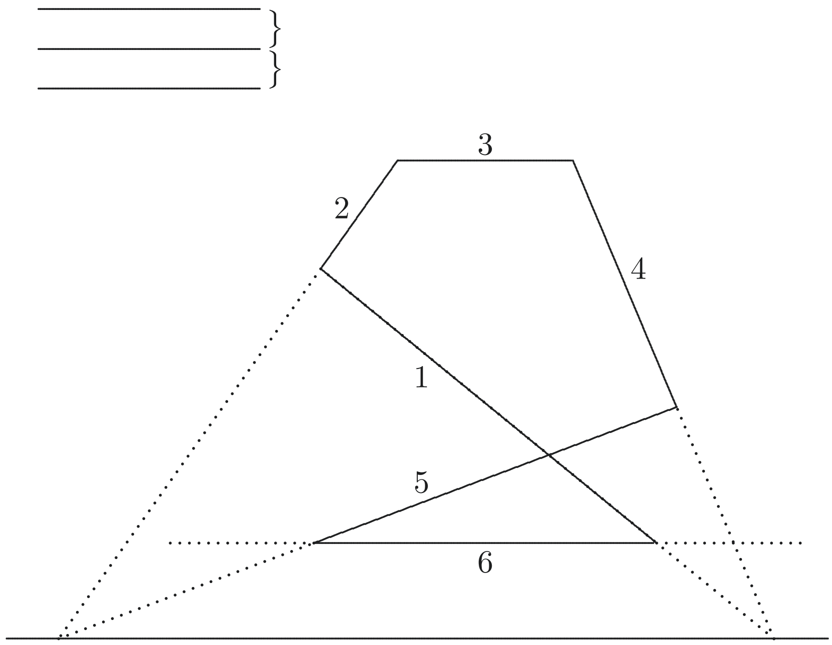
Hexagrammum Pascalianum,
Mysticum ut vocat, idemque semper Conicum

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

18 *Fig. 1*: In Tschirnhaus' Skizze liegen die sechs Punkte nicht, wie es der Satz von Pascal voraussetzt, auf einem Kegelschnitt, und *LRM* stellt keine Gerade dar. Dies ist hier korrigiert worden.



[*Fig. 2*]

Vocat 2 et 5 item 4 et 1 o p p o s i t a s:

L et M puncta concursus item R:

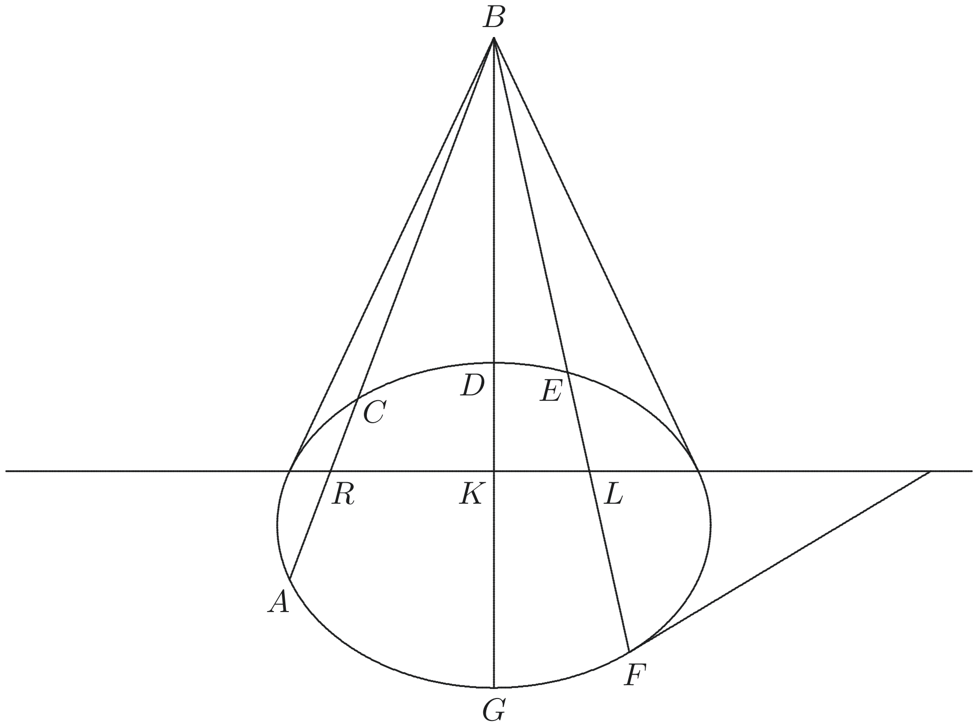
Linea LRM in qua tria concursus puncta in directum jacent, directrix vocatur.

Continuae 1 et 2, 2 et 3 etc:

Lineae neque continuae neque concurrentes copulatae vocantur ut 1 et 3:

2 Vocat *erg. L* 3 et *erg. T*

1 *Fig. 2*: Die drei Parallelen hat wohl Leibniz nachträglich links über der Figur (und rechts von Fig. 1) hinzugefügt. Sie sollen vermutlich betonen, dass Seite 3, Seite 6 und die *directrix* parallel verlaufen. Offensichtlich geht es hier um den Spezialfall, in welchem zwei *lineae oppositae* parallel verlaufen; vgl. auch Fig. ⊙ und Leibniz' Bemerkungen zu dieser. In Tschirnhaus' Skizze ist dies allerdings nicht sauber ausgeführt. Die oben stehende Figur ist dem Sinn entsprechend verbessert wiedergegeben.



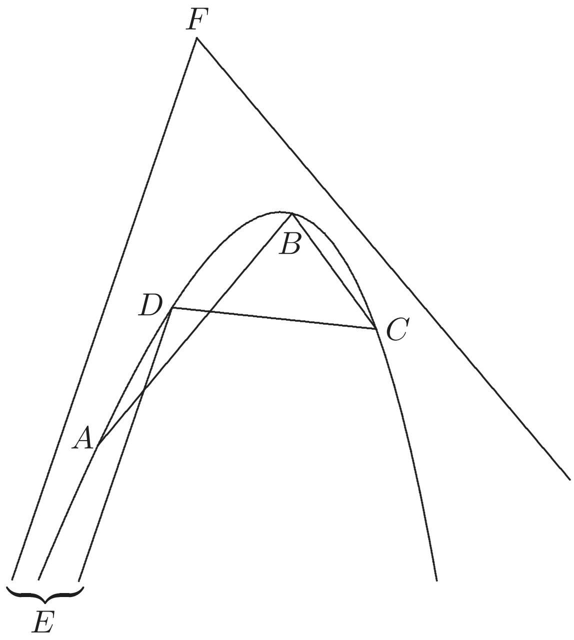
[*Fig. 3*]

Theorema: in omni Conica ut $FB \;\top\!\!\top\; BE$ sic FE ad $\langle EL \rangle$
$GB \;\top\!\!\top\; BD \;\top\; GD \;\top\!\!\top\; DK$

---

1 *Fig. 3*: Die Skizze ist im Original nicht sehr sorgfältig ausgeführt; insbesondere verläuft die Polare zum Pol B nicht durch die Berührpunkte der Tangenten. Im Original tragen zwei Punkte die Bezeichnung F; der Übersichtlichkeit halber wurde einer davon hier und in Z. 3 in G umbenannt.
2 Theorema: Richtig muss es heißen: $FB : BE = FL : LE$ sowie $GB : BD = GK : DK$.

[*Leibniz*]



[*Fig.*] $\odot$

Duae lineae parallelae concurrere intelliguntur, etsi locus concursus infinite absit, ut in figura signi $\odot$ DE, et EF parallelae, ex quibus FE asymptotos. Punctum E abest infinite.

2 *Fig.* $\odot$: In Leibniz' Skizze ähnelt die Kurve einer Parabel. Möglicherweise ist eine Hyperbel gemeint, doch ist die zweite Achse aus F keine Asymptote.

62. CONICA PASCALIANA
[Januar 1676]

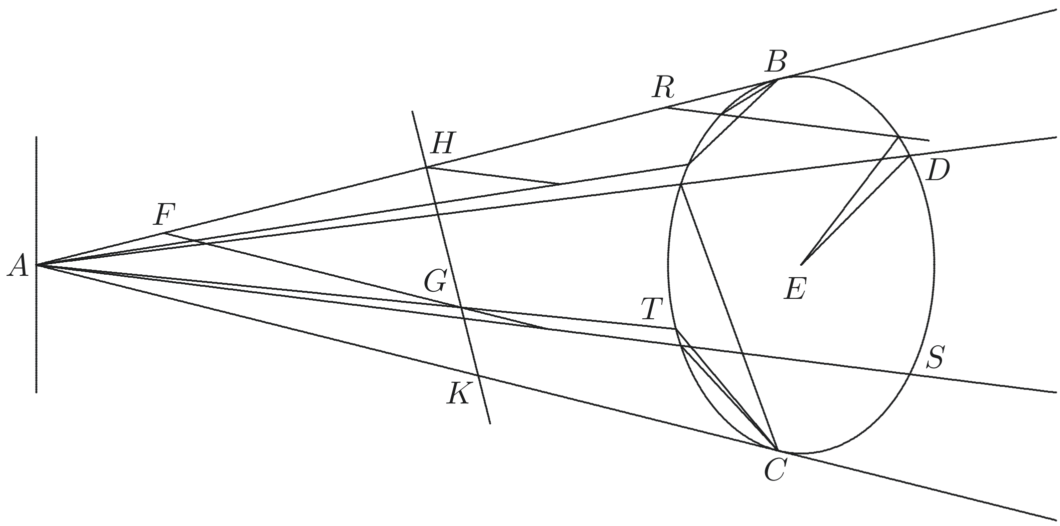
Überlieferung: *LuT* Konzept: LH 35 XV 1 Bl. 1. 1 Bl. 4°. 1 S. gemeinsame Notizen und nachträgliche Zusätze von Leibniz auf Bl. 1 r°. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 196 (tlw. = S. 583 Z. 1–6); 2. *PO* II, 1908, S. 229–231; 3. (mit franz. Übers.) Costabel, *Traduction française*, 1962, S. 258 f. u. S. 262–265, Faksimile von Bl. 1 r° auf S. 263 (Nachdruck 1964, S. 92–94 u. S. 96–99); 4. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, 1970, S. 1123–1128; 5. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd I, 1998, S. 134–137.
Cc 2, Nr. 1496

Datierungsgründe: Leibniz hat die Papiere von Pascal zu den Kegelschnitten wohl im Januar 1676 erhalten; vgl. seinen Brief an Oldenburg vom 28. Dezember 1675 (III, 1 N. 70 S. 329) sowie N. 61. Das Wasserzeichen des Papiers der Gesprächsaufzeichnung ist für November 1675 bis Januar 1676 belegt.

[*Leibniz*]

Conica Pascaliana

[*Tschirnhaus*]



[*Fig. 1*]

AB, AD etc. Verticalis sive radius opticus quia tegit verum ED.

[*Leibniz*]

BDC Circulus centro *E*, infinite distans, circa quem movetur recta *AB*, faciens conicam superficiem. Planum secans *HK* dat Ellipsin. Id planum nulli verticali parallelum. Verticalis est aliquis *AB*. *AD*. *AC*. Sed planum *RD* verticalibus duobus parallelum intelligi potest[,] uni *AS* inferiori, alteri ei ex diametro respondenti superiori *AT* qui casus dat Hyperbolam, unde nil refert *RD* per axem *A* transeat nec ne. Excipe hunc unum casum, quo duo verticales *AT*, *AS*, infinite parvam habent distantiam seu coincidunt in unum extremum, seu ipsam generatricem ut *AC*. et tunc Hyperbola degenerat in parabolam uti Ellipsis etiam in parabolam, cum *AK* est infinita et *AH* finita.

Antobola

Ellipsis	Parabola	Hyperbola.
0	1	2

Ellipsin Antobolam vocat quia in se recurrit, parabolam concipit velut Ellipsin sed infinite ab hinc in se recurrentem. Hyperbola revera non una linea curva in se rediens, sed duae.

HK Ellipsis vel Antobola.

FG parabola.

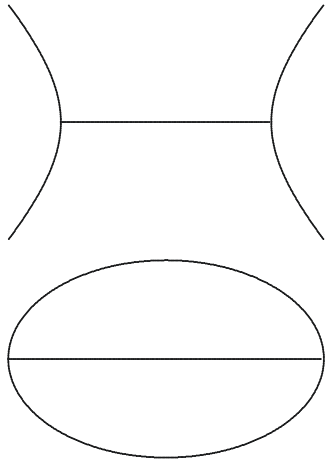
RD Hyperbola. *AS* verticalis sectioni Hyperbolae parallela superior et inferior quae in parabola in unum coincidit.

Sit *FGC*, parallela ipsi *AC*, sive concurrent in puncto infinite absenti *C*, erit sectio parabola.

Verticalis *AGT* secet ipsam *FG* parabolicam curvam in *G*. et absenti infinite puncto *C*, patet ipsam *CT* tegi ab ipsa *AT*. Eodem modo in caeteris.

Nota hac optica tegendi consideratione si quod de circulo, aut in circulo invenias, theorema singulare statim ei respondens opticum in caeteris sectionibus ope hujus considerationis habebis, et problemata quoque solves, verbi gratia tangentes ducere, etc.

4 AD. *(1)* AC, vestigium generatricis AB. *(2)* |AE *erg. T, ändert Hrsg.*| sed *L* 5 AT *(1)* excepto uno casu, qvo *(2)* qvi *L* 26 gratia *(1)* minimum *(2)* tangentes *L*



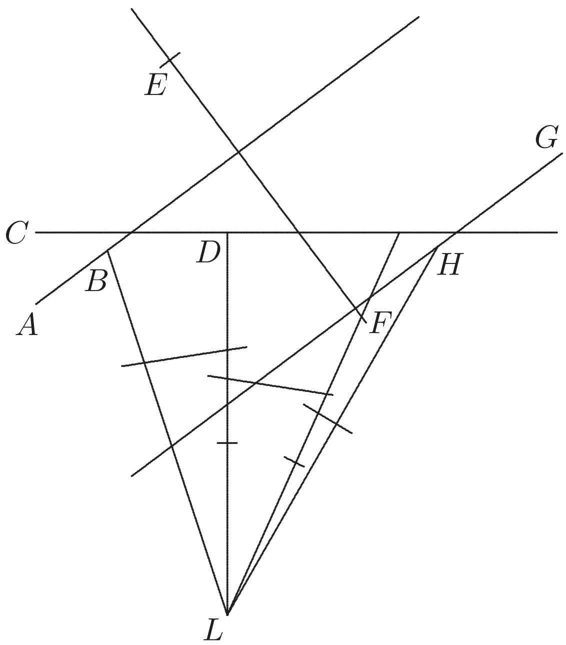
[*Fig. 2, Leibniz oder Tschirnhaus*]

Rectius Hyperbola et Ellipsis sic compararentur, quod cum ex pascaliana consideratione non prodeat, nescio an omnia complectatur.

[*Fig. 3 u. 4, Leibniz oder Tschirnhaus*]

Duae verticales quibus parallelum Hyperbolae planum determinant asymptotos. Monosecantes sunt quae curvam in uno puncto secant. Parallelae in Hyperbola diversis modis. In parabola una.

Omnis in Geometricis ope situs inveniendi ratio adeoque sine calculo in eo consistet, ut plura simul eodem situ complectamur, quod fit tum ope figurae cujusdam plures includentis, ubi usus solidorum patet, tum ope motus sive mutationis. Porro ex motibus et mutationibus utilissime videtur adhiberi mutatio apparentiae, seu optica figurarum transformatio, nam et videndum an ejus ope possimus ultra Conum ad altiora quoque assurgere.



[*Fig. 5*]

Datis positione 4 rectis AB, CD, EF, GH, ad eas ex puncto dato L ad angulos datos ducere rectas LB, LD, LF, LH, ita ut rectangula sub BL et LD, et sub LF et LH sint aequalia aut in data ratione, quaeritur punctum L. aut ejus locus qui conica. Est problema Pappi, quod Pascalius facile reducit ad suum hexagrammum et ejus ope ad Conum.

---

1 *Tschirnhaus, quer über die Figur notiert:*
Direct:
Correctang:
Caput proportionalium

---

5 problema Pappi: PAPPOS, *Mathematicae collectiones*, liber VII; vgl. R. DESCARTES, *Geometria*, 1659, *DGS* I S. 12 f. 5 hexagrammum: Vgl. N. 61.

63. PASCALII GENERATIO CONISECTIONUM
[Januar – 30. August 1676]

Überlieferung: *A* Abschrift von unbekannter Hand mit Korrekturen und Ergänzungen in Leibniz' Hand (*LiA*): LH 35 XV 1 Bl. 4–9. 3 Bög. 4° mit Faden geheftet. 8 $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 5 r°–9 r°. Auf Bl. 4 r° in Leibniz' Hand: „Pascalii generatio Conisectionum". — Gedr.: 1. Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 197–202; 2. *LBG*, 1899, S. 135–140; 3. *PO* II, 1908, S. 234–243; 4. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Chevalier), 1954, S. 66 bis 70, S. 1382–1387; 5. (franz. Teilübers.) Taton, *L'oeuvre*, 1962, S. 236–238 (Nachdruck 1964, S. 56–58); 6. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Lafuma), 1963, S. 38 bis 42; 7. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, 1970, S. 1108 bis 1119; 8. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd I, 1998, S. 117 bis 128; 9. (nach 6. mit dt. Übers.) *Pascal im Kontext*, 2006.
Cc 2, Nr. 1499

Datierungsgründe: Leibniz hatte die Papiere von Pascal zu den Kegelschnitten wohl im Januar 1676 erhalten. Die Abschrift und die Korrekturen und Ergänzungen von Leibniz dürften vor seinem Brief an E. Périer vom 30. August 1676 (III, 1 N. 90) entstanden sein.

Generatio Conisectionum.

Definitiones

Si a puncto, extra planum circuli sumpto, ad punctum, in peripheria sumptum, ducta recta linea utrimque infinita, circa peripheriam feratur, manente puncto illo immobili, superficies quam in sua circumvolutione describit infinita haec recta, dicetur superficies conica, spatium infinitum intra superficiem conicam comprehensum vocabitur conus; circulus vero dicetur basis coni; punctum immobile, vertex; pars superficiei quae a vertice, versus basim in infinitum ad alteras partes protenditur, dicetur semisuperficies conica; recta illo modo assumpta, in quocumque circumvolutionis suae situ constituta, verticalis dicetur.

Corollarium. 1.

Hinc patet si a puncto verticis ad quodlibet punctum in peripheria, vel in superficie conica ubicumque sumptum ducatur recta linea infinita, totam hanc rectam infinitam esse in superficie conica, seu verticali.

21 recta *erg. LiA* 25 illa *A ändert Hrsg.*

Corollarium. 2.

Si sumantur in superficie conica duo puncta, quae recta linea jungantur, et ipsa in infinitum producta ad verticem perveniat, tota haec superficiei conicae incumbit, seu verticalis erit, si vero ad verticem non perveniat, nullum erit punctum in recta praeter duo assumpta, quod sit in superficie conica, tota vero linea erit partim intra, partim extra.

Corollarium: 3.

Hinc patet 3 verticales non existere in eodem plano, eo quod tria puncta in peripheria circuli sumpta, non possunt esse in eadem recta.

Corollarium: 4.

Igitur planum infinitum ubicumque positum necessario occurret superficiei conicae, ubicumque positae; quia ex tribus quibuscumque verticalibus, una necessario occurret huic plano, hic autem concursus dicetur sectio coni, seu uno verbo conisectio.

Scholium.

Occurrere autem sex modis possunt planum et superficies conica, vel enim planum occurret conicae superficiei in solo verticis puncto, tunc conisectio est punctum; vel planum per verticem transiens tangit superficiem conicam ⟨—⟩ unam ex verticalibus, Talis conisectio est recta linea; vel per verticem transiens dividit totam superficiem in duas partes aequales, talis conisectio est ang. rectilineus; vel per verticem non transiens, nulli ex verticalibus, parallelum est, Talis conisectio est antobola, eo quod in se ipsam redit; vel rursus per verticem non transiens, uni tantum e verticalibus parallelum est; Talis conisectio dicetur Parabola; vel adhuc non transiens per verticem duabus e verticalibus parallelum est, et dicetur sectio haec hyperbola. Sunt ergo sex conisectionum species; Punctum, Recta linea, Ang. Rectilineus, Antobola, Parabola, hyperbola.

20 parallela *A ändert Hrsg.* 23 parallela *A ändert Hrsg.*

17 ⟨—⟩: In der Abschrift ist eine Lücke gelassen.

Definitio. 2.

Recta ad punctum tendere dicitur, quae ad illud si opus est, producta pervenit, et recta ad punctum in alia recta ad distantiam infinitam datum, duci seu tendere dicitur quae ipsi parallela est.

Definitio 3.

Duae Rectae aut plures quomodocumque sint positae dicuntur semper concurrere, et quidem ad distantiam vel finitam, si se in eodem puncto intersecent; vel infinitam, si sunt parallelae.

Definitio 4.

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae conisectionem secat in uno tantum puncto, dicitur monosecans.

Definitio 5.

Recta infinita in plano conisectionis ducta, quae ipsam Conisectionem, non nisi ad distantiam infinitam attingit, et quibusdam Monosecantibus parallela est, dicitur asymptotos.

Definitio. 6.

Recta infinita in plano Circuli ducta, quae ipsius peripheriam tangit vel secat, dicitur ad Circulum.

Corollarium

Hinc patet quod si oculus sit in vertice Coni, sitque objectum peripheria Circuli qui est coni basis, et Tabella sit planum utrimque occurrens superficiei conicae, Tunc conisectio quae ab ipso plano in superficie conica, producetur, sive sit punctum, sive sit

---

20 f. *Daneben:* Coroll. de apparentiis punctorum peripheriae

3 f. ducitur qua *A ändert Hrsg.*

Recta, sive Angulus, sive Antobola, sive Parabola, sive hyperbola, erit apparentia ipsius Peripheriae circuli.

Corollarium

Iisdem positis, si planum tabellae non per verticem transiens nulli e verticalibus seu nulli radio sit parallelum, atque ideo efficiat antobolam, manifestum est, omnia puncta peripheriae projicere suas apparentias in planum Tabellae conisectionis, ad distantiam finitam.

Scholium

Inde fit ut Antobola in se ipsam redeat et spatium finitum complectatur.

Corollarium

Iisdem positis, si planum Tabellae uni tantum e verticalibus seu uni e radiis sit parallelum, ideoque efficiat parabolam, manifestum est omnia puncta peripheriae Circuli projicere suas apparentias in planum conisectionis ad distantiam finitam, dempto uno puncto, quod non apparet, nisi ad distantiam, infinitam.

Scholium.

Inde fit ut Parabola in infinitum extensa, infinitum spatium suscipiat, quamvis sit apparentia peripheriae Circuli quae finita est, et spatium finitum complectatur.

Corollarium

Iisdem positis, si planum tabellae duabus e verticalibus parallelum sit; adeoque efficiat hyperbolam, manifestum est omnia puncta ejus peripheriae suas apparentias projicere in plano visionis tanquam tabella ad distantiam finitam, demptis duobus punctis quorum apparentiae, propter parallelismum non nisi ad distantiam infinitam reperientur, ideoque vocabuntur puncta non apparentia Circuli, et respectu hyperbolae puncta deficientia.

14 infinita *A ändert Hrsg.* 19 duobus *A ändert Hrsg.* 22 quarum apparentia *A ändert Hrsg.*

Scholium. 1.

Inde fit ut hyperbola sit in infinitum extensa et duabus constet partibus, quarum quaelibet infinitum spatium suscipit, una ex semihyperbolis est apparentia partis unius Peripheriae, altera alterius; sic singula puncta peripheriae dant suas apparentias in alterutra semihyperbolarum, demptis duobus punctis quae in neutra semihyperbola reperiuntur, nisi ad distantiam infinitam.

Scholium 2.

Ex tribus praecedentibus corollariis patet duo esse puncta deficientia in hyperbola, unicum in Parabola, nullum in Antobola.

Corollarium.

Iisdem positis si planum secans superficiem conicam, Antobolam efficiat[,] omnes rectae quae Circuli periph: secant projicient in planum conisectionis apparentias suas, quae quidem secabunt Antobolam in duobus punctis.

Corollarium

Si planum superficiem conicam secans [efficiat Parabolam] omnes rectae quae Circuli periph: secant, projicient suas apparentias in planum conisectionis, quod si recta secans peripheriam ad punctum quod apparentia caret, non pertineat, ipsius apparentia in plano tabellae secabit parabolam in duobus punctis; si vero recta ipsa periph. secans ad ipsum punctum apparentia carens pertineat, ipsius rectae apparentia erit parallela radio et Parabolam in uno tantum puncto secabit.

Corollarium.

Si Planum conicam superficiem secans efficiat hyperbolam[,] omnis recta quae Circuli peripheriam secat, et ad neutrum punctorum apparentia carentium pertineat[,] projicit

---

11 *Daneben:* de apparentiis secantium

3 una | (vera *gestr., darüber:* & *LiA* | ex *A* 8 precedentibus *A ändert Hrsg.* 12 quae *(1)* C$^{\text{li}}$ *A (2)* Circuli *LiA*

in planum conisectionis apparentiam suam, quae secat Conisectionem in duobus punctis, si vero recta ipsa ad alterutrum punctorum apparentia carentium pertineat, ipsius apparentia secabit hyperbolam, et in uno tantum puncto secabit triangulum; denique [si] ipsa recta jungat ambo puncta quae carent apparentia, ipsius rectae apparentia in plano conisectionis non erit nisi ad distantiam infinitam.

Corollarium

Iisdem adhuc positis quae supra, si planum tabellae efficiat Antobolam, omnes tangentes peripheriam, projicient suas apparentias in planum tabellae tangentes Antobolam in puncto ad distantiam finitam.

Corollarium

Si Planum tabellae efficiat parabolam, omnes tangentes peripheriam una tantum dempta quae ad punctum non apparens pertinet, projicien⟨t⟩ suas apparentias in planum tabellae, quae quidem tangent parabolam in puncto ad distantiam finitam, quod erit puncti contactus in peripheria apparentia.

Scholium.

Est ergo in parabola recta deficiens, quae quidem vice fungitur tangentis, cum tangentis sit apparentia.

Corollarium

Si planum tabellae efficiat hyperbolam, omnes tangentes periph. projicient suas apparentias in planum tabellae, etiamsi ad puncta non apparentia pertineant; et quidem si ipsae tangentes peripheriam ad puncta non apparentia non pertineant, ipsarum appa-

---

7 *Daneben:* de appar. tangentium.

21 ipsi tangentes *A ändert Hrsg.*

---

3 triangulum: irrtümlich statt „angulum"; vgl. Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd 1, 1998, S. 1037.

rentiae tangent hyperbolam in puncto ad distantiam finitam; si vero ducantur tangentes ad puncta non apparentia; ipsarum apparentiae, non nisi ad distantiam infinitam hyperbolam attingent, et parallelae erunt alterutri radiorum.

Scholium. 1.

Colligendum hinc asymptotos censeri et sumi pro tangentibus ad distantiam infinitam.

Scholium. 2.

Colligitur quoque ex praecedentibus in parabola esse una[m] seriem rectarum inter se parallelarum, secantium parabolam in uno tantum puncto.

[Scholium.] 3.

Colligitur quoque in hyperbola esse duas series rectarum inter se parallelarum, quarum in utraque una recta est, quae non nisi ad distantiam infinitam, hyperbolam attingit, seu quae est asymptotos. Denique patet Parabolam tenere medium inter Antobolam et hyperbolam nam

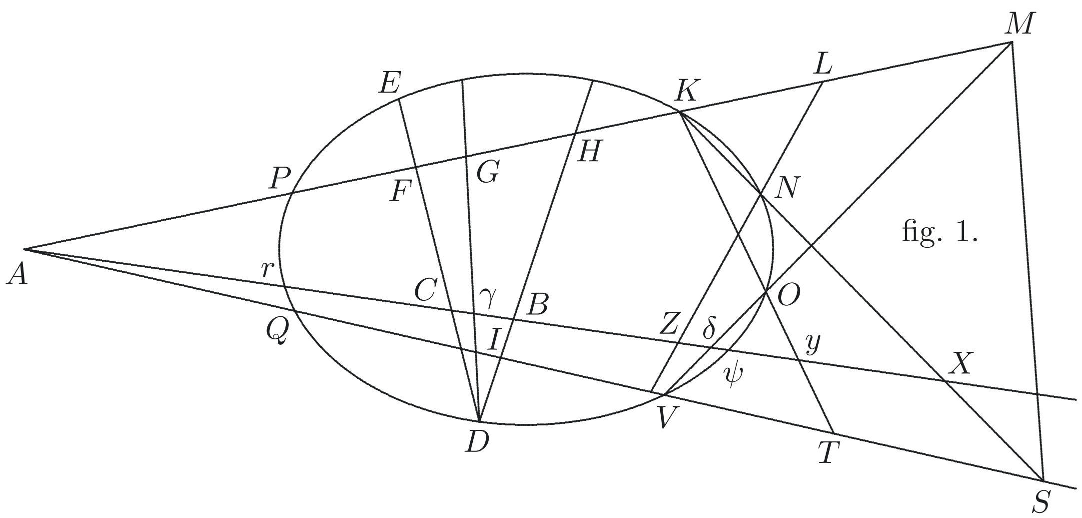
in Antobola	Parabola	hyperbola
verticalis parall: nequidem una[,] punctum deficiens nequidem unum.	una est parallela, unum est punctum deficiens.	duae verticales sunt parall:, duo sunt puncta deficientia.
Constat finita linea una	Una linea infinita	constat duabus lineis infinitis
comprehendit spatium finitum unum	Unum spatium infinitum	spatia duo infinita
series parall: nulla.	una series monosecantium	Duae sunt series monosecantium.

10 3 *erg. LiA* 19 duobus *A ändert Hrsg.*

64. MARGINALIEN IN PASCALS ESSAY POUR LES CONIQUES
[Januar – September 1676 (?)]

Überlieferung: *LiH* Marginalien in Bl. Pascal, *Essay pour les coniques*, Paris, 1640: LH 35 XV 1 Bl. 10. Druckschrift auf Bl. 10 v°, Vorderseite ursprünglich leer. Auf Bl. 10 r° in unbekannter Hand: „C o n i q u e s“, darunter Leibniz in anderer Tinte: „de M. Pascal“. Bl. 10 r° trägt darüber hinaus N. 65.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: Leibniz hat die Papiere von Pascal zu den Kegelschnitten wohl im Januar 1676 erhalten; vgl. seinen Brief an Oldenburg vom 28. Dezember 1675 (III, 1 N. 70 S. 329) sowie N. 61. In seinem Brief an E. Périer vom 30. August 1676 bittet er darum, eines der beiden in diesen Papieren enthaltenen Exemplare des Druckes behalten zu dürfen (III, 1 N. 90 S. 590). Seine Notizen dürfte er spätestens im September eingetragen haben.



[*Fig. 1*]

. . .

DEFINITION II.

Par le mot de section de Cone nous entendons la circonference du Cercle, l'Ellipse, l'Hyperbole, la Parabole & Langle rectiligne, d'autant qu'un Cone coupe parallelement à

---

13 *Leibniz markiert den Schnittpunkt der Linien MV und SK und ergänzt dort die Punktbezeichnung μ.*

sa base, ou par son sommet ou des trois autres sens qu'engendrent l'Ellipse, l'Hyperbole & la parabole engendre dans la superficie Conique, ou la circonference d'un Cercle ou un Angle, ou l'Ellipse, ou l'Hyperbole, ou la parabole.

...

LEMM. II.

...

Nous demonstrerons aussi que s'il y a trois droictes DE, DG, DH, que les droictes AP, AR, coupent aux poincts F, G, H, C, γ, B, & que dans la droicte DC, soit determiné le poinct E, la raison composée des raisons du rectangle EF, en FG, au rectangle de EC, en $C\gamma$, & de la droicte $A\gamma$, à la droicte AG, est la mesme que la composée des raisons du rectangle EF, en FH, au rectangle EC, en CB, & de la droicte AB, à la droicte AH. Et est aussi la mesme que la raison du rectangle des droictes FE, FD, au rectangle des droictes, CE, CD, partant si par les poincts E, D, passe une section de Cone qui coupe les droictes AH, AB, és poincts, P, K, R, ψ, la raison composée des raisons du rectangle des droictes EF, FC, au rectangle des droictes EC, $C\gamma$, & de la droicte γA, à la droicte AG, sera la mesme que la composée des raisons du rectangle des droictes FK, FP, au rectangle des droictes CR, $C\psi$, & du rectangle des droictes AR, $A\psi$, au rectangle des droictes AK, AP.

...

---

3 *Leibniz ergänzt hinter dem Satzende:* ou un point

12 *Leibniz ändert FD in ED.*

65. EXTRAIT DU BROUILLON PROJECT DE DESARGUES
[Januar – September 1676 (?)]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XV 1 Bl. 10. 12 Z. auf Bl. 10 r°. Auf Bl. 10 v° N. 64. — Gedr.: 1. Gerhardt, *Desargues und Pascal*, 1892, S. 196 f.; 2. Taton, *L'oeuvre*, 1962, S. 225 (Nachdruck 1964, S. 45).
Cc 2, Nr. 1497

Datierungsgründe: s. N. 64.

Mons: des Argues finit son *brouillon projet* par cecy:

Resultats de ce *brouillon projet*: en perspective: des droites sujet d'une quelconque même ordonnance, les apparences au tableau plat sont droites d'une même ordonnance entre elles et celle de l'ordonnance des sujets qui passe à l'oeil, la quelle est l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans de l'oeil et de chacune de ces droites sujet.

Touchant les monstres de l'heure au soleil: En quelconque surface plate les droites des heures sont d'une même ordonnance entre elles, et l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans qui donnent la division de ces heures.

Touchant la coupe des pierres de taille: En une même face de mur les arestes droites des pierres de taille sont communement d'une même ordonnance entre elles et l'essieu de l'ordonnance d'entre les plans des joints qui passent à ces arestes.

Et les divers moyens de practiquer chacune de ces choses en sont evidens.

8 finit: vgl. G. Desargues, *Brouillon project*, 1639, S. 30.

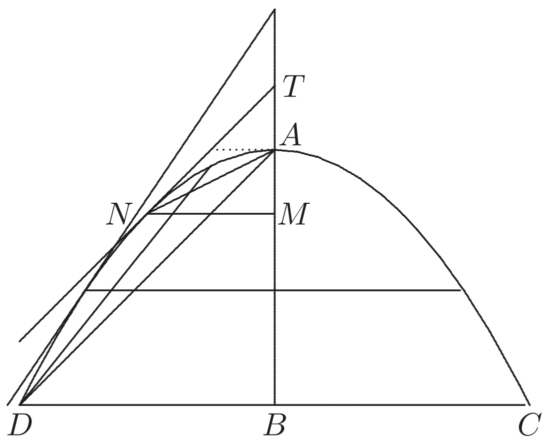
66. CIRCULI DIMENSIO. EXPRESSIO LOGARITHMICA. PRAEVIDERE QUAE AEQUATIO IDENTICA
[April (?) 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 343. Fragment eines Blattes, 21,2 cm × max. 11,2 cm, drei Kanten unregelmäßig beschnitten. 2 S. Bl. 343 bildete ursprünglich mit LH 4 III 9 Bl. 11–12 (VI, 3 N. 65, 72 u. 73), dat. April 1676, und LH 35 XIII 1 Bl. 412 (VII, 5 N. 73) einen vollständigen Bogen 2°.
Cc 2, Nr. 00

Datierungsgründe: N. 70 wurde nach dem von den Herausgebern auf die zweite Hälfte des Monats April 1676 datierten VI, 3 N. 72 und unterhalb von VII, 5 N. 73 auf den Bogen geschrieben.

Circ. dimens. Expressio logarithm.
Praevidere quae aequatio identica

[*Teil 1*]



[*Fig. 1*]

11 f. Circ. ... identica *erg. L*

14 *Fig. 1*: Der oberste Teil der Abbildung ist abgeschnitten; er befindet sich auf LH 35 XIII 1 Bl. 412 r°. Ein offensichtlich gelöschtes, einer Parabel ähnelndes Kurvenstück wird hier nicht wiedergegeben. In der Überschrift wird als erstes der Kreis genannt, und tatsächlich verwendet Leibniz in seiner Skizze einen Halbkreis anstelle der Parabel. Die Darstellung ist dadurch übersichtlicher, doch existiert unter dieser Voraussetzung kein Punkt N, so dass alle im weiteren postulierten Verhältnisse ($TM = 2AM$ und $MN = \sqrt{AM}$ sowie die Ähnlichkeit der Dreiecke TMN und ABD) gegeben sind.

$BC^2 \sqcap 1, AB.\quad AB \sqcap 1.$ erit $BC \sqcap 1.\quad DC \sqcap 2.\quad AD \sqcap \sqrt{2}.$

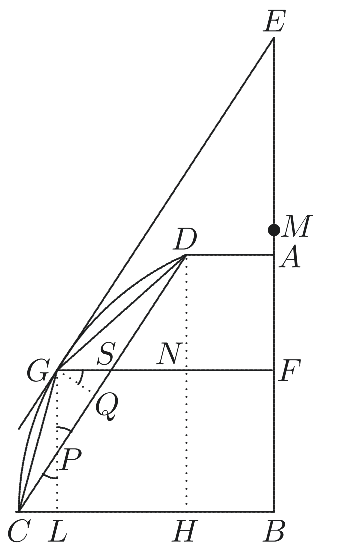
$\underset{\smile\smile}{ABD} \backsim \underset{\smile\smile}{TMN}$ seu $\dfrac{TM \sqcap 2AM}{MN \sqcap \sqrt{AM}} \sqcap \dfrac{AB}{BD}$ et $\sqrt{AM} \sqcap \dfrac{AB}{2BD}$ et $AM \sqcap \dfrac{AB^2}{4BD \sqcap AB}$.

Ergo $AM \sqcap \dfrac{AB}{4}$ et $\sqrt{AM^2 \boxed{+NM^2} AM} \sqcap AN \sqcap \sqrt{\dfrac{AB^2}{16} + \dfrac{AB}{4}}$.

$\overline{AB} \sqcap \overline{x}.\quad \overline{DB} \sqcap \overline{y}.\quad \overline{TM} \sqcap \overline{z}.$

$AD \sqcap \sqrt{x^2+y^2} \sqcap \omega.\quad \dfrac{z\,[\sqcap]\,TM}{(y) \sqcap MN}$ seu $\dfrac{d\overline{x}}{d\overline{y}} \sqcap A$ [*bricht ab*]

[*Teil 2*]



[*Fig. 2*]

1 *(1)* BC $\sqcap$ AB, $\sqcap$ *(a)* d *(b)* 1 *(2)* BC^2 $\sqcap$ 1, AB, | 1 *nicht gestr.* | *(a)* BC $\sqcap$ 1. *(b)* AB $\sqcap$ 1. *L*

3 Ergo AM $\sqcap \dfrac{\mathrm{AB}}{4}$ *erg. L*   4 f. $\overline{\mathrm{DB}} \sqcap$ *(1)* x^{z}. AD $\sqcap$ *(a)* $\overline{\mathrm{x}}$ *(b)* $\overset{\mathrm{z}}{\overline{\mathrm{x}}}$ *(2)* $\overline{\mathrm{y}}$. *(a)* AD $\sqcap \mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2$. *(b)* $\overline{\mathrm{T}\langle\mathrm{B}\rangle}$ *(c)* $\overline{\mathrm{TM}} \sqcap \overline{\mathrm{z}}$ *(aa)* DC *(bb)* | $\sqrt{}$ $\sqcap \overline{\varpi}$. *nicht gestr.* | *(cc)* ω *(dd)* DC $\sqcap$ 2y $\sqcap \omega$ *(ee)* AD $\sqcap$ *L*

---

2 $\backsim$: Das Zeichen symbolisiert die Ähnlichkeit der Dreiecke.   2 $AM \sqcap \dfrac{AB^2}{4BD \sqcap AB}$: Richtig wäre $AM = \dfrac{AB^2}{4BD^2} = \dfrac{1}{4}$ und folglich $AN = \dfrac{1}{4}\sqrt{5}$.

$AD \sqcap y$. $BC \sqcap \omega$. $DC \sqcap v$. $CH \sqcap \omega - y$.

$FG : EG :: \omega - y : v$ et $FG \sqcap \dfrac{EG, \omega - y}{v}$.

Jam $EG \sqcap FG\boxed{t}$. Ergo fiet $FG \sqcap FG\boxed{t}, \dfrac{\omega - y}{v}$ sive $\dfrac{FG}{FG\boxed{t}} \sqcap \dfrac{\omega - y}{v}$, seu $FG \sqcap \dfrac{\omega - y}{v}, \dfrac{1}{1}\boxed{t} \sqcap e$. Quod genus expressionis adhuc Logarithmico mirabilius: Sed in effectu perinde est ac si substituatur litera t et generaliter moneatur eam a litera $FG \sqcap e$ pendere.

$MF \sqcap e\boxed{x}$. $AM \sqcap y\boxed{x}$. Ergo $AF \sqcap DN \sqcap e\boxed{x} - y\boxed{x}$ et $DG \sqcap \sqrt{\overline{e-y}^2 + DN^2}$ seu $DG \sqcap \sqrt{\llcorner e^2 - 2ey + y^2 + \overset{\boxed{x}}{e}{}^2 - 2\,\overset{\boxed{x}}{e}, \overset{\boxed{x}}{y} + \overset{\boxed{x}}{y}{}^2 \lrcorner}$ et $CL \sqcap \omega - e$ et $GL \sqcap \overset{\boxed{x}}{\omega} - \overset{\boxed{x}}{e}$ et

1 *(1)* MB | $\sqcap$ *erg.* | x BC $\sqcap$ y. *(2)* AD $\sqcap$ y *L* 1 BC $\sqcap$ ω *(1)* $\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FG}}$ $\sqcap$ *(a)* $\frac{\mathrm{z}}{\mathrm{a}}$ *(b)* $\frac{\mathrm{t}}{\mathrm{a}}$ *(c)* $\frac{\mathrm{dy}}{\beta}$ *(2)* DC $\sqcap$ v *L* 2 f. $\frac{\mathrm{EG}, \omega - \mathrm{y}}{\mathrm{v}}$. *(1)* Rursus FG : EG *(a)* $\sqcap$ *(b)* :: d$\bar{\mathrm{y}}$: d$\bar{\xi}$: Nempe dy voco differentias ordinatarum, dξ. *(aa)* differentiam *(bb)* differentias arcuum, seu Elementum curvae, erit: *(2)* Iam *L* 3 EG $\sqcap$ *(1)* FG$\boxed{\mathrm{z}}$ *(2)* FG$\boxed{\mathrm{t}}$ *L* 3 fiet FG $\sqcap$ *(1)* FG$\boxed{\mathrm{z}}$, $\frac{\omega - \mathrm{y}}{\mathrm{v}}$ *(2)* FG$\boxed{\mathrm{t}}$, $\frac{\omega - \mathrm{y}}{\mathrm{v}}$ *L* 3 sive *(1)* FG v $\sqcap$ F *(2)* $\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FG}\boxed{\mathrm{z}}}$ *(3)* $\frac{\mathrm{FG}}{\mathrm{FG}\boxed{\mathrm{t}}}$ *L* 5 $\sqcap$ e *erg. L* 6 MF $\sqcap$ e$\boxed{\mathrm{x}}$ | AD *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ y$\boxed{\mathrm{x}}$ *L*
7 CL $\sqcap$ *(1)* $\omega + \mathrm{y}$ *(2)* $\omega - \mathrm{e}$ *L*

3 $FG\boxed{t}$: Gemeint ist der Tangentenabschnitt zu FG. Die Notation steht also für den Abstand des Berührpunktes einer Tangente von ihrem Schnittpunkt mit der Achse. Zunächst hatte Leibniz diese Größe als $FG\boxed{z}$ bezeichnet, das z dann aber durch t ersetzt. Vorstufen dieser Notation finden sich in den gelöschten Varianten zu S. 595 Z. 4 f. 3 f. $FG \sqcap \frac{\omega - y}{v}, \frac{1}{1}\boxed{t}$: Dies impliziert $FG\boxed{t} = 1\boxed{t}$, was im Allgemeinen nicht zutrifft. 6 $e\boxed{x}$: Die Notation steht für die zur Ordinate e (also FG) gehörende Abszisse. Diese Ausdrucksweise hält Leibniz für sehr leistungsfähig. 7 $\overset{\boxed{x}}{e}{}^2$: Leibniz verändert ein weiteres Mal die Notation. Es liegt also eine Entwicklungslinie vor — von den verworfenen Formen $x^{ⓩ}$ und $\frac{z}{x}$ über $x\boxed{z}$ bzw. $x\boxed{t}$ bis zu einer Schreibweise, die dasselbe als $\overset{\boxed{t}}{\mathrm{x}}$ ausdrücken würde.

$CG \sqcap \sqrt{\llcorner \omega^2 - 2e\omega + e^2, + \overset{\boxed{x}}{\omega}{}^2 - 2\,\overset{\boxed{x}}{\omega}\,\overset{\boxed{x}}{e} + \overset{\boxed{x}}{e}{}^2 \lrcorner}$ ubi pro e substitui potest ejus valor, supra inventus, itaque data natura curvae, quae explicat x, et proinde et t ad e vel y vel ω, habentur generaliter duae cordae inscriptae CG, GD ex datis AD, BC. Caeterum non video quomodo generaliter institui possit hic calculus sine puncto fixo M. Imo videtur succurrere ratio: Ex DA, BC datur CH. Ex CH, DC datur DH. Ex nota relatione EG ad FG et similitudine triangulorum EGF, DCH datur FG. Ex qua et CB datur CL. Ex CL datur LP ob $\bigtriangledown$ similia PLC.

[*Teil 3*]

Quaeritur jam punctum N seu recta DN. Ita enim daretur NH vel GL adeoque GC, GD. Fingamus dari DN dabitur et GN. Dabitur NS ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ DNS, DHC sim⟨ilia,⟩ ergo dabitur et SG, nempe $FN(\sqcap AD) + NS$ subtrahendo ab FG.

Jam aliunde quia datur DN, datur NH sive GL unde substrahendo datam PL restat GP. Dabuntur ergo omnia latera Trianguli GQP similis triangulo PLC ergo omnia latera Trianguli GQS. Ergo dabitur rursus QG. Datur ergo QG bis, adoeque comparando hos duos valores dabitur DN quae ingreditur in utrumque, modo non prodeat identica aequatio. Quod ita videbimus ipso calculo. Sit $DN \sqcap \varphi$, $SN \sqcap \dfrac{\psi}{a}\varphi$ et $GS \sqcap e - y - \dfrac{\psi}{a}\varphi$. Rursus $CL \sqcap \omega - e$. Ergo $PL \sqcap \dfrac{a}{\psi}\overline{\omega - e}$ et $GP \sqcap \overline{\omega - y}\,\dfrac{a}{\psi} - \varphi - \dfrac{a}{\psi}\overline{\omega - e}$ sive $GP \sqcap -y\dfrac{a}{\psi} - \varphi + \dfrac{ae}{\psi}$. $\dfrac{GQ}{GP} \sqcap \dfrac{CL}{CP}$. $\dfrac{DN \sqcap \varphi}{SN} \sqcap \dfrac{a}{\psi}$ seu $SN \sqcap \dfrac{\varphi\psi}{a}$ et $DS \sqcap \dfrac{\varphi}{a}\sqrt{\psi^2 + a^2}$ seu $\dfrac{DS}{\varphi \sqcap DN} \sqcap \dfrac{\sqrt{\psi^2 + a^2}}{a}$ et $\dfrac{DS}{SN} \sqcap \dfrac{\sqrt{\psi^2 + a^2}}{\psi} \sqcap \dfrac{CP}{CL} \sqcap \dfrac{GP}{GQ}$. Ergo $GQ \sqcap \dfrac{GP\psi}{\sqrt{\psi^2 + a^2}} \sqcap \dfrac{-ya - \varphi\psi + ae}{\sqrt{\psi^2 + a^2}}$. Denique $\dfrac{GS}{GQ} \sqcap \dfrac{DS}{DN} \sqcap \dfrac{\sqrt{\psi^2 + a^2}}{a}$ et fiet $GS \sqcap -y - \dfrac{\varphi\psi}{a} + e$ ut ante,

1 CG $\sqcap$ *(1)* $\llcorner\omega^2+$ *(2)* $\sqrt{\llcorner\omega^2}$ *L* 7–9 PLC. *(1)* Finga *(2)* Qvaeritur *L* 10 GN. dabitur | NQ. *ändert Hrsg.* | *(1)* $\bigtriangledown$ *(2)* et $\bigtriangledown$ *(3)* ob $\bigtriangledown^{\text{la}}$ | DNQ, *ändert Hrsg.* | DHC *L* 11 et *(1)* QG *(2)* SG *L* 11 ($\sqcap$ AD)+ *(1)* NQ *(2)* NS *L* 11 f. ab FG. *(1)* Iam A *(2)* Iam *L* 12 f. datam | GL. *ändert Hrsg.* | restat *L* 14 ergo QG *(1)* ex du *(2)* bis, *(a)* ex duobus principiis, uno *(b)* adeoqve *L* 15 dabitur *(1)* QG qvae *(2)* DN *L* 16 sit *(1)* DN $\sqcap$ x *(2)* DN $\sqcap$ φ *L* 17 f. GP $\sqcap$ $-\mathrm{y}\dfrac{\mathrm{a}}{\psi}$ | + *ändert Hrsg.* | $\varphi + \dfrac{\mathrm{ae}}{\psi}$ *L* 18 $\dfrac{\mathrm{CL}}{\mathrm{CP}}$ | $\dfrac{\mathrm{DN}}{\mathrm{SN}\varphi} \sqcap \dfrac{\psi}{\mathrm{a}}$. *ändert Hrsg.* | seu *L* 20 $\dfrac{-\mathrm{ya} + \varphi\psi + \mathrm{ae}}{\sqrt{\psi^2 + \mathrm{a}^2}}$ *L ändert Hrsg.*

quae aequatio identica est. Quare nihil novi inde duci potest, nec habetur valor ipsius φ quaesitus.

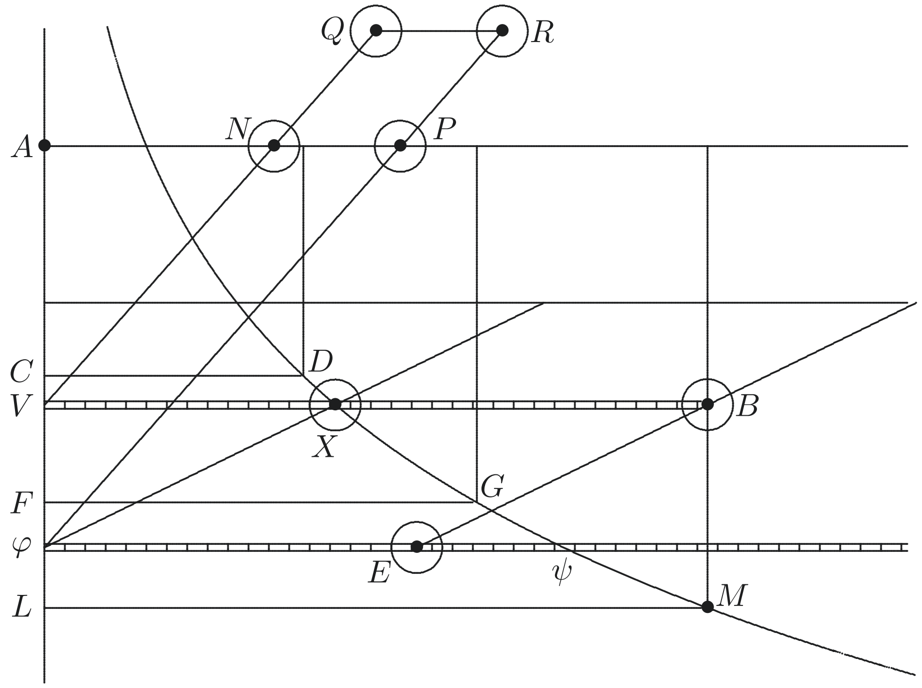
Operae pretium autem est exempla ejusmodi attente considerari, ut regula aliqua condatur, per quam ab initio ex sola linearum quam sine calculo feceram analysi agnosci possit, an prodituram fuerit aliquid identicum. Et sane id jam suspicabar, ideo quia videbam iisdem omnino datis utendum, ad unum pariter atque alterum ipsius GS valorem inveniendum, si vero ad unum valorem fuisset assumtum aliquod datum quod non fuisset assumtum ad alterum, tunc jam ab initio potuisset pro certo concludi duos produturos valores. Nondum vero asseverare possum in universum demonstratione cum id non fit semper prodituras identicas aequationes, posset enim ex iisdem datis diverso modo tractatis alius prodire valor.

5 sane *(1)* re *(2)* recte *(3)* id *L* 10 prodituras *(1)* propositiones *(2)* identicas *L* 10 aeqvationes possent *L ändert Hrsg.*

67. DE CURVA LOGARITHMICA
[Ende Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 311. 1 S. auf Bl. 311 r°. Auf derselben Seite unter dem Stück befindet sich VII, 1 N. 32, auf Bl. 311 v° ist VII, 3 N. 64. Ein ca 3 cm hoher Streifen, LH 35 V 6 Bl. 6, wurde oben vom Blatt abgeschnitten (darauf VII, 5 N. 78, datiert auf den 24. Mai 1676). Zusammen bilden sie ein Blatt 2°.
Cc 2, Nr. 1456

Datierungsgründe: Das Stück befand sich ursprünglich auf demselben Blatt wie das von Leibniz datierte Stück VII, 5 N. 78 und ist — wohl in kurzem zeitlichen Abstand — nach diesem abgefasst worden.



[*Fig. 1*]

11 *Fig. 1*: Die Figur weist einige Überarbeitungsspuren auf. So hat Leibniz den Punkt T in R und wohl auch S in Q umbenannt. Eine Anzahl anderer Punktbezeichnungen sowie mehrere Punktmarkierungen hat er gelöscht. Hierdurch ist unter anderem die Auszeichnung eines (in Analogie zu $NPRQ$ gebildeten) Parallelogramms $XBHZ$ wieder aufgehoben worden, und die (in Analogie zu VNQ und φPR gebildeten) *regulae* φXZ und EBH sind auf φX und EB beschränkt worden. In Leibniz' Figur sind VNQ und φPR gekrümmt, werden hier aber, der mathematischen Aussage entsprechend, als gerade Strecken wiedergegeben. Die Bedeutung weiterer gelöschter Teile der Figur lässt sich nicht mehr erschließen.

$CD^\omega + FG^\omega \sqcap LM$. Quaeritur ω. Curva DGM logarithmica est.

Sit $AN \sqcap AC$ et $AF \sqcap AP$. Et circa puncta N, P mobiles sint regulae VNQ, φPR quae jungantur regula transversa, QR. Ob mobile parallelogrammum, $NPRQ$ parallelae erunt NP, cum QR, et NQ, cum PR. Ab his NQ, PR impellantur regulae VX, $\varphi\psi$, logarithmicam secantes in X[, ψ] idque tamdiu, donec $VX + \varphi\psi$ fiant aequales LM. Erit enim $CD^\omega \sqcap VX$ et $FG^\omega \sqcap \varphi\psi$. Adeoque ω numerus secundum quem multiplicata est ratio seu Logarithmus ipsius CD nempe $AN \sqcap AC$ vel ratio seu logarithmus ipsius FG nempe $AP \sqcap AF$ erit ad unitatem ut AN ad CV, vel ut FP ad $F\varphi$. Habemus ergo ω.

Tantum superest effici ut ex ipso motu appareat, quando $XB \sqcap \varphi\psi$ seu quando $VX + \varphi\psi \sqcap LM$. Quam in rem sit regula φX, ejus unum punctum φ semper in φ regulae $\varphi\psi$ circa F tamen mobili regula existente punctum ejus X semper procedere potest in recta VB versus B. Sit et alia regula EB cujus punctum E mobile in $\varphi\psi$ immobile B in VB, tantum jam efficiendum ut $X\varphi$ et BE sint semper parallelae quod non videtur difficile; et quando E veniet in ψ motu habebitur quaesitum.

Ut possit reperiri aliquando etiam analytice modus reducendi $CD^\omega + FG^\omega \sqcap LM$ ad unum simplicem Logarithmum, videndum an non figura aliqua ex quadratura Hyperbolae pendeat, cujus aequatio transcendens sit hoc modo duplex. Aequatio autem transcendens invenietur eo modo quo in circulo sectione angulorum; videndum an quia tum idem

---

7 f. *Dazu am Rand:* quod idem est

1 *(1)* a$^\omega$+ *(2)* AB$^\omega$+ *(3)* CD$^\omega$ + FG$^\omega$ $\sqcap$ *(a)* HL *(b)* LM *L* 2 et *(1)* in regu *(2)* in | punct⟨is⟩ *erg.* | N. P. positis *(3)* circa puncta *(a)* mobil⟨ia⟩ *(b)* mobiles *L* 2 f. regulae *(1)* NQF. PRT. ponendo aliam regulam *(2)* VNQ. φPR qvae jungantur *(a)* duabus regulis transversis, NP, QR. etiam mobilibus, ita semper *(b)* regula *L* 4 NP, | cum *erg.* | | QF, et NS, *ändert Hrsg.* | | cum *erg.* | | PT. ab his NS, PT *ändert Hrsg.* | impellantur *L* 6 adeoqve, *(1)* ratio *(2)* ω *L* 7 ipsius *erg. L* 9 f. ergo ω. | sed jam video me lapsum *gestr.* | Tantum *L* 10 XB $\sqcap$ *(1)* VX. seu qvando $\varphi\psi$. *(2)* $\varphi\psi$ *L* 11 rem *(1)* punctum *(2)* puncta X. et φ. ferant regulam mobilem punctum X centrum mo *(3)* procedere potest a C. versus B. cum regula punctum φ. fixum in regula $\varphi\psi$. *(4)* sit regula *(a)* FX *(b)* φXZ *(c)* φX *L* 13 recta | CB *ändert Hrsg.* | versus *L* 13 cuius *(1)* mobile punctum E in Fψ *(2)* punctum *L* 14 in | CB *ändert Hrsg.* | , tantum *L*

---

8 unitatem: Tatsächlich verhält sich ω zur Einheit nicht wie AN zu CV oder wie FP (gemeint ist wohl AP) zu $F\varphi$, sondern wie AV zu AN oder wie $A\varphi$ zu AF. 19 eo modo: Vgl. III, 1 N. 96_2 S. 648–650.

possit fieri sectione in Hyperbola, quod sectione angulorum, et tunc jam tum haberetur ejusmodi aequatio; jam invento modo quo $CD^{\omega}+FG^{\omega}, \sqcap LM$, reduci possent ad א$^{\omega}$ $\sqcap$ ב non ideo tres ut $CD^{\omega}+FG^{\omega}+$מ$^{\omega}$ $\sqcap$ פת reduci possent, et opus foret altioris adhuc figurae quadratura. Imo videtur forte posse, unam aequationem in aliam inserendo.

Si sit aequatio $b+$ א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש^{z} $+\,a$ erit aequatio ad curvam. Seu locum quendam ob duas indeterminatas ω et z seu א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש^{z} foret determinata, nempe א$^{\frac{\omega}{z}}$ $\sqcap$ ש porro infinitae inveniri possunt curvae hujus: cujus aequatio $b+$א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש^{z}$+\,a$ ordinatae, ex data logarithmica, tantum enim scribemus: $b+y+$ א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש^{z} $+\,y+a$ et divellendo in duas ut ש^{z} $+\,y \sqcap b$ et א$^{\omega}$ $+\,y \sqcap a$. Unde ope unius inveniendo ω ex data curva logarithmica, ope alterius determinabimus z, unde reperientur tam z quam ω, eaeque semper aliae atque aliae, prout aliae atque aliae assumentur y. Itaque si z sint verbi gratia applicatae, et ω abscissae, habebitur curva, ad quam est aequatio א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש^{z} $\underset{e}{\boxed{\begin{array}{c}+a\\-b\end{array}}}$ per puncta descripta.

Et ope ejus solvi poterit quando erunt א$^{\omega}$ $\sqcap$ ש$^{\omega^{\cdots}}$ $+\,e$. Nempe si $\omega \sqcap \omega^{\cdots}$ invenienda, abscissa aequalis ordinatae, sin sit v. g. $\omega^{\cdots} \sqcap \omega^{2}$ solvetur problema intersectione hujus curvae cum parabola. Et ita porro. Si sit א$^{\omega}$ $+\,y \sqcap$ ש^{z} $+\,y$ necesse est determinatum esse problema, itaque divulsione in duas nihil agetur.

---

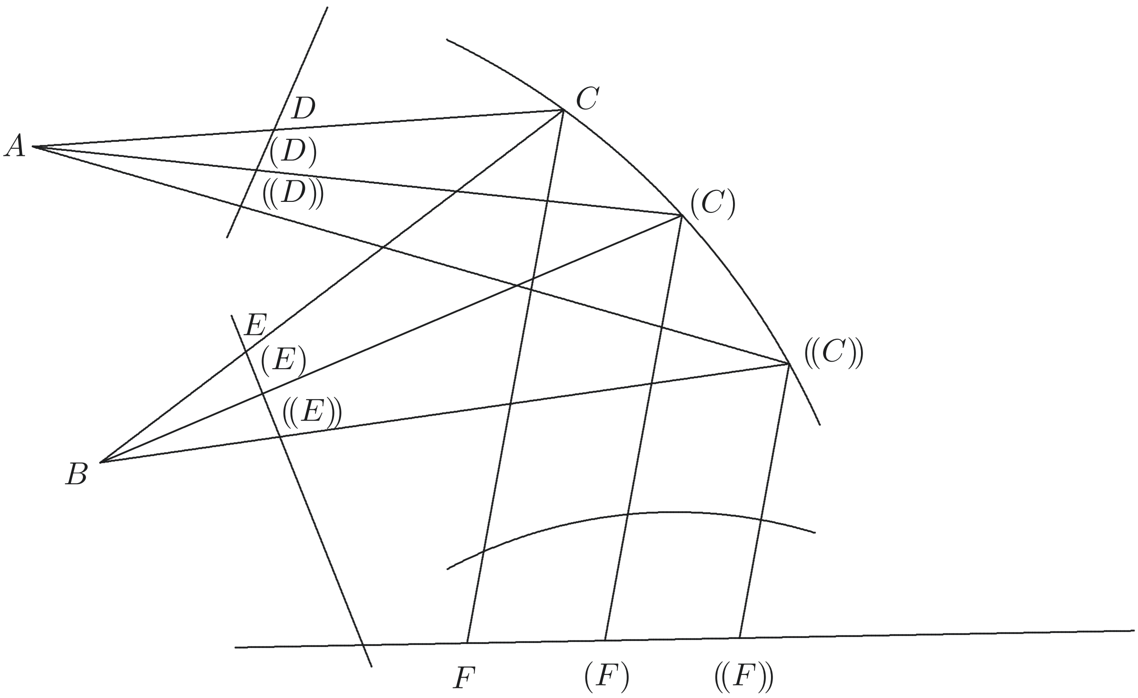
9 *Am Rande:* $b^0 \sqcap c^0 \sqcap 1$. Ergo ex $b^0 \sqcap c^0$ non sequitur $b \sqcap c$.

2 f. aeqvatio *(1)* si *(a)* duobus ⟨ex⟩ *(b)* duas res procederet, posset etiam ad tres promoveri; *(2)* ; jam ... possent | ad *erg. Hrsg.* | *(a)* x$^{\omega}$ *(b)* א$^{\omega}$ $\sqcap$ ב *(aa)* | possent etiam *nicht gestr.* | *(aaa)* CD$^{\omega}$. *(bbb)* ת$^{\omega}$ + פ$^{\omega}$ + מ$^{\omega}$ reduci ad *(bb)* non *L* 3 adhuc *(1)* curvae *(2)* figurae *L* 6 א$^{\frac{\omega}{z}}$ $\sqcap$ *(1)* z *(2)* ש *L* 7 huius *(1)* ordinatae, *(2)*: cuius *L* 7 ordinatae, *(1)* id *(2)* ex *L* 8 enim *(1)* divellemus in duas ⟨et⟩ *(2)* scribemus *L* 11 itaqve *(1)* curva *(2)* si *L* 11 f. et *(1)* b absci *(2)* ω *(3)* ω abscissae *L* 12 $\underset{\text{e}}{\boxed{\begin{array}{c}+\text{a}\\+\text{b}\end{array}}}$ *L ändert Hrsg.* 15 sit *(1)* א$^{\omega}$ $\sqcap$ *(2)* א$^{\omega}$ + $\underset{\text{y}}{\text{y}}$ $\sqcap$ *(a)* x *(b)* ש *(c)* ש$^{\omega}$ *(d)* ש^{z} *L*

68. DE ORDINATIS CONVERGENTIBUS
[Ende Mai 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 317. 1 Zettel ca 21 × 10,7 cm. $\frac{1}{2}$ S. auf Bl. 317 v°. Auf Bl. 317 r° VII, 5 N. 80.
Cc 2, Nr. 1428 B

Datierungsgründe: Auf der Vorderseite des Blattes befinden sich auf den 27. Mai 1676 datierte Notizen eines Gesprächs zwischen Leibniz und Tschirnhaus. N. 68 greift eine Überlegung der Studie *Analysis Tetragonistica* (VII, 5 N. 79), datiert 26. Mai 1676, auf (vgl. VII, 5 S. 539) und dürfte in zeitlicher Nähe dazu entstanden sein.



[*Fig. 1*]

Si AC et BC quandam habeant inter se relationem constantem aequatione expressam, erunt sibi mutuo ordinatae et abscissae. Item si recta quaedam convergentes secet ut $D(D)((D))$, possunt ipsae DC. assumi, eodem modo ipsae EC. vel etiam conjungi ipsis FC parallelis. Si $D(D)((D))$ vel $E(E)((E))$ vel $F(F)((F))$ non rectae sed arcus circulorum essent, poterunt utiliter ad analysin locorum adhiberi. Sed ut loca sint plana si circulus adhibendus est, opus erit et ipsam $C(C)((C))$ esse circularem, et haec erit generalissima locorum planorum tractatio. Egregie utilis ad constructiones. Nimirum si a circulo ad rectam vel circulum positione datas parallelae vel convergentes ducantur semel et aliter ad aliam, habebitur locus calculo.

2 f. , et ... constructiones. *erg. L*   3–5 Nimirum ... calculo *erg. L*

69. NOVA DE CONSTRUCTIONIBUS: CALCULUS GENERALIS DE SOLIDI ROTATIONE GENERATI SECTIONE PER PLANUM. USUS PROJECTIONUM AD CONSTRUCTIONES

4. Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XII 1 Bl. 344–345. 1 Bog. 2°. 4 S. Textfolge: obere $\frac{4}{5}$ von Bl. 344 r°, obere Hälfte von 345 v°, 344 v°, 345 r°, untere Hälfte von 345 v°, unteres Fünftel von 344 r°.
Cc 2, Nr. 1434.

Nova de Constructionibus.
Calculus generalis de solidi rotatione generati sectione per planum.
Usus projectionum ad constructiones

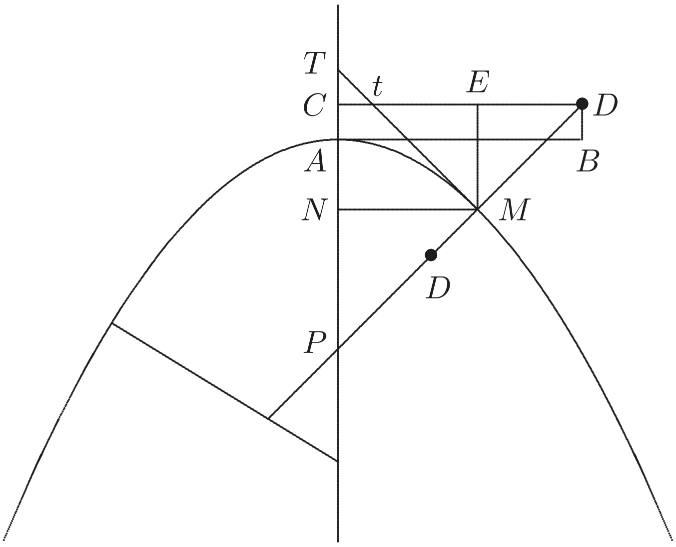
4 Jun. 1676

Nova Methodus constructionum, in quam olim non incidi. Praeter aequationes (duarum incognitarum) in problemate exhibitas, assumatur alia ad locum, quo uti volumus; haec prioribus ut lubet componatur, donec fiant duae ejusdem formae, sive unius incognitae sive plurium, quae comparabuntur. Compositio praevias habebit multiplicationes aequationum componendarum. Danda opera, ut literae quaerendae in se invicem non ducantur, ideo multiplicentur eas solum aequationes, quae omnes literas habent datas.

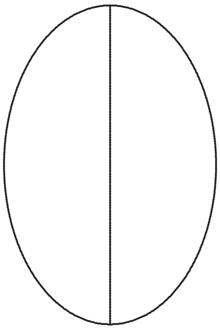
10–12 : calculus ... constructiones *erg. L*   14–19 Nova methodus constructionum, *(1)* ⟨sumatur⟩ *(2)* in qvam ... assumatur *(a)* tertia *(b)* alia ... datas. *erg. L*

[*Teil 1*]

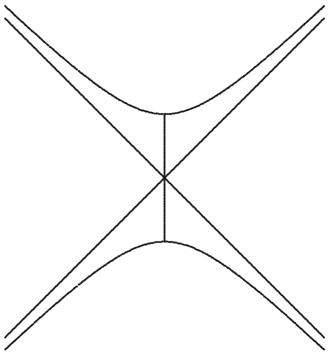
Calculus minimae ad Conicam ducendae



[*Fig. 1*]



[*Fig. 2*]



[*Fig. 3*]

1 *Bemerkung am oberen Rand:* Si Centrum Circuli sit in vertice sectionis Conicae semper poterit determinari plane, ubi curvam secet.

[*Erster Ansatz*]

$2ax \text{ǂ} \frac{a}{q}x^2 \overset{\odot}{\sqcap} y^2$. $TN \sqcap \theta$ fiet $\cancel{2}a\theta \text{ǂ} \cancel{2}\frac{a}{q}\theta x \sqcap \cancel{2}y^2$ et $\theta \sqcap \frac{y^2}{a \text{ǂ} \frac{a}{q}x}$ at $NP \sqcap \frac{y^2}{\theta}$.

Ergo $NP \sqcap a \text{ǂ} \frac{a}{q}x$. $\frac{NM \sqcap y}{NP} \sqcap \frac{ED \sqcap c-y}{EM \sqcap c+x}$. Et fiet: $yc+yx \overset{\text{☽}}{\sqcap} ca \text{ǂ} \frac{ca}{q}x, -ya \text{ǂ} \frac{a}{q}yx$ et $y \sqcap \frac{c\,\overline{a \text{ǂ} \frac{a}{q}x}}{c+x, + \overline{\overline{a \text{ǂ} \frac{a}{q}x}}}$. Sit $a \text{ǂ} \frac{a}{q}x \sqcap \omega$ fiet $x \sqcap \text{ǂ}\frac{q}{a}\omega \text{ǂ} q$ et $y \sqcap \frac{c\omega}{c+\omega \text{ǂ} \frac{q}{a}\omega \text{ǂ} q}$. $c \text{ǂ} q \sqcap r$ fiet $y \sqcap \frac{c\omega}{r+\omega \text{ǂ} \frac{q}{a}\omega}$ et $1 \text{ǂ} \frac{q}{a} \sqcap \frac{g}{a}$ fiet $y \sqcap \frac{c\omega}{r+\frac{g}{a}\omega}$.

$$y \sqcap \frac{2ax \text{ǂ} \frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \frac{c\,\overline{a \text{ǂ} \frac{a}{q}x}}{c+x+a \text{ǂ} \frac{a}{q}x}.$$

2 $\frac{\mathrm{y}^2}{\mathrm{a} \text{ǂ} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}$ | $\sqcap \frac{2\mathrm{ax} \text{ǂ} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2}{\mathrm{a} \text{ǂ} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}$ *gestr.* | at *L* 3 $\frac{\mathrm{NM} \sqcap \mathrm{y}}{\mathrm{NP} \mid \sqcap \frac{\mathrm{y}^2}{\theta}\ \textit{gestr.} \mid}$ $\sqcap$ *(1)* $\frac{\mathrm{CD} \sqcap \mathrm{d}}{\mathrm{CP}}$ *(2)* $\frac{\mathrm{ED} \sqcap \mathrm{c}-\mathrm{y}}{\mathrm{EM} \sqcap \mathrm{c}+\mathrm{x}}$ *L*

3 fiet: *(1)* $\sqrt{2\mathrm{a}}$ *(2)* $\mathrm{yc}+\mathrm{yx}$ *L* 3 f. $\text{ǂ}\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{yx}$ et $\mathrm{y} \sqcap$ *(1)* $\mathrm{ca} \text{ǂ} \frac{\mathrm{ca}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}$ *(2)* ca *(3)* $\frac{\mathrm{c}\,\overline{\mathrm{a} \text{ǂ} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}}{\mathrm{c}+\mathrm{x}, + \overline{\overline{\mathrm{a} \text{ǂ} \frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}}}}$ . . . fiet *(a)* $\mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{c}\omega}{\mathrm{c}+\mathrm{x}+\omega}$. *(b)* $\mathrm{x} \sqcap$ *L* 5 f. et 1ǂ | 1 *ändert Hrsg.* | $\sqcap \frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}}$ fiet $\mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{c}\omega}{\mathrm{r}+\frac{\mathrm{g}}{\mathrm{a}}\omega}$ | et $\mathrm{y} \sqcap \frac{\mathrm{c}^2\omega^2}{\mathrm{r}^2+\frac{2\mathrm{g}\omega}{\mathrm{a}}+\frac{\mathrm{g}^2}{\mathrm{a}^2}\omega^2}$ *gestr.* | $\mathrm{y} \sqcap$ *L*

3 $\frac{ED \sqcap c-y}{EM \sqcap c+x}$: Dies gilt nur, falls $CD = AC = c$, was im Allgemeinen nicht zutrifft. Die versehentliche Eingrenzung auf einen Spezialfall beschränkt den Wert der folgenden Überlegungen. Ab S. 609 Z. 2 setzt Leibniz noch einmal ohne diese Einschränkung neu an.

$$y^2 \sqcap \frac{c^2, a^2 \ddagger 2\frac{a^2}{q}x + \frac{a^2}{q^2}x^2}{c^2+2cx+x^2,+2ca \ddagger 2\frac{ca}{q}x + 2xa \ddagger 2\frac{xax}{q},,+a^2 \ddagger 2\frac{a^2}{q}x+\frac{a^2}{q^2}x^2}.$$

$$y^2 \sqcap \frac{c^2\ \boxed{2}\ \overline{a \ddagger \frac{a}{q}x}}{\boxed{2}\ \overline{c+x},,+2\,\overline{c+x},\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x},,+\boxed{2}\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}} \sqcap ax, +x\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}.$$

Sit aequatio ad circulum: $y^2+by+x^2+hx \overset{☿}{\sqcap} 0$ et $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2+by+x^2+hx \overset{A}{\sqcap} 0.$

$$2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \qquad \frac{c\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}}{c+x,+\overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}}$$

Tres aequationes, $2ax \ddagger \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ ad conicam datam; $y\ \overline{c+x},+y\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x} \sqcap c\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}$ inventa ob minimam ad Conicam ducendam, denique $y^2+by+x^2+hx \sqcap 0$ ad Circulum assumtum.

$$y \sqcap \frac{2ax\ddagger\frac{a}{q}x^2}{y} \sqcap \frac{-hx-b^2}{y+b} \quad \text{et} \quad 2axy \ddagger \frac{a}{q}x^2y,\ +2abx \ddagger \frac{a}{q}x^2b \sqcap -hyx-b^2y$$

3 y^2+by+x^2 | $+cx$ *ändert Hrsg.* | $\overset{☿}{\sqcap}$ … $+x^2$ | $+cx$ *ändert Hrsg.* | $\overset{A}{\sqcap}$ *L* 5 f. aeqvationes, *(1)* una da *(2)* 2ax … datam: *(a)* $yc+yx$ *(b)* $y\,\overline{c+x}$, … $\sqcap c\ \overline{a\ddagger\frac{a}{q}x}$ *(aa)* ad Conicam ducendam, ac *(bb)* inventa *(aaa)* ⟨ut⟩ *(bbb)* ob minimam *L* 6 $by+x^2$ *(1)* $+cx$ *(2)* $+hx$ *L* 8 $\ddagger\frac{a}{q}x^2b \sqcap$ *(1)* $-cyx$ *(2)* $-hyx$ *L*

8 $\frac{-hx-b^2}{y+b}$: Richtig wäre $y=\frac{-hx-x^2}{y+b}$. Dieses und weitere Versehen beeinträchtigen die folgenden Überlegungen bis zu ihrem Ergebnis auf S. 608 Z. 8.

$$\text{vel}\quad xy \sqcap \frac{c\;\overline{a \ddagger \frac{a}{q}x} - \underset{\cdot\, c}{ya}}{1 \ddagger \frac{a}{q} \sqcap \frac{\gamma}{a}} \sqcap \frac{-b^2y - 2abx \ddagger \frac{a}{q}x^2b}{a \ddagger \frac{a}{q}x \begin{array}{l}+h\\+2a\end{array}}$$

$$\text{sive}\quad c\,\boxed{2}\,\overline{a \ddagger \frac{a}{q}x},,\underset{2a}{+h}\,,c,\,\overline{a \ddagger \frac{a}{q}x},\underset{c}{-a}\,a\,y,\ddagger\frac{a}{q},\underset{+c}{+a},yx,\underset{2a}{-h}\,\underset{c}{y\,a} \sqcap \frac{\gamma}{a}b^2y - 2\frac{\gamma}{a}abx \ddagger \frac{a}{q}x^2b$$

Addatur huic aequationi ipsa ☉ multiplicata per arbitrariam l, seu, $2alx \ddagger \frac{al}{q}x^2 \sqcap \overset{B}{ly^2}$. Denique aequationi ☿ multiplicatae per l addatur aequatio ☽ multiplicata per arbitrariam m, fiet $ly^2 + lx^2 + lby + lhx \begin{array}{l}+m\\ \ddagger\frac{ma}{q}\,..\end{array} yx \begin{array}{l}+mc\\+ma\end{array} y \sqcap mca \ddagger \frac{mca}{q}x$. Et adhuc addatur ipsa A multiplicata per n, $2anx \ddagger \frac{na}{q}x^2 + bny + nx^2 + nhx \sqcap 0$. Erit terminus ly^2 utrobique et ob x^2, erit $\ddagger\frac{a}{q}b \ddagger \frac{al}{q} - \frac{ca^2}{q^2} \sqcap l \ddagger \frac{na}{q}$ et ob yx erit: $\ddagger\frac{a}{q} \frown \frac{a}{c} \sqcap +m \ddagger \frac{ma}{q}$ unde m absolute cognita.

---

6 *Dazu am Rand:* Displicet quod n in alias quaerendas multiplicata in his compositionibus.

4 multiplicatae per l *erg. L* 5 $\ddagger\frac{\mathrm{mca}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}$ *(1)* utriqve *(2)* et *L* 9 *(1)* ⟨erratu⟩ *(2)* displicet *L*

---

1 $\frac{-b^2y - 2abx \ddagger \frac{a}{q}x^2b}{a \ddagger \frac{a}{q}x \begin{array}{l}+h\\+2a\end{array}}$: Ein a im Nenner ist überzählig. 2 $\sqcap$: Die rechte Seite der Gleichung ist nicht korrekt ausmultipliziert. 7 ob x^2: Beim Aufstellen der Gleichung für die Koeffizienten von x^2 ist der Summand n verloren gegangen und das erste Doppelvorzeichen umgekehrt worden. Auch das erste Doppelvorzeichen der Gleichung für die Koeffizienten von yx ist umgekehrt.

[*Zweiter Ansatz*]

Ex puncto D ducere Minimam MD ad Sectionem Conicam datam AM.

Sit $AN \sqcap x$, A vertex, $NM \sqcap y$, est $2ax \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$. Quoniam datum est punctum M, datae sunt rectae $AC \sqcap DB \sqcap c$ et $AB \sqcap d \sqcap CD$.

$$\frac{DE \sqcap DC - NM \sqcap d - y}{EM \sqcap CN \sqcap c + x} \sqcap \frac{NM \sqcap y}{NP}$$

Sed operae pretium ipsas CE et EM sumere pro ordinata et abscissa, sit ergo: $CE \sqcap y$ et $EM \sqcap v \sqcap c + x$. Erit $x \sqcap v - c$ et explicando aequationem $2ax \pm \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ fiet $2av - 2ac \pm \frac{a}{q}v^2 \mp 2\frac{ac}{q}v \pm \frac{a}{q}c^2 \sqcap y^2$. Est $CD \sqcap d$ et $DM \sqcap p$. Erit $ED \sqcap d - y$ et fiet $DM^2 \sqcap p^2 \sqcap d^2 - 2yd + y^2 + v^2 - 2cv + c^2$. Ac $tE \sqcap t$ erit $\cancel{2}av \pm \cancel{2}\frac{a}{q}v^2 \mp \cancel{2}\frac{ac}{q}v \sqcap \cancel{2}yt$ et $t \sqcap \dfrac{av \pm \frac{a}{q}v^2 \mp \frac{ac}{q}v}{y}$ et $ED \sqcap d - y \sqcap \dfrac{y^2}{t} \sqcap \dfrac{2av - 2ac \pm \frac{a}{q}v^2 \mp 2\frac{ac}{q}v \pm \frac{a}{q}c^2,, y}{av \pm \frac{a}{q}v^2 \mp \frac{ac}{q}v} \sqcap d - y$.

$$y^2 \sqcap 2av - 2ac,, \pm \frac{a}{q}v^2 \mp 2\frac{ac}{q}v \pm \frac{ac^2}{q} \sqcap p^2, -d^2 + 2yd - v^2 + 2cv - c^2.$$

Et $y \sqcap \dfrac{2a, v - c,, \pm \frac{a}{q}\boxed{2}\ \overline{v - c},, + \boxed{2}\ \overline{v - c},, -p^2 + d^2}{2d} \sqcap \dfrac{2a, \overline{v - c} \pm \frac{a}{q}\boxed{2}\ \overline{v - c}}{y}$ et $y \sqcap$

2 puncto *(1)* dato A *(2)* D. *L* 4 rectae *(1)* DB ⊓ d et AB ⊓ a *(2)* AC *L* 7 CE ⊓ *(1)* c ⊓ d − y *(2)* y et EM ⊓ *(a)* ⟨x⟩. *(b)* v. *(aa)* erit *(bb)* ⊓ *L* 8 ⊓ y^2 *(1)* sit CD ⊓ y. *(2)* est *L*

1 *Zweiter Ansatz*: Auch die Erwägungen des neuen Ansatzes beziehen sich auf Fig. 1. Dies ist womöglich auch der Grund, warum dieser nicht auf der zweiten, sondern der vierten Seite des (gefalteten) Bogens zu finden ist: Leibniz konnte so die Figur auf dem ausgebreiteten Bogen bequem im Blick behalten. 9 p^2: Richtig wäre $p^2 = d^2 - 2yd + y^2 + v^2$. Dieser und weitere Fehler belasten die Überlegungen bis zu ihrem Abbruch auf S. 610 Z. 7. 9 $tE \sqcap t$: Hier werden also sowohl ein Punkt als auch eine Strecke als t bezeichnet. 10 $d - y \sqcap \frac{y^2}{t}$: Korrekt muss es $d - y \sqcap \frac{v^2}{t}$ heißen. Somit ist auch die folgende Gleichung nicht richtig.

$$\frac{2d, 2a, v-c,, \ddagger \dfrac{a}{q}, 2d, \boxed{2}\overline{v-c}}{2a, v-c,, \ddagger \dfrac{a}{q}\,\boxed{2}\overline{v-c},, \boxed{2}\overline{v-c},, -p^2+d^2} \sqcap \frac{2a, v-c,, \ddagger \dfrac{a}{q}\,\boxed{2}\overline{v-c},, +\boxed{2}\overline{v-c},, -p^2+d^2}{2d}.$$

Brevitatis causa pro $v-c$ restituatur x et pro $-p^2+d^2$, ponatur af, fiet:

$8d^2ax \ddagger 4\dfrac{a}{q}d^2x^2 \sqcap \boxed{2}\,\llcorner 2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2 + x^2 + af \lrcorner$. Sit $1 \ddagger \dfrac{a}{q} \sqcap \dfrac{g}{a}$, fiet: $\sqcap \boxed{2}\overline{2ax + \dfrac{g}{a}x^2 + af}$

et fiet $8d^2ax \ddagger 4\dfrac{a}{q}d^2x^2 \sqcap \dfrac{g^2}{a^2}x^4 + 4gx^3 \begin{smallmatrix} +2gfx^2 \\ +4a^2 \,.. \end{smallmatrix} + 4a^2fx + a^2f^2$ et ordinando:

$$x^4 + 4\frac{a^2}{g}\,x^3 + 2\frac{a^2f}{g}\,x^2$$
$$+ \;4\frac{a^4}{g^2}\quad ..$$
$$\ddagger \;\; 4\frac{a}{} \qquad \text{etc.} \qquad [\textit{bricht ab}]$$

[*Dritter Ansatz*]

Novum hic praeclarumque circa constructiones inventum; ut aequatione ad circulum assumta etiam pro arbitrio utamur, eam cum caeteris componendo:

$2ax \ddagger \dfrac{a}{q}x^2 \overset{(1)}{\underset{\odot}{\sqcap}} y^2$ ad conicam datam.

$y^2 + by + x^2 + hx \overset{(2)}{\underset{☿}{\sqcap}} 0$ ad circulum.

2 ponatur *(1)* aq. *(2)* af, 5 x^3 *(1)* $+2\mathrm{gfx}^2$ *(2)* $\dfrac{2\mathrm{a}^2\mathrm{f}}{\mathrm{g}}\mathrm{x}^2$ *L* 9 ut *(1)* aqvationibus assumtis utamur *(2)* aqvatione *L* 11 $\ddagger\dfrac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}\mathrm{x}^2$ *(1)* $\underset{\odot}{\sqcap}\,\mathrm{y}^2$ *(2)* $\underset{\odot\,(1)}{\sqcap}\,\mathrm{y}^2$ | ad conicam datam *erg.* | *L ändert Hrsg.* 12 hx *(1)* $\overset{☿}{\sqcap}$ *(2)* $\overset{☿}{\underset{(2)}{\sqcap}}\,0$ *L ändert Hrsg.*

$$\begin{array}{lllll} & & & \overset{(3)}{} & \\ yx & +a & y & \sqcap & \ddagger \frac{ca}{q}x + ac \\ \ddagger\frac{a}{q} & +c & \cdot & \text{☽} & \end{array}$$ ducta ex problemate.

---

1 *Nebenbetrachtung:*

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & -\,f\ xy & & & & & & \\
 & -\,lf\,x^2 & -\,l\ xy & -\,gl\ x & -\,g\ \ y & & & & \\
 & & \ddagger\,\frac{ea}{q}\,xy & & & & & & \\
\cancel{y^2} & \ddagger\,\frac{a}{q}\,x^2 & +\,e & -\,2a\ \ x & +\,ea\ \ y & -\,eac & \not{f} & y + l\,x & -\,g \\
 & & & \ddagger\,\frac{eca}{q} & +\,ec & & & & +\,ea \\
 & & & & & & & & +\,ec \\
\cancel{y} & +\,f\ x & +\,g & & & & & &
\end{array}$$

$$\begin{array}{rll}
-\,lf\ \ddagger\,\frac{a}{q} & \sqcap & 0 \\
-\,f\ -\,l\ \ddagger\,\frac{ea}{q} + e & \text{aequ.} & 0 \\
+\,fg - eaf - ecf & [\text{aequ.} & 0] \\
-\,gl\ -\,2a\ \ddagger\,\frac{eca}{q} & \text{aequ.} & 0 \\
g^2 - eag - ecg & [\text{aequ.} & 0] \\
-\,eac & \text{aequ.} & 0
\end{array}$$

1 $\begin{matrix}+\text{a y}\\+\text{c.}\end{matrix}$ *(1)* $\overset{☽}{\sqcap}$ *(2)* $\overset{☽\,(3)}{\sqcap}$ *L ändert Hrsg.*

2–15 In der Nebenbetrachtung bildet Leibniz ein Polynom auf der Grundlage von Gleichung (1) und dem e-fachen von Gleichung (3), formuliert darüber ein ähnliches Polynom, das er durch Polynomdivision in lineare Faktoren zu zerlegen versucht, und setzt dann zum Vergleich der Koeffizienten der beiden Polynome an. 11 aequ.: Leibniz wechselt unvermittelt vom Gleichheitszeichen $\sqcap$ zu dem von ihm in der Pariser Zeit nur selten verwendeten *aequ.*

Quodsi jam his utcunque tractatis duae fiant ejusdem formae (unius incognitae, vel duarum;) inter se comparabiles, habebitur inventa b et h seu circulus quaesitus.

Ex 1 et 2 fiet $2ax \text{ ǂ } \frac{a}{q}x^2 \overset{(4)}{\sqcap} -by - x^2 - hx.$

Ergo $y \overset{(5)}{\sqcap} \overset{\lambda}{\boxed{\begin{array}{l}+2a\\+h\end{array}}}\, x\, \overset{\gamma}{\boxed{\begin{array}{l}\text{ǂ}\,\frac{a}{q}\\+1\end{array}}}\, x^2 \smile -b.$

Ex 3 fit $y \overset{(6)}{\sqcap} \dfrac{\text{ǂ}\,\frac{ca}{q}x + ac}{\underset{\gamma}{\boxed{\begin{array}{l}+1\\ \text{ǂ}\,\frac{a}{q}\end{array}}}\, x\, \underset{\beta}{\boxed{\begin{array}{l}+a\\+c\end{array}}}} \overset{\text{ex 5}}{\overset{(7)}{\sqcap}} \dfrac{\frac{2a}{h}\, x + \gamma x^2}{-b}.$

Ex 6 $+y^2 \sqcap \dfrac{\frac{c^2a^2}{q^2}x^2 \text{ ǂ } 2\frac{c^2a^2}{q}x + c^2a^2}{\frac{\gamma^2}{a^2}x^2 + 2\frac{\gamma}{a}\beta x + \beta^2}.$

---

4 *Notiz hierzu auf der anderen Bogenhälfte:* $\begin{array}{l}+by \sqcap -2a\,x + \frac{\gamma}{a}x^2\\ +x^2 \quad\;\; -h\\ +hx\end{array}$

1 utcunqve *(1)* compositis *(2)* tractatis *L* 3 ex *(1)* ☉ et ☿ *(2)* 1. et 2 *L* 6–613,3 ex 6. ... fiet *(1)* $2\frac{\gamma^2}{a}x^3$ *(2)* $\text{ǂ}\frac{a}{q}, \frac{\gamma^2}{a^2}x^4 \ldots +\beta^2\, 2ax$ | $\sqcap \frac{c^2a^2}{q^2}$ *gestr.* | | $\sqcap$ 0. *erg. Hrsg.* | ... $-c^2a^2$ *erg. L*

$$\begin{array}{llll} \text{Inserendo in aeq. 1 fiet } \text{ǂ}\,\dfrac{a}{q},\dfrac{\gamma^2}{a^2}\,x^4 & +\ 2a\dfrac{\gamma^2}{a^2}\ x^3 & +\ 2\dfrac{\gamma}{a}\beta\ 2a\ x^2 & +\ \beta^2\ 2a\ x \quad \sqcap 0. \\ & \text{ǂ}\ \dfrac{a}{q}2\dfrac{\gamma}{a}\beta\ \cdot\cdot & \text{ǂ}\ \ \dfrac{a}{q}\beta^2 & \cdot\cdot \\ \hline & & -\ \dfrac{c^2a^2}{q^2}\ \ x^2 & \text{ǂ}\ 2\dfrac{c^2a^2}{q}\ x - c^2a^2 \end{array}$$

$$\text{ǂ}\,\frac{cab}{q}x - bac \overset{(8)}{\sqcap}\ \ \underset{\substack{\boxed{\begin{smallmatrix}+a\\ c\end{smallmatrix}}\ \boxed{\begin{smallmatrix}2a\\ h\end{smallmatrix}}\\ \beta\qquad\lambda}}{\gamma\ \ \overset{\lambda}{\boxed{\begin{matrix}2a\\ h\end{matrix}}}}\ x\ +\gamma^2\,x^3 + \overset{\beta}{\boxed{\begin{matrix}a\\ c\end{matrix}}}\,\gamma\,x^2.$$

$$y^2\ \ \overset{\substack{\text{ex } 5\\ (9)}}{\sqcap}\ \ \frac{\gamma^2x^4 + 2\gamma\lambda x^3 + \lambda^2x^2}{b^2}\ \ \overset{\substack{\text{per } 1\\ (10)}}{\sqcap}\ \ 2ax\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q}x^2.$$

$$\text{Ergo}\ \ \gamma^2x^3 + 2\gamma\lambda x^2 + \begin{matrix}\lambda^2\\ \text{ǂ}\,\dfrac{b^2a}{q}\end{matrix}\ x - 2ab^2\ \overset{(11)}{\sqcap}\ 0\ \ \text{ex 10, divisa per } x.$$

$$\text{Aeq. 11 comparanda } 8^{\text{vae}}\quad \gamma^2x^3 + \beta\gamma x^2 + \begin{matrix}\gamma\lambda\\ +\,\beta\lambda\\ \text{ǂ}\,\dfrac{cab}{q}\end{matrix}\ x + bac\ \overset{(12)}{\sqcap}\ 0.$$

---

1 $\frac{\gamma^2}{a^2}$: Abweichend von seiner Setzung in S. 612 Z. 5 arbeitet Leibniz in dieser Ergänzung und zum Teil auch im weiteren Verlauf des Stückes mit $1\ \text{ǂ}\ \frac{a}{q} = \frac{\gamma}{a}$. 4 $\overset{(8)}{\sqcap}$: Auf der rechten Seite fehlt beim ersten Term die Potenz; es muss $\gamma\lambda x^2$ heißen. Der Term $\beta\lambda x$ wird dadurch falsch angeordnet. Der Fehler wird in Gleichung (12) übernommen und belastet die Gleichungen in S. 614 Z. 7 f.

Ubi quoniam tres comparandi sunt termini, duae vero tantum literae habentur comparatitiae, ideo duabus artibus defectus arbitrariarum suppleri potest, vel multiplicando datas aequationis radices, vel augendo et minuendo arbitraria quantitate, credo simpliciorem fore multiplicationem hoc loco. Sed adhuc tamen metuo ne facta ex comparatitiis aeque sit difficilis ac data.

$b \sqcap \dfrac{ac}{2}$ et $\lambda \sqcap \dfrac{\beta}{2}$ ex aequationibus ultimis inserendo in medias fiet:

$$\frac{\beta^2}{4} \pm \frac{c^2a}{4q} \sqcap \frac{\gamma\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2} \pm \frac{c^2a}{q}$$

$$\text{seu} \quad -\frac{a^2+2ac+c^2}{4} \pm \frac{c^2a}{4q} \sqcap \frac{a+c}{2} \mp \frac{a^2}{2q} \mp \frac{ac}{2q} \pm \frac{c^2a}{q}$$

Sed non omnia consentiunt, nec vero id sequitur ex prioribus, debere consentire. Si poneremus Circuli et Conicae Sectionis ordinatas angulum habere arbitrarium, et quaeri postea hunc angulum talem, ut aequationi huic novissimae satisfieri possit; forte res succederet, et foret ista sane ratio simplicissima. Sed vereor ut res succedat ob minimam, quae angulo est recto. Ita forte utile ponere pro aequatione ad Conicam, $mx \mp \dfrac{a}{q}x^2 \sqcap y^2 + ny$, nec ideo difficilius reperietur aequatio 3. caeteraque; ut puto eodem procedent modo.

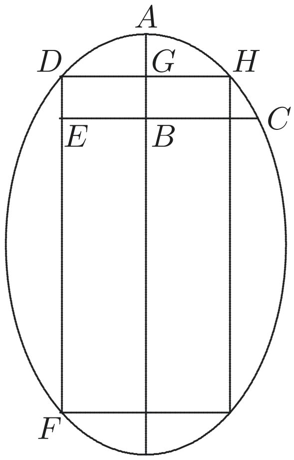
---

7 f. *Nebenbetrachtung:* Est autem $\beta \sqcap a+c$ et $\beta^2 \sqcap a^2+2ac+c^2$ et $\dfrac{\gamma}{a} \sqcap \dfrac{q \mp a}{q}$. $\dfrac{\gamma}{a} \sqcap 1 \mp \dfrac{a}{q}$. $\gamma\beta \sqcap a+c \mp \dfrac{a^2}{q} \mp \dfrac{ac}{q}$.

1 tres | tantum *gestr.* | comparandi *L* 1 tantum *erg.* *L* 12 ob *(1)* angulum *(2)* minimam *L* 16 et *(1)* γ *(2)* $\dfrac{\gamma}{a} \sqcap$ *(a)* $\dfrac{a \mp a}{a}$ *(b)* $\dfrac{q \mp a}{q}$ *L*

---

7 $\sqcap$: Aus dem Vergleich der Koeffizienten der x-Terme der Gleichungen (11) und (12) folgt richtig $\dfrac{\beta^2}{4} \pm \dfrac{c^2a^3}{4q} \sqcap \dfrac{\gamma\beta}{2} + \dfrac{\beta^2}{2} \mp \dfrac{c^2a^2}{q}$. Der Fehler belastet auch die folgende Gleichung. 17 $\gamma\beta$: Hier verwendet Leibniz erneut die Setzung $\gamma = 1 \mp \dfrac{a}{q}$ anstelle von $\dfrac{\gamma}{a} = 1 \mp \dfrac{a}{q}$. Der entsprechende Wert für $\gamma\beta$ geht in die Gleichung in Z. 8 ein.



[*Fig. 4*]

$AB \sqcap x$. $BC \sqcap y$. Erit $2ax \;\overline{+}\; \frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$: $AG \sqcap b$. $\overline{GD}^2 \sqcap 2ab \;\overline{+}\; \frac{a}{q}b^2 \overset{(13)}{\sqcap} \delta^2$.

$FD \sqcap 2q - 2b$. $DE \sqcap z \sqcap x - b$ et $x \overset{(15)}{\sqcap} z + b$. Et $CE \sqcap \varphi \sqcap y + \delta$ et $y \overset{(14)}{\sqcap} \varphi - \delta$.

Unde pro $2ax \;\overline{+}\frac{a}{q}x^2 \sqcap y^2$ fiet

$$2az + \cancel{2ab}, \overline{+}\frac{a}{q}z^2 \;\overline{+}\; 2\frac{a}{q}bz \; \boxed{\cancel{\overline{+}\frac{a}{q}b^2}} \quad \underset{\substack{\text{in locum}\\ \text{aeq. 1}}}{\overset{(16)}{\sqcap}} \quad \varphi^2 - 2\varphi\delta + \underbrace{\delta^2}_{\cancel{2ab}\ \boxed{\cancel{\overline{+}\frac{a}{q}b^2}}}$$

Valor hic ipsarum y et x inseratur et in aeq. 3. Pro yx fiet $\varphi z - \delta z + b\varphi - \delta b$ et scribetur

$$\frac{\gamma}{a}\varphi z - \frac{\gamma}{a}\delta z + \frac{\gamma}{a}b\varphi - \frac{\gamma}{a}\delta b + \beta\varphi - \beta\delta \overset{(17)}{\sqcap} \;\overline{+}\; \frac{ca}{q}z \;\overline{+}\; \frac{ca}{q}b + ac$$

3 | et x $\overset{(15)}{\sqcap}$ z + b *erg.* | et | HD *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ *L* 4 2ax | $-\frac{\mathrm{a}}{\mathrm{q}}$ *ändert Hrsg.* | x^2 *L* 6 hic *(1)* insera *(2)* in *(3)* ipsarum *L* 6 aeq. 3. *(1)* | fiet: *nicht gestr.* | ⟨a y⟩ *(2)* yx $\sqcap$ φz *(3)* pro yx *L* 6 f. et *(1)* stabit *(2)* scribetur *L*

$$\text{et}\quad \varphi \overset{(18)}{\sqcap} \begin{array}{llll} \ddagger \dfrac{ca}{q}z & \ddagger \dfrac{ca}{q}b \smile & \dfrac{\gamma}{a}z + \dfrac{\gamma}{a}b \\ +\dfrac{\gamma}{a}\delta\,\cdot & +\;ac & \quad +\;\beta \\ & +\dfrac{\gamma}{a}\delta b & \end{array} \quad \text{in locum aequationis 6.}$$

Pro aequatione 16 compendii causa aliam faciamus, in locum $2a \ddagger 2\dfrac{ab}{q}$ scribentes $\overset{(19)}{\sqcap}\lambda$ fiet $\ddagger\dfrac{a}{q}z^2+\lambda z+2\delta\varphi \overset{(20)}{\sqcap} \varphi^2$ aequatio in locum aeq. 1 ad Conicam scilicet datam.

Jam in locum aeq. 2 scribatur $+\varphi^2+z^2-e\varphi-hz \overset{(21)}{\sqcap} 0$ aequatio ad Circulum.

Ergo ex 20 et 21 fiet $\begin{array}{lll}\ddagger\dfrac{a}{q}z^2 & +\lambda z & +2\delta\varphi \overset{(22)}{\sqcap} 0. \\ -1 & +h\,\cdot & +e\end{array}$ Quae aequatio in locum est aequationis 4.

Unde $\varphi \overset{(23)}{\sqcap} \dfrac{\dfrac{\gamma}{a}\boxed{\begin{array}{c}+1\\ \ddagger\dfrac{a}{q}\end{array}}\begin{array}{l}z^2-\lambda z\\ \quad -h\end{array}}{+2\delta+e}$ in locum aequationis 5.

Qui valor aequandus valori 18 in quo $\dfrac{\gamma}{a}\delta \ddagger \dfrac{ca}{q}$. Compendii causa vocemus $\overset{(24)}{\sqcap}\mu$ et $\dfrac{\gamma}{a}b+\beta$ quae tota cognita vocemus $\overset{(25)}{\sqcap}\pi$ et erit $\varphi \overset{(26)}{\sqcap} \dfrac{\begin{array}{c}\mu z+\mu b\\ +ac\end{array}}{\dfrac{\gamma}{a}z+\pi}$ ex 18. Et aequando cum 23 habebitur aequatio:

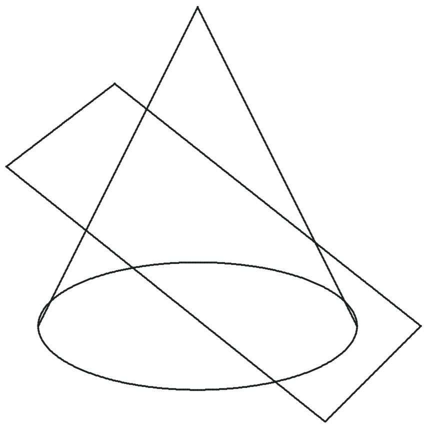
4 2a *(1)* $\ddagger$ *(2)* + *(3)* | + *ändert Hrsg.* | *L* 5 fiet *(1)* ⟨a⟩ *(2)* λ *(3)* $\varphi^2 \ddagger \frac{a}{q}z^2 - 2\delta\varphi + \lambda\varphi \sqcap 0$ *(4)* ⟨a⟩ *(5)* $\ddagger\frac{a}{q}z^2$ *L* 5 ad ... datam *erg. L* 6 aeq. *(1)* ☿ *(2)* 2 scribatur *(a)* $+\varphi^2 \ddagger z^2 + e\varphi + hz \sqcap 0$ *(b)* $+\varphi^2$ *L*

7 fiet: Folgerichtig wäre $(\ddagger\frac{a}{q}+1)\,z^2+(\lambda-h)\,z+(2\delta-e)\,\varphi=0$. Der Fehler geht in die Gleichungen (23) und (27) ein.

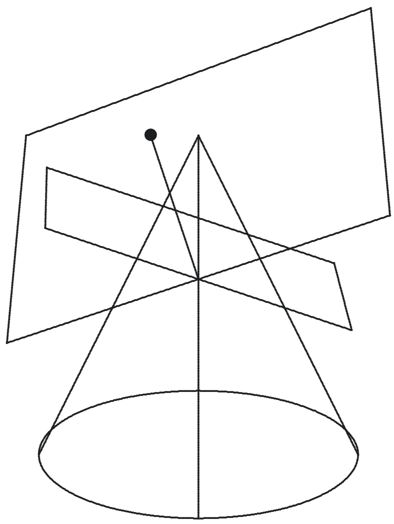
$$\begin{array}{llllllll}
\frac{\gamma^2}{a^2}\,z^3 & -\frac{\gamma}{a}\frown & +\,\lambda\,z^2 & -\,\pi\frown & \lambda\;\;z & -\,\mu b\frown & +\,2\delta & \overset{(27)}{\sqcap}\;\;0 \text{ loco aequationis 8.}\\
 & & +\,h\;\cdot\cdot & & h & -\,ac & +\;e & \\
 & & -\,\pi\;\cdot\cdot & -\,\mu & 2\delta\;\cdot\cdot & & & \\
 & & & & +e\;\cdot\cdot & & &
\end{array}$$

[*Teil 2*]

[*Erster Ansatz*]



[*Fig. 5*]



[*Fig. 6*]

Ex vertice Coni omnes sectionum projectiones in basi sunt circuli aut potius ipsa basis, quae est circulus. Si in plano secante ducatur recta, ejus projectio est recta. Hinc intersectio quaevis rectae et sectionis Conicae ope Geometriae planae haberi potest, quia

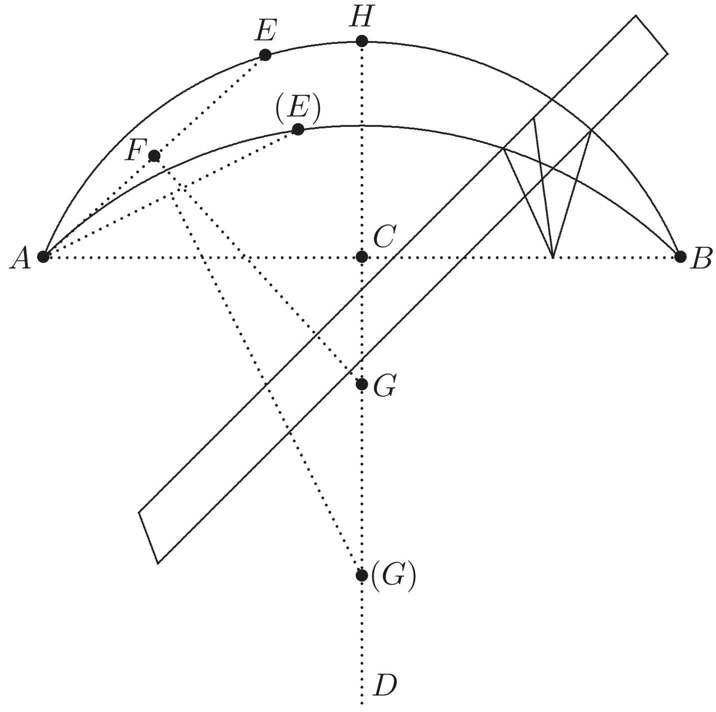
8 Ex *(1)* Centro *(2)* vertice *L* 8 f. aut ... circulus *erg. L*

8 circuli: Die Projektion einer Parabel oder einer Hyperbel auf die Grundfläche des Kegels ergibt keinen vollständigen Kreis, sondern lediglich ein Kreissegment.

in basi projectio hujus intersectionis est intersectio rectae et Circuli. Hinc et tangens sectionis Conicae definitur per tangentem rectae et circuli. Videndum an minima omnium ex puncto dato ad sectionem Conicam ductarum, sit etiam minima projectarum, quod non puto neque enim angulum rectum faciet ad tangentem in projectione. Quoniam minimam ducere idem est quod circulum describere, qui sectionem tangat; circulus autem projectus fit ellipsis hinc in plano projectionis ubi sectio fit circulus et circulus fit ellipsis, res eo reducitur, ut inveniamus ubi Ellipsis haec circulum tangat, seu ex dato puncto velut centro describere Ellipsin, quae circulum aliquem tangat, quod plane fieri posse non puto. Verum videndum, an non sit remedium. Itaque in locum baseos aliud sumamus planum pro plano projectionis et videamus an tale eligere possumus, in quo et sectio projecta sit Circulus et Circulus projectus sit Circulus. Vel si id fieri non potest, quaerendum est aliud punctum praeter verticem Coni; ex quo spectatus circulus qui tangere debet sectionem, in basi Coni projiciat Circulum. Quod punctum plane equidem inveniri non potest, quaerenda ergo methodus[,] cujus ope per ipsam sectionem datam possit reperiri. Conemur perficere hanc doctrinam de projectionibus; videtur enim pulcherrima, et videndum, quomodo ostendat rationem solvendi problemata solida. Ut si problema solvi possit in plano dato intersectione quarundam curvarum seu loco, videndum quid dent haec loca projecta. Pulchrae hinc viae deprimendi problemata.

Si ponerentur radii lucis ire in linea circulari, rem hoc loco imaginari licebit; ut assumantur duo puncta fixa, et per ea et tertium datum ducatur Circulus, cujus circumferentia erit radius lucis. Et hinc licebit examinare novum projectionum genus. Et hinc uno puncto servato, altero mutato infiniti habebuntur modi projiciendi ex eodem vertice. Loquamur hic de uno tantum modo, assumtis scilicet duobus punctis. Sint duo puncta assumta A, B, bisecetur AB in C; et recta DC perpendicularis ad AB continuata indefinite transibit per omnia centra circulorum in quorum circumferentiis diffunditur lux. Sit enim punctum datum E, juncta AE, bisecetur in F, ducatur FG ipsi AE perpendicularis, occurrens ipsi DC in G. Patet G fore centrum circuli AEB, per A, E, B transeuntis. Itaque

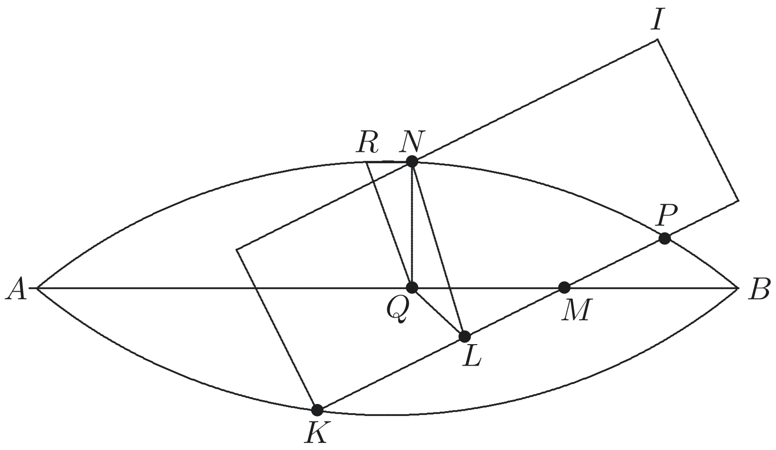
1 est *(1)* projectio *(2)* intersectio *L* 4 f. qvoniam *(1)* minima ad *(2)* minimam *L* 9 an *(1)* alia in horum locum *(2)* non *L* 9 locum *(1)* huius *(2)* baseos *L* 10 f. qvo *(1)* uterqve circulus maneat circulus *(2)* et sectio *(a)* sit ⟨cir⟩ *(b)* projecta *L* 13 debet *(1)* rectam *(2)* sectionem *L* 13 punctum *(1)* Geometrice *(2)* plane *L* 14 potest, *(1)* viden *(2)* qvaerenda *L* 17 videndum *(1)* qvomodo *(2)* qvid *L* 23 Loqvamur ... punctis *erg. L* 24 A. B. *(1)* tertium *(2)* bisecetur *L* 24 perpendicularis ad AB *erg. L* 25 in *(1)* qvibus diff *(2)* qvorum *L*



[*Fig. 7*]

si centris quotcunque G radiisque totidem GA descriptiae intelligantur Circuli circumferentiae, AEB, habebitur locus radiorum in hoc plano in quo est recta $CG(G)$. Sed quoniam ex rectae AB puncto C, infinitis modis educi potest CG seu ipsa CG manente situ perpendiculari ad AB; rotata intelligi potest circa C. Cumque idem semper in omni plano futurum sit, intelligi potest, rectam CG rotatam circa rectam ACB, secum rotare arcus AEB, ac proinde locus omnium radiorum lucis ex puncto A ad punctum B circulariter diffusorum continebitur inter certos limites contentorum, ut scilicet nec ultra E, nec ultra (E) excurratur. Continebitur annulo solido $AEB(E)A$ circa AB voluto; sed melius limites sic assignabuntur, si maximo aliquo assumto arcu circuli quocunque ut AEB et minimo, qui degenerat in rectam AB, ⟨s⟩egmentum $ABEA$ rotemus circa AB subtensam; quodsi AEB talem assumamus, ut sit semicirculus diametri AB erit sphaera locus quaesitus. Generalius autem loquendo res redibit ad Sectionem fusi Circularis seu s p h a e r a s t ⟨r⟩ i . Sectio per medium seu per rectam CG est planum maxime determinatum; id autem est circulus. Semper enim CH eadem in quocunque plano; durante rotatione, imo generaliter omnis sectio per planum perpendiculare ad AB est circulus ut patet. Sectio per AB axem est ipsum segmentum duplum AEB.

1 f. radiisqve *(1)* qvibusq *(2)* totidem *L* 3 f. circumferentiae, *(1)* AC *(2)* AEB *(a)* et circa *(aa)* ⟨ax⟩ *(bb)* ipsam AB, velut axem rotatae, ut qvod in uno plano fit in aliis *(b)* habebitur *L* 10 ad AB *erg. L* 18 f. continebitur *(1)* solido diff *(2)* inter *L* 21 continebitur *(1)* duobus velut *(2)* annulo *L* 21 f. voluto; *(1)* etsi *(2)* sed *L* 24 semicirculus *(1)* circulus *(2)* diametri *L* 25 f. fusi *(1)* sphae *(2)* Circularis | seu s p h a e r a s t ⟨r⟩ i *erg.* | *L*



[*Fig. 8*]

Quaeruntur aliae sectiones, ut si plano INK secetur. Ponatur rectam AB ab hoc plano secari in M. Axis sectionis est recta PK communis plano secanti et generanti. Ponatur autem planum secans perpendiculare generanti, nam si non esset, semper posset tale assumi planum generans, ut fieret ei tale, quia quaelibet sectio solidi secundum axem pro plano generante sumi potest. Quaeritur jam sectio solidi, seu qualis sit curva, in qua planum superficiem sphaerastri secat. Punctum intersectionis aliquod sit N, ex eo demittatur NL perpendicularis ad PMK, ejusque longitudo inventa dabit locum punctorum N aliorum, invenietur autem NL hoc modo: ex N demittatur NQ perpendicularis

---

1 *Am Rand, schräg unter Fig. 8:* $AB \sqcap a$. $BM \sqcap b$. $BQ \sqcap x$. $QN \sqcap y$. $\square$ in aequatio $y^2 + x^2 \sqcap fy + gx$.

2 ponatur *(1)* unum *(2)* rectam *L* 3 in M *(1)* ut vertices sectionis, seu puncta ubi demissae et vertices *(2)* axis *L* 7 superficiem *(1)* sphaeriform *(2)* sphaerastri *L* 9 modo: *(1)* ex AB *(2)* et *(3)* ex *L*

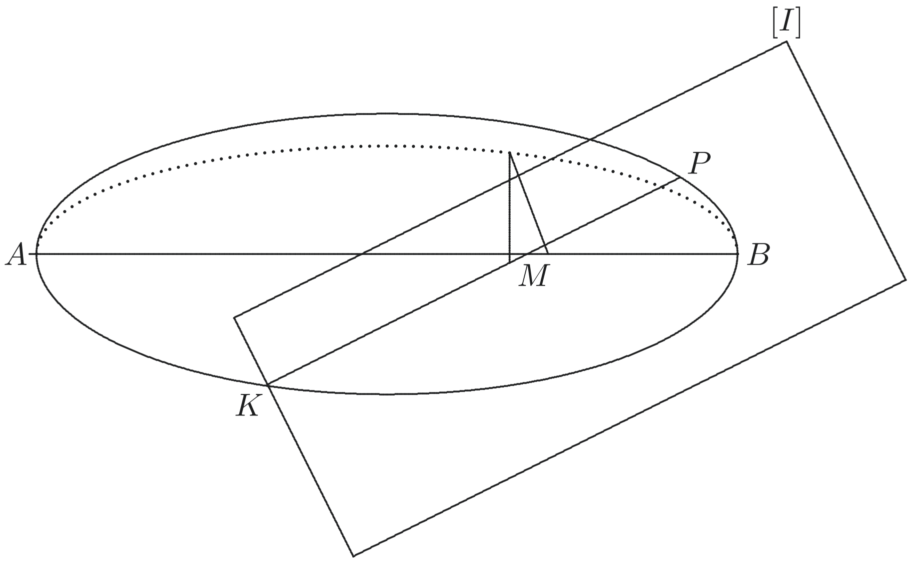
---

1 *Fig. 8*: Leibniz beginnt, eine Figur auf der Grundlage der vorausgehenden zu skizzieren, bricht jedoch ab und gestaltet stattdessen Fig. 8. Aufgrund von Unzulänglichkeiten der Zeichenperspektive sind die Lageverhältnisse nicht ganz den Angaben im Text entsprechend skizziert: N sollte im Allgemeinen nicht auf $APBK$ liegen, und sofern N oberhalb von Q liegt, muß L zwischen M und P sowie Q zwischen M und B zu liegen kommen. Die Figuren 9 und 10 beheben zumindest die erste Schwäche. 8 locum: Eine Definition der Ortskurve aller Punkte N als Kreis mit dem Mittelpunkt Q und einem Radius der Länge von NQ läge an dieser Stelle näher.

in AB, nempe NQ quae haberi potest. Et erit NQ omnium possibilium ex N ad AB ductarum minima, rursus QL sit omnium possibilium ex Q ad L minima. Porro et NL, omnium possibilium ex N ad KP minima est, ejus enim aggregatum est aggregatum quadratorum NQ, QL minimorum, ob angulum NQL rectum.

[*Zweiter Ansatz*]

Calculo Sectionem invenire solidi alicujus rotatione generati, per planum secti

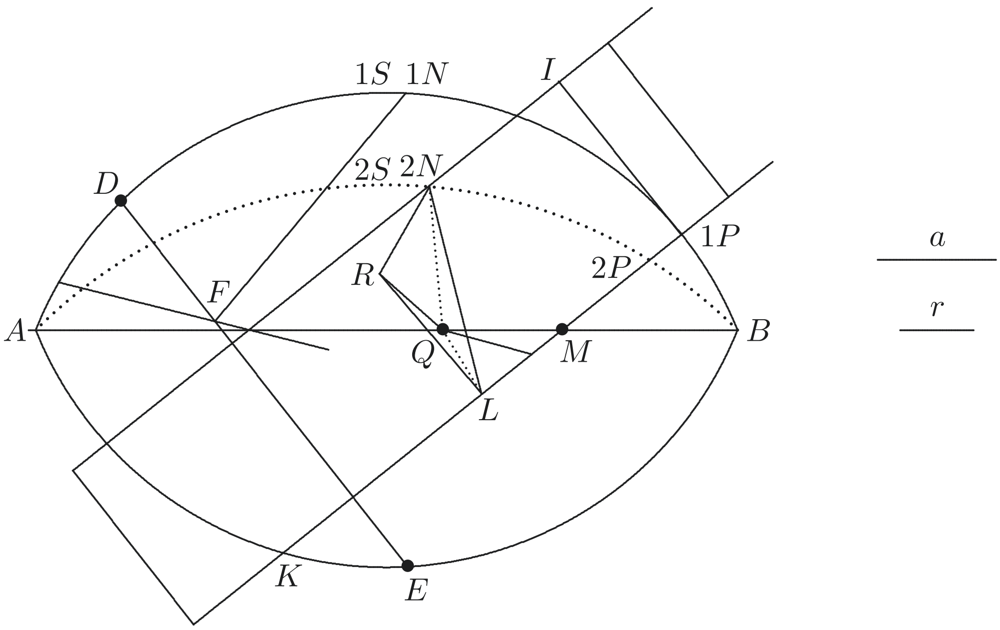


[*Fig. 9*]

Sit PK axis sectionis. Planum secans IPK sit plano solidum generanti, perpendiculare, quod semper fieri potest, cum generans sumi possit infinitis modis, una scilicet ex sectionibus solidi per axem AB.

2 minima *(1)* Hinc et summa qvadratorum NQ, QL *(2)* porro *L* 3 ad |KB *ändert Hrsg.*| minima *L* 4 minimorum, *(1)* ergo et *(2)* (ob *L* 6 Calculo *erg. L* 8 plano solidum *erg. L*

4 angulum: Tatsächlich ist der Winkel QLN stets ein rechter, der Winkel NQL dagegen im Allgemeinen nicht. Die auf NQL als rechtem Winkel fußende Begründung, warum sich durch diese Konstruktion ein minimales NL ergibt, ist somit nicht stichhaltig.



[*Fig. 10*]

Sit N punctum in quo solidum secatur a plano, ex eo in axem PK ducenda perpendicularis NL quae calculo invenienda est. Duo sunt plana, $APBK$ quae se secant in PK. Proponitur punctum N in sublimi, cujus datur minima ad AB, quae est NQ. Ejusdem datur intervallum a plano IPK, quod intervallum est nullum seu infinite parvum, quia N incidit in hoc planum. Datur et horum planorum inclinatio ad se invicem, sive angulus. Hinc jam ut quaeratur minima ex N, ad planorum sectionem communem[,] invenienda est primum perpendicularis ex N ad planum $APBK$ quae sit NR. Jungatur QR, patet angulum NRQ esse rectum, adeoque quadrata NR, RQ aequari quadrato NQ dato. Porro ex puncto R ducatur minima ad rectam PK, nempe RL, erit ipsa NL quaesita etiam Minima

1 *In der Figur: (1)* 1S *(2)* | 1S *erg. Hrsg.* | 1N *L* 2 solidum *(1)* genera *(2)* secatur *L* 3 f. in PK. *(1)* datur *(2)* proponitur *L* 7 ad *(1)* angulorum *(2)* planorum *L* 8 QR, *(1)* patet perpendicularis *(2)* patet *L* 8 f. angulum | NQR *ändert Hrsg.* | esse *L*

1 *Fig. 10*: In der Abbildung wurden Linien und Punktbezeichnungen gelöscht und andere Punkte umbenannt. Die perspektivische Darstellung lässt auch hier Wünsche offen. 3 $APBK$: Zwei erzeugende Grundflächen $APBK$ des Drehkörpers, die nicht in einer gemeinsamen Ebene liegen, schneiden sich in AB.

quae ab N ad KP duci possit, quia ejus quadratum ex duarum minimarum NR, RL quadratis compositum. Habemus ergo $\boxed{2}NL \overset{(1)}{\sqcap} \boxed{2}NR + \boxed{2}RL$. $\boxed{2}NR + \boxed{2}RQ \overset{(2)}{\sqcap} \boxed{2}NQ$.

Verum hoc loco quia planorum angulus est rectus, ideo ipsa NL, coincidit ipsi NR, adeoque RL est infinite parva, (distantia scilicet puncti N a plano IPK.) Ergo quia $RL \overset{(3)}{\sqcap} 0$ ideo ex priore aequatione fit $NL \overset{(4)}{\sqcap} NR$. Ob eandem causam, quia puncta R et L coincidunt fit $RQ \overset{(5)}{\sqcap} QL$ et aeq. 4 et 5 inserendo in aeq. 2 fit: $\boxed{2}NL + \boxed{2}QL \overset{(6)}{\sqcap} \boxed{2}NQ$. Porro NQ habetur; ergo ad habendam NL restat investigari QL. Ea autem plane facillime habetur, quia enim angulus QML datus est, utique datur ratio QM ad QL ob angulum QML, rectum. Ea ratio sit $\frac{r}{a} \overset{(7)}{\sqcap} \frac{QL}{MQ}$. Ipsa autem BM sit b et $BQ \overset{(8)}{\sqcap} y$. Erit $MQ \overset{(9)}{\sqcap} y - b$ et $QL \overset{(10)}{\sqcap} \frac{r}{a}\overline{y-b}$. Porro $NQ \overset{(11)}{\sqcap} v$, $NL \overset{(12)}{\sqcap} \omega$. Et ex aeq. 6 fiet haec:

$$\underbrace{\frac{r^2}{a^2}y^2 - 2\frac{r^2b}{a^2}y + \frac{r^2}{a^2}b^2}_{\boxed{2}QL},\ \underbrace{+\omega^2}_{\boxed{2}NL} \overset{(13)}{\sqcap} \underbrace{v^2}_{\boxed{2}NQ}$$

Quae est aequatio generalis, cujuscunque naturae sit curva ANB; jam ex data curvae hujus natura dabitur alia aequatio, in qua habebitur relatio inter NQ et BQ, seu inter v et y. Ejus ope tollatur ipsa NQ ex aeq. 13 et habebitur aequatio duarum tantum indeterminatarum y et ω, adeoque apparebit quis sit curvae locus. Porro hinc patet omnem sectionem sphaerastri seu fusi circularis esse ellipsin. Caetera quoque patent omnia, ut si

4 ergo *(1)* ex priore aeqvatione fit: *(2)* qvia *L* 5 NR. *(1)* ex aeq. 2. *(a)* fiet *(b)* per aeq. 4. fit $\boxed{2}$NL + $\boxed{2}$ *(2)* Ob *L* 8 ad *(1)* ML *(2)* QL *L* 9 rectum *(1)* | is *nicht gestr.* | angulus sit *(2)* ea *L* 10 NQ $\overset{(11)}{\sqcap}$ v. *(1)* habebitur aeqvatio: *(2)* NL $\overset{(12)}{\sqcap}$ ω *L*

9 rectum: Tatsächlich ist nicht QML, sondern LQM ein rechter Winkel. 15 aequatio: Eine Gleichung, die v zu ω in Beziehung setzt, gibt tatsächlich die Projektion des Schnittes in die y-ω-Ebene an. 17 ellipsin: Bei den Schnitten spindelförmiger Drehkörper handelt es sich nicht um Ellipsen im mathematischen Sinne.

$v \sqcap y$ fiet ex aequatione 13 $\ldots\ldots$etc. $\sqcap y^2$. Si fuisset $v \sqcap \frac{r}{a}y$ fuisset sectio parabola. Hinc et determinari potest quibus modis fieri possit ut sectio fiat Circulus recta Hyperbola, si scilicet solidum secandum sit conus rectus, seu si $v \sqcap \frac{c}{a}y$. Si curva sit circularis, seu si aequatio $v^2+y^2+dy+ae \sqcap 0$ tunc ex aeq. 13 fiet $\begin{array}{l} \frac{r^2}{a^2}\,y^2 - 2\frac{r^2b}{a^2}\,y + \frac{r^2}{a^2}b^2, +\omega^2 \sqcap 0 \\ +\;\; y^2 \;+\;\;\; d\;\; y \;+\;\; ae \end{array}$ quam sectionem [*bricht ab*]

Ne errem video jam quid adhuc sit faciendum. Quaeritur quis sit locus curvae, non ex ipsa MQ, vel BQ, sed ex ipsa ML. Sit $ML \sqcap z$ ut ex superioribus $MQ^2 + QL^2 \overset{(14)}{\sqcap} ML^2$ seu $\boxed{2}\,\overline{y-b}+\boxed{2}\,\overline{\frac{r}{a}y-b} \sqcap z^2$ seu $\sqrt{1+\frac{r^2}{a^2}} \sqcap \frac{z}{y-b}$. Pro $1+\frac{r^2}{a^2} \sqcap \frac{a^2+r^2}{a^2}$ ponamus $\frac{p^2}{a^2}$ seu $p \overset{(15)}{\sqcap} \sqrt{a^2+r^2}$. $y-b \overset{(16)}{\sqcap} \frac{za}{p}$ et $y \overset{(17)}{\sqcap} \frac{za}{p}+b$ et per 10 $QL \sqcap \frac{r}{a} \frown \frac{za}{p} \overset{(18)}{\sqcap} \frac{r}{p}z$. Et ex aeq. 13 fiet: $\frac{r^2}{p^2}z^2+\omega^2 \overset{(19)}{\sqcap} v^2$, sive $\frac{r^2}{a^2+r^2}z^2+\omega^2 \overset{(20)}{\sqcap} v^2$.

Modus ergo generalis inveniendi locum solidi circumvolutione geniti plano secti, huc redit: sit AB axis circa quem voluta curva PS superficiem cujusdam solidi generat, eundo scilicet de $1P1S$ in $2P2S$ etc. Sit in axe punctum fixum B. Ex puncto N in eum demittatur perperpendicularis NQ quae ex eodem puncto durante rotatione semper eadem est. Nota debet esse relatio inter BQ, quam vocabo y et inter NQ quam vocabo v, nota inquam per aequationem. Quoniam superficies hoc plano per axem secta reddit curvam NP et nos quaerimus quae curva proveniat si alio quam per axem plano secetur, ideo eo plano $A1N1PK$ eam secabimus per axem ad quod datum planum IPK sit perpendiculare. Sit horum duorum planorum perpendicularium sibi, sectio communis

1 fiet *(1)* sectio *(2)* aeqvatio *(3)* ex *L* 1 y^2. *(1)* hinc fieri po *(2)* si *L* 6 jam *(1)* in qvo sunt lap *(2)* qvid *L* 9 ponamus *(1)* $\frac{\mathrm{r}}{\mathrm{a}}$ *(2)* $\langle\frac{\mathrm{g}}{4}\rangle$ *(3)* | $\frac{\mathrm{p}}{\mathrm{a}}$ *ändert Hrsg.* | seu *(a)* $\mathrm{p} \overset{(15)}{\sqcap}$ *(aa)* $\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{r}^2}$ a fiet *(bb)* $\mathrm{a}^2\sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{r}^2}$ *(b)* $\mathrm{p} \sqcap \sqrt{\mathrm{a}^2+\mathrm{r}^2}$ *nicht gestr.* *(c)* $\mathrm{p} \overset{(15)}{\sqcap}$ *L* 9 $\mathrm{y}-\mathrm{b} \overset{(16)}{\sqcap}$ *(1)* $\frac{\mathrm{zp}}{\mathrm{a}}$ et $\mathrm{y} \overset{(17)}{\sqcap} \frac{\mathrm{zp}}{\mathrm{a}}+\mathrm{b}$ *(2)* $\frac{\mathrm{za}}{\mathrm{p}}$ *L* 9 per 10 *erg.* *L* 11 inveniendi *(1)* sectionem *(2)* locum *L* 12 voluta *(1)* ⟨circumfer–⟩ *(2)* ⟨—⟩ ⟨su⟩ *(3)* curva *L* 16 Qvoniam *(1)* solidum de *(2)* superficies *L* 19 planorum *(1)* sectio *(2)* perpendicularium *L*

PK, secans ipsam AB productam si opus in M. Quod semper fieri intelligemus, nam et parallelas et coincidentes possumus concipere, ut se secantes angulo scilicet cujus sinus ad latera rationem habeat infinite parvam, et eodem modo procedet calculus hoc posito cum angulus AMK, vel QML sit datus. Ponamus esse MQ ad QL ut a ad r. His positis considerandum est locum curvae haberi si sciatur relatio quam habent $2NL$ perpendiculares ex punctis intersectionum plani et superficiei curvae ad PK in eodem plano, positum ductae, ad abcissas ML, unde a puncto fixo M. Ponatur $ML \sqcap z$, erit $y \sqcap \dfrac{za}{\sqrt{r^2+a^2}}$. Vocetur $2NL \sqcap \omega$, erit aequatio $\dfrac{r^2}{a^2+r^2}z^2 + \omega^2 \sqcap v^2$. Et ope hujus aequationis, et alterius in qua relatio inter v et y ac ope valoris ipsius y tollendo v et y, habebitur aequatio relationis inter z et ω seu locus curvae; video tamen in quo non optime processerim, quod scilicet M sumsi pro puncto fixo, quod forte incommodum tunc rectae sunt parallelae, seu cum punctum M infinite hinc abest. Sed praeterquam quod nullus hinc error orietur, nec nisi difficultas harum rerum, non satis peritis objicietur; sciendum est praeterea duo esse remedia in promtu, alterum ut pro puncto fixo ponatur P vel K vel aliud in recta KP determinatum, quod utique non infinite hinc aberit, et destruentur in calculo lineae infinitae, alterum commodissimum et omnium captum, ut omnem in calculo infinitarum mentionem evitemus, quod fiet pro recta AB assumamus talem ut DE, quae ipsi AB qua planum ejus a plano perpendiculari IPK secatur non sit parallela nec coincidens, quod semper facile est, quoniam enim constat quam relationem habeat NQ ad BQ. Constabit etiam quam relationem habet DF ad FN. Verum jam video id nihil ad rem pertinere. Calculus enim debet revenire tandem ad axem, adeoque ad punctum M. Aliud ergo remedium, si planum sumatur IPK quod non sit perpendiculare ad planum $A1NPBK$. Sed v. g. angulo ad ipsum semirecto;

2 et *(1)* perpendicu *(2)* et *(3)* coincidentes *L* 5 positis *(1)* vocetur ML, z, *(a)* per *(b)* se *(2)* considerandum est *(a)* | ad *nicht gestr.* | locum curvae habendum *(b)* locum *L* 5 habent *(1)* puncta qvib *(2)* 2NL *L* 8 $\dfrac{\mathrm{r}^2}{\mathrm{a}^2+\mathrm{p}^2}$ *L ändert Hrsg.* 12 abest *(1)* sed tunc remedium duplex unum ut *(2)* sed *L* 16 alterum *(1)* ut ⟨omne⟩ *(2)* commodissimum *L* 17 pro *(1)* relatione utiqve *(2)* recta *L* 18 ut DE *erg. L* 18 AB | non *gestr.* | qva *L* 20 ad *(1)* M *(2)* BQ. *L*

8 y: Oben (S. 624 Z. 15) hatte Leibniz noch $y = BQ$ definiert, ab hier arbeitet er mit $y = MQ$.

ita enim $2NRL$ erit triangulum isosceles et $2NR \sqcap RL$ et NL ad NR, vel RL erit ut latus in quadrato a quadratum. Unde facile habetur RL ex aeq. 1. Fiet $\frac{NL}{\sqrt{2}} \sqcap NR$. Et porro $RQ^2 \sqcap NQ^2 - \frac{NL^2}{2}$. Sed in hac hypothesi, adhuc semel ipsius RQ inventione est opus. Quae satis difficilis si hoc modo per se sit quaerenda; itaque re recte considerata satius fuerit redire ad planum per axem plano secanti dato perpendicularem. Ita enim ista ipsius RQ inventione non est opus, et ipsa RQ potius si ea opus haberemus hoc modo per aliter inventum locum, posset inveniri.

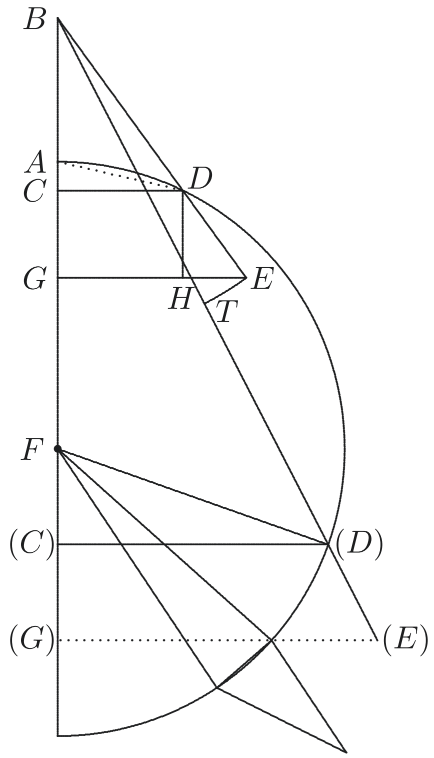
1 et *(1)* ex ⟨d⟩ *(2)* NL *L* 1 vel *(1)* NR *(2)* RL *L* 2 qvadrato a qvadratum. *(1)* Ex data *(2)* unde *L* 2 NR *(1)* | et *nicht gestr.* | $\mathrm{RL}^2 \sqcap$ *(a)* $\boxed{2}$ NQ *(b)* $\mathrm{NQ}^2 - \frac{\mathrm{NR}^2}{2}$ *(2)*. et *(a)* ex aeq. 2 fiet $\frac{\mathrm{NL}^2}{2}$ *(b)* porro *L* 4 opus. *(1)* ita *(2)* qvae *L* 5 planum *(1)* ipsi plano per *(2)* per *L*

70. CURVAE EX CIRCULO DERIVATAE
[Anfang Juni – 29. Juni 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 VIII 30 Bl. 13. Ca $\frac{1}{3}$ Bl. 2°. 1 S. Auf Bl. 13 v° Fragment einer gestr. Vorstufe zu VII, 6 N. 25 Teil 1. — Bl. 13 bildete ursprünglich den oberen Teil eines Bl. 2°, das außerdem aus LH 35 II 1 Bl. 127 (VII, 6 N. 25) u. LH 35 XIII 1 Bl. 229 (VII, 5 N. 94) bestand.
Cc 2, Nr. 1547

Datierungsgründe: Das vorliegende Stück ist vor VII, 6 N. 25 entstanden, dieses wiederum vor VII, 6 N. 27, dat. 29. Juni 1676.

Curvae ex Circulo derivatae



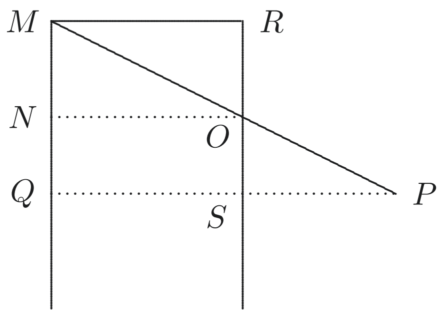
[*Fig. 1*]

10 Curvae ... derivatae *erg. L*

$AF \sqcap a$. $AC \sqcap x$. $CD \sqcap \sqrt{2ax - x^2}$. $BA \sqcap b$. $BC \sqcap z$. erit $z \sqcap x + b$. et erit $x \sqcap z - b$. et erit

$$\left.\begin{array}{r}CD^2 \sqcap 2az - 2ab, \boxed{-z^2} + 2zb - b^2\\ + BC^2 \sqcap \boxed{z^2}\end{array}\right\}\sqrt{} \sqcap BD \sqcap y.$$

$DE \sqcap c$. $\dfrac{DE}{DH \sqcap CG} \sqcap \dfrac{y+c}{BC \sqcap z}$. Ergo $CG \sqcap \dfrac{cz}{y \sqcap \sqrt{\begin{matrix}2az - 2ab\\ 2b - b^2\end{matrix}} + c}$ et $BG \sqcap \omega \sqcap \dfrac{zc + yz + zc}{y+c}$ et $z \sqcap \dfrac{\omega y + \omega c}{2c + y}$. Rursusque $\begin{matrix}+\,2az & -\,2ab\\ +\,2bz & -\,b^2\end{matrix} \sqcap y^2$. Unde fit aequatio ad curvam altiorem, credo conchoidem.



[*Fig. 2*]

$MN \sqcap x$. $NO \sqcap d$. $MO \sqcap e \sqcap \sqrt{x^2 + d^2}$. $PO \sqcap c$. $\dfrac{PO \sqcap c}{OS \sqcap NQ \sqcap MQ - MN \sqcap \omega - x} \sqcap \dfrac{PM \sqcap \sqrt{x^2 + d^2} + c^2 \sqcap v}{\omega}$ et fiet $\dfrac{\omega - x}{c} \sqcap \dfrac{\omega}{v}$ seu $\omega v - xv \sqcap \omega c$ et $x \sqcap \dfrac{\omega v - \omega c}{v}$ et $v \sqcap \sqrt{x^2 + d^2} + c$. Ecce rursus aequationem peraltam.

Curvae ejusmodi instrumento facile describunt[ur], prior, si regulam immobilem habeas circa B. in qua fluere possit recta DE, quam circinus pede immobili in F

9 NO $\sqcap$ d. | Nω *ändert Hrsg.* | $\sqcap$ e $\sqcap \sqrt{\mathrm{x}^2 + \mathrm{d}^2}$ *L*

---

5 $\sqcap \dfrac{y+c}{BC \sqcap z}$: Richtig wäre $\dfrac{y+c}{BG = \omega}$. Leibniz rechnet konsequent weiter und erhält einen falschen Wert für z.

posito pede altero per $D.(D)$. incedens producat in DE, $(D)(E)$ etc. et in altera figura acta immobili MP circa M regula ROS ipsam OP semper propellet dum gyratur MP.

Notabile quiddam hic succurrit ex data circuli quadratura haberi posse omnes hoc modo generatas, qualiscunque sit linea $D(D)$ vel RS. Ponamus enim BD (vel MO) usque ad curvam quamlibet D productas crescere arithmetice, etiam ET arcus exigui, et ET chordae arcuum horum crescent arithmetice aut certe posita $BD \sqcap x$ erunt ut $x + c$. Unde sequetur hoc amplius omnes curvas eodem modo construi posse.

71. CURVAE HASTARIAE NATURA
Juni 1676

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XIII 3 Bl. 182–183. 1 Bog. 2°. 2 $\frac{1}{3}$ S. Figur und Text zunächst auf das nicht gefaltete Papier in der Reihenfolge Bl. 182 r° oben, 183 v°, 182 r° unten, nach Faltung auf Bl. 182 v° geschrieben. Bl. 183 r° leer.
Cc 2, Nr. 1469

Jun. 1676

Curvae Hastariae natura.
Depressio calculi vitata multitudine radicum

Hasta MN producta indefinite in P.

$1M2M3M$ etc. Linea horizontalis, in qua extremum hastae M semper manet.

CB. humerus. Cui semper incumbit hasta, saltem producta.

$E1N2N3NFGR$. Curva a puncto N in hasta designato descripta.

Si hasta non esset producta ultra N, non nisi ovalis portio describeretur. Minime vero portio $1NE$. Si hasta MN major humero, punctum $1N$. semper incidet in C. Sin sit minor incidet in rectam BC inter B et C.

Linea Horizontalis est curvae asymptotos.

QRP curva Conchoeides, in qua LR semper aequalis BQ vel MN hastae.

Recta BM semper ipsam NR bisecat.

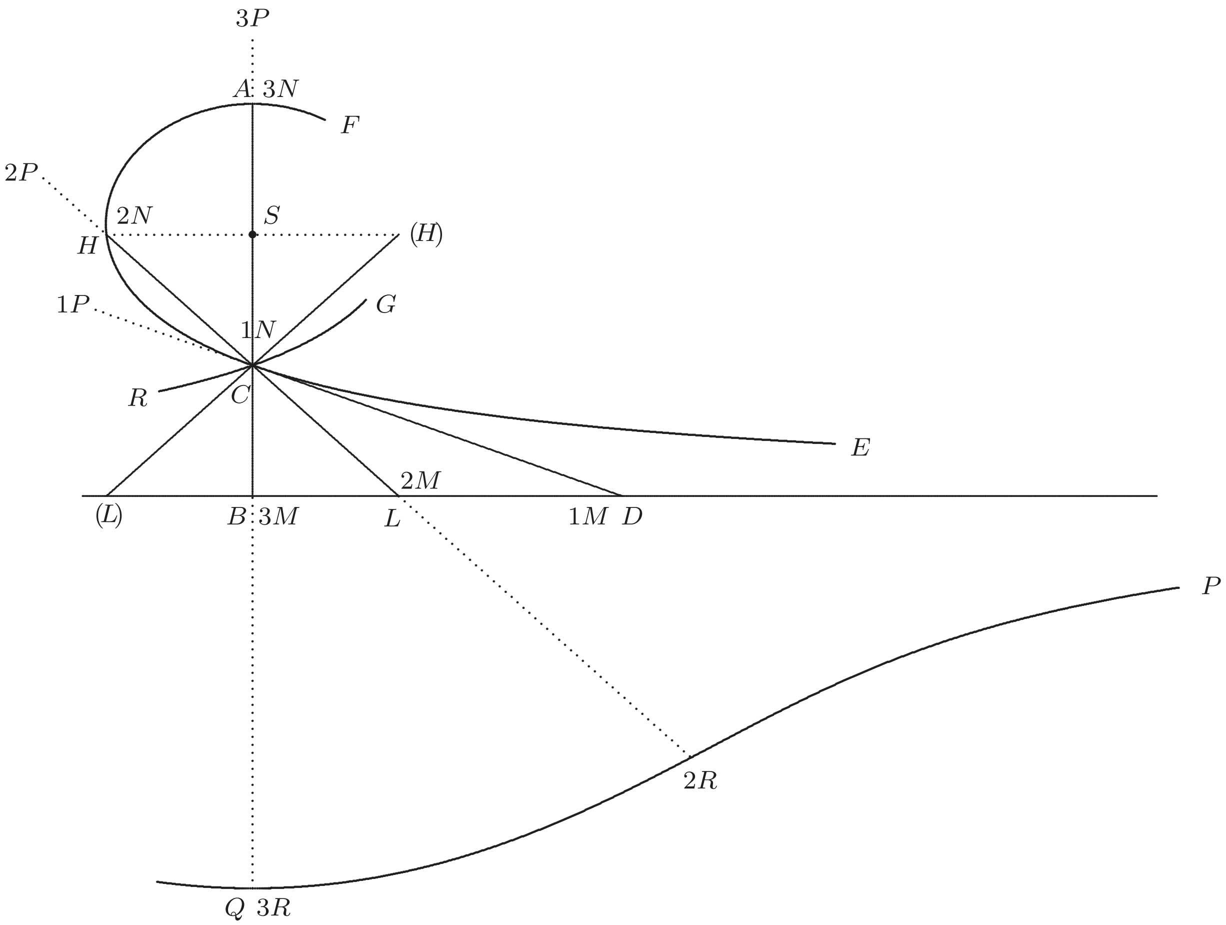
Maximam curvae latitudinem seu punctum H quaerens inveni eadem opera et minimam. Positis enim $MN \sqcap a$ $\quad CB \sqcap c$ $\quad CL \sqcap e$. prodiit aequatio:

$$e^4 - ae^3 * - ac^2e + a^2c^2 \sqcap 0.$$

Quam si dividas per $e-a \sqcap 0$ prodibit: $e^3-ac^2 \sqcap 0$. Quae posterior non nisi unicam habet radicem possibilem. Nempe $e \sqcap \sqrt[3]{ac^2}$. Aequatio ergo radices habet duas, unam $e-a \sqcap 0$. seu $e \sqcap a$. alteram $e - \sqrt[3]{ac^2} \sqcap 0$. seu $e \sqcap \sqrt[3]{ac^2}$. Quod significat uno quidem aequationis casu e aequari ipsi hastae a. altero aequari primae duarum proportione mediarum inter humerum et hastam.

Hoc ubi ad figuram retuli statim vidi, uno quidem casu minimam curvae latitudinem exhiberi, altero maximam. Minimam cum e id est recta a curvae puncto ad horizontalem

8f. Curvae ... radicum *erg. L*



[*Fig. 1*]

ducta aequalis est ipsi hastae a, ut CD, aut AB. Nam ex punctis curvae A et C. in rectam AB demissae ordinatae, usque adeo omnium aliarum minimae sunt, ut infinite sint parvae. Maximam vero significari apparuit, cum e est $\sqrt[3]{ac^2}$, id est CL quaesita, quae producta maximae excursionis puncto, H, occurrat. Est ergo CL. prior duarum proportione mediarum inter CB; et $1N1M$, id est hoc loco CD. eritque HS vel $(H)S$ ordinatarum

1 *Punktbezeichnung in Fig. 1: (1)* T *(2)* (H) *L* 6 mediarum *(1)* inter CB et CD, qvando CD coincidit ip *(2)* inter *L* 6 CD. *(1)* Hic aliqvam calculi imperfectionem animadverto *(2)* eritqve HS | vel TS *erg., ändert Hrsg.* | ordinatarum *L*

1 *Fig. 1*: Der Bogen $F(H)G$ ist in der Vorlage nicht eingezeichnet.

ex curva CHA in rectam AC demissarum maxima. Hic aliquam calculi, qualis fieri solet, imperfectionem adverto. Dicere enim non potuit, utra inventarum maxima aut minima esset. Ac ne illud quidem duas esse minimas. Duas autem esse minimas, in A scilicet et C. duasque maximas HS in H et (H), ideo non dixit, quia hic evenit, ut utroque casu, ipsa e, sit aequalis scilicet CD ipsi AB et CL ipsi $C(L)$. Et hoc est quod saepe dixi, calculum hactenus usitatum magnitudinem exprimere, non situm. Remedium tamen ex ipso datur calculo, si non CL, sed verbi gratia BL fuisset quaesita; alius prodiisset calculus et ipsa BL fuisset distincta ab altera $B(L)$ per signa, $+$, et $-$: et si ipsa CS fuisset incognita quaesita, alius omnino prodiisset valor pro BC, sive $B1N$, qui pro BA, sive pro $B3N$. Unde hic Analyseos defectus diversarum incognitarum assumtione suppleri potest: et Ars detegitur, ipsi quantum judicari potest Cartesio, ignota, per quam ab initio eligi potest ea quae minimum calculum exhibeat: Nam si BL potius quam CL quaesiissemus, prodiisset aequatio octo et amplius dimensionum.

Quoniam vero aequatio $e^4 - ae^3 * - ac^2e + a^2c^2 \sqcap 0$. duas adhuc habet radices, scilicet impossibiles, videndum est quid illis significetur; significari autem arbitror; quod portiones curvae, CE, vel CR. nullam habent maximam possibilem ordinatam. Asymptoton enim habent. Verum est aliqua difficultas, quod duae sunt radices impossibiles, cum debeat esse una tantum nam ut CL aequalis ipsi $C(L)$ ita impossibilis sive imaginaria ab una parte aequalis est imaginariae ab altera parte. Optimum ergo extrahere has radices impossibiles. $e^3 - ac^2 \sqcap 0$. divisa per $e - \sqrt[3]{ac^2}$ exhibebit: $e^2 + e\sqrt[3]{ac^2} + c\sqrt[3]{a^2c} \sqcap 0$, cujus duae radices impossibiles sunt: $e \sqcap [-]\dfrac{\sqrt[3]{ac^2}}{2} \frown \overline{1+\sqrt{-3}}$ et $e \sqcap [-]\dfrac{\sqrt[3]{ac^2}}{2} \frown \overline{1-\sqrt{-3}}$. id est e, sive recta CM impossibilis (: quae producta curvam CE secare deberet in puncto, ex quo ordinata in CB deducta esset omnium possibilium maxima, :) erit duplex, una CL dimidia, multiplicata per numerum impossibilem $\overline{1+\sqrt{-3}}$ altera eadem CL dimidia multiplicata per numerum impossibilem $\overline{1-\sqrt{-3}}$. Duarum radicum summa facit CL ipsas autem nec figura nec imaginatio exhibere potest.

Utile erit inquiri quis aliis calculis rectarum maximas impossibiles determinantium exhibeatur valor; aliis inquam calculis, id est aliis assumtis incognitis.

Ratio cur BL pro incognita sumta altiores daret calculos, quam CL, haec est, quia in assumta recta, BM, ipsa $B(L)$ necessario alio exprimitur signo quam ipsa BL. At si

3 f. minimas, | in A ... H et *(1)* T *(2)* (H), *erg.* | ideo *L* 6–13 Remedium ... dimensionum *erg. L*
27 calculis *(1)* maximarum impossibilium *(2)* rectarum *L*

ex puncto quodam ducantur rectae, ipsa plaga in quam ducuntur, nihil prorsus variat expressionem: Cum in calculo plaga non sit assumta. Itaque ut simpliciores fiant calculi, vitanda est assumtio plagae.

Si assumatur CL pro incognita, aequatio est quatuor dimensionum, si BS vel CS; dimensionum est 6, si SH; decem. Nempe BS pro incognita sumta majores dabit calculos quam ipsa CL. minores quam BL. Cujus rei ratio haec est, quod scilicet BS eadem est pro SH et $S(H)$. sed diversa est BC et BA, cum tamen BA et $1N1M$ sit eadem. Unde patet electione incognitae non tantum aequales sed et inaequales radices eliminari.

4 f. Si assumatur ... decem *erg. L*

72. CONIQUES, EXCERPTA
[20. – 30. August 1676]

Überlieferung: *L* Konzept: LH 35 XV 1 Bl. 11. 1 Streifen von max. 33,1 cm × 5,6 cm. 73 Z. auf Bl. 11 r°, Fig. 1 auf Bl. 11 v°. — Gedr.: 1. *PO* II, 1908, S. 227 f.; 2. (mit franz. Übers.) Costabel, *Traduction française*, 1962, S. 257 f. u. S. 260 f. (Nachdruck 1964, S. 90–93); 3. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard), Bd II, 1970, S. 1120–1122; 4. (mit franz. Übers.) Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern), Bd I, 1998, S. 132 f.
Cc 2, Nr. 1498

Datierungsgründe: Die Aufzeichnung dürfte kurz vor dem Brief an E. Périer vom 30. August 1676 entstanden sein.

MS. de M. Pascal
Coniques; excerpta.
voyez ma lettre à M. Perrier

Definitiones excerptae ex Conicis. De Hexagrammo. Hoc adhuc semel correct[i]us sed figurae adhaerent priori.

In prima prioris pagina semideleta scholium in posteriori insertum, quaedam figurae quae desunt in priori adscriptae in margine posterioris.

Definitiones excerptae ex Conicis agunt de Hexagrammo mystico primum per se, inde agit de Hexagrammo Conico, ubi pagina aliqua finit: ad distantiam finitam vel infinitam. Et huc usque omnia repetuntur in alio correctius descripto. Quae in priore sequuntur de Loco solido, ea potius ad finem rejicienda sunt. Et de illis ⟨—⟩ mox.

Jam vero post verba: ad distantiam finitam vel infinitam, legenda sunt quae sequuntur in correctius descripto usque ad finem.

De quatuor tangentibus (circuli) et rectis puncta tactuum jungentibus unde rectarum harmonice sectarum et diametrorum proprietates.

11 *MS. ... Pascal erg. L* 13 *voyez ... Perrier erg. L* 18 mystico *erg. L* 24 (circuli) *erg. L*

13 *lettre*: Leibniz an Périer, 30. August 1676, III, 1 N. 90 S. 587–591. 14 Hexagrammo: vgl. N. 61.

De proportionibus segmentorum secantium et tangentium.

Jam de correspondentibus Diametrorum, ubi de lateribus rectis et centris. Finis Elementorum.

Redimus jam ad supra rejecta, quae sunt quasi Elementorum fructus vel definitiones particulares ad locum solidum. Lemmata particularia ad locum solidum. Ad haec quae de loco solido dicuntur pertinent majores figurae.

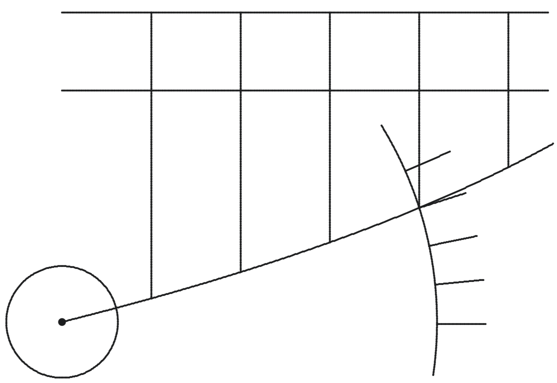
Ad finem Elementorum notandum est absolvisse autorem quae in impressa scheda promisit.

De Tactionibus conicis alius fructus (post locos solidos) ubi problema quoddam de sectionibus Conicis quae a t t i n g u n t omnia data. Non debuisset inscribi de Tactionibus. Pro hoc tractatu nullae sunt figurae, reperta est scheda quaedam certa particularia explicans in suis figuris, *die hinein gelegt ist*.

Miscellanea schedaeque semiperfectae, et utiles.

Figurae; schedulae impressae duplici insertae.

[*Figur auf Bl. 11 v^o*]



[*Fig. 1*]

5 Lemmata *(1)* excerpta ad *(2)* particularia *L*

7 impressa scheda: Bl. PASCAL, *Essay pour les coniques*, Paris, 1640.

VERZEICHNISSE

PERSONENVERZEICHNIS

Verfasser bzw. Mitverfasser von hier abgedruckten Stücken werden mit den gesamten Seitennummern genannt, ebenso Personen, auf die sich ein ganzes Stück bezieht. Bei Autoren ist zusätzlich das Schriftenverzeichnis heranzuziehen. Variierende Namensformen werden nur separat aufgeführt, wenn sie stärker abweichen. Kursivdruck weist auf Herausgebertext hin.

SCHRIFTENVERZEICHNIS

Das Schriftenverzeichnis (SV.) enthält die im Text und in den Apparaten angeführte Literatur. Darin sind Autoren, die Leibniz grundsätzlich zugänglich waren, einschließlich ihrer modernen Ausgaben verzeichnet. Abkürzungen von in den Erläuterungen oder Überlieferungen erwähnter Literatur werden im Abkürzungsverzeichnis aufgeführt. Noch nicht edierte Leibniz-Stücke sind im Handschriftenverzeichnis Teil 3 zu finden. — Jeder Autor und Sachtitel erhält eine Leitnummer, die Reihenfolge der Einzelwerke ist chronologisch. Werke mit eigenhändigen Eintragungen von Leibniz sind mit dem Zusatz [Marg.] versehen. Für die Erwähnung von Autorennamen ist auch das Personenverzeichnis mitheranzuziehen. Kursiv gedruckte Seitenangaben weisen auf Herausgebertext hin.

1. Académie Royale des Sciences, *Procès verbaux 8, Registre de Mathématiques*, 2 Janvier 1675 – Septembre 1679. [Ms.; Paris *Bibliothèque nationale de France, Archives de l'Académie des sciences*]: S. *505*.

– Anderson, A. [Hrsg.], s. SV. N. 47,5.

2. Apollonios, *Conica* (Κωνικά): S. *41*. *319*. *463*. *466*. *511*.

3. Archimedes

   1. *De conoidibus et sphaeroidibus* (Περὶ κωνοειδέων καὶ σφαιροειδέων): S. *319*. *466*.
   2. *De sphaera et cylindro* (Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου): S. *88*.
   3. *Dimensio circuli* (Κύκλου μέτρησις): S. *514*.

4. Barrow, I., *Lectiones geometricae: In quibus (praesertim) generalia curvarum linearum symptomata declarantur*. London 1670. Titelauflage in: *Lectiones XVIII ... in quibus opticorum phaenomenωn genuinae rationes investigantur, ac exponuntur. Annexae sunt Lectiones aliquot geometricae*. London 1672 [Marg.]. Ergänzte Titelauflage in: *Lectiones opticae et geometricae*. London 1674: S. *522*.

– Bartholin, R. [Hrsg.], s. SV. N. 19,2. 42,5.

5. Beaune, Fl. de, *In geometriam Renati des Cartes notae breves*. In SV. N. 19,1 S. 119 bis 161; 2. Aufl. in SV. N. 19,2 Tl I S. 107–142: S. *321*. *351*.

– Bertet, J., s. SV. N. 31,48. 31,84.

6. Carcavy, P. de, Carcavy an Descartes, 9. Juli 1649. [Gedr.: SV. N. 10,5 Bd 3 S. 439–442; auch in *DO* V S. 369–376]: S. *505*.

7. Cardano, G.

   1. *Artis magnae, sive de regulis algebraicis, liber unus*. Nürnberg 1545; [auch in: SV. N. 7,2 Bd IV S. 221–302]: S. *182*.
   2. *Opera omnia*. 10 Bde. Lyon 1663.

8. Cavalieri, B.

   1. *Geometria indivisibilibus continuorum nova quadam ratione promota*. Bologna 1635; 2. Aufl. ebd. 1653: S. *79*. *88*.
   2. *Exercitationes geometricae sex*. Bologna 1647: S. *79*.

9. Desargues, G., *Brouillon project d'une atteinte aux evenemens des rencontres du cone avec un plan*. Paris 1639: S. *459*. 593.

10. Descartes, R.

   1. *Discours de la Methode ... Plus La Dioptrique. Les Météores. Et La Géométrie. Qui sont des essais de cete Methode*. Leiden 1637 [auch in *DO* VI S. 1–515]. [Darin: SV. N. 10,2–3]; lat. Fassung (ohne *Géométrie*) SV. N. 10,4.
   2. *La Dioptrique*. In SV. N. 10,1 S. 1–153 (2. Zählung) [auch in *DO* VI S. 79–228]; lat. Fassung u. d. T. *Dioptrice* in SV. N. 10,4 S. 71–206 [auch in *DO* VI S. 584–650]: S. *484*.
   3. *La Géométrie*. In SV. N. 10,1 S. 297–413 (2. Zählung) [u. ö.] [auch in *DO* VI S. 367 bis 485]; lat. Fassung u. d. T. *Geometria*

hrsg. v. Fr. v. Schooten in SV. N. 19,1 S. 1 bis 118; 2. Ausg. in SV. N. 19,2 Tl I S. 1–106 [Marg.]: S. *8*. *17*. *37*. *45*. *77*. *115*. *156*. *161*. *167*. *174*. *182*. *244*. *321*. *351*. *359*. *372*. *393*. *409*. *426*. *459*. *475*. *479*. 505. *510*. *511*. *516*. *518*. *529*. *532*. *535*. 553. *557 f.* *574*. *583*.
4. *Specimina philosophiae*. Amsterdam 1644 [u. ö.] [Darin: *Dissertatio de methodo recte regendae rationis, et veritatis in scientiis regendae*, S. 1–70; SV. N. 10,2 S. 207–331].
5. *Lettres*. Hrsg. Cl. de Clerselier. 3 Bde. Paris 1657–67 [Marg.]; lat. Fassung u. d. T. *Epistolae*. Amsterdam 1668–82: S. *79*. *505*.

11. Dulaurens, Fr., *Specimina mathematica*. Paris 1667 [Marg.]: S. *351*.

12. *Eloge de Monsieur de Fermat, Conseiller au Parlement de Toulouse*. In: *Journal des Sçavans* vom 9. Februar 1665, S. 69–72. [Auch in SV. N. 16,1 i4; *FO* I S. 359–361]: S. *245*.

13. Eukleides von Alexandria, *Elementa* (Στοιχεῖα): S. *466*. 482.

14. Eutokios, *Commentarii in libros Archimedis, De sphaera et cylindro, Dimensio circuli, De planorum aequilibriis* (Σχόλια): S. *41*. *511*.

15. Fabri, H. *Synopsis geometrica cui accessere tria opuscula, nimirum, De linea sinuum et cycloide, De maximis et minimis, centuria, et Synopsis trigonometriae planae*. Lyon 1669 [Marg.]: S. *554*.

16. Fermat, P. de
1. *Varia opera mathematica*. Hrsg. S. de Fermat. Toulouse 1679 [Marg.]: S. *245*.
2. *Ad locos planos et solidos isagoge*. In SV. N. 16,1 S. 1–8 [auch in *FO* I S. 91–103]: S. *245*.
3. *Appendix ad isagogem topicam continens solutionem problematum solidorum per locos*. In SV. N. 16,1 S. 9–11 [auch in *FO* I S. 103 bis 110]: S. *245*.

17. *Final Resolution Und Erklärung, So Ihre Churfl. Durchl. zu Cölln, Durch dero Thum-Capitul denen Käys. Herrn Abgesandten zu Cölln hinterbringen und eröffnen lassen, den 11. Decemb. 1673.* o. O. 1673 [u. ö.]: S. *42*.

– Fürstenberg, Fr. E. v., s. SV. N. 31, 80–83.

18. Galilei, G.
1. *Discorsi e dimostrazioni matematiche*. Leiden 1638 [auch mit separater Paginierung in SV. N. 18,2 Bd 2 u. in *GO* VIII S. 39–318 sowie *GO* I S. 187–208]: S. *494*.
2. *Opere*. 2 Bde. Bologna 1655–56.

19. *Geometria*
1. *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; nunc autem cum notis Florimondi de Beaune … in linguam latinam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*. Leiden 1649. [Darin: Descartes, R., SV. N. 10,3; Beaune, Fl. de, SV. N. 5; Schooten, Fr. v., SV. N. 42,3; Ders., SV. N. 42,4.]: S. 505.
2. *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita; postea autem una cum notis Florimondi de Beaune … in latinam linguam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten … Nunc demum ab eodem diligenter recognita, locupletioribus commentariis instructa, multisque egregiis accessionibus … exornata*. 2 Tle. Amsterdam 1659–61 [Marg.]. [In Tl I: Descartes, R., SV. N. 10,3; Beaune, Fl. de, SV. N. 5; Schooten, Fr. v., SV. N. 42,3; Ders., SV. N. 42,2; Ders., SV. N. 42,4; Hudde, J., SV. N. 26; Heuraet, H. v., *Epistola de transmutatione curvarum linearum in rectas*. In Tl II: Schooten, Fr. v., SV. N. 42,5; Ders., *Tractatus de concinnandis demonstrationibus geometricis ex calculo algebraico*. Hrsg. P. v. Schooten; Beaune, Fl. de, *De aequationum natura, constitutione et limitibus, opuscula duo*. Hrsg. R. Bartholin, S. 49–152; Witt, J. de, SV. N. 49.]: S. 505. 553.

20. Girard, A., *Invention nouvelle en l'algebre … Tant pour la solution des equations, que pour recognoistre le nombre des solutions qu'elles reçoivent*. Amsterdam 1629; Nachdr. Leiden 1884: S. *244*.

21. Gregory, J., *Geometriae pars universalis*. Padua 1668 [Marg.]: S. *530*.
22. Guldin, P., *Centrobaryca*. Bd 1, Buch I. Wien 1635; Bd 2, Buch II–IV. Wien 1640–41: S. *88*.
23. Harriot, Th., *Artis analyticae praxis*. Hrsg. W. Warner. London 1631: S. *246*.
24. Herigone, P., *Supplementum cursus mathematici*. Paris 1642; Titelaufl. u. d. T. *Cursus mathematici tomus sextus ac ultimus, sive supplementum*. Paris 1644: S. *79*.
25. Hooke, R., *Micrographia*. London 1665: S. *486*.
26. Hudde, J., *Epistolae duae, quarum altera de aequationum reductione, altera de maximis et minimis agit*. In SV. N. 19,2 Tl I S. 401–516 [Marg.]: S. *17*. *90*. *372*.
27. Huret, G., *Optique de portraiture et peinture*. Paris 1670: S. *77*.
28. Huygens, Chr.
1. *De circuli magnitudine inventa*. Leiden 1654. [Auch in: *HO* XII S. 113–181]: S. *516*.
2. *Recherches sur la théorie des développées*. 1659. Ms. [Gedr.: *HO* XIV S. 387–405]: S. *40*.
3. *Horologium oscillatorium sive de motu pendulorum ad horologia aptato demonstrationes geometricae*. Paris 1673 [Marg.]; [auch in: *HO* XVIII S. 69–365 u. XVI S. 315–318]: S. *111*.
29. *Illustrissimi Principis D. D. Guillelmi Egonis Landgravii Furstembergii Serenissimi Archiepiscopi Electoris Coloniensis Legati violenta abductio, et injusta detentio*. Antwerpen 1674: S. 502. — Rez.: *Journal des Sçavans*, 11. Februar 1675: S. *502*.
30. *Journal des Sçavans*. Paris (Amsterdam) 1665 ff.:
— 9. Februar 1665: S. *245*.
— 11. Februar 1675: S. *502*.
31. Leibniz, G. W.
Schriften:
1. *Marginalien in Barrows Lectiones geometricae*. Ende Januar 1673 – 1716 (?). Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 43 S. 301–309]: S. *522*.
2. *Aequationum depressiones*. März – April 1673. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 109 S. 677–678]: S. *3*.
3. *Mathematicae collectionis plagulae seiunctae*. Spätes Frühjahr 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 17 S. 332–360]: S. *79*.
4. *De problematis geometriae Cartesii. De compositione rationum*. Frühjahr – Sommer (?) 1673. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 110 S. 679–689]: S. *3*. *4*. *30*.
5. *De ductibus*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 26 S. 425–464]: S. *79*.
6. *Trigonometria inassignabilium*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 27 S. 465–500]: S. *527*.
7. *Diversa de quadraturis*. Sommer 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 30 S. 536–547]: S. *4*.
8. *Additio radicum*. August (?) 1673. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 113 S. 696–704]: S. *194*.
9. *Plagula secunda*. August 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 40_2 S. 674–687]: S. *79*.
10. *Plagula tertia*. August 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 40_3 S. 688–697]: S. *79*.
11. *Progressio figurae segmentorum circuli aut ei sygnotae*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 23 S. 264–270]: S. *507*.
12. *Solutio analytica*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 42_2 S. 742–753]: S. *5*.
13. *De hyperbolae resecta*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 47 S. 773–789]: S. *10*.
14. *De calculo reductarum necnon momentorum*. Herbst 1673. Ms. [Gedr.: VII, 4 N. 48 S. 790–799]: S. *5*.
15. *Dissertatio de arithmetico circuli tetragonismo*. Herbst 1673 und Juli (?) 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 1 S. 3–40]: S. *516*.
16. *Annotatio ad aequationis cubicae solutionem*. Ende 1673 (?). Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 2 S. 6]: S. *40*.
17. *De appropinquatione circuli per seriem I*. Ende 1673 – Mitte 1674. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 26 S. 300–314]: S. *4*. *75*.
18. *De duobus numeris qui in se ducti faciant quadratum*. Juni 1674. Ms. [Gedr.: VII, 1

47. *Analyseos Tetragonisticae pars secunda*. 29. Oktober 1675. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 40 S. 288–295]: S. *500*.
48. *Linea berthetiana*. 3. November 1675. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 45 S. 317–320]: S. *557*.
49. *De quadratis quadrato-quadratisque*. Januar 1676. Ms. [VII, 1 N. 88 S. 582]: S. *576*.
50. *De progressionibus et figura segmentorum. De aequilibrio ponderum. De lunula. De conchoide*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 62 S. 434–438]: S. *574*.
51. *De la beauté des théorèmes*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 63 S. 439–440]: S. *574*.
52. *L'antiparabole de Bertet*. Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 64 S. 441–442]: S. *574*.
53. *De constructione quantitatum irrationalium*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 72 S. 839]: S. *574*.
54. *De aequatione resolvenda sexti gradus*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 73 S. 840–841]: S. *574*.
55. *De aequatione sursolida interrupta*. 2. Hälfte Januar 1676. Ms. [Gedr.: VII, 2 N. 74 S. 842–844]: S. *574*.
56. *Modus quo a Pascalio explicantur hyperbolae oppositae*. 2. April 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 26 S. 186–187]: S. *77*.
57. *Linea interminata*. April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 65 S. 485–489]: S. *594*.
58. *De formis seu attributis Dei*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 72 S. 513 bis 515]: S. *594*.
59. *De reminiscentia et de reflexione mentis in se ipsum*. 2. Hälfte April (?) 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 73 S. 515–517]: S. *594*.
60. *De figuris syllogis*. 2. Hälfte (?) April 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 73 S. 509]: S. *594*.
61. *De angulo contactus*. April – Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 32 S. 205]: S. *599*.
62. *Impossibilitas quadraturae circuli universalis*. April – Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 18_1 S. 164–167]: S. *506*.
63. *Praefatio opusculi de quadratura circuli arithmetica*. April – Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 19 S. 169–177]: S. *506*.
64. *Superficies coni scaleni*. 24. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 78 S. 536]: S. *599*.
65. *Analysis Tetragonistica*. 26. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 79 S. 537–548]: S. *602*.
66. *Quadratura hyperbolae per logarithmos. Tentamentum de quadratura circuli*. 27. Mai 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 80 S. 549–551]: S. *602*.
67. *Problema: ellipsin in data ratione secare*. Ende Mai – Ende August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 33 S. 206–207]: S. *557*.
68. *Quadratura per tangentes*. Ende Mai bis Ende August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 1 N. 104 S. 647–648]: S. *577*.
69. *Trigonometria per quadraturam arithmeticam. De seriebus convergentibus*. Anfang Juni – 29. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 25 S. 295–298]: S. *627*.
70. *Compendium pro trigonometria sine tabulis*. 29. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 27 S. 303–316]: S. *627*.
71. *Series convergentes duae*. Juni (?) 1676. Ms. [Gedr.: VII, 3 N. 64 S. 799–801]: S. *599*.
72. *De Quadratrice*. Juni 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 86 S. 563–574]: S. *500*.
73. *Quadraturae circuli arithmeticae pars secunda*. Juni – Juli 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 28 S. 317–355]: S. *506*.
74. *Differentiae convergentium*. Ende Juni bis August 1676. Ms. [Gedr.: VII, 5 N. 94 S. 609–610]: S. *627*.
75. *De quadratura arithmetica circuli ellipseos et hyperbolae*. Juni – September 1676. Ms. [Gedr.: VII, 6 N. 51 S. 520–676]: S. *506 f.*
76. *Pacidius Philalethi*. 29. Oktober – 10. November 1676. Ms. [Gedr.: VI, 3 N. 78 S. 528 bis 571]: S. *515*.

Briefe:

77. Ott an Leibniz, 16. Juli 1671 [Gedr.: II, 1 N. 71 S. 230–232]: S. *485*.
78. Leibniz an Oldenburg, 8. März 1673 [Gedr.: III, 1 N. 9 S. 38–45; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 488–498]: S. *3*.
79. Oldenburg an Leibniz, 16. April 1673

[Gedr.: III, 1 N. 13_2 S. 61 f.; mit engl. Übers. in *OC* IX S. 556–563]: S. *77*. *154*.
80. Leibniz für Franz Egon von Fürstenberg (?), September 1674 [Gedr.: I, 1 N. 316 S. 463–464]: S. *502*.
81. Leibniz für Franz Egon von Fürstenberg, Oktober 1674 [Gedr.: I, 1 N. 317 S. 465–468]: S. *502*.
82. Leibniz für Franz Egon von Fürstenberg, Oktober (?) 1674 [Gedr.: I, 1 N. 318 S. 469 bis 473]: S. *502*.
83. Leibniz für Franz Egon von Fürstenberg, Oktober (?) 1674 [Gedr.: I, 1 N. 319 S. 474 bis 476]: S. *502*.
84. Leibniz an Bertet, 3. (?) November 1675 [Gedr.: III, 1 N. 68 S. 308–310]: S. *557*.
85. Leibniz an Oldenburg, 28. Dezember 1675 [Gedr.: III, 1 N. 70 S. 326–334; engl. Übers. in *OC* XII S. 95–101]: S. *580*. *591*.
86. Leibniz an Périer, 30. August 1676 [Gedr.: III, 1 N. 90 S. 587–591; *PO* II S. 220–224]: S. *77*. *584*. *591*. *634*.

32. Menelaos von Alexandria, *Sphaerica* (Σφαιρικά): S. *153*.
33. Mydorge, Cl., *Prodromi catoptricorum et dioptricorum: sive conicorum operis ... libri primus et secundus*. Paris 1631. *Libri quatuor priores*. Ebd. 1639 [u. ö.]: S. *41*.
– Oldenburg, H., s. SV. N. 31,78. 31,79. 31,85.
34. Ott, J., *Cogitationes physico-mechanicae de natura visionis*. Heidelberg 1670: S. *363*. *485*.
— s. a. SV. N. 31,77.
35. Pappos von Alexandria, *Mathematicae collectiones* (Συναγογή): S. *516*. *583*.
36. Pardies, I. G., *Elemens de geometrie*, Paris 1671 [u. ö.]: S. *530*.
37. Pascal, Bl.
1. *Essay pour les coniques*. Einblattdruck Paris 1640; [auch in: *PO* I S. 252–260]: S. *77*. *459*. *591*. *635*.
2. *Histoire de la roulette, appellée autrement la trochoide, ou la cycloide*. o. O. 1658; [lat.:] *Historia trochoidis sive cycloidis, gallice, la roulette*. o. O. 1658; [auch in: *PO* VIII S. 195–223]: S. *492*.
3. *Lettres de A. Dettonville contenant quelques-unes de ses inventions de géométrie*. Paris 1658–59. [Darin mit separater Paginierung: SV. N. 37,4; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur Hugguens de Zulichem*; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur de Sluze Chanoine de la cathedrale du Liège*; *Lettre de A. Dettonville à Monsieur A. D. D. S*. Paris 1658; auch in: *PO* VIII S. 325–384 u. IX S. 1–149].
4. *Lettre de A. Dettonville a Monsieur de Carcavy*. Paris 1658. In: SV. N. 37,3. [Darin mit separater Paginierung: *Lettre de Monsieur de Carcavy à Monsieur Dettonville*; *Lettre de Monsieur Dettonville, à Monsieur de Carcavy*; SV. N. 37,5; *Propriétéz des sommes simples, triangulaires, et pyramidales*; *Traité des sinus du quart de cercle. Traité des arcs de cercle*; *Petit traité des solides circulaires*; *Traitté general de la roulette*].
5. *Traité des trilignes rectangles, et de leurs onglets*. In: SV. N. 37,4 [auch in: *PO* IX S. 3–45]: S. *522*.
– Périer, E., s. SV. N. 31,86.
38. *Philosophical Transactions*. London 1665 ff.:
— 21. Juni/1. Juli 1669: S. *486*.
— 20./30. Januar 1672/1673: S. *17*. *377*. *422*.
— 23. Juni/3. Juli 1673: S. *17*. *377*. *422*.
39. Ptolemaios, Klaudios, *Almagestum* (Μαθηματικὲ Σύνταξις): S. *153*.
40. Roberval, G. P. de, *Éléments de géométrie*. Ms. [Gedr.: Paris 1996]: S. *505*.
41. Saint-Vincent, Gr. de, *Opus geometricum quadraturae circuli et sectionum coni decem libris comprehensum*. Antwerpen 1647. [Marg.]: S. *88*. *521*.
42. Schooten, Fr. v.
1. *De organica conicarum sectionum in plano descriptione, tractatus*. Leiden 1646.
2. *Appendix, de cubicarum aequationum resolutione*. In SV. N. 42,1 S. 91–117; 2. Aufl. in SV. N. 19,2 Tl I S. 345–368: S. *78*.

3. *In geometriam Renati Des Cartes commentarii*. In SV. N. 19,1 S. 162–294; 2. Aufl. in SV. N. 19,2 Tl I S. 143–344 [Marg.]: S. *17*. *56*. *78 f*. *167*. *321*. *336*. *393*. *421*. *479*. *505*. *536 f*. 553. *573*.

4. *Additamentum*. In SV. N. 19,1 S. 295–336; 2. Aufl. in SV. N. 19,2 Tl I S. 369–400 [Marg.]: S. *56*. *59*. *116*.

5. *Principia matheseos universalis, seu introductio ad geometriae methodum Renati Des Cartes*. Hrsg. R. Bartholin. Leiden 1651; 2. Aufl. in SV. N. 19,2 Tl II S. 1–48: S. *59*. *78*. *116*. *123*.

6. [Hrsg.] SV. N. 19, 1–2. 47,6.

– Schooten, P. v. [Hrsg.], s. SV. N. 19,2.

43. Sluse, R.-Fr. de

1. *Mesolabum seu duae mediae proportionales inter extremas datas ... exhibitae*. Lüttich 1659; 2. Aufl. ebd. 1668 [Marg.]: S. *151*. *167*. 175–188. *194*. *207*. *222*. 245. *246*. *248*. *280*. *321*. *393*. *426*. *459*. *463*. *479*.

2. *An extract of a letter from the excellent Renatus-Franciscus Slusius ... written to the Publisher ... concerning his short and easie method of drawing tangents to all geometrical curves*. In: *Philosophical Transactions* vol. 7, 1672/1673, S. 5143–5147; Nachtrag *a. a. O.* vol. 8, 1673, S. 6059: S. *17*. *377*. *422*.

44. Snellius, W., *Cyclometricus, de circuli dimensione secundum logistarum abacos, et ad mechanicem accuratissima; atque omnium parabilissima*. Leiden 1621: S. *516*.

45. Stevin, S., *Les oeuvres mathematiques*. Leiden 1634: S. *551*.

46. Theon von Alexandria, *In Claudii Ptolemaei Magnam Constructionem Commentariorum Libri XI* (Εἰς τήν τοῦ Πτολεμαίου Μεγάλην Σύνταξιν Ὑπομνημάτων βιβλ. ΙΑ): S. *153*.

47. Viète, Fr.

1. *In artem analyticem isagoge seorsim excussa ab opere restitutae mathematicae analyseos, seu, algebra nova*. Tours 1591. Nachdr. u. a. in: SV. N. 47,6 S. 1–12: S. *59*. *78*. *116*. *475*.

2. *Supplementum geometriae*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 47,6 S. 240–257: S. *160*. *244*.

3. *Variorum de rebus mathematicis responsorum, liber VIII*. Tours 1593. Nachdr. in: SV. N. 47,6 S. 347–435: S. *511*.

4. *De numerosa potestatum ad exegesim resolutione*. Paris 1600. Nachdr. in: SV. N. 47,6 S. 163–228: S. *574*.

5. *De aequationum recognitione et emendatione tractatus duo*. Hrsg. A. Anderson. Paris 1615. Nachdr. in: SV. N. 47,6 S. 82–161: S. *160*. *246*. *351*.

6. *Opera mathematica, ... recognita, opera atque studio Fr. a Schooten*. Leiden 1646 [Marg.; darin u. a. SV. N. 47,1–5].

48. Wallis, J.

1. *Operum mathematicorum pars altera*. Oxford 1656. [Darin u. a. SV. N. 48,2.]

2. *Arithmetica infinitorum*. Oxford 1656. In: SV. N. 48,1; [auch in: *WO* I S. 355–478; Marg.]: S. *79*. *521*.

3. *Mechanica: sive, de motu, tractatus geometricus*. 3 Tle. London 1670–71; [auch in *WO* I S. 570–1063; Marg.]: S. *486*.

49. Witt, J. de, *Elementa curvarum linearum*. Hrsg. Fr. v. Schooten. In SV. N. 19,2 Tl II S. 153–340: S. *476*.

50. Wren, Chr., *Generatio corporis cylindroidis Hyperbolici*. In: *Philosophical Transactions* vol. 4, 1669, S. 961 f.: S. *486*.

SACHVERZEICHNIS

Die Grundsprache des vorliegenden Sachverzeichnisses ist deutsch. Leibniz' *termini technici* erscheinen in Kursivschrift. Zu Leibniz' Terminologie s. a. die Einleitung, insbesondere S. XXXVIII–XL. Die Sachworte sind alphabetisch geordnet, die Untergliederung in Einzelfällen auch systematisch. Kursiv gedruckte Seitenangaben beziehen sich auf Herausgebertext.

HANDSCHRIFTENVERZEICHNIS

FUNDSTELLEN

Verzeichnet sind hier die im vorliegenden Band edierten Hand- und Druckschriften, geordnet nach Fundorten und Signaturen.

HANNOVER *Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek – Niedersächsische Landesbibliothek*

LH 4	V 10	Bl. 1–8	N. 10
		Bl. 9–10	N. 5
		Bl. 11–24	N. 10
		Bl. 25–38	N. 11
		Bl. 39–40	N. 12
		Bl. 39–40	N. 13
		Bl. 41–42	N. 15
		Bl. 43–46	N. 23
		Bl. 50	N. 46
		Bl. 53	N. 45
		Bl. 57	N. 2
		Bl. 68	N. 29
		Bl. 69	N. 26
		Bl. 70	N. 27
		Bl. 71	N. 25
		Bl. 72–73	N. 28
		Bl. 74	N. 25
		Bl. 75	N. 27
		Bl. 76	N. 26
		Bl. 77	N. 29
LH 35	I 17	Bl. 1–3	N. 43
		Bl. 4	N. 36
		Bl. 5–6	N. 31
		Bl. 7	N. 36
		Bl. 8–10	N. 43
	I 18	Bl. 11	N. 1
	II 1	Bl. 160	N. 17
		Bl. 269–270	N. 49_3
		Bl. 271–272	N. 49_2
		Bl. 273	N. 49_1
	V 12	Bl. 1	N. 57
	VIII 30	Bl. 13	N. 70
		Bl. 24	N. 48
		Bl. 37	N. 51
LH 35	VIII 30	Bl. 46	N. 58
	XII 1	Bl. 16	N. 56
		Bl. 216	N. 37
		Bl. 220	N. 53
		Bl. 221	N. 6
		Bl. 223	N. 54
		Bl. 226–227	N. 44
		Bl. 280–281	N. 33
		Bl. 287–288	N. 32
		Bl. 287–288	N. 34
		Bl. 311	N. 67
		Bl. 315–316	N. 59
		Bl. 317	N. 68
		Bl. 343	N. 66
		Bl. 344–345	N. 69
	XII 2	Bl. 38–39	N. 9
		Bl. 70–71	N. 4
		Bl. 159–162	N. 3
		Bl. 167–168	N. 18
		Bl. 169–170	N. 21
		Bl. 171–172	N. 22
		Bl. 214–215	N. 19
		Bl. 216–217	N. 20
	XIII 1	Bl. 408–409	N. 55
	XIII 2 b	Bl.108–109	N. 60
	XIII 3	Bl. 159–160	N. 40
		Bl. 161–162	N. 39
		Bl. 163–164	N. 38
		Bl. 165–166	N. 42
		Bl. 167–172	N. 14
		Bl. 182–183	N. 71
		Bl. 186–187	N. 35
		Bl. 188–193	N. 31
	XIV 1	Bl. 42	N. 52

LH 35	XIV 1	Bl. 69	N. 47	LH 35	XIV 2	Bl. 83–86	N. 16
		Bl. 70	N. 50		XV 1	Bl. 1	N. 62
		Bl. 73–74	N. 41			Bl. 4–9	N. 63
		Bl. 248–249	N. 24			Bl. 10	N. 64
		Bl. 288–289	N. 30			Bl. 10	N. 65
		Bl. 296–297	N. 7			Bl. 11	N. 72
		Bl. 296–297	N. 8			Bl. 12	N. 61

Cc-2-KONKORDANZ

Verzeichnet sind hier die Nummern der im *Catalogue critique* 2 erfassten Stücke mit Angabe der ihnen entsprechenden Stücke des vorliegenden Bandes. Die ersten vier hier aufgeführten Schriften wurden im *Catalogue critique* 2 nicht erfasst. Steht hinter einer Cc-2-Nr.: tlw., so heißt dies, dass das bezeichnete Stück im betreffenden Stück des Bandes nicht vollständig abgedruckt ist.

Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.	Cc 2, Nr.	N.
—	1	854 F	28	862 C	14	1073	6
—	47	855 A tlw.	31	863 A	10	1080	56
—	64	855 A tlw.	36	863 B	12	1081	52
—	66	855 B	30	863 C	11	1119	60
561 tlw.	3	855 C tlw.	7	863 D	10	1134	58
562	4	855 C tlw.	8	863 E	13	1203_1	59
787	33	855 D	5	863 F	12	1209	17
831	44	855 E	29	863 G	46	1292	61
849_2	18	855 F	32	863 H	45	1422	57
850	16	856 A	34	863 I	2	1428 B	68
851 tlw.	9	856 B	41	864	15	1434	69
852 A	40	856 C	35	865	23	1450	50
852 B	39	857	37	895	49_3	1454 tlw.	57
852 C	38	858	19	896	49_2	1456	67
853	42	859 A	21	897	49_1	1469	71
854 A	31	859 B	22	908	48	1496	62
854 B	24	859 C	20	940	51	1497	65
854 C	26	861 A	43	1070	55	1498	72
854 D	27	862 A	14	1071	54	1499	63
854 E	25	862 B	14	1072	53	1547	70

Die Entsprechung von Stücknummer und Cc-2-Nummer ist in der Überlieferung des jeweiligen Stücks vermerkt.

ERWÄHNTE LEIBNIZ-HANDSCHRIFTEN

Dieses Verzeichnis erfasst die in den Überlieferungen und Erläuterungen erwähnten nicht edierten Handschriften. Es ist nach Cc-2-Nummern und Handschriftensignaturen geordnet und verweist auf die Seiten des vorliegenden Bandes.

Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.	Cc 2, Nr.	LH, Nr.		S.
605	12 V 2	Bl. 1	*42*.	1069	35 XIII 1	Bl. 408–409	*552*.
815	35 III A 20	Bl. 5	*519*. *574*.	1079	35 XII 1	Bl. 16	*554*.
816	35 III A 20	Bl. 1–4	*502*. *519*. *574*.	1117	35 XIII 2 b	Bl. 108–109	*574*.
827	35 V 1	Bl. 11–15,17	*519*. *574*.	—	35 XIII 1	Bl. 408–409	*552*.

SIGLEN, ABKÜRZUNGEN, ZEICHEN

1. SIGLEN UND EDITORISCHE ZEICHEN

E, E^1	Erstdruck
E^2 ...	weitere handschriftengestützte Drucke
L	Leibniz, eigenhändig
l	Leibniz, von Schreiberhand
LiH	Leibniz’ eigenhändige Bemerkungen in einem Handexemplar
LuO	Leibniz gemeinsam mit Ozanam, eigenhändig
LuT	Leibniz gemeinsam mit Tschirnhaus, eigenhändig
T	Tschirnhaus, eigenhändig
[ ]	in der Datierung: erschlossenes Datum, im Text: Ergänzungen des Herausgebers.
[ ]	Ergänzungen von Satzzeichen und Exponenten durch den Herausgeber. Vereinzelt gebraucht Leibniz selbst eckige Klammern (Hinweise darauf im Erläuterungsapparat).
⟨ ⟩	Konjektur schwer lesbarer oder durch Beschädigung des Textzeugen ausgefallener Wörter bzw. Wortteile.
⟨–⟩	nicht entziffertes bzw. durch Beschädigung ausgefallenes Wort; die Anzahl der Striche entspricht der Anzahl der vermuteten Wörter.
Kursivierung	Zitate, Buchtitel, Text in anderer als der Grundsprache des betreffenden Stückes.
S p e r r u n g	Hervorhebungen durch Leibniz.
$\boxed{\qquad\qquad}$	Umrahmungen durch Leibniz zur Hervorhebung eines Terms oder zur Ausgliederung eines Textabschnittes aus dem Textzusammenhang.
	Umrahmungen durch Leibniz zur Kennzeichnung wegfallender Terme.

2. ABKÜRZUNGEN (allgemein)

a.	auch, autem
a. a. O.	am angegebenen Ort
aeq., aequ.	aequalis, aequatio
Anm.	Anmerkung
Aufl.	Auflage
Ausg.	Ausgabe
Bd(e)	Band (Bände)
Bl.	Blatt
Bog.	Bogen
bzw.	beziehungsweise
ca	circa
cap.	capitulum
CASH	Clerici Apostolici S. Hieronymi
cor., coroll.	corollarium
dat.	datiert
def., Def.	definitio, Definition
ders.	derselbe
Diss.	Dissertation
d. J.	der Jüngere
dt.	deutsch
ebd.	ebenda
engl.	englisch
erg.	ergänzt
Erl.	Erläuterung
ersch.	erschienen
f.	folgend
Fig., fig.	Figur, figura
franz.	französisch
gedr.	gedruckt
gestr.	gestrichen
GWLB	*Gottfried Wilhelm Leibniz Bibliothek — Niedersächsische Landesbibliothek*

Hrsg. (hrsg.)	Herausgeber (herausgegeben)	s.	siehe
i. Allg.	im Allgemeinen	s. a.	siehe auch
Jh.	Jahrhundert	SJ	Societas Jesu
Kor.	Korollar	s. o.	siehe oben
l.	linke	Sp.	Spalte
lat.	lateinisch	s. u.	siehe unten
LBr.	Hannover *GWLB*	SV.	Schriftenverzeichnis
	Leibniz-Briefwechsel	Tl(e)	Teil(e)
LH	Hannover *GWLB*	tlw.	teilweise
	Leibniz-Handschriften	u.	und
lib.	liber	u. a.	und andere, unter anderem
m.	mittlere	u. d. T.	unter dem Titel
Marg.	Marginalie(n)	Übers. (übers.)	Übersetzung (übersetzt)
max.	maximal	u. ö.	und öfter
Ms.	Manuskript	usw.	und so weiter
myth.	mythisch	v.	van, von, vor
N., Nr.	Nummer	Var.	Variante
Nachdr.	Nachdruck	verb.	verbessert
NB.	nota bene	verm.	vermehrt
OFM	Ordo Fratrum Minorum	vgl.	vergleiche
o. O.	ohne Ort	v^{o}	verso
p., pag.	pagina	vol.	volume
probl.	problema	v. u.	von unten
prop., Prop.	propositio, Proposition	Z.	Zeile
r.	rechte	z. B.	zum Beispiel
r^{o}	recto		destilletur, distilletur
S.	Seite		(noch zu bedenken)

3. ABKÜRZUNGEN (Schriften)

AO = Archimedes, *Opera omnia: cum commentariis Eutocii*. Hrsg. J. L. Heiberg. 3 Bde. Leipzig 1880 f. 2. Aufl. ebd. 1910–1915; Nachdr.: Stuttgart 1972.

Cardano, *Opera* = Cardano, G., *Opera omnia*. 10 Bde. Lyon 1663; Nachdr.: Stuttgart–Bad Cannstatt 1966 (= SV. N. 7,2).

Cc 2 = *Catalogue critique des manuscrits de Leibniz. Fascicule II (Mars 1672 – Novembre 1676)*. Hrsg. A. Rivaud u. a. Poitiers 1914–1924; Nachdr.: Hildesheim [u. a.] 1986.

Costabel, *Traduction française* = Costabel, P., *Traduction française de notes de Leibniz sur les Coniques de Pascal*. In: *Revue d'histoire des sciences*, 15 (1962), S. 253–268; Nachdr. in: *L'oeuvre scientifique de Pascal*. Paris 1964, S. 85–101.

Couturat, *Opusc. et fragm.* = *Opuscules et fragments inédits de Leibniz*. Hrsg. L. Couturat. Paris 1903; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1966.

DGS = *Geometria, a Renato Des Cartes anno 1637 gallice edita, … in latinam linguam versa, et commentariis illustrata, opera atque studio Francisci a Schooten*. 2. Aufl. 2 Tle. Amsterdam 1659–1661 (= SV. N. 19,2).

DO = Descartes, R., *Oeuvres*. Hrsg. Ch. Adam u. P. Tannery. 12 Bde. Paris 1879–1910; 2. Aufl. ebd. 1964–1972; Neuaufl. in 11 Bden ebd. 1996.

FO = Fermat, P. de, *Oeuvres*. Hrsg. P. Tannery u. Ch. Henry. 4 Bde. Paris 1891–1922.

Gerhardt, *Desargues und Pascal* = Gerhardt, C. I., *Desargues und Pascal über die Kegelschnitte*. In: *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*. Berlin 1892, S. 183 bis 204.

Gerhardt, *Math. Schr.* = *Leibnizens mathematische Schriften.* Hrsg. C. I. Gerhardt. 7 Bde. Berlin, Halle 1849–1863; Nachdr.: Hildesheim 1961 u. 1971.

GO = Galilei, G., *Opere*. Edizione Nazionale. 20 Bde. Florenz 1890–1909; Nachdr. ebd. 1929 u. 1939 [u. ö.].

HO = Huygens, Chr., *Oeuvres complètes*. Hrsg. D. Bierens de Haan, J. Bosscha u. a. 22 Bde. Den Haag 1888–1950.

Knobloch, *Die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten* = Knobloch, E., *Übersicht über die unveröffentlichten mathematischen Arbeiten von Leibniz (1672–1676). Mit einem Anhang über die ersten Ansätze zur algebraischen Indexbezeichnung während der pariser Zeit*. In: *Leibniz à Paris (1672-1676)*. Symposion de la G. W. Leibniz-Gesellschaft (Hannover) et du Centre National de la Recherche Scientifique (Paris) à Chantilly (France) du 14 au 18 Novembre 1976. Bd 1: *Les Sciences*. Wiesbaden 1978 (= *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd XVII), S. 3–43.

LBG = *Der Briefwechsel von Gottfried Wilhelm Leibniz mit Mathematikern.* Hrsg. C. I. Gerhardt. Berlin 1899.

LKK = Knobloch, E., *Die mathematischen Studien von G. W. Leibniz zur Kombinatorik*. Bd 1: Abhandlungsband. Wiesbaden 1973; Bd 2: Textband. Wiesbaden 1976 (= *Studia Leibnitiana Supplementa*. Bd XI u. XVI).

Pascal, *Oeuvres complètes* (Chevalier) = Pascal, B., *Oeuvres complètes*. Hrsg. J. Chevalier. Paris 1954 [u. ö.].

Pascal, *Oeuvres complètes* (Lafuma) = Pascal, B., *Oeuvres complètes*. Hrsg. L. Lafuma. Paris 1963 [u. ö.].

Pascal, *Oeuvres complètes* (Le Guern) = Pascal, B., *Oeuvres complètes*. Hrsg. M. Le Guern, 2 Bde. [Paris] 1998 u. 2000.

Pascal, *Oeuvres complètes* (Mesnard) = Pascal, B., *Oeuvres complètes*. Hrsg. J. Mesnard, 4 Bde. [Paris] 1964–1992.

Pascal im Kontext, 2006 = *Pascal im Kontext: sämtliche Werke auf CD-Rom*. Berlin, 2. erw. Aufl. 2006.

PO = Pascal, B., *Oeuvres.* Hrsg. L. Brunschvicg [u. a.], 14 Bde. Paris 1904–1914; Nachdr.: Vaduz 1965.

Taton, *L'oeuvre* = Taton, R., *L'oeuvre de Pascal en géométrie projective*. In: *Revue d'histoire des sciences*, 15 (1962), S. 197–252; Nachdr. in: *L'oeuvre scientifique de Pascal*. Paris 1964, S. 17 bis 72.

VO = Viète, Fr., *Opera mathematica, ... recognita, opera atque studio Francisci a Schooten.* Leiden 1646; Nachdr.: Hildesheim 1970 (= SV. N. 47,6).

WO = Wallis, J., *Opera mathematica*. 3 Bde. Oxford 1693–1699; Nachdr.: Hildesheim 1972.

Wiener, *Leibniz Selections* = *Leibniz Selections*. Hrsg. Philip P. Wiener. New York 1951.

4. MATHEMATISCHE ZEICHEN

Im Folgenden werden die heute ungebräuchlichen Bezeichnungen erklärt, soweit sie nicht unmittelbar aus dem Kontext folgen bzw. im Einzelnen erklärt sind. Für weitere Einzelheiten vgl. die Einleitung S. XL–LIII.

Zahlreiche Beispiele und eine tabellarische Übersicht von Leibniz' mathematischen Bezeichnungsweisen gibt F. Cajori, *Leibniz the master builder of mathematical notation* (in: *Isis* 7 (1925) S. 420–429) bzw. F. Cajori, *A history of mathematical notation*, Bd 2 S. 189–196 (La Salle, Ill. 1929 u. ö.).

$\frown$	Multiplikation
$\times$	Überkreuzmultiplikation
$\smile$	Division
$\square$, $\boxed{2}$	Quadrat
cub., $\boxed{3}$	Kubus
$R③\,a$, $\sqrt{}③\,a$, $\sqrt{③\,a}$	Kubikwurzel (aus a)
aeq., aequ.	gleich
⊓	gleich
⊓	größer als
⊓	kleiner als
$\propto$	gleich (Descartes)
$a : b :: c : d$	Proportion
$\vert$, ⌐	Kürzung eines Bruchs

$\not f$	facit
Platzhalter:	
$*$	ausfallende Terme
...	Terme
:	Terme
Wiederholung:	
..	Faktoren
$\div$	Brüche
Ozanam:	
$a2$, $a3$ ...	a^2, a^3 ...
HGq, EGq ...	HG^2, EG^2 ...
$a, b :: c, d$	Proportion
$\sim$	gleich
Tschirnhaus:	
≁	gleich
a ⊤⊤ b ⊤ c ⊤⊤ d	Proportion