CARL FRIEDRICH GAUSS
WERKE

Akademie der Wissenschaften zu Göttingen

Carl Friedrich Gauss

Werke

Supplement – Band 3

Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung

erschienen im Universitätsverlag Göttingen 2019

Carl Friedrich Gauss

Werke
Supplement – Band 3

Varia: 15 Abhandlungen in deutscher Übersetzung

Mit einer Einleitung, einer Bibliographie und Registern herausgegeben von Karin Reich

Universitätsverlag Göttingen
2019

Bibliographische Information der Deutschen Nationalbibliothek

Die Deutsche Nationalbibliothek verzeichnet diese Publikation in der Deutschen Nationalbibliographie; detaillierte bibliographische Daten sind im Internet über <http://dnb.dnb.de> abrufbar.

Akademie der Wissenschaften zu Göttingen
Theaterstraße 7
37073 Göttingen
Tel.: +49 (0)551 39-5362
Fax.: +49 (0)551 39-5365
E-Mail: adw@gwdg.de
https://adw-goe.de

Satz und Layout: Petra Lepschy

https://univerlag.uni-goettingen.de
ISBN: 978-3-86395-370-6
DOI: https://doi.org/10.17875/gup2019-1140

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Mit dem vorliegenden dritten Supplementband zu der Ausgabe der Werke von Carl Friedrich Gauß wird die zusammenfassende Wiederveröffentlichung der aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzten Arbeiten des Fürsten der Mathematik abgeschlossen. Es handelt sich hierbei um 15 Abhandlungen von Gauß aus den Jahren 1799 bis 1841, die, was ihre Thematik anbelangt, aus verschiedenen Gebieten stammen: Mathematik, Astronomie und Physik. Carl Friedrich Gauß (1777–1855) hat ferner diverse Arbeiten aus dem Bereich der Geodäsie veröffentlicht, diese aber durchwegs in deutscher Sprache. Der Grund hierfür liegt auf der Hand: Die Vermessung des Königreichs Hannover war ein Thema, mit dem sich Gauß vor allem an deutschsprachige Leser wandte. Auch was den Erdmagnetismus angeht, wurden die meisten aus Gauß' Feder stammenden Arbeiten zu diesem Forschungsgebiet in der von Gauß und Wilhelm Weber eigens dafür ins Leben gerufenen Zeitschrift „Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins" in deutscher Sprache publiziert. Mit diesem dritten Band sind nunmehr sämtliche von Gauß ursprünglich in lateinischer Sprache veröffentlichten Werke in drei Supplementbänden in deutscher Übersetzung zugänglich.

In dem vorliegenden Band werden die in ihn aufgenommenen 15 Arbeiten nach ihrem Erscheinungsjahr angeordnet. Auf thematische Einheit wurde dabei verzichtet, erstens, weil eine solche nicht immer eindeutig erkennbar ist, und zweitens, weil es Themenbereiche gibt, unter die zwar Werke von Gauß fallen, die aber bereits im Original in deutscher Sprache veröffentlicht wurden und eben daher für den vorliegenden Band nicht in Frage kommen. Als Beispiel sei hier Gauß' Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra genannt. Gauß lieferte für diesen Satz vier Beweise, drei in lateinischer Sprache, die hier in deutscher Übersetzung präsentiert werden, und einen im Jahre 1850 in deutscher Sprache, der hier nicht berücksichtigt wird. Die drei Beweise, die hier in deutscher Übersetzung vorgestellt werden, stammen aus den Jahren 1799 und 1816 und finden sich in dem vorliegenden Band als Nr. 1, 7 und 8. Das Schlusslicht, d. h. die Nr. 15, bildet Gauß' Abhandlung „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata". Diese Arbeit erschien 1841 im 8. Band der „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores"[1]. Es war dies der letzte Band dieser Reihe, der

[1] Im Folgenden werden die „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis

ausschließlich lateinischsprachige Abhandlungen enthielt. Die fraglichen Arbeiten waren bereits in dem Zeitraum von 1832 bis 1837 entstanden, wurden aber erst 1841 veröffentlicht. Die „Commentationes“ wurden danach abgelöst von den „Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen“, deren erster Band 1843 erschien und Beiträge aus den Jahren von 1838 bis 1841 enthielt.

Im Folgenden werden alle 15 hier aufgenommenen Werke von Gauß kurz erläutert und ihre deutschen Übersetzungen näher beleuchtet. Besonderes Augenmerk wird auch auf Übersetzungen in andere Sprachen gerichtet, denn Übersetzungen sind ein wichtiger Teil der Rezeptionsgeschichte.

Der Fundamentalsatz der Algebra: Nr. 1, 7, 8

Gauß’ Dissertation bzw. Gauß’ erster Beweis: Nr. 1

Nr. 1 (S. 1–37): Neuer Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann. Lateinisches Original 1799/deutsche Übersetzung 1890.

Carl Friedrich Gauß studierte von 1795 bis 1798 an der Universität Göttingen. Der von ihm als Dissertation eingereichte Beweis stammt aus eben dieser Zeit, aus dem Oktober 1797. In seinem Tagebuch notierte Gauß:

> „Es ist durch eine natürliche Methode bewiesen worden, daß Gleichungen imaginäre Wurzeln haben.
>
> Braunschweig, Okt. [1797]
>
> Veröffentlicht in der eigenen Dissertation Aug.1799.“[2]

Gauß wurde allerdings nicht in Göttingen promoviert, sondern an der damaligen Landesuniversität des Herzogtums Braunschweig-Wolfenbüttel in Helmstedt. Seine Dissertation erschien daher auch in Helmstedt, und zwar bei dem Verlag C. G. Fleckeisen.[3] Gauß’ Doktorvater war Johann Friedrich Pfaff (1765–1825), der seit 1788 in Helmstedt als Mathematikprofessor wirkte. Pfaff galt in seiner Zeit als der bedeutendste Mathematiker Deutschlands. Er erfasste sogleich den Inhalt und die Tragweite von Gauß’ Beweis. Das Gutachten, das er bei der Philosophischen Fakultät einreichte, fiel daher äußerst positiv aus:

> „Euer Spectabilitaet übergebe ich hiebey die algebraische Probe=Schrift, welche H. Candidat Gauß aus Braunschweig vor kurzem mir zugesandt hat, damit solche der philosophischen Facultät, von welcher er die

recentiores“ der Kürze halber als „Commentationes“ bezeichnet.

2 Gauß, Carl Friedrich: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. Mit einer historischen Einführung von Kurt R.-Biermann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann, 5. Aufl., Frankfurt am Main 2005 (= Ostwalds Klassiker Nr. 256), S. 196.

3 Über den Verlag C. G. Fleckeisen ließen sich keine weiteren Details ermitteln.

> Magister=Würde zu erlangen wünscht, vorgelegt werden möchte. Ich kan von dieser Abhandlung nicht anders als sehr vortheilhaft urtheilen, da sie von des Verfassers vorzüglichen Fähigkeiten und gründlichen Einsichten einen überzeugenden Beweis enthält, so daß nach deren demnächst zu erwartenden Abdrucke der Candidat unter diejenigen zu rechnen seyn wird, deren Promotion unserer Facultät zur Ehre gereicht.“[4]

Gauß wurde am 16. Juli 1799 „in absentia“ promoviert.

Als seine Dissertation im Jahre 1799 im Druck erschien, lebte Gauß bereits wieder in Braunschweig. Die Publikationsmöglichkeiten der Universität bzw. der Societät der Wissenschaften in Göttingen, d. h. insbesondere die „Commentationes“ und die „Göttingischen Gelehrten Anzeigen“, standen ihm damals noch nicht zur Verfügung. Die Dissertation war nicht Gauß’ erste Veröffentlichung. Seine erste Publikation galt der von ihm am 30. März 1796 entdeckten geometrischen Konstruierbarkeit des regelmäßigen Siebzehnecks.[5] Die Dissertation ist Gauß’ zweite Veröffentlichung.

Gauß’ Promotion in Helmstedt war für den Kandidaten ein Glücksfall, denn in Göttingen amtierte zu dieser Zeit noch Abraham Gotthelf Kästner (1719–1800) als Professor der Mathematik. Kästner, der viele einflussreiche Lehrbücher auf den Markt gebracht hatte, veröffentlichte in den „Göttingischen Gelehrten Anzeigen“ eine umfangreiche Besprechung von Gauß’ Dissertation, die deutlich erkennen lässt, dass der Rezensent dem Inhalt von Gauß’ Arbeit nicht gewachsen war und deren Bedeutung nicht zu erfassen vermochte.[6]

Es erschien noch eine zweite Besprechung der Dissertation, und zwar in dem Referateorgan „Neue allgemeine deutsche Bibliothek“. Ihr Autor verbarg sich hinter dem Kürzel „Be.“. Da diese Rezension bislang in der Gauß-Literatur noch keine Berücksichtigung gefunden hat, sei sie hier in voller Länge wiedergegeben:

> „Diese erste Probe eines mathematischen Schriftstellers ist sehr wohl gerathen, und zeigt eine schöne Anlage zu der abstrakten Mathematik an. Der Satz, daß jede algebraische Gleichung mit ganzen Exponenten in Factoren von der Form x – r oder von der Form xx – 2 cos φ.rx + rr zerlegbar ist, macht Schwierigkeiten. Der Verf. führt die Beweise an, die d’Alembert, Euler, Foncenex und la Grange gegeben haben; und zeigt was noch davon unbefriedigt läßt. Er selbst giebt einen Beweis, der sich

4 Zimmermann, Paul (Redacteur): Zum Gedächtniß an Karl Friedrich Gauß. 1. Die Promotion in Helmstedt. Braunschweigisches Magazin 5, 1899, S. 113–117, hier S. 113. Ferner etwas gekürzt und mit veränderter Orthographie in: Schlesinger, Ludwig: Über Gauß’ Arbeiten zur Funktionentheorie. In: Gauß Werke 10,2, Abhandlung 2, S. 47.

5 Gauß, Carl Friedrich: III. Neue Entdeckungen. Intelligenzblatt der allgemeinen Litteraturzeitung Nr. 66, 1. Juni 1796, S. 544. In: Gauß Werke 10,1, S. 3.

6 Göttingische Gelehrte Anzeigen 1800, S. 129–133 (25. Januar, 14. Stück). Ferner in: Reich, Karin (Hrsg): Gauß’ Werke in Kurzfassung. Augsburg 2002 (= Algorismus; 39), S. 3, 10–12.

> auf trigonometrische Hülfssätze gründet, und die Theorie der krummen Linie mit zu Hülfe nimmt. Gegen die Richtigkeit des Beweises möchte nichts zu erinnern seyn. In Absicht auf die Methode möchte man darum etwas unzufrieden seyn, dass die Gränzen der reinen Algebra überschritten werden, weil die Geometrie mit zu Hülfe genommen wird. Die Geometrie sollte nur zur Erläuterung und Versinnlichung schwerer algebraischen und analytischen Relationen dienen: nicht das Geschäfft ganz übernehmen. Vielleicht findet der scharfsinnige Verf. noch Mittel, den Beweis des Satzes ganz in das Gebiet der Algebra zu bringen. Die trigonometrischen Funktionen möchte man als Hülfsgrössen, die durch ihre zugehörigen Winkel gegeben werden, in die Algebra aufnehmen.“[7]

Wie sein Mathematisches Tagebuch zeigt, erstellte Gauß eine Liste von Adressaten, denen er ein Exemplar seiner Dissertation zukommen lassen wollte. Er nannte hier 38 Institutionen und einzelne Personen sowie 15 Orte.[8]

Die Gauß’sche Zusammenfassung für St. Petersburg

In St. Petersburg wird eine ganz besondere Pretiose aufbewahrt, nämlich ein nicht allzu großer Zettel, auf dem Gauß selbst eine Zusammenfassung der Ergebnisse sowohl seiner Dissertation als auch seiner „Disquisitiones arithmeticae“ in deutscher Sprache vorstellte.[9] Da dieser Zettel erst im 20. Jahrhundert aufgefunden und ausgewertet wurde und daher bislang in Ausgaben von Gauß’ Werken keine Erwähnung gefunden hat, sei hier der Text wiedergegeben:[10]

7 Be: [Besprechung von] Demonstratio nova theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse, auctore Carolo Frider. Gauß. Helmstadii, apud Fleckeisen.1800. 5 B. 4. Mit 1 Kupf. 8 gr. In: Neue allgemeine deutsche Bibliothek 63, Berlin und Stettin 1801, S. 476–477.

8 Gauß, Carl Friedrich: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. Mit einer historischen Einführung von Kurt R.-Biermann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann, 5. Aufl. Frankfurt am Main 2005 (= Ostwalds Klassiker; 256), S. 235. Ferner in: Wittmann, Axel: Abdruck des Mathematischen Tagebuchs von C. F. Gauß. Faksimile-Abdruck des Tagebuchs. Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft 49, 2012, S. 109.

9 Zu Gauß’ Zusammenfassung der Inhalte seiner „Disquisitiones arithmeticae“ siehe Gauß Werke, Supplement Band 1, S. 13*–15*.

10 Transkription nach: Reich, Karin; Roussanova, Elena: Carl Friedrich Gauß und Russland. Sein Briefwechsel mit in Russland wirkenden Wissenschaftlern. Unter Mitwirkung und einem Beitrag von Werner Lehfeldt. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Neue Folge, Band 16, 2011, S. 229–234.
Sowohl der deutsche Text als auch die russische Übersetzung davon in: Svijatski, D. O.: Pis’ma K. F. Gaussa v S.-Peterburgskuju YAkademiju Nauk. In: Archiv istorii nauki i techniki. (= Akademija nauk SSSR. Trudy instituta istorii nauki i technike, ser. 1 vyp. 3), Leningrad 1934, S. 209–238, hier S. 231–235.

„Demonstratio noua theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram vnius variabilis in factores reales primi vel secundi gradvs resolvi posse, auctore C. F. Gauss. Helmst[edt] 1799, 4to, 40 Seiten nebst 1 Kupfertafel. Den Hauptzweck dieser durch meine Promotion veranlaßten Schrift zeigt schon der Titel bestimmt genug an; ich nehme mir die Freiheit, den Inhalt etwas näher zu detailliren. Vorstehendes Theorem, welches im Wesentlichen ganz mit dem übereinkommt, daß man jeder algebr[aischen] Eine unbekannte Größe enthaltenden Gleichung entweder durch realle oder durch solche Werthe Genüge leisten könne, die unter der imaginären Form $m+n\sqrt{-1}$ begriffen sind, ist bekanntlich der Gegenstand von Untersuchungen d'Alemberts, Eulers und Lagranges gewesen; der erste dieser drei großen Geometer hat Einen, Euler zwei Beweise gegeben; Lagrange hat die von Foncenex in Eulers Einem Beweise zuerst bemerkten Mängel so wie diejenigen, welche den von Foncenex selbst gegebenen treffen, zu heben gesucht. Ich habe eine gedrängte Auseinandersetzung dieser 4 Beweise, nebst den Erinnerungen, die sich dagegen machen lassen, dem meinigen vorausgeschickt. Lagranges Memoir kam mir zufälligerweise erst beim Abdruck zu Gesichte; doch ist eine kurze Erwähnung seiner Verdienste eingeschaltet. Unter meinen Erinnerungen befinden sich einige die LaG[range] übergangen hat; Eine wie mir scheint sehr wesentliche, welcher auch selbst L[a]Gr[ang]es Ergänzung ausgesetzt ist, ist die, daß alle genannte[n] Geometer stillschweigends annehmen, daß jede vorgegebne Gleichung wirklich Wurzeln habe und nur ihre Form suchen; die Entwickelung der Gründe, warum ich dieß nicht für zulässig halten kann, findet freilich hier nicht Platz. Es schien also immer noch nothwendig, den Satz von neuem vorzunehmen. Die Hauptpunkte meines eigenen Beweises bestehen in Folgendem: Ich beweise zuvörderst (ohne imaginäre Größen zu Hilfe zu nehmen, wiewol dieß an sich nichts wesentliches ist), daß wenn die zwei Gleichungen $r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin (m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin (m-2)\varphi + \text{etc.} + Mr \sin\varphi = 0$, $r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos (m-1)\varphi + \text{etc.} + Mr \cos\varphi + N = 0$, deren erste Glieder ich respective durch T, U bezeichne, Statt haben, die Function $(X=)\ x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \text{etc.} + Mx + N$ entweder durch $xx - 2r \cos\varphi.x + rr$, oder durch $x - r\cos\varphi$ sich dividiren lasse. So sieht man leicht, daß der Hauptpunkt der Sache darauf ankommt zu zeigen, daß für jede Funktion X es nothwendig Werthe von r u[nd] φ geben müsse, welche den Gleichungen T = 0 u[nd] U = 0 genug thun. Mein Verfahren dieß zu beweisen habe ich am klarsten geometrisch darstellen zu können geglaubt. Ich brauche dazu eine genaue Betrachtung zweier Kurven, welche (vermittelst Radius Vector = r, und Winkel desselben mit einer fixen geraden Linie, = φ) die eine durch die Gleichung T = 0, die andere durch U = 0 bestimmt werden. Ich beweise zuerst daß diese Kurven wirklich da sind (vermittelst Durch[sch]nittes zweier krum[m] en Flächen mit der Fundamentalebne); dann, daß jede 2m unendliche Äste hat, deren Asymptoten die unter gleichen Winkeln ($= \frac{180°}{m}$) gegen einander geneigt sind; und (worin der wahre neruus probandi steckt) daß jeder unendliche Ast der einen Kurve zwischen zweien der andern liegt. Hieraus leite ich alsdann ab, daß nothwendig, und zwar innerhalb eines endlichen bestim[m]ten Raumes wenigstens Ein Durchschnitt der beiden Kurven Statt finden müsse, also wenigstens Eine Bestimmung von r und φ , wodurch T u[nd] U zugleich 0 werden; hieraus folgt dann der zu beweisende Satz sogleich von selbst. Am Schluß habe ich noch einen von diesem ganz verschiedenen Beweis nur mit wenig Worten angedeutet und mich anheischig gemacht, ihn ausführlich zu entwickeln, sobald sich Gelegenheit dazu darbieten wird. Übrigens habe ich mich des Gebrauchs sowohl imaginärer als unendlicher Größen gänzlich enthalten. ——“

Weitere Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra: Nr. 7 und 8

Nr. 7 (S. 235–260): Zweiter neuer Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann,
Nr. 8 (S. 261–269): Dritter Beweis des Satzes über die Zerlegbarkeit ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren.
Lateinische Originale 1816/deutsche Übersetzung 1890.

Im Jahre 1816 erschienen zwei weitere Beweise des Fundamentalsatzes der Algebra in lateinischer Sprache, die Gauß in den „Commentationes“ veröffentlichte (siehe Nr. 7 und Nr. 8). Bereits am 29. Februar 1812 hatte Gauß seinem Tagebuch anvertraut:

> „Im Nov. 1811 war es geglückt, einen rein analytischen Beweis des Fundamentalsatzes in der Lehre der Gleichungen zu vervollkommnen; aber da nichts auf dem Papier aufbewahrt gewesen ist, war ein wesentlicher Teil ganz und gar dem Gedächtnis entfallen. Diesen haben wir, nachdem er recht lange Zeit vergeblich gesucht worden ist, endlich glücklich wiedergefunden.“[11]

Dieser zweite Gauß’sche Beweis gilt als der scharfsinnigste, für eine vereinfachte Darstellung sorgte Paul Gordan (1837–1912) im Jahre 1876.[12] Leopold Kronecker (1823–1891) gelang 1882 eine wichtige Weiterentwicklung

[11] Gauß, Carl Friedrich: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. Mit einer historischen Einführung von Kurt R.-Biermann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann, 5. Aufl. Frankfurt am Main 2005 (= Ostwalds Klassiker Nr. 256), S. 230 (Art. [141]).
[12] Gordan, Paul: Ueber den Fundamentalsatz der Algebra. Mathematische Annalen 10, 1876, S. 572–576.

der Gauß'schen Gedanken.[13] Es war daher auch dieser zweite Beweis, den David Eugene Smith in sein „Source Book of Mathematics" aufnahm.[14] Allerdings wurden hier nur einige Abschnitte von Gauß' Beweis in englischer Übersetzung wiedergegeben.[15]

Der dritte Beweis ist funktionentheoretischer Natur. Dieser wurde 1856, kommentiert und teilweise ins Französische übersetzt, in den „Nouvelles annales" veröffentlicht.[16]

Wie bereits berichtet, hatte Gauß 1850 noch einen vierten Beweis publiziert, allerdings in deutscher Sprache.[17] In diesem letzten Beweis knüpfte Gauß an seinen ersten Beweis an, auch er ist geometrisch.

Eugen Netto (1846–1919) ist eine Ausgabe in der Reihe „Ostwald's Klassiker" zu verdanken, in der alle vier Beweise in deutscher Sprache vorgestellt wurden. Der kleine Band erschien erstmals 1890 und erlebte 1904 und 1913 zwei weitere Auflagen. Netto hatte die Übersetzung der ersten drei Beweise besorgt.

Netto war im Jahre 1870 bei Karl Weierstraß (1815–1897) promoviert worden und wirkte danach als Lehrer. 1879 wurde er außerordentlicher Professor an der Universität Straßburg, 1882 an der Friedrich-Wilhelms-Universität in Berlin und schließlich 1888 ordentlicher Professor an der Universität Gießen. Die Publikation des Gauß-Bandes fällt also in seine Gießener Zeit. Im Jahre 1913 wurde Netto emeritiert.

Es war David Hilbert (1862–1943), der eine Besprechung dieses von Netto herausgegebenen Bandes lieferte, die noch in demselben Jahr 1890 im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" erschien:

> Hilbert, David: [Besprechung von] C. F. Gauß: Die vier Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. (1799–1849.) Hrsg. von E. Netto. (Ostwald's Klassiker der exacten Wissenschafte+n Nr. 14) Leipzig W. Engelmann, 81 S. 8°. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 22, 1890, S. 105.

[13] Kronecker, Leopold: Grundzüge einer arithmetischen Theorie der algebraischen Größen. Festschrift zu Herrn ernst Eduard Kummer's fünfzigjährigem Doctor-Jubiläum, 10. Sept. 1881. Berlin 1882, S. 42–44 (§ 13).

[14] Smith, David Eugene: Gauss. Second Proof of the Fundamental Theorem of Algebra. In: A Source Book in Mathematics. 2 Bände, New York 1929, Nachdruck 1985. Hier Bd. 1, New York 1959 (Dover Publications), S. 292–306.

[15] Translated from the Latin by Professor C. Raymond Adams, Brown University, Providence, R. I.

[16] Troisième Démonstration. De la possibilité de décomposer les fonctions algébriques entières en facteurs réels; D'après Gauss. Nouvelles annales de mathématiques 15, Paris 1856, S. 134–139.

[17] Gauß, Carl Friedrich: Beiträge zur Theorie der algebraischen Gleichungen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 4, (1848–1850) 1850, 34 S. In: Gauß Werke 3, S. 71–103.

Neue Methode zur Bestimmung der Polhöhe: Nr. 2

Nr. 2 (S. 39–55): Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, nebst astr. Beobachtungen.
Lateinisches Original 1808/deutsche Übersetzung 1809.

Im Jahre 1807 erhielt Gauß einen Ruf an die Universität Göttingen, den er annahm. Gauß war nunmehr ordentlicher Professor der Astronomie und Direktor der Sternwarte. An dieser Sternwarte wirkte seit 1805 Carl Ludwig Harding (1765–1834) als außerordentlicher Professor. Im Jahre 1808 veröffentlichte Gauß in Göttingen bei dem Verlag J. C. Baier sein Werk „Methodus peculiaris elevationem poli determinandi" in Form einer Monographie im Umfang von 19 Seiten, also ein vergleichsweise dünnes Büchlein bzw. Heftlein. Sicherlich erzielte Gauß mit dieser Publikation an entlegener Stelle bei den Astronomen keine große Aufmerksamkeit. Es war Gauß' neuer Kollege Harding, der für eine deutsche Übersetzung in dem in Astronomenkreisen weit verbreiteten „Berliner Jahrbuch" sorgte, die bereits ein Jahr später, im Jahre 1809, erschien, und zwar unter dem Titel: „Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, nebst astr. Beobachtungen". Es liegen keine Erkenntnisse über Besprechungen oder Ankündigungen dieser Gauß'schen Arbeit vor. Es ist dies das erste Werk von Gauß, das aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt worden ist, und es ist das einzige, das bereits ein Jahr nach dem Erscheinen des Originaltextes auch in deutscher Übersetzung vorlag.

Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate: Nr. 3, 10, 11 und 12

Bereits im Jahre 1855 erschien in Paris ein Band von 167 Seiten Umfang mit acht Arbeiten von Gauß, in denen dieser die Methode der kleinsten Quadrate vorgestellt hatte:

> Méthode des moindres carrés. Mémoires sur la combinaison des observations. Par Ch.-Fr. Gauss. Traduits en francais avec l'autorisation de l'auteur, par J. Bertrand Paris 1855.

Der Übersetzer, Joseph Bertrand (1822–1900), hatte sich mit Gauß persönlich in Verbindung gesetzt und um die Autorisierung seiner Übersetzung gebeten. Gauß' Antwort wurde von Bertrand in den „Comptes rendus" veröffentlicht.[18] Dort berichtete Bertrand auch über den von ihm übersetzten Band,[19] den er offensichtlich auch Gauß zukommen ließ.[20] Bertrand war seit 1844 Repetitor an der École Polytechnique, 1849 wurde er Professor am Collège de France

[18] Comptes rendus hebdomadaires des scéances de l'Académie des sciences, Paris, 40, 1855, S. 1082–1083.
[19] Ebenda, S. 1190–1192.
[20] Gauß besaß dieses Werk in seiner Privatbibliothek, die heute in der Niedersächsischen Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen aufbewahrt wird (Gauß-Bibliothek Nr. 233).

und 1856 an der École Polytechnique. Ab 1852 lehrte er auch an der École Normale Supérieure.

Dieser von Bertrand übersetzte und herausgegebene Band diente als Vorlage für die von Anton Börsch[21] und Paul Simon[22] im Jahre 1887 herausgegebenen „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate von Carl Friedrich Gauß". Beide, Börsch und Simon, waren promovierte Mathematiker und wirkten damals als Assistenten am Königlich Preußischen Geodätischen Institut in Potsdam.

Beide Ausgaben, die Bertrand'sche und die deutsche Übersetzung, enthalten die wichtigsten Paragraphen aus der 1809 von Gauß veröffentlichten „Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium" („Bewegung der Himmelskörper welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen") (§§ 172–189), in der Gauß zum erstenmal die Methode der kleinsten Quadrate vorgestellt und angewandt hatte. Diese Methode spielte auch in seinem Werk „Die Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas" eine wichtige Rolle. Sowohl die französische als auch die deutsche Ausgabe bringen denselben Ausschnitt daraus.

Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas: Nr. 3

Nr. 3 (S. 57–79): Die Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809.
Lateinisches Original 1811/deutsche Übersetzung 1887 (2. Teil) und 2003 (1. Teil).

Der Titel dieses Werkes von Gauß' „Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas" enthält keinen Hinweis darauf, dass das Kernstück die Methode der kleinsten Quadrate bildet. Das Werk wurde ursprünglich 1811 in lateinischer Sprache veröffentlicht. Die Herausgeber, Anton Börsch und Paul Simon, übersetzten, wie vor ihnen schon Joseph Bertrand, nur diejenigen Paragraphen, in denen die Methode der kleinsten Quadrate behandelt wird, und zwar das letzte Teilstück des §10 sowie die §11–15. So enthielten sowohl die deutsche wie auch die französische Übersetzung nur einen Teil von Gauß' Abhandlung. Im Folgenden wird erstmals der gesamte Text in deutscher Sprache vorgestellt, also auch das erste Teilstück, d. h. die Paragraphen § 1–10 (siehe in diesem Band S. 59–69). Die Neuübersetzung stammt von Eberhard Knobloch, dem dafür recht herzlich gedankt sei. Die Formatierung dieses Teils der Druckvorlage übernahm Elena Roussanova. Auch ihr sei herzlichst für ihre Mühewaltung gedankt.

Diese neu übersetzten Paragraphen enthalten die astronomischen Beobachtungen, auf die dann die Methode der kleinsten Quadrate angewandt

[21] Anton Börsch war 1876 in Marburg promoviert worden: Über einige analytisch-geometrische Maxima- und Minima-Probleme. 40 S.
[22] Paul Simon war 1876 in Halle promoviert worden: Ueber die Flächen mit constantem Krümmungsmaas. 40 S.

wurde. Gauß teilte seinen Lesern hierzu mit „Ich beabsichtige, die elliptischen Elemente zu ermitteln, welche nicht diesen oder jenen Oppositionen genau, sondern allen, welche bis jetzt beobachtet sind, möglichst nahe genügen. Die Methode, vermittelst deren man ein solches Geschäft erledigen kann, habe ich zwar schon in der ‚Theorie der Bewegung der Himmelskörper', Art. 187., kurz beschrieben, da aber nicht nur der Gegenstand, welchen ich dort allgemein behandelt habe, in dem speciellen Falle, wo die beobachteten Örter Oppositionen sind, gewisse Abkürzungen gestattet, sondern auch gewisse praktische Kunstgriffe, durch welche ich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schon lange zu einer bequemern zu machen gewohnt bin, in jenem Werke nicht gegeben werden, so hoffe ich, dass es den Astronomen nicht unlieb sein wird, wenn ich diese Rechnungen hier etwas weitläufiger wiedergebe." (siehe in diesem Band, S. 69).

Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen: Nr. 10, 11, 12

Nr. 10 und 11 (S. 299–327, 329–355): Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen. Erster und zweiter Theil.
Nr. 12 S. 357–396): Ergänzung zur Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen.
Lateinische Originale 1823 und 1828/deutsche Übersetzung 1887.

Im Zentrum sowohl der französischen als auch der deutschen Ausgabe des Bandes „Méthode des moindres carrés" („Methode der kleinsten Quadrate") steht Gauß' Werk „ Théorie de la combinaison des observations qui expose aux moindres erreurs" bzw. „Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen" (Erster und zweiter Teil und Supplement). Das waren sozusagen die Kernstücke, in denen die Verbindung zwischen der Methode der kleinsten Quadrate und der Wahrscheinlichkeitsrechnung vorgestellt wurde. Diese Arbeiten zählen heute zu den Klassikern der Fehlertheorie. Gauß' in den Jahren 1823 und 1828 erschienene Publikationen stehen in engem Zusammenhang mit Laplace, Pierre Simon: Théorie analytique des probabilités. Paris 1812.[23]

Laplace hatte dieses Werk am 5. November 1812 an Gauß geschickt.[24] Gauß hatte sich indessen in der Zwischenzeit anderen Themen zugewandt. Erst neun Jahre später sollte die Methode der kleinsten Quadrate wieder das Thema einiger seiner Publikationen bilden. In den „Göttingischen Gelehrten Anzeigen" führte Gauß 1821 aus: "Der Marquis DELAPLACE, welcher nachher diesen Gegenstand [die Methode der kleinsten Quadrate] aus einem

[23] Zweite Aufl. 1814, 3. Aufl. 1820, diese wiedergegeben in den Œuvres, vol. 7, Paris 1847 (auch in Œuvres 1886, Nachdruck Hildesheim: Olms 1966).
[24] Reich, Karin: Im Umfeld der „Theoria motus". Gauß' Briefwechsel mit Perthes, Laplace, Delambre und Legendre. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse (3) 48, 2001, S. 81 und 97.

neuen Gesichtspuncte betrachtete, indem er nicht die wahrscheinlichsten Werthe der unbekannten Größen suchte, sondern die zweckmäßigste Combination der Beobachtungen, fand das merkwürdige Resultat, daß, wenn die Anzahl der Beobachtungen als unendlich groß betrachtet wird, die Methode der kleinsten Quadrate allemahl und unabhängig von der Function, die die Wahrscheinlichkeit der Fehler ausdrückt, die zweckmäßigste Combination sey."[25]

Gauß führte, wie er selbst in der erwähnten Anzeige schilderte, den Begriff des mittleren zu befürchtenden Fehlers auf eine andere und, wie ihm schien, schon an und für sich natürlichere Art ein und hoffte, „daß die Freunde der Mathematik mit Vergnügen sehen werden, wie die Methode der kleinsten Quadrate in ihrer neuen hier gegebenen Begründung allgemein als die zweckmäßigste Combination der Beobachtungen erscheint, nicht näherungsweise, sondern nach mathematischer Schärfe, die Function für die Wahrscheinlichkeit der Fehler sey, welche sie wolle, und die Anzahl der Beobachtungen möge groß oder klein seyn."[26]

Das Thema der „Methode der kleinsten Quadrate" gehörte zu Gauß' Standardvorlesungen. Von 1819 bis 1834/35 gab er seinen Vorlesungen den Titel „Anwendung der Wahrscheinlichkeitsrechnung", ab 1835/36 hieß sie „Methode der kleinsten Quadrate". Er las darüber noch in seinem letzten Semester 1854/55. Es war dies seine am häufigsten gehaltene mathematische Vorlesung.[27]

Gauß' Beiträge zur Methode der kleinsten Quadrate bzw. zur Wahrscheinlichkeitsrechnung waren von fundamentaler Bedeutung. Sie spielten in der Entwicklung der Wahrscheinlichkeitsrechnung eine sehr wichtige Rolle, auf die hier aber nicht im einzelnen eingegangen werden kann.

Die von Bertrand herausgegebene Übersetzung ins Französische „Méthode des moindres carrés" diente nicht nur der deutschen, sondern auch der russischen Übersetzung als Vorbild, die, an die deutsche Übersetzung angelehnt, im Jahre 1957 erschien:

> Карл Фридрих Гаусс: Избранные геодезические сочинения. Том I: Способ наименьших квадратов. Общая редакция С. Г. Судакова, комментарий и редакция Г. В. Багратуни, перевод с латинского и немецкого Н. Ф. Булаевского, Москва 1957, стр. 152. [Izbrannye geodezičeskie sočinenija. Tom 1: Sposob naimen'šich kvadratov. Obščaja redakcija S. G. Sudakova, redakcija G. V. Bagratuni, perevod s latinskogo i nemeckogo N. F. Bulaevskogo. Moskva 1957, 152 str.]

[25] Gauß, Carl Friedrich: Anzeige der Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, Göttingische Gelehrte Anzeigen 1821, S. 321–327 (26. Februar; 33. Stück), hier S. 326. In: Gauß Werke 4, S. 95–100, hier S. 99.

[26] Ebenda S. 327.

[27] Folkerts, Menso: Carl Friedrich Gauß' Aktivitäten an der Universität Göttingen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. II. Mathematisch-physikalische Klasse Nr. 2, 2002, S. 23–131, hier S. 89.

Vielleicht war die französische Übersetzung von Bertrand auch die Grundlage für die folgende englische Übersetzung:

> Work on the theory of Least Squares. Übersetzt von Hale F .Trotter, 1957, 183 S.

Diese Übersetzung konnte jedoch nicht eingesehen werden.

Besonderer Erwähnung bedarf die neueste, im Jahre 1995 erschienene Ausgabe. Für diese diente allerdings nicht die Bertrand'sche Edition als Grundlage. Dieses Werk erschien zweisprachig, in der lateinischen Originalsprache und in englischer Übersetzung:

> Theory of the Combination of Observations Least Subject to Errors, Part one, Part Two, Supplement. Übers. von Gilbert W. Stewart (= Classics in Applied Mathematics; 11. SIAM), Philadelphia 1995, XI + 230 S.

In diese Ausgabe wurden auch die ursprünglich in deutscher Sprache verfassten Anzeigen aufgenommen, die in den „Göttingischen Gelehrten Anzeigen" erschienen waren. Diese Anzeigen wurden hier erstmals in englischer Übersetzung präsentiert.

Der 1887 von Börsch und Simon herausgegebene Band „Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate" kam im Berliner Verlag Stankiewicz heraus. Paul Stankiewicz (1834–1897) wirkte eigentlich vor allem als Kunstmaler, er gründete jedoch 1868 in Berlin einen Verlag, den er allerdings nach drei Jahren einem Geschäftsführer überließ.

Nicht unerwähnt bleiben soll folgende Besprechung des Bandes:

> Lazarus, Wilhelm: [Besprechung von] C. F. Gauß. Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate. In deutscher Sprache herausgegeben von A. Börsch und P. Simon. Berlin. Stankiewicz. 208 S. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19, 1887, S. 207 f.

Der Rezensent Wilhelm Lazarus (1825–1890) wirkte als Mathematiker in Hamburg und war dort Mitglied der Bibliothekskommission.[28]

Die hypergeometrische Reihe: Nr. 4

Nr. 4 (S. 81–162): Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+u.s.f.$$

Lateinisches Original 1813/deutsche Übersetzung 1888.

Die hypergeometrische Reihe konnte bereits auf eine lange Geschichte zurückblicken, als Gauß sich mit ihr zu beschäftigen begann. Es war John Wallis (1616–1703), der die Bezeichnung „hypergeometrische Reihe" erstmals verwendet hatte. Auch Leonhard Euler (1707–1783), der darunter auch unendliche Potenzreihen verstand (siehe in diesem Band S. 159 f.), hatte sich

[28] Siehe https://www.deutsche-digitale-bibliothek.de/item/DP4DXUMRMJ4OJK3GXE627FTRS5NNLGJL

ihrer bedient. Und auch Gauß' Doktorvater Johann Friedrich Pfaff hatte sich in seinem Werk „Disquisitiones analyticae maxime ad calculum integralem et doctrinam serierum pertinentes" (Helmstedt 1797) mit dieser speziellen Reihe beschäftigt.

Gauß hatte 1811 mit der Ausarbeitung seiner Abhandlung begonnen. Er präsentierte sie am 30. Januar 1812 der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen.[29] Im Jahre 1813 erschien die in lateinischer Sprache verfasste Langversion in den „Commentationes".

Die von Heinrich Simon (1858–1919)[30] besorgte Übersetzung von Gauß' „Allgemeiner Untersuchung über die unendliche Reihe" stellt insofern einen besonderen Fall dar, als der Übersetzer, nicht nur den von Gauß in den „Commentationes" publizierten Teil, sondern auch den zweiten zu Gauß' Lebzeiten nicht veröffentlichen Teil, der erst im Nachlass gefunden worden war, mitübersetzte. Da beide Teile eine Einheit bilden, wird hier auch dieser aus dem Nachlass übersetzte zweite Teil mitberücksichtigt. Nicht aufgenommen wurde allerdings Gauß' Anzeige, da diese, in deutscher Sprache veröffentlicht, schon in Gauß' Werken vorgestellt worden ist.[31]

Die Schreibweise F(α, β, γ, x) geht auf Gauß zurück, der dazu ausführte: „Die Reihe, die wir in dieser Abhandlung untersuchen wollen, kann als Function der vier Grössen α, β, γ, x angesehen werden, die wir die Elemente derselben nennen, indem wir der Reihe nach das erste Element α, das zweite β, das dritte γ und das vierte x unterscheiden" (siehe in diesem Band S. 85). Gauß untersuchte die Fälle, in denen sich daraus eine rationale algebraische oder eine transzendente Funktion ableiten ließ. Es waren speziell die so gestalteten transzendenten Funktionen, denen Gauß seine Untersuchung widmete. Auch führte er die mit F(α, β, γ, x) in Zusammenhang stehende transzendente Funktion Πz ein, ein Pendant zu der später so genannten Gammafunktion, und hoffte, dass dieser Funktion in der Analysis das Bürgerrecht erteilt werden würde.

Es war diese Gauß'sche Arbeit, die zahlreiche Mathematiker dazu veranlasste, sich mit dem Problem der hypergeometrischen Reihe zu beschäftigen. Es seien hier nur die Namen Ernst Kummer (1810–1893)[32] und Bernhard Riemann (1826–1866)[33] genannt. Felix Klein (1849–1925) widmete

[29] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1812, S. 233–240 (10. Februar, 24. Stück). In: Gauß Werke 3, S. 197–202.

[30] Heinrich Simon war 1876 an der Universität Halle über „Die harmonische Reihe: ein Beitrag zur algebraischen Analysis" promoviert worden und wirkte an der Universitätsbibliothek in Berlin.

[31] Siehe Anm. 29.

[32] Kummer, Ernst: Über die hypergeometrische Reihe. Jorunal für die reine und angewandte Mathematik 15, 1836, S.39–83, 127–172.

[33] Riemann, Bernhard: Beiträge zur Theorie der durch die Gauss'sche Reihe F(α, β, γ, x) darstellbaren Functionen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 7, 1857, mathematische Classe, S. 3–19. In: Riemann, Gesammelte Werke und der wissenschaftliche Nachlass. Hrsg. unter Mitwirkung von Richard Dedekind und Heinrich Weber. Leipzig 1876, S. 62–78.

in seinen „Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94", Gauß' Abhandlung und deren Ergebnissen ein ganzes Kapitel.[34]

Erwähnenswert ist ferner, dass in jüngerer Zeit Auszüge aus Gauß' Werk ins Englische übersetzt wurden.[35]

Der deutschen Übersetzung wurde eine Besprechung gewidmet:

> Weltzien, Carl Julius Heinrich:[36] [Besprechung von] C. F. Gauß: Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe
>
> $$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\dots$$
>
> Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung übersetzt von H. Simon. Berlin. J. Springer. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 19, 1887, S. 242.

Anziehung homogener Ellipsoide: Nr. 5

Nr. 5 (S. 163–189): Theorie der Anziehung homogener Ellipsoide.
Lateinisches Original 1813/deutsche Übersetzung 1890.

Die Aufgabe, die Attraktion homogener elliptischer Sphäroide zu bestimmen, wurde von Isaac Newton (1643–1727) formuliert und behandelt. In der Folgezeit beschäftigten sich, so Gauß, die ersten Geometer ihrer Zeit mit diesem Problem; Gauß selbst zitierte nicht nur Newton, sondern auch Colin Maclaurin (1698–1746), Jean-Baptiste d'Alembert (1717–1783), Joseph-Louis Lagrange (1736–1813) und Adrien-Marie Legendre (1752–1833). Gauß' wichtigster Vorläufer und sein Vorbild war wieder einmal Pierre Simon Laplace (1749–1827), dem ein erster strenger Beweis zu verdanken war. Gauß bezeichnete diesen als ein „schönes Document der feinsten analytischen Kunst".[37]

In seinem Tagebuch hielt Gauß fest:

> „Wir haben eine ganz und gar neue Theorie der Anziehung der elliptischen Sphäroide auf außerhalb des Körpers gelegene Punkte entdeckt.
>
> Seeberg, 26. Sept. 1812

[34] Klein, Felix: Vorlesungen über die hypergeometrische Funktion, gehalten an der Universität Göttingen im Wintersemester 1893/94. Ausgearbeitet von Ernst Ritter. Herausgegeben von Otto Haupt. Berlin, Heidelberg 1933, S. 8–21.

[35] Gauss on the Hypergeometric Series

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}z+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}z^2+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}z^3+\dots$$

In: A Source Book in classical Analysis. Edited by Garrett Birkhoff with the assistance of Uta Merzbach. Cambridge, Massachusetts 1973, S. 62–67.

[36] Carl Julius Heinrich Weltzien (1852–1939) begann 1870 sein Studium an der Universität in Berlin, wo er 1882 promoviert wurde. 1877 wurde er in Berlin Hilfslehrer, 1878 Oberlehrer und 1895 Professor an der Friedrich Werderschen Oberrealschule.

[37] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1813, S. 545–552 (5. April, 55. Stück). In: Gauß Werke 5, S. 279–285, hier S. 280.

> Auch die übrigen Teile derselben Theorie haben wir durch eine neue Methode von wunderbarer Einfachheit vollendet.
>
> Göttingen, 15. Okt. 1812.“[38]

Ferner erwähnte Gauß in seiner Abhandlung auch noch Beiträge von anderen Zeitgenossen, nämlich von Jean-Baptiste Biot (1774–1862), Giovannni Plana (1781–1864) und James Ivory (1765–1842). Das Thema war also zu Gauß' Zeiten hochaktuell.

Das Problem der Anziehung elliptischer Sphäroide spielte auch im Briefwechsel zwischen Laplace und Gauß eine große Rolle. Am 5. November 1812 informierte Gauß seinen Freund Laplace über seine Ergebnisse und schickte ihm offensichtlich eine Kurzversion:

> „je me suis occupé du problème célèbre des attractions d'un spheroïde elliptique. C'est vous, Monsieur, qu'il y a 30 ans en avés donné le premier la solution complette, dont je traite cette question mérita l'attention des geometres. J'ai composé là dessus un mémoire qui sera lu bientôt à la société Roïale et ensuite imprimé parmi ses ‚Commentationes'. J'ai l'honneur de vous offrir ici un Extrait de ce qui est essentiel au problème cité, et je vous prie de le presenter à l'Institut, duquel plusieures membres ont bien merité du même probleme. Vous verres avec plaisir que deux pages m'ont suffi pour obtenir la solution complette.“

Und Laplace antwortete am 20. November 1812:

> „A vostre lettre etoit jointe une demonstration très simple d'un theorème sur les attractions des spheroides elliptiques. J'ai commencé par la lire, et j'ai été ravi de sa simplicité. Elle a produit le mesme effet sur ceux des membres de l'institut qui se sont occupés de cet objet, et aux quels je l'ai communiquée suivant vos intentions.“[39]

In diesem Brief erwähnte Laplace auch eine zum Thema passende Arbeit von Ivory, die Gauß noch nicht kannte. So fügte Gauß seiner Veröffentlichung noch schnell einen kurzen Abschnitt über Ivorys Abhandlung hinzu.[40]

---

[38] Gauß, Carl Friedrich: Mathematisches Tagebuch 1796–1814. Mit einer historischen Einführung von Kurt R.-Biermann. Durchgesehen und mit Anmerkungen versehen von Hans Wußing und Olaf Neumann, 5. Aufl. Frankfurt am Main 2005 (= Ostwalds Klassiker; 256), S. 230 (Art. [142] und [143]).

[39] Reich, Karin: Im Umfeld der ‚Theoria motus': Gauß' Briefwechsel mit Perthes, Laplace, Delambre und Legendre. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Göttingen, Mathematisch-Physikalische Klasse, Dritte Folge Nr. 48, 2001, S. 99. Siehe ferner Correspondance de Pierre Simon Laplace (1749–1827. Publiée et annotée par Roger Hahn. Tome 2 Années 1803–1828, Turnhout: Brepols 2013 (De diversis artibus Tome 90, (N.S.53)), S. 1000 f.

[40] Ebenda, S. 82. Zu Ivorys Theorem siehe Grattan-Guinness, Ivor: Convolutions in French Mathematics, 1800–1840. Basel, Boston Berlin 1990 (= Science Networks, Historical Studies; 2), S. 418–424.

Am 18. März 1813 konnte Gauß die nunmehr vollendete Arbeit der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen vorstellen,[41] kurze Zeit später erschien sie in den „Commentationes".

Die Übersetzung von Gauß' Abhandlung ins Deutsche ist dem Mathematiker Albert Wangerin (1844–1933) zu verdanken. Wangerin studierte an den Universitäten Halle und Königsberg, wo er 1866 promoviert wurde. Er wirkte als Lehrer an diversen Gymnasien in Berlin, wurde 1876 außerordentlicher Professor an der Universität Berlin und 1882 ordentlicher Professor an der Universität Halle. Seine Übersetzung erschien 1890 in der Reihe „Ostwald's Klassiker". Bereits 1889 hatte Wangerin eine Übersetzung von Gauß' „Allgemeiner Flächentheorie" ebenfalls in der Reihe „Ostwald's Klassiker" publiziert (siehe in diesem Band Nr. 13, S. 397–458).

Wangerin veröffentlichte in seinem Band nicht nur Gauß' Abhandlung aus dem Jahre 1813, sondern auch die von Gauß zitierten Abhandlungen von Pierre Simon Laplace[42] und James Ivory[43] sowie die nach Gauß erschienenen Abhandlungen von Michel Chasles[44] und von Gustav Dirichlet.[45] Diese fünf Abhandlungen hielt Wangerin für besonders wichtig.

Eine Besprechung des von Wangerin herausgegebenen Bandes verfasste

> Lampe, Emil:[46] [Besprechung von] Laplace, Ivory, Gauß, Chasles und Dirichlet. Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen. Herausgegeben von A. Wangerin. (Ostwald's Klassiker der exacten

[41] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1813, S. 545–552 (5. April, 55. Stück). In: Gauß Werke 5, S. 279–285.

[42] Laplace, Pierre Simon: Théorie des attractions des sphéroïdes et de la figure des planètes. Mémoires de l'Académie royale des sciences de l'Institut de France (1782/1785), S. 113–196. Ferner in: Oeuvres complètes de Laplace, Bd. 10, Paris 1894, S. 341–419.
Laplace übernahm diese Arbeit in etwas geänderter Form in seinem „Traité de Mecanique céleste", Bd. 2, Paris 1799.
Wangerin übersetzte hieraus S. 3–22 (Livre 3, Chap.1). Es war diese Version aus der „Mécanique céleste", die Wangerins Übersetzung zugrundeliegt.
Zum allgemeinen Thema siehe Todhunter, Isaac: A history of the mathematical theories of attraction and the figure of the earth from the time of Newton to that of Laplace. London 1873.
Speziell zu Laplace siehe: Laplace, Pierre Simon, Marquis de. Dictionary of Scientific Biography 15 (= Suppl.1), New York 1978, S. 273–403, insbes. Section 16, Attraction of Spheroids, S. 316–322.

[43] Ivory, James: On the Attractions of Homogeneous Ellipsoids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1809, Teil 2, S. 345–372.

[44] Chasles Michel: Nouvelle solution du problème de l'attraction d'un ellipsoïd hétérogène sur un point extérieur. Journal des mathématiques pures et appliquées 5, 1840, S. 465–488.

[45] Dirichlet, Gustav Peter Lejeune: Über eine neue Methode zur Bestimmung vielfacher Integrale. Abhandlungen der Königlichen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Aus dem Jahre 1839, Berlin 1841, Mathematische Abhandlungen, S. 61–79. In: Dirichlet, Werke Bd. 1, hrsg. von L. Kronecker, Berlin 1889, S. 391–410.

[46] Karl Otto Emil Lampe (1840–1918) studierte seit 1860 an der Universität Berlin und wurde dort 1864 promoviert. Im Jahre 1866 wurde er Oberlehrer an der Friedrich-Werderschen Gewerbeschule, 1874 Lehrer an der Kriegsakademie und 1877 Professor

Wissenschaften. Nr. 19). Leipzig. W. Engelmann, 118 S. 8°. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 22, 1890, S. 983.

Näherungsweise Auffindung von Integralwerten: Nr. 6

Nr. 6 (S. 191–234): Neue Methode zur näherungsweisen Auffindung von Integralwerten.
Lateinisches Original 1816/deutsche Übersetzung 1917.

Gauß präsentierte seine Arbeit „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi" am 16. September 1814 der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen.[47] Zwei Jahre später, 1816 erschien seine Schrift in den „Commentationes". Das Thema, das hier behandelt wird, ist die Newton-Cotes'sche Interpolationsmethode. Isaac Newton (1643–1727) hatte als erster die Idee einer Interpolationsformel entwickelt, die auf ein Interpolationspolynom mit einem Restglied führt. Gauß nannte Newton zwar, aber er zitierte dessen Schrift nicht expressis verbis.[48] Das an Newton anschließende Werk von Roger Cotes (1682–1716) allerdings zitierte Gauß sehr wohl (siehe in diesem Band S. 196 und 208):

> Cotes, Roger: Harmonia mensurarum, sive analysis, synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae. Accedunt alia opuscula mathematica. Cambridge 1722.

Dieses posthum erschienene Werk war unvollendet. Cotes wandte hier Newtons Infinitesimalmethoden auf geometrische, physikalische und astronomische Probleme an. Es gelang ihm, für das Restglied eine Abschätzung anzugeben. Gauß widmete sich in seiner Schrift den Cotes'schen Quadraturkoeffizienten. Es gelang ihm, sich von der Cotes'schen Idee gleicher Intervalle freizumachen. Im Gegensatz zu Cotes teilte er das Grundintervall in zweckmäßigster Weise – der Superlativ ist wichtig – in ungleiche Stücke. Franz Encke (1791–1865), der von 1811 bis 1816 mit Unterbrechungen bei Gauß studiert hatte, konnte später die Leistungsfähigkeit von Gauß' neuer Interpolationsmethode an einem praktischen Beispiel zeigen:

> „Man sieht hieraus, daß 3 Abscissen bei Gauß dieselbe Genauigkeit geben wie 5 bei Cotes, so wie 6 Abscissen bei Gauß noch genauere Resultate geben wie 11 bei Cotes; auch fällt bei Gauß der Unterschied zwischen der Genauigkeit bei gerader und ungerader Zahl der Intervalle ganz weg. In den ersten fünf Jahren der neuen Berlin der Sternwarte beobachtete mein damaliger Gehülfe, der jetzige Direktor der Breslauer Sternwarte, Herr Prof. Galle, dreimal täglich den Barometerstand

bzw. 1889 ordentlicher Professor an der Technischen Hochschule in Berlin.

47 Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1814, S. 1546–1552 (26. September, 155. Stück). In: Gauß Werke 3, S. 202–206.

48 Es handelt sich um Newtons „Methodus differentialis", der, in Newtons Schrift „Analysis per quantitatum series, fluxiones: ac differentias: cum enumeratione linearum tertii ordinis" integriert, in London 1711 erschien, siehe dort S. 93–101.

> und Thermometerstand zu den Zeiten, welche um den neunten Teil des ganzen Tagebogens später als Sonnenaufgang und früher als Sonnenuntergang fielen und zur Zeit des nahen Mittags. Er erreichte dadurch dieselbe Genauigkeit, als wenn er fünfmal täglich in gleichen Zeitintervallen die Beobachtungen angestellt hätte, wie es in der That auch die Erfahrung bei der Herleitung des mittlern Thermo- und Barometerstandes aus seinen Beobachtungen, verglichen mit denen einer längeren Reihe von Jahren, bestätigt hat.“[49]

Dennoch musste Encke zugeben: „Gauß hatte wahrscheinlich größere Hoffnungen auf diese Art der Integration gebaut, als er später verwirklicht fand.“[50] Als Grund für dieses Problem nannte Encke die schwierige Induktion,

> „durch welche Gauß zu seinem Resultate gelangte. […] Diese Eigenschaft, die wahrscheinlich bei Gauß der erste Anlaß gewesen ist, durch eine andere Vertheilung der Intervalle zu versuchen, die Genauigkeit auf das größtmögliche Maaß zu treiben, ist allerdings von Gauß, wie sich von selbst bei diesem Meister versteht, strenge erwiesen, gewährt aber nicht die Anschaulichkeit, die man bei dem an sich einfachen Satze wünschen möchte, so wie auch das Verhältnis der einzelnen Coefficienten bei der Entwickelung des Fehlers nach einer Reihe, welche nach ganzen Potenzen der Variabeln fortgeht, bei Gauß durch bloße Induktion gefunden und nachher erst erwiesen, meinem Gefühle nach etwas fremdartig erscheint“.[51]

Arnold Kowalewski (1873–1945) war der ältere Bruder des Mathematikers Gerhard Kowalewski (1876–1950). Gerhard Kowalewski hatte bereits 1906 und 1908 zwei klassische Texte, nämlich von Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851) und von Isaac Newton, in der Reihe „Ostwald’s Klassiker“ veröffentlicht.[52]

Die deutsche Übersetzung von Gauß’ Abhandlung „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“ („Neue Methode zur näherungsweisen Auffindung von Integralwerten“) ist Arnold Kowalewski zu verdanken. Er studierte an den Universitäten Jena, Berlin, Königsberg und Greifswald. An letzterer wurde er 1897 mit einem philosophischen Thema promoviert. Im Jahre 1899 habilitierte er sich an der Universität Königsberg. Er wirkte als Philosoph, Experimentalpsychologe und Mathematiker und

---

[49] Encke, Franz: Über die Cotesischen Integrations-Faktoren. Astronomisches Jahrbuch für 1863, Berlin 1860, S. 311–333, hier S. 333. Ferner in: Encke, Franz: Gesammelte mathematische und astronomische Abhandlungen. Bd. 1, Berlin 1888, S. 100–124.

[50] Ebenda, S. 312.

[51] Ebenda, S. 313 f.

[52] Jacobi, Carl Gustav Jacob: Neue Methode zur Integration partieller Differentialgleichungen erster Ordnung zwischen irgend einer Anzahl von Veränderlichen. Hrsg. von G. Kowalewski. Leipzig 1906 (Ostwald’s Klassiker Nr. 156). Newtons Abhandlung über die Quadratur der Kurven (1704). Aus dem Lateinischen übersetzt und herausgegeben von Gerhard Kowalewski. Leipzig 1908 (Ostwald’s Klassiker Nr. 164).

nahm zunächst einen Lehrauftrag in Breslau wahr. Er nahm am 1. Weltkrieg teil, war danach Privatdozent und seit 1921 außerordentlicher Professor der Philosophie an der Universität Königsberg. Arnold Kowalewski war ein interdisziplinär arbeitender Wissenschaftler. Sein mathematisches Schaffen stand in engem Zusammenhang mit seinen philosophischen Studien.[53] Während des 1. Weltkrieges, im Jahre 1917, erschien im Veit-Verlag zu Leipzig das Bändchen „Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur (1711, 1722, 1814, 1826)“. Arnold Kowalewski fungierte als Übersetzer und Herausgeber und widmete den Band seinem Bruder: „Meinem lieben Bruder Dr. Gerhard Kowalewski o. ö. Professor der Mathematik an der k. k. deutschen Universität zu Prag zugeeignet“, der ihm bei den Korrekturen sowie mit verschiedenen fachmännischen Auskünften zur Seite gestanden hatte.

In der Tat waren es seine experimentalpsychologischen Studien, die Arnold Kowalewski dazu veranlassten, die Literatur im Hinblick auf Interpolationsmethoden zu durchmustern. Im Vorwort seines 1917 erschienenen Bändchens ließ er die Leser wissen:

> „Man stellt gewöhnlich die Forderung gleicher Intervalle. Demgegenüber scheint es mir wichtig, auf die Gaussische Interpolationsmethode hinzuweisen, deren Grundgedanke eine ökonomische Ungleichteilung ist zum Zwecke möglichst vorteilhafter Berechnung von Mittelwerten. […] Es erschien mir zweckmäßig, zunächst die halbvergessene Gaussische Abhandlung von 1814 mit ihren wichtigsten Vorarbeiten (Newton, Cotes) und der vereinfachenden Darstellung Jacobis in deutscher Sprache zugänglich zu machen, damit das Interesse an diesem ausgezeichneten mathematischen Werkzeug auch außerhalb des engeren Fachkreises neu belebt werde.“

Als ersten Text veröffentlichte Arnold Kowalewski Newtons „Methodus differentialis“ aus dem Jahre 1711[54] in deutscher Übersetzung. Im Anhang präsentierte er auch noch die einschlägigen Passagen aus Newtons „Philosophiae naturalis principia mathematica“ (1687), und zwar aus Buch 3 den 5. Hilfssatz, in dem bereits die Interpolationsmethode vorgeführt worden war.

Es folgen die entsprechenden Abschnitte aus Roger Cotes’ Schrift „Harmonia mensurarum“ (Cambridge 1722). Daran schließen sich die Abhandlungen von Gauß und von Jacobi an. Letzterer hatte im Jahre 1826 einige Erläuterungen speziell zu Gauß’ Werk unter dem Titel „Ueber Gauß neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden“ veröffentlicht. Jacobi führte dort aus:

[53] Voss, Waltraut: Arnold Kowalewski – ein interdisziplinärer Wissenschaftler. In: Michael Toepell (Hrsg.). Mathematik im Wandel. Anregungen zu einem fächerübergreifenden Mathematikunterricht. Bd.2, Hildesheim, Berlin 2001, S. 426–451.

[54] Siehe Anm.48.

> „Aber Gauß hat in den Göttinger Commentarien gezeigt, daß man durch schickliche Wahl der Abscissen, für welche die Ordinaten berechnet werden, den Grad der Näherung auf das Doppelte treiben kann; und da solche Bestimmung unabhängig von der Natur der zu quadrirenden Curve geschieht, so ist es möglich, auch nach der so vervollkommneten Methode Tafeln zu verfertigen, von denen auch Gauß eine Probe gegeben hat. Gauß gelangt zu seinen Resultaten auf dem Wege einer schwierigen Induction, die durch die sogenannte Kästnersche Methode, wenn etwas für die Zahl n gilt, es auch für die Zahl n+1 zu erweisen, zur Allgemeinheit erhoben werden kann. Es ist also noch ein directer Beweis zu wünschen. Die große Einfachheit und Eleganz der Gaußischen Resultate, läßt einen einfachen Weg vermuthen. Auf einem solchen einfachen und directen Wege zu jenen Resultaten zu gelangen, mit denen Gauß die Wissenschaft bereichert hat, ist der Zweck dieser Abhandlung.“[55]

Es war Konrad Knopp,[56] der Arnold Kowalewskis kleinen Band im „Jahrbuch“ besprach:

> Knopp, Konrad: [Besprechung von] A. Kowalewski. Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur /1711, 1722, 1814, 1826). Leipzig: Veit u. Co., VI u. 104 S. 8° (1917). In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 46, (1916–1918), Berlin und Leipzig 1923/24, S. 38 f.

Zuguterletzt soll noch erwähnt werden, dass 1856 einige Abschnitte aus Gauß' „Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi“ von Olry Terquem (1782–1862) in französischer Übersetzung veröffentlicht wurden.[57] In jüngster Zeit lieferte Robert Schaback eine Analyse dieser Gauß'schen Arbeit im Hinblick auf Gauß' Beiträge zur numerischen Mathematik.[58]

---

[55] Jacobi, Carl Gustav Jacob: Ueber Gauß neue Methode, die Werthe der Integrale näherungsweise zu finden. Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 1826, S. 301–308; Zitat siehe S. 302.

[56] Knopp, Konrad Hermann Theodor (1882–1957), ab 1901 Studium an den Universitäten Lausanne und Berlin, wo er 1906 das Staatsexamen ablegte und 1907 promoviert wurde. 1908–09 wirkte er als Lehrer an der Handelshochschule in Nagasaki in Japan, 1910/11 war er Dozent an der deutsch-chinesischen Hochschule in Tsingtau in China. Er habilitierte sich 1911 in Berlin, wirkte 1913–14 an der Militärtechnischen Akademie und ab 1914 an der Kriegsakademie in Berlin, wurde 1915 außerordentlicher Professor an der Universität Berlin, 1919 ordentlicher Professor in Königsberg und 1926 in Tübingen, wo er 1950 emeritiert wurde.

[57] Nouvelles annales de mathématiques 15, 1856, S. 109–129: Méthode de quadrature de Cotes. D'après Gauss. S. 207–211: Sur les fractions continues algébriques. D'après Gauss. S. 315–321: Sur l'évaluation d'une fonction algébrique fractionnaire. La variable étant racine d'une équation algébrique donnée. D'après Gauss.

[58] Schaback, Robert: Die Beiträge von Carl Friedrich Gauß zur numerischen Mathematik. Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft 51, 2014, S. 63–86, hier S. 77–80.

Bestimmung der Anziehung:Nr. 9

Nr. 9 (S. 271–298): Bestimmung der Anziehung, die ein Planet auf einen Punkt beliebig gegebener Lage ausübte, wenn seine Masse auf die ganze Bahn im Verhältnis zur Zeit, in der ihre einzelnen Teile durchlaufen werden, gleichmäßig verteilt wäre.
Lateinisches Original 1820/deutsche Übersetzung 1927.

Am 17. Januar 1818 stellte Gauß seine Abhandlung „Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita“ der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen vor,[59] im Jahre 1820 folgte die Veröffentlichung in den „Commentationes“. Es geht hier um Störungsrechnung, nämlich um gestörte Planetenbahnen und um störende Planeten. Gauß beschreibt das zu lösende Problem wie folgt:

> „Die Aufgabe, welche den Gegenstand dieser Abhandlung ausmacht, nähmlich die nicht genäherte, sondern genaue, nicht von mäßiger Excentricität der Ellipse abhängige, sondern allgemeine, Bestimmung der Anziehung, welche ein elliptischer Ring von unendlich kleiner und nach obigem Gesetze unveränderlicher Dicke gegen einen jeden Punkt im Raume ausübt, ist daher für die physische Astronomie von hohem Interesse.“[60]

Gauß behandelte das Problem rein analytisch, wobei die Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels eine wichtige Rolle spielte. Diese Theorie war der Grund dafür, dass sich der Herausgeber und Übersetzer des Gauß’schen Werkes, Harald Aloysius August Maria Geppert (1902–1945), dieser Abhandlung widmete. Geppert selbst hatte im Publikationsjahre 1927 gerade zwei Abhandlungen über das arithmetisch-geometrische Mittel in Arbeit:

> Geppert, Harald: Zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels. Mathematische Annalen 99, 1828, S. 162–180.
>
> Geppert, Harald: Die Uniformisierung des arithmetisch-geometrischen Mittels. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 38, 1929, S. 73–82.

In seinem 1927 erschienenen Band „Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes, Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion“ stellte Geppert, wie dies schon im Titel zum Ausdruck kommt, Gauß’ Arbeiten vor, die im Zusammenhang mit Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels stehen. Er beschrieb Gauß’ frühes Interesse an diesem Thema und veröffentlichte neben Gauß’

[59] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1818, S. 233–237 (9. Februar, 24. Stück). In: Gauß Werke 3, S. 357–360. In der Anzeige steht „quodlibet“ anstelle von „quodvis“.
[60] Ebenda, S. 234.

übersetzter Publikation vor allem relevante Stücke aus Gauß' Nachlass. Im Zentrum steht dabei Gauß' Theorie der Modulfunktion. In einem zweiten Teil veröffentlichte Geppert eine Bibliographie, die alle bis 1927 erschienene, an die Gauß'schen Arbeiten über das arithmetisch-geometrische Mittel anknüpfenden Abhandlungen umfasst (S. 190–194). Diese Bibliographie ist beeindruckend, zeigt aber auch, dass Gauß' Abhandlung in keine andere Sprache als ins Deutsche übersetzt und fast ausschließlich im deutschen Sprachraum rezipiert wurde.

Harald Geppert, der italienischer Muttersprache war, studierte an den Universitäten Breslau und Göttingen und wurde 1923 in Breslau promoviert. Dort wurde er Assistent und habilitierte sich 1925. Im Jahre 1930 wurde er außerordentlicher und 1935 ordentlicher Professor an der Universität Gießen, 1940 wechselte er an die Universität Berlin.

Eine Besprechung des von Harald Geppert herausgegebenen kleinen Bandes stammt von Georg Feigl:

> Feigl, Georg:[61] [Besprechung von] C. F. Gauß. Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes. Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion. Herausgeg. von H. Geppert. VI + 208 S. Mit 4 Fig. Leipzig, Akademische Verlagsgesellschaft (Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften Bd. 235). In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 53, 1927, S. 23.

Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass Harald Gepperts Beitrag „Über Gauß' Arbeiten zur Mechanik und Potentialtheorie" Eingang in die Ausgabe von Gauß' Werken gefunden hat.[62]

Allgemeine Flächentheorie: Nr. 13

Nr. 13 (S. 397–458): Allgemeine Flächentheorie.
Lateinisches Original 1828/deutsche Übersetzung 1889.

Gauß hatte schon früh Interesse am Vermessungswesen und an der praktischen Geodäsie gehegt. Im Jahre 1820 erhielt er den Auftrag, das Königreich Hannover zu vermessen, eine Tätigkeit, die ihn bis 1844 intensiv beschäftigen sollte. Von dieser Beschäftigung profitierten auch Gauß' mathematische Studien. Es sind insbesondere zwei mathematische Abhandlungen, die im Zusammenhang mit Gauß' geodätischen Interessen stehen:

---

[61] Georg Feigl (1890–1945) studierte an der Universität in Jena, wo er 1918 promoviert wurde. Von 1919–1928 war er Assistent an der Universität Berlin, wo er sich 1927 habilitierte. Ab 1928 wirkte Feigl als Schriftleiter des „Jahrbuchs über die Fortschritte der Mathematik". 1933 wurde er außerordentlicher Professor an der Universität Berlin und 1935 ordentlichen Professor an der Universität Breslau.

[62] Geppert, Harald: Über Gauß' Arbeiten zur Mechanik und Potentialtheorie. In: Gauß Werke 10,2, Göttingen 1922–1933, 7. Abhandlung, 61 S.

Gauß, Carl Friedrich: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. (Als Beantwortung der von der königlichen Societät der Wissenschaften in Copenhagen für 1822 aufgegebnen Preisaufgabe.) Astronomische Abhandlungen, hrsg. von H. C. Schumacher, Heft 3, Altona 1825, S. 1–30. In: Gauß Werke 4, S. 189–216.

Gauß, Carl Friedrich: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6, (1823–1827) 1828, commentationes classis mathematicae, S. 99–146. In: Gauß Werke 4, S. 217–258.

Die letzte der beiden Arbeiten ist ein Meilenstein in der Geschichte der Differentialgeometrie,[63] sie wurde zu einem Klassiker in dieser Disziplin. Gauß führte hier einen neuen Flächenbegriff ein, der in etwa dem einer zweidimensionalen Mannigfaltigkeit entspricht, und konnte das nach ihm benannte Krümmungsmaß vorstellen. Er erkannte, dass die Eigenschaften einer Fläche teilweise von der Form der Fläche abhängen, teilweise aber absolut sind, d. h. von der Form der Fläche unabhängig. Zu den absoluten Größen gehören das Linienelement, das Gauß'sche Krümmungsmaß sowie die kürzesten Linien (siehe in diesem Band S. 421).

Nur ein einziges Mal hielt Gauß eine Vorlesung über „Eine allgemeine Theorie der krummen Flächen“ und zwar im Sommersemester 1827.[64] Kurze Zeit später, am 8. Oktober 1827, reichte er seine Arbeit „Disquisitiones generales circa superficies curvas“ bei der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen ein. Die entsprechende Anzeige in den „Göttingischen Gelehrten Anzeigen“ trägt das Datum 5. November 1827.[65]

Die Übersetzungen ins Französische

Frankreich war damals das Land, in dem die Differentialgeometrie besonders intensiv gepflegt wurde. Daher verwundert es nicht, dass Gauß' Werk unverzüglich im „Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques“ besprochen wurde.[66] Der lateinische Text von Gauß

---

63 Die Bezeichnung „Differentialgeometrie“ wurde erst im Jahre 1885/86 eingeführt. Sie geht auf den italienischen Mathematiker Luigi Bianchi (1856–1928) zurück.

64 Folkerts, Menso: Carl Friedrich Gauß' Aktivitäten an der Universität Göttingen. Nachrichten der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen. II. Mathematisch-physikalische Klasse Nr. 2, 2002, S. 23–131, hier S. 89.

65 Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1827, S. 1761–1768 (5. November, 177. Stück). In: Gauß Werke 4, S. 341–347.

66 Besprechung von Unbekannt (vielleicht von Augustin-Louis Cauchy?), in: Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques 10, 1828, S. 4–11. Siehe hierzu Reich, Karin: Cauchy und Gauß. Cauchys Rezeption im Umfeld von Gauß. Archive for History of Exact Sciences 57, 2003, S. 433–463, hier S. 455.

wurde noch einmal mit französischem Titel im Jahre 1850 veröffentlicht und zwar in:

> Gauß, Carl Friedrich: Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes. In: Gaspard Monge: Application de l'Analyse à la Géométrie. 5. Aufl., ed. J. Liouville. Paris 1850, S. 505–546.

Nur kurze Zeit später erschienen gleich zwei französische Übersetzungen, die zwei verschiedenen Übersetzern zu verdanken sind, nämlich Tiburce Abadie und Émile Roger (* 1825). Beide Ausgaben erlebten mehrere Auflagen:

> Recherches générales sur les surfaces courbes. Übersetzt von Tiburce Abadie. Nouvelles Annales de mathématiques 11, 1852, S. 195–252.

Dieses Werk erschien auch als Sonderdruck, Gauß besaß in seiner Privatbibliothek ein Exemplar davon.[67] Diese Übersetzung erlebte im Jahre 2008 in Paris einen Nachdruck.

> Recherches générales sur les surfaces courbes, suivies de notes et d'études sur divers points de la théorie des surfaces et sur certaines classes de courbes. Übersetzt und kommentiert von Emile Roger, 1. Aufl. Grenoble 1855, 140 S.; 2. Aufl. Grenoble 1870, 160 S. Neuauflage Paris 1967.

Die Übersetzungen ins Deutsche

Was die Übersetzung von Gauß' Flächentheorie ins Deutsche anbelangt, so waren hier ebenfalls zwei Übersetzer am Werk, Otto Böklen (1821–1900)[68] und Albert Wangerin (1844–1933):

> Untersuchungen über die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Übersetzt von Otto Böklen, in: Böklen, Otto: Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl., Stuttgart 1884, S. 198–232.

> Allgemeine Flächentheorie. Hrsg. von Albert Wangerin. Leipzig 1889 (= Ostwald's Klassiker Nr. 5). Der kleine Band erlebte fünf Auflagen: ^{2}1900, ^{3}1905, ^{4}1912, ^{5}1921.

Wangerin studierte an der Universität Halle und wurde 1866 an der Universität Königsberg promoviert. Er wirkte danach als Lehrer an diversen Gymnasien in Berlin, wurde 1876 außerordentlicher Professor an der Universität Berlin und 1882 ordentlicher Professor an der Universität Halle. In dem vorliegenden Band wird die Übersetzung von Albert Wangerin wiedergegeben (siehe

[67] Niedersächsische Staats- und Universitätsbibliothek Göttingen, Gauß-Bibliothek Nr. 232.

[68] Georg Heinrich Otto Böklen (1821–1900) studierte am Polytechnikum in Stuttgart und an der Universität Tübingen, wo er 1858 promoviert wurde. Er wirkte als Lehrer in verschiedenen Städten, so in Ulm, Ravensburg, Lauffen, Bopfingen, Hall und Reutlingen. 1895 wurde ihm von der Universität Tübingen die Ehrendoktorwürde verliehen.

S. 397–458). Wie Wangerin selbst sagt, hat er die ihm bekannte Übersetzung von Otto Böklen an keiner Stelle benutzt (S. 448), Gründe hierfür nennt er nicht. Der von Wangerin herausgegebene Band wurde besprochen:

> Hoppe, Reinhold:[69] [Besprechung von] C. F. Gauß: Allgemeine Flächentheorie. Deutsch herausgegeben von A. Wangerin. Leipzig. W. Engelmann. In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 21, 1889, S. 744.

Die Übersetzung ins Ungarische

Aus dem Jahre 1897 schließlich stammt folgende Übersetzung ins Ungarische, die dem Physiker Miklós (Nikolaus) Szijártó (1862–1932) zu verdanken ist:

> A felületek általános elmélete. Irta Gauss Károly Frigyes. Fordította Szíjártó Miklós. Mathematikai és physikai lapok. Band 6, Budapest 1897, S. 45–114. Nachdruck 2012.

Die Übersetzung ins Englische

Zu Anfang des 20. Jahrhunderts erschien dann auch eine Übersetzung ins Englische:

> General Investigations of Curved Surfaces. In: Karl Friedrich Gauss, General Investigations of Curved Surfaces of 1827 and 1825, hrsg. von James Caddall Morehead und Adam Miller Hiltebeitel. Princeton 1902, S. 2–44. 2. Aufl., Introduction by Richard Courant, New York 1965.

Ferner in Peter Dombrowski:

> 150 years after Gauß' "Disquisitiones generales circa superficies curvas" with the original text of Gauss. Paris 1979 (=Astérisque/société mathématique de france; 62), S. 2–81.

Darüber hinaus existieren zwei neuere Nachdrucke der Ausgabe von 1902, die Dover Publications veröffentlicht hat: New York 2005 und New York 2013. Beide Ausgaben sind mit einer „new introduction and notes by Peter Pesic" versehen.

Die Übersetzungen ins Russische

Eine erste Übersetzung ins Russische erschien im Jahre 1887:

---

[69] Reinhold Hoppe (1816–1900) hatte an den Universitäten in Kiel, Greifswald und Berlin studiert und wirkte dann als Lehrer. Er wurde 1850 in Halle promoviert und habilitierte sich 1854 in Berlin. An der Universität Berlin war er seit 1859 Privatdozent und seit 1871 Titularprofessor.

Общія изслѣдованія о кривыхъ поверхностяхъ, мемуаръ К. Ф. Гаусса. Переводъ съ латинскаго П. Краснова (К. С-каго), подъ редакціею проф. К. А. Поссе (= Изъ записокъ студентовъ Физико-Математическаго Факультета С[анкт]п[петер]б[ургскаго] Университета. С.-Петербургъ 1887, 71 стр. [Obščija izlědovanija o krivych povernostjach, memuar K. F. Gaussa. Perevod s latinskago P. Krasnova (K. S-kago), pod redakcieju prof. K. A. Posse. (= Iz zapisok studentov Fiziko-Matematičeskago Fakul'teta S[ankt]p[eter]b[urgskago] Universiteta). S.-Peterburg 1887, 71 str.]

Bereits acht Jahre später kam eine weitere neue Übersetzung heraus. Es ist von großem Interesse, dass hier Gauß' Flächentheorie in einem Festband über die Grundlagen der Geometrie zu Ehren von Nikolaj Ivanovič Lobačevskij (1792–1856) publiziert wurde:

Общія изслѣдованія о кривыхъ поверхностяхъ. К. Ф. Гаусса. Переводъ М. М. Филиппова. В: Объ основаніяхъ геометріи. Къ столѣтнему юбилею Н. И. Лобачевскаго. Изданіе второе. Казань 1895, стр. XII–LII. [Obščija izlědovanija o krivych povernostjach. K. F. Gaussa. Perevod M. M. Filippova. In: Ob osnovanijach geometrii. K stolětnemu jubileju N. I. Lobačevskago. Izdanie vtoroe. Kasan' 1895, str. XII–LII.]

Auch eine 1956 veröffentlichte Übersetzung steht im Zusammenhang mit Nikolaj Ivanovič Lobačevskij:

Карл Фридрих Гаусс: Общие исследования о кривых поверхностях. В: Норден, А. П. (ред.): Об основаниях геометрии. Сборник классических работ по геометрии Лобачевского и развитию его идей. Классики науки, Москва 1956, стр. 123–161. [Karl Fridrich Gauss. Obščije izledovanija o krivych povernostjach. In: Norden, A. P. (Red.O Ob osnovanijach geometrii. Sbornik klassičeskich rabot po geometrii Lobačeskogo i razvitiju ee idej. (Klassiki nauki). Moskau 1956, str. 123–161.]

Im Jahre 1958 erschien abermals eine Übersetzung ins Russische, diesmal auf der Grundlage der deutschen Übersetzung von Wangerin. Die Übersetzer waren N. F. Bulaevskij und M. L. Rudštejn:

Общие исследования о кривых поверхностях. В: К. Ф. Гаусс: Избранные геодезические сочинения. Том III. Высшая геодезия. Общая редакция С. Г. Судакова, комментарий и редакция Г. В. Багратуни, перевод с немецкого Н. Ф. Булаевского, М. Л. Рудштейна, Москва 1958, стр. 92–126. [Obščie issledovanija o krivych poverchnostjach. In: K. F. Gauss, Izbrannye geodezičeskie sočinenija. Tom II. Vysšaja geodezija. Obščaja redakcija S. G. Sudakova, kommentarij i redakcija G. V. Bagratuni, perevod s nemeckogo N. F. Bulaevskogo, M. L. Rudštejna. Moskau 1958, str. 92–126.]

Allein die vielen Übersetzungen und Ausgaben von Gauß' „Allgemeiner Flächentheorie" bis in die jüngste Zeit hinein machen deutlich, welch herausragende Bedeutung diese Abhandlung hatte und immer noch hat.

Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten: Nr. 14

Nr. 14 (S. 459–531): Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts.
Lateinisches Original 1832/deutsche Übersetzung 1903.

Es waren zwei Abhandlungen von Pierre Simon Laplace (1749–1827) aus den Jahren 1806 und 1807, die Gauß bewogen, sich mit der Gestalt von Flüssigkeiten zu beschäftigen:

> Laplace, Pierre Simon: Sur l'action capillaire. Journal de physique 63, 1806, S. 474–477.

> Laplace, Pierre Simon: Supplément à la théorie de l'action capillaire. Journal de physique 65, 1807, S. 88–95.

Als Gauß am 28. September 1829 seine Abhandlung „Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii" der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen übergab,[70] lebte Laplace nicht mehr. Er war am 5. März 1827 in Paris verstorben. Gauß, der Laplaces Arbeiten als epochemachende, glänzende Erörterungen hoch schätzte, erläuterte:

> „Zur Erklärung der Gesetze, nach welchen wir die Himmelskörper sich bewegen sehen, ist die Annahme einer allgemeinen gegenseitigen Anziehung alles Materiellen, deren Stärke dem Quadrate der Entfernung umgekehrt proportional ist, sowohl nothwendig als zureichend. Die Schwere der Körper auf der Oberfläche der Erde ist gleichfalls nichts weiter, als eine Wirkung dieser allgemeinen Kraft."[71]

Im Falle von Flüssigkeiten allerdings geht es um Molekularanziehung, das heißt, es gelten andere Gesetze, die zu erläutern Gauß sich zur Aufgabe gemacht hatte. Die lateinisch geschriebene Langversion von Gauß' Werk erschien 1832 im Band 7 der „Commentationes". Hier zitierte Gauß auch die beiden oben genannten Arbeiten von Laplace (siehe in diesem Band S. 462–464) und analysierte deren Inhalte, bevor er seine eigenen, weiterführenden Ergebnisse präsentierte.

Es kam nicht von ungefähr, dass diese Arbeit unmittelbar nach ihrem Erscheinen von keinem Geringeren als Augustin-Louis Cauchy (1789–1857) im „Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, physiques et chimiques" eingehend und ausführlich – auf 11 Seiten! – besprochen wurde.[72]

[70] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1829, S. 1641–1648 (12. October, 165. Stück). In: Gauß Werke 5, S. 287–292.
[71] Ebenda, S. 1641.
[72] Cauchy, Augustin-Louis: [Besprechung von] Principia generalia theoriae figurae

Die Herausgabe der deutschen Übersetzung von Gauß' Werk in der Reihe „Ostwald's Klassiker" im Jahre 1903 ist dem Mathematiker Heinrich Weber (1842–1913) und dessen Sohn, dem Physiker Rudolf Heinrich Weber (1874–1920), zu verdanken. Heinrich Weber begann 1860 sein Studium an der Universität Heidelberg, er studierte ferner in Leipzig und Königsberg, wo er 1863 promoviert wurde. 1867 habilitierte er sich in Heidelberg, wo er 1869 außerordentlicher Professor wurde. 1870 folgte er einem Ruf als ordentlicher Professor an die ETH Zürich, 1874 wechselte er nach Königsberg, 1883 an die TH Berlin, 1884 an die Universität Marburg, 1892 nach Göttingen und 1895 nach Straßburg. Er war schon als Herausgeber zahlreicher Werke hervorgetreten, so solcher von Bernhard Riemann, Carl Gustav Jacob Jacobi, Johann Rosenhain und Adolph Göpel. Ferner hatte er bereits zwei Titel in der Reihe „Ostwald's Klassiker" veröffentlicht.[73]

Im Falle von Gauß' Abhandlung über die „Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten" fungierte Heinrich Weber als Herausgeber, während die Übersetzung ins Deutsche seinem Sohn Rudolf Heinrich Weber zu verdanken ist, der damals noch Assistent an der Universität Heidelberg war. Im Detail:[74] Rudolf Weber begann 1895 ein Studium der Physik und Mathematik an der Universität Straßburg, wo er 1899 promoviert wurde. 1900 wurde er Assistent an der Universität Heidelberg, wo er sich 1907 habilitierte und zum außerordentlichen Professor ernannt wurde. 1907 folgte er einem Ruf an die Universität Rostock. Nachdem er am 1. Weltkrieg teilgenommen hatte, wurde er dort im Jahre 1919 ordentlicher Honorarprofessor.

Der kleine Band bietet nicht viel mehr als den übersetzten Text versehen mit einigen Anmerkungen (siehe in diesem Band S. 459–531). Er wurde besprochen:

> Lampe, Emil:[75] [Besprechung von] C. F. Gauß. Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts. Übersetzt von Rud. H. Weber. Herausgegeben von H. Weber. Leipzig: Wilh. Engelmann. 73 S. 8° (Ostwald's Klassiker Nr. 135). In: Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 34, 1903, S. 867 f.

---

fluidorum in statu aequilibrii; auct. C. F. Gauss. In-4° de 53 p. Göttingue, 1830; Dietrich. In: Bulletin des sciences mathématiques, astronomiques, pyhsiques et chimiques 14, 1830, S. 241–249.
Siehe ferner Reich, Karin: Cauchy und Gauß. Cauchys Rezeption im Umfeld von Gauß. Archive for History of Exact Sciences 57, 2003, S. 433–463, insbesondere S. 455.

[73] Scheel, Katrin: Der Briefwechsel Richard Dedekind – Heinrich Weber. Herausgegeben von Thomas Sonar. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften in Hamburg Band 5, Berlin, München, Boston 2014, S. 42.

[74] Siehe Mahnke, Reinhard: https://www.google.de/search?q=Kalenderblatt+Rudolf+H.+Weber&ie=utf-8&oe=utf-8&gws_rd=cr&ei=bIdMVsHQOeuTzAOcqZ3gAg

[75] Zu Emil Lampe (1840–1918) siehe Anm.46.

Die Intensität der erdmagnetischen Kraft: Nr. 15

Nr. 15 (S. 533–594): Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maaß zurückgeführt.
Lateinisches Original 1841/deutsche Übersetzung 1894.

Die Tagung der Gesellschaft Deutscher Naturforscher und Ärzte im September 1828 in Berlin führte dazu, dass sich Carl Friedrich Gauß und der um 27 Jahre jüngere Wilhelm Weber (1804–1891) persönlich kennenlernten. Am 29. April 1831 erhielt Weber einen Ruf an die Universität Göttingen, am 12. September desselben Jahres kam er in Göttingen an.

Dies war der Anfang einer lebenslangen Freundschaft zwischen Gauß und Weber, deren Bedeutung man nur mit derjenigen Freundschaft vergleichen kann, die einst zwischen Luther und Melanchthon bzw. zwischen Goethe und Schiller bestanden hat.

Mit Weber begann für Gauß eine neue Schaffensperiode. Die Physik stand nunmehr im Zentrum seiner Forschungen. Zwar hatte sich Gauß schon früher verschiedenen physikalischen Themen zugewandt, aber erst mit Weber wurde die Physik zu einem gemeinsamen Forschungsschwerpunkt. Eines der wichtigsten Gebiete wurde die Erforschung des Erdmagnetismus. Beide Wissenschaftler betraten damit ein Gebiet, das für sie Neuland war. Die intensive Zusammenarbeit vor allem auf instrumentellem und auf praktischem Gebiet bewirkte, dass Gauß sehr bald, schon am 15. Dezember 1832, der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen sein erstes, auf den Erdmagnetismus bezogenes Werk vorstellen konnte, seine „Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata“. Die Anzeigen in den „Göttingischen gelehrten Anzeigen“ tragen das Datum des 24. und des 27. Dezember 1832.[76]

Vor Gauß waren zwar zahlreiche erdmagnetische Messungen vorgenommen worden, aber alle diese Messungen waren relativ, d. h. sie hingen vom jeweils benützten Instrument ab. Gauß führte erstens ein absolutes Maßsystem ein, und zweitens gelang es ihm, durch die Verwendung von zwei Instrumenten, ein Verfahren zu entwickeln, das nachvollziehbare, vom jeweiligen Instrument unabhängige Messdaten lieferte.

Die Langversion von Gauß’ Werk lag ebenfalls bereits Ende 1832 vor, doch die Veröffentlichung in den „Commentationes“ zog sich noch bis 1841 hin. Im Jahre 1833 stand allerdings schon ein Sonderdruck in lateinischer Sprache zur Verfügung, den Gauß einigen Wissenschaftlern und wissenschaftlichen Freunden zukommen ließ. Damit konnte Gauß’ Werk sozusagen in Windeseile über alle Ländergrenzen hinweg bekannt werden, und es machten sich recht schnell Übersetzer in Deutschland, Frankreich, Russland, und Italien ans Werk, deren Übersetzungen noch vor der offiziellen Publikation von Gauß’

[76] Anzeige in: Göttingische Gelehrte Anzeigen 1832, S. 2041–2048, 2049–2058 (24. December, 205. Stück und 27. December, 206. und 207. Stück). In: Gauß Werke 5, S. 293–304.

Werk in lateinischer Sprache im Jahre 1841 erschienen. Den Anfang machte diesmal eine Übersetzung ins Deutsche:

> „Die Intensität der erdmagnetischen Kraft zurückgeführt auf absolutes Maaß." Annalen der Physik und Chemie 28 (= 104), 1833, S. 241–273, 591–615.

Diese Übersetzung stammte von dem Physiker Johann Christian Poggendorff (1796–1877). Dieser war seit 1824 Herausgeber der „Annalen der Physik und Chemie" und seit 1834 außerordentlicher Professor an der Friedrich-Wilhelms-Universität Berlin. Gauß war mit Poggendorffs Übersetzung nicht zufrieden, er hielt sie für „sehr schlecht".[77]

Ein Jahr später, 1834, wurde eine Übersetzung in die französische Sprache veröffentlicht:

> Mesure absolue de l'intensité du magnétisme terrestre. Annales de Chimie et de Physique 57, 1834, S. 5–69.

Herausgeber der „Annales" waren von 1816–1840 der Physiker und Astronomen François Arago (1786–1853) und der Chemiker Joseph-Louis Gay-Lussac (1778–1850). Die Übersetzung von Gauß' „Intensitas" erschien anonym, d. h. ohne Nennung des Übersetzers. Aragos Freund Alexander von Humboldt (1769–1859) hatte lediglich die Anzeige von Gauß' Schrift übersetzt, aber nicht das ganze Werk.[78]

Die russische Übersetzung aus dem Jahre 1836 ist Aleksandr Drašusov (1816–1890) zu verdanken. Dieser hatte an der Universität Moskau studiert und war dort Adjunkt, d. h. Assistent an der Sternwarte, als seine Übersetzung erschien:

> Объ измѣреніи земнаго магнитизма. Соч[иненіе] Карл[а] Фрид[риха] Гаусса. Пер[евелъ] А. Драшусовъ. Ученыя записки Императорскаго университета, часть 11, 1836, № 7 (январь), стр. 3–22; № 8 (февраль), стр. 246–271; № 9 (мартъ), стр. 341/381. [Ob isměrenii zemnago magnitizna. (Soč[inenie] Karl[a] Frid[richa] Gaussa). Per[evël] A. Drašusov. Učenyja zapiski Imperatorskago universiteta čast 11, 1836, Nr. 7 (Januar), str. 3–22; Nr. 8 (Februar), str. 246–271; Nr. 9 (März), str. 341–381.]

Von 1837 bis 1840 unternahm Drašusov eine Bildungsreise durch mehrere Länder, wobei er 1839 auch Gauß und Weber in Göttingen einen Besuch abstattete.[79]

---

[77] Gauß an Schumacher am 29.4.1845: „Was übrigens die Uebersetzungen meiner Intens. betrifft, so besitze ich bloss die italienische selbst; die von Poggendorff (welche übrigens, so viel ich mich erinnere sehr schlecht ist) steht in dessen Annalen Band 28". Gauß-Schumacher-Briefwechsel Bd. 4, Altona 1862, S. 437.

[78] Briefwechsel zwischen Alexander von Humboldt und Carl Friedrich Gauß. Zum 200. Geburtstag von C. F. Gauß im Auftrage des Gauß-Komitees hrsg. durch Kurt-R. Biermann, Berlin 1977 (= Beiträge zur Alexander –von-Humboldt-Forschung; 4), S. 45.

[79] Reich, Karin; Roussanova, Elena: Carl Friedrich Gauß und Russland. Sein Briefwechsel mit in Russland wirkenden Wissenschaftlern. Unter Mitwirkung und mit einem Beitrag

Im Jahre 1839 wurde sogar eine Übersetzung ins Italienische veröffentlicht, deren Urheber Paolo Frisiani (1797–1880) war:

> Misura assoluta dell'intensità della forza magnetica terrestre. Übersetzt und kommentiert von Paolo Frisiani. Primo supplemento alle Effemeridi astronomiche di Milano 1839, S. 3–132.

Frisiani wirkte seit 1820 an der Brera-Sternwarte in Mailand, wo er 1834 zum zweiten Astronomen ernannt worden war.

Erst im Jahre 1841 kam die Langversion von Gauß' „Intensitas" in der lateinischen Originalsprache heraus. Sie erschien im letzten, 8. Band der „Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores", d. h. dem letzten Band, der ausschließlich in lateinischer Sprache verfasste Arbeiten aus den Jahren 1832–1837 enthielt. Den „Commentationes" folgten die „Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen", deren erster Band im Jahre 1843 erschien und nurmehr Arbeiten in deutscher Sprache enthielt.

Im Jahre 1894 schließlich wurde eine zweite Übersetzung von Gauß' Intensitas" ins Deutsche vorgestellt. Vielleicht wollte man damit Poggendorffs schlechte Übersetzung verbessern, oder aber Poggendorffs Übersetzung war zu dieser Zeit bereits in Vergessenheit geraten.

Der neue Übersetzer war August Kiel, über den sich nur spärliche Nachrichten haben ermitteln lassen. Kiel war in Geisa im Großherzogtum Sachsen-Weimar geboren, das Geburtsdatum ist nicht bekannt. Im Jahre 1882 wurde er an der Universität Marburg in Physik auf der Grundlage einer Dissertation: „Berechnung der Lichtmenge, die in einem gegebenen leuchtenden Punkt auf ein gegebenes Ellipsoid fällt" promoviert. Danach wirkte Kiel als Physiklehrer am Königlichen Gymnasium in Bonn.[80]

Herausgeber der neuen Übersetzung war Ernst Dorn (1848–1916). Er hatte an der Universität Königsberg studiert, wo er 1871 auch promoviert worden war. Nach seiner 1873 erfolgten Habilitation wurde er außerordentlicher Professor an der Universität Breslau, 1881 ordentlicher Professor an der TH Darmstadt und 1885 ordentlicher Professor an der Universität Halle. Diese Stelle hatte er inne, als 1894 der von ihm herausgegebene Band mit der Übersetzung von Gauß' „Intensitas" in der Reihe „Ostwald's Klassiker" erschien. Dorn informierte seine Leser darüber, dass der Übersetzer August Kiel war, dessen Text er selbst noch einmal durchgesehen habe (siehe im vorliegenden Band S. 581).

Der von Ernst Dorn herausgegebene Band mit Gauß' „Intensitas" wurde im „Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" zwar angekündigt, aber nicht besprochen.[81]

von Werner Lehfeldt. Abhandlungen der Akademie der Wissenschaften zu Göttingen, Neue Folge, Band 16, 2011, S. 51 und S. 838.

[80] Siehe: Kiel, August: Geschichte der absoluten Maßeinheiten. In: Jahresbericht des Königlichen Gymnasiums zu Bonn. Schuljahr 1889–90. Bonn 1890, S. 1–24.

[81] Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik 25, 1893/94, S. 24.

Nicht nur im deutschen Sprachraum kam es zu einer zweiten Übersetzung der „Intensitas", sondern auch in Russland, und zwar um die Mitte des zwanzigsten Jahrhunderts:

> Интенсивность земной магнитной силы, приведенная к абсолютной мере. В: Б. М. Яновский (изд.): Карл Фридрих Гаусс: Избранные труды по земному магнетизму. Перевод А. Н. Крылова. Москва 1953, стр. 23–75. [Intensivnost semnoj magnitnoj sily, privedennaja k absoljutnoj mere. In: B. M. Janovskij (Hrsg): Karl Fridrich Gauss. Izbrannye trudy po zemnomu magnetizmu. Perevod A. N. Krylova. Moskau 1952, str. 23–75.]

Der Übersetzer war Aleksej Nikolaevič Krylov (1863–1945), der ein großer Gauß-Verehrer war und die Gaußforschung in Russland so gut, wie das im schlimmen 20. Jahrhundert möglich war, förderte.[82] Krylov war Mathematiker, Mechaniker und Schiffsbauingenieur, von 1916 bis 1917 Direktor des Physikalischen Hauptobservatoriums in Petrograd und von 1928 bis 1932 Direktor des Physikalisch-Mathematischen Institutes der Akademie der Wissenschaften. Dieses Institut war der Vorgänger des hochberühmten V. A. Steklov-Instituts für Mathematik.

Im 21. Jahrhundert kam es sogar noch zu einer Übersetzung der „Intensitas" ins Portugiesische:

> A intensidade da força magnética terrestre reduzida a medida absoluta. Übersetzt von Andre Koch Torres Assis auf der Grundlage der Ausgabe von Dorn. In: Revista Brasileira de Ensino di Fisica 25, Nr. 2, 2003, S. 226–249.

Der Übersetzer, Andre Koch Torres Assis (* 1962), ist Professor für Physik an der State University of Campinas. Andre Assis, der für längere Zeit als Humboldt-Stipendiat in Hamburg wirkte, ist Spezialist für Wilhelm Weber. Er machte die Herausgeberin des vorliegenden Bandes auf folgende englische Übersetzung aufmerksam:

> The intensity of the earth's magnetic force reduced to absolute measurement. Translated from the German by Susan P. Johnson, edited by Laurence Hecht. July 1995.

Diese Übersetzung findet man im Internet unter http://www.21stcenturysciencetech.com/Translations/gaussMagnetic.pdf.

[82] Zu Krylov siehe Roussanova, Elena: Aleksej Nikolaevič Krylov und das wissenschaftliche Erbe von Carl Friedrich Gauß in Russland. Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft 49, 2012, S. 49–66.

Die Bedeutung von „Ostwald's Klassikern" für die Verbreitung der Werke von Gauß

Von den 15 in diesen Band aufgenommenen Werken von Gauß erschienen acht in der Reihe „Ostwald's Klassiker", d. h. etwas mehr als die Hälfte. Schon daraus ist ersichtlich, welch große Bedeutung „Ostwald's Klassikern" im Hinblick auf Übersetzungen zukommt.

Die Reihe wurde nach ihrem Gründer Friedrich Wilhelm Ostwald (1853–1932) benannt. Dieser war in Riga geboren und hatte dort auch die Grundschule und das Gymnasium besucht. Von 1872 bis 1875 studierte er Chemie an der Universität Dorpat (heute Tartu), 1875 wurde er mit seiner Dissertation „Volumchemische und optisch-chemische Untersuchungen" (Dorpat 1878) promoviert. Im Jahre 1882 wurde er Professor der Chemie am Polytechnikum in Riga und 1887 Professor für physikalische Chemie an der Universität Leipzig. Dort konnte er 1898 ein neu gebautes Institut beziehen. Im Jahre 1901 erwarb er in nicht allzu großer Entfernung von Leipzig, in Großbothen, ein Anwesen, dessen Hauptgebäude er „Haus Energie" nannte. 1906 wurde Ostwald emeritiert, 1909 wurde er mit dem Nobelpreis für Chemie ausgezeichnet.

Ziel der Reihe „Ostwald's Klassiker" war es, eine möglichst große Anzahl von klassischen Texten aus dem Bereich der Mathematik und aus den Naturwissenschaften einem breiten Publikum zu einem erschwinglichen Preis zur Verfügung zu stellen.[83] Der erste Band von „Ostwald's Klassikern" erschien im Jahre 1889:

> Helmholtz, Hermann: Über die Erhaltung der Kraft. Leipzig 1889, 60 S.

Es handelte sich hierbei um einen epochemachenden Vortrag, den Helmholtz am 23. Juli 1847 vor der Deutschen Physikalischen Gesellschaft zu Berlin gehalten hatte. Sein Thema war der Energieerhaltungssatz, der kurze Zeit vorher entdeckt und formuliert worden war. Der Energiebegriff wurde für Ostwald ein so zentraler Begriff, dass er schließlich sein Haus danach benannte.

Die zweite Hälfte des 19. Jahrhunderts war eine Zeit, in der preiswerte Ausgaben klassischer Texte eine Hochkonjunktur erlebten. Beispielsweise wurde bereits im Jahre 1867 die Reihe „Reclams Universal-Bibliothek" gegründet, deren erster Band Goethes Faust enthielt. In dieser Reihe erschienen auch „Bücher der Naturwissenschaft", deren 1908 veröffentlichter erster Band Wilhelm Ostwalds „Grundriß der Naturphilosophie" enthielt.

Die Reihe „Ostwald's Klassiker" gibt es bis heute, aber sie „boomt" nicht mehr so, wie das am Ende des 19. Jahrhunderts der Fall gewesen ist. So wurden allein im Gründungsjahr 1889 acht verschiedene Titel herausgebracht. Viele der Bände erlebten mehrere Auflagen oder auch Nachdrucke bzw. Abdrucke.

[83] Dunsch, Lothar: Ein Fundament zum Gebäude der Wissenschaften. Einhundert Jahre Ostwalds Klassiker der exakten Wissenschaften (1889–1989). Mit einer Bibliographie der Reihe zusammengestellt von Hella Müller. Leipzig 1989.

Gauß' Werke in Ostwald's Klassikern

Natürlich durfte in dieser neu gegründeten Reihe auch der Name Gauß nicht fehlen. Schon die Nr. 2 war ein Titel aus der Feder von Gauß. Insgesamt enthielten zwölf Bände von „Ostwald's Klassikern" Werke von Carl Friedrich Gauß. Manche Bände enthielten jeweils nur eine einzige Abhandlung von Gauß, andere jeweils mehrere Abhandlungen einer Reihe von Autoren, darunter auch eine von Gauß. Aber nicht alle Werke von Gauß, die in der Reihe „Ostwald's Klassiker" erschienen, waren aus dem Lateinischen übersetzt worden. Das galt nur für sechs dieser zwölf Titel. In sechs weiteren Bänden wurden Werke von Gauß veröffentlicht, die in deutscher Sprache verfasst worden waren. Hier im Überblick:

* bedeutet: wurden übersetzt und sind Teil des vorliegenden Bandes.

Ostwald's Klassiker Nr. 2, Publikationsjahr: 1889, ^{2}1902, ^{3}1912
Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstoßungskräfte. 1840.

* Ostwald's Klassiker Nr. 5, Publikationsjahr: 1889, ^{2}1900, ^{3}1905 ^{4}1912, ^{5}1921
Allgemeine Flächentheorie. (Disquisitiones generales circa superficies curvas). 1827.

* Ostwald's Klassiker Nr. 14, Publikationsjahr: 1890, ^{2}1904, ^{3}1913
Die vier Gauß'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Funktionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. 1799–1849.

* Ostwald's Klassiker Nr. 19, Publikationsjahr: 1890, ^{2}1914
Über die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace (1782), Ivory (1809), Gauß (1813), Chasles (1838) und Dirichlet (1839).

* Ostwald's Klassiker Nr. 53, Publikationsjahr: 1894
Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maaß zurückgeführt.

Ostwald's Klassiker Nr. 55, Publikationsjahr: 1894
Über Kartenprojection. Abhandlungen von Lagrange (1779) und Gauß (1822).[84]

[84] In diesem Band: Gauß, Carl Friedrich: Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, daß die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Astronomische Abhandlungen, hrsg. von H. C. Schumacher, Bd. 3, Altona 1825, S. 1–30. In: Gauß Werke 4, S. 189–216.

Ostwald's Klassiker Nr. 122, Publikationsjahr: 1901
Sechs Beweise des Fundamentaltheorems über quadratische Reste.

* Ostwald's Klassiker Nr. 135, Publikationsjahr: 1903
Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustand des Gleichgewichts.

Ostwald's Klassiker Nr. 167, Publikationsjahr 1908
Abhandlungen über die Prinzipien der Mechanik von Lagrange, Rodrigues, Jacobi und Gauß.[85]

Ostwald's Klassiker Nr. 177, Publikationsjahr: 1910
Untersuchungen über Gegenstände der höheren Geodäsie. (1844, 1847)

* Ostwald's Klassiker Nr. 225, Publikationsjahr: 1927
Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes. – Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion.

Ostwald's Klassiker Nr. 256, Publikationsjahr: 1976, ²1979. ³1981, ⁴1985, ⁵2005 und 2009
Mathematisches Tagebuch 1796–1814.

Eine Sonderrolle spielt das in lateinischer Sprache geführte Mathematische Tagebuch von Gauß. Es ist dies die letzte Arbeit des Fürsten der Mathematik, die in die Reihe „Ostwald's Klassiker" Eingang gefunden hat. Es wurde im lateinischen Original und in deutscher Übersetzung wiedergegeben. Veröffentlicht wurde der fragliche Band erstmals 1976, d. h. fast 50 Jahre nach dem vorletzten Titel von Gauß. Dessen Tagebuch erlebte bisher fünf Auflagen und einen Nachdruck. Daraus kann man auch schließen, dass die Gaußforschung am Ende der 20er Jahre an Aktualität verloren hat. Das passt zu der Tatsache, dass die Herausgabe von Gauß' Werken im Jahre 1929 im Wesentlichen abgeschlossen war. Es folgten danach lediglich noch zwei Teilbände mit Abhandlung von Autoren, die die großen, von Gauß bearbeiteten Themen analysierten und historisch aufarbeiteten, so in Bd. 10,2 (1933) und in Bd. 11,2 (1929).

Für die Reihe „Ostwald's Klassiker" spielten nach 1927 Gauß' Werke, das Mathematische Tagebuch ausgenommen, keine Rolle mehr. Dabei gab es durchaus noch Werke von Gauß, die es verdient hätten, in „Ostwald's Klassiker" aufgenommen zu werden, z. B. die „Allgemeine Theorie des Erdmagnetismus" oder die „Dioptrischen Untersuchungen". Vielleicht mangelte es an geeigneten oder vielmehr an interessierten Herausgebern.

[85] Gauß, Carl Friedrich: Ueber ein neues allgemeines Grundgesetz der Mechanik. Journal für die reine und angewandte Mathematik 4, 1829, S. 232–235. In: Gauß Werke 5, S. 23–28.

Übersetzer bzw. Herausgeber der hier veröffentlichten 15 Texte

Es lohnt sich, einen Blick zu werfen auf die Übersetzer und die Herausgeber aller 15 Werke von Gauß, die, aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzt, in den vorliegenden Band Eingang gefunden haben. Hierzu folgende Übersicht in alphabetischer Reihenfolge:

Anton Börsch (1854–1920), Geodät, Astronom, Assistent am Königlich Preußischen Geodätischen Institut in Potsdam.

Im vorliegenden Band Nr. 3, 10, 11, 12

Ernst Dorn (1848–1916), Physiker, Professor an der Universität Breslau, an der TH Darmstadt und an der Universität Halle.

Im vorliegenden Band Nr. 15; Ostwald's Klassiker Nr. 53

Harald Geppert (1902–1945), Mathematiker, Professor an den Universitäten Gießen und Berlin.

Im vorliegenden Band Nr. 9; Ostwald's Klassiker Nr. 225

Carl Ludwig Harding (1765–1834), Astronom, Professor an der Universität Göttingen.

Im vorliegenden Band Nr. 2

August Kiel (??–??), promovierter Physiker (1882), Physiklehrer am Königlichen Gymnasium zu Bonn.

Im vorliegenden Band Nr. 15; Ostwald's Klassiker Nr. 53

Eberhard Knobloch (*1943), Wissenschaftshistoriker (Altphilologe und Mathematiker), Professor an der TU Berlin, Akademieprofessor.

Im vorliegenden Band Nr. 3

Arnold Kowalewski (1873–1945), Philosoph und Mathematiker, Professor an der Universität Königsberg.

Im vorliegenden Band Nr. 6

Eugen Netto (1846–1919), Mathematiker, Professor an den Universitäten Straßburg, Berlin und Gießen.

Im vorliegenden Band Nr. 1, 7, 8; Ostwald's Klassiker Nr. 14

Heinrich Simon (1858–1919), promovierter Mathematiker, tätig an der Universitätsbibliothek in Berlin.

Im vorliegenden Band Nr. 4

Paul Simon (1846–??), promovierter Mathematiker, Assistent am Königlich Preußischen Geodätischen Institut in Potsdam.

Im vorliegenden Band Nr. 3, 10, 11, 12

Albert Wangerin (1844–1933), Mathematiker, Professor an den Universitäten Berlin und Halle.

Im vorliegenden Band Nr. 5, 13; Ostwald's Klassiker Nr. 5 und Nr. 19

Heinrich Weber (1842–1913), Mathematiker, Professor an der Universität Heidelberg, an der ETH Zürich, an der Universität Königsberg, an der TH Berlin, an den Universitäten Marburg, Göttingen, Straßburg.

Im vorliegenden Band Nr. 14; Ostwald's Klassiker Nr. 135

Rudolf Heinrich Weber (1874–1920), Physiker, Professor an den Universitäten Heidelberg und Rostock.

Im vorliegenden Band Nr. 14; Ostwald's Klassiker Nr. 135

Es waren ausschließlich Mathematiker und Naturwissenschaftler, denen die Übersetzungen zu verdanken sind. Die mathematisch-naturwissenschaftliche Kompetenz dieser Übersetzer steht also an erster Stelle, was nachvollziehbar ist. Erst danach kommt die sprachliche Qualifikation, d. h., dass die Übersetzer über hinreichende Lateinkenntnisse verfügten. Sicher ist, dass man in früheren Zeiten auf die Ausbildung in Latein wesentlich größeren Wert legte, als dies gegenwärtig der Fall ist. Die früheren Mathematiker und Naturwissenschaftler verfügten in der Regel über sehr gute Lateinkenntnisse. Heutzutage allerdings sind gute Lateinkenntnisse bei Mathematikern und Naturwissenschaftlern eher die Ausnahme als die Regel.

Schlusswort

Ist das Projekt „Gauß in deutscher Übersetzung" eine neue Idee? Diese Frage kann insofern nicht unbedingt bejaht werden, als es für dieses Vorhaben ein ganz analoges Vorgängerprojekt gibt, das als Anstoß dazu gedient hat, nunmehr auch sämtliche aus dem Lateinischen ins Deutsche übersetzten Werke von Gauß in kompakter Zusammenstellung zu veröffentlichen. Dieses russische Projekt, das sich allerdings nicht auf die ursprünglich lateinisch geschriebenen Abhandlungen von Gauß beschränkt, wurde bereits in den fünfziger Jahren des vergangenen Jahrhunderts verwirklicht. Hier die Titel der vier Bände, die im Rahmen dieses Vorhabens erschienen sind:

Яновский, Б. М. (изд.): К. Ф. Гаусс. Избранные труды по земному магнетизму. Перевод А. Н. Крылова. АН Союза ССР, Классики науки, Москва 1952, 341 стр. [Janovskij, B. M. (Hrsg): K. F. Gauss. Izbrannye trudy po zemnomu magnetizmu. Perevod A. N. Krylova. AN Sojuza SSR, Klassiki nauki, Moskva 1952, 341 str.]

Судаков, С. Г. (изд.): К. Ф. Гаусс. Избранные геодезические сочинения. Том I: Способ наименьших квадратов. Москва 1957, 152 стр. [Sudakov, S. G. (Hrsg): K. F. Gauss. Izbrannye geodezičeskie

sočinenija. Tom I: Sposob naimen'šich kvadratov. Moskva 1957, 152 str.]

Судаков, С. Г. (изд.): К. Ф. Гаусс. Избранные геодезические сочинения. Том II: Высшая геодезия. Москва 1958, 260 стр. [Sudakov, S. G. (Hrsg): K. F. Gauss. Izbrannye geodezičeskie sočinenija. Tom II: Vysšaja geodezija. Moskva 1958, 260 str.]

Виноградов, И. М. (изд.): Карл Фридрих Гаусс. Труды по теории чисел. Классики науки, Москва 1959, 978 стр. [Vinogradov, I. M. (Hrsg): Karl Fridrich Gauss. Trudy po teorii čisel. AN Sojuza SSR, Klassiki nauki, Moskva 1959, 978 str.]

Vier Bände entsprechen zwar nicht den 12 Bänden von Gauß' Werken, wie sie von der Göttinger Akademie der Wissenschaften publiziert worden sind. Man sollte sich aber stets vor Augen halten, dass mehr Arbeiten von Gauß ins Russische übersetzt worden sind als etwa ins Französische, geschweige denn ins Englische.

Gauß hat in lateinischer Sprache nicht nur zur Veröffentlichung bestimmte Texte verfasst, sondern auch private Aufzeichnungen, insbesondere sein von 1796 bis 1814 geführtes Mathematisches Tagebuch. Ferner hat er, wie sein Nachlass zeigt, auf Latein viele Ideen und Vorhaben niedergeschrieben, die möglicherweise später zu weiteren Veröffentlichungen führen sollten. Einige dieser Nachlassdokumente wurden in die Akademieausgabe von Gauß' Werken aufgenommen, allerdings bei weitem nicht alle. In die vorliegende dreibändige Ausgabe haben nur solche Abhandlungen von Gauß Aufnahme gefunden, die tatsächlich ursprünglich in lateinischer Sprache veröffentlicht worden sind. Damit ist das Projekt „Gauß in deutscher Übersetzung“ aber nicht abgeschlossen. Es handelt sich lediglich um die Beendigung einer der Etappen, die auf dem Weg zu einer vollständigen Erschließung des wissenschaftlichen Erbes Carl Friedrich Gauß' zurückzulegen sind. Das Ziel, dem die Gauß-Forschung zustreben muss, ist es, die Werke des Fürsten der Mathematik immer weiter und besser zu erschließen und die im Nachlass von Gauß aufbewahrten zahlreichen Dokumente so vollständig und gründlich wie möglich zu veröffentlichen. Der vorliegende Band soll dazu dienen, der deutschsprachigen Leserschaft Gauß' Schaffen leichter zugänglich zu machen und – dank der Bibliographie und den Registern – besser zu erschließen. Die Bibliographie und die Register lassen sich auch auf die lateinischen Originalveröffentlichungen und die Übersetzungen in andere Sprachen anwenden und kommen daher einer internationalen Leserschaft zugute.

1. Neuer Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann

In: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades. (1799–1849), hrsg. von Eugen Netto, Leipzig 1890 (2. Aufl. 1904, 3. Aufl. 1913), Ostwald's Klassiker 14, S. 3–36.

Original:
Demonstratio nova theorematis: Omnem functionem algebraicam, rationalem, integram, unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Helmstedt 1799, 39 S. In: Gauß Werke 3, S. 1–30.

Neuer Beweis des Satzes,

dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann

von

C. F. Gauss.

1.

Jede bestimmte algebraische Gleichung kann auf die Form

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0$$

gebracht werden, wobei m eine ganze positive Zahl ist. Wenn wir die linke Seite dieser Gleichung mit X bezeichnen und annehmen, dass der Gleichung $X = 0$ durch mehrere von einander verschiedene Werthe von x genüge geleistet werde, etwa indem man $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, ... setzt, dann wird die Function X durch das Product der Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, ... theilbar sein. Wenn umgekehrt die Function X durch das Product mehrerer linearer Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, ... theilbar ist, dann wird der Gleichung $X = 0$ genüge geleistet, indem man x einer jeden Grösse α, β, γ, .., gleich setzt. Wenn endlich X dem Producte aus m solchen linearen Factoren gleich ist, (mögen diese nun sämmtlich unter einander verschieden oder mögen einige derselben einander gleich sein), dann kann X ausser diesen Functionen keinen anderen linearen Factor besitzen. Deshalb kann eine Gleichung m ten Grades nicht mehr als m Wurzeln haben, zugleich aber wird es klar, dass eine Gleichung m ten Grades w e n i g e r Wurzeln haben kann, wenngleich X in m lineare Factoren zerlegbar ist: denn, wenn einige dieser Factoren einander gleich sind, dann ist die Anzahl der verschiedenen Arten, die Gleichung zu befriedigen, nothwendig

1*

geringer als m. Dennoch haben es die Mathematiker aus formalen Gründen vorgezogen, zu sagen, dass auch in diesem Falle die Gleichung m Wurzeln habe, und dass nur einige derselben einander gleich werden. diese Ausdrucksweise durften sie sich überall gestatten.

2.

Das bisher Besprochene wird in den Lehrbüchern der Algebra auf ausreichende Art bewiesen; es verstösst auch nirgend gegen die mathematische Strenge. Doch scheint es, als ob die Analytiker etwas zu übereilt und ohne vorausgehenden gründlichen Beweis denjenigen Lehrsatz aufgenommen hätten, auf welchem sich fast die gesammte Lehre von den Gleichungen aufbaut, dass nämlich eine jede solche Function wie X stets in m lineare Factoren zerlegt werden könne, oder, was hiermit völlig übereinstimmt, dass jede Gleichung $m$ten Grades wirklich m Wurzeln besitze. Da man bereits bei den Gleichungen zweiten Grades sehr häufig auf solche Fälle stiess, welche diesem Satze widersprachen, so waren die Algebraiker gezwungen, um jene Fälle diesem Theorem unterordnen zu können, eine gewisse imaginäre Grösse zu ersinnen, deren Quadrat -1 ist; dann erkannten sie, dass, wenn Grössen von der Form $a + b\sqrt{-1}$ ebenso wie reelle zugelassen werden, der Lehrsatz nicht allein für Gleichungen zweiten Grades wahr sei, sondern auch für cubische und biquadratische. Es liess sich jedoch hieraus auf keine Weise folgern, dass durch die Zulassung von Grössen der Form $a + b\sqrt{-1}$ jeder Gleichung fünften oder höheren Grades genügt werden könne, oder, wie man sich meistens ausdrückt, (obgleich ich diesen bedenklichen Ausdruck nicht gutheissen kann), dass die Wurzeln jeder Gleichung auf die Form $a + b\sqrt{-1}$ gebracht werden können. Dieser Satz unterscheidet sich dem Wesen der Sache nach in nichts von dem in der Ueberschrift angegebenen; es bildet das Ziel der vorliegenden Abhandlung, einen neuen, strengen Beweis desselben zu geben.

Uebrigens wurden seit jener Zeit, in welcher die Analytiker erkannten, es gäbe unendlich viele Gleichungen, die überhaupt nur Wurzeln besitzen, wenn Grössen der Form $a + b\sqrt{-1}$ zugelassen werden, derartig erdachte Grössen als eine ganz besondere Grössenart, welche man zum Unterschied von den reellen Grössen imaginäre nannte, betrachtet und in die gesammte Analysis eingeführt. Mit welchem Rechte dies geschehen sei, will ich hier nicht erörtern. — Meinen Beweis werde ich ohne jede Benutzung imaginärer Grössen durchführen; obschon auch ich mir dieselbe Freiheit gestatten könnte, deren sich alle neueren Analytiker bedient haben.

3.

Wenngleich dasjenige, was in den meisten elementaren Schriften als Beweis unseres Lehrsatzes angeführt wird, so haltlos und so wenig streng erscheint, dass es kaum der Erwähnung werth ist, so will ich doch, um keine Lücke zu lassen, mit wenigen Worten darauf eingehen. »Um zu beweisen, dass jede Gleichung

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0$$

oder $X = 0$ wirklich m Wurzeln besitze, unternimmt man es, zu zeigen, dass X in m lineare Factoren aufgelöst werden könne. Zu diesem Zwecke nimmt man m lineare Factoren $x - \alpha$, $x - \beta$, $x - \gamma$, ... an, wo α, β, γ, ... noch unbekannt sind, und setzt das Product derselben der Function X gleich. Dann leitet man aus der Vergleichung der Coefficienten m Gleichungen ab, aus denen man die Unbekannten α, β, γ, ... soll bestimmen können, da ja ihre Anzahl gleich m sei. Denn nach der Elimination von $m - 1$ Unbekannten entstehe eine Gleichung, welche eine beliebige Unbekannte allein enthalte.« Um von allem übrigen, bei solcher Schlussfolgerung Tadelnswerthen zu schweigen, frage ich nur, woher wir wissen können, dass die Schlussgleichung wirklich eine Wurzel habe? Ob es nicht eintreten könne, dass weder dieser Schlussgleichung noch der vorgelegten irgend eine Grösse im gesammten Bereiche der reellen und imaginären Grössen genüge? Uebrigens werden Sachkundige leicht erkennen, dass diese Schlussgleichung mit der vorgelegten nothwendigerweise vollkommen identisch sein wird, falls die Rechnung ordnungsgemäss durchgeführt ist; denn nach der Elimination der Unbekannten β, γ, ... muss die Gleichung

$$\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + \ldots + M = 0$$

zum Vorschein kommen. Noch mehr über diese Schlussweise zu sagen ist nicht nothwendig.

Einige Schriftsteller, welche wohl die Schwäche dieser Methode erkannt haben mögen, nehmen es gewissermaassen als Axiom an, dass jede Gleichung wirklich, wenn keine möglichen, so doch unmögliche Wurzeln besitze. Was sie unter möglichen oder unmöglichen Grössen verstanden wissen wollen, haben sie wohl nicht klar genug auseinandergesetzt. Soll der Ausdruck »mögliche Grössen« dasselbe bedeuten wie reelle, »unmögliche« dasselbe wie imaginäre, dann darf jener Satz als Axiom keinesfalls zugelassen werden, sondern er bedarf nothwendig eines Beweises. Doch scheinen die Ausdrücke nicht in jenem Sinne genommen zu sein; vielmehr möchte der Sinn des Axioms so gefasst werden müssen: »Obgleich wir noch nicht sicher sind, dass es nothwendig m reelle oder imaginäre Grössen giebt, welche irgend einer gegebenen Gleichung $m$ten Grades genügen, so wollen wir dies doch zunächst annehmen; denn sollte es sich treffen, dass nicht so viele reelle und imaginäre Grössen gefunden werden können, dann bleibt uns ja der Ausweg offen, zu sagen, die übrigen seien unmöglich.« Zieht man es vor, diesen Ausdruck zu gebrauchen, statt einfach zu sagen, die Gleichung habe in diesem Falle nicht so viele Wurzeln, so habe ich nichts dagegen; jedoch wenn man dann mit diesen unmöglichen Wurzeln so verfährt, als ob sie etwas Wirkliches seien, und beispielsweise sagt, die Summe aller Wurzeln der Gleichung $x^m + Ax^{m-1} + \ldots = 0$ sei $= -A$, obschon unmögliche unter ihnen sind, (das heisst eigentlich: wiewohl einige fehlen), so kann ich dies durchaus nicht billigen. Denn in solchem Sinne zugelassene unmögliche Wurzeln sind gleichwohl Wurzeln, und dann darf jener Lehrsatz ohne Beweis keinesfalls zugegeben werden; ferner dürfte man dabei wohl auch fragen, ob nicht Gleichungen bestehen können, welche nicht einmal unmögliche Wurzeln haben.*)

*) Unter einer imaginären Grösse verstehe ich hier immer eine in der Form $a + b\sqrt{-1}$ enthaltene Grösse, solange b nicht $= 0$ ist. In diesem Sinne ist jener Ausdruck von allen Mathematikern ersten Ranges stets angenommen worden, und, wie ich glaube, darf man denen nicht folgen, welche die Grösse $a + b\sqrt{-1}$ nur dann imaginär nennen wollten, wenn $a = 0$ ist, unmöglich jedoch, wenn a nicht gleich 0 ist; denn diese Unterscheidung ist weder nothwendig noch von irgend welchem Nutzen. Sollen imaginäre Grössen überhaupt in der Analysis beibehalten werden, (was aus mehreren Gründen, welche freilich hinlänglich sicher gestellt werden müssen, richtiger erscheint, als sie zu verwerfen), dann müssen sie nothwendiger Weise für ebenso möglich wie die reellen Grössen gelten; deshalb möchte ich reelle und imaginäre unter der gemeinsamen Bezeichnung von möglichen Grössen umfassen; unmöglich würde ich dagegen eine Grösse nennen, welche Bedingungen zu genügen hätte, denen auch nach Zulassung imaginärer Grössen nicht genügt werden kann; so also, dass dieser Ausdruck dasselbe bedeutet, als wenn man sagt, dass eine solche Grösse im ganzen Grössenbereiche nicht bestehe. Ich möchte

4.

Bevor ich die Beweise durchgehe, welche andere Mathematiker von unserem Lehrsatze geliefert haben, und angebe, was mir in den einzelnen nicht einwurfsfrei erscheint, bemerke ich, dass es genügt, wenn nur gezeigt wird, dass jeder Gleichung eines beliebigen Grades

$$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0$$

oder $X = 0$, (wo wir die Coefficienten $A, B, \ldots M$ als reell annehmen), mindestens auf eine Art durch einen Werth des x von der Form $a + b\sqrt{-1}$ genügt werden kann. Es ist nämlich bekannt, dass X dann durch den reellen Factor zweiten Grades $x^2 - 2ax + a^2 + b^2$ theilbar ist, wenn b nicht $= 0$ wird, und durch den reellen linearen Factor $x - a$, wenn $b = 0$ wird. In beiden Fällen wird der Quotient reell und von geringerem Grade als X sein; und da derselbe aus gleichem Grunde einen reellen Factor ersten oder zweiten Grades haben muss, so wird offenbar durch die Fortsetzung dieses Verfahrens die Function X

---

aber nicht zulassen, dass man hieraus eine ganz besondere Grössenart bilde. Wenn Jemand sagt, ein geradliniges, gleichseitiges und rechtwinkliges Dreieck sei unmöglich, so wird dem Niemand widersprechen. Will man dagegen ein solches unmögliches Dreieck als eine neue Dreiecksart betrachten und andere Dreieckseigenschaften auf dieses anwenden, so wird Jeder dies lächerlich finden! Das heisst mit Worten spielen oder vielmehr Missbrauch treiben. — Und doch haben auch schon die bedeutendsten Mathematiker Wahrheiten, welche die Möglichkeit der Grössen, auf die sie sich beziehen, voraussetzen, auch auf solche angewendet, deren Möglichkeit noch zweifelhaft war. Wenn ich es auch nicht leugne, dass derartige Freiheiten häufig nur die Form allein und gewissermaassen die Einkleidung der Schlussfolgerungen betreffen, welche der Scharfblick eines wahren Mathematikers schnell durchschaut, so ist es doch richtiger und der Erhabenheit der Wissenschaft würdiger, welche mit Recht als das vollkommenste Beispiel von Klarheit und Sicherheit gerühmt wird, dass man solche Freiheiten entweder gänzlich verbannt, oder sie wenigstens sparsamer und nie anders benutzt, als da, wo auch minder Geübte erkennen können, dass die Sache, vielleicht zwar weniger kurz aber doch eben so streng, auch ohne jenes Hülfsmittel behandelt werden könne. — Uebrigens will ich nicht in Abrede stellen, dass das, was ich hier gegen den Missbrauch unmöglicher Grössen gesagt habe, in gewissem Sinne auch imaginären Grössen entgegengehalten werden kann. Doch behalte ich mir die Rechtfertigung dieser Einführung sowie eine eingehende Auseinandersetzung dieser ganzen Sache für eine andere Gelegenheit vor.

schliesslich in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden, oder, wenn man statt der einzelnen reellen Factoren zweiten Grades lieber je zwei lineare imaginäre verwenden will, in m lineare Factoren.

5.

Den ersten Beweis des Satzes verdankt man dem berühmten Geometer *d'Alembert*: Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746. S. 182 ff. Derselbe findet sich bei *Bougainville*, Traité du calcul intégral, à Paris 1754. S. 47 ff. Die hauptsächlichen Punkte seiner Methode sind die folgenden.

Zunächst wird gezeigt. Wenn irgend eine Function X der Veränderlichen x für $x = 0$ oder für $x = \infty$ verschwindet und für einen reellen Werth von x einen unendlich kleinen, reellen, positiven Werth annehmen kann, so wird sie für einen reellen oder unter der Form $p + q\sqrt{-1}$ enthaltenen imaginären Werth von x auch einen unendlich kleinen, reellen, negativen Werth annehmen können. Denn wenn Ω den unendlich kleinen Werth von X und ω den entsprechenden Werth von x bedeutet, so soll sich ω, wie behauptet wird, durch eine stark convergente Reihe $a\Omega^\alpha + b\Omega^\beta + c\Omega^\gamma + \ldots$ ausdrücken lassen, in welcher die Exponenten $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ rationale, beständig wachsende Grössen seien, welche folglich wenigstens in gewisser Entfernung vom Anfange positiv werden und alle Glieder, in denen sie vorkommen, unendlich klein machen. Gäbe es unter all' diesen Exponenten keinen, welcher als Bruch mit geradem Nenner auftritt, dann würden alle Glieder dieser Reihe sowohl für einen positiven wie für einen negativen Werth von Ω reell werden; kämen jedoch unter jenen Exponenten Brüche mit geradem Nenner vor, so sei es klar, dass für einen negativen Werth von Ω die entsprechenden Glieder in der Form $p + q\sqrt{-1}$ auftreten. Wegen der Convergenz der unendlichen Reihe genüge es aber im ersten Falle das erste, d. h. grösste Glied allein beizubehalten, im zweiten Falle brauche man nicht über dasjenige Glied hinauszugehen, welches zuerst einen imaginären Theil liefert.

Mittels ähnlicher Schlüsse könne man zeigen, dass, wenn X durch einen reellen Werth von x einen unendlich kleinen negativen Werth annehmen kann, jene Function dann auch einen unendlich kleinen positiven Werth annehmen könne, indem man dem x entweder einen reellen oder einen imaginären Werth der Form $p + q\sqrt{-1}$ gebe.

Hieraus wird weiter geschlossen, dass es im ersten Falle einen negativen, im zweiten einen positiven endlichen Werth gebe, den X für einen in der Form $p + q\sqrt{-1}$ enthaltenen imaginären Werth von x annimmt.

Wenn folglich X eine derartige Function von x ist, dass sie für den reellen Werth v von x den reellen Werth V annimmt, und ausserdem für einen reellen Werth von x auch einen reellen Werth, der nur unendlich wenig grösser oder kleiner als V ist, so könne dieselbe auch einen um eine unendlich kleine und dann auch um eine endliche Grösse geringeren bez. grösseren Werth als V annehmen für einen gewissen unter der Form $p + q\sqrt{-1}$ stehenden Werth von x. Dies folgt sofort aus dem Vorangehenden, wenn man für X einsetzt $V + Y$ und ebenso für x, $v + y$

Endlich behauptet *d'Alembert* das Folgende: Wenn X irgend ein Intervall zwischen zwei reellen Grössen R, S vollständig durchlaufen kann, (d h. wenn X die Werthe R, S sowie alle reellen zwischen ihnen liegenden Werthe annehmen kann), indem man dem x stets Werthe von der Form $p + q\sqrt{-1}$ giebt, dann könne die Function X noch um jede reelle endliche Grösse vermehrt oder vermindert werden, (je nachdem $S > R$ oder $S < R$ ist), während x stets die Form $p + q\sqrt{-1}$ behält. Gäbe es nämlich eine reelle Grösse U (derart, dass S zwischen U und R liegt), welcher X für einen solchen Werth x nicht gleich werden kann, so müsste es nothendigerweise ein Maximum von X geben (nämlich dann, wenn $S > R$; ein Minimum, dagegen, wenn $S < R$ ist), etwa T, welches durch einen Werth $p + q\sqrt{-1}$ von x noch erreichbar ist; dann aber könne dem x kein Werth von ähnlicher Form beigelegt werden, welcher die Function X um das Mindeste noch näher an U heranführt. Wenn man nun in der Gleichung zwischen X und x für x überall $p + q\sqrt{-1}$ einträgt und darauf sowohl den reellen Theil als denjenigen, welcher den Factor $\sqrt{-1}$ besitzt, nach Weglassung dieses letzteren gleich Null setzt, so könne man aus den beiden entstehenden Gleichungen, (in denen p, q und X nebst Constanten auftreten), durch Elimination zwei andere herleiten, in deren einer sich p, X und Constanten finden, während die andere von p frei ist und nur q, X und Constanten enthält. Da aber X für reelle Werthe von p, q alle Werthe von R bis S durchläuft, so müsse nach dem Vorhergehenden X dem Werth U noch genähert werden können, wenn man den p, q Werthe $\alpha + \gamma\sqrt{-1}$,

$\beta + \delta \sqrt{-1}$ ertheilt. Dies gäbe $x = \alpha - \delta + (\gamma + \beta) \sqrt{-1}$, d. h. wiederum einen Werth von der Form $p + q\sqrt{-1}$ gegen die Voraussetzung.

Wird jetzt X als eine Function der Form $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M$ vorausgesetzt, so sieht man leicht ein, dass dem x solche reellen Werthe ertheilt werden können, vermöge deren X irgend ein vollständiges Intervall zwischen zwei reellen Werthen durchläuft. Deshalb kann x auch einen solchen Werth der Form $p + q\sqrt{-1}$ annehmen, welcher $X = 0$ macht. W. z. b. w.*)

6.

Die gegen den *d'Alembert*'schen Beweis etwa möglichen Einwände dürften auf das Folgende hinauslaufen.

1. *d'Alembert* hegt keinen Zweifel an der Existenz der Werthe von x, denen gegebene Werthe von X entsprechen; er setzt dieselbe voraus, und sucht nur die Form jener Werthe auf.

So schwerwiegend an sich dieser Vorwurf auch ist, hier bezieht er sich nur auf die Ausdrucksweise, und diese kann leicht so verbessert werden, dass er gänzlich hinfällig wird.

2. Die Behauptung, dass Ω stets durch eine derartige Reihe ausgedrückt werden könne, wie angenommen wird, ist sicher falsch, wenn X auch irgend welche transcendente Function bedeuten darf, (was *d'Alembert* mehrfach betont). Dies ist z. B. bei $X = e^{\frac{1}{x}}$ oder bei $x = \frac{1}{\log X}$ klar. Wenn wir aber den Beweis auf den Fall beschränken, in welchem X eine algebraische Function von x ist, was für unseren Zweck ausreicht, dann ist

*) Es mag bemerkt werden, dass *d'Alembert* in seiner Darlegung dieses Beweises geometrische Betrachtungen anwendet, indem er X als Abscisse, x als Ordinate einer Curve ansieht, (was ganz der Sitte aller Mathematiker aus der ersten Hälfte dieses Jahrhunderts gemäss ist, denen die Bezeichnung der Functionen weniger geläufig war). Da sich aber alle jene Schlüsse im Wesentlichen nicht auf geometrische, sondern auf rein analytische Grundsätze stützen, und möglicherweise die etwas gewagten Ausdrücke »imaginäre Curve«, »imaginäre Ordinaten« den heutigen Leser befremden können, so zog ich hier eine rein analytische Form der Darstellung vor. Ich füge diese Anmerkung bei, damit Niemand bei der Vergleichung des *d'Alembert*'schen Beweises mit dieser gedrängten Auseinandersetzung auf den Verdacht gerathen möchte, es sei etwas Wesentliches verändert worden.

die Behauptung völlig richtig. — Uebrigens führt *d'Alembert* nichts zur Bekräftigung seiner Annahme an; *Bougainville* setzt voraus, X sei eine algebraische Function von x, und empfiehlt zur Aufstellung der Reihe das *Newton*'sche Parallelogramm.

3. Die unendlich kleinen Grössen werden in freierer Weise benutzt, als es mit der mathematischen Strenge verträglich ist, oder als es wohl zu unserer Zeit, (wo jene Grössen mit Recht misstrauisch angesehen werden), ein vorsichtiger Analytiker erlauben würde; ebenso ist der Sprung von einem unendlich kleinen zu einem endlichen Werthe von Ω nicht klar genug auseinandergelegt. Die Behauptung, dass Ω auch irgend welchen endlichen Werth erhalten könne, darf wohl nicht aus der Möglichkeit eines unendlich kleinen Werthes von Ω erschlossen werden; dieselbe folgt vielmehr daraus, dass bei einer hinreichend kleinen Grösse Ω wegen der starken Convergenz der Reihe die Annäherung an den wahren Werth von ω mit der Anzahl der beibehaltenen Glieder wächst; oder dass der Gleichung, welche die Beziehung zwischen ω und Ω bezw. x und X liefert, um so schärfer genügt werde, je mehr Glieder man, um ω zu erhalten, vereinigt. Diese ganze Schlussweise erscheint aber zu unbestimmt, als dass irgend eine strenge Folgerung aus ihr gezogen werden könnte; ausserdem bemerke ich noch, dass es wirklich Reihen giebt, welche stets divergiren, wie klein auch der Werth der Grösse sei, nach deren Potenzen die Entwickelung stattfindet, derart, dass man bei hinlänglich weitem Fortschreiten zu Gliedern gelangt, die grösser sind als jede beliebige gegebene Grösse.*) Dies tritt ein, wenn die Coefficienten der Reihe eine hypergeometrische Reihe bilden. Deshalb hätte nothwendigerweise gezeigt werden müssen, dass im vorliegenden Falle eine solche hypergeometrische Reihe nicht auftreten kann.

---

*) Beiläufig will ich bei dieser Gelegenheit bemerken, dass zu diesen Reihen überaus viele gehören, welche beim ersten Anblick stark convergent zu sein scheinen, z. B. der grösste Theil derjenigen, welche *Euler* im zweiten Theile seiner Inst. Calc. Diff. Cap. VI. dazu benutzt, die Summe anderer Reihen so genau als möglich anzugeben; S. 441—474 (die übrigen Reihen S. 475—478 können wirklich convergiren.) Es ist dies, soviel ich weiss, bisher von Niemandem bemerkt worden. Deshalb ist es überaus wünschenswerth, klar und streng zu zeigen, warum derartige Reihen, die zuerst sehr stark, dann immer schwächer und schwächer convergiren, und endlich mehr und mehr divergiren, trotzdem die Summe nahezu genau liefern, falls nur nicht zu viele Glieder genommen werden; und in wie weit eine solche Summe mit Sicherheit für richtig angenommen werden darf.

Uebrigens glaube ich, dass *d'Alembert* hier nicht mit Recht zu unendlichen Reihen seine Zuflucht genommen hat, da dieselben wenig geeignet erscheinen, diesen fundamentalen Lehrsatz der Theorie der Gleichungen zu begründen.

4. Aus der Annahme, X könne den Werth S aber nicht den Werth U erhalten, folgt noch nicht, dass zwischen S und U ein Werth T liegen müsse, den X erreichen aber nicht überschreiten kann. Hier ist ein Fall übersehen es wäre nämlich noch möglich, dass zwischen S und U eine Grenze gelegen ist, welcher sich X beliebig nähern kann, ohne sie jedoch je zu erreichen. Aus den von *d'Alembert* angeführten Gründen folgt nur, dass X jeden Werth, welchen es erreicht, noch um eine endliche Grösse überschreiten kann. Wenn es also etwa $= S$ wird, so kann es noch um eine endliche Grösse Ω vermehrt werden; dann kann ein neuer Zuwachs Ω' hinzutreten, dann eine weitere Vermehrung Ω'' u. s w. Es giebt aber keinen letzten Zuwachs, so viele auch immer schon hinzugefügt sind, sondern es kann stets noch ein neuer hinzutreten. Allein obwohl die Anzahl der möglichen Vermehrungen unendlich ist, so kann es doch wirklich vorkommen, dass bei beständiger Abnahme von $\Omega, \Omega', \Omega''$ u. s. w. die Summe $S + \Omega + \Omega' + \Omega'' + \ldots$ eine gewisse Grenze niemals erreicht, so viele Glieder auch genommen werden.

Dieser Fall kann zwar nicht eintreten, wenn X eine ganze algebraische Function von x bedeutet, doch muss jene Methode ohne den Beweis, dass dies nicht geschehen könne, für unvollständig erklärt werden. Ist aber X eine transcendente oder auch nur eine gebrochene algebraische Function, dann kann jener Fall allerdings eintreten, z. B. stets, wenn irgend einem Werthe von X ein unendlich grosser Werth von x entspricht. Dann wird wohl die *d'Alembert*'sche Methode nicht ohne grosse Umwege und in gewissen Fällen vielleicht überhaupt nicht auf unzweifelhafte Grundlagen gestützt werden können.

Aus diesen Gründen vermag ich den *d'Alembert*'schen Beweis nicht für ausreichend zu halten. Allein das verhindert nicht, dass mir der wahre Nerv des Beweises trotz aller Einwürfe unberührt zu sein scheint; ich glaube nicht nur, dass man auf dieselben Grundlagen (freilich in ganz verschiedener Weise oder doch wenigstens mit grösserer Umsicht) einen strengen Beweis unseres Satzes aufbauen, sondern auch, dass man von ihnen aus Alles ableiten kann, was sich für die Theorie der transcendenten Gleichungen nur wünschen lässt. Diesen wichtigen Punkt werde ich bei anderer Gelegenheit ausführlich behandeln. Vgl. inzwischen weiter unt. §24.

7.

Nach *d'Alembert* veröffentlichte *Euler* seine Untersuchungen über denselben Gegenstand: Recherches sur les racines imaginaires des équations, Hist. de l'Acad. de Berlin A. 1749, S. 223 ff. Er giebt hier zwei Methoden; das Wesentliche der ersten besteht in Folgendem.

Zunächst versucht *Euler* zu beweisen, dass, wenn m eine Potenz von 2 bedeutet, die Function $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + \ldots + M = X$, in welcher der Coefficient des zweiten Gliedes $= 0$ ist, stets in zwei reelle Factoren zerlegt werden könne, in denen x bis zum m ten Grade aufsteigt. Zu diesem Zwecke nimmt er zwei Factoren an

$$x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + \ldots$$

und $$x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + \ldots,$$

in denen die Coefficienten $u, \alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ noch unbekannt sind, und setzt ihr Product der Function X gleich. Die Vergleichung der Coefficienten liefert $2m - 1$ Gleichungen, und es ist offenbar nur der Beweis zu liefern, dass den Unbekannten $u, \alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$, deren Anzahl auch $2m - 1$ ist, solche reellen Werthe beigelegt werden können, dass jene Gleichungen befriedigt werden. Nun wird zuerst u als bekannt angesehen, so dass die Anzahl der Unbekannten um eine Einheit geringer ist, als die Anzahl der Gleichungen. Verbindet man diese in passender Weise nach den bekannten algebraischen Methoden miteinander, so kann man, wie *Euler* behauptet, alle $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ rational und ohne Wurzelausziehung durch u und die Coefficienten $B, C, \ldots$ ausdrücken, somit erhält man reelle Werthe, falls u reell wird. Andererseits jedoch können alle $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ eliminirt werden, so dass eine Gleichung $U = 0$ entsteht, wo U eine ganze Function allein von u und den bekannten Coefficienten wird. Diese Gleichung nach der gewöhnlichen Eliminations-Methode wirklich aufzustellen, würde ungeheure Arbeit kosten, wenn die vorgelegte Gleichung $X = 0$ von einigermaassen hohem Grade ist; für unbestimmten Grad möchte es, nach *Euler*'s eigenem Urtheile, S. 239, ganz unmöglich sein. Aber hier genügt es, eine Eigenschaft jener Gleichung zu kennen, dass nämlich das letzte Glied in U, welches die Unbekannte u nicht enthält, negativ sein muss. Hieraus lässt sich bekanntlich folgern, dass die Gleichung mindestens eine reelle Wurzel besitzt, oder dass u und weiterhin also auch $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ wenigstens auf eine Art reell bestimmt werden können. Jene Eigenschaft nun lässt sich durch die folgenden Ueberlegungen darthun. Wenn $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \ldots$ als Factor der Function X vorausgesetzt wird, so muss u die Summe von m Wurzeln der Gleichung $X = 0$ werden; so oft man also aus $2m$ Wurzeln m herausgreifen kann, so viele Werthe muss u haben, d. h. nach den Grundregeln der Combinationsrechnung $\frac{2m(2m-1)(2m-2)\ldots(m+1)}{1.2.3\ldots m}$.

Ich übergehe den leichten Beweis dafür, dass diese Zahl stets ungeradmal gerade wird; wird sie also $= 2k$ gesetzt, so ist die Hälfte k ungerade. Die Gleichung $U = 0$ erhält den Grad $2k$. Da aber in der Gleichung $X = 0$ das zweite Glied fehlt, so ist die Summe aller $2m$ Wurzeln gleich 0; folglich muss, wenn die Summe von m derselben gleich $+p$ wird, die Summe der übrigen $-p$ sein, d. h. wenn $+p$ zu den Werthen von u gehört, dann gehört auch $-p$ zu denselben. Hieraus schliesst *Euler*, U sei das Product aus k quadratischen Factoren der Form $u^2 - p^2$, $u^2 - q^2$, $u^2 - r^2$, ..., wobei $+p, -p, +q, -q, \ldots$ sämmtliche $2k$ Wurzeln der Gleichung $U = 0$ geben. Es muss folglich, weil die Anzahl dieser Factoren ungerade ist, das letzte Glied von U gleich dem mit negativen Zeichen versehenen Quadrate des Products $pqr\ldots$ sein. Dieses Product $pqr\ldots$ lässt sich stets aus den Coefficienten B, C, ... rational bestimmen; es wird folglich eine reelle Grösse, und das mit negativem Zeichen behaftete Quadrat desselben daher sicherlich eine negative Grösse werden. W. z. b. w.

Da diese beiden reellen Factoren von X den Grad m haben, und m eine Potenz von 2 ist, so kann jeder von ihnen aus gleichen Gründen wieder in zwei reelle Factoren des Grades $\frac{1}{2}m$ zerfällt werden, und da man durch wiederholte Halbierung der Zahl m endlich auf die Zahl 2 kommt, so kann man offenbar durch die Fortsetzung dieser Operation endlich X in reelle Factoren zweiten Grades zerlegen.

Liegt jedoch eine Function vor, in welcher das zweite Glied nicht fehlt, etwa $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + \ldots + M$, wo auch jetzt $2m$ eine Potenz von 2 bedeutet, so geht diese durch die Substitution $x = y - \frac{A}{2m}$ in eine ähnliche Function ohne zweites Glied über. Hieraus lässt sich leicht schliessen, dass auch jene Function in reelle Factoren zweiten Grades zerlegbar sei.

Ist endlich eine Function $n$ten Grades vorgelegt, wo n keine Potenz von 2 bedeutet, dann sei die nächst höhere Potenz von 2 gleich $2m$; die vorgelegte Function werde dann mit $2m - n$ beliebigen reellen Factoren ersten Grades multiplicirt. Aus der Zerlegbarkeit dieses Products in reelle Factoren zweiten Grades schliesst man leicht, dass auch die vorgelegte Function in reelle Factoren zweiten oder ersten Grades zerlegbar sein müsse.

8.

Gegen diesen Beweis lässt sich einwenden:

1. Die Regel, gemäss welcher *Euler* schliesst, aus $2m - 1$ Gleichungen mit $2m - 2$ Unbekannten $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ liessen sich alle rational bestimmen, ist durchaus nicht allgemein, sondern sie lässt sehr häufig Ausnahmen zu. Wenn man z. B. in § 3 irgend eine der Unbekannten als bekannt ansieht, und die übrigen durch diese und durch die gegebenen Coefficienten rational auszudrücken versucht, so wird man leicht finden, das sei unmöglich; keine der Unbekannten könne anders als durch eine Gleichung $(m - 1)$ten Grades bestimmt werden. In diesem Falle lässt sich freilich von vorn herein erkennen, dass es nothwendig so kommen musste; doch könnte man mit Recht fragen, ob es sich nicht für einige Werthe von m im vorliegenden Falle ebenso verhalte, so dass die Unbekannten $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ aus u, B, C, ... nur durch Gleichungen von vielleicht höherem als dem $2m$ten Grade bestimmt werden können. Für den Fall dass $X = 0$ vom vierten Grade ist, giebt *Euler* die rationalen Werthe der Coefficienten durch u und die gegebenen Coefficienten an; dass dies aber auch bei allen höheren Gleichungen möglich sei, bedurfte unbedingt einer eingehenden Darlegung. — Uebrigens scheint es der Mühe werth zu sein, jene Formeln, welche $\alpha, \beta, \ldots$ rational durch u, B, C, ... ausdrücken, tiefer und ganz allgemein zu untersuchen. Hierüber und über weitere zur Theorie der Elimination gehörige Gegenstände, einen nicht im mindesten erschöpften Gegenstand, gedenke ich mich bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher zu verbreiten.

2. Selbst wenn aber bewiesen wäre, dass für jeden Grad der Gleichung $X = 0$ Formeln gefunden werden können, welche $\alpha, \beta, \ldots \lambda, \mu, \ldots$ rational durch u, B, C, ... ausdrücken, so steht es doch fest, dass für gewisse bestimmte Werthe der Coefficienten B, C, ... jene Formeln unbestimmt werden können; dann ist es nicht allein unmöglich, jene Unbekannten rational

durch u, B, C, ... darzustellen, sondern es giebt in Wahrheit auch Fälle, in denen einem reellen Werthe von u keine reellen Werthe von α, β, ... λ, μ, ... entsprechen. Zur Bestätigung dieser Behauptung verweise ich der Kürze halber den Leser auf die *Euler*'sche Abhandlung selbst, in welcher S. 236 die Gleichung vierten Grades ausführlicher behandelt ist. Hier sieht Jeder sofort, dass die Formeln für die Coefficienten α, β, ... unbestimmt werden, wenn $C = 0$ ist, und für u der Werth 0 genommen wird; ferner dass die Werthe derselben nicht allein ohne Wurzelausziehung nicht angegeben werden können, sondern dass sie, falls $B^2 - 4D$ negativ ist, nicht einmal reell sind. Freilich hat in diesem Falle u noch andere reelle Werthe, denen reelle Werthe von α, β entsprechen, wie man leicht erkennt: doch könnte man fürchten, dass diese Beseitigung der Schwierigkeit, (welche *Euler* überhaupt nicht berührt), bei höheren Gleichungen viel grössere Mühe kostet. Jedenfalls darf diese Frage bei einem genauen Beweise durchaus nicht mit Stillschweigen übergangen werden.

3. *Euler* setzt stillschweigend voraus, die Gleichung $X = 0$ besitze $2m$ Wurzeln, und er setzt die Summe derselben $= 0$, weil das zweite Glied in X fehlt. Wie ich eine solche Freiheit beurtheile, deren sich alle algebraischen Schriftsteller bedienen, habe ich schon oben § 3 auseinandergesetzt. Die Annahme, dass die Summe aller Wurzeln einer Gleichung dem ersten Coefficienten mit geändertem Zeichen gleich sei, lässt sich nur auf Gleichungen anwenden, welche Wurzeln haben; da nun aber durch diesen Beweis selbst unumstösslich dargethan werden soll, dass die Gleichung $X = 0$ wirklich Wurzeln habe, so scheint es nicht erlaubt, die Existenz derselben vorauszusetzen. Ohne Zweifel werden diejenigen, welche das Trügerische der Schlussweise noch nicht durchschaut haben, die Antwort geben *hier solle nicht bewiesen werden, dass der Gleichung $X = 0$ genügt werden könne*, (denn der Ausdruck, sie hbe Wurzeln, will nichts anderes sagen), *sondern nur, dass ihr durch Werthe von x, die in der Form $a + b\sqrt{-1}$ auftreten, genügt werden könne, jenes werde als Grundsatz vorausgesetzt.* Da man sich aber ausser reellen und imaginären Grössen $a + b\sqrt{-1}$ keine anderen Grössen-Formen vorstellen kann, so ist es nicht ganz klar, worin sich das, was bewiesen werden soll, von dem unterscheidet, was als Grundsatz angenommen wird; ja sogar, wenn es möglich wäre, noch andere Grössen-Formen auszudenken, etwa die Formen F, F', F'', ...

so dürfte doch nicht ohne Beweis zugestanden werden, dass jener Gleichung entweder durch einen reellen Werth von x genügt werden könne, oder durch einen von der Form $a + b\sqrt{-1}$, oder von der Form F, oder F' u. s. w. Deswegen kann jener Grundsatz nur folgenden Sinn haben: Jede Gleichung kann befriedigt werden entweder durch einen reellen Werth der Unbekannten, oder durch einen imaginären der Form $a + b\sqrt{-1}$, oder vielleicht durch einen Werth von anderer noch unbekannter Form, oder durch einen Werth, der überhaupt unter keiner Form enthalten ist. Wie aber solche Grössen, über die wir uns nicht einmal eine Vorstellung bilden können — wahre Schatten von Schatten — summirt oder multiplicirt werden sollen, das lässt sich bei der in der Mathematik stets geforderten Klarheit sicher nicht verstehen*).

Uebrigens will ich die Richtigkeit der Schlüsse, welche *Euler* aus seiner Annahme zieht, durch diese Einwürfe nicht im mindesten verdächtigen; es steht für mich vielmehr fest, dass durch eine weder schwierige, noch von der *Euler*'schen sehr verschiedene Methode dieselben so bewiesen werden können, dass Niemandem auch nur der geringste Zweifel bleiben kann. Ich tadle nur die Form, welche zwar bei der Auffindung neuer Wahrheiten von grossem Nutzen sein kann, aber bei der Veröffentlichung von Beweisen nicht gestattet werden darf.

4. *Euler* führt überhaupt nichts zur Begründung der Behauptung an, dass das Product $pqr\ldots$ durch die Coefficienten in X rational bestimmt werden könne. Alles, was er hierüber bei Gleichungen vierten Grades auseinandersetzt, ist Folgendes: (hier sind $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ die Wurzeln der vorgelegten Gleichung $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$)

»Man wird mir ohne Zweifel einwerfen, ich hätte hier vorausgesetzt, dass die Grösse pqr reell und ihr Quadrat $p^2q^2r^2$ positiv wäre; dies war noch zweifelhaft, da die Wurzeln $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}$

*) Diese ganze Sache wird durch eine andere Untersuchung, welche demnächst veröffentlicht werden wird, ins rechte Licht gesetzt; ich hätte dort bei einem weit verschiedenen, aber doch analogen Gegenstande mir durchaus mit demselben Rechte eine ähnliche Freiheit nehmen können, wie es hier bei den Gleichungen alle Analytiker gethan haben. Obwohl ich aber mit Hülfe solcher Annahmen die Beweise mehrerer Sätze mit wenigen Worten hätte abthun können, welche ohne dieselben recht schwierig werden und die feinsten Hülfsmittel fordern, so zog ich es doch vor, jene Annahmen völlig bei Seite zu lassen; und ich hoffe, dass ich nur Wenige zufrieden gestellt hätte, wäre ich der Methode der Analytiker gefolgt.

imaginär waren, und es wohl eintreffen könnte, dass das Quadrat der aus ihnen zusammengesetzten Grösse pqr negativ wäre. Hierauf antworte ich, dass dies niemals eintritt; denn welche imaginäre Grössen die Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ auch sein mögen, so weiss man doch, dass $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d}=0$; $\mathfrak{ab}+\mathfrak{ac}+\mathfrak{ad}+\mathfrak{bc}+\mathfrak{bd}+\mathfrak{cd}=B$; $\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C$*); $\mathfrak{abcd}=D$ sein wird, wo diese Grössen B, C, D reell sind. Da aber $p=\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$, $q=\mathfrak{a}+\mathfrak{c}$, $r=\mathfrak{a}+\mathfrak{d}$ ist, so wird ihr Product $pqr=(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$, wie man weiss, durch die Grössen B, C, D darstellbar und wird folglich reell sein; dies haben wir auch wirklich bei $pqr=-C$ und $p^2q^2r^2=C^2$ gesehen. Ebenso wird man leicht erkennen, dass bei höheren Gleichungen dasselbe stattfindet; von dieser Seite her könnte man mir also keine Einwendungen machen.« Die Bedingung, dass das Product pqr ... rational durch $B, C, \ldots$ bestimmt werden könne, fügt *Euler* nirgend hinzu, wiewohl er es stets stillschweigend anzunehmen scheint, da seine Folgerungen sonst keine Beweiskraft hätten. Nun ist es ja richtig, dass, wenn man bei den Gleichungen vierten Grades das Product $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ entwickelt, $\mathfrak{a}^2(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}+\mathfrak{c}+\mathfrak{d})+\mathfrak{abc}+\mathfrak{abd}+\mathfrak{acd}+\mathfrak{bcd}=-C$ erhalten wird, doch ist es nicht ohne weiteres klar, wie bei allen Gleichungen höheren Grades das Product rational durch die Coefficienten bestimmt werden kann. *De Foncenex* nahm dies zuerst wahr (Miscell. phil. math. soc. Taurin. T. I. p. 117); dabei bemerkt er mit Recht, dass ohne strengen Beweis dieser Voraussetzung die Methode alle Beweiskraft verliere; er gesteht ferner ein, dass ihm derselbe recht schwer erscheine, und er giebt einen Weg an, den er vergeblich eingeschlagen habe**). Gleichwohl lässt sich die Sache ohne Schwierigkeit durch folgende Methode erledigen, deren Kernpunkt ich hier nur andeuten kann: Obschon es bei den Gleichungen vierten Grades nicht völlig klar liegt, dass das Product $(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})$ durch die Coefficienten B, C, D darstellbar sei, so erkennt man doch leicht, dass dasselbe Product auch $=(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})$, ferner $=(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})$, endlich $=(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c})$

---

*) *Euler* schreibt irrthümlich C; deshalb setzt er auch später unrichtig $pqr=C$.

**) Bei dieser Auseinandersetzung scheint sich S. 118, Z. 5 ein Irrthum eingeschlichen zu haben. An Stelle von p (»man wählte nur diejenigen, in welche p einging etc.«) muss treten: »ebenfalls irgend eine Wurzel der vorgelegten Gleichung« oder etwas Aehnliches; denn jenes hat keinen Sinn.

sei. Folglich wird das Product pqr der vierte Theil der Summe

$$(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})(\mathfrak{a}+\mathfrak{c})(\mathfrak{a}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{b}+\mathfrak{a})(\mathfrak{b}+\mathfrak{c})(\mathfrak{b}+\mathfrak{d})$$
$$+(\mathfrak{c}+\mathfrak{a})(\mathfrak{c}+\mathfrak{b})(\mathfrak{c}+\mathfrak{d})+(\mathfrak{d}+\mathfrak{a})(\mathfrak{d}+\mathfrak{b})(\mathfrak{d}+\mathfrak{c}),$$

welche bei ihrer Entwickelung eine ganze rationale Function der Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ wird, und zwar eine solche, welche wie man leicht von vorn herein erkennt, alle Wurzeln in gleicher Weise enthält. Derartige Functionen lassen sich stets rational durch die Coefficienten der Gleichung mit den Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$ ausdrücken. Dasselbe wird auch ersichtlich, sobald man das Product pqr unter die folgende Form bringt

$$\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{b}-\mathfrak{c}-\mathfrak{d})\,.\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{c}-\mathfrak{b}-\mathfrak{d})\,.\,\tfrac{1}{2}(\mathfrak{a}+\mathfrak{d}-\mathfrak{b}-\mathfrak{c})\,;$$

es lässt sich leicht von vorn herein erkennen, dass bei der Entwickelung dieses Products alle Wurzeln $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{d}$, in gleicher Weise auftreten werden. Ein Kundiger wird hieraus leicht erkennen, wie dies auf höhere Gleichungen angewendet werden muss. - Die vollständige Auseinandersetzung dieses Beweises, den die Kürze hier durchzuführen nicht erlaubte, spare ich mir zugleich mit einer ausführlichen Behandlung der Functionen, welche mehrere Veränderliche in derselben Weise umschliessen, für eine andere Gelegenheit auf.

Ich bemerke übrigens, dass man ausser diesen vier Einwürfen im *Euler*'schen Beweise noch einiges andere Angreifbare findet; doch übergehe ich dies mit Stillschweigen, um nicht etwa als gar zu scharfer Kritiker zu erscheinen, zumal da das Vorangehende bereits hinlänglich zeigt, dass der Beweis, wenigstens in der von *Euler* vorgelegten Form, keinesfalls für ausreichend angesehen werden kann.

Später gab *Euler* noch einen anderen Weg an, um den Lehrsatz für Gleichungen, deren Grad keine Potenz von 2 ist, auf die Lösung solcher Gleichungen zurückzuführen, bei denen dies zutrifft; da aber diese Methode über die Gleichungen, deren Grad eine Potenz von 2 ist, keine Auskunft giebt und überdies allen früheren Einwürfen ausser dem vierten ausgesetzt ist, genau wie der erste allgemeine Beweis, so ist es nicht nöthig dieselbe hier ausführlicher auseinanderzusetzen.

9.

In derselben Abhandlung bemüht sich *Euler*, S. 263, unseren Satz noch auf einem anderen Wege zu beweisen. Hiervon ist der wesentliche Inhalt folgender Bis jetzt konnte zwar der analytische Ausdruck der Wurzeln einer gegebenen Gleichung

$x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} + \ldots = 0$ noch nicht gefunden werden, wenn $n > 4$ ist; doch scheint es, wie *Euler* versichert, festzustehen, dass derselbe nichts anderes enthalten kann, als arithmetische Operationen und Wurzelausziehungen, die freilich um so verwickelter ausfallen, je grösser n ist. Wird dies zugegeben, dann zeigt *Euler* aufs beste, dass, so verwickelt auch die Wurzelzeichen auftreten, doch die Formeln stets einen in der Form $M + N\sqrt{-1}$ darstellbaren Werth liefern, wobei M, N reelle Grössen sind.

Gegen diesen Schluss lässt sich einwenden, dass nach den Bemühungen so vieler und so bedeutender Mathematiker überaus wenig Hoffnung bleibt, jemals zur allgemeinen Lösung algebraischer Gleichungen zu gelangen, und dass die Wahrscheinlichkeit gross und grösser wird, eine solche Lösung sei überhaupt unmöglich, sie berge einen Widerspruch in sich. Dies dürfte um so weniger paradox erscheinen, als das, was gewöhnlich Auflösung einer Gleichung genannt wird, wesentlich nichts anderes ist, als die Zurückführung der vorgelegten auf reine Gleichungen. Denn die Lösung reiner Gleichungen wird hier nicht gelehrt sondern vorausgesetzt; wenn man die Wurzel der Gleichung $x^m = H$ durch $\sqrt[m]{H}$ ausdrückt, so hat man sie durchaus nicht gelöst und nicht mehr gethan, als wenn man für die Wurzel der Gleichung $x^n + Ax^{n-1} + \ldots = 0$ irgend ein Zeichen erdenkt, und die Wurzel diesem gleichsetzt. Freilich haben die reinen Gleichungen vor allen anderen viel voraus, sowohl wegen der Leichtigkeit, die Wurzeln derselben durch Annäherung zu finden, als wegen des eleganten Zusammenhanges aller ihrer Wurzeln unter sich, und deshalb ist es durchaus nicht zu tadeln, dass die Analytiker die Wurzeln derselben mit einem besonderen Zeichen versehen haben; allein daraus, dass sie dieses Zeichen zugleich mit den arithmetischen Zeichen der Addition, Subtraction, Multiplication, Division und Potenzerhebung unter der Bezeichnung analytischer Ausdrücke zusammengefasst haben, folgt nicht im mindesten, dass die Wurzel jeder Gleichung durch dieselben darstellbar sei. Mit kurzen Worten: es wird ohne ausreichenden Grund angenommen, dass die Lösung jeder Gleichung auf die Lösung reiner Gleichungen zurückgeführt werden könne. Vielleicht möchte es nicht so schwer sein, die Unmöglichkeit schon für den fünften Grad in aller Strenge nachzuweisen; meine Untersuchungen hierüber werde ich an anderer Stelle ausführlich mittheilen. Hier genügt es hervorzuheben, dass die allgemeine, in diesem Sinne verstandene Lösung von Gleichungen noch sehr zweifelhaft ist, und dass also ein Beweis, dessen ganze Stärke von jener Annahme abhängt, beim augenblicklichen Stande der Sache von keinem Gewichte ist.

10.

Später schlug auch *de Foncenex*, nachdem er den einen Mangel im ersten *Euler*'schen Beweise (siehe oben in § 8 den vierten Einwurf) bemerkt hatte, ohne ihn heben zu können, noch einen anderen Gang ein und veröffentlichte denselben in der oben erwähnten Abhandlung S. 120*). Derselbe besteht in Folgendem.

Vorgelegt sei eine Gleichung $Z = 0$, wo Z eine Function $m$ten Grades der Unbekannten z bedeutet. Ist m ungerade, dann ist es bereits bekannt, dass diese Gleichung eine reelle Wurzel besitzt; wenn m jedoch gerade ist, dann versucht *Foncenex* auf folgende Art zu beweisen, dass die Gleichung mindestens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ hat. Es sei $m = 2^n . i$, wobei i eine ungerade Zahl bedeuten soll, und es wird vorausgesetzt, $z^2 + uz + M$ sei ein Theiler der Function Z. Dann ist jeder Werth von u die Summe zweier Wurzeln der Gleichung $Z = 0$, mit geändertem Vorzeichen, so dass u gerade $\frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} = m'$ Werthe haben wird; ist nun u durch die Gleichung $U = 0$ bestimmt, wo U eine ganze Function von u und den bekannten Coefficienten in Z bedeutet, so wird dieselbe vom Grade m' sein. Hier sieht man leicht ein, dass m' eine Zahl von der Form $2^{n-1}i'$ wird, wo i' eine ungerade Zahl bedeutet. Sollte m' noch nicht ungerade sein, so wird wiederum vorausgesetzt, dass $u^2 + u'u + M'$ ein Theiler von U wird, und aus ähnlichen Schlüssen folgt, dass u' durch eine Gleichung $U' = 0$ bestimmt werde, wo U' eine Function des Grades $\frac{m'(m'-1)}{1 \cdot 2}$ von u' ist. Setzt man nun $\frac{m'(m'-1)}{1 \cdot 2} = m''$, so wird m'' eine Zahl von der

*) Im zweiten Bande der »Miscellanen« S. 337 sind Erläuterungen zu dieser Abhandlung enthalten; doch beziehen sie sich nicht auf die vorliegende Untersuchung, sondern auf die Logarithmen negativer Grössen, von denen in derselben Abhandlung die Rede war.

Form $2^{n-2}.i''$, wobei i'' eine ungerade Zahl bedeutet. Sollte m'' noch ungerade sein, so wird angenommen $u'^2 + u''u' + M''$ sei ein Theiler der Function U', und u'' wird durch eine Gleichung $U'' = 0$ bestimmt, welche vom Grade m''' sein mag, wo m''' eine Zahl von der Form $2^{n-3}.i'''$ ist. Offenbar wird in der Reihe der Gleichungen $U = 0$, $U' = 0$, $U'' = 0, \ldots$ die $n$te von ungeradem Grade, so dass sie eine reelle Wurzel besitzt. Der Kürze wegen nehmen wir $n = 3$, so dass die Gleichung $U'' = 0$ eine reelle Wurzel u'' hat; es ist ja sofort ersichtlich, dass für jeden anderen Werth von n dieselben Schlüsse gelten. Dann wird, wie *de Foncenex* behauptet, der Coefficient M'' durch u'' und die Coefficienten von U', von denen man leicht einsieht, dass sie ganze Functionen der Coefficienten von Z werden, oder auch durch u'' und die Coefficienten von Z rational darstellbar und folglich reell werden. Hieraus folgt, dass die Wurzeln der Gleichung $u'^2 + u''u' + M'' = 0$ unter der Form $p + q\sqrt{-1}$ auftreten; diese genügen aber offenbar der Gleichung $U' = 0$; folglich giebt es einen unter der Form $p + q\sqrt{-1}$ enthaltenen Werth für u'. Ferner ist der Coefficient M' (ähnlich wie oben) rational durch u' und die Coefficienten von Z bestimmbar, und folglich ist er auch von der Form $p + q\sqrt{-1}$. Deshalb sind die Wurzeln der Gleichung $u^2 + u'u + M' = 0$ von derselben Form, und da dieselben auch der Gleichung $U = 0$ genügen, so besitzt diese Gleichung eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$. Endlich folgt hieraus in ähnlicher Weise, dass M dieselbe Form besitze, dass dasselbe bei einer Wurzel der Gleichung $z^2 + uz + M = 0$ stattfinde, und dass diese offenbar auch der gegebenen Gleichung $Z = 0$ genüge. Folglich wird jede Gleichung mindestens eine Wurzel von der Form $p + q\sqrt{-1}$ besitzen.

11.

Die Einwürfe 1, 2, 3, welche ich gegen den *Euler*'schen Beweis erhoben habe (§ 8), gelten auch hier vollkommen, nur mit dem Unterschiede, dass der zweite Einwurf, welchem der *Euler*'sche Beweis nur in gewissen besonderen Fällen unterworfen war, den vorliegenden in allen Fällen trifft. Man kann nämlich von vornherein beweisen, dass, selbst wenn eine Formel vorliegt, welche den Coefficienten M' rational durch u' und die Coefficienten von Z ausdrückt, diese doch für mehrere Werthe von u' nothwendig unbestimmt werden muss; ähnlich wird die

Formel, welche den Coefficienten M'' durch u'' liefert, für einige Werthe von u'' unbestimmt u. s. f. Nehmen wir die Gleichung vierten Grades als Beispiel, so wird dies klar zu Tage treten. Wir setzen $m = 4$ und bezeichnen die Wurzeln der Gleichung $Z = 0$ mit α, β, γ, δ. Dann erkennt man, dass die Gleichung sechsten Grades $U = 0$ als Wurzeln $-(\alpha+\beta)$, $-(\alpha+\gamma)$, $-(\alpha+\delta)$, $-(\beta+\gamma)$, $-(\beta+\delta)$, $-(\gamma+\delta)$ besitzen wird. Die Gleichung $U' = 0$ wird vom fünfzehnten Grade werden; ihre Wurzeln u' sind die folgenden

$$\begin{gathered}
2\alpha+\beta+\gamma, 2\alpha+\beta+\delta, 2\alpha+\gamma+\delta, 2\beta+\alpha+\gamma, 2\beta+\alpha+\delta, 2\beta+\gamma+\delta \\
2\gamma+\alpha+\beta, 2\gamma+\alpha+\delta, 2\gamma+\beta+\delta, 2\delta+\alpha+\beta, 2\delta+\alpha+\gamma, 2\delta+\beta+\gamma \\
\alpha+\beta+\gamma+\delta,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta,\ \alpha+\beta+\gamma+\delta.
\end{gathered}$$

Da diese Gleichung von ungeradem Grade ist, so muss man bereits bei ihr Halt machen; in der That besitzt sie die reelle Wurzel $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, (welche dem ersten Coefficienten in Z mit geändertem Vorzeichen gleich und also nicht nur reell, sondern sogar rational ist, wenn die Coefficienten von Z rational sind). Aber man sieht leicht ein, dass jede Formel, welche den Werth von M' durch den entsprechenden Werth von u' rational ausdrückt, für $u' = \alpha+\beta+\gamma+\delta$ unbestimmt werden muss. Denn dieser Werth wird eine d r e i f a c h e Wurzel der Gleichung $U' = 0$, und es entsprechen ihm 3 Werthe von M', nämlich $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$, $(\alpha+\gamma)(\beta+\delta)$, $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$, welche sämmtlich irrational sein können. Offenbar aber kann eine rationale Formel in diesem Falle weder einen irrationalen Werth von M', noch drei von einander verschiedene Werthe liefern. Aus diesem Beispiele lässt sich zur Genüge ersehen, dass die Methode von *de Foncenex* nicht befriedigen kann, und dass, wenn man sie nach allen Richtungen hin vollständig machen will, man viel tiefere Untersuchungen in der Theorie der Elimination anstellen muss.

12.

Endlich behandelt *La Grange* unser Theorem in der Abhandlung: S u r l a f o r m e d e s r a c i n e s i m a g i n a i r e s d e s é q u a t i o n s; N o u v. M é m. d e l' A c a d. d e B e r l i n 1772, S. 222 ff. Dieser grosse Mathematiker bemühte sich vor Allem, die Lücken in *Euler*'s erstem Beweise auszufüllen, und wirklich hat er besonders das, was oben § 8 den zweiten und den vierten Einwurf ausmacht, so tief durchforscht, das nichts Weiteres zu wünschen bleibt; abgesehen davon, dass vielleicht bei seiner vorausgehenden

Behandlung der Eliminations-Theorie, auf welche sich die gesammte Untersuchung stützt, einige zweifelhafte Punkte zurückbleiben. — Den dritten Einwurf dagegen berührt er überhaupt nicht; ja auch seine ganze Untersuchung ist auf der Voraussetzung aufgebaut, jede Gleichung $m$ten Grades habe wirklich m Wurzeln.

Nachdem wir so ordentlich und genau alles bisher Veröffentlichte erwogen haben, hoffe ich, dass ein neuer auf völlig anderen Grundsätzen beruhender Beweis unseres überaus wichtigen Satzes den Kundigen erwünscht sein werde. Ich schreite zur Darlegung desselben.

13.

Hülfssatz. Bezeichnet m irgend eine positive ganze Zahl, so wird die Function $\sin\varphi . x^m - \sin m\varphi . r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi . r^m$ durch $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$ theilbar sein.

Beweis. Für $m = 1$ ist jene Function $= 0$ und also durch jeden beliebigen Factor theilbar; für $m = 2$ wird der Quotient $\sin\varphi$, und für jeden höheren Werth wird der Quotient

$$\sin\varphi . x^{m-2} + \sin 2\varphi . rx^{m-3} + \sin 3\varphi . r^2x^{m-4} + \ldots + \sin(m-1)\varphi . r^{m-2}.$$

Denn man beweist leicht, dass das Product aus dieser Function und aus $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$ der gegebenen Function gleich wird.

14.

Hülfssatz. Sind die Grösse r und der Winkel φ so bestimmt, dass die Gleichungen

$$\begin{aligned} &r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots \\ (1) \qquad &\qquad + Kr^2\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \\ &r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots \\ (2) \qquad &\qquad + Kr^2\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0 \end{aligned}$$

bestehen, dann wird die Function $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Kx^2 + Lx + M = X$ durch den quadratischen Factor $x^2 - 2\cos\varphi . rx + r^2$ theilbar sein, falls $r\sin\varphi$ nicht $= 0$ ist; ist aber $r\sin\varphi = 0$, dann wird dieselbe Function durch den linearen Factor $x - r\cos\varphi$ theilbar werden.

Beweis. I. Aus dem vorigen Paragraphen ergiebt sich, dass alle die folgenden Grössen durch $x^2 - 2\cos\varphi . xr + r^2$ theilbar sind:

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi . r x^m & - \sin m\varphi . r^m x & + \sin(m-1)\varphi . r^{m+1} \\
A\sin\varphi . r x^{m-1} & - A\sin(m-1)\varphi . r^{m-1} x & + A\sin(m-2)\varphi . r^m \\
B\sin\varphi . r x^{m-2} & - B\sin(m-2)\varphi . r^{m-2} x & + B\sin(m-3)\varphi . r^{m-1} \\
\dots & \dots & \dots \\
K\sin\varphi . r x^2 & - K\sin 2\varphi . r^2 x & + K\sin\varphi . r^3 \\
L\sin\varphi . r x & - L\sin\varphi . r x & \\
M\sin\varphi . r & & + M\sin(-\varphi) . r. \quad = 0
\end{array}$$

Folglich ist auch die Summe dieser Grössen durch $x^2 - 2.\cos\varphi . r\,x + r^2$ theilbar. Die ersten Summanden der einzelnen Grössen geben als Summe $\sin\varphi . r\,X$; die zweiten geben, wegen (2), summirt 0; dass ferner das Aggregat der dritten gleichfalls verschwinde, erkennt man leicht, wenn man (1) mit $\sin\varphi$, (2.) mit $\cos\varphi$ multiplicirt und jenes Product von diesem subtrahirt. Daraus folgt, dass die Function $\sin\varphi . r\,X$ durch $x^2 - 2\cos\varphi\; r\,x + r^2$ theilbar ist, und also, wenn nicht $r\sin\varphi = 0$ wird, auch die Function X selbst. W. z. b. w.

II. Sollte aber $r\sin\varphi = 0$ sein, so wird entweder $r = 0$ oder $\sin\varphi = 0$. Im ersten Falle wird $M = 0$, wegen (1); also ist X durch x oder durch $x - r\cos\varphi$ theilbar. Im zweiten Falle wird $\cos\varphi = \pm 1$, $\cos 2\varphi = +1$, $\cos 3\varphi = \pm 1$ und allgemein $\cos n\varphi = \cos\varphi^n$. Deshalb wird wegen (1) $X = 0$ für $x = r\cos\varphi$ werden, und daher die Function X durch $x - r.\cos\varphi$ theilbar sein. W. z. b. w.

15.

Der vorhergehende Satz wird meistens mit Hülfe imaginärer Grössen bewiesen, vergl. *Euler*: Introd. in Anal. Inf. T. I. S. 110; ich hielt es der Mühe für werth zu zeigen, wie er auf gleich leichte Art ohne Hülfe derselben abgeleitet werden könne. Hierdurch wird es jetzt offenbar, dass zum Beweise unseres Satzes nichts Anderes nöthig ist, als dass gezeigt werde: **Ist irgend eine Function X von der Form $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \dots + Lx + M$ gegeben, dann lassen sich r und φ so bestimmen, dass die Gleichungen (1) und (2) statt haben.** Denn hieraus folgt, dass X einen reellen Factor ersten oder zweiten Grades besitzt; die Division durch denselben liefert nothwendig einen reellen Quotienten geringeren Grades, welcher aus denselben Gründen wieder einen Factor ersten oder zweiten Grades haben wird. Durch die Fortsetzung dieses Verfahrens wird X endlich in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegt. Jenen Satz nun zu beweisen, ist das Ziel der folgenden Untersuchungen.

16.

Wir betrachten eine feste unendliche Ebene (die Ebene der Zeichnung, Fig. 1) und in ihr eine feste unendliche Gerade GC, die durch den festen Punkt C geht. Wir nehmen, um alle Strecken durch Zahlen ausdrücken zu können, eine willkürliche Länge als Einheit an, und errichten in einem beliebigen Punkte P der Ebene, für welchen der Abstand vom Centrum C gleich r und der Winkel $GCP = \varphi$ ist, eine Senkrechte, die gleich dem Werthe des Ausdruckes

$$r^m \sin m\varphi + A r^{m-1} \sin (m-1)\varphi + \ldots + L r \sin \varphi$$

ist. Diesen Ausdruck werde ich im Folgenden der Kürze halber stets durch T bezeichnen. Die Entfernung r betrachte ich stets als positiv, und für Punkte, welche auf der unteren Seite der Axe liegen, muss der Winkel φ entweder als zwei Rechte übertreffend oder, was auf dasselbe hinausläuft, als negativ angesehen werden. Die Endpunkte dieser Senkrechten, welche für einen positiven Werth von T oberhalb der Ebene, für einen negativen unterhalb, für einen verschwindenden in der Ebene selbst anzunehmen sind, bilden eine stetige, krumme, allseitig unbegrenzte Oberfläche, welche ich der Kürze halber im Folgenden die erste Oberfläche nennen werde. Durchaus in gleicher Weise möge auf dieselbe Ebene, dasselbe Centrum und dieselbe Axe eine andere Oberfläche bezogen werden, deren Höhe über jedem Punkte der Ebene gleich

$$r^m \cos m\varphi + A r^{m-1} \cos (m-1)\varphi + \ldots + L r \cos \varphi + M$$

sei; diesen Ausdruck werde ich der Kürze halber stets durch U bezeichnen. Auch diese Oberfläche wird stetig und allseitig unbegrenzt sein; ich werde sie von der obigen durch die Bezeichnung als zweite Oberfläche unterscheiden. Dann stellt sich unsere ganze Aufgabe offenbar so, zu beweisen, dass es mindestens einen Punkt gebe, der zugleich in der Ebene, in der ersten und in der zweiten Oberfläche liegt.

17.

Man erkennt leicht, dass die erste Oberfläche zum Theil oberhalb, zum Theil unterhalb der Ebene liegt; denn man kann ja die Entfernung r vom Centrum so gross annehmen, dass das erste Glied $r^m \sin m\varphi$ in T alles Folgende überwiegt; wird dann der Winkel φ passend bestimmt, dann kann dasselbe sowohl positiv als negativ werden. Deshalb muss die feste Ebene von der ersten Oberfläche geschnitten werden; diesen Schnitt der Ebene mit der ersten Oberfläche werde ich erste Linie benennen; sie wird also durch die Gleichung $T = 0$ bestimmt. Aus gleichen Gründen wird die Ebene von der zweiten Oberfläche geschnitten; der Schnitt bildet die durch die Gleichung $U = 0$ bestimmte Curve, welche ich zweite Linie nennen werde. Eigentlich werden beide Curven aus mehreren Zweigen bestehen, die von einander völlig getrennt sein können, einzeln aber stetige Züge bilden. Ja, die erste Linie wird stets eine sogenannte reductible sein, da die Axe GC als Theil dieser Curve zu betrachten ist; denn welchen Werth man dem r auch beilegt, T wird stets $= 0$ werden, wenn $\varphi = 0$ oder $= 180^\circ$ ist. Aber es ist vorzuziehen, die Gesammtheit aller Zweige, welche durch alle Punkte hindurchgehen, für die $T = 0$ ist, als eine einzige Curve anzusehen, wie dies in der höheren Geometrie auch allgemein Brauch ist; das Gleiche finde bei allen Zweigen statt, welche durch alle Punkte hindurchgehen, in denen $U = 0$ ist. Jetzt ist unsere Aufgabe offenbar darauf zurückgeführt, zu beweisen, dass in der Ebene mindestens ein Punkt existirt, in welchem einer der Zweige der ersten Linie von einem Zweige der zweiten Linie geschnitten wird. Zu diesem Zwecke ist es nöthig, den Verlauf dieser Linien näher zu betrachten.

18.

Vor allem bemerke ich, dass beide Curven algebraisch sind, und zwar, auf Orthogonal-Coordinaten bezogen, von $m$ter Ordnung. Nimmt man nämlich den Anfang der Abscissen in C an und rechnet die Richtung der Abscissen x nach G hin, die der Ordinaten y nach P hin, dann wird $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, und allgemein für jedes beliebige n

$$r^n \sin n\varphi = n x^{n-1} y - \frac{n(n-1)(n-2)}{1.2.3} x^{n-3} y^3 + \frac{n\ldots(n-4)}{1\ldots.5} x^{n-5} y^5 - \ldots$$

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n(n-1)}{1.2} x^{n-2} y^2 + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2.3.4} x^{n-4} y^4 - \ldots,$$

Deshalb bestehen T und U aus mehreren Gliedern der Form $a x^\alpha y^\beta$, wobei α, β ganze positive Zahlen bedeuten, deren Summme als höchsten Werth m besitzt. Es lässt sich übrigens leicht vorhersehen, dass alle Glieder von T den Factor y enthalten, so dass die erste Linie genau genommen aus der Geraden, deren Gleichung $y = 0$ ist, und aus einer Curve der Ordnung $m - 1$ zusammengesetzt ist; aber es ist nicht nöthig, hier auf diese Unterscheidung Rücksicht zu nehmen.

Von grösserer Bedeutung wird die Untersuchung darüber sein, ob die erste und die zweite Linie unendliche Schenkel besitzen, und von welcher Anzahl und von welcher Beschaffenheit diese sind. In unendlicher Entfernung vom Punkte C wird die erste Linie, deren Gleichung $\sin m\varphi + \frac{A}{r} \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{r^2}\sin(m-2)\varphi + \ldots = 0$ ist, mit derjenigen Linie zusammenfallen, deren Gleichung $\sin m\varphi = 0$ ist. Diese liefert nur m gerade Linien, die sich im Punkte C schneiden; die erste derselben ist die Axe GCG', die übrigen sind gegen diese unter den Winkeln $\frac{1}{m}180$, $\frac{2}{m}180$, $\frac{3}{m}180$, ... Grad geneigt. Folglich hat die erste Linie $2m$ unendliche Zweige, welche den Umfang eines mit unendlich grossem Radius beschriebenen Kreises in $2m$ gleiche Theile zerlegen, so dass sein Umfang vom ersten Zweige im Schnittpunkte des Kreises mit der Axe getroffen wird, vom zweiten in der Entfernung $\frac{1}{m}180^\circ$, vom dritten in der Entfernung $\frac{2}{m}180^\circ$, u. s. w. Aehnlich folgt, dass die zweite Linie in unendlicher Entfernung vom Centrum als Asymptote die durch die Gleichung $\cos m\varphi = 0$ dargestellte Curve hat. Diese besteht aus der Gesammtheit von m Geraden, welche sich ebenfalls im Punkte C unter gleichen Winkeln schneiden, doch so, dass die erste mit der Axe CG den Winkel $\frac{1}{m}90^\circ$ bildet, die zweite den Winkel $\frac{3}{m}90^\circ$, die dritte den Winkel $\frac{5}{m}90^\circ$ u. s. f. Deshalb besitzt auch die zweite Linie $2m$ unendliche Zweige, welche einzeln die Mitten zwischen je zwei benachbarten Zweigen der ersten Linie bilden, so dass sie die Peripherie des mit unendlich grossem Radius beschriebenen Kreises in Punkten schneiden, welche von der Axe um $\frac{1}{m}\,90^0$, $\frac{3}{m}\,90^0$, $\frac{5}{m}\,90^0$, ... abstehen. Uebrigens ist es ersichtlich, dass die Axe selbst stets zwei unendliche Zweige der ersten Linie bildet, nämlich den ersten und den $(m+1)$ ten. Aufs deutlichste wird diese Lage der Zweige durch die Figur 2 dargestellt, welche für den Fall $m=4$ construirt ist; hier sind die Zweige der zweiten Linie punktirt, damit sie von denen der ersten unterschieden werden können; dasselbe ist auch bei der vierten Figur festzuhalten*). Da aber diese Ergebnisse von der grössten Bedeutung sind, und unendliche Grössen einige Leser stören könnten, so will ich im folgenden Paragraphen zeigen, wie man dieselben Folgerungen auch ohne das Hülfsmittel unendlicher Grösse ziehen kann.

19.

Lehrsatz. Unter den obigen Voraussetzungen kann um den Mittelpunkt C ein Kreis beschrieben werden, auf dessen Umfang $2m$ Punkte liegen, in denen $T=0$ ist, und ebensoviele, in denen $U=0$ ist; die Lage derselben ist so, dass die einzelnen der zweiten Art zwischen je zweien der ersten Art liegen.

Es möge die Summe aller positiv genommenen Coefficienten $A, B, \ldots K, L, M$ gleich S sein; ferner werde R zugleich $> S\sqrt{2}$ und > 1 **) angenommen; dann behaupte ich, dass auf dem Kreise, welcher mit dem Radius R beschrieben ist, die in dem Lehrsatze angegebenen Verhältnisse eintreten. Der Kürze wegen bezeichnen wir mit (1) denjenigen Punkt seines Umfanges, welcher $\frac{1}{m}\,45^0$ vom Treffpunkte des Kreises mit der linken Seite der Axe absteht, für den also $\varphi=\frac{1}{m}\,45^0$ ist, ähnlich mit (3) denjenigen, welcher vom Treffpunkte $\frac{3}{m}\,45^0$ entfernt, für den

*) Die vierte Figur ist unter der Annahme $X=x^4-2x^2+3x+10$ construirt; an ihr können also Leser, welche mit allgemeinen und abstracten Untersuchungen weniger vertraut sind, die Lage beider Curven an einem concreten Beispiele anschauen. Die Länge der Linie CG ist $=10$ genommen ($CN=1{,}26255$).

**) Für $S>\sqrt{\frac{1}{2}}$ ist die zweite Bedingung in der ersten, für $S<\sqrt{\frac{1}{2}}$ die erste Bedingung in der zweiten enthalten.

also $\varphi = \frac{3}{m} 45^\circ$ ist; mit (5) den, für welchen $\varphi = \frac{5}{m} 45^\circ$ ist, ... bis zum Punkte $(8m - 1)$, welcher $\frac{8m-1}{m} 45^\circ$ von jenem Treffpunkte entfernt ist, falls man stets nach derselben Richtung fortschreitet, oder $\frac{1}{m} 45^\circ$, wenn man nach der entgegengesetzten Seite geht. Man hat also im Ganzen $4m$ Punkte auf dem Umfange, die um gleiche Abstände von einander entfernt sind. Dann wird zwischen $(8m - 1)$ und (1) ein Punkt liegen, für den $T = 0$ ist; je ein ähnlicher Punkt liegt zwischen (3) und (5); zwischen (7) und (9); zwischen (11) und (13), u. s. w.; ihre Anzahl beträgt $2m$. In derselben Weise liegen die einzelnen Punkte, in denen $U = 0$ ist, zwischen (1) und (3); zwischen (5) und (7); zwischen (9) und (11); ihre Anzahl beträgt daher auch $2m$. Ausser diesen $4m$ Punkten giebt es auf dem Umfange keine anderen, für welche T oder $U = 0$ wird.

Beweis. I. Im Punkte (1) wird $m\varphi = 45^\circ$, und also

$$T = R^{m-1}\left(R\sqrt{\tfrac{1}{2}} + A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \ldots + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right).$$

Die Summe $A \sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + \ldots$ kann sicher nicht grösser sein als S, und so muss sie kleiner werden als $R\sqrt{\tfrac{1}{2}}$; folglich ist der Werth von T in diesem Punkte sicher positiv. Um so mehr besitzt also T einen positiven Werth, wenn $m\varphi$ zwischen 45° und 135° liegt, d. h. T besitzt vom Punkte (1) bis zum Punkte (3) stets einen positiven Werth. Aus demselben Grunde hat T vom Punkte (9) bis zum Punkte (11) überall einen positiven Werth, und allgemein von irgend einem Punkte $(8k + 1)$ bis zu $(8k + 3)$, wobei k irgend welche ganze Zahl bedeutet. In ähnlicher Weise ist T überall zwischen (5) und (7), zwischen (13) und (15) u. s. w., und allgemein zwischen $(8k + 5)$ und $(8k + 7)$ negativ und kann also in allen diesen Intervallen nirgend $= 0$ sein. Weil nun aber in (3) dieser Werth positiv und in (5) negativ ist, muss er irgendwo zwischen (3) und (5) $= 0$ sein; ebenso irgendwo zwischen (7) und (9); zwischen (11) und (13) u. s. w. bis zum Intervall zwischen $(8m - 1)$ und (1) inclusive, so dass T im Ganzen in $2m$ Punkten $= 0$ wird.

II. Dass es ausser diesen $2m$ Punkten andere von gleicher Eigenschaft nicht giebt, erkennt man so. Da zwischen (1) und

(3), zwischen (5) und (7), u. s. w. keine existiren, so könnte es nur dann geschehen, dass noch mehr solche Punkte bestehen, wenn in irgend einem der Intervalle von (3) bis (5) oder von (7) bis (9) u. s. w. mindestens zwei solche lägen. Dann müsste aber T in demselben Intervall irgendwo ein Maximum oder ein Minimum, und also $\frac{dT}{d\varphi} = 0$ sein. Nun ist aber $\frac{dT}{d\varphi} = mR^{m-2}(R\cos m\varphi + \frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi + \ldots)$ und $\cos m\varphi$ ist zwischen (3) und (5) stets negativ und seinem Werthe nach $> \sqrt{\tfrac{1}{2}}$. Daraus folgt leicht, dass $\frac{dT}{d\varphi}$ in diesem ganzen Intervalle eine negative Grösse ist; ebenso ist es zwischen (7) und (9) beständig eine positive Grösse; zwischen (11) und (13) eine negative, u. s. w. In keinem von diesen Intervallen kann es also 0 sein, so dass die Annahme nicht richtig war. Folglich u. s. w.

III. Durchaus auf gleiche Weise wird gezeigt, das U überall zwischen (3) und (5) einen negativen Werth besitzt, ebenso zwischen (11) und (13) u. s. w., und allgemein zwischen $(8k+3)$ und $(8k+5)$; einen positiven dagegen zwischen (7) und (9), zwischen (15) und (17) u. s. w. und allgemein zwischen $(8k+7)$ und $(8k+9)$. Hieraus ergiebt sich sofort, dass U irgendwo zwischen (1) und (3), zwischen (5) und (7) u. s. w., d. h. im ganzen in $2m$ Punkten $= 0$ werde. In keinem von diesen Intervallen kann $\frac{dU}{d\varphi} = 0$ sein, (was leicht in ähnlicher Weise wie oben bewiesen wird); folglich kann es auf dem Umfange des Kreises nicht mehr als jene $2m$ Punkte geben, in denen $U = 0$ wird.

Uebrigens kann der Theil des Lehrsatzes, gemäss dem es nicht mehr als $2m$ Punkte geben kann, in denen $T = 0$, und nicht mehr als $2m$ Punkte, in denen $U = 0$ wird, auch dadurch bewiesen werden, dass man die Gleichungen $T = 0$, $U = 0$ als Curven $n$ter Ordnung deutet, welche von einem Kreise, als von einer Curve zweiter Ordnung in nicht mehr als $2m$ Punkten geschnitten werden können, wie dies aus der höheren Geometrie bekannt ist.

20.

Wenn ein anderer Kreis mit grösserem Radius als R um denselben Mittelpunkt beschrieben und auf dieselbe Weise getheilt wird, so liegt auch hier zwischen den Punkten (3) und (5) ein einziger Punkt, in dem $T = 0$ ist, ebenso zwischen (7) und (9) u. s. w., und man sieht leicht ein, dass derartige Punkte zwischen (3) und (5) in beiden Umfängen um so näher an einander liegen müssen, je weniger der Radius des grösseren Kreises vom Radius R verschieden ist. Dasselbe findet auch statt, wenn der Kreis mit einem Radius beschrieben wird, der etwas kleiner als R, aber doch grösser als $S\sqrt{2}$ und 1 ist. Hieraus erkennt man sofort, dass der Umfang des mit dem Radius R beschriebenen Kreises in demjenigen Punkte zwischen (3) und (5), in welchem $T = 0$ ist, von einem Zweige der ersten Linie auch wirklich geschnitten werde; dasselbe gilt von den übrigen Punkten, in denen $T = 0$ ist. Ebenso ist es einleuchtend, dass der Umfang dieses Kreises in allen $2m$ Punkten, in denen $U = 0$ ist, von irgend einem Zweige der zweiten Linie geschnitten werde. Diese Resultate können auch folgendermaassen ausgedrückt werden: Beschreibt man einen Kreis von hinlänglicher Grösse um das Centrum C, so treten $2m$ Zweige der ersten Linie und ebensoviele Zweige der zweiten Linie in denselben ein, und zwar so, dass je zwei benachbarte Zweige der ersten Linie durch einen Zweig der zweiten Linie von einander getrennt werden. Vergl. Fig. 2, wo der Kreis schon nicht mehr von unendlicher, sondern von endlicher Grösse wird; die den einzelnen Zweigen beigefügten Zahlen dürfen nicht mit denjenigen verwechselt werden, durch welche ich im vorhergehenden und in diesem Paragraphen der Kürze halber gewisse Grenzpunkte auf dem Umfange bezeichnet habe.

21.

Nun lässt sich aus der gegenseitigen Lage der in den Kreis eintretenden Zweige der Schluss, dass innerhalb des Kreises ein Schnitt eines Zweiges der ersten mit einem Zweige der zweiten Linie vorhanden sein müsse, auf so viel verschiedene Arten ziehen, dass ich fast nicht weiss, welche Methode an erster Stelle vor den übrigen zu bevorzugen sei. Die folgende scheint mir am einleuchtendsten zu sein: Wir bezeichnen (Fig. 2) denjenigen Punkt des Kreisumfanges, in welchem derselbe von der linken Seite der Axe geschnitten wird (die Axe selbst ist einer der $2m$ Zweige der ersten Linie), mit 0; den benachbarten Punkt, in dem ein Zweig der zweiten Linie eintritt, mit 1; den diesem benachbarten Punkt, in dem der zweite Zweig der ersten Linie eintritt, mit 2, u. s. f. bis zu $4m - 1$; in jedem mit gerader Zahl bezeichneten Punkte tritt also ein Zweig der zweiten Linie in den Kreis ein, dagegen in allen durch eine ungerade Zahl bezeichneten ein Zweig der ersten Linie. Nun ist aus der höheren Geometrie bekannt, dass jede algebraische Curve (oder jeder einzelne Theil einer algebraischen Curve, wenn dieselbe zufällig aus mehreren zusammengesetzt ist) entweder in sich zurückläuft, oder nach beiden Seiten ins Unendliche ausläuft, und dass also, wenn ein Zweig einer algebraischen Curve in einen begrenzten Raum eintritt, er nothwendig aus demselben wieder heraustreten muss.*) Hieraus schliesst man leicht, dass jeder durch eine gerade Zahl bezeichnete Punkt, oder kürzer **jeder gerade Punkt** mit einem anderen geraden Punkte durch einen, innerhalb des Kreises verlaufenden Zweig der ersten Linie verbunden sein muss, und in gleicher Weise jeder durch eine ungerade Zahl bezeichnete Punkt mit einem anderen ähnlichen Punkte durch einen Zweig der zweiten Linie. Obschon nun diese Verbindung von je zwei Punkten je nach der Natur der Function X überaus

*) Wie mir scheint, ist es wohl hinreichend sicher bewiesen, dass eine algebraische Curve weder plötzlich irgendwo abbricht (wie dies z. B. bei der transcendenten Curve geschieht, deren Gleichung $y = \frac{1}{\log x}$ ist), noch sich nach unendlich vielen Umläufen gewissermaassen in einem Punkte verlieren kann (wie die logarithmische Spirale); und soviel ich weiss, hat Niemand hiergegen einen Zweifel vorgebracht. Doch werde ich, wenn es Jemand fordert, bei anderer Gelegenheit unternehmen, einen keinem Zweifel unterworfenen Beweis zu liefern. Im gegenwärtigen Falle ist es übrigens offenbar, dass, wenn ein Zweig, z. B. 2 nirgends aus dem Kreise austreten würde (Fig. 3), man zwischen 0 und 2 in den Kreis eintreten, dann um diesen ganzen Zweig, der sich ja in der Kreisfläche verlieren muss, herumgehen und endlich zwischen 2 und 4 wieder aus dem Kreise austreten könnte, ohne auf dem ganzen Wege irgendwo auf die erste Linie zu treffen. Dies ist aber offenbar widersinnig, weil man in dem Punkte, in welchem man in den Kreis eintrat, die erste Oberfläche über sich hat, beim Austritte dagegen unter sich, deshalb musste man irgendwo auf die erste Oberfläche treffen, d. h. also auf einen Punkt der ersten Linie. — Uebrigens folgt aus diesem Schlusse, der sich auf die Principien der Geometrie der Lage stützt, welche nicht minder beweiskräftig sind als die Principien der Geometrie der Grössen, lediglich, dass, wenn man auf einem Zweige der ersten Linie in den Kreis eintritt, man ihn an einer anderen Stelle verlassen kann, indem man immer auf der ersten Linie bleibt, aber nicht, dass der Weg eine stetige Linie in dem Sinne sei, welcher in der höheren Geometrie gilt. Allein hier reicht es aus, dass der Weg eine stetige Linie im allgemeinen Sinne, d. h. nirgends unterbrochen, sondern überall zusammenhängend sei.

verschieden sein kann, so dass sie sich für den allgemeinen Fall nicht bestimmen lässt, so ist es doch leicht zu zeigen, dass, wie jene Verbindung auch sein möge, stets ein Schnitt der ersten mit der zweiten Linie entstehen wird.

22.

Der Beweis dieser Nothwendigkeit lässt sich am besten auf indirectem Wege führen. Wir wollen nämlich annehmen, dass der Zusammenhang von je zweien aller geraden Punkte und von je zweien aller ungeraden Punkte so angeordnet werden könne, dass dabei kein Schnitt eines Zweiges der ersten mit einem solchen der zweiten Linie entsteht. Da die Axe ein Theil der ersten Linie ist, so wird offenbar der Punkt 0 mit dem Punkte $2m$ verbunden sein. Der Punkt 1 kann also mit keinem jenseits der Axe gelegenen Punkte verbunden sein, d. h. mit keinem, der durch eine höhere Zahl als $2m$ bezeichnet ist, da sonst die Verbindungslinie nothwendigerweise die Axe schneiden würde. Setzen wir also voraus, dass 1 mit dem Punkte n verbunden sei, so wird $n < 2m$ sein. In ähnlicher Weise folgt aus der Annahme, dass 2 mit n' verbunden sei, $n' < n$, weil sonst der Zweig $2 \ldots n'$ nothwendigerweise den Zweig $1 \ldots n$ schneiden müsste. Aus demselben Grunde wird 3 mit einem zwischen 4 und n' liegenden Punkte verbunden sein, und es ist klar, dass, wenn man voraussetzt, 3, 4, 5, ... seien mit n'', n''', n'''', ... verbunden, dass n''' zwischen 5 und n'' liegt, n'''' zwischen 6 und n''', u. s. f. Daraus ist es ersichtlich, dass man endlich zu einem Punkte h kommen wird, der mit dem Punkte $h + 2$ verbunden ist. Dann muss der Zweig, der im Punkte $h + 1$ in den Kreis eintritt, nothwendig den die Punkte h und $h + 2$ verbindenden Zweig schneiden. Da aber der eine dieser beiden Zweige zur ersten, der andere zur zweiten Linie gehört, so folgt daraus, dass die Voraussetzung widersinnig ist, und dass also nothwendig irgendwo ein Schnitt der ersten mit der zweiten Linie stattfindet.

Verbindet man dieses Resultat mit den vorhergehenden, so ergiebt sich aus allen den dargelegten Untersuchungen der strenge Beweis des Satzes, dass jede ganze rationale algebraische Function einer Unbestimmten in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden könne.

23.

Es ist übrigens nicht schwer, von denselben Grundlagen aus herzuleiten, dass es nicht allein einen, sondern mindestens m Schnitte der ersten mit der zweiten Linie giebt, obwohl es auch möglich ist, dass die erste Linie von mehreren Zweigen der zweiten Linie in demselben Punkte geschnitten wird; in diesem Falle wird die Function X mehrere gleiche Factoren besitzen. Doch da es hier genügt, die Nothwendigkeit des einmaligen Schneidens bewiesen zu haben, so verweile ich der Kürze halber nicht ausführlicher bei dieser Sache. Aus demselben Grunde verfolge ich auch hier nicht eingehender noch andere Eigenschaften dieser Linien, wie z. B. dass der Schnitt stets unter rechten Winkeln stattfindet; oder dass, wenn mehrere Züge beider Curven in demselben Punkte zusammentreffen, ebensoviel Züge der ersten wie der zweiten Linie vorhanden sein werden; dass diese abwechselnd gelegen sind; dass sie sich unter gleichen Winkeln schneiden u. s. w.

Endlich bemerke ich, dass es durchaus nicht unmöglich ist, den vorhergehenden Beweis, welchen ich hier auf geometrische Principien aufgebaut habe, auch in rein analytischer Form zu geben; doch ich glaubte, dass die Darstellung, welche ich hier entwickelt habe, weniger abstract werden, und dass der wahre Nerv des Beweises hier viel klarer vor Augen treten würde, als sich dies bei einem analytischen Beweise erwarten liess.

Zum Schluss will ich noch eine andere Beweismethode für unser Theorem andeuten, welche auf den ersten Blick nicht allein von dem vorhergehenden Beweise, sondern auch von allen übrigen oben erwähnten Beweisen vollkommen verschieden zu sein scheint, welche aber nichts desto weniger im wesentlichen mit der *d'Alembert*'schen übereinstimmt. Den Kundigen empfehle ich, diese mit jener zu vergleichen und den Parallelismus zwischen beiden klarzustellen; denn in Rücksicht auf sie ist der Beweis einzig hinzugefügt.

24.

Ich nehme an, dass die erste und die zweite Oberfläche genau so wie oben über der Ebene der Figur 4, bezogen auf die Axe CG und den festen Punkt C, beschrieben seien. Man nehme irgend einen Punkt in einem Zweige der ersten Linie, d. h. ein solchen Punkt, in dem $T = 0$ ist (z. B. irgend einen auf der Axe gelegenen Punkt), und schreite, falls in demselben

3*

nicht auch $U = 0$ ist, von diesem Punkte auf der ersten Linie nach derjenigen Richtung fort, in welcher die absolute Grösse von U abnimmt. Wenn zufällig im Punkte M die absolute Grösse von U nach beiden Seiten hin abnehmen sollte, dann ist es gleichgültig, nach welcher Seite man fortschreitet; was aber zu thun sei, wenn U nach beiden Seiten hin wächst, werde ich sogleich angeben. Es ist offenbar, dass, wenn man immer auf der ersten Linie fortschreitet, man an einen Punkt wird kommen müssen, wo $U = 0$ ist, oder an einen solchen, in dem der Werth von U ein Minimum wird; dies sei z. B. der Punkt N. Im ersten Falle hat man erreicht, was gefordert wurde; im zweiten lässt sich zeigen, dass sich in diesem Punkte mehrere Zweige der ersten Linie schneiden, und zwar eine gerade Anzahl von Zweigen, von denen die Hälfte so beschaffen ist, dass, wenn man in einen derselben nach einer beliebigen Seite hin abbiegt, der Werth von U noch weiter abnimmt. (Da der Beweis dieses Satzes eher weitläufig als schwierig ist, muss ich ihn der Kürze halber unterdrücken.) In diesem Zweige kann man wiederum fortschreiten, bis U entweder $= 0$ wird, (wie dies in Figur 4 bei P eintrifft), oder von neuem ein Minimum. Dann wird man wieder abbiegen, und so muss man endlich zu einem Punkte kommen, in welchem $U = 0$ ist.

Gegen diesen Beweis könnte der Zweifel erhoben werden, ob es nicht möglich sei, dass, wie weit man auch fortschreitet, und obwohl der Werth von U beständig abnimmt, doch die Abnahme beständig schwächer wird, und jener Werth gleichwohl keine Grenze erreicht; dieser Einwurf würde dem vierten, in § 6 gemachten entsprechen. Aber es würde nicht schwer sein, eine Grenze anzugeben, nach deren Ueberschreiten der Werth von U immer stärkere Aenderungen erfährt und nicht weiter abnehmen kann, so dass der Werth 0 erreicht sein muss, bevor man jene Grenze erreicht. Aber dies, sowie das Uebrige, was ich in diesem Beweise nur andeuten konnte, behalte ich mir zu ausführlicher Auseinandersetzung für eine andere Gelegenheit vor.

Die Grundzüge dieses Beweises entdeckte ich zu Beginn des Oct. 1797.

Figuren zum ersten Beweise.

Fig. 1.

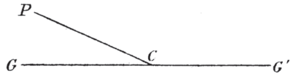


Fig. 2.

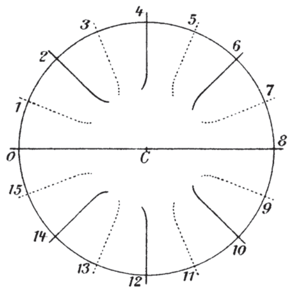


Fig. 4.

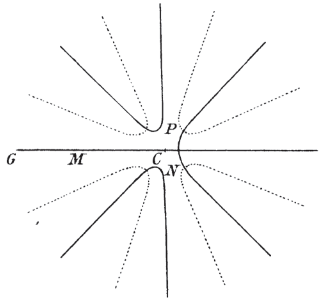
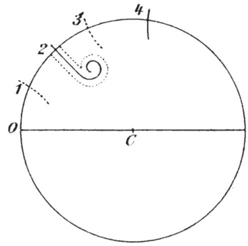
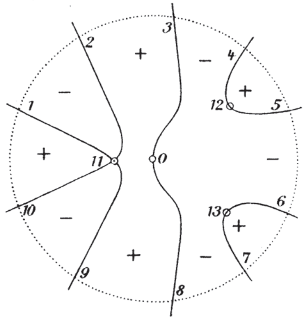


Fig. 3.



Figur zum vierten Beweise.



Verlag v. Wilhelm Engelmann in Leipzig u. Berlin. Lith. Anst. v. E. A. Funke, Leipzig.

2. Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, nebst astr. Beobachtungen, vom Herrn Professor Gauß in Göttingen. Aus dem Lateinischen übersetzt vom Hrn. Prof. Harding daselbst und unterm 29. May 1809 eingesandt

In: Astronomisches Jahrbuch für das Jahr 1812, Berlin 1809, S. 129–143.

Original:
Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat simulque praelectiones suas proximo semestri habendas indicat D. Carolus Fridericus Gauss. Göttingen 1808, 19 S. In: Gauß Werke 6, S. 37–49.

		M. Z. in Marseille.	AR.	Decl.
1808. Juny	26.	10° 1′ 56″	65° 18′ 32″ . . .	61° 26′
—	28.	10 57 13	81 8 21 . . .	63 2
—	29.	11 27 23	89 41 16 . . .	63 12
—	30.	11 59 6	98 37 35 . . .	62 37
July	1.	12 29 19	107 11 16 . . .	61 27
—	2.	12 56 40	115 1 43 . . .	59 44
—	3.	13 20 23	121 57 32 . . .	57 38

Ich habe hieraus Elemente berechnet, die die beiden äuſseren Beobachtungen genau darstellen, und den 30. Juny die Länge 15″ gröſser, die Breite 43″ kleiner geben als die Beobachtung; da die Beobachtungen, vorzüglich die Declinationen, nicht sehr fein zu seyn scheinen, so habe ich eine gröſsere Annäherung nicht zu erhalten gesucht.

Durchgangszeit durchs Perihel 1808. July. 12,17418 Paris.
Aufsteigender Knoten . . . . . . 24° 11′ 14″,5
Neigung der Bahn 39 18 59
Länge des Perihels 252 38 50
Log. des kleinsten Abstandes . . 9,783870
— der mittl. tägl. Bewegung . 0,284323
Richtung des Laufs gegen die Ordnung der Zeichen.

Neue Methode, aus der Höhe zweier Sterne die Zeit und die Polhöhe zu bestimmen, nebst astr. Beobachtnngen, vom Herrn Professor *Gauſs* in Göttingen.

Aus dem lateinischen übersetzt vom Hrn. Prof. *Harding* daselbst, und unterm 29. May 1809 eingesandt.

Bekanntlich pflegen reisende Astronomen zu geographischen Ortsbestimmungen sich gewöhnlich der Sonnenbeobachtungen zu bedienen, und aus correspondirenden Höhen derselben die Zeit, so wie aus ihren Höhen im oder nahe beim Meridian die Polhöhe zu bestimmen. In der That empfehlen sich diese Beobachtungen, von mehrern Seiten, vorzüglich wenn man sich eines Spiegelsextanten zu den Höhenmessungen bedient, da sich mit demselben die Höhen der Sonne viel schärfer als die der Sterne messen lassen, und die Ablesung vom Limbus bei Tage leichter, als bei Nacht ist; auch ist die Berechnung der Sonnenhöhen im und nahe beim Meridian so einfach, daſs sie selbst dem nicht schwierig seyn kann, der auch nur wenige mathematische Kenntnisse besitzt. Selbst wenn ungünstige Witterung nicht gestattet, correspond. Sonnenhöhen zu erhalten, so läſst sich der Stand der Uhr durch Combination der vom Mittage entlegenen Höhen, und auch die Polhöhe mittelst indirecter Methoden, z. B. der Douwes'schen, leicht herleiten.

Bei allen diesen entschiedenen Vorzügen der ☉Beobachtungen würde man doch Unrecht haben, wenn man die Sternhöhen ganz vernachlässigen wollte. Sehr oft heitert sich der Himmel bei einbrechender Nacht erst auf, oder verstattet doch wenigstens auf kurze Zeit, Sternhöhen zu messen; oft erlaubt auch die Zeit dem Reisenden nicht, sich bei Tage aufzuhalten, und er würde sich daher um die Geographie schon verdient machen können, wenn er die Lage des Orts, wo er übernachtet, aus Sternbeobachtungen zu bestimmen die erforderliche Fertigkeit besässe. Nimmt man hiezu noch die Unsicherheit der Beobachtungen, die der niedrige Stand der Sonne zur Winterzeit unvermeidlich macht, so wie die Unbequemlichkeit, die der Beobachter durch das Andrängen neugieriger Zuschauer oder durch die Erschütterungen seines künstlichen Horizonts von vorüberfahrenden Wägen erfährt, welches alles bei stiller Nacht gröſstentheils wegfällt, so wird man den Sternbeobachtungen immer einen nicht unbedeutenden Werth zugestehen müssen.

Vorzüglich empfehlen sich diese Beobachtungen auch den Seefahrern, denen es von der äuſsersten Wichtigkeit für

für die Erhaltung ihres Schiffes und oft ihres Lebens selbst ist, den Ort des Schiffes wo möglich alle Tage auszumitteln. Zwar hat es auf dem Meere immer einige Schwierigkeit, den wahren Horizont bei dunkler Nacht mit erforderlicher Genauigkeit zu erkennen: allein ein Fernrohr mit starker Oeffnung, das man an den Sext. anbringen kann, wird diesem Hindernisse leicht abhelfen.

2.

Ein anderer sehr wesentlicher Vortheil dieser Methode besteht darin, daſs sich innerhalb weniger Minuten sowohl die Polhöhe als auch die Zeit mit ungemeiner Schärfe bestimmen läſst. Hierzu wird nichts weiter erfordert, als die Höhe zweier Sterne, deren Position bekannt ist, zu messen, und die Zeit der Messungen, welche die Uhr angiebt, zu bemerken: der tägliche Gang der Uhr braucht nur so weit bekannt zu seyn, daſs sich daraus die Zwischenzeit der Beobachtungen mit Genauigkeit in Sternzeit verwandeln läſst.

Ohnstreitig ist dieses Problem eins der nützlichsten in der nautischen Astronomie, und es ist daher zu verwundern, daſs kein einziger von den Schriftstellern, die diese Wissenschaft vorgetragen haben, sich über dasselbe auslässt. Zwar lehrt Herr Kraft, (*Act. nov. Acad. Petrop. T. XIII.*) aus zweier Sterne Höhen die Polhöhe zu bestimmen: aber sonderbar genug schränkt er dieses allgemeine Problem durch die specielle Bedingung ein, daſs beide Höhen in einem und demselben Momente gemessen werden sollen. Dadurch werden also nothwendig zwei Beobachter, zwei Meſswerkzeuge und zugleich die genaueste Uebereinstimmung in den Beobachtungen erfordert, Voraussetzungen, denen nicht so leicht ein Genüge geleistet werden kann. Ueberdies ist aber auch diese Bedingung ganz überflüssig, indem jedes wohl ausgerüstete Schiff doch gewiſs mit einer Uhr versehen seyn wird, auf deren Gang man sich innerhalb weniger Minuten verlassen kann, auch das Schiff in so kurzer Zeit seinen geographischen Ort nicht merklich verändert, und endlich die ganze Aufgabe durch jene Bedingung, in Rücksicht der Rechnung um nichts vereinfacht wird.

3.

Es läſst sich leicht zeigen, daſs das Problem, wie es Hr. Kraft abgehandelt hat, auch so ausgedrückt werden könne: „Aus der gegebenen Lage zweier Punkte auf der Kugeloberfläche in Beziehung auf einen gröſsten Kreis (der hier der Aequator ist) die Lage eines dritten Punkts zu finden, dessen Abstände von jenen Punkten gegeben sind." Die ersten beiden Punkte giebt nehmlich die Position der beiden an der Himmelskugel beobachteten Sterne, deren gerade Aufsteigung und Abweichung als bekannt voraus gesetzt wird; der dritte Punkt ist das Zenith des Beobachtungsorts, dessen Declination der Polhöhe gleich ist, und dessen gerade Aufsteigung der kulminirende Punkt des Aequators, folglich auch zugleich die Sternzeit bestimmt Hiernach beruhet also diese Aufgabe auf der Auflösung dreier sphärischer Dreiecke; das erste liegt zwischen den beiden gegebenen Punkten und dem Pole des Aequators, worin zwei Seiten nebst dem eingeschlossenen Winkel gegeben sind, und wodurch die dritte Seite und einer der beiden übrigen Winkel gefunden werden. Das zweite Dreieck schliessen jene beiden gegebenen und der gesuchte Punkt ein: in diesem sind bereits alle drei Seiten bekannt, und es wird daraus ein Winkel abgeleitet, und zwar entweder der am ersten, oder der am zweiten Punkte, je nachdem man in dem ersten Dreiecke als gesuchten Winkel den am ersten, oder den am zweiten Punkte gewählt hatte. Die Summe oder Differenz dieser beiden Winkel bestimmt einen Winkel im 3ten Dreiecke, welches der erste und dritte Punkt und der Pol des Aequators einschliessen, und worin auſser jenem Winkel noch zwei Seiten bekannt sind. Hieraus findet sich demnach noch der Winkel am Pole und des dritten Punktes Abstand vom Pole (welcher dem Complemente der Polhöhe gleich ist.)

Schon im 16. Jahrhunderte machten die Astronomen von dieser Aufgabe Gebrauch, s. unter andern *Tychonis Astron.*

Astron. instaur. progym. P. 221. etc. wo die Position vieler Sterne aus dem Abstande von zwei bekannten Sternen bestimmt wird.

Man sieht zugleich leicht aus obiger Darstellung, daſs dieses Problem jedesmal zwei Auflösungen zuläſst: denn zieht man aus zwei gegebenen Punkten der Kugelfläche mit den Halbmessern, die den gegebenen Abständen derselben gleich sind, zwei Kreise, so werden sich diese jedesmal in zwei Punkten schneiden, in deren jedem der gesuchte Punkt liegen kann. Hieraus kann jedoch bei der Anwendung keine Zweideutigkeit entstehen: denn gedenkt man sich durch den ersten und zweiten Punkt einen gröſsten Kreis gelegt, der also der Kugel Oberfläche in zwei Halbkugeln theilt, so kann weiter kein Zweifel obwalten, ob der dritte Punkt (das Zenith) und der Nordpol in der nehmlichen Halbkugel oder in verschiedenen liegen, und es ist klar, daſs der erste Fall statt finden müsse, wenn der Ueberschuſs der geraden Aufsteigung desjenigen Sterns, welcher dem andern zur linken beobachtet wurde, über die gerade Aufsteigung des andern Sterns (nachdem erstere *AR* nöthigenfalls um 360° vermehrt ist) zwischen 0° und 180° fällt, der zweite Fall hingegen eintritt, wenn derselbe Ueberschuſs zwischen 180° und 360° fällt.

Uebrigens ist gerade diese in der Natur der Sache liegende Zweideutigkeit des Problems als die Ursache der etwas weitläuftigen Rechnungen anzusehen, auf welche die directe Auflösung desselben führt: es soll aber weiter unten gezeigt werden, wie diese sich merklich abkürzen läſst. Will man aber lieber eine indirecte Auflösung vorziehen, so läſst sich diese ungemein geschmeidig machen, wie ich bei einer andern Gelegenheit zeigen werde.

Das bisher gesagte bezieht sich auf den besondern Fall, wenn beide Beobachtungen gleichzeitig sind; allgemein aber läſst es sich folgendermaaſsen darstellen: anstatt des zweiten beobachteten Sterns denke man sich einen Punkt an der Himmelskugel, der mit diesem zweiten Stern einerlei Abweichung, hingegen eine um so viel geringere *AR* habe, als die Sternzeit beträgt, die zwischen beiden Beob-

ach-

achtungen verflossen ist. Es ist klar, daſs dieser eingebildete Stern zur Zeit der ersten Beobachtung dieselbe Höhe erreicht haben würde, die der wirklich beobachtete Stern im Augenblicke der zweiten Beobachtung hatte. Hieraus ergiebt sich also, daſs man, wenn man den eingebildeten Stern für den wirklichen setzt, die Rechnung auf den Fall der gleichzeitigen Beobachtung zurück geführt sey.

Dieses alles beruhet auf rein geometrischen, freilich ganz einfachen Betrachtungen: es wird aber ohne Zweifel manchem angenehm seyn, eine directe Auflösung dieses Problems auf blos analytischem Wege entwickelt zu sehen, wodurch sich aufs neue bestätigen wird, daſs alle Wahrheiten, welche aus geometrischen Betrachtungen abgeleitet werden, eben so zierlich mit Hülfe der Analyse entdeckt werden können, wenn diese nur auf die rechte Art behandelt wird.

4.

Es sey ϕ die Polhöhe, α und α' die gerade Aufsteigung, δ und δ' die Declination der beiden Sterne, γ und γ' die gerade Aufsteig. der kulminirenden Punkte des Aequators im Augenblicke der ersten und zweiten Beobachtung, oder welches einerlei ist, die in Grade verwandelten Sternzeiten selbst; h die beobachtete Höhe des ersten, h' die des zweiten Sterns *), woraus also folgt, daſs $\gamma - \alpha$ und $\gamma' - \alpha'$ die den beiden Beobachtungen zugehörigen Stundenwinkel sind. Man setze ferner $\gamma - \alpha = \lambda$; $\gamma' - \alpha' = \lambda' - \theta$, woraus $\theta = \alpha' - \alpha + (\gamma' - \gamma)$ und folglich bekannt ist, weil $\gamma' - \gamma$ die in Grade verwandelte Sternzeit zwischen beiden Beobachtungen ist.

*) In der monatl. Correspondenz Febr. 1809. woselbst sich ein kurzer Auszug aus dieser Abhandlung befindet, ist dieses Problem so vorgestellt, als würden dazu *gleiche* Höhen der Sterne erfordert. Daſs dies aber durchaus nicht der Fall sey, ergiebt sich schon aus der verschiedenen Bezeichnung, die der Hr. Verfasser beiden Höhen gegeben hat. Uebrigens würde diese Methode durch eine solche Forderung auch vieles von ihrer Bequemlichkeit und Brauchbarkeit verlieren. *H.*

ist. Hiernach beruhet also die Auflösung dieses Problems auf die Entwickelung folgender beiden Gleichungen:

1) $\sin h = \sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos\lambda$

2) $\sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\delta' \cos\varphi \cos(\lambda - \theta)$.

Die Eliminirung einer der beiden unbekannten Grössen λ oder φ würde auf eine sehr verwickelte Gleichung führen; Herr Kraft hat in der oben angeführten Dissertation diesen Weg gewählt, aber seine Auflösung ist meiner Meinung nach ungleich weitläuftiger und mühsamer als diejenige, welche unmittelbar aus der Betrachtung dreier Dreiecke hervorgeht, obgleich sie sich bloſs auf die Bestimmung von φ einschränkt, und sich auf die Bestimmung der Zeit nicht einläſst. Es ist daher besser, beide φ und λ mit Hülfe einer neuen unbekannten Grösse zu eliminiren: zu deren schicklichen Wahl folgende Bemerkung den Weg vorzeichnet. Es ist nehmlich offenbar

$$(\sin\delta \sin\varphi + \cos\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2 + (\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2$$
$$= \sin\varphi^2 + \cos\varphi^2 \cos\lambda^2 = 1 - \cos\varphi^2 \sin\lambda^2$$

und daher zufolge der Gleichung 1)

$$\frac{(\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda)^2}{\cos h} + \frac{(\cos\varphi \sin\lambda)^2}{\cos h} = 1.$$

Man kann daher setzen

3) $\dfrac{\cos\delta \sin\varphi - \sin\delta \cos\varphi \cos\lambda}{\cos h} = \cos u$

4) $\dfrac{\cos\varphi \sin\lambda}{\cos h} = \sin u$

Verbindet man nun die Gleichungen 3 und 1, so folgt

5) $\sin\varphi = \sin\delta \sin h + \cos\delta \cos h \cos u$

6) $\cos\varphi \cos\lambda = \cos\delta \sin h - \sin\delta \cos h \cos u$.

Man gebe ferner der Gleichung 2 folgende Gestalt

$$\sin h' = \sin\delta' \sin\varphi + \cos\theta \cos\delta' \cos\varphi \cos\lambda + \sin\theta \cos\delta' \cos\varphi \sin\lambda.$$

und setze für $\sin\varphi$; $\cos\varphi \cos\lambda$; $\cos\varphi \sin\lambda$; ihre Werthe aus 5, 6, 4, so findet sich

$$\sin h' - \sin h \sin\delta \sin\delta' - \sin h \cos\theta \cos\delta \cos\delta' - \cos u \cos h \cos\delta \sin\delta' + \cos u \cos h \cos\theta \sin\delta \cos\delta' + - \sin u \cos h \sin\theta \cos\delta' = 0.$$

Diese Gleichung verwandelt sich, wenn man setzt

7) $\dfrac{\cos\delta \sin\delta' - \cos\theta \sin\delta \cos\delta'}{\sin\theta \cos\delta'} = \operatorname{cotang} \nu$

in

in folgende

$$\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \theta \cos \delta \cos \delta' - \cos h \sin \theta \cos \delta' . (\cos u \operatorname{cotang} \nu + \sin u) = 0.$$

Macht man ferner $\nu - u = w$, so hat man

$$8) \cos w = \frac{\sin \nu (\sin h' - \sin h \sin \delta \sin \delta' - \sin h \cos \theta \cos \delta \cos \delta')}{\cos h \sin \theta \cos \delta'}$$

woraus also w, und auch $u = \nu - w$ bekannt wird.

Nachdem der Winkel u gefunden worden ist, läſst sich nun auch λ aus der Verbindung der Gleichungen 4 und 6 leicht herleiten, woraus sich ergiebt

$$9) \operatorname{tang} \lambda = \frac{\cos h \sin u}{\cos \delta \sin u - \sin \delta \cos h \cos u}$$

Ist aber λ bekannt, so ergiebt sich auch $\gamma = \alpha + \lambda$, und wenn man diesen Winkel in Zeit verwandelt, so hat man den Stand der Uhr. Aus der Verbindung der Gleichungen 4 und 5 endlich ergiebt sich

$$10) \operatorname{tang} \phi = \frac{\sin \lambda (\sin \delta \sin h + \cos \delta \cos h \cos u)}{\cos h \sin u}$$

Mit dieser Formel kann man noch die Gleichung 4 verbinden, so hat man zugleich eine Controle, wodurch die Richtigkeit der Rechnung geprüft wird.

5.

Ueber die im voranstehenden Artikel gelehrte Auflösung bemerke ich noch folgendes: Da der Winkel w nach der Formel 8 durch den Cosinus gefunden wird, so sind für ihn zwei Werthe, ein positiver und ein negativer, möglich, und die Aufgabe läſst mithin eine doppelte Auflösung zu, wie bereits oben bemerkt worden ist: es läſst sich aber auf folgende Art leicht entscheiden, welcher von beiden Werthen in jedem vorkommenden Falle der wahre ist. Eine leichte Betrachtung ergiebt nehmlich, daſs der Sinus vom Ueberschuſs des Azimuths des ersten Sterns über das Azimuth des zweiten Sterns von der linken zur rechten Hand gezählt, $= \frac{\sin \theta \cos \delta' \sin w}{\cos h' \sin \nu}$ seyn werde. Hieraus folgt sogleich, daſs, weil $\cos \delta'$ und $\cos h'$ ihrer Natur nach posisitive Grösſen sind, auch $\frac{\sin w}{\sin \nu}$ gleiches oder entgegengesetztes Zeichen haben müsse, je nachdem der durch den ersten Stern gehende Vertikalkreis von dem, der durch den zweiten Stern geht, zur rechten oder zur linken Hand liegt. Ueber diesen Fall aber kann niemahls ein Zweifel entstehen, indem solche Sterne, deren Vertikalkreise entweder nahe zusammen fallen, oder beinahe eine entgegengesetzte Lage haben, zu diesen Beobachtungen nicht brauchbar sind, und deswegen sorgfältig vermieden werden müssen, wie weiter unten noch mehr aus einander gesetzt werden soll.

Uebrigens läſst sich die vorhin gegebene Auflösung auch noch etwas abkürzen, und für die numerische Entwickelung durch Einführung zweier Hülfswinkel bequemer einrichten. Setzt man nehmlich

11) $\tang F = \frac{\tang \delta'}{\cos \theta}$, so verwandelt sich die Gleichung 7 und 8 in folgende

12) $\tang \nu = \frac{\cos F \tang \theta}{\sin(F - \delta)}$

13) $\cos w = \frac{\cos \nu \tang h}{\tang(F - \delta)} \left(\frac{\sin h' \sin F}{\sin h \sin \delta' \cos(F - \delta)} - 1 \right)$

Ferner nenne man einen zweiten Hülfswinkel G, und mache

14) $\tang G = \frac{\tang h}{\cos u}$, so verwandeln sich die Gleichungen 9 und 10 in die folgenden

15) $\tang \lambda = \frac{\cos G \tang u}{\sin(G - \delta)}$

16) $\tang \varphi = \cos \lambda \cotang(G - \delta)$.

6.

Die practischen Astronomen pflegen sich nicht selten zu beschweren, daſs die von den Theoretikern vorgeschlagenen Methoden zur wirklichen Anwendung nicht immer ganz geeignet seyen, oder wenigstens nicht vollkommen lei-

leisten, was sie sich von ihnen versprachen. Daſs dieser Vorwurf die hier vorgetragene Methode nicht treffe, wird das folgende Beispiel hinlänglich darthun, wozu ich die Data aus wirklich angestellten Beobachtungen entlehne. Mit einem *Troughton*'schen Sextanten von 10 Zoll fand ich am 21. Aug. 1808 die doppelte unverbesserte Höhe von α im Adler $91°34'10''$, als die *Shelton*'sche Uhr $20^h 40' 8''$ zeigte. Eben diese Höhe hatte α in der Andromeda um $20^h 46' 59''$; der durch den ersten Stern liegende Vertikalkreis war zur rechten, der des zweiten aber zur linken Hand. Der tägliche Gang der Uhr kam vollkommen mit der Sternzeit überein. Der von des Zeigers Irthum befreiete Winkel ergab sich zu $91°31'36''$, woraus die scheinbare Höhe $45° 45' 48''$, und mithin die wahre Höhe $h = h'$, $45° 44' 52'',6$ folgt. Die scheinbare Position jener beiden Sterne fand sich

$$\alpha = 295°22'6'',6 \qquad \delta = +8° 22' 43'',1$$
$$\alpha' = 359\ 38\ 18,5 \qquad \delta' = +28\ \ 2\ 13\ ,4$$

Der Unterschied der Beobachtungszeiten $6'51''$ in Bogentheile verwandelt, giebt $\gamma' - \gamma = 1° 42' 45''$, und daher $\theta = 62° 33' 26'',9$. Wegen der hier vorkommenden gleichen Höhe der Sterne fällt der Factor $\frac{\sin h'}{\sin h}$ in Form. 13 weg, und die Rechnung steht demnach so:

$\log \operatorname{tang} \delta' \ldots\ldots 9.7263516$
$\log \cos \theta \ldots\ldots 9.6635677$

$\log \operatorname{tang} F \ldots\ldots 0.0627839$, also $F = 49° 7' 37'',70$, und $F - \delta = 40° 44' 54'',60$.

$\log \operatorname{tang} \theta \ldots\ldots 0.2845877$
$\log \cos F \ldots\ldots 9.8158318$
$\text{compl} \lg \sin F - \delta \ldots 0.1852598$

$\log \operatorname{tang} \nu \ldots\ldots 0.2856793$. Daher $\nu = 62° 36' 58'',79$.
$\log \sin F \ldots\ldots 9.8786157$
$\text{compl.} \lg \sin \delta' \ldots 0.3278629$
$\text{compl} \lg \cos F - \delta . 0.1205703$

$$0.3270489 = \log 2.123483 = \log n.$$

log

$\log n - 1$ 0.0505666
$\log\cos v$ 9.6627075
$\log\tang h$ 0.0113399
$\log\cotg F - \delta$ 0.0646895

$\log\cos w$ . . . . 9.7893035, mithin $w = + 52^\circ\, 0'\, 14'',25$
und $u = 10^\circ\, 56'\, 44'',54$

$\log\tang h$ 0.0113399
$\log\cos u$ 9.9925074

$\log\tang G$ . . . . 0.0188525, folglich $G = 46^\circ\, 14'\, 30'',77$
und $G - \delta = 37^\circ\, 51'\, 47'',67$

$\log\cos G$ 9.8398647
$\log\tang u$ 9.2726964
compl. $\log\sin G - \delta$. 0.2119881

$\log\tang\lambda$ . . . . 9.3245492, daher $\lambda = 11^\circ\, 55'\, 18'',31$

$\log\cos\lambda$ 9.9905300
$\log\cotg G - \delta$ 0.1093281

$\log\tang\varphi$ . . . . 0.0998581, also $\varphi = 51^\circ\, 31'\, 47'',19$.

Die hier gefundene Polhöhe weicht nur um wenige Sekunden von der wahren ab. Aus λ ergiebt sich ferner $\gamma = 307^\circ\, 17'\, 24'',91$ oder in Zeit $20^h\, 29'\, 9'',66$ und damit die Voreilung der Uhr vor Sternzeit $= + 10^\circ\, 58'\, 34'',34$ welches bis auf ein Paar Zehntheile einer Sekunde mit dem übereinstimmt, was andere Beobachtungen von demselbigen Abend gaben.

7.

Der Vollständigkeit wegen muſs ich nun noch zeigen, welchen Einfluſs die kleinen nicht zu vermeidenden Beobachtungsfehler bei den Höhenmessungen auf die Bestimmung der unbekannten Gröſsen habe, woraus zugleich die Regeln hervor gehen werden, nach denen man die Sterne auszuwählen hat, welche die genauesten Resultate geben können. Man nehme hiebei die Höhen h und h', imgleichen die Gröſsen φ und λ als veränderlich an, und differenziire die Gleichung 1, so wird sie

$$\cos h\, \mathrm{d}h = (\sin\delta\cos\varphi - \cos\delta\sin\varphi\cos\lambda)\, \mathrm{d}\varphi - \cos\delta\cos\varphi\sin\lambda\, \mathrm{d}\lambda$$

Nennet

Nennet man nun A das Azimuth des Vertikalkreises, in welchem der erste Stern beobachtet ward, *) so erhält man

$$\sin\delta\cos\phi - \cos\delta\sin\phi\cos\lambda = -\cos h\cos A$$

$$\cos\delta\sin\lambda = \cos h\sin A$$

und es verwandelt sich die vorige Gleichung in die folgende

$$17)\ dh = -\cos A\, d\phi - \cos\phi\sin A\, d\lambda$$

Völlig auf diese Weise erhält man durch die Differenziation der Gleichung 2. wenn auf ähnliche Art das Azimuth des zweiten beobachteten Sterns $= A'$ gesetzt wird.

$$18)\ dh' = -\cos A'\, d\phi - \cos\phi\sin A'\, d\lambda$$

und es ergeben sich aus der Verbindung dieser Gleichungen nachstehende beide

$$19)\ d\phi = -\frac{\operatorname{Sin} A'}{\operatorname{Sin}(A'-A)}\, dh + \frac{\operatorname{Sin} A}{\operatorname{Sin}(A'-A)}\, dh'$$

$$20)\ \cos\phi\, d\lambda = \frac{\cos A'}{\operatorname{Sin}(A'-A)}\, dh - \frac{\cos A}{\operatorname{Sin}(A'-A)}\, dh'$$

Man sieht hieraus, dafs aus geringen Fehlern bei den beobachteten Höhen sowohl in der Bestimmung der Polhöhe als auch der Zeit sehr bedeutende Fehler entstehen können, wenn $\sin(A'-A)$ sehr klein ist, d. h. wenn der Vertikalkreis des zweiten Sterns dem des ersten sehr nahe, oder fast gegenüber liegt, woraus also die Regel folgt, dafs man bei dieser Beobachtungsmethode keine Sterne nehmen dürfe, die eine solche Lage gegen einander haben. Ist hingegen $\sin(A'-A)$ eine beträchtliche positive oder negative Gröfse, so werden sich die Beobachtungsfehler in der Bestimmung der Polhöhe eben nicht sehr vergröfsert zeigen können. Eben dies gilt auch von der Bestimmung der Zeit: zwar hängt die Genauigkeit derselben auch mit von der Polhöhe selbst ab, allein dies liegt in der Sache selbst, und fällt keinesweges dieser Methode zur Last, indem, wie bekannt, unter grofsen geographischen Breiten sich die Zeit nie mit so grofser Präcision bestimmen läfst, als es in der Nähe

*) Ich setze voraus, dafs das Azimuth vom Südpuncte an rechter Hand durch Westen, Norden etc. durch alle 360° fortgezählt werde.

Nähe des Aequators möglich ist. — Am besten wird es immer seyn, zu diesen Beobachtungen die Sterne so zu wählen, daſs $A'-A$, oder $A-A'$ nicht viel von 90° verschieden sey, d. h. daſs die durch sie gehenden Vertikalkreise sich beinahe unter rechten Winkeln schneiden. In diesem Falle wird der gröſste Werth von $d\varphi = \sqrt{(dh^2 - dh'^2)}$, und der gröſste Werth von $d\lambda = \sqrt{\dfrac{(dh^2 + dh'^2)}{\cos\varphi}}$. Wäre also jede der gemessenen Höhen bis auf 10″ genau, so würde der gröſste Fehler in der Breitenbestimmung = 14″, und der gröſste Irthum in der Bestimmung des Winkels λ, $\dfrac{14''}{\cos\varphi}$ seyn, welches mithin unter der hiesigen Polhöhe die gröſste Ungewiſsheit in der Zeitbestimmung 1″,5 macht. Es ist kaum nöthig zu erinnern, daſs hiebei bloſs auf die Folgen der Beobachtungsfehler gesehen sey, denn die Position der hellsten Fixsterne ist gegenwärtig so genau bekannt, daſs man die Fehler dieser Bestimmungen ganz bei Seite setzen kann.

* * *

Zu vorstehender Uebersetzung hat der Hr. Verf. selbst noch folgende zwei Anmerkungen hinzugefügt:

I. Da bei der Gleichung 9 oder 15 die Bestimmung des Winkels λ durch seine Tangente es an sich unentschieden läſst, ob dieser Winkel im ersten oder im zweiten Halbkreise genommen werden müsse, so erfordert die analytische Vollständigkeit, hierüber eine allgemeine Regel zu geben. Es dient dazu die Gleichung 4, aus welcher klar ist, weil $\cos\varphi$ und $\cos h$ ihrer Natur nach positive Gröſsen sind, daſs $\sin\lambda$ und $\sin u$ einerlei Zeichen haben müssen: man wird demnach λ immer in eben dem Halbkreise nehmen, in welchem u liegt.

II. Eben diese Gleichung 4 ist am Ende des vierten Artikels zur Controlle empfohlen: man muſs aber bemerken, daſs durch dieselbe nur die richtige Berechnung der Formeln 9 und 10, oder 14, 15 und 16 bestätigt werden kann,

kann, und dieselbe also nicht tauglich ist, etwa früher begangene Fehler zu entdecken.

Da der Herr Verf. die voranstehende Methode durch ein Beispiel erläutert hat, worin die gemessenen Höhen der Sterne *gleich* sind, dieses aber keineswegs eine nothwendige Forderung ist, so dürfte es vielleicht einigen Lesern angenehm seyn, hier auch ein Beispiel zu finden, wo *ungleiche* Sternhöhen vorkommen, und die Anwendung der Formel 13 auch mit dem Factor $\frac{\sin h'}{\sin h}$ gezeigt wird. Zu diesem Zwecke sey es mir erlaubt, hier die Beobachtungen anzuführen, welche ich am 17ten May d. J. mit einem 5 zölligen Troughton'schen Sextanten zu erhalten Gelegenheit nahm. Ich fand nehmlich nach der Shelton'schen Uhr um $16^h\ 8'\ 25''$ die doppelte unverbesserte Höhe α Bootis $= 100^0\ 10'\ 0''$, und um $16^h\ 37'\ 49''$ die von α Aquilae $= 67^0\ 10'\ 0''$. Der Collimationsfehler des Sext. fand sich $+\ 1'\ 5''$ und damit die durch Refraction verbesserten einfachen wahren Höhen $h = 50^0\ 3'\ 38'',7$, $h' = 33^0\ 33'\ 0'',0$. Die scheinbare Position beider Sterne, war zufolge der Tafeln

$$\alpha = 211^0\ 44'\ 54'',88 \qquad \delta = 20^0\ 10'\ 56'',02$$
$$\alpha' = 295\ \ 22\ \ 17\ ,50 \qquad \delta' = 8\ \ 22\ \ 35\ ,45$$

ferner ergiebt sich $\gamma' - \gamma = 0^h\ 29'\ 24'' = 7^0\ 21'\ 0''$, und $\theta = 76^0\ 16'\ 22'',62$

log tang δ' 9.1680504
log cos θ 9.3752919

log tang F ...... 9.7927585 $= 31^0 49' 14'',13$; $F - \delta = 11^0 38' 18'',11$
log tang θ 0.6121228
log cos F 9.9292673
compl. lg sin $(F-\delta)$ 0.6952214

log tang ν .... 1.2366115 $= 86^0\ 40'\ 51'',11$
log sin F 9.7220258
compl. log sin δ' .. 0.8366075
compl. log cos$(F-\delta)$ 0.0090219
log sin h' 9.7424616
compl. log sin h ... 0.1153600

log n .... 0.4254768 $=$ 2.6636480

log n

log n — 1 .... 0.2210614
log cos ν 8.7626595
log tang h 0.0771218
log cotg (F—δ) 0.6861994

log cos w .... 9.7470421 = 56° 2′ 46″,29; ν — w = 30° 38′ 4″,82 = u

log tang h 0.0771218
log cos u 9.9347175

log tang G .... 0.1424043 = 54° 13′ 46″,73; G—δ = 34° 2′ 50″,71

log cos G 9.7668127
log tang u 9.7724798
compl. log sin (G—δ) 0.2519051

log tang λ .... 9.7911984 = 31° 43′ 42″,45
α = 211 44 54 ,88
243° 28′ 37″,33
in Zeit = 16ʰ 13′ 54″,49
die Uhr zeigte = 16 8 25
Verspät. der Uhr = 5′ 29″,49 gegen Sternzeit.

log cos λ 9.9296999
log cotg (G—δ) 0.1702375

log tang ϕ 0.0999374
ϕ .... 51° 32′ 5″,53

Eine zweite Messung eben dieser beiden Sterne gab für ϕ = 51° 32′ 5″,02 und den Stand der Uhr — 5′ 29″,43, ganz übereinstimmend mit dem, was Beobachtungen am Mauerquadranten in derselbigen Nacht gaben.

Sternbedeckungen vom Monde.

1808. Jan. 3. $\varkappa^1$ Pisc. Eintritt am dunkeln ☾Rande 9ʰ 52′ 35″ 8 M.Z.
Aug. 10. δ Pisc. Austr. am dunkeln ☾Rande 13ʰ 18′ 56″,1 M.Z.

♃ *Trab. Verfinsterungen.*

			Mittl. ☉ Zeit.	
1808. Aug.	17.	Eintritt III.	11ʰ 5′ 26″,1	4 f. Dollond. H.
—	21.	Eintritt I.	12 13 31 ,4	3½ f. Dollond. H.
Nov.	8.	Austritt II.	6 16 7 ,8	— — — H.
—	16.	Austritt I.	7 59 57 ,1	— — — H.
Dec.	18.	Austritt I.	4 42 47 ,7	10 f. Refl. G.

3. Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807, 1808 und 1809

In: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, hrsg. von Anton Börsch und Paul Simon, Berlin 1887, S. 118-128, dort nur §§ 10–15.

Original:
Disquisitio de elementis ellipticis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 1, (1808–1811) 1811, commentationes mathematicae, 26 S. In: Gauß Werke 6, S. 1–24.

Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807, 1808 und 1809.

1.

Bisher gab es in der Tat sieben periodische Erscheinungen des im Monat März des Jahres 1802 entdeckten Hauptplaneten Pallas: dennoch werden nur sechs Oppositionen bisher gezählt, da der Planet an dem Tage, an dem er zum erstenmal entdeckt wurde, die Opposition mit der Sonne bereits überschritten hatte. Die Oppositionen wurden zum größten Teil in mehreren Sternwarten hinreichend gut beobachtet und konnten deshalb mit hinreichender Genauigkeit bestimmt werden. Es ist nötig, die einzige Opposition des Jahres 1808 auszunehmen. In diesem Jahr bot der Planet, der sich im Aphel des Umlaufs befand, wegen der Schwäche des Lichts den Beobachtern große Schwierigkeiten, und wurde, um die Wahrheit zu gestehen, von den Astronomen ein wenig vernachlässigt. Eine hinreichend große Menge der Rektaszensionen stellte freilich der berühmte von Lindenau zur Verfügung, die mit gewohnter Sorgfalt am hervorragendsten Mittagsfernrohr der Seeberger Sternwarte um die Zeit der Opposition beobachtet wurden: aber nur wenige Deklinationen und bei weitem weniger gewisse konnte ich von anderer Seite erhalten. Deshalb war es nicht möglich, eben diese Opposition mit derselben Genauigkeit wie die übrigen festzustellen und insbesondere blieb die Breite allzu unbestimmt.

2.

Sobald die Beobachtungen einer beliebigen Erscheinung beendet waren, pflegte ich alle jährlich zu sammeln, sorgfältig zu erörtern und mit den Beobachtungen der vorangehenden Jahre zu verbinden, damit daraus die Bestimmung der elliptischen Elemente um so genauer ermittelt wurde. Aus der letzten derartigen Berechnung, die gegen Ende des Jahres 1807 angestellt wurde, ergaben sich die Elemente, die im Januar 1808 Band 17 der Monatlichen Correspondenz zur Beförderung der Erd- und Himmelskunde des berühmten von Zach veröffentlicht wurden, und alle vier bis dahin beobachteten Oppositionen aufs beste miteinander verbanden. Im darauffolgenden Jahr schreckte mich nach der fünften Opposition der Mangel an sicheren Beobachtungen von neuen Berechnungen ab, zu denen ich erst dann zurückkehrte, sobald die im Jahre 1809 hinsichtlich der sechsten Opposition gemachten Beobachtungen gestatteten, die Berechnung beider Oppositionen zugleich aufzunehmen, die ich in unseren neuen Gelehrten Anzeigen des Jahres 1810 am 24. Februar angezeigt habe.

Hier ist nunmehr ein Überblick über alle bisher beobachteten sechs Oppositionen:

Zeit der Opposition bezogen auf den Göttinger Meridian		Tag seit dem Anfang des Jahres 1803	Heliozentrische Länge	Geozentrische Breite
1803 Jun. 30.	$0^h\,27'\,32''$	181,019120	$277°\,39'\,24''\,0$	$+\,46°\,26'\,36''\,0$
1804 Aug. 30.	4 58 27	608,207257	337 0 36, 1	+ 15 1 49, 8
1805 Nov. 29.	11 15 4	1064,468796	67 20 42, 9	− 54 30 54, 9
1807 Mai 4.	14 37 41	1585,609502	223 37 27, 7	+ 42 11 25, 6
1808 Jul. 26.	21 17 32	2034,887176	304 2 59, 7	+ 37 43 53, 7
1809 Sept. 22.	16 10 20	2457,673843	359 40 4, 4	− 7 22 10, 1

3.

Wenn sich die Pallas genau auf einer Ellipse bewegte und gemäß den Gesetzen Keplers, könnten die neuesten Elemente, die die vier Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807 aufs beste miteinander verbinden, nur mit sehr leichten Fehlern bisher beeinträchtigt sein und müßten sicherlich auch mit den nächsten Oppositionen innerhalb einer oder zwei Minuten übereinstimmen. Aber sie war von einer so engen Übereinstimmung soweit entfernt, daß eben jene Elemente eher eine Diskrepanz schon bei der fünften Opposition zeigten, die auf bis zu vier Minuten anstieg, von der sechsten aber um 12 Minuten abwichen. Freilich läßt unser Planet so große Störungen von den übrigen und insbesondere von Jupiter zu, daß eine genaue und feste Übereinstimmung zwischen den Erscheinungen und der rein elliptischen Bewegung nicht erhalten werden kann. Hieraus erhellt zugleich, daß sich immer wieder andere Elemente ergeben werden, je nachdem auf welchen immer wieder anderen je vier Oppositionen sie errichtet werden, was durch die Berechnung der anderen beiden Systeme von Elementen bestätigt wurde, von denen ich das eine aus den Oppositionen der Jahre 1804, 1805, 1807, 1808, das andere aus den Oppositionen der Jahre 1805, 1807, 1808, 1809 neulich abgeleitet habe. Damit diese verschiedenen Systeme von Elementen besser miteinander verglichen werden können, stelle ich hier die einzelnen vor.

I. Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1803, 1804, 1805, 1807.

Epoche der mittleren Länge für das Jahr 1803 bezogen auf den Göttinger Meridian	221° 39′ 30″ 4
Mittlere, tägliche tropische Bewegung	770″ 2143
Länge des Perihels 1803	121° 3′ 11″ 4
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 56, 9
Neigung des Umlaufs	34 37 41, 0
Exzentrizität (= sin. 14° 10′ 58″ 81)	0, 2450198
Logarithmus der größeren Halbachse	0, 4423149

II. Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1804, 1805, 1807, 1808.

Epoche der mittleren Länge 1803	221° 34′ 56″ 7
Mittlere, tägliche tropische Bewegung	770″ 4467
Länge des Perihels 1803	121 5 22, 1
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 46, 8
Neigung des Umlaufs	34 37 31, 5
Exzentrizität (= sin. 14° 10′ 4″ 08)	0, 2447624
Logarithmus der größeren Halbachse	0, 4422276

III. Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre 1805, 1807, 1808, 1809.

Epoche der mittleren Länge 1803	221° 23′ 24″ 6
Mittlere, tägliche tropische Bewegung	770″ 9265
Länge des Perihels 1803	120 58′ 4, 8
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 27 52, 4

Neigung des Umlaufs 34 36 49, 4
Exzentrizität (= sin. 14° 9′ 36″ 63) 0, 2446335
Logarithmus der größeren Halbachse 0, 4420473

4.

Auf welche Weise nun der elliptische Umlauf des Planeten auf Grund von vier Beobachtungen (von denen nur zwei vollständig sind) bestimmt werden kann, habe ich im Abschnitt 2 des 2. Buches der Theorie der Bewegung der Himmelskörper gezeigt. Die dort überlieferte Lösung umfaßt das Problem in größter Allgemeinheit: dennoch ist es besser für den Spezialfall, wo die vier Beobachtungen Oppositionen sind, eine andere Methode heranzuziehen, deren Darlegung, wie ich hoffe, den Astronomen nicht unwillkommen sein wird. Diese Methode erfordert freilich eine approximierte Kenntnis der einzelnen Elemente oder wenigstens vier von diesen, der Neigung des Umlaufs, der Länge des Knotens, der Länge des Perihels und der Exzentrizität; aber nichts hindert, daß wir voraussetzen, daß diese Kenntnis auf Grund einer vorangehenden Berechnung bereits vorliegt. Der Hauptpunkt des Problems hängt von der Lösung der folgenden Fragestellung ab:

> „Gegeben seien vier Längen eines Planeten auf dem Umlauf, gegeben seien die zugehörigen Zeiten, man finde die Länge des Perihels, die Exzentrizität, die mittlere, tägliche Bewegung und die Epoche der mittleren Länge“.

Diese Lösung werde ich im folgenden Artikel darlegen.

5.

Da die Länge des Perihels in größter Näherung bereits als bekannt vorausgesetzt wird, mögen aus deren Subtraktion von den Längen im Umlauf die wahren approximierten Anomalien $\upsilon, \upsilon', \upsilon'' \upsilon'''$ hervorgehen, wo jene Länge sogar gleichsam als konstant betrachtet werden kann oder wenn ihre jährliche Variation bekannt gewesen sein sollte, auf die einzelnen Zeiten in richtiger Weise zu übertragen ist. Sei $e = \sin \varphi$ die approximierte Exzentrizität, durch deren Anwendung mittels bekannter Methoden die mittleren Anomalien M, M', M'', M''', die den wahren $\upsilon, \upsilon', \upsilon'', \upsilon'''$ entsprechen, berechnet werden mögen. Bezeichnet man nunmehr die Zeiten durch t, t', t'', t''', müßten deren Differenzen $t' - t, t'' - t', t''' - t''$ den Differenzen $M' - M, M'' - M', M''' - M''$ proportional sein, wenn wir von den wahren Werten der Länge des Perihels und des Winkels φ ausgegangen wären: sollte es sich aber anders erweisen, werden die diesen Größen anzubringenden Berichtigungen auf folgende Weise ermittelt werden. Setzt man

$$m = -\frac{\cos\varphi^3}{(1 + e\cos\upsilon)^2}, \qquad n = \frac{m(2 + e\cos\upsilon)\sin\upsilon}{\cos\varphi}$$

$$m' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1 + e\cos\upsilon')^2}, \qquad n' = \frac{m'(2 + e\cos\upsilon')\sin\upsilon'}{\cos\varphi}$$

$$m'' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1 + e\cos\upsilon'')^2}, \qquad n'' = \frac{m''(2 + e\cos\upsilon'')\sin\upsilon''}{\cos\varphi}$$

$$m''' = -\frac{\cos\varphi^3}{(1 + e\cos\upsilon''')^2}, \qquad n''' = \frac{m'''(2 + e\cos\upsilon''')\sin\upsilon'''}{\cos\varphi}$$

so wird aus Art. 15 der Theorie der Bewegung der Himmelskörper klar, wenn man das Perihel mit einem kleinen Zuwachs dΠ und den Winkel φ mit einem Zuwachs dφ verbessert auffaßt, daß die verbesserten Werte der Anomalien

$$M + m\,\mathrm{d}\Pi + n\,\mathrm{d}\varphi$$
$$M' + m'\,\mathrm{d}\Pi + n'\,\mathrm{d}\varphi$$
$$M'' + m''\,\mathrm{d}\Pi + n''\,\mathrm{d}\varphi$$
$$M''' + m'''\,\mathrm{d}\Pi + n'''\,\mathrm{d}\varphi$$

werden, wenn es freilich gestattet ist, die Potenzen und Produkte der Verbesserungen dΠ, dφ zu vernachlässigen. Deshalb wird man drei Ausdrücke der täglichen mittleren Bewegung hinsichtlich des Perihels haben, nämlich

$$\frac{M'-M}{t'-t} + \frac{m'-m}{t'-t}d\Pi + \frac{n'-n}{t'-t}d\varphi$$

$$\frac{M''-M'}{t''-t'} + \frac{m''-m'}{t''-t'}d\Pi + \frac{n''-n'}{t''-t'}d\varphi$$

$$\frac{M'''-M''}{t'''-t''} + \frac{m'''-m''}{t'''-t''}d\Pi + \frac{n'''-n''}{t'''-t''}d\varphi$$

aus deren Gleichheit man die Unbekannten dΠ, dφ ermitteln wird. Setzt man diese in einen einzigen Ausdruck ein, so wird sich die verbesserte mittlere Bewegung ergeben, woraus mittels einer bekannten Methode auch die größere Halbachse bestimmt werden wird. Setzt man schließlich die Werte der Verbesserungen dΠ, dφ in einen Ausdruck für irgendeine mittlere Anomalie ein, so werden sich deren verbesserter Wert und daraus die Epoche der mittleren Länge, die auf eine beliebige Zeit zu übertragen ist, von selbst ergeben.

Übrigens ist leicht offensichtlich, wie auch die sowohl periodischen als auch säkularen Störungen berücksichtigt werden können, falls es nötig erscheint. Freilich wird es nötig sein, von jenem nur die im Umlauf gegebenen Längen, bevor sie in die Rechnung eingeführt werden, zu reinigen, mittels der späteren aber die Länge des Perihels und die gemäß der beliebigen Epoche vorausgesetzte Exzentrizität auf die einzelnen Zeiten t, t', t'', t''' zu übertragen.

6.

Nunmehr wollen wir sehen, wie diese Umläufe zur Bestimmung auf Grund der vier beobachteten Oppositionen angewendet werden können. Sei α die Länge des Planeten in der ersten ekliptischen Opposition, β die geozentrische Breite, R der Abstand der Erde von der Sonne, Ω die genäherte Länge des aufsteigenden Knotens, i die genäherte Neigung der Ebene des Umlaufs zur Ekliptik. Ich bezeichne die Größen, die sich auf die übrigen Oppositionen beziehen, durch ähnliche Charaktere, die durch einen, zwei oder drei Indices unterschieden sind. Aus α, Ω, i wird mittels einer bekannten Formel die Länge im Umlauf abgeleitet werden und eine ähnliche Berechnung wird für die drei übrigen Längen in der Ekliptik errichtet werden. Auf Grund dieser vier Längen im Umlauf werden mittels der Vorschriften des vorangehenden Artikels die elliptischen Elemente abgeleitet werden und hieraus mittels bekannter Formeln die vier Radiusvektoren r, r', r'', r'''. Setzt man nunmehr

$$\frac{R \sin \beta}{r} = \sin(\beta - \gamma), \quad \frac{R' \sin \beta'}{r'} = \sin(\beta' - \gamma') \qquad usw.$$

so werden offensichtlich γ, γ', γ'', γ''' die vier heliozentrischen, aus den geozentrischen Breiten abgeleiteten Längen sein. Wir wollen dieselben aus den Längen ableiten, indem wir setzen:

$$\tan g\, i\ \sin(a - \Omega) = \tan g\delta\delta \qquad \tan g\, i\ \sin(a' - \Omega) = \tan g\delta' \quad usw.$$

und es ist klar, daß $\gamma = \delta$, $\gamma' = \delta'$, $\gamma'' = \delta''$, $\gamma''' = \delta'''$ sein müssen, wenn statt Ω und i die wahren Werte angenommen worden wären, wenn es freilich möglich gewesen sein sollte, allen vier Oppositionen (die das Problem mehr als bestimmt machen) durch dieselbe Ellipse zu genügen. Und wenn es sich anders ergeben sollte, werden die Verbesserungen $d\Omega$, di, die auf die Größen Ω, i anzuwenden sind, auf folgende Weise ermittelt. Soweit diese Verbesserungen gleichsam als kleine Größen erster Ordnung angesehen werden, deren Potenzen und Produkte man vernachlässigen darf, werden offensichtlich nach Verwendung der Werte $\Omega + d\Omega$, $i + di$ anstelle der Breiten γ, δ, γ', δ' usw., andere der folgenden Gestalt hervorgehen

$$\gamma + a\ d\Omega + b\ di, \qquad \delta + c\ d\Omega + f\ di$$
$$\gamma' + a'\ d\Omega + b'\ di, \qquad \delta' + c'\ d\Omega + f'\ di \quad \text{usw.},$$

wobei die Koeffizienten c, f, c', f' usw. mittels der Formeln

$$c = -\tfrac{1}{2} \sin 2\delta \cot ang(a - \Omega), \qquad f = \frac{\sin 2\delta}{\sin 2i}$$

$$c' = -\tfrac{1}{2} \sin 2\delta' \cot ang(a' - \Omega), \qquad f' = \frac{\sin 2\delta'}{\sin 2i} \quad usw.$$

gefunden werden. Wir könnten auch die Koeffizienten a, b usw. mittels analytischer Operationen bestimmen, aber ich ziehe die folgende Methode vor. Ich wiederhole die eben angezeigte Berechnung von neuem, indem ich an Stelle der Länge des Knotens Ω eine andere von jener verschiedene verwende, nach beliebiger Wahl einer kleinen Größe, woraus man die numerischen Werte der Koeffizienten a, a', usw. leicht ermitteln wird; eine neue Wiederholung derselben Berechnung wird, wenn man eine ein wenig geänderte Neigung annimmt, auf ähnliche Weise die Werte der Koeffizienten b, b' usw. bereitstellen. Zugleich wird auf diese Weise klar sein, wie große Verbesserungen die elliptischen Elemente dulden werden, von kleinen Verbesserungen der Größen Ω, i.

Ist dies so getan, gibt es zur Bestimmung der Verbesserungen $d\Omega$, di, die vier Gleichungen

$$\gamma - \delta + (a - c)\ d\Omega + (b - f)\ di = 0$$
$$\gamma' - \delta' + (a' - c')\ d\Omega + (b' - f')\ di = 0$$
$$\gamma'' - \delta'' + (a'' - c'')\ d\Omega + (b'' - f'')\ di = 0$$
$$\gamma''' - \delta''' + (a''' - c''')\ d\Omega + (b''' - f''')\ di = 0$$

denen wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler kaum genau genügt werden kann; deshalb werden die Werte der Unbekannten dΩ, d*i* die geeignetsten Werte mittels der in Abschnitt III des 2. Buches der Theorie der Bewegung der Himmelskörper erklärten Prinzipien bestimmt werden. Hieraus werden zugleich mittels dessen, was wir eben gesagt haben, die Verbesserungen der übrigen Elemente leicht abgeleitet werden.

7.

Es mag erlaubt sein, diesen Vorschriften noch einige Beobachtungen anzufügen.

I. Es wird kaum die Ermahnung nötig sein, daß unsere Formeln auch für den Fall dienen können, wo die Knoten nicht gleichsam als ruhend angesehen werden, wenn nur der vorausgesetzte Wert der Knotenlänge von seiner Epoche auf vier Zeiten richtig reduziert wird und diese vier verschiedenen Werte anstelle der vier einzelnen Orte in jenen Formeln angewendet werden. Dasselbe gilt von der Neigung, wenn freilich ihre säkulare Variation bekannt sein sollte und es der Mühe wert zu sein scheint, sie zu berücksichtigen. Wenn es darüber hinaus gefällt, die Störungen der heliozentrischen Breite in die Rechnung einzuführen, werden diese in den vorausgehenden Gleichungen offensichtlich entweder von γ, γ', γ'', γ''' abgezogen oder eben δ, δ', δ'', δ''' hinzugefügt werden müssen.

II. Sooft die Neigung des Umlaufs und die Exzentrizität mäßig sind, werden die Koeffizienten a, b, a', b', usw. so klein ausfallen, daß es erlaubt ist, sie zu vernachlässigen und daher sich die zweite und dritte oben vorgeschriebene Rechnung zu ersparen. Dann wird es nach Auffinden der Verbesserungen dΩ, d*i* (wenn sie nicht etwa sehr klein ausgefallen sein sollten) nötig sein, eine neue Berechnung der Längen im Umlauf auf den verbesserten Werten der Knotenlänge und -neigung, nämlich Ω + dΩ, i + di zu errichten und die Berechnung der elliptischen Elemente nach der Norm von Art. 5 zu wiederholen, wenn sich nämlich die im Umlauf verbesserten Längen als um mehrere Sekunden von den früheren nicht verbesserten verschieden ergeben haben sollten. Übrigens wird es kaum jemals nötig sein, die Koeffizienten m, n, m', usw. von neuem zu berechnen, da ihre Werte schon mittels der ersten Hypothese hinreichend genau gefunden werden.

8.

Zur größeren Veranschaulichung der vorangehenden Regeln werde ich hier die gesamte Rechnung beifügen, durch die das dritte System von Elementen aus den Oppositionen der Jahre 1805, 1807, 1808, 1809 bestimmt wurde. Ich habe die Länge des aufsteigenden Knotens für den Beginn des Jahres 1803 vorausgesetzt, 172° 28′ 46″ 8 = Ω, die Neigung der Umlaufbahn 34° 37′ 31″ 5; ich habe jene auf die Zeiten der einzelnen Oppositionen reduziert, indem ich die Präzession 2′ 26″ 01, 3′ 37″ 50, 4′ 39″ 12, 5′ 37″ 11 addierte. Hieraus leitete ich aus den Längen die heliozentrischen Breiten

$$\begin{aligned}\delta &= -\,33° \; 40' \; 50'' \; 63\\ \delta' &= +\,28 \;\; 14 \;\; 51,\; 24\\ \delta'' &= +\,27 \;\; 20 \;\; 55,\; 86\\ \delta''' &= -\;\;\, 4 \;\; 52 \;\; 28,\; 44\end{aligned}$$

$c \;= +\,0{,}1252$	$f \;= -\,0{,}9870$
$c' = -\,0{,}3366$	$f' = +\,0{,}8917$
$c'' = +\,0{,}3609$	$f'' = +\,0{,}8727$
$c''' = +\,0{,}6803$	$f''' = -\,0{,}1811$

ab. Ferner ergeben sich die Argumente der Breite

257°	25′	6″	73
56	24	5,	96
126	2	55,	07
188	36	2,	69

aus denen die elliptischen Elemente zu ermitteln sind. Zu diesem Zweck setze ich den Winkel γ = 14° 10′ 4″ 08 an (wie er im zweiten System der Elemente gefunden wurde), und die Länge des Perihels für den Beginn des Jahres 1803 = 121° 5′ 22″ 1 ein. Das Perihel wird (ebenso wie der Knoten) hinsichtlich der Fixsterne als unbeweglich vorausgesetzt und deshalb seine Entfernung von dem aufsteigenden Knoten konstant = 308° 36′ 35″ 3. Hieraus erhalten wir mittels der bekannten Formeln:

υ = 308°	48′	31″	43,		M = 328°	15′	45″	08
υ' = 107	47	30,	66,		M' = 79	46	27,	05
υ'' = 177	26	19,	77,		M'' = 175	54	28,	87
υ''' = 239	59	27,	39,		M''' = 266	29	57,	59

$m \;= -\,0{,}68517$,	$n \;= +1{,}18569$
$m' = -\,1{,}06482$,	$n' = -2{,}01318$
$m'' = -\,1{,}59701$,	$n'' = -0{,}12921$
$m''' = -\,1{,}18352$,	$n''' = +1{,}93947$

Indem ich also die Korrektur der Perihellänge mit $d\Pi$ bezeichne und die Korrektur des Winkels φ mit $d\varphi$, wird die mittlere Sternbewegung

von der ersten Opposition bis zur zweiten innerhalb von 521,140706 Tagen

111° 30′ 41″ 97 − 0,37965 $d\Pi$ − 3,19887 $d\varphi$ sein

von der zweiten Opposition bis zur dritten innerhalb von 449,277674 Tagen

96° 8′ 1″ 82 − 0,53219 $d\Pi$ − 1,88397 $d\varphi$

von der dritten Opposition bis zur vierten innerhalb von 422,786667 Tagen

90° 35′ 28″ 72 − 0,41349 $d\Pi$ − 2,06868 $d\varphi$.

Hieraus werden die drei Ausdrücke für den mittleren täglichen Sternwert

770″ 31398 − 0,0007285 $d\Pi$ − 0,0061382 $d\varphi$

770, 30718 − 0,0011845 $d\Pi$ + 0,0041933 $d\varphi$

771, 37892 + 0,0009780 $d\Pi$ + 0,0048930 $d\varphi$

ermittelt, aus deren Vergleich sich die Gleichungen ergeben:

$$0 = \quad 0''00680 + 0{,}0004560\, d\Pi - 0{,}0103315\, d\varphi$$

$$0 = -1{,}07174 \quad - 0{,}0021625\, d\Pi - 0{,}0006997\, d\varphi$$

und hieraus $d\Pi = -488''82$, $d\varphi = -20''92$, und darauf die berichtigte Perihellänge für den Beginn des Jahres 1803, 120° 57′ 13″ 28, und der berichtigte Wert des Winkels $\varphi = 14° \, 9' \, 43'' \, 16$. Ferner ergibt sich als mittlere tägliche Sternbewegung 770″ 7985, die berichtigte mittlere Anomalie für die erste Opposition 328° 20′ 55″ 20, die mittlere Länge für die gleiche Epoche 89° 20′ 34″ 49. Schließlich wird aus der mittleren Sternbewegung der Logarithmus der größeren Halbachse 0,4420439 abgeleitet und daher der Logarithmus des Halbparameters 0,4152361. Da wir nunmehr die berichtigten Werte der wahren Anomalien

$$\begin{aligned}
\upsilon \;\; &= 308°\, 56'\, 40''\, 25\\
\upsilon' \;\; &= 107 \;\; 55 \;\; 39,\; 48\\
\upsilon'' \;\; &= 177 \;\; 34 \;\; 28,\; 59\\
\upsilon''' &= 240 \;\;\; 7 \;\; 36,\; 21
\end{aligned}$$

haben, werden die Logarithmen der Radiusvektoren berechnet

$$\begin{aligned}
\log r \;\; &= 0{,}3531088\\
\log r' \;\; &= 0{,}4492406\\
\log r'' \;\; &= 0{,}5369700\\
\log r''' &= 0{,}4716739
\end{aligned}$$

Aus den Sonnentafeln haben wir ferner

$$\begin{aligned}
\log R \;\; &= 9{,}9937332\\
\log R' \;\; &= 0{,}0039862\\
\log R'' \;\; &= 0{,}0065917\\
\log R''' &= 0{,}0011160
\end{aligned}$$

daraus leiten wir endlich ab

$$\begin{aligned}
\gamma \;\; &= -\, 33°\, 39'\, 48''\, 15\\
\gamma' \;\; &= +\, 28 \;\; 15 \;\;\; 0,\; 73\\
\gamma'' \;\; &= +\, 27 \;\; 20 \;\;\; 9,\; 07\\
\gamma''' &= - \;\;\; 4 \;\; 52 \;\; 53,\; 99
\end{aligned}$$

Um die Koeffzienten a, b usw. zu ermitteln, bilde ich die zweite Hypothese, indem ich die Neigung beibehalte, aber die Knotenlänge um 1 Minute erhöhe, so daß sie für den Beginn des Jahres 1803, 172° 29′ 46″ 8 beträgt. Indem ich darauf wie in der ersten Hypothese die Perihellänge für dieselbe Epoche gleich 121° 5′ 22″ 1 ansetze, werden die wahren Anomalien

$$\begin{aligned}
\upsilon \;\; &= 308°\, 48'\, 40''\, 93\\
\upsilon' \;\; &= 107 \;\; 47 \;\; 34,\; 06\\
\upsilon'' \;\; &= 177 \;\; 26 \;\; 22,\; 25\\
\upsilon''' &= 239 \;\; 59 \;\; 15,\; 00
\end{aligned}$$

gefunden und hieraus (indem ich ebenfalls $\varphi = 14° \, 10' \, 4'' \, 08$ ansetze) die mittleren Anomalien

$$\begin{aligned} M \;\; &= 328° \; 15' \; 51'' \; 59 \\ M' \;\; &= \;\; 79 \;\;\; 46 \;\; 30, \; 67 \\ M'' \;\; &= 175 \;\;\; 54 \;\; 32, \; 83 \\ M''' &= 266 \;\;\; 29 \;\; 42, \; 93 \end{aligned}$$

(Übrigens ist es für diese Berechnung nicht nötig, die gewöhnliche Methode anzuwenden, sondern es genügt, nach Auffinden der Werte der mittleren Anomalien in der ersten Hypothese die Produkte aus den positiv genommenen Koeffizienten *m*, *m'*, *m''*, *m'''* mit den Differenzen zwischen den entsprechenden Werten der wahren Anomalien in beiden Hypothesen zu addieren, nämlich

$$\begin{aligned} &+ \;\; 9'' \, 50 \times 0{,}68517 = + \;\; 6'' \, 51 \\ &+ \;\; 3, \; 40 \times 1{,}06482 = + \;\; 3, \; 62 \\ &+ \;\; 2, \; 48 \times 1{,}59701 = + \;\; 3, \; 96 \\ &- 12, \; 39 \times 1{,}18352 = - 14, \; 66) \end{aligned}$$

Behält man hieraus die Werte der Koeffizienten *m*, *n* usw. bei, ermittelt man
$d\Pi = -468'' \, 21$, die Perihellänge zu Beginn des Jahres 1803 zu $120° \, 57' \, 33'' \, 89$
$d\varphi = -20'' \, 62$, $\varphi = 14° \, 9' \, 43'' \, 46$
die mittlere tägliche Sternbewegung = $770'' \, 7761$
den Logarithmus der größeren Halbachse = 0, 4420523
die mittlere Länge in der ersten Opposition = $89° \, 20' \, 47'' \, 85$

$$\begin{aligned} \gamma \;\; &= -33° \; 39' \; 51'' \; 10 \\ \gamma' \;\; &= +28 \;\;\; 15 \;\;\; 1, \; 27 \\ \gamma'' \;\; &= +27 \;\;\; 20 \;\; 10, \; 97 \\ \gamma''' &= - \;\; 4 \;\;\; 52 \;\; 54, \; 66 \end{aligned}$$

Endlich bilde ich die dritte Hypothese, indem ich ansetze $\Omega = 172° \, 28' \, 46'' \, 6$, $i = 34° \, 38' \, 31'' \, 5$, und daraus wird in gleicher Weise wie vorher abgeleitet
die Perihellänge für den Beginn des Jahres 1803 $120° \, 55' \, 34'' \, 46$

$$\varphi = 14° \, 9' \, 52'' \, 63$$

die mittlere tägliche Sternbewegung = $770'' \, 8398$
der Logarithmus der größeren Halbachse = 0, 4420283
die mittlere Länge in der ersten Opposition = $89° \, 20' \, 20'' \, 65$

$$\begin{aligned} \gamma \;\; &= -33° \; 39' \; 35'' \; 63 \\ \gamma' \;\; &= +28 \;\;\; 15 \;\;\; 5, \; 20 \\ \gamma'' \;\; &= +27 \;\;\; 20 \;\;\; 9, \; 32 \\ \gamma''' &= - \;\; 4 \;\;\; 52 \;\; 52, \; 65 \end{aligned}$$

Der Vergleich der Werte der in den drei Hypothesen gefundenen heliozentrischen Breiten γ, γ', γ'', γ''' ergibt

$$a \;\; = -\,0{,}0492, \qquad b \;\; = +\,0{,}2087$$
$$a' \;\, = +\,0{,}0212, \qquad b' \;\, = +\,0{,}0745$$
$$a'' = +\,0{,}0317, \qquad b'' = +\,0{,}0042$$
$$a''' = -\,0{,}0112, \qquad b''' = +\,0{,}0223$$

Deshalb erhält man die vier Gleichungen

$$+\,62''48 - 0{,}1744\,\mathrm{d}\Omega + 1{,}1957\,\mathrm{d}i = 0$$
$$+\;\;9,\,49 + 0{,}3578\,\mathrm{d}\Omega - 0{,}8172\,\mathrm{d}i = 0$$
$$-\,46,\,79 - 0{,}3292\,\mathrm{d}\Omega - 0{,}8685\,\mathrm{d}i = 0$$
$$-\,25,\,55 - 0{,}6915\,\mathrm{d}\Omega + 0{,}2034\,\mathrm{d}i = 0$$

aus denen mittels des Prinzips der kleinsten Quadrate

$$\mathrm{d}\Omega = -\,54''41$$
$$\mathrm{d}i \;\, = -\,42,\,06$$

abgeleitet wird, sodaß man hat

als Länge des aufsteigenden Knotens für den Anfang des Jahres 1803 . . . . 172° 27′ 52″ 39
als Neigung der Umlaufbahn 34 36 49, 44

Die übrigen Elemente werden entweder mittels eines Vergleichs derjenigen, die sich in den einzelnen drei Hypothesen ergaben, ermittelt werden können, oder, was genauer ist, werden mittels einer neuen Berechnung der Längen in der Umlaufbahn und einer Wiederholung der in Art. 5 erklärten Operationen bestimmt werden können. Die erste Methode liefert

die Perihellänge von 1803 . . . . 120° 58′ 3″ 86
den Winkel φ 14 9 36, 25
die mittlere Länge in der ersten Opposition 89 20 32, 08
die mittlere tägliche Sternbewegung . . . . 770″ 7899
den Logarithmus der größeren Halbachse 0, 4420471

Mit Hilfe der zweiten Methode findet man

die Perihellänge von 1803 . . . . 120° 58′ 4″ 81
den Winkel φ 14 9 36, 63
die mittlere Länge in der ersten Opposition 89 20 31, 81
die mittlere tägliche Sternbewegung . . . . 770″ 7893
den Logarithmus der größeren Halbachse 0, 4420473

Mit diesen Elementen stimmen diejenigen überein, die ich oben (Art. 3) dargelegt habe.

9.

Obwohl die Störungen groß sind, die die Pallas von den übrigen Planeten erleidet, passen dennoch, wie die Erfahrung bezeugt, die den vier Oppositionen angepaßten elliptischen Elemente des Planeten hinreichend gut zur Bewegung innerhalb dieses gesamten Zeitraums: ja sie unterscheiden sich sogar von der vorangehenden und folgenden Bewegung derart wenig, wenn nicht ein zu großes Zeitintervall angenommen wird, daß z. B. die in Art. 3 dargelegten zweiten Elemente in der Opposition des Jahres 1803 um drei, in der Opposition des

Jahres 1809 um fünf Minuten von der beobachteten heliozentrischen Länge abwichen. Da dies so ist, scheint es mir für die Konstruktion der Ephemeride für die zukünftige Bewegung des Planeten stets am bequemsten zu sein, die rein elliptischen Elemente zu verwenden, die aus den vier am nächsten vorangehenden Oppositionen abgeleitet wurden, wenn sich freilich mit Sicherheit eine so große Menge von Gleichungen, die aus den Störungen entstehen, ergeben sollte, daß die Berechnung selbst nur eines einzigen heliozentrischen Ortes des Planeten nicht ebenso mühsam werden muß wie die Berechnung der elliptischen Elemente mit Hilfe der oben dargelegten Regeln. So wird es erlaubt sein, den geozentrischen Ort des Planeten mit einem Fehler von wenigen Minuten stets sicher vorauszusagen, eine Genauigkeit, die zum Auffinden des Planeten genügt.

10.

Dennoch erfordert die Würde der Wissenschaft, daß auf eine festere Übereinstimmung geachtet wird, die, wie offensichtlich ist, nicht erhalten werden kann, bevor die Störungen in die Rechnung eingeführt werden. Eine so langwierige und widerwärtige Rechnung wäre übereilt gewesen, jedenfalls nach meinem Urteil, solange die Menge der Beobachtungen einen allzu kleinen Zeitraum umfaßte und sich die von den übrigen Planeten herrührenden Störungen kaum offenbarten. Nun aber, wo die elliptische Bewegung nicht länger genügt, um alle beobachteten Örter miteinander in Einklang zu bringen, scheint die Zeit gekommen zu sein, wo über eine genauere Theorie nachgedacht werden kann. Auf welche Weise die Berechnung der Störungen, die die Pallas zumal von Jupiter erleidet, am bequemsten und am genauesten nach meiner Ansicht durchzuführen ist, da es kaum und nicht einmal kaum möglich ist, die für die anderen Planeten verwendeten Methoden wegen der zu großen Exzentrizität und Neigung zu verwenden, werde ich bald an anderer Stelle ausführlicher erklären: aber die elliptischen Elemente, die am geeignetsten zu sein scheinen, auf ihnen die Berechnung der Störungen zu gründen, werde ich noch im folgenden behandeln. Ich beabsichtige, die elliptischen Elemente zu ermitteln, welche nicht diesen oder jenen Oppositionen genau, sondern allen, welche bis jetzt beobachtet sind, möglichst nahe genügen. Die Methode, vermittelst deren man ein solches Geschäft erledigen kann, habe ich zwar schon in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“, Art. 187, kurz beschrieben, da aber nicht nur der Gegenstand, welchen ich dort allgemein behandelt habe, in dem speciellen Falle, wo die beobachteten Örter Oppositionen sind, gewisse Abkürzungen gestattet, sondern auch gewisse praktische Kunstgriffe, durch welche ich die Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate schon lange zu einer bequemern zu machen gewohnt bin, in jenem Werke nicht gegeben werden, so hoffe ich, dass es den Astronomen nicht unlieb sein wird, wenn ich diese Rechnungen hier etwas weitläufiger wiedergebe. Da sich das ganze Geschäft um die Bestimmung von Verbesserungen dreht, die an angenäherte Elementen anzubringen sind, von welchen angenommen wird, dass sie von allen beobachteten Oertern nicht sehr abweichen, so wird die ganze Arbeit in zwei Abschnitte zerfallen: erstens nämlich müssen die linearen Gleichungen gebildet werden, welche die einzelnen beobachteten Oerter liefern, sodann sind aus diesen Gleichungen die zweckmässigsten Werthe der Unbekannten zu ermitteln.

11.

Nach den angenäherten Elementen sei

- L die mittlere Länge des Planeten für eine beliebige Epoche,
- t die Anzahl der verstrichenen Tage von der Epoche an bis zum Augenblick der Beobachtung,
- 7 die mittlere tägliche siderische Bewegung in Secunden,
- Π die Länge des Perihels,
- $e = \sin\varphi$ die Excentricität,
- a die grosse Halbaxe,
- r der Radius vector,
- v die wahre Anomalie,
- E die excentrische Anomalie,
- ☊ die Länge des aufsteigenden Knotens,
- i die Neigung der Bahn,
- u das Argument der Breite,
- λ die heliocentrische Länge,
- γ die heliocentrische Breite,
- β die geocentrische Breite,
- R die Entfernung der Erde von der Sonne.

Beobachtet soll aber sein

- α die heliocentrische Länge,
- ϐ die geocentrische Breite.

Endlich bezeichne ich mit $d\mathrm{L}$, $d7$, $d\Pi$ etc. Verbesserungen der Grössen L, 7, Π etc. Es wird daher

$d\mathrm{L} + t\,d7$ die Verbesserung der mittleren Länge,
$d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi$ die Verbesserung der mittleren Anomalie,

und deshalb nach den Art. 15. und 16. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“

$$dv = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) + \frac{a^2}{r^2}(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi$$

$$dr = \frac{r}{a}\,da + a\,\mathrm{tang}\,\varphi\sin v\,(d\mathrm{L} + t\,d7 - d\Pi) - a\cos\varphi\cos v\,d\varphi\,.$$

Ferner wird die Verbesserung des Argumentes der Breite

$$du = dv + d\Pi - d\Omega\,,$$

und nach Art. 52. der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" die Verbesserung der heliocentrischen Länge

$$d\lambda = d\Omega - \operatorname{tang}\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di + \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\,du\,.$$

Hieraus entnimmt man

$$\begin{aligned} d\lambda = \; & \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d\mathrm{L} \\ & + \frac{t\,a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\,d7 \\ & + \left(\frac{\cos i}{\cos^2\gamma} - \frac{a^2\cos\varphi\cos i}{r^2\cos^2\gamma}\right) d\Pi \\ & + \frac{a^3\cos i}{r^3\cos^2\gamma}\,(2 - e\cos\mathrm{E} - e^2)\sin\mathrm{E}\,d\varphi \\ & + \left(1 - \frac{\cos i}{\cos^2\gamma}\right) d\Omega \\ & - \operatorname{tang}\gamma\cos(\lambda - \Omega)\,di\,. \end{aligned}$$

Da man ferner hat

$$\begin{aligned} a^{\frac{3}{2}}7 &= \text{Const.} \\ r\sin(\beta - \gamma) &= \mathrm{R}\sin\beta \\ \operatorname{tang}\gamma &= \operatorname{tang} i\sin(\alpha - \Omega)\,, \end{aligned}$$

so wird durch Differentiation

$$\frac{da}{a} = -\frac{2}{3}\,\frac{d7}{7}$$

$$\frac{dr}{r} + \operatorname{cotang}(\beta - \gamma)\cdot(d\beta - d\gamma) = \operatorname{cotang}\beta\,d\beta\,, \text{ oder}$$

$$\begin{aligned} d\beta &= \frac{\sin\beta\cos(\beta - \gamma)}{\sin\gamma}\,d\gamma - \frac{\sin\beta\sin(\beta - \gamma)}{r\sin\gamma}\,dr \\ d\gamma &= \frac{\sin 2\gamma}{\sin 2i}\,di - \frac{1}{2}\sin 2\gamma\operatorname{cotang}(\alpha - \Omega)\,d\Omega\,, \end{aligned}$$

woraus man mit Hinzuziehung des oben entwickelten Werthes von dr entnimmt

$$d\beta = -\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} dL$$
$$+\left\{\frac{2 \sin\beta \sin(\beta-\gamma)}{3\,7 \sin\gamma} - \frac{a\,t \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma}\right\} d7$$
$$+\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \operatorname{tang}\varphi \sin v}{r \sin\gamma} d\Pi$$
$$+\frac{a \sin\beta \sin(\beta-\gamma) \cos\varphi \cos v}{r \sin\gamma} d\varphi$$
$$+\frac{2 \sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma}{\sin 2i} di$$
$$-\sin\beta \cos(\beta-\gamma) \cos\gamma \operatorname{cotang}(\alpha-\Omega)\, d\Omega\,.$$

Hiernach werden die Werthe der heliocentrischen Länge und der geocentrischen Breite aus den verbesserten Werthen der Elemente $\lambda + d\lambda$, $\beta + d\beta$, und deshalb liefert jede Opposition zwei Gleichungen

$$\alpha = \lambda + d\lambda$$
$$\mathfrak{b} = \beta + d\beta\,.$$

12.

Bei Anwendung dieser Vorschriften auf die im Art. 2. gegebenen sechs Oppositionen der Pallas erhalten wir, wenn wir die Rechnung auf das zweite der im Art. 3. skizzirten Elementensysteme begründen, die folgenden zwölf Gleichungen*):

*) Um die Nachrechnung der Zahlenangaben zu ermöglichen, setzen wir die oben angeführten, beobachteten sechs Oppositionen aus Art. 2. und die Elemente II. aus Art. 3. hierher.

Zeit der Opposition für den Meridian von Göttingen						Tage von Beginn d. Jahres 1803 an	Heliocentrische Länge			Geocentrische Breite		
1803	Juni	30.	0^h	27^m	32^s	181,019120	277°	39′	24,0″	+46°	26′	36,0″
1804	Aug.	30.	4	58	27	608,207257	337	0	36,1	+15	1	49,8
1805	Nov.	29.	11	15	4	1064,468796	67	20	42,9	−54	30	54,9
1807	Mai	4.	14	37	41	1585,609502	223	37	27,7	+42	11	25,6
1808	Juli	26.	21	17	32	2034,887176	304	2	59,7	+37	43	53,7
1809	Sept.	22.	16	10	20	2457,673843	359	40	4,4	− 7	22	10,1

II. *Elliptische Elemente der Pallas aus den Oppositionen der Jahre* 1804, 1805, 1807 und 1808.

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen 221° 34′ 56,7″
Mittlere tägliche tropische Bewegung . . . . 770,4467″

Aus der *ersten* Opposition, wo gefunden ist
die berechnete Länge = 277° 36′ 20,07″
und die geocentrische Breite = + 46° 26′ 29,19″:

$$\begin{aligned}0 = -183{,}93'' &+ 0{,}79363\,dL + 143{,}66\,d7 + 0{,}39493\,d\Pi\\ &+ 0{,}95920\,d\varphi - 0{,}18856\,d\Omega + 0{,}17387\,di\\ 0 = -\quad 6{,}81'' &- 0{,}02658\,dL + 46{,}71\,d7 + 0{,}02658\,d\Pi\\ &- 0{,}20858\,d\varphi + 0{,}15946\,d\Omega + 1{,}25782\,di\,.\end{aligned}$$

Aus der *zweiten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 337° 0′ 36,04″
und die geocentrische Breite = + 15° 1′ 46,71″:

$$\begin{aligned}0 = -\quad 0{,}06'' &+ 0{,}58880\,dL + 358{,}12\,d7 + 0{,}26208\,d\Pi\\ &- 0{,}85234\,d\varphi + 0{,}14912\,d\Omega + 0{,}17775\,di\\ 0 = -\quad 3{,}09'' &+ 0{,}01318\,dL + 28{,}39\,d7 - 0{,}01318\,d\Pi\\ &- 0{,}07861\,d\varphi + 0{,}91704\,d\Omega + 0{,}54365\,di\,.\end{aligned}$$

Aus der *dritten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 67° 20′ 42,88″
und die geocentrische Breite = — 54° 31′ 3,88″:

$$\begin{aligned}0 = -\quad 0{,}02'' &+ 1{,}73436\,dL + 1846{,}17\,d7 - 0{,}54603\,d\Pi\\ &- 2{,}05662\,d\varphi - 0{,}18833\,d\Omega - 0{,}17445\,di\\ 0 = -\quad 8{,}98'' &- 0{,}12606\,dL - 227{,}42\,d7 + 0{,}12606\,d\Pi\\ &- 0{,}38939\,d\varphi + 0{,}17176\,d\Omega - 1{,}35441\,di\,.\end{aligned}$$

Aus der *vierten* Opposition, wo
die berechnete Länge = 223° 37′ 25,39″
und die geocentrische Breite = + 42° 11′ 28,07″:

$$\begin{aligned}0 = -\quad 2{,}31'' &+ 0{,}99584\,dL + 1579{,}03\,d7 + 0{,}06456\,d\Pi\\ &+ 1{,}99545\,d\varphi - 0{,}06040\,d\Omega - 0{,}33750\,di\\ 0 = +\quad 2{,}47'' &- 0{,}08089\,dL - 67{,}22\,d7 + 0{,}08089\,d\Pi\\ &- 0{,}09970\,d\varphi - 0{,}46359\,d\Omega + 1{,}22803\,di\,.\end{aligned}$$

Aus der *fünften* Opposition, wo
die berechnete Länge = 304° 2′ 59,71″
und die geocentrische Breite = + 37° 44′ 31,82″:

Länge des Perihels 1803	121° 5′ 22,1″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 46,8
Neigung der Bahn	34 37 31,5
Excentricität (= sin [14° 10′ 4,08″])	0,2447624
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422276.

D. H.

$$
\begin{aligned}
0 &= + \quad 0{,}01'' + 0{,}65311\, dL + 1329{,}09\, d7 + 0{,}38994\, d\Pi \\
&\qquad - 0{,}08439\, d\varphi - 0{,}04305\, d☊ + 0{,}34268\, di \\
0 &= + \; 38{,}12'' - 0{,}00218\, dL + \quad 38{,}47\, d7 + 0{,}00218\, d\Pi \\
&\qquad - 0{,}18710\, d\varphi + 0{,}47301\, d☊ - 1{,}14371\, di\,.
\end{aligned}
$$

Aus der *sechsten* Opposition, wo
die berechnete Länge $= 359^\circ\ 34'\ 46{,}67''$
und die geocentrische Breite $= -7^\circ\ 20'\ 12{,}13''$:

$$
\begin{aligned}
0 &= -317{,}73'' + 0{,}69957\, dL + 1719{,}32\, d7 + 0{,}12913\, d\Pi \\
&\qquad - 1{,}38787\, d\varphi + 0{,}17130\, d☊ - 0{,}08360\, di \\
0 &= +117{,}97'' - 0{,}01315\, dL - \quad 43{,}84\, d7 + 0{,}01315\, d\Pi \\
&\qquad + 0{,}02929\, d\varphi + 1{,}02138\, d☊ - 0{,}27187\, di\,.
\end{aligned}
$$

Von diesen zwölf Gleichungen verwerfen wir aber die zehnte vollständig, da die beobachtete geocentrische Breite allzu unsicher ist.

13.

Da man die sechs Unbekannten dL, $d7$ etc. nicht so zu bestimmen vermag, dass allen elf Gleichungen genau Genüge geschieht, d. h. dass die einzelnen Funktionen der Unbekannten, welche rechts stehen, gleichzeitig $= 0$ werden, so wollen wir diejenigen Werthe ermitteln, durch welche die Quadrate dieser Funktionen die allerkleinste Summe ergeben. Man sieht nämlich leicht ein, wenn allgemein die folgenden linearen Funktionen der Unbekannten p, q, r, s, etc. vorgelegt sind:

$$
\begin{aligned}
n + ap + bq + cr + ds + \text{etc.} &= w \\
n' + a'p + b'q + c'r + d's + \text{etc.} &= w' \\
n'' + a''p + b''q + c''r + d''s + \text{etc.} &= w'' \\
n''' + a'''p + b'''q + c'''r + d'''s + \text{etc.} &= w'''
\end{aligned}
$$

etc., dass die Bedingungsgleichungen dafür, dass

$$w^2 + w'^2 + w''^2 + w'''^2 + \text{etc.} = \Omega$$

ein Minimum wird, die folgenden sind:

$$
\begin{aligned}
aw + a'w' + a''w'' + a'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\
bw + b'w' + b''w'' + b'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\
cw + c'w' + c''w'' + c'''w''' + \text{etc.} &= 0 \\
dw + d'w' + d''w'' + a'''w''' + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}
$$

etc. oder, wenn wir der Kürze wegen

$$\begin{array}{l}
an + a'n' + a''n'' + a'''n''' + \text{etc. mit } [an] \\
a^2 + a'^2 + a''^2 + a'''^2 + \text{etc. mit } [aa] \\
ab + a'b' + a''b'' + a'''b''' + \text{etc. mit } [ab] \\
\text{etc.} \\
b^2 + b'^2 + b''^2 + b'''^2 + \text{etc. mit } [bb] \\
bc + b'c' + b''c'' + b'''c''' + \text{etc. mit } [bc] \\
\text{etc. etc.}
\end{array}$$

bezeichnen, dass p, q, r, s etc. durch Elimination aus nachstehenden Gleichungen bestimmt werden müssen:

$$\begin{array}{l}
[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc.} = 0 \\
[bn] + [ab]p + [bb]q + [bc]r + [bd]s + \text{etc.} = 0 \\
[cn] + [ac]p + [bc]q + [cc]r + [cd]s + \text{etc.} = 0 \\
[dn] + [ad]p + [bd]q + [cd]r + [dd]s + \text{etc.} = 0 \\
\text{etc.}
\end{array}$$

Wenn jedoch die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. etwas grösser ist, so verursacht die Elimination eine sehr ausgedehnte und unangenehme Arbeit, welche wir auf nachfolgende Weise wesentlich abkürzen können. Ausser den Coefficienten $[an]$, $[aa]$, $[ab]$ etc. (deren Anzahl $= \frac{1}{2}(\mu^2 + 3\mu)$ wird, wenn die Anzahl der Unbekannten $= \mu$ ist) nehme ich auch

$$n^2 + n'^2 + n''^2 + n'''^2 + \text{etc.} = [nn]$$

als berechnet an, worauf leicht zu ersehen ist, dass

$$\begin{array}{rl}
\Omega = & [nn] + 2[an]p + 2[bn]q + 2[cn]r + 2[dn]s + \text{etc.} \\
& + [aa]p^2 + 2[ab]pq + 2[ac]pr + 2[ad]ps + \text{etc.} \\
& + [bb]q^2 + 2[bc]qr + 2[bd]qs + \text{etc.} \\
& + [cc]r^2 + 2[cd]rs + \text{etc.} \\
& + [dd]s^2 + \text{etc.} \\
& \text{etc.}
\end{array}$$

wird. Bezeichnen wir daher

$$[an] + [aa]p + [ab]q + [ac]r + [ad]s + \text{etc. mit A,}$$

so sind offenbar diejenigen Glieder von $\frac{A^2}{[aa]}$, bei welchen der Faktor p auftritt, einzeln in Ω enthalten, und deshalb muss $\Omega - \frac{A^2}{[aa]}$ eine von p unabhängige Funktion sein. Setzen wir also

$$[nn] - \frac{[an]^2}{[aa]} \quad = [nn, 1]$$

$$[bn] - \frac{[an]\,[ab]}{[aa]} = [bn, 1]$$

$$[cn] - \frac{[an]\,[ac]}{[aa]} = [cn, 1]$$

$$[dn] - \frac{[an]\,[ad]}{[aa]} = [dn, 1] \text{ etc.}$$

$$[bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]} \quad = [bb, 1]$$

$$[bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]} = [bc, 1]$$

$$[bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]} = [bd, 1] \text{ etc. etc., so ist}$$

$$\begin{aligned} \Omega - \frac{A^2}{[aa]} = [nn, 1] &+ 2[bn, 1]\, q + 2[cn, 1]\, r + 2[dn, 1]\, s + \text{etc.} \\ &+ [bb, 1]\, q^2 + 2[bc, 1]\, qr + 2[bd, 1]\, qs + \text{etc.} \\ &+ [cc, 1]\, r^2 + 2[cd, 1]\, rs + \text{etc.} \\ &+ [dd, 1]\, s^2 + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}$$

welche Funktion wir mit Ω' bezeichnen wollen.

Wenn wir analog

$$[bn, 1] + [bb, 1]\, q + [bc, 1]\, r + [bd, 1]\, s + \text{etc.} = B$$

setzen, so wird $\Omega' - \frac{B^2}{[bb, 1]}$ eine von q unabhängige Funktion sein, welche wir $= \Omega''$ annehmen. Auf dieselbe Weise machen wir

$$[nn, 1] - \frac{[bn, 1]^2}{[bb, 1]} \quad = [nn, 2]$$

$$[cn, 1] - \frac{[bn, 1]\,[bc, 1]}{[bb, 1]} = [cn, 2] \text{ etc.}$$

$$[cc, 1] - \frac{[bc, 1]^2}{[bb, 1]} \quad = [cc, 2]$$

etc. etc. und

$$[cn, 2] + [cc, 2]\, r + [cd, 2]\, s + \text{etc.} = C,$$

wonach $\Omega'' - \frac{C^2}{[cc, 2]}$ eine auch von r unabhängige Funktion sein wird. In derselben Weise fahren wir fort, bis wir in der Reihe

Ω, Ω', Ω'' etc. zu einem von allen Unbekannten unabhängigen Glied gelangen, welches $[nn, \mu]$ sein wird, wenn wir die Anzahl der Unbekannten p, q, r, s etc. mit μ bezeichnen. Wir erhalten also

$$\Omega = \frac{A^2}{[aa]} + \frac{B^2}{[bb, 1]} + \frac{C^2}{[cc, 2]} + \frac{D^2}{[dd, 3]} + \text{etc.} + [nn, \mu].$$

Da nun $\Omega = w^2 + w'^2 + w''^2 +$ etc. seiner Natur nach einen negativen Werth nicht annehmen kann, so lässt sich leicht zeigen, dass die Divisoren $[aa]$, $[bb, 1]$, $[cc, 2]$, $[dd, 3]$ etc. nothwendig *positiv* herauskommen müssen (der Kürze wegen will ich jedoch diese Auseinandersetzung hier nicht weitläufiger verfolgen). Hieraus folgt aber von selbst, dass sich der kleinste Werth von Ω ergiebt, wenn $A = 0$, $B = 0$, $C = 0$, $D = 0$ etc. wird. Aus diesen μ Gleichungen müssen wir daher die Unbekannten p, q, r, s etc. bestimmen, was wir in umgekehrter Reihenfolge sehr leicht ausführen können, da offenbar die letzte Gleichung nur eine einzige Unbekannte enthält, die vorletzte zwei und so weiter. Diese Methode empfiehlt sich zugleich aus dem Grunde, weil dabei der kleinste Werth der Summe Ω von selbst bekannt wird, da er ja offenbar $= [nn, \mu]$ ist.

14.

Diese Vorschriften wollen wir jetzt auf unser Beispiel anwenden, wo p, q, r, s etc. bezw. dL, $d7$, $d\Pi$, $d\varphi$, $d\Omega$, di sind. Nach sorgfältig durchgeführter Rechnung fand ich die folgenden numerischen Werthe:

		Hieraus leitete ich ferner ab
$[nn] = +148848$	$[bc] = -49{,}06$	
$[an] = -371{,}09$	$[bd] = -3229{,}77$	
$[bn] = -580104$	$[be] = -198{,}64$	$[nn, 1] = +125569$
$[cn] = -113{,}45$	$[bf] = -143{,}05$	$[bn, 1] = -138534$
$[dn] = +268{,}53$	$[cc] = +0{,}71917$	$[cn, 1] = -119{,}31$
$[en] = +94{,}26$	$[cd] = +1{,}13382$	$[dn, 1] = -125{,}18$
$[fn] = -31{,}81$	$[ce] = +0{,}06400$	$[en, 1] = +72{,}52$
$[aa] = +5{,}91569$	$[cf] = +0{,}26341$	$[fn, 1] = -43{,}22$
$[ab] = +7203{,}91$	$[dd] = +12{,}00340$	$[bb, 1] = +2458225$
$[ac] = -0{,}09344$	$[de] = -0{,}37137$	$[bc, 1] = +62{,}13$
$[ad] = -2{,}28516$	$[df] = -0{,}11762$	$[bd, 1] = -510{,}58$
$[ae] = -0{,}34664$	$[ee] = +2{,}28215$	$[be, 1] = +213{,}84$
$[af] = -0{,}18194$	$[ef] = -0{,}36136$	$[bf, 1] = +73{,}45$
$[bb] = +10834225$	$[ff] = +5{,}62456$	$[cc, 1] = +0{,}71769$

$[cd, 1] = +1{,}09773$
$[ce, 1] = -0{,}05852$
$[cf, 1] = +0{,}26054$
$[dd, 1] = +11{,}12064$
$[de, 1] = -0{,}50528$
$[df, 1] = -0{,}18790$
$[ee, 1] = +2{,}26185$
$[ef, 1] = -0{,}37202$
$[ff, 1] = +5{,}61905$

Und hieraus auf ähnliche Weise

$[nn, 2] = +117763$
$[cn, 2] = -115{,}81$
$[dn, 2] = -153{,}95$
$[en, 2] = +84{,}57$
$[fn, 2] = -39{,}08$
$[cc, 2] = +0{,}71612$

$[cd, 2] = +1{,}11063$
$[ce, 2] = -0{,}06392$
$[cf, 2] = +0{,}25868$
$[dd, 2] = +11{,}01463$
$[de, 2] = -0{,}46088$
$[df, 2] = -0{,}17265$
$[ee, 2] = +2{,}24325$
$[ef, 2] = -0{,}37841$
$[ff, 2] = +5{,}61686$

Hieraus ferner

$[nn, 3] = +99034$
$[dn, 3] = +25{,}66$
$[en, 3] = +74{,}23$
$[fn, 3] = +2{,}75$
$[dd, 3] = +9{,}29213$
$[de, 3] = -0{,}36175$
$[df, 3] = -0{,}57384$

$[ee, 3] = +2{,}23754$
$[ef, 3] = -0{,}35532$
$[ff, 3] = +5{,}52342$

Hieraus ebenso

$[nn, 4] = +98963$
$[en, 4] = +75{,}23$
$[fn, 4] = +4{,}33$
$[ee, 4] = +2{,}22346$
$[ef, 4] = -0{,}37766$
$[ff, 4] = +5{,}48798$

Hieraus

$[nn, 5] = +96418$
$[fn, 5] = +17{,}11$
$[ff, 5] = +5{,}42383$

Und hieraus endlich

$[nn, 6] = +96364\,.$

Wir haben daher zur Bestimmung der Unbekannten die sechs folgenden Gleichungen:

$$
\begin{aligned}
0 &= +\ 17{,}11'' + 5{,}42383\,di \\
0 &= +\ 75{,}23'' + 2{,}22346\,d☊ - 0{,}37766\,di \\
0 &= +\ 25{,}66'' + 9{,}29213\,d\varphi - 0{,}36175\,d☊ - 0{,}57384\,di \\
0 &= -\ 115{,}81'' + 0{,}71612\,d\Pi + 1{,}11063\,d\varphi - 0{,}06392\,d☊ \\
&\qquad + 0{,}25868\,di \\
0 &= -138534'' + 2458225\,d7 + 62{,}13\,d\Pi - 510{,}58\,d\varphi \\
&\qquad + 213{,}84\,d☊ + 73{,}45\,di \\
0 &= -371{,}09'' + 5{,}91569\,dL + 7203{,}91\,d7 - 0{,}09344\,d\Pi \\
&\qquad - 2{,}28516\,d\varphi - 0{,}34664\,d☊ - 0{,}18194\,di,
\end{aligned}
$$

woraus wir ableiten

$$
\begin{aligned}
di &= -\ 3{,}15'' \\
d☊ &= -\ 34{,}37'' \\
d\varphi &= -\ 4{,}29'' \\
d\Pi &= +166{,}44'' \\
d7 &= +\ 0{,}054335'' \\
dL &= -\ 3{,}06''.
\end{aligned}
$$

Die verbesserten elliptischen Elemente, welche allen sechs Oppositionen möglichst nahe genügen, sind also folgende:

Epoche der mittleren Länge 1803 für den Meridian von Göttingen	221° 34′ 53,64″
Mittlere tägliche tropische Bewegung	770,5010″
Länge des Perihels 1803	121° 8′ 8,54″
Länge des aufsteigenden Knotens 1803	172 28 12,43
Neigung der Bahn	34 37 28,35
Excentricität (= sin[14° 9′ 59,79″])	0,2447424
Logarithmus der grossen Halbaxe	0,4422071.

15.

Setzen wir die soeben gefundenen Werthe der Verbesserungen dL, $d7$ etc. in die zwölf Gleichungen des Art. 12. ein, so erhalten wir die nachfolgenden Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der heliocentrischen Längen und der geocentrischen Breiten:

Bei d. Opposition des Jahres	Differenz in Länge	Differenz in Breite
1803	−111,00″	− 8,31″
1804	+ 59,18	−36,67
1805	+ 19,92	+ 0,07
1807	+ 85,77	+ 25,01
1808	+135,88	+ 28,72
1809	−216,54	+ 83,01

4. Allgemeine Untersuchungen über die unendliche Reihe $1+\frac{a\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{a(a+1)(a+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+u.s.f.$

Mit Einschluss der nachgelassenen Fortsetzung aus dem Lateinischen übersetzt. Hrsg. von Heinrich Simon, Berlin 1888, 86 S.

Original, nur 1. Teil:
Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{a\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{a(a+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot 2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{a(a+1)(a+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.$$

Pars prior. Commentationes societatis regiae scieniarum Gottingensis recentiores 2, (1811–1813) 1813, commentationes classis mathematicae, 46 S. In: Gauß Werke 3, S. 123–162.

Allgemeine Untersuchungen

über die

unendliche Reihe

$$1+\frac{\alpha\beta}{1.\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1.2.\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1.2.3.\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+\text{u.s.f.}$$

Erster Teil.

Einleitung.

1.

Die Reihe, die wir in dieser Abhandlung untersuchen wollen, kann als Function der vier Grössen α, β, γ, x angesehen werden, die wir die *Elemente* derselben nennen, indem wir der Reihe nach das erste Element α, das zweite β, das dritte γ und das vierte x unterscheiden. Offenbar ist es erlaubt, das erste und zweite Element mit einander zu vertauschen: wenn wir also der Kürze wegen unsere Reihe durch $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnen, so haben wir $F(\beta, \alpha, \gamma, x) = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$.

2.

Werden den Elementen α, β, γ bestimmte Werte beigelegt, so geht unsere Reihe in eine Function einer einzigen Veränderlichen x über, die offenbar nach dem $1-\alpha$ten oder $1-\beta$ten Gliede abbricht, wenn $\alpha - 1$ oder $\beta - 1$ eine negative ganze Zahl ist, in allen anderen Fällen aber sich ins Unendliche erstreckt. Im ersteren Falle stellt die Reihe eine rationale algebraische Function dar, im zweiten dagegen meist eine transscendente Function. Das dritte Element γ darf weder eine negative ganze Zahl noch $= 0$ sein, damit wir nicht zu unendlich grossen Gliedern kommen.

3.

Die Coefficienten der Potenzen x^m und x^{m+1} in unserer Reihe verhalten sich wie

$$1 + \frac{\gamma+1}{m} + \frac{\gamma}{mm} : 1 + \frac{\alpha+\beta}{m} + \frac{\alpha\beta}{mm},$$

nähern sich also der Gleichheit um so mehr, je grösser m genommen wird. Wenn daher auch dem vierten Elemente x ein bestimmter Wert beigelegt wird, so wird von dessen Beschaffenheit die Convergenz oder Divergenz abhängen. So oft nämlich x einen reellen, positiven oder negativen, Wert, kleiner als die Einheit, erhält, wird die Reihe sicher, wenn auch nicht gleich von Anfang an, so doch nach einer gewissen Entfernung convergiren und zu einer ganz bestimmten endlichen Summe führen. Dasselbe ergiebt sich für einen imaginären Wert von x von der Form $a + b\sqrt{-1}$, sofern $aa + bb < 1$. Für einen reellen Wert von x dagegen, der grösser als die Einheit ist, oder für einen imaginären von der Form $a + b\sqrt{-1}$, wo $aa + bb > 1$, wird die Reihe, wenn nicht sogleich, doch nach einer gewissen Entfernung notwendig divergiren, so dass von ihrer *Summe* nicht die Rede sein kann. Für den Wert $x = 1$ endlich (oder allgemeiner für einen Wert von der Form $a + b\sqrt{-1}$, wo $aa + bb = 1$) wird die Convergenz oder Divergenz der Reihe von der Beschaffenheit von α, β, γ abhängen; von dieser, und insbesondere von der Summe der Reihe für $x = 1$, werden wir im dritten Abschnitt sprechen.

Da nun unsere Function als Summe einer Reihe definirt ist, so ist klar, dass sich unsere Untersuchung naturgemäss auf die Fälle beschränkt, wo die Reihe wirklich convergirt, und dass es ungereimt ist, nach dem Werte der Reihe zu fragen, wenn x einen grösseren Wert als die Einheit hat. Später jedoch, vom vierten Abschnitt an, werden wir unsere Function auf ein höheres Princip gründen, welches eine sehr allgemeine Anwendung gestattet.

4.

Die Differentiation unserer Reihe, wobei wir nur das vierte Element x als veränderlich ansehen, führt auf eine eben solche Function, denn man hat offenbar

$$\frac{dF(\alpha, \beta, \gamma, x)}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha + 1, \beta + 1, \gamma + 1, x).$$

Dasselbe gilt von wiederholten Differentiationen.

5.

Es wird der Mühe wert sein, einige Functionen, die sich auf unsere Reihe zurückführen lassen, und die in der ganzen Analysis sehr häufig vorkommen, hierherzusetzen.

I. $$(t + u)^n = t^n F\left(-n, \beta, \beta, -\frac{u}{t}\right),$$

wo das Element β beliebig ist.

II. $$(t + u)^n + (t - u)^n = 2t^n F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{uu}{tt}\right),$$

III. $$(t + u)^n + t^n = 2t^n F\left(-n, \omega, 2\omega, -\frac{u}{t}\right),$$

wo ω eine unendlich kleine Grösse bedeutet.

IV. $$(t+u)^n-(t-u)^n=2nt^{n-1}uF\left(-\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n+1,\ \frac{3}{2},\ \frac{uu}{tt}\right),$$

V. $$(t+u)^n-t^n=nt^{n-1}uF\left(1-n,\ 1,\ 2,\ -\frac{u}{t}\right),$$

VI. $$\log(1+t)=tF(1,\ 1,\ 2,\ -t),$$

VII. $$\log\frac{1+t}{1-t}=2tF\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ tt\right),$$

VIII. $$e^t=F\left(1,\ k,\ 1,\ \frac{t}{k}\right)=1+tF\left(1,\ k,\ 2,\ \frac{t}{k}\right)$$
$$=1+t+\frac{1}{2}ttF\left(1,\ k,\ 3,\ \frac{t}{k}\right)\ \text{u. s. w.},$$

wo e die Basis der natürlichen Logarithmen, k eine unendlich grosse Zahl bezeichnet.

IX. $$e^t+e^{-t}=2F\left(k,\ k',\ \frac{1}{2},\ \frac{tt}{4kk'}\right),$$

wo k und k' unendlich grosse Zahlen bedeuten.

X. $$e^t-e^{-t}=2tF\left(k,\ k',\ \frac{3}{2},\ \frac{tt}{4kk'}\right),$$

XI. $$\sin t=tF\left(k,\ k',\ \frac{3}{2},\ -\frac{tt}{4kk'}\right),$$

XII. $$\cos t=F\left(k,\ k',\ \frac{1}{2},\ -\frac{tt}{4kk'}\right),$$

XIII.[1] $$t=\sin t.F\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin t^2\right),$$

XIV. $$t=\sin t.\cos t.F\left(1,\ 1,\ \frac{3}{2},\ \sin t^2\right),$$

XV. $$t=\operatorname{tang} t.F\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ -\operatorname{tang} t^2\right),$$

XVI. $$\sin nt=n\sin t.F\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ \sin t^2\right),$$

XVII. $$\sin nt=n\sin t.\cos t.F\left(\frac{1}{2}n+1,\ -\frac{1}{2}n+1,\ \frac{3}{2},\ \sin t^2\right),$$

XVIII. $$\sin nt=n\sin t.\cos t^{n-1}F\left(-\frac{1}{2}n+1,\ -\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ -\operatorname{tang} t^2\right),$$

XIX. $\sin nt = n \sin t . \cos t^{-n-1} F\left(\frac{1}{2}n + 1, \frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -\operatorname{tang} t^2\right)$,

XX. $\cos nt = F\left(\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, \sin t^2\right)$,

XXI. $\cos nt = \cos t . F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \sin t^2\right)$,

XXII. $\cos nt = \cos t^n F\left(-\frac{1}{2}n, -\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\operatorname{tang} t^2\right)$,

XXIII. $\cos nt = \cos t^{-n} F\left(\frac{1}{2}n + \frac{1}{2}, \frac{1}{2}n, \frac{1}{2}, -\operatorname{tang} t^2\right)$.

6.

Die vorstehenden Functionen sind algebraische, sowie von Logarithmen und Kreisbogen abhängende transscendente. Aber nicht um *ihret*willen stellen wir unsere *allgemeine* Untersuchung an, sondern vielmehr um die Theorie der höheren transscendenten Functionen zu fördern, von denen unsere Reihe ein sehr ausgedehntes Geschlecht umfasst. Dahin gehören, ausser unzähligen anderen, die Coefficienten, die aus der Entwickelung der Function $(aa + bb - 2ab\cos\varphi)^{-n}$ in eine nach den Cosinus der Winkel φ, 2φ, 3φ u. s. w. fortschreitende Reihe hervorgehen und die wir *insbesondere* bei anderer Gelegenheit ausführlicher behandeln werden. Auf die Form unserer Reihe können jene Coefficienten auf mehrere Arten zurückgeführt werden. Setzen wir nämlich

$$(aa + bb - 2ab\cos\varphi)^{-n} = \Omega = A + 2A'\cos\varphi + 2A''\cos 2\varphi + 2A'''\cos 3\varphi + \cdots$$

so haben wir *erstens*

$$A = a^{-2n} F\left(n, n, 1, \frac{bb}{aa}\right),$$

$$A' = na^{-2n-1} bF\left(n, n+1, 2, \frac{bb}{aa}\right),$$

$$A'' = \frac{n(n+1)}{1.2} a^{-2n-2} bbF\left(n, n+2, 3, \frac{bb}{aa}\right),$$

$$A''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} a^{-2n-3} b^3 F\left(n, n+3, 4, \frac{bb}{aa}\right),$$

u. s. f.

Betrachtet man nämlich $aa + bb - 2ab\cos\varphi$ als das Product von $a - br$ und $a - br^{-1}$ (wobei r die Grösse $\cos\varphi + \sin\varphi . \sqrt{-1}$ bezeichnet), so wird Ω gleich dem Product

von a^{-2n}

mal $1 + n\dfrac{br}{a} + \dfrac{n(n+1)}{1.2}\cdot\dfrac{bbrr}{aa} + \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{b^3r^3}{a^3} + \cdots$

mal $1 + n\dfrac{br^{-1}}{a} + \dfrac{n(n+1)}{1.2}\cdot\dfrac{bbr^{-2}}{aa} + \dfrac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}\cdot\dfrac{b^3r^{-3}}{a^3} + \cdots,$

und da dies Product identisch sein muss mit

$$A + A'(r+r^{-1}) + A''(rr+r^{-2}) + A'''(r^3+r^{-3}) + \cdots,$$

so ergeben sich die obigen Werte ohne Weiteres.

Ferner haben wir *zweitens*

$$A\ = (aa+bb)^{-n} F\left(\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{4aabb}{(aa+bb)^2}\right),$$

$$A'\ = n(aa+bb)^{-n-1}\,abF\left(\frac{1}{2}n+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}n+1,\ 2,\ \frac{4aabb}{(aa+bb)^2}\right),$$

$$A'' = \frac{n(n+1)}{1.2}(aa+bb)^{-n-2}\,aabbF\left(\frac{1}{2}n+1,\ \frac{1}{2}n+\frac{3}{2},\ 3,\ \frac{4aabb}{(aa+bb)^2}\right),$$

$$A''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(aa+bb)^{-n-3}\,a^3b^3F\left(\frac{1}{2}n+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}n+2,\ 4,\ \frac{4aabb}{(aa+bb)^2}\right),$$

u. s. f.,

welche Werte leicht aus

$$\Omega(aa+bb)^n = 1 + n(r+r^{-1})\frac{ab}{aa+bb} + \frac{n(n+1)}{1.2}(r+r^{-1})^2\frac{aabb}{(aa+bb)^2} + \cdots$$

folgen.

Drittens wird

$$A\ = (a+b)^{-2n} F\left(n,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{4ab}{(a+b)^2}\right),$$

$$A'\ = n(a+b)^{-2n-2}\,abF\left(n+1,\ \frac{3}{2},\ 3,\ \frac{4ab}{(a+b)^2}\right),$$

$$A'' = \frac{n(n+1)}{1.2}(a+b)^{-2n-4}\,aabbF\left(n+2,\ \frac{5}{2},\ 5,\ \frac{4ab}{(a+b)^2}\right),$$

$$A''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(a+b)^{-2n-6}\,a^3b^3F\left(n+3,\ \frac{7}{2},\ 7,\ \frac{4ab}{(a+b)^2}\right),$$

u. s. f.

Endlich ist *viertens*

$$A \;=(a-b)^{-2n}F\left(n,\ \frac{1}{2},\ 1,\ -\frac{4ab}{(a-b)^2}\right),$$

$$A' = n\,(a-b)^{-2n-2}ab\,F\left(n+1,\ \frac{3}{2},\ 3,\ -\frac{4ab}{(a-b)^2}\right),$$

$$A'' = \frac{n(n+1)}{1.2}(a-b)^{-2n-4}aabb\,F\left(n+2,\ \frac{5}{2},\ 5,\ -\frac{4ab}{(a-b)^2}\right),$$

$$A''' = \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3}(a-b)^{2n-6}a^3b^3F\left(n+3,\ \frac{7}{2},\ 7,\ -\frac{4ab}{(a-b)^2}\right),$$

u. s. f.

Jene und diese Werte ergeben sich leicht aus

$$\Omega\,(a+b)^{2n} = \left(1-\frac{4ab\cos\frac{1}{2}\varphi^2}{(a+b)^2}\right)^{-n}$$
$$= 1+n\frac{ab}{(a+b)^2}(r^{\frac{1}{2}}+r^{-\frac{1}{2}})^2+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{aabb}{(a+b)^4}(r^{\frac{1}{2}}+r^{-\frac{1}{2}})^4+\cdots$$

$$\Omega\,(a-b)^{2n} = \left(1+\frac{4ab\sin\frac{1}{2}\varphi^2}{(a-b)^2}\right)^{-n}$$
$$= 1+n\frac{ab}{(a-b)^2}(r^{\frac{1}{2}}-r^{-\frac{1}{2}})^2+\frac{n(n+1)}{1.2}\cdot\frac{aabb}{(a-b)^4}(r^{\frac{1}{2}}-r^{-\frac{1}{2}})^4+\cdots$$

Erster Abschnitt.

Beziehungen zwischen benachbarten[2]) Functionen.

7.

Wir nennen eine Function zu $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ *benachbart*, wenn sie aus dieser dadurch hervorgeht, dass das erste, zweite oder dritte Element um eine Einheit vermehrt oder vermindert wird, während die drei übrigen Elemente ungeändert bleiben. Die ursprüngliche Function $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ liefert also sechs benachbarte. Zwischen je zweien derselben und der ursprünglichen Function besteht eine sehr einfache lineare Gleichung. Diese Gleichungen, fünfzehn an der Zahl, stellen wir hier zur Übersicht zusammen, wobei wir der Kürze wegen das vierte Element, das stets $= x$ zu denken ist, fortlassen und die ursprüngliche Function einfach mit F bezeichnen.

$$[1]\quad 0 = (\gamma - 2\alpha - (\beta - \alpha)x)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma),$$

$$[2]\quad 0 = (\beta - \alpha)F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) - \beta F(\alpha, \beta+1, \gamma),$$

$$[3]\quad 0 = (\gamma - \alpha - \beta)F + \alpha(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma-\beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma),$$

$$[4]\quad 0 = \gamma(\alpha - (\gamma-\beta)x)F - \alpha\gamma(1-x)F(\alpha+1, \beta, \gamma) \\ + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1),$$

$$[5]\quad 0 = (\gamma - \alpha - 1)F + \alpha F(\alpha+1, \beta, \gamma) - (\gamma-1)F(\alpha, \beta, \gamma-1),$$

$$[6]\quad 0 = (\gamma - \alpha - \beta)F - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) + \beta(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma),$$

$$[7]\quad 0 = (\beta - \alpha)(1-x)F - (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) + (\gamma-\beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma),$$

$$[8]\quad 0 = \gamma(1-x)F - \gamma F(\alpha-1, \beta, \gamma) + (\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1),$$

$$[9]\quad 0 = (\alpha - 1 - (\gamma-\beta-1)x)F + (\gamma-\alpha)F(\alpha-1, \beta, \gamma) \\ - (\gamma-1)(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma-1),$$

$$[10]\quad 0 = (\gamma - 2\beta + (\beta - \alpha)x)F + \beta(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma) - (\gamma-\beta)F(\alpha, \beta-1, \gamma),$$

$$[11]\quad 0 = \gamma(\beta - (\gamma-\alpha)x)F - \beta\gamma(1-x)F(\alpha, \beta+1, \gamma) \\ + (\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)xF(\alpha, \beta, \gamma+1),$$

[12] $0 = (\gamma - \beta - 1)F + \beta F(\alpha, \beta + 1, \gamma) - (\gamma - 1)F(\alpha, \beta, \gamma - 1)$,

[13] $0 = \gamma(1 - x)F - \gamma F(\alpha, \beta - 1, \gamma) + (\gamma - \alpha)xF(\alpha, \beta, \gamma + 1)$,

[14] $$0 = (\beta - 1 - (\gamma - \alpha - 1)x)F + (\gamma - \beta)F(\alpha, \beta - 1, \gamma) \\ - (\gamma - 1)(1 - x)F(\alpha, \beta, \gamma - 1),$$

[15] $$0 = \gamma(\gamma - 1 - (2\gamma - \alpha - \beta - 1)x)F + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)xF(\alpha, \beta, \gamma + 1) \\ - \gamma(\gamma - 1)(1 - x)F(\alpha, \beta, \gamma - 1).$$

8.

Diese Formeln sind folgendermassen zu beweisen. Setzen wir

$$\frac{(\alpha + 1)(\alpha + 2)\ldots(\alpha + m - 1)\beta(\beta + 1)\ldots(\beta + m - 2)}{1.2.3\ldots m.\gamma(\gamma + 1)\ldots(\gamma + m - 1)} = M,$$

so wird der Coefficient von x^m

in F . . . . $\alpha(\beta + m - 1)M$,
in $F(\alpha, \beta - 1, \gamma)$ . . . $\alpha(\beta - 1)M$,
in $F(\alpha + 1, \beta, \gamma)$ . . . $(\alpha + m)(\beta + m - 1)M$,
in $F(\alpha, \beta, \gamma - 1)$ . . . $\dfrac{\alpha(\beta + m - 1)(\gamma + m - 1)M}{\gamma - 1}$,

dagegen der Coefficient von x^{m-1} in $F(\alpha + 1, \beta, \gamma)$ oder der Coefficient von x^m in $xF(\alpha + 1, \beta, \gamma)$

$$= m(\gamma + m - 1)M.$$

Hieraus erhellt sofort die Richtigkeit der Formeln 5 und 3; durch Vertauschung von α und β geht aus 5 Formel 12 hervor, dann aus diesen beiden durch Elimination 2. Weiter entsteht aus 3 durch dieselbe Vertauschung 6; aus der Verbindung von 6 und 12 entsteht 9, hieraus durch Vertauschung 14, und aus der Verbindung beider 7; aus 2 und 6 folgt endlich 1, und hieraus durch Vertauschung 10. Formel 8 kann ebenso, wie oben die Formeln 5 und 3, aus der Betrachtung der Coefficienten hergeleitet werden (auf dieselbe Art könnten, wenn man wollte, *alle* 15 Formeln gefunden werden), eleganter aber aus den schon bekannten auf folgende Weise. Verwandeln wir in Formel 5 das Element α in $\alpha - 1$ und γ in $\gamma + 1$, so kommt

$$0 = (\gamma - \alpha + 1)F(\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) + (\alpha - 1)F(\alpha, \beta, \gamma + 1) - \gamma F(\alpha - 1, \beta, \gamma).$$

Verwandeln wir aber in Formel 9 nur γ in $\gamma + 1$, so wird

$$0 = (\alpha - 1 - (\gamma - \beta)x)F(\alpha, \beta, \gamma + 1) + (\gamma - \alpha + 1)F(\alpha - 1, \beta, \gamma + 1) \\ - \gamma(1 - x)F(\alpha, \beta, \gamma)$$

Die Subtraction dieser beiden Formeln liefert sofort 8, und diese durch Vertauschung 13. Aus 1 und 8 geht 4 hervor, und hieraus durch Vertauschung 11. Aus 8 und 9 folgt endlich 15.

9.

Sind $\alpha'-\alpha$, $\beta'-\beta$, $\gamma'-\gamma$, sowie $\alpha''-\alpha$, $\beta''-\beta$, $\gamma''-\gamma$ (positive oder negative) ganze Zahlen, so kann man von der Function $F(\alpha, \beta, \gamma)$ zur Function $F(\alpha', \beta', \gamma')$ und ebenso von dieser zur Function $F(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ durch eine Reihe ähnlicher Functionen so übergehen, dass jede der vorhergehenden und der folgenden benachbart ist, indem man nämlich zuerst ein Element, etwa α, beständig um eine Einheit ändert, bis man von $F(\alpha, \beta, \gamma)$ zu $F(\alpha', \beta, \gamma)$ gelangt ist, sodann das zweite Element ändert, bis man zu $F(\alpha', \beta', \gamma)$ gelangt, und endlich das dritte Element ändert, bis man zu $F(\alpha', \beta', \gamma')$ gelangt, und ebenso von dieser zu $F(\alpha'', \beta'', \gamma'')$. Da nun nach Art. 7 zwischen der ersten, zweiten und dritten, und allgemein zwischen je drei aufeinanderfolgenden Functionen dieser Reihe lineare Gleichungen bestehen, so ist leicht ersichtlich, dass daraus durch Elimination eine lineare Gleichung zwischen den Functionen $F(\alpha, \beta, \gamma)$, $F(\alpha', \beta', \gamma')$ und $F(\alpha'', \beta'', \gamma'')$ abgeleitet werden kann, so dass, allgemein gesprochen, aus zwei Functionen, deren drei erste Elemente sich um ganze Zahlen unterscheiden, jede beliebige andere ebenso beschaffene Function abgeleitet werden kann, wenn nur das vierte Element dasselbe bleibt. Uebrigens begnügen wir uns hier, diese merkwürdige Wahrheit im allgemeinen festgestellt zu haben, ohne auf die Vereinfachungen einzugehen, durch welche die zu diesem Zwecke nötigen Rechnungen möglichst kurz werden.

10.

Seien z. B. gegeben die Functionen

$$F(\alpha, \beta, \gamma),\quad F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1),\quad F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2)$$

und eine lineare Gleichung zwischen denselben sei gesucht. Wir verknüpfen sie folgendermassen durch benachbarte Functionen

$$\begin{aligned}
F(\alpha, \beta, \gamma) &= F\\
F(\alpha+1, \beta, \gamma) &= F'\\
F(\alpha+1, \beta+1, \gamma) &= F''\\
F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1) &= F'''\\
F(\alpha+2, \beta+1, \gamma+1) &= F^{\mathrm{IV}}\\
F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+1) &= F^{\mathrm{V}}\\
F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2) &= F^{\mathrm{VI}}
\end{aligned}$$

Wir haben also die fünf linearen Gleichungen (aus den Formeln 6, 13, 5 des Art. 7):

$$\text{I.}\quad 0=(\gamma-\alpha-1)F-(\gamma-\alpha-1-\beta)F'-\beta(1-x)F''$$

$$\text{II.}\quad 0=\gamma F'-\gamma(1-x)F''-(\gamma-\alpha-1)xF'''$$

$$\text{III.}\quad 0=\gamma F''-(\gamma-\alpha-1)F'''-(\alpha+1)F^{\text{IV}}$$

$$\text{IV.}\quad 0=(\gamma-\alpha-1)F'''-(\gamma-\alpha-2-\beta)F^{\text{IV}}-(\beta+1)(1-x)F^{\text{V}}$$

$$\text{V.}\quad 0=(\gamma+1)F^{\text{IV}}-(\gamma+1)(1-x)F^{\text{V}}-(\gamma-\alpha-1)xF^{\text{VI}}$$

Aus I. und II. ergiebt sich durch Elimination von F'

$$\text{VI.}\quad 0=\gamma F-\gamma(1-x)F''-(\gamma-\alpha-\beta-1)xF'''$$

Hieraus und aus III. durch Elimination von F''

$$\text{VII.}\quad 0=\gamma F-(\gamma-\alpha-1-\beta x)F'''-(\alpha+1)(1-x)F^{\text{IV}}$$

Dann aus IV. und V. durch Elimination von F^{V}

$$\text{VIII.}\quad 0=(\gamma+1)F'''-(\gamma+1)F^{\text{IV}}+(\beta+1)xF^{\text{VI}}$$

Hieraus und aus VII. durch Elimination von F^{IV}

$$\text{IX.}\quad 0=\gamma(\gamma+1)F-(\gamma+1)\big(\gamma-(\alpha+\beta+1)x\big)F''' \\ -(\alpha+1)(\beta+1)x(1-x)F^{\text{VI}}$$

11.

Wollten wir sämmtliche Beziehungen zwischen je drei Functionen $F(\alpha, \beta, \gamma)$, $F(\alpha+\lambda, \beta+\mu, \gamma+\nu)$ und $F(\alpha+\lambda', \beta+\mu', \gamma+\nu')$, wobei λ, μ, ν, λ', μ', ν' entweder $=0$, oder $=+1$, oder $=-1$ sind, erschöpfen, so würde die Menge der Formeln bis auf 325 steigen. Eine solche Sammlung, wenigstens der einfacheren dieser Formeln, wäre keineswegs unnütz: an dieser Stelle mag es aber genügen, nur einige beizufügen, die jeder ohne Mühe wird beweisen können, sei es nach den Formeln des Art. 7, sei es, wenn man lieber will, auf dieselbe Weise, wie die beiden ersten von diesen im Art. 8 ermittelt sind.

$$[16]\quad F(\alpha, \beta, \gamma)-F(\alpha, \beta, \gamma-1)=-\frac{\alpha\beta x}{\gamma(\gamma-1)}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)$$

$$[17]\quad F(\alpha, \beta+1, \gamma)-F(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{\alpha x}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)$$

$$[18]\quad F(\alpha+1, \beta, \gamma)-F(\alpha, \beta, \gamma)=\frac{\beta x}{\gamma}F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)$$

[19] $$F(\alpha, \beta+1, \gamma+1) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\alpha(\gamma-\beta)x}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)$$

[20] $$F(\alpha+1, \beta, \gamma+1) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\beta(\gamma-\alpha)x}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2)$$

[21] $$F(\alpha-1, \beta+1, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(\alpha-\beta-1)x}{\gamma} F(\alpha, \beta+1, \gamma+1)$$

[22] $$F(\alpha+1, \beta-1, \gamma) - F(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{(\beta-\alpha-1)x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta, \gamma+1)$$

[23] $$F(\alpha, \beta+1, \gamma) - F(\alpha+1, \beta, \gamma) = \frac{(\alpha-\beta)x}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)$$

Zweiter Abschnitt.

Kettenbrüche.

12.

Bezeichnen wir

$$\frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} \quad \text{mit} \quad G(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

so ist

$$\frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{F(\beta, \alpha+1, \gamma+1, x)}{F(\beta, \alpha, \gamma, x)} = G(\beta, \alpha, \gamma, x)$$

und daher, wenn wir Gleichung 19 durch $F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)$ dividiren,

$$1 - \frac{1}{G(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x\, G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)$$

oder

$$[24] \qquad G(\alpha, \beta, \gamma, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} x\, G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x)}$$

und da ebenso

$$G(\beta+1, \alpha, \gamma+1, x) = \cfrac{1}{1 - \cfrac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)} x\, G(\alpha+1, \beta+1, \gamma+2, x)}$$

ist, u. s. f., so ergiebt sich für $G(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Kettenbruch

$$[25] \qquad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma+1, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \cdots}}}}}$$

wo

$$a = \frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma+1)} \qquad b = \frac{(\beta+1)(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+1)(\gamma+2)}$$

$$c = \frac{(\alpha+1)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+3)} \qquad d = \frac{(\beta+2)(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+3)(\gamma+4)}$$

$$e = \frac{(\alpha+2)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+4)(\gamma+5)} \qquad f = \frac{(\beta+3)(\gamma+3-\alpha)}{(\gamma+5)(\gamma+6)}$$

u. s. f. ist, und das Fortschreitungsgesetz auf der Hand liegt.

Weiter folgt aus den Gleichungen 17, 18, 21 und 22

$$[26] \qquad \frac{F(\alpha, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\alpha x}{\gamma} G(\beta+1, \alpha, \gamma, x)}$$

$$[27] \qquad \frac{F(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{\beta x}{\gamma} G(\alpha+1, \beta, \gamma, x)}$$

$$[28] \qquad \frac{F(\alpha-1, \beta+1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\alpha-\beta-1)x}{\gamma} G(\beta+1, \alpha-1, \gamma, x)}$$

$$[29] \qquad \frac{F(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x)}{F(\alpha, \beta, \gamma, x)} = \frac{1}{1 - \frac{(\beta-\alpha-1)x}{\gamma} G(\alpha+1, \beta-1, \gamma, x)}$$

woraus, wenn für die Function G ihre Kettenbruch-Werte gesetzt werden, ebensoviele neue Kettenbrüche hervorgehen.

Uebrigens ist ohne Weiteres klar, dass der Kettenbruch in Formel 25 abbricht, wenn eine der Zahlen α, β, $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ negativ und ganzzahlig ist, sonst aber sich ins Unendliche erstreckt.[3])

13.

Die im vorigen Artikel gefundenen Kettenbrüche sind von sehr grosser Wichtigkeit, auch kann man behaupten, dass bis jetzt kaum irgendwelche nach deutlichem Gesetze fortschreitende Kettenbrüche von den Analytikern aufgefunden seien, die nicht als besondere Fälle in den unsrigen enthalten wären. Besonders merkwürdig ist der Fall, wo in Formel 25 $\beta = 0$ gesetzt wird, so dass $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1$, und daher, wenn wir $\gamma - 1$ statt γ schreiben,

[30] $$F(\alpha, 1, \gamma) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma}x + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)}xx + \frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)}{\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3 + \cdots$$
$$= \cfrac{1}{1 - \cfrac{ax}{1 - \cfrac{bx}{1 - \cfrac{cx}{1 - \cfrac{dx}{1 - \cdots}}}}}$$

wobei

$$a = \frac{\alpha}{\gamma} \qquad b = \frac{\gamma - \alpha}{\gamma(\gamma+1)}$$
$$c = \frac{(\alpha+1)\gamma}{(\gamma+1)(\gamma+2)} \qquad d = \frac{2(\gamma+1-\alpha)}{(\gamma+2)(\gamma+3)}$$
$$e = \frac{(\alpha+2)(\gamma+1)}{(\gamma+3)(\gamma+4)} \qquad f = \frac{3(\gamma+2-\alpha)}{(\gamma+4)(\gamma+5)}$$

u. s. f.

14.

Es wird der Mühe wert sein, einige besondere Fälle hier beizufügen. Aus Formel I Art. 5 folgt, für $t = 1$, $\beta = 1$,

[31] $$(1+u)^n = \cfrac{1}{1 - \cfrac{nu}{1 + \cfrac{\frac{n+1}{2}u}{1 - \cfrac{\frac{n-1}{2.3}u}{1 + \cfrac{\frac{2(n+2)}{3.4}u}{1 - \frac{2(n-2)}{4.5}u \text{ u. s. f.}}}}}}$$

Aus den Formeln VI u. VII Art. 5 folgt

[32] $$\log(1+t) = \cfrac{t}{1 + \cfrac{\frac{1}{2}t}{1 + \cfrac{\frac{1}{6}t}{1 + \cfrac{\frac{2}{6}t}{1 + \cfrac{\frac{2}{10}t}{1 + \cfrac{\frac{3}{10}t}{1 + \frac{3}{14}t \text{ u. s. f.}}}}}}}$$

[33] $$\log\frac{1+t}{1-t}=\cfrac{2t}{1-\cfrac{\frac{1}{3}tt}{1-\cfrac{\frac{2.2}{3.5}tt}{1-\cfrac{\frac{3.3}{5.7}tt}{1-\frac{4.4}{7.9}tt \text{ u. s. f.}}}}}$$

Werden hier die — Zeichen in + verwandelt, so ergiebt sich der Kettenbruch für arc. tang. t.

Weiter haben wir

[34] $$e^t=\cfrac{1}{1-\cfrac{t}{1+\cfrac{\frac{1}{3}t}{1-\cfrac{\frac{1}{6}t}{1+\cfrac{\frac{1}{6}t}{1-\cfrac{\frac{1}{10}t}{1+\frac{1}{10}t \text{ u. s. f.}}}}}}}$$

[35] $$t=\cfrac{\sin t\cos t}{1-\cfrac{\frac{1.2}{1.3}\sin t^2}{1-\cfrac{\frac{1.2}{3.5}\sin t^2}{1-\cfrac{\frac{3.4}{5.7}\sin t^2}{1-\cfrac{\frac{3.4}{7.9}\sin t^2}{1-\frac{5.6}{9.11}\sin t^2 \text{ u. s. f.}}}}}}$$

Setzen wir $\alpha=3$, $\gamma=\frac{5}{2}$, so folgt aus Formel 30 ohne Weiteres der in der *Theorie der Bewegung der Himmelskörper* Art. 90 gegebene Kettenbruch.[4]) Ebenda sind zwei andere Kettenbrüche mitgeteilt, deren Entwickelung bei dieser Gelegenheit nachgeholt werden soll.

Sei

$$Q = 1 - \cfrac{\frac{5.8}{7.9}x}{1 - \cfrac{\frac{1.4}{9.11}x}{1 - \frac{7.10}{11.13}x \text{ u. s. f.}}}$$

so wird a. a. O.

$$x - \xi = \frac{x}{1 + \frac{2x}{35Q}} = \frac{xQ}{Q + \frac{2}{35}x}, \text{ also}$$

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{Q + \frac{2}{35}x}$$

und das ist die erste Formel; die zweite ergiebt sich folgendermassen. Sei

$$R = 1 - \cfrac{\frac{1.4}{7.9}x}{1 - \cfrac{\frac{5.8}{9.11}x}{1 - \cfrac{\frac{3.6}{11.13}x}{1 - \frac{7.10}{13.15}x \text{ u. s. f.}}}}$$

so wird nach Formel 25

$$\frac{1}{R} = G\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, x\right), \text{ und } \frac{1}{Q} = G\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, x\right)$$

Daher ist

$$RF\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, x\right) = F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, x\right)$$

$$QF\left(\frac{5}{2}, \frac{1}{2}, \frac{9}{2}, x\right) = F\left(\frac{5}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{7}{2}, x\right)$$

oder, wenn das erste und zweite Element mit einander vertauscht werden,

$$QF\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, x\right) = F\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, x\right)$$

Nach Gleichung 21 haben wir aber

$$F\left(-\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{7}{2}, x\right) - F\left(\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{7}{2}, x\right) = -\frac{4}{7} x F\left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, \frac{9}{2}, x\right)$$

woraus $Q = R - \frac{4}{7}x$, und dieser Wert liefert, in die obige Formel eingesetzt,

$$\xi = \frac{\frac{2}{35}xx}{R - \frac{18}{35}x}$$

d. i. die zweite Formel.

Setzen wir in Formel 30, $\alpha = \frac{m}{n}$, $x = -\gamma nt$, so wird für einen unendlich grossen Wert von γ

$$[36] \quad F\left(\frac{m}{n}, 1, \gamma, -\gamma nt\right) = 1 - mt + m(m+n)tt - m(m+n)(m+2n)t^3 + \cdots$$

$$= \cfrac{1}{1 + \cfrac{mt}{1 + \cfrac{nt}{1 + \cfrac{(m+n)t}{1 + \cfrac{2nt}{1 + \cfrac{(m+2n)t}{1 + 3nt \text{ u. s. f.}}}}}}}$$

Dritter Abschnitt.

Von der Summe der Reihe, wenn man das vierte Element $= 1$ setzt, wobei zugleich einige andere transscendente Functionen abgehandelt werden.

15.

Wenn die Elemente α, β, γ sämmtlich positive Grössen sind, so werden alle Coefficienten der Potenzen des vierten Elementes x positiv; ist aber das eine oder andere von jenen Elementen negativ, so werden, wenigstens von einer gewissen Potenz x^m an, alle Coefficienten mit demselben Vorzeichen behaftet sein, wenn nur m grösser als der absolute Wert des grössten negativen Elements angenommen wird. Ferner ist von selbst klar, dass die Summe der Reihe für $x = 1$ nicht endlich sein kann, wenn nicht die Coefficienten wenigstens von einem gewissen Gliede an unbegrenzt abnehmen, oder, um analytisch zu reden, wenn nicht der Coefficient des Gliedes x^∞ gleich 0 ist. Wir werden nun zeigen, und zwar denjenigen zu Gefallen, die die strengen Methoden der alten Geometer lieben, in aller Strenge,

erstens, dass die Coefficienten (wenn die Reihe nicht etwa abbricht), unbegrenzt wachsen, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1$ positiv ist;

zweitens, dass die Coefficienten sich einer endlichen Grenze beständig nähern, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1 = 0$;

drittens, dass die Coefficienten unbegrenzt abnehmen, falls $\alpha + \beta - \gamma - 1$ negativ ist;

viertens, dass die Summe unserer Reihe für $x = 1$, trotz der Abnahme im dritten Falle, unendlich ist, falls $\alpha + \beta - \gamma$ positiv oder $= 0$ ist;

fünftens, dass dagegen die Summe *endlich* ist, falls $\alpha + \beta - \gamma$ negativ ist.[5])

16.

Wir wollen die folgende Untersuchung allgemeiner an der unendlichen Reihe M, M', M'', M'''... führen, die so gebildet ist, dass die Quotienten $\frac{M'}{M}, \frac{M''}{M'}, \frac{M'''}{M''} \cdots$ bezw. die Werte des Bruches

$$\frac{t^\lambda + A t^{\lambda-1} + B t^{\lambda-2} + C t^{\lambda-3} + \cdots}{t^\lambda + a t^{\lambda-1} + b t^{\lambda-2} + c t^{\lambda-3} + \cdots}$$

für $t = m$, $t = m + 1$, $t = m + 2$ u. s. f. sind. Der Kürze wegen wollen wir den Zähler dieses Bruches mit P, den Nenner mit p bezeichnen und ausserdem voraussetzen, dass P und p nicht identisch sind, oder dass die Differenzen $A - a$, $B - b$, $C - c, \ldots$ nicht sämmtlich zugleich verschwinden.

I. Wenn von den Differenzen $A - a$, $B - b$, $C - c, \ldots$ die erste nicht verschwindende positiv ist, so kann man eine Grenze l so angeben, dass, sobald der Wert von t dieselbe übersteigt, die Werte von P und p sicher stets positiv ausfallen und $P > p$ ist. Offenbar wird dies der Fall sein, wenn für l die grösste reelle Wurzel der Gleichung $p(P - p) = 0$ gewählt wird; hat aber diese Gleichung gar keine reellen Wurzeln, so wird jene Eigenschaft für alle Werte von t statthaben. Daher werden in der Reihe $\frac{M'}{M}, \frac{M''}{M'}, \frac{M'''}{M''}, \cdots$ wenigstens nach einer gewissen Entfernung (wenn nicht von Anfang an) alle Glieder positiv und grösser als eins sein; wenn also keins derselben $= 0$ oder unendlich gross wird, so ist klar,

> *dass alle Glieder der Reihe $M, M', M'', M''', \ldots$, wenn nicht von Anfang an, so doch nach einer gewissen Entfernung, dasselbe Vorzeichen haben und beständig wachsen.*

Aus demselben Grunde werden, wenn von den Differenzen $A - a$, $B - b$, $C - c$ u. s. f. die erste nicht verschwindende negativ ist, alle Glieder der Reihe $M, M', M'', M''', \ldots$, wenn nicht von Anfang an, so doch nach einer gewissen Entfernung, dasselbe Zeichen haben und beständig abnehmen.

II. Sind schon die Coefficienten A und a verschieden, so werden die Glieder der Reihe $M, M', M'', M''', \ldots$ über jede Grenze hinaus oder ins Unendliche entweder wachsen oder abnehmen, je nachdem die Differenz $A - a$ positiv oder negativ ist: dies beweisen wir, wie folgt. Wenn $A - a$ positiv ist, werde eine ganze Zahl h so angenommen, dass $h(A - a) > 1$, und gesetzt $\frac{M^h}{m} = N$, $\frac{M'^h}{m+1} = N'$, $\frac{M''^h}{m+2} = N''$, $\frac{M'''^h}{m+3} = N'''$ u. s. f., sowie $tP^h = Q$, $(t+1)p^h = q$. Dann ist klar, dass $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N'}, \frac{N'''}{N''}, \cdots$ die Werte des Bruches $\frac{Q}{q}$ für $t = m$, $t = m + 1$, $t = m + 2, \ldots$ sind, während Q und q algebraische Functionen von der Form

$$Q = t^{\lambda h+1} + hAt^{\lambda h} + \cdots$$
$$q = t^{\lambda h+1} + (ha + 1)t^{\lambda h} + \cdots$$

sind. Da nun nach Voraussetzung die Differenz $hA - (ha + 1)$ positiv ist, so werden (nach I) die Glieder der Reihe $N, N', N'', N''', \ldots$, wenn nicht von Anfang an, so doch nach einer gewissen Entfernung, beständig wachsen; daher wachsen die Glieder der Reihe mN, $(m+1)N'$, $(m+2)N''$, $(m+3)N''', \ldots$ notwendig über alle Grenzen hinaus und damit auch die

Glieder der Reihe M, M', M'', M''', ..., deren $h$te Potenzen ja jenen gleich sind. W. z. b. w.

Ist $A-a$ negativ, so nehme man eine ganze Zahl h so an, dass $h(a-A)>1$ wird, wonach durch ähnliche Schlüsse die Glieder der Reihe

$$mM^h,\ (m+1)M'^h,\ (m+2)M''^h,\ (m+3)M'''^h,\ \ldots$$

nach einer gewissen Entfernung beständig abnehmen werden. Daher nehmen die Glieder der Reihe M^h, M'^h, M''^h, ... also auch die Glieder der folgenden M, M', M'', M''', ... notwendig unbegrenzt ab. W. z. b. w.

III. Sind dagegen die ersten Coefficienten A und a einander gleich, so convergiren die Glieder der Reihe M, M', M'', M''', ... beständig gegen eine endliche Grenze, was wir folgendermassen beweisen. Nehmen wir zuerst an, die Glieder der Reihe wachsen nach einer gewissen Entfernung beständig, d. h. von den Differenzen $B-b$, $C-c$, ... sei die erste nicht verschwindende positiv. Sei h eine so beschaffene ganze Zahl, dass $h+b-B$ positiv wird, und setzen wir

$$M\left(\frac{m}{m-1}\right)^h=N,\quad M'\left(\frac{m+1}{m}\right)^h=N',\quad M''\left(\frac{m+2}{m+1}\right)^h=N''\ \text{u. s. f.},$$

ferner $(tt-1)^h P=Q$, $t^{2h}p=q$, so dass $\frac{N'}{N}, \frac{N''}{N'}, \cdots$ die Werte des Bruches $\frac{Q}{q}$ für $t=m$, $t=m+1$, ... sind. Da wir dann haben

$$Q=t^{\lambda+2h}+At^{\lambda+2h-1}+(B-h)t^{\lambda+2h-2}\ \ldots$$
$$q=t^{\lambda+2h}+At^{\lambda+2h-1}+b\,t^{\lambda+2h-2}\ \ldots$$

und nach Voraussetzung $B-h-b$ negativ ist, so werden die Glieder der Reihe N, N', N'', N''', ..., nach einer gewissen Entfernung mindestens, beständig abnehmen; somit können die Glieder der Reihe M, M', M'', M''', ..., die stets bezw. kleiner sind als jene, während sie zugleich beständig zunehmen, nur gegen eine endliche Grenze convergiren. W. z. b. w.

Wenn die Glieder der Reihe M, M', M'', M''', ... nach einer gewissen Entfernung beständig abnehmen, so ist für h eine solche ganze Zahl zu wählen, dass $h+B-b$ positiv ist, und durch ganz ähnliche Schlüsse zu beweisen, dass die Glieder der Reihe

$$M\left(\frac{m-1}{m}\right)^h,\quad M'\left(\frac{m}{m+1}\right)^h,\quad M''\left(\frac{m+1}{m+2}\right)^h\ \text{u. s. f.}$$

nach einer gewissen Entfernung beständig wachsen, so dass die Glieder der Reihe M, M', M'', ..., die stets bezw. grösser sind als jene, während sie zugleich beständig abnehmen, notwendig nur bis zu einer endlichen Grenze abnehmen können. W. z. b. w.

IV. Was endlich die *Summe* der Reihe, deren Glieder $M, M', M'', M''', \ldots$ sind, in dem Falle betrifft, wo dieselben unbegrenzt abnehmen, so wollen wir zuerst voraussetzen, $A - a$ liege zwischen 0 und -1, d. h. $A + 1 - a$ sei positiv oder $= 0$. Es sei h eine positive ganze Zahl, und zwar eine beliebige im Falle, dass $A + 1 - a$ positiv ist, dagegen so beschaffen, dass sie die Grösse $h + m + A + B - b$ positiv macht, falls $A + 1 - a = 0$. Dann ist

$$P(t-(m+h-1)) = t^{\lambda+1} + (A+1-m-h)t^{\lambda} + (B-A(m+h-1))t^{\lambda-1}\ldots$$

$$p(t-(m+h)) = t^{\lambda+1} + (a-m-h)t^{\lambda} + (b-a(m+h))t^{\lambda-1}\ldots$$

wo entweder $A + 1 - m - h - (a - m - h)$ positiv, oder wenn dies $= 0$ wird, wenigstens $B - A(m + h - 1) - (b - a(m + h))$ positiv sein wird. Dann kann (nach I) für die Grösse t ein solcher Wert l angegeben werden, dass, sobald derselbe überschritten ist, die Werte des Bruches $\dfrac{P(t-(m+h-1))}{p(t-(m+h))}$ stets positiv und grösser als eins werden. Es sei n eine ganze Zahl, grösser als l und zugleich grösser als h, ferner seien $N, N', N'', N''', \ldots$ die Glieder der Reihe $M, M', M'', M''', \ldots$, die den Werten $t = m + n$, $t = m + n + 1$, $t = m + n + 2, \ldots$ entsprechen. Dann sind die Grössen

$$\frac{(n+1-h)N'}{(n-h)N}, \quad \frac{(n+2-h)N''}{(n+1-h)N'}, \quad \frac{(n+3-h)N'''}{(n+2-h)N''}, \ldots$$

positiv und grösser als eins, folglich

$$N' > \frac{(n-h)N}{n+1-h}, \quad N'' > \frac{(n+1-h)N'}{n+2-h}, \quad N''' > \frac{(n+2-h)N''}{n+3-h}, \ldots$$

so dass die Summe der Reihe $N + N' + N'' + N''' + \cdots$ grösser ist als die Summe der Reihe

$$(n-h)N\left(\frac{1}{n-h} + \frac{1}{n+1-h} + \frac{1}{n+2-h} + \frac{1}{n+3-h} + \cdots\right)$$

wieviel Glieder man auch nehmen mag. Die letztere Reihe aber überschreitet, wenn die Gliederzahl ins Unendliche wächst, jede Grenze, da die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots$, die bekanntlich unendlich ist, auch unendlich bleibt, wenn die Anfangsglieder $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n-1-h}$ abgetrennt werden. Also wächst die Summe der Reihe $N + N' + N'' + N''' + \cdots$, und damit auch die Summe $M + M' + M'' + M''' + \cdots$, von der jene ein Teil ist, über alle Grenzen.

V. Ist aber $A - a$ negativ und absolut grösser als eins, so wird die Summe der ins Unendliche fortgesetzten Reihe $M + M' + M'' + M''' + \cdots$ sicher endlich sein. Denn sei h eine positive Grösse, kleiner als $a - A - 1$, so wird durch ähnliche Rechnungen bewiesen, dass man einen Wert l von t angeben kann, über den hinaus der Bruch $\frac{Pt}{p(t-h-1)}$ stets positive Werte, kleiner als 1, erhält. Wenn nun für n eine ganze Zahl angenommen wird, die grösser als l, m und $h+1$ ist, und wenn die Glieder der Reihe M, M', M'', M''', ..., die den Werten $t = n$, $t = n+1$, $t = n+2$, ... entsprechen, mit N, N', N'' bezeichnet werden, so ist

$$N' < \frac{n-h-1}{n} \cdot N, \quad N'' < \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} \cdot N, \quad \text{u. s. f.}$$

so dass die Summe der Reihe $N + N' + N'' + \cdots$, wieviel Glieder man auch nehmen mag, kleiner ist, als das Product aus N und der Summe ebensovieler Glieder der Reihe

$$1 + \frac{n-h-1}{n} + \frac{(n-h-1)(n-h)}{n(n+1)} + \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{n(n+1)(n+2)} \cdots$$

Die Summe dieser Reihe aber kann für jede beliebige Gliederzahl leicht angegeben werden; es ist nämlich

das erste Glied $= \frac{n-1}{h} - \frac{n-h-1}{h}$,

die Summe zweier Glieder $= \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)}{hn}$,

die Summe dreier Glieder $= \frac{n-1}{h} - \frac{(n-h-1)(n-h)(n-h+1)}{hn(n+1)}$

u. s. w., und da der zweite Teil (nach II.) eine unter jede Grenze sinkende Reihe bildet, muss jene Summe bei unbegrenzter Fortsetzung $= \frac{n-1}{h}$ gesetzt werden. Daher bleibt $N + N' + N'' \cdots$ bei unbegrenzter Fortsetzung stets kleiner als $\frac{N(n-1)}{h}$, und somit convergirt $M + M' + M'' + \cdots$ sicher gegen eine endliche Summe. W. z. b. w.

VI. Um das, was wir allgemein von der Reihe M, M', M'', ... bewiesen haben, auf die Coefficienten von x^m, x^{m+1}, x^{m+2}, ... in der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ anzuwenden, hat man $\lambda = 2$, $A = \alpha + \beta$, $B = \alpha\beta$, $a = \gamma + 1$ und $b = \gamma$ zu setzen, woraus sich die fünf Behauptungen des vorigen Art. ohne Weiteres ergeben.

17.

Die Untersuchung über die Beschaffenheit der Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ beschränkt sich nach dem Vorigen naturgemäss auf den Fall, wo $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist, in welchem jene Summe stets eine endliche Grösse darstellt. Wir schicken aber folgende Bemerkung voraus. Wenn die Coefficienten der Reihe $1 + ax + bxx + cx^3 + \cdots = S$ von einem gewissen Gliede an unter jede Grenze sinken, so ist das Product

$$(1-x)S = 1 + (a-1)x + (b-a)xx + (c-b)x^3 + \cdots$$

für $x = 1$ gleich 0 zu setzen, auch wenn die Summe S jener Reihe unendlich gross wird. Denn da bei Addition zweier Glieder die Summe $= a$ wird, bei dreien $= b$, bei vieren $= c$ u. s. w., so ist die Grenze der ins Unendliche erstreckten Summe $= 0$. Wenn daher $\gamma - \alpha - \beta$ positiv ist, muss für $x = 1$, $(1-x)F(\alpha, \beta, \gamma - 1, x) = 0$ gesetzt werden, woraus nach Gleichung 15 Art. 7 folgt

$$0 = \gamma(\alpha + \beta - \gamma)F(\alpha, \beta, \gamma, 1) + (\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)F(\alpha, \beta, \gamma + 1, 1)$$

oder

[37] $$F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma(\gamma-\alpha-\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1)$$

Da nun ebenso

$$F(\alpha, \beta, \gamma+1, 1) = \frac{(\gamma+1-\alpha)(\gamma+1-\beta)}{(\gamma+1)(\gamma+1-\alpha-\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma+2, 1)$$

$$F(\alpha, \beta, \gamma+2, 1) = \frac{(\gamma+2-\alpha)(\gamma+2-\beta)}{(\gamma+2)(\gamma+2-\alpha-\beta)} F(\alpha, \beta, \gamma+3, 1)$$

ist, und so fort, so wird allgemein, wenn k eine beliebige positive ganze Zahl bezeichnet,

$F(\alpha, \beta, \gamma, 1)$ gleich dem Producte aus $F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1)$
mal $(\gamma - \alpha)(\gamma + 1 - \alpha)(\gamma + 2 - \alpha)\ldots(\gamma + k - 1 - \alpha)$
mal $(\gamma - \beta)(\gamma + 1 - \beta)(\gamma + 2 - \beta)\ldots(\gamma + k - 1 - \beta)$

dividirt durch das Product

aus $\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots(\gamma+k-1)$
mal $(\gamma-\alpha-\beta)(\gamma+1-\alpha-\beta)(\gamma+2-\alpha-\beta)\ldots(\gamma+k-1-\alpha-\beta)$

18.

Wir wollen von jetzt ab die folgende Bezeichnung einführen:

[38] $$\Pi(k,z) = \frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ldots\ k}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+k)} k^z$$

wo k als eine wesentlich positive ganze Zahl zu denken ist, mit welcher Einschränkung $\Pi(k, z)$ eine völlig bestimmte Function der beiden Grössen k und z darstellt. Hiernach ist leicht ersichtlich, dass der am Schlusse des vorigen Art. ausgesprochene Satz sich so darstellen lässt:

$$[39] \quad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(k, \gamma-1).\Pi(k, \gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(k, \gamma-\alpha-1).\Pi(k, \gamma-\beta-1)} \cdot F(\alpha, \beta, \gamma+k, 1)$$

19.

Es ist der Mühe wert, die Beschaffenheit der Function $\Pi(k, z)$ genauer zu untersuchen. Ist z eine negative ganze Zahl, so erhält die Function offenbar einen unendlich grossen Wert, sobald k hinreichend gross angenommen wird. Für ganzzahlige, nicht negative Werte von z aber haben wir

$$\Pi(k, 0) = 1$$

$$\Pi(k, 1) = \frac{1}{1+\frac{1}{k}}$$

$$\Pi(k, 2) = \frac{1 \quad . \quad 2}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)}$$

$$\Pi(k, 3) = \frac{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)}$$

u. s. f., oder allgemein

$$[40] \qquad \Pi(k, z) = \frac{1 \quad . \quad 2 \quad . \quad 3 \ldots\ldots\ldots\ldots z}{\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{2}{k}\right)\left(1+\frac{3}{k}\right)\cdots\left(1+\frac{z}{k}\right)}$$

Allgemein aber haben wir für *jeden* Wert von z

$$[41] \qquad \Pi(k, z+1) = \Pi(k, z) \cdot \frac{1+z}{1+\frac{1+z}{k}}$$

$$[42] \qquad \Pi(k+1, z) = \Pi(k, z) \cdot \left\{ \frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{z+1}}{1+\frac{1+z}{k}} \right\}$$

mithin, da $\Pi(1, z) = \frac{1}{z+1}$ ist,

$$[43] \quad \Pi(k, z) = \frac{1}{z+1} \cdot \frac{2^{z+1}}{1^z.(2+z)} \cdot \frac{3^{z+1}}{2^z.(3+z)} \cdot \frac{4^{z+1}}{3^z.(4+z)} \cdots \frac{k^{z+1}}{(k-1)^z.(k+z)}$$

20.

Besondere Beachtung verdient der *Grenzwert*, gegen den für einen festen Wert von z die Function $\Pi(k, z)$ beständig convergirt, wenn k unendlich gross wird. Sei zunächst h ein endlicher Wert von k, grösser als z, so ist klar, dass, wenn k aus h in $h+1$ übergeht, der Logarithmus von $\Pi(k, z)$ einen Zuwachs erfährt, der durch folgende convergente Reihe ausgedrückt wird

$$\frac{z(1+z)}{2(h+1)^2}+\frac{z(1-zz)}{3(h+1)^3}+\frac{z(1+z^3)}{4(h+1)^4}+\frac{z(1-z^4)}{5(h+1)^5}+\cdots$$

Wenn daher k aus dem Werte h in $h+n$ übergeht, wird der Logarithmus von $\Pi(k, z)$ den Zuwachs erhalten:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{2}z(1+z)\left(\frac{1}{(h+1)^2}+\frac{1}{(h+2)^2}+\frac{1}{(h+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^2}\right)\\+&\frac{1}{3}z(1-zz)\left(\frac{1}{(h+1)^3}+\frac{1}{(h+2)^3}+\frac{1}{(h+3)^3}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^3}\right)\\+&\frac{1}{4}z(1+z^3)\left(\frac{1}{(h+1)^4}+\frac{1}{(h+2)^4}+\frac{1}{(h+3)^4}+\cdots+\frac{1}{(h+n)^4}\right)\\+&\cdots\end{aligned}$$

welcher, wie leicht zu beweisen, stets endlich bleibt, auch wenn n unendlich wird. Wenn also nicht schon $\Pi(h, z)$ einen unendlichen Factor enthält, d. h. wenn nicht z eine negative ganze Zahl ist, so wird der Grenzwert von $\Pi(k, z)$ für $k=\infty$ sicher eine endliche Grösse sein. Offenbar hängt daher $\Pi(\infty, z)$ ausschliesslich von z ab, oder stellt eine völlig bestimmte Function von z dar, welche in der Folge einfach durch Πz bezeichnet werden soll. Wir definiren also die Function Πz durch den Wert des Productes

$$\frac{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots\ k.k^z}{(z+1)(z+2)(z+3)\ldots(z+k)}$$

für $k=\infty$, oder, wenn man lieber will, durch den Grenzwert des unendlichen Productes

$$\frac{1}{z+1}\cdot\frac{2^{z+1}}{1^z(2+z)}\cdot\frac{3^{z+1}}{2^z(3+z)}\cdot\frac{4^{z+1}}{3^z(4+z)}\cdots$$

21.

Aus Gleichung 41 folgt sofort die Hauptgleichung

[44] $$\Pi(z+1)=(z+1)\Pi z$$

und hieraus allgemein, wenn n irgend eine positive ganze Zahl bezeichnet,

[45] $$\Pi(z+n)=(z+1)(z+2)(z+3)\ldots.(z+n)\Pi z$$

Für einen negativen ganzzahligen Wert von z wird der Wert von Πz unendlich gross; für nicht negative ganzzahlige Werte haben wir

$$\Pi 0 = 1$$
$$\Pi 1 = 1$$
$$\Pi 2 = 2$$
$$\Pi 3 = 6$$
$$\Pi 4 = 24 \text{ u. s. f.}$$

und allgemein

[46] $$\Pi z = 1.2.3\ldots.z$$

Uebel angebracht wäre aber diese Eigenschaft unserer Function als Definition derselben, da sie wesentlich auf ganzzahlige Werte beschränkt ist und ausser unserer Function noch unzähligen anderen (z. B. $\cos 2\pi z.\Pi z$, $\cos \pi z^{2n}\Pi z$ u. s. w., wo π den halben Umfang des Kreises vom Radius 1 bezeichnet) gemeinsam ist.

22.

Obgleich die Function $\Pi(k, z)$ allgemeiner erscheint, als Πz, wird sie uns doch für die Folge entbehrlich, da sie sich leicht auf letztere zurückführen lässt. Denn aus der Verbindung der Gleichungen 38, 45 und 46 ergiebt sich

[47] $$\Pi(k, z)=\frac{k^z\Pi k.\Pi z}{\Pi(k+z)}$$

Uebrigens ist der Zusammenhang dieser Functionen mit denen, die Herr *Kramp numerische Facultäten* genannt hat, von selbst ersichtlich. Die numerische Facultät, die dieser Schriftsteller mit $a^{b|c}$ bezeichnet, ist nämlich in unseren Zeichen

$$=\frac{c^b b^{\frac{a}{c}-1}\Pi b}{\Pi\left(b, \frac{a}{c}-1\right)}=\frac{c^b\Pi\left(\frac{a}{c}+b-1\right)}{\Pi\left(\frac{a}{c}-1\right)}$$

Es erscheint indessen ratsamer, eine Function *einer* Veränderlichen in die Analysis einzuführen, als eine Function dreier Veränderlichen, um so mehr als diese sich auf jene zurückführen lässt.[6])

23.

Die Stetigkeit der Function Πz wird unterbrochen, sobald ihr Wert unendlich gross wird, d. h. für negative ganzzahlige Werte von z. Sie ist daher positiv von $z = -1$ bis $z = \infty$, und da für beide Grenzen Πz einen unendlich grossen Wert annimmt, so wird es zwischen ihnen einen kleinsten Wert geben, der, wie wir gefunden haben, $= 0{,}8856024$ ist und dem Werte $z = 0{,}4616321$ entspricht. Zwischen den Grenzen $z = -1$ und $z = -2$ wird der Wert von Πz negativ, zwischen $z = -2$ und $z = -3$ wieder positiv und so fort, wie aus Gleichung 44 ohne Weiteres folgt. Weiter ist klar, wenn man alle Werte von Πz zwischen beliebigen, um eins von einander verschiedenen Grenzen, z. B. von $z=0$ bis $z=1$, als bekannt ansehen kann, so kann man daraus den Wert der Function für jeden anderen reellen Wert von z mit Hilfe der Gleichung 45 leicht ableiten. Zu diesem Zwecke haben wir eine *Tafel* aufgestellt, die am Schlusse dieses Abschnitts beigefügt ist; dieselbe enthält die briggischen Logarithmen der Function Πz auf 20 Stellen, für $z = 0$ bis $z = 1$ von Hundertstel zu Hundertstel mit grösster Sorgfalt berechnet, wobei aber zu bemerken, dass die letzte, zwanzigste, Stelle zuweilen um eine oder zwei Einheiten falsch sein kann.

24.

Da die Grenze von $F(\alpha, \beta, \gamma + k, 1)$, für unendlich wachsendes k, offenbar eins ist, so geht Gleichung 39 in die folgende über

$$[48] \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = \frac{\Pi(\gamma-1).\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1).\Pi(\gamma-\beta-1)}$$

und diese Formel stellt die vollständige Lösung der Frage dar, welche den Gegenstand dieses Abschnittes ausmacht. Ohne Weiteres folgen daraus die eleganten Gleichungen

$$[49] \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) = F(-\alpha, -\beta, \gamma-\alpha-\beta, 1)$$

$$[50] \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) . F(-\alpha, \beta, \gamma-\alpha, 1) = 1$$

$$[51] \qquad F(\alpha, \beta, \gamma, 1) . F(\alpha, -\beta, \gamma-\beta, 1) = 1$$

in deren erster γ, in deren zweiter $\gamma - \beta$, in deren dritter $\gamma - \alpha$ positiv sein muss.

25.

Wir wollen Formel 48 auf einige der Gleichungen des Art. 5 anwenden. Formel XIII wird, wenn wir $t = 90° = \frac{1}{2}\pi$ setzen, $\frac{1}{2}\pi = F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right)$, d. h. gleichbedeutend mit der bekannten Gleichung

$$\frac{1}{2}\pi = 1 + \frac{1.1}{2.3} + \frac{1.1.3}{2.4.5} + \frac{1.1.3.5}{2.4.6.7} + \cdots$$

Da nun nach Formel 48 $F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 1\right) = \frac{\Pi\frac{1}{2}.\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi 0.\Pi 0}$ und $\Pi 0 = 1$, $\Pi\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\Pi\left(-\frac{1}{2}\right)$ ist, so wird $\pi = \left(\Pi(-\frac{1}{2})\right)^2$ oder

[52] $$\Pi\left(-\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}$$

[53] $$\Pi\frac{1}{2} = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$$

Formel XVI des Art. 5, welche dasselbe sagt wie die bekannte Gleichung

$$\sin nt = n\sin t - \frac{n(nn-1)}{2.3}\sin t^3 + \frac{n(nn-1)(nn-9)}{2.3.4.5}\sin t^5 - \cdots$$

und allgemein für jeden Wert von n gilt, wenn nur t nicht die Grenzen $-90°$ und $+90°$ überschreitet, liefert für $t = \frac{1}{2}\pi$

$$\sin\frac{n\pi}{2} = \frac{n\Pi\frac{1}{2}.\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2}n).\Pi\frac{1}{2}n}$$

woraus sich die elegante Formel ergiebt

$$\Pi\frac{1}{2}n.\Pi\left(-\frac{1}{2}n\right) = \frac{\frac{1}{2}n\pi}{\sin\frac{1}{2}n\pi}$$

oder, wenn $n = 2z$ gesetzt wird,

[54] $$\Pi(-z).\Pi(+z) = \frac{z\pi}{\sin z\pi}$$

[55] $$\Pi(-z).\Pi(z-1) = \frac{\pi}{\sin z\pi}$$

oder auch, wenn man $z + \frac{1}{2}$ für z schreibt,

[56] $$\Pi\left(-\frac{1}{2}+z\right)\cdot\Pi\left(-\frac{1}{2}-z\right) = \frac{\pi}{\cos z\pi}$$

Aus der Verbindung von Formel 54 mit der Definition der Function Π folgt, dass $\frac{z\pi}{\sin z\pi}$ die Grenze des unendlichen Productes

$$\frac{(1 \;.\; 2 \;.\; 3 \ldots\ldots\ldots k)^2}{(1-zz)(4-zz)(9-zz)\ldots(kk-zz)}$$

für unendlich wachsendes k ist, so dass

$$\sin z\pi = z\pi(1-zz)\left(1-\frac{zz}{4}\right)\left(1-\frac{zz}{9}\right)\cdots\text{in inf.}$$

und auf dieselbe Weise liefert 56

$$\cos z\pi = (1-4zz)\left(1-\frac{4zz}{9}\right)\left(1-\frac{4zz}{25}\right)\cdots\text{in inf.}$$

sehr bekannte Formeln, die von den Analytikern auf ganz andere Art abgeleitet zu werden pflegen.[7])

26.

Bedeutet n eine ganze Zahl, so findet man den Wert des Ausdrucks

$$\frac{n^{nz}\Pi(k,\ z)\,.\,\Pi\left(k,\ z-\frac{1}{n}\right)\cdot\Pi\left(k,\ z-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdot\Pi\left(k,\ z-\frac{n-1}{n}\right)}{\Pi(nk,\ nz)}$$

bei gehöriger Zusammenziehung

$$=\frac{(1.2.3\ldots.k)^n n^{nk}}{1.2.3\ldots.nk.k^{\frac{1}{2}(n-1)}}$$

so dass derselbe von z unabhängig ist, also ungeändert bleiben wird, welchen Wert z auch erhalte. Er lässt sich mithin, da $\Pi(k,0)=\Pi(nk,0)=1$ ist, durch das Product

$$\Pi\left(k,-\frac{1}{n}\right)\cdot\Pi\left(k,-\frac{2}{n}\right)\cdot\Pi\left(k,-\frac{3}{n}\right)\cdots\cdot\Pi\left(k,-\frac{n-1}{n}\right)$$

darstellen. Für unendlich wachsendes k bekommen wir demnach

$$\frac{n^{nz}\Pi z\,.\,\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right)\cdot\Pi\left(z-\frac{2}{n}\right)\cdots\cdot\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{\Pi nz}$$
$$=\Pi\left(-\frac{1}{n}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{2}{n}\right)\cdot\Pi\left(-\frac{3}{n}\right)\cdots\cdot\Pi\left(-\frac{n-1}{n}\right)$$

Das Product rechter Hand, in umgekehrter Reihenfolge der Factoren mit sich selbst multiplicirt, liefert, nach Form. 55,

$$\frac{\pi}{\sin\frac{1}{n}\pi}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{2}{n}\pi}\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{3}{n}\pi}\cdots\cdot\frac{\pi}{\sin\frac{n-1}{n}\pi}=\frac{(2\pi)^{n-1}}{n}$$

Sonach haben wir den eleganten Satz[8])

[57] $$\frac{n^{nz}\Pi z.\Pi\left(z-\frac{1}{n}\right).\Pi\left(z-\frac{2}{n}\right)\ldots.\Pi\left(z-\frac{n-1}{n}\right)}{\Pi nz}=\frac{(2\pi)^{\frac{1}{2}(n-1)}}{\sqrt{n}}$$

27.

Das Integral $\int x^{\lambda-1}(1-x^{\mu})^{\nu}dx$, so genommen, dass es für $x=0$ verschwindet, lässt sich durch folgende Reihe ausdrücken, wenn λ und μ positiv sind:

$$\frac{x^{\lambda}}{\lambda}-\frac{\nu x^{\mu+\lambda}}{\mu+\lambda}+\frac{\nu(\nu-1)x^{2\mu+\lambda}}{1.2.2\mu+\lambda}-\cdots=\frac{x^{\lambda}}{\lambda}F\left(-\nu,\ \frac{\lambda}{\mu},\ \frac{\lambda}{\mu}+1,\ x^{\mu}\right)$$

Daher wird der Wert desselben für $x=1$

$$=\frac{\Pi\frac{\lambda}{\mu}\cdot\Pi\nu}{\lambda\Pi\left(\frac{\lambda}{\mu}+\nu\right)}$$

sein. Aus diesem Satze fliessen ohne Weiteres alle Beziehungen, die *Euler* ehedem mit vieler Mühe entwickelt hat. Setzen wir z. B.

$$\int\frac{dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=A,\quad \int\frac{xx\,dx}{\sqrt{(1-x^4)}}=B$$

so ist $A=\frac{\Pi\frac{1}{4}.\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\frac{1}{4})}$, $B=\frac{\Pi\frac{3}{4}.\Pi(-\frac{1}{2})}{3\Pi\frac{1}{4}}=\frac{\Pi(-\frac{1}{4}).\Pi(-\frac{1}{2})}{4\Pi\frac{1}{4}}$, so dass $AB=\frac{1}{4}\pi$. Zugleich folgt hieraus, da $\Pi\frac{1}{4}\cdot\Pi\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{\frac{1}{4}\pi}{\sin\frac{1}{4}\pi}=\frac{\pi}{\sqrt{8}}$,

$$\Pi\frac{1}{4}=\sqrt[4]{\left(\frac{1}{8}\pi AA\right)}=\sqrt[4]{\frac{\pi^3}{128BB}},\quad \Pi\left(-\frac{1}{4}\right)=\sqrt[4]{\frac{\pi^3}{8AA}}=\sqrt[4]{(2\pi BB)}$$

Der Zahlenwert von A beträgt, nach *Stirlings* Rechnung, 1,3110287771 4605987, der Wert von B ist nach demselben Schriftsteller $=0,5990701173$ 6779611, nach unserer, auf einen besonderen Kunstgriff gestützten Berechnung, $=0,5990701173$ 6779610372.

Allgemein lässt sich leicht zeigen, dass der Wert von Πz, wenn z rational $=\frac{m}{\mu}$ ist, wo m und μ ganze Zahlen bedeuten, aus $\mu-1$ bestimmten Werten solcher Integrale für $x=1$ abgeleitet werden kann, und zwar auf sehr viele verschiedene Arten. Nimmt man nämlich für λ eine ganze Zahl und für ν einen Bruch mit dem Nenner μ, so wird der Wert jenes Integrals stets auf drei Πz zurückgeführt, wo z ein Bruch mit dem Nenner μ ist; jedes solche Πz lässt sich aber durch Formel 45 entweder auf $\Pi\left(-\frac{1}{\mu}\right)$, oder auf $\Pi\left(-\frac{2}{\mu}\right)$, oder $\Pi\left(-\frac{3}{\mu}\right)$ u. s. w., oder endlich auf $\Pi\left(-\frac{\mu-1}{\mu}\right)$, zurückführen, wenn z wirklich ein Bruch ist; ist aber z eine ganze Zahl, so ist Πz selbst bekannt. Aus jenen Integralwerten aber kann, allgemein gesprochen, jedes $\Pi\left(-\frac{m}{\mu}\right)$, wenn $m<\mu$, durch Elimination gefunden werden.*) Wenn wir noch Formel 54 zu Hilfe nehmen, wird sogar die Hälfte jener Integrale hinreichend sein. Setzen wir z. B.

$$\int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)}}=C,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^2}}=D,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^3}}=E,\quad \int\frac{dx}{\sqrt[5]{(1-x^5)^4}}=F,$$

so wird

$$C=\Pi\frac{1}{5}\cdot\Pi\left(-\frac{1}{5}\right),\quad D=\frac{\Pi\frac{1}{5}.\Pi(-\frac{2}{5})}{\Pi(-\frac{1}{5})},\quad E=\frac{\Pi\frac{1}{5}.\Pi(-\frac{3}{5})}{\Pi(-\frac{2}{5})},\quad F=\frac{\Pi\frac{1}{5}.\Pi(-\frac{4}{5})}{\Pi(-\frac{3}{5})}$$

Hiernach haben wir, wegen $\Pi\frac{1}{5}=\frac{1}{5}\Pi\left(-\frac{4}{5}\right)$,

$$\Pi\left(-\frac{1}{5}\right)=\sqrt[5]{\frac{5C^4}{DEF}},\quad \Pi\left(-\frac{2}{5}\right)=\sqrt[5]{\frac{25C^3D^3}{EEFF}},\quad \Pi\left(-\frac{3}{5}\right)=\sqrt[5]{\frac{125\,CCDDEE}{F^3}},$$
$$\Pi\left(-\frac{4}{5}\right)=\sqrt[5]{(625\,CDEF)}$$

Die Formeln 54 und 55 liefern überdies

$$C=\frac{\pi}{\sin\frac{1}{5}\pi},\qquad \frac{D}{F}=\frac{\sin\frac{1}{5}\pi}{\sin\frac{2}{5}\pi}$$

so dass zwei Integrale D und E oder E und F hinreichen, um alle Werte $\Pi\left(-\frac{1}{5}\right)$, $\Pi\left(-\frac{2}{5}\right)$ u. s. w. zu berechnen.

28.

Setzen wir $y=\nu x$ und $\mu=1$, so wird $\frac{\Pi\lambda.\Pi\nu}{\lambda\Pi(\lambda+\nu)}$ der Wert des Integrals $\int\frac{y^{\lambda-1}\left(1-\frac{y}{\nu}\right)^\nu dy}{\nu^\lambda}$ von $y=0$ bis $y=\nu$, oder es ist der Wert des Integrals

*) Wenn wir statt der Grössen selbst ihre Logarithmen einführen, so wird diese Elimination nur lineare Gleichungen betreffen.

$\int y^{\lambda-1}\left(1-\frac{y}{\nu}\right)^{\nu} dy$ zwischen denselben Grenzen $=\frac{\nu^{\lambda}\Pi\lambda\,.\,\Pi\nu}{\lambda\Pi(\lambda+\nu)}=\frac{\Pi(\nu,\,\lambda)}{\lambda}$ (Form. 47), sofern ν eine ganze Zahl bedeutet. Wenn nun ν ins Unendliche wächst, wird der Grenzwert von $\Pi(\nu,\,\lambda)=\Pi\lambda$, der Grenzwert von $\left(1-\frac{y}{\nu}\right)^{\nu}$ aber $=e^{-y}$, wo e die Basis der hyperbolischen Logarithmen bezeichnet. Ist daher λ positiv, so drückt $\frac{\Pi\lambda}{\lambda}$ oder $\Pi(\lambda-1)$ das Integral $\int y^{\lambda-1}e^{-y}dy$ von $y=0$ bis $y=\infty$ aus, oder wenn wir λ statt $\lambda-1$ schreiben, $\Pi\lambda$ ist der Wert des Integrals $\int y^{\lambda}\,e^{-y}dy$ von $y=0$ bis $y=\infty$, wenn $\lambda+1$ positiv ist.

Setzen wir allgemeiner $y=z^{\alpha}$, $\alpha\lambda+\alpha-1=\beta$, so geht $\int y^{\lambda}\,e^{-y}dy$ in $\int \alpha z^{\beta}\,e^{-z^{\alpha}}dz$ über, welches also, zwischen den Grenzen $z=0$ und $z=\infty$ genommen, durch $\Pi\left(\frac{\beta+1}{\alpha}-1\right)$ ausgedrückt wird,
oder

Der Wert des Integrals $\int z^{\beta}\,e^{-z^{\alpha}}dz$ von $z=0$ bis $z=\infty$ wird $=\frac{\Pi\left(\frac{\beta+1}{\alpha}-1\right)}{\alpha}=\frac{\Pi\frac{\beta+1}{\alpha}}{\beta+1}$, wenn α und $\beta+1$ positiv sind (sind beide negativ, so drückt sich das Integral durch $-\frac{\Pi\frac{\beta+1}{\alpha}}{\beta+1}$ aus). So findet man z. B. für $\beta=0$, $\alpha=2$, den Wert des Integrals $\int e^{-zz}dz=\Pi\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\sqrt{\pi}$.

[Siehe Anmerkung 9.]

29.

Euler hat für die Summe der Logarithmen $\log 1+\log 2+\log 3+\cdots+\log z$ die Reihe $\left(z+\frac{1}{2}\right)\log z-z+\frac{1}{2}\log 2\pi+\frac{\mathfrak{A}}{1.2z}-\frac{\mathfrak{B}}{3.4z^3}+\frac{\mathfrak{C}}{5.6z^5}-\cdots$ ermittelt, wo $\mathfrak{A}=\frac{1}{6}$, $\mathfrak{B}=\frac{1}{30}$, $\mathfrak{C}=\frac{1}{42}$ u. s. w. die *Bernoullischen* Zahlen sind. Durch diese Reihe wird daher $\log\Pi z$ dargestellt; obgleich nämlich auf den ersten Blick dieser Schluss auf ganzzahlige Werte beschränkt zu sein scheint, so ergiebt sich doch bei näherer Betrachtung, dass die von *Euler* benutzte Entwickelung (Instit. Calc. Diff. Cap. VI, 159) wenigstens für positive gebrochene Werte ebensowohl angewendet werden kann, wie für ganze Zahlen: denn er setzt nur voraus, dass die in eine Reihe zu entwickelnde Function von z so beschaffen sei, dass ihre Abnahme, wenn z in $z-1$ übergeht, durch den *Taylorschen* Lehrsatz dargestellt werden kann, sowie dass diese Abnahme $=\log z$ ist. Die erstere Bedingung beruht auf der *Stetigkeit* der Function, hat also für negative Werte von z nicht statt, auf die jene Reihe mithin nicht ausgedehnt werden darf: die zweite Bedingung aber kommt der Function $\log \Pi z$ allgemein zu, ohne Beschränkung auf ganzzahlige Werte von z. Wir setzen daher[10])

[58] $$\log \Pi z = \left(z + \frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{\mathfrak{A}}{1.2z} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4z^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6z^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8z^7} + \cdots$$

Da hiernach auch

$$\log \Pi 2z = \left(2z + \frac{1}{2}\right)\log 2z - 2z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2z} - \frac{\mathfrak{B}}{3.4.8z^3} + \frac{\mathfrak{C}}{5.6.32z^5} - \frac{\mathfrak{D}}{7.8.128z^7} + \cdots$$

und nach Formel 57, wenn $n = 2$ gesetzt wird,

$$\log \Pi\left(z - \frac{1}{2}\right) = \log \Pi 2z - \log \Pi z - \left(2z + \frac{1}{2}\right)\log 2 + \frac{1}{2}\log 2\pi, \text{ so ist}$$

[59] $$\log \Pi\left(z - \frac{1}{2}\right) = z\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi - \frac{\mathfrak{A}}{1.2.2z} + \frac{7\mathfrak{B}}{3.4.8z^3} - \frac{31\mathfrak{C}}{5.6.32z^5} + \frac{127\mathfrak{D}}{7.8.128z^7} - \cdots$$

Diese beiden Reihen convergiren für grosse Werte von z von Anfang an ziemlich rasch, so dass sich ihre angenäherte Summe bequem und hinreichend genau berechnen lässt: indessen ist wohl zu beachten, dass für jeden gegebenen, noch so grossen, Wert von z nur eine beschränkte Genauigkeit zu erzielen ist, da die *Bernoullischen* Zahlen eine hypergeometrische Reihe bilden, so dass jene Reihen, wenn sie nur hinreichend weit erstreckt werden, sicher aus convergenten in divergente übergehen.[11]) Übrigens ist nicht zu leugnen, dass die Theorie solcher divergenten Reihen bisher an gewissen Schwierigkeiten leidet, von denen ich vielleicht bei anderer Gelegenheit einige behandeln werde.

30.

Aus Formel 38 folgt

$$\frac{\Pi(k, z + \omega)}{\Pi(k, z)} = \frac{z+1}{z+1+\omega} \cdot \frac{z+2}{z+2+\omega} \cdot \frac{z+3}{z+3+\omega} \cdots \frac{z+k}{z+k+\omega} \cdot k^{\omega}$$

woraus, wenn man die Logarithmen nimmt und in unendliche Reihen entwickelt, hervorgeht

[60] $\log\Pi(k,z+\omega)=\log\Pi(k,z)$

$$+\omega\left(\log k-\frac{1}{z+1}-\frac{1}{z+2}-\frac{1}{z+3}-\cdots-\frac{1}{z+k}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\omega\omega\left(\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{1}{(z+3)^2}+\cdots+\frac{1}{(z+k)^2}\right)$$
$$-\frac{1}{3}\omega^3\left(\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{(z+2)^3}+\frac{1}{(z+3)^3}+\cdots+\frac{1}{(z+k)^3}\right)$$
$$+\cdots \text{ in inf.}$$

Die hier mit ω multiplicirte Reihe, die sich, wenn man will, auch so schreiben lässt

$$-\frac{1}{z+1}+\log 2-\frac{1}{z+2}+\log\frac{3}{2}-\frac{1}{z+3}+\log\frac{4}{3}-\frac{1}{z+4}+\log\frac{5}{4}-\cdots$$
$$+\log\frac{k}{k-1}-\frac{1}{z+k}$$

besteht aus einer endlichen Anzahl von Gliedern, convergirt aber, wenn k unendlich gross wird, gegen eine gewisse Grenze, die uns eine neue Art transscendenter Functionen darbietet, welche wir im Weiteren mit Ψz bezeichnen wollen.

Nennen wir ferner die Summen der folgenden, ins *Unendliche* erstreckten, Reihen

$$\frac{1}{(z+1)^2}+\frac{1}{(z+2)^2}+\frac{1}{(z+3)^2}+\cdots$$
$$\frac{1}{(z+1)^3}+\frac{1}{(z+2)^3}+\frac{1}{(z+3)^3}+\cdots$$
$$\frac{1}{(z+1)^4}+\frac{1}{(z+2)^4}+\frac{1}{(z+3)^4}+\cdots$$

u. s. w.

bezw. P, Q, R u. s. f. (die Einführung von Functionszeichen erscheint für diese weniger notwendig), so haben wir

[61] $$\log\Pi(z+\omega)=\log\Pi z+\omega\Psi z+\frac{1}{2}\omega\omega P-\frac{1}{3}\omega^3 Q+\frac{1}{4}\omega^4 R-\cdots$$

Offenbar ist die Function Ψz die erste Ableitung von $\log\Pi z$, so dass

[62] $$\frac{d\Pi z}{dz}=\Pi z.\Psi z$$

Ebenso ist $P=\dfrac{d\Psi z}{dz}$, $Q=-\dfrac{dd\Psi z}{2dz^2}$, $R=+\dfrac{d^3\Psi z}{2.3\,dz^3}\cdots$

31.

Die Function Ψz ist beinahe ebenso merkwürdig wie die Function Πz, weshalb wir die wichtigsten Eigenschaften derselben hier zusammenstellen wollen. Durch Differentiation von Gleichung 44 kommt

$$\Psi(z+1) = \Psi z + \frac{1}{z+1} \tag{63}$$

folglich

$$\Psi(z+n) = \Psi(z) + \frac{1}{z+1} + \frac{1}{z+2} + \frac{1}{z+3} + \cdots + \frac{1}{z+n} \tag{64}$$

Hiernach kann man von kleineren Werten von z zu grösseren hinauf, oder von grösseren zu kleineren hinabsteigen; für grössere positive Werte von z berechnen sich die Zahlenwerte der Function hinreichend bequem aus folgenden Formeln, die sich durch Differentiation der Gleichungen 58 und 59 ergeben, von denen indessen dasselbe gilt, was wir Art. 29 über die Formeln 58 und 59 bemerkt haben:

$$\Psi z = \log z + \frac{1}{2z} - \frac{\mathfrak{A}}{2zz} + \frac{\mathfrak{B}}{4z^4} - \frac{\mathfrak{C}}{6z^6} + \cdots \tag{65}$$

$$\Psi\left(z - \frac{1}{2}\right) = \log z + \frac{\mathfrak{A}}{2.2zz} - \frac{7\mathfrak{B}}{4.8z^4} + \frac{31\mathfrak{C}}{6.32z^6} - \cdots \tag{66}$$

So haben wir für $z = 10$ berechnet

$$\Psi z = 2{,}3517525890\ 6672110764\ 743$$

und gehen von hier aus zurück auf

$$\Psi 0 = -0{,}5772156649\ 0153286060\ 653\text{*)}$$

*) Da dieser Wert von der zwanzigsten Stelle an von demjenigen abweicht, den *Mascheroni* in den Bemerkungen zu *Eulers Calculum Integr.* berechnet hat, veranlasste ich *Friedrich Bernhard Gottfried Nicolai*, einen unermüdlichen Rechner, jene Wertbestimmung zu wiederholen und weiter auszudehnen. Er fand durch doppelte Rechnung, nämlich einmal von $z = 50$, einmal von $z = 100$ ausgehend,

$$\Psi 0 = -0{,}5772156649\ 0153286060\ 6512090082\ 4024310421$$

Von demselben sehr geübten Rechner rührt auch der zweite Teil der diesem Abschnitt angehängten Tafel her, der die Werte von Ψz auf 18 Stellen (deren letzte unsicher ist), für alle Werte z von 0 bis 1, von Hundertstel zu Hundertstel, enthält. Die Methoden, mittels welcher beide Tafeln hergestellt sind, beruhen übrigens teils auf den hier gegebenen Sätzen, teils auf besonderen Rechnungskunstgriffen, die wir bei anderer Gelegenheit mitteilen werden.

Für ganzzahlige positive Werte von z ist allgemein

[67] $$\Psi z = \Psi 0 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{z}$$

Für ganzzahlige negative Werte dagegen wird Ψz offenbar unendlich gross.

32.

Formel 55 liefert uns $\log \Pi(-z) + \log \Pi(z-1) = \log \pi - \log \sin z\pi$, woraus durch Differentiation folgt

[68] $$\Psi(-z) - \Psi(z-1) = \pi \operatorname{cotang} z\pi.$$

Und da man aus der Definition der Function Ψ allgemein hat

[69] $$\Psi x - \Psi y = -\frac{1}{x+1} + \frac{1}{y+1} - \frac{1}{x+2} + \frac{1}{y+2} - \frac{1}{x+3} + \cdots$$

so ergiebt sich die bekannte Reihe

$$\pi \operatorname{cotang} z\pi = \frac{1}{z} - \frac{1}{1-z} + \frac{1}{1+z} - \frac{1}{2-z} + \frac{1}{2+z} - \frac{1}{3-z} + \cdots$$

Ebenso geht aus der Differentiation von Formel 57 hervor

[70] $$\Psi z + \Psi\left(z - \frac{1}{n}\right) + \Psi\left(z - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \Psi\left(z - \frac{n-1}{n}\right) = n\Psi nz - n \log n$$

somit, wenn wir $z = 0$ setzen,

[71] $$\Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{2}{n}\right) + \Psi\left(-\frac{3}{n}\right) + \cdots + \Psi\left(-\frac{n-1}{n}\right) = (n-1)\Psi 0 - n \log n$$

So ist z. B.

$$\Psi\left(-\frac{1}{2}\right) = \Psi 0 - 2\log 2 = -1{,}96351\ 00260\ 21423\ 47944\ 099,$$

woraus weiter $$\Psi \frac{1}{2} = +0{,}03648\ 99739\ 78576\ 52055\ 901.$$

33.

Wie wir im vor. Art. $\Psi\left(-\frac{1}{2}\right)$ auf $\Psi 0$ und einen Logarithmus zurückgeführt haben, so wollen wir allgemein $\Psi\left(-\frac{m}{n}\right)$, wo m und n ganze Zahlen bedeuten, deren kleinere m ist, auf $\Psi 0$ und Logarithmen zurückführen. Wir setzen $\frac{2\pi}{n} = \omega$, und es sei φ gleich einem der Winkel ω, 2ω, 3ω .... $(n-1)\omega$; also $1 = \cos n\varphi = \cos 2n\varphi = \cos 3n\varphi$ u. s. f.,

$\cos\varphi = \cos(n+1)\varphi = \cos(2n+1)\varphi$ u. s. f., $\cos 2\varphi = \cos(n+2)\varphi$ u. s. f., ferner $\cos\varphi + \cos 2\varphi + \cos 3\varphi + \ldots + \cos(n-1)\varphi + 1 = 0$. Wir haben daher

$$\cos\ \varphi . \Psi\frac{1-n}{n} = -n\cos\varphi\ + \cos\varphi\ .\log 2 - \frac{n}{n+1}\cos(n+1)\varphi + \cos\varphi\ .\log\frac{3}{2} - \cdots$$

$$\cos 2\varphi . \Psi\frac{2-n}{n} = -\frac{n}{2}\cos 2\varphi + \cos 2\varphi . \log 2 - \frac{n}{n+2}\cos(n+2)\varphi + \cos 2\varphi . \log\frac{3}{2} - \cdots$$

$$\cos 3\varphi . \Psi\frac{3-n}{n} = -\frac{n}{3}\cos 3\varphi + \cos 3\varphi . \log 2 - \frac{n}{n+3}\cos(n+3)\varphi + \cos 3\varphi . \log\frac{3}{2} - \cdots$$

u. s. f. bis

$$\cos(n-1)\varphi . \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) = -\frac{n}{n+1}\cos(n-1)\varphi + \cos(n-1)\varphi . \log 2 - \frac{n}{2n-1}\cos(2n-1)\varphi$$
$$+ \cos(n-1)\varphi . \log\frac{3}{2} - \cdots$$

$$\Psi 0 = -\frac{n}{n}\cos n\varphi + \log 2 - \frac{n}{2n}\cos 2n\varphi + \log\frac{3}{2} - \cdots$$

und somit durch *Addition*

$$\cos\varphi . \Psi\frac{1-n}{n} + \cos 2\varphi . \Psi\frac{2-n}{n} + \cos 3\varphi . \Psi\frac{3-n}{n} + \cdots$$
$$+ \cos(n-1)\varphi . \Psi\left(-\frac{1}{n}\right) + \Psi 0$$
$$= -n\left(\cos\varphi + \frac{1}{2}\cos 2\varphi + \frac{1}{3}\cos 3\varphi + \frac{1}{4}\cos 4\varphi + \cdots \text{ in infin.}\right)$$

Nun ist aber allgemein, wenn x nicht grösser als eins ist,

$$\log(1 - 2x\cos\varphi + xx) = -2\left(x\cos\varphi + \frac{1}{2}xx\cos 2\varphi + \frac{1}{3}x^3\cos 3\varphi + \cdots\right)$$

welche Reihe leicht aus der Entwickelung von $\log(1 - rx) + \log\left(1 - \frac{x}{r}\right)$ folgt, wo r die Grösse $\cos\varphi + \sqrt{-1}.\sin\varphi$ bezeichnet. Mithin wird die vorige Gleichung

$$[72]\ \cos\varphi . \Psi\frac{1-n}{n} + \cos 2\varphi . \Psi\frac{2-n}{n} + \cos 3\varphi . \Psi\frac{3-n}{n} + \cdots + \cos(n-1)\varphi . \Psi\left(-\frac{1}{n}\right)$$
$$= -\Psi 0 + \frac{1}{2}n\log(2 - 2\cos\varphi)$$

Nun werde in dieser Gleichung nach einander $\varphi = \omega$, $\varphi = 2\omega$, $\varphi = 3\omega$ u. s. f. bis $\varphi = (n-1)\omega$ gesetzt, diese einzelnen Gleichungen der Reihe nach mit $\cos m\omega$, $\cos 2m\omega$, $\cos 3m\omega$ u. s. f. bis $\cos(n-1)m\omega$ multiplicirt und zu dem Aggregat der Producte Gleichung 71

$$\Psi\frac{1-n}{n}+\Psi\frac{2-n}{n}+\Psi\frac{3-n}{n}+\cdots+\Psi\left(-\frac{1}{n}\right)=(n-1)\Psi 0-n\log n$$

addirt. Wenn man nun berücksichtigt, dass

$$1+\cos m\omega.\cos k\omega+\cos 2m\omega.\cos 2k\omega+\cos 3m\omega.\cos 3k\omega$$
$$+\cdots+\cos(n-1)m\omega.\cos(n-1)k\omega=0$$

ist, wenn k eine der Zahlen 1, 2, 3 .... $(n-1)$ bedeutet, ausgenommen die beiden Werte m und $n-m$, für welche jene Summe $=\frac{1}{2}n$ wird, so ist klar, dass aus der Addition jener Gleichungen, nach Division mit $\frac{n}{2}$, hervorgeht

[73]
$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right)+\Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right)=$$
$$2\Psi 0-2\log n+\cos m\omega.\log(2-2\cos\omega)+\cos 2m\omega.\log(2-2\cos 2\omega)$$
$$+\cos 3m\omega.\log(2-2\cos 3\omega)+\cdots+\cos(n-1)m\omega.\log(2-2\cos(n-1)\omega)$$

Offenbar ist das letzte Glied dieser Gleichung $=\cos m\omega.\log(2-2\cos\omega)$, das vorletzte $=\cos 2m\omega.\log(2-2\cos 2\omega)$ u. s. f., so dass immer je zwei Glieder einander gleich sind, ausgenommen, wenn n gerade ist, das einzelne Glied $\cos\frac{n}{2}\cdot m\omega\log\left(2-2\cos\frac{n}{2}\omega\right)$, welches für gerades m, gleich $+2\log 2$, und für ungerades m gleich $-2\log 2$ wird. Verbinden wir nun mit Gleichung 73 die folgende

$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right)-\Psi\left(-\frac{n-m}{n}\right)=\pi\operatorname{cotang}\frac{m}{n}\pi$$

so haben wir, für ungerade Werte von n, wenn m eine positive ganze Zahl, kleiner als n, ist

[74]
$$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right)=\Psi 0+\frac{1}{2}\pi\operatorname{cotang}\frac{m\pi}{n}-\log n+\cos\frac{2m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$
$$+\cos\frac{4m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{4\pi}{n}\right)+\cos\frac{6m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{6\pi}{n}\right)+\cdots$$
$$+\cos\frac{(n-1)m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{(n-1)\pi}{n}\right)$$

Dagegen für gerade Werte von n

[75] $$\Psi\left(-\frac{m}{n}\right)$$

$$=\Psi 0+\frac{1}{2}\pi\operatorname{cotang}\frac{m\pi}{n}-\log n+\cos\frac{2m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{2\pi}{n}\right)$$

$$+\cos\frac{4m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{4\pi}{n}\right)+\cdots+\cos\frac{(n-2)m\pi}{n}\cdot\log\left(2-2\cos\frac{(n-2)\pi}{n}\right)$$

$$\pm\log 2$$

wo das obere Vorzeichen für gerade m, das untere für ungerade m gilt. So findet man z. B.

$$\Psi\left(-\frac{1}{4}\right)=\Psi 0+\frac{1}{2}\pi-3\log 2,\qquad \Psi\left(-\frac{3}{4}\right)=\Psi 0-\frac{1}{2}\pi-3\log 2$$

$$\Psi\left(-\frac{1}{3}\right)=\Psi 0+\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\log 3,\quad \Psi\left(-\frac{2}{3}\right)=\Psi 0-\frac{1}{2}\pi\sqrt{\frac{1}{3}}-\frac{3}{2}\log 3$$

Verbindet man übrigens diese Gleichungen mit Gleichung 64, so ergiebt sich ohne Weiteres, dass sich Ψz allgemein für *jeden beliebigen*, positiven oder negativen, *rationalen Wert* von z durch $\Psi 0$ und Logarithmen bestimmen lässt, welcher Satz in der That höchst merkwürdig ist.

34.

Da nach Art. 28 $\Pi\lambda$ der Wert des Integrals $\int y^\lambda e^{-y}dy$ von $y=0$ bis $y=\infty$ ist, wenn $\lambda+1$ positiv ist, so wird, wenn wir nach λ differentiiren,

$$\frac{d\Pi\lambda}{d\lambda}=\frac{d\int y^\lambda e^{-y}dy}{d\lambda}=\int y^\lambda e^{-\lambda}\log y\,dy$$

oder

[76] $$\Pi\lambda.\Psi\lambda=\int y^\lambda e^{-y}\log y.dy,\quad\text{von } y=0 \text{ bis } y=\infty$$

Allgemeiner wird, wenn wir $y=z^\alpha$, $\alpha\lambda+\alpha-1=\beta$ setzen, der Wert des Integrals $\int z^\beta e^{-z^\alpha}\log z dz$ von $z=0$ bis $z=\infty$

$$=\frac{1}{\alpha\alpha}\Pi\left(\frac{\beta+1}{\alpha}-1\right)\cdot\Psi\left(\frac{\beta+1}{\alpha}-1\right)=\frac{1}{\alpha(\beta+1)}\Pi\frac{\beta+1}{\alpha}\cdot\Psi\frac{\beta+1}{\alpha}-\frac{1}{(\beta+1)^2}\Pi\frac{\beta+1}{\alpha}$$

wenn $\beta+1$ und α gleichzeitig positiv sind, und gleich derselben Grösse mit entgegengesetztem Vorzeichen, wenn $\beta+1$ und α beide negativ sind.

35.

Aber nicht nur das Product $\Pi\lambda . \Psi\lambda$, sondern auch die Function $\Psi\lambda$ selbst lässt sich durch ein bestimmtes Integral darstellen. Bezeichnet k eine positive ganze Zahl, so ist klar, dass der Wert des Integrals $\int \frac{x^\lambda - x^{\lambda+k}}{1-x} \cdot dx$, von $x=0$ bis $x=1$,

$$= \frac{1}{\lambda+1} + \frac{1}{\lambda+2} + \frac{1}{\lambda+3} + \cdots + \frac{1}{\lambda+k}$$

ist. Da ferner der Wert des Integrals $\int \left(\frac{1}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx$ allgemein $= \text{Const.} + \log \frac{1-x^k}{1-x}$ ist, so wird derselbe zwischen den Grenzen $x=0$ und $x=1$ gleich $\log k$ sein, woraus hervorgeht, dass der Wert des Integrals $S = \int \left(\frac{1 - x^\lambda + x^{\lambda+k}}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx$ zwischen denselben Grenzen

$$= \log k - \frac{1}{\lambda+1} - \frac{1}{\lambda+2} - \frac{1}{\lambda+3} - \cdots - \frac{1}{\lambda+k}$$

ist, welchen Ausdruck wir mit Ω bezeichnen wollen. Zerlegen wir das Integral S in zwei Teile

$$\int \left(\frac{1-x^\lambda}{1-x} \right) dx + \int \left(\frac{x^{\lambda+k}}{1-x} - \frac{kx^{k-1}}{1-x^k} \right) dx \cdot$$

Der erste Teil $\int \frac{1-x^\lambda}{1-x} \cdot dx$ verwandelt sich, wenn wir $x = y^k$ setzen, in

$$\int \frac{ky^{k-1} - ky^{\lambda k+k-1}}{1-y^k} dy$$

woraus ohne Weiteres klar ist, dass der Wert desselben von $x=0$ bis $x=1$ gleich ist dem Werte des Integrals

$$\int \frac{kx^{k-1} - kx^{\lambda k+k-1}}{1-x^k} dx$$

zwischen denselben Grenzen, da man offenbar den Buchstaben y unter dieser Beschränkung in x verwandeln darf. Hiernach wird das Integral S, zwischen denselben Grenzen,

$$= \int \left(\frac{x^{\lambda+k}}{1-x} - \frac{kx^{\lambda k+k-1}}{1-x^k} \right) dx$$

Dies Integral geht aber, wenn wir $x^k = z$ setzen, über in

$$\int\left(\frac{z^{\frac{\lambda+1}{k}}}{k\left(1-z^{\frac{1}{k}}\right)} - \frac{z^\lambda}{1-z}\right)dz$$

und dieses ist mithin, zwischen den Grenzen $z = 0$ und $z = 1$ genommen, gleich Ω. Wenn nun aber k ins Unendliche wächst, hat Ω die Grenze $\Psi\lambda$, $\frac{\lambda+1}{k}$ die Grenze 0, $k\left(1 - z^{\frac{1}{k}}\right)$ aber hat die Grenze $\log\frac{1}{z}$ oder $-\log z$. Demnach haben wir

$$[77] \qquad \Psi\lambda = \int\left(\frac{1}{\log\frac{1}{z}} - \frac{z^\lambda}{1-z}\right)dz = \int\left(-\frac{1}{\log z} - \frac{z^\lambda}{1-z}\right)dz$$

von $z = 0$ bis $z = 1$.

36.

Die bestimmten Integrale, durch die oben die Functionen $\Pi\lambda$ und $\Pi\lambda.\Psi\lambda$ ausgedrückt sind, mussten auf solche Werte von λ beschränkt werden, dass $\lambda + 1$ positiv wird: diese Einschränkung entsprang aus der Beweisführung selbst, und in der That ist leicht zu sehen, dass jene Integrale für andere Werte von λ stets unendlich werden, obgleich die Functionen $\Pi\lambda$ und $\Pi\lambda.\Psi\lambda$ endlich bleiben können. Der Richtigkeit von Formel 77 muss sicherlich dieselbe Bedingung zu Grunde liegen, dass $\lambda + 1$ positiv sei (denn sonst wird das Integral sicher unendlich, wenn auch die Function $\Psi\lambda$ endlich bleibt): allein die Herleitung der Formel scheint auf den ersten Blick allgemeingültig und keiner Beschränkung unterworfen zu sein. Sieht man aber näher zu, so ergiebt sich leicht, dass in der Analysis selbst, durch die die Formel ermittelt wurde, diese Beschränkung bereits enthalten ist. Wir haben nämlich stillschweigend vorausgesetzt, dass das Integral $\int\frac{1-x^\lambda}{1-x}dx$, wofür wir das ihm gleiche $\int\frac{kx^{k-1} - kx^{\lambda k+k-1}}{1-x^k}dx$ gesetzt haben, einen *endlichen* Wert besitze, und diese Bedingung erfordert, dass $\lambda + 1$ positiv sei. Aus unserer Analysis folgt nämlich, dass diese beiden Integrale immer dann einander gleich sind, wenn dieses von $x = 0$ bis $x = 1 - \omega$, jenes von $x = 0$ bis $x = (1-\omega)^k$ erstreckt wird, wie klein ω auch sei, wenn es nur nicht $= 0$ ist: aber nichtsdestoweniger nähern sich in dem Falle, wo $\lambda + 1$ nicht positiv ist, die beiden Integrale, von $x = 0$ bis zu *derselben* Grenze $x = 1 - \omega$ erstreckt, keineswegs der Gleichheit, vielmehr wächst ihr Unterschied, während ω unbegrenzt abnimmt, ins Unendliche. Dies Beispiel zeigt, wie grosse Vorsicht bei der Behandlung von Infinitesimal-

Grössen geboten ist, die nach unserer Ansicht in analytischen Rechnungen nur insoweit zuzulassen sind, als sie sich auf die Theorie der Grenzen zurückführen lassen.

37.

Wird in Formel 77, $z = e^{-u}$ gesetzt, so ist klar, dass dieselbe sich auch so schreiben lässt

$$\Psi\lambda = -\int\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-u\lambda-u}}{1-e^{-u}}\right)du, \text{ von } u=\infty \text{ bis } u=0, \text{ d. h.}$$

[78] $$\Psi\lambda = \int\left(\frac{e^{-u}}{u} - \frac{e^{-\lambda u}}{e^{u}-1}\right)du, \text{ von } u=0 \text{ bis } u=\infty.$$

(Ebenso verwandelt sich der im Art. 28 angeführte Wert von $\Pi\lambda$ durch die Substitution $e^{-y}=v$ in den folgenden

$$\Pi\lambda = \int\left(\log\frac{1}{v}\right)^{\lambda}dv, \text{ von } v=0 \text{ bis } v=1)$$

Ferner geht aus Formel 77 hervor, dass

[79] $$\Psi\lambda - \Psi\mu = \int\frac{z^{\mu}-z^{\lambda}}{1-z}dz, \text{ von } z=0 \text{ bis } z=1$$

wo ausser $\lambda+1$ auch $\mu+1$ positiv sein muss.

Wenn in derselben Formel 77 $z=u^{\alpha}$ gesetzt wird, wo α eine positive Grösse bezeichnet, so kommt

$$\Psi\lambda = \int\left(-\frac{u^{\alpha-1}}{\log u} - \frac{\alpha u^{\alpha\lambda+\alpha-1}}{1-u^{\alpha}}\right)du, \text{ von } u=0 \text{ bis } u=1$$

und da man für einen positiven Wert von β ebenso setzen kann

$$\Psi\lambda = \int\left(-\frac{u^{\beta-1}}{\log u} - \frac{\beta u^{\beta\lambda+\beta-1}}{1-u^{\beta}}\right)du$$

so wird offenbar

$$0 = \int\left(\frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\log u} + \frac{\alpha u^{\alpha\lambda+\alpha-1}}{1-u^{\alpha}} - \frac{\beta u^{\beta\lambda+\beta-1}}{1-u^{\beta}}\right)du$$

oder

$$\int\frac{u^{\alpha-1}-u^{\beta-1}}{\log u}du = \int\left(\frac{\beta u^{\beta\lambda+\beta-1}}{1-u^{\beta}} - \frac{\alpha u^{\alpha\lambda+\alpha-1}}{1-u^{\alpha}}\right)du$$

wobei die Integrale sich immer von 0 bis 1 erstrecken. Wird nun $\lambda = 0$ gesetzt, so kann man das letztere Integral *unbestimmt* ausführen; es ist nämlich $= \log \frac{1 - u^\alpha}{1 - u^\beta}$, wenn es für $u = 0$ verschwinden soll; da also, für $u = 1$, $\frac{1 - u^\alpha}{1 - u^\beta} = \frac{\alpha}{\beta}$ zu setzen ist, so wird das Integral

$$\log \frac{\alpha}{\beta} = \int \frac{u^{\alpha - 1} - u^{\beta - 1}}{\log u} du, \quad \text{von } u = 0 \text{ bis } u = 1$$

welcher Satz ehedem von *Euler* durch andere Methoden aufgefunden wurde.

z	$\log \Pi z$	Ψz
0.00	0.0000000000 0000000000	— 0.5772156649 01532861
0.01	9.9975287306 5869172624	0.5608854578 68674498
0.02	9.9951278719 8879034144	0.5447893104 56179789
0.03	9.9927964208 8883589748	0.5289210872 85430502
0.04	9.9905334004 0842900595	0.5132748789 16830312
0.05	9.9883378587 9012046216	0.4978449912 99870371
0.06	9.9862088685 5581945437	0.4826259358 14825705
0.07	9.9841455256 3523567773	0.4676124198 67553632
0.08	9.9821469485 3403172902	0.4527993380 01712885
0.09	9.9802122775 3951136603	0.4381817634 95334764
0.10	9.9783406739 6180754713	0.4237549404 11076796
0.11	9.9765313194 0866250820	0.4095142760 71694248
0.12	9.9747834150 9201128963	0.3954553339 34292807
0.13	9.9730961811 6469083029	0.3815738268 38792064
0.14	9.9714688560 8569966779	0.3678656106 07749546
0.15	9.9699006960 1252903489	0.3543266779 76279272
0.16	9.9683909742 1917527943	0.3409531528 32261794
0.17	9.9669389805 3852656982	0.3277412847 48392299
0.18	9.9655440208 2789424567	0.3146874437 88860621
0.19	9.9642054164 5653136262	0.3017881155 74610030
0.20	9.9629225038 1404835193	0.2890398965 92188296
0.21	9.9616946338 3869862929	0.2764394897 32192051
0.22	9.9605211715 6456577252	0.2639837000 44220200
0.23	9.9594014956 8673884734	0.2516694306 96100107
0.24	9.9583349981 4361387302	0.2394936791 25936794
0.25	9.9573210837 1550754011	0.2274535333 76265408
0.26	9.9563591696 3881435774	0.2155461686 00265182
0.27	9.9554486852 3498063412	0.2037688437 30623157
0.28	9.9545890715 5360828076	0.1921188983 02221732
0.29	9.9537797810 2903856417	0.1805937494 20369178
0.30	9.9530202771 4980077695	0.1691908888 66799656
0.31	9.9523100341 4034352140	0.1579078803 36141874
0.32	9.9516485366 5449703876	0.1467423567 95996017
0.33	9.9510352794 8014390879	0.1356920179 64169332
0.34	9.9504697672 5460261315	0.1247546278 97003946
0.35	9.9499515141 9025401627	0.1139280126 83088296

z	$\log \Pi z$	Ψz
0.36	9.9494800438 0996487612	— 0.1032100582 36977615
0.37	9.9490548886 9188515282	0.0925987081 87861259
0.38	9.9486755902 2321722697	0.0820919618 58406487
0.39	9.9483416983 6257525751	0.0716878723 29281510
0.40	9.9480527714 1057187897	0.0613845445 85116146
0.41	9.9478083757 8828733374	0.0511801337 37897756
0.42	9.9476080858 2329302469	0.0410728433 24024375
0.43	9.9474514835 4291742066	0.0310609236 71447052
0.44	9.9473381584 7445730981	0.0211426703 33530475
0.45	9.9472677074 5205163055	0.0113164225 86445845
0.46	9.9472397344 2994856529	0.0015805619 87083418
0.47	9.9472538503 0190930853	+ 0.0080664890 11364893
0.48	9.9473096727 2650396072	0.0176262683 88849468
0.49	9.9474068259 5806639475	0.0271002758 35486201
0.50	9.9475449406 8308573196	0.0364899739 78576520
0.51	9.9477236538 6182228429	0.0457967895 61914496
0.52	9.9479426085 7494550351	0.0550221145 79551622
0.53	9.9482014538 7500065798	0.0641673073 66077154
0.54	9.9484998446 4251966174	0.0732336936 45365776
0.55	9.9488374414 4659973817	0.0822225675 39644344
0.56	9.9492139104 0978143536	0.0911351925 40635189
0.57	9.9496289230 7706494873	0.0999728024 44444623
0.58	9.9500821562 8891076887	0.1087366022 51781439
0.59	9.9505732920 5807738191	0.1174277690 35011042
0.60	9.9511020174 5015512544	0.1260474527 73476253
0.61	9.9516680244 6766136244	0.1345967771 58445210
0.62	9.9522710099 3756789859	0.1430768403 68980212
0.63	9.9529106754 0213704917	0.1514887158 19958383
0.64	9.9535867270 1294797674	0.1598334528 83415463
0.65	9.9542988754 2799988466	0.1681120775 84327804
0.66	9.9550468357 1178337730	0.1763255932 71894293
0.67	9.9558303272 3821579829	0.1844749812 67329607
0.68	9.9566490735 9634064632	0.1925612014 89132418
0.69	9.9575028024 9869525351	0.2005851930 56747012
0.70	9.9583912456 9225480685	0.2085478748 73493948

z	$\log \Pi z$	Ψz
0.71	9.9593141388 7186450668	+ 0.2164501461 89604789
0.72	9.9602712215 9607519880	0.2242928871 46157521
0.73	9.9612622372 0530119641	0.2320769593 00672792
0.74	9.9622869327 4222223320	0.2398032061 35096466
0.75	9.9633450588 7435456829	0.2474724535 46861164
0.76	9.9644363698 1871920339	0.2550855103 23688336
0.77	9.9655606232 6853798084	0.2626431686 02762795
0.78	9.9667175803 2189101417	0.2701462043 14883540
0.79	9.9679070054 1227146665	0.2775953776 14168016
0.80	9.9691286662 4097614416	0.2849914332 93861542
0.81	9.9703823337 1127271250	0.2923351011 88779580
0.82	9.9716677818 6428658993	0.2996270965 64887544
0.83	9.9729847878 1655271065	0.3068681204 96501033
0.84	9.9743331316 9917940601	0.3140588602 31568639
0.85	9.9757125965 9857361442	0.3211999895 45479708
0.86	9.9771229684 9867851092	0.3282921690 83820641
0.87	9.9785640362 2467644771	0.3353360466 94485409
0.88	9.9800355913 8811182162	0.3423322577 49528903
0.89	9.9815374283 3339013630	0.3492814254 57135499
0.90	9.9830693440 8561111078	0.3561841611 64059720
0.91	9.9846311382 9969520321	0.3630410646 48881123
0.92	9.9862226132 1076437381	0.3698527244 06401469
0.93	9.9878435735 8573930651	0.3766197179 23498793
0.94	9.9894938266 7611664682	0.3833426119 46740214
0.95	9.9911731821 7189109803	0.3900219627 42043086
0.96	9.9928814521 5658844947	0.3966583163 46662402
0.97	9.9946184510 6337679375	0.4032522088 13771306
0.98	9.9963839956 3222432515	0.4098041664 49890838
0.99	9.9981779048 6807320161	0.4163147060 45414956
1.00	0.0000000000 0000000000	0.4227843350 98467139

[Zweiter Teil.]

[Vierter Abschnitt.]

Bestimmung unserer Reihe durch eine Differentialgleichung zweiter Ordnung.

38.

Wird der Kürze wegen $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = P$ gesetzt, so haben wir nach Art. 4

$$\frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x)$$

und hieraus durch nochmaliges Differentiiren

$$\frac{ddP}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)} F(\alpha+2, \beta+2, \gamma+2, x)$$

Hiernach liefert Gleichung IX des Art. 10

[80] $$0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\frac{dP}{dx} - (x - xx)\frac{ddP}{dx^2}$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung kann als genauere Definition unserer Function angesehen werden; da aber $P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ kein vollständiges, sondern nur ein particuläres Integral ist (weil keine Constanten hinzugekommen sind), so muss die Bedingung hinzugefügt werden, dass P für $x = 0$ mit dem Wert 1 beginne, sowie dass für denselben Wert von x gleichzeitig $\frac{dP}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma}$ und $\frac{ddP}{dx^2} = \frac{\alpha\beta(\alpha+1)(\beta+1)}{\gamma(\gamma+1)}$ angenommen werde.

Für jeden Wert von x, zu dem man von $x = 0$ stetig fortschreitend übergeht, doch so, dass man den Wert $x = 1$, für den $x - xx = 0$ ist, nicht berührt, ist also P eine vollkommen bestimmte Grösse; offenbar kann man aber *auf diesem Wege* zu positiven reellen Werten von x, grösser als die Einheit, nur gelangen, indem man den Uebergang durch imaginäre Werte macht, und da dies auf unzählig viele verschiedene Arten unbeschadet der Stetigkeit geschehen kann, so erhellt hieraus noch nicht, ob nicht demselben Werte von x mehrere, wenn nicht gar unendlich viele verschiedene Werte von P entsprechen, wie dies bei mehreren, besser bekannten, transscendenten Functionen wirklich der Fall ist. Von diesem Gegenstande aber behalten wir uns vor, späterhin weitläufiger zu reden, da an dieser Stelle hauptsächlich *der* Fall behandelt wird, wo x unterhalb oder wenigstens nicht oberhalb der positiven Einheit angenommen wird und P gleich der Summe der Reihe $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ ist.

39.

Schreibt man in Gleichung 80, $1-y$ für x, so geht dieselbe über in diese

$$0=\alpha\beta P-(\alpha+\beta+1-\gamma-(\alpha+\beta+1)y)\frac{dP}{dy}-(y-yy)\frac{ddP}{dy^2}$$

welche dieselbe Form hat wie jene. Hieraus ergiebt sich sofort ein anderes particuläres Integral

$$P=F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, y)=F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$$

woraus nach bekannten Principien als vollständiges Integral der Gleichung 80 folgt

$$[81]\qquad P=MF(\alpha, \beta, \gamma, x)+NF(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$$

wobei M und N willkürliche Constanten bezeichnen.

Uebrigens bemerken wir hier nebenbei, dass die allgemeinere Gleichung

$$0=AP+(B+Cy)\frac{dP}{dy}+(D+Ey+Fyy)\frac{ddP}{dy^2}$$

sich leicht auf die Form von Gleichung 80 zurückführen lässt.

Denn seien die Wurzeln der Gleichung $0=D+Ey+Fyy^2$ diese, $y=a$ und $y=b$, oder sei $D+Ey+Fy^2$ identisch gleich dem Product $F(y-a)(y-b)$ so ist, wenn man $\frac{y-a}{b-a}=x$ setzt und α, β, γ so bestimmt, dass

$$\alpha\beta=\frac{A}{F},\quad \alpha+\beta+1=\frac{C}{F},\quad \gamma=-\frac{B+aC}{F(b-a)}$$

wird, klar, dass jene Gleichung in 80 übergeht.

40.

Mit Hilfe der Differentialgleichung 80 lassen sich sehr viele höchst merkwürdige Sätze über unsere Reihe finden, zum Teil allgemeiner, zum Teil mehr specieller Art, auch zweifeln wir nicht, dass viele weitere und wichtigere noch verborgen und ferneren Bemühungen vorbehalten sind. Was uns bis jetzt zu entdecken gelang, wollen wir hier vorführen.

Setzen wir $P = (1-x)^{\mu} P'$, so ist

$$\frac{dP}{dx} = -\mu(1-x)^{\mu-1} P' + (1-x)^{\mu} \frac{dP'}{dx}$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = \mu(\mu-1)(1-x)^{\mu-2} P' - 2\mu(1-x)^{\mu-1} \frac{dP'}{dx} + (1-x)^{\mu} \frac{ddP'}{dx^2}$$

Werden diese Werte in Gleichung 80 eingesetzt, so ergiebt sich, bei Division durch $(1-x)^{\mu-1}$,

$$0 = P'\{\alpha\beta(1-x) + (\gamma - (\alpha+\beta+1)x)\mu - x(\mu\mu - \mu)\}$$
$$-\frac{dP'}{dx}\{(\gamma - (\alpha+\beta+1)x) - 2\mu x\}(1-x) - \frac{ddP'}{dx^2}\{x - xx\}(1-x)$$

Wir wollen nun μ so bestimmen, dass der Multiplicator von P' durch $1-x$ teilbar wird, was geschieht, wenn entweder $\mu = 0$ oder $\mu = \gamma - \alpha - \beta$ gesetzt wird. Die erstere Annahme würde nichts Neues lehren, die Substitution des zweiten Wertes dagegen liefert

$$0 = P'\{\alpha\beta - \alpha\gamma - \beta\gamma + \gamma\gamma\} - \frac{dP'}{dx}\{\gamma - (2\gamma - \alpha - \beta + 1)x\}$$
$$-\frac{ddP'}{dx^2}\{x - xx\}$$

oder

$$0 = P'(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta) - \frac{dP'}{dx}\{\gamma - ((\gamma-\alpha) + (\gamma-\beta) + 1)x\}$$
$$-\frac{ddP'}{dx^2}(x - xx)$$

welche Gleichung gerade dieselbe Form hat wie Gleichung 80. Da nun für $x = 0$ offenbar $P' = 1$ und $\frac{dP'}{dx} = \frac{\alpha\beta}{\gamma} + \mu = \frac{(\gamma-\alpha)(\gamma-\beta)}{\gamma}$ wird, so ist klar, dass ihr Integral $P' = F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x)$ ist, so dass man allgemein hat[12])

[82] $$F(\gamma-\alpha, \gamma-\beta, \gamma, x) = (1-x)^{\alpha+\beta-\gamma} F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

Hieraus ist die Umformung der Reihe

$$1+\frac{2.8}{9}x+\frac{3.8.10}{9.11}xx+\frac{4.8.10.12}{9.11.13}x^3+\cdots=F\left(2,\ 4,\ \frac{9}{2},\ x\right)$$

in

$$(1-x)^{-\frac{3}{2}}\left(1+\frac{1.5}{2.9}x+\frac{1.3.5\,.7}{2.4.9.11}xx+\cdots\right)=(1-x)^{-\frac{3}{2}}F\left(\frac{5}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{9}{2},\ x\right)$$

zu entnehmen, die wir im Berliner astronomischen Jahrbuch 1814 p. 257 [Zusatz zu Art. 90 und 100 der Theoria motus] ohne Beweis angegeben haben.

41.

Wir setzen ferner $P=x^{\mu}P'$, so dass

$$\frac{dP}{dx}=\mu x^{\mu-1}P'+x^{\mu}\frac{dP'}{dx}$$
$$\frac{ddP}{dx^2}=(\mu\mu-\mu)x^{\mu-2}P'+2\mu x^{\mu-1}\frac{dP'}{dx}+x^{\mu}\frac{ddP'}{dx^2}$$

und die Substitution dieser Werte in 80 ergiebt, nach Division durch $x^{\mu-1}$,

$$\begin{aligned}0=P'\{&\alpha\beta x-(\gamma-(\alpha+\beta+1)x)\mu-(1-x)(\mu\mu-\mu)\}\\ &-\frac{dP'}{dx}\{\gamma-(\alpha+\beta+1)x+2\mu(1-x)\}x\\ &-\frac{ddP'}{dx^2}(xx-x^3)\end{aligned}$$

Der Multiplicator von x in dieser Formel wird durch x teilbar, wenn $\mu=0$ oder $\mu=1-\gamma$ gesetzt wird; der letztere Wert liefert

$$\begin{aligned}0=P'&(\alpha\beta+\alpha+\beta+1-2\gamma-\alpha\gamma-\beta\gamma+\gamma\gamma)\\ &-\frac{dP'}{dx}(2-\gamma-(\alpha+\beta+3-2\gamma)x)\\ &-\frac{ddP'}{dx^2}(x-xx).\end{aligned}$$

Beim Vergleich dieser Gleichung mit 80, deren Form ganz dieselbe ist, zeigt sich, dass, was dort P, α, β, γ war, hier P', $\alpha+1-\gamma$, $\beta+1-\gamma$, $2-\gamma$ ist: da wir aber das vollständige Integral jener Gleichung angegeben haben, so wird P' offenbar unter der Formel

$$\begin{aligned}P'=&MF(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)\\ &+NF(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x)\end{aligned}$$

enthalten sein, wobei M und N constante Grössen bedeuten, oder

[83] $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = Mx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$
$$+ Nx^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$$

wo die Constanten M und N von den Elementen α, β, γ abhängen werden.

42.

Aus Gleichung 82 folgt

$$F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) = (1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x)$$
$$F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x) = x^{\gamma - 1} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$$

Hiernach wird Gleichung 83, wenn

$$\frac{1}{N} = f(\alpha, \beta, \gamma), \quad -\frac{M}{N} = g(\alpha, \beta, \gamma)$$

gesetzt wird,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x) \\ = f(\alpha, \beta, \gamma) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ + g(\alpha, \beta, \gamma)(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{1-\gamma} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x). \end{aligned}$$

Derselben Gleichung kann man mit Hilfe der Formel 82 auch folgende Gestalt geben

$$\begin{aligned} x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x) = \\ f(\alpha, \beta, \gamma)(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} F(\gamma - \alpha, \gamma - \beta, \gamma, x) \\ + g(\alpha, \beta, \gamma) x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x) \end{aligned}$$

oder wenn man durch $x^{1-\gamma}$ dividirt und α, β, γ bezw. in $\alpha + 1 - \gamma$, $\beta + 1 - \gamma$, $2 - \gamma$ verwandelt,

$$\begin{aligned} F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x) \\ = g(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma) F(\alpha, \beta, \gamma, x) \\ + f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma)(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{1-\gamma} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x) \end{aligned}$$

Da diese Formel mit der vorigen identisch sein muss, haben wir

$$g(\alpha, \beta, \gamma) = f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma)$$

mithin

[84] $F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$
$$= f(\alpha, \beta, \gamma) F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$
$$+ f(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma)(1 - x)^{\gamma - \alpha - \beta} x^{1-\gamma} F(1 - \alpha, 1 - \beta, 2 - \gamma, x)$$

43.

Um nun die Beschaffenheit der Function $f(\alpha, \beta, \gamma)$ zu finden, setzen wir $x = 0$. Dann ist klar, dass $F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1$ und $x^{1-\gamma} = 0$, so oft nämlich $1 - \gamma$ positiv ist. Nach Gleichung 48 haben wir aber

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}$$

Somit ist unter derselben Einschränkung bewiesen, dass

[85] $$f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}$$

ist. Dass diese Formel aber allgemein gilt, zeigen wir folgendermassen.

Die Differentiation von Gleichung 84 liefert

$$\begin{aligned}
&-\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+1-\gamma} F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+2-\gamma, 1-x) \\
&= \frac{\alpha\beta}{\gamma} f(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) \\
&\quad (1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} x^{-\gamma} \Big\{ \big((1-\gamma)(1-x) - (\gamma-\alpha-\beta)x\big) F(1-\alpha, 1-\beta, 2-\gamma, x) \\
&\quad + \frac{(1-\alpha)(1-\beta)}{2-\gamma} (x - xx) F(2-\alpha, 2-\beta, 3-\gamma, x) \Big\}
\end{aligned}$$

Nach Art. 10 Formel IX ist aber, wenn α, β, γ in $-\alpha$, $-\beta$, $1-\gamma$ verwandelt werden,

$$\begin{aligned}
(1-\gamma)(2-\gamma) F(-\alpha, -\beta, 1-\gamma, x) &= (2-\gamma)\big(1-\gamma+(\alpha+\beta-1)x\big) F(1-\alpha, 1-\beta, \\
&\quad 2-\gamma, x) + (1-\alpha)(1-\beta)(x-xx) F(2-\alpha, 2-\beta, 3-\gamma, x)
\end{aligned}$$

Hierdurch geht die vorige Gleichung in die folgende über

$$\begin{aligned}
&F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+2-\gamma, 1-x) \\
&= -\frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{\gamma} f(\alpha, \beta, \gamma)\, F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) \\
&\quad -\frac{(\alpha+\beta+1-\gamma)(1-\gamma)}{\alpha\beta} f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} x^{-\gamma} \\
&\qquad F(-\alpha, -\beta, 1-\gamma, x)
\end{aligned}$$

Verwandelt man aber in Gleichung 84, α, β, γ in $\alpha+1$, $\beta+1$, $\gamma+1$, so wird

$$\begin{aligned}
&F(\alpha+1, \beta+1, \alpha+\beta+2-\gamma, 1-x) \\
&\quad = f(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1)\, F(\alpha+1, \beta+1, \gamma+1, x) \\
&\qquad + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 1-\gamma)(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1} x^{-\gamma} F(-\alpha, -\beta, 1-\gamma, x)
\end{aligned}$$

Da nun diese beiden Gleichungen, wie leicht zu sehen, identisch sein müssen, so ist allgemein

$$f(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1)=\frac{\alpha+\beta+1-\gamma}{-\gamma}f(\alpha,\beta,\gamma)$$

oder durch Verwandlung von α, β, γ in $\alpha-1$, $\beta-1$, $\gamma-1$,

$$\begin{aligned}f(\alpha,\ \beta,\ \gamma) &= \frac{\alpha+\beta-\gamma}{1-\gamma}f(\alpha-1,\ \beta-1,\ \gamma-1)\\ &= \frac{\alpha+\beta-\gamma.\alpha+\beta-\gamma-1}{1-\gamma.2-\gamma}f(\alpha-2,\ \beta-2,\ \gamma-2)\end{aligned}$$

u. s. f., woraus leicht zu schliessen, dass allgemein, für jeden ganzzahligen Wert von k,

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha+\beta-\gamma-k)\,\Pi(k-\gamma)}\cdot f(\alpha-k,\ \beta-k,\ \gamma-k)$$

Nun haben wir aber gezeigt, dass, so oft $1-(\gamma-k)$ oder $k+1-\gamma$ positiv ist, (Formel 85)

$$f(\alpha-k,\ \beta-k,\ \gamma-k)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma-k)\Pi(k-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}$$

ist, und da k, was auch γ sein möge, stets so gross angenommen werden kann, dass $k+1-\gamma$ positiv ausfällt, so ist *allgemein*

$$f(\alpha,\ \beta,\ \gamma)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}$$

und deswegen

$$f(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma)=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}$$

so dass unsere Formel wird

[86] $$\begin{aligned}&F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x)\\ &=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\\ &+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}x^{1-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,1-\beta,2-\gamma,x)\end{aligned}$$

oder, wenn γ in $\alpha+\beta+1-\gamma$ verwandelt wird,

[87] $$\begin{aligned}&F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ 1-x)\\ &=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\gamma-\alpha-\beta-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ x)\\ &+\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha+\beta-\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}x^{\gamma-\alpha-\beta}(1-x)^{1-\gamma}F(1-\alpha,1-\beta,\gamma+1-\alpha-\beta,x)\end{aligned}$$

Wenn man lieber will, kann man schreiben

in Formel 86

für $(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)\ldots.F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$

in Formel 87

für $(1-x)^{1-\gamma}F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ x)\ldots.F(\gamma-\alpha,\ \gamma-\beta,\ \gamma+1-\alpha-\beta,\ x)$

44.

So oft also in irgend einer, unter unserer Form enthaltenen Reihe dem vierten Element ein Wert zwischen 0,5 und 1 beigelegt wird, helfen die vorstehenden Formeln der langsamen Convergenz ab, da sie jene Reihe in zwei andere, ähnliche zerlegen, die um so rascher convergiren, je langsamer jene convergirte. Indessen sind die besonderen Fälle auszunehmen, wo diese Umformung nicht gelingt, so oft nämlich in der umzuformenden Reihe der Unterschied zwischen dem dritten Element und der Summe der beiden ersten Elemente eine ganze Zahl ist. Denn ist in Formel 86 $\gamma=0$ oder gleich einer negativen ganzen Zahl, so wird offenbar $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ eine sinnlose Reihe (Art. 2) und der Factor $\Pi(\gamma-2)$ unendlich; ist aber γ eine positive ganze Zahl, grösser als eins, so werden $F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)$ und $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma,\ 2-\gamma,\ x)$ sinnlose Reihen und $\Pi(-\gamma)$ unendlich; ist endlich $\gamma=1$, so unterliegen die beiden transformirten Reihen $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ und $F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)$ oder $F(\alpha+1-\gamma,\ \beta+1-\gamma$ $2-\gamma,\ x)$, welche also mit $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ übereinstimmend wird, zwar diesem Uebelstande nicht, allein die Umformung ist nichtsdestoweniger nutzlos, da beide transformirte Reihen mit dem unendlichen Coefficienten $\Pi(-1)$ multiplicirt sind. Es wird sich daher verlohnen zu zeigen, wie auch in diesen Fällen die langsame Convergenz in eine raschere verwandelt werden kann.

45.

Sei k eine positive ganze Zahl (oder auch $=0$) und bezeichnen wir die $k+1$ ersten Glieder der Reihe $F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$ mit X. Das nächstfolgende Glied ist dann

$$=\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2\ldots.\alpha+k.\beta.\beta+1.\beta+2\ldots.\beta+k}{1\ .\ 2\ .\ 3\ \ldots.k+1.\gamma.\gamma+1.\gamma+2\ldots.\gamma+k}x^{k+1}$$

Dasselbe lässt sich auch so schreiben

$$\frac{\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}\cdot\frac{\Pi(\alpha+k)\Pi(\beta+k)}{\Pi(k+1)\Pi(\gamma+k)}x^{k+1}$$

und ähnlich die folgenden Glieder. Hieraus ergiebt sich, dass sich

I. $$\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\cdot F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$ ausdrücken lässt durch

$$\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\cdot X$$
$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\sum\left\{\frac{\Pi(\alpha+k+t)\Pi(\beta+k+t)}{\Pi(k+t+1)\Pi(\gamma+k+t)}x^{k+1+t}\right\}$$

wenn man für t alle Werte 0, 1, 2, 3 u. s. f. ins Unendliche gesetzt denkt.
Ebenso lässt sich $F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$ ausdrücken durch

$$\frac{\Pi(1-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\sum\left\{\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi t\,\Pi(1-\gamma+t)}x^t\right\}$$

wo t ebenso wie vorher bestimmt ist, so dass also, da $\Pi(1-\gamma)=(1-\gamma)\Pi(-\gamma)$ und $\Pi(\gamma-1)=-(1-\gamma)\Pi(\gamma-2)$ ist, offenbar

II. $$\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma-2)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}x^{1-\gamma}F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x)$$
$$=-\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\sum\left\{\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi t\,\Pi(1-\gamma+t)}x^{1+t-\gamma}\right\}$$

Hiernach lässt sich Formel 86 auch so schreiben:

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$$
$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}X$$
$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\alpha-\gamma)\Pi(\beta-\gamma)}\sum\left\{\frac{\Pi(\alpha+k+t)\Pi(\beta+k+t)}{\Pi(k+t+1)\Pi(\gamma+k+t)}x^{k+1+t}\right.$$
$$\left.-\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi t}x^{1+t-\gamma}\right\}$$

Dieser Ausdruck zeigt sogleich, dass die einzelnen Differenzen unter dem Zeichen Σ gleich 0 werden, wenn $\gamma=-k$ angenommen wird, allein da alsdann gleichzeitig $\Pi(\gamma-1)$ unendlich gross wird, so kann offenbar das Product endlich sein. Um den Wert desselben durch endliche Grössen auszudrücken, setzen wir zunächst $\gamma+k=\omega$, so dass

$$\Pi(\gamma-1).\gamma.(\gamma+1)(\gamma+2)\ldots.(\gamma+k-1)\omega=\Pi\omega$$

oder

$$\Pi(\gamma-1)=\frac{\Pi\omega}{\omega(\omega-1)(\omega-2)\ldots.(\omega-k)}$$

wird. In der Hauptsache kommt es also darauf hinaus, zuzusehen, was aus

$$\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t+\omega)\Pi(\beta-\gamma+t+\omega)}{\Pi(t-\gamma+1+\omega)\Pi(t+\omega)}x^{1+t-\gamma+\omega}-\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi t}x^{1+t-\gamma}\right\}$$

wird, wenn ω unendlich abnimmt. Nach bekannten Principien geht aber hieraus

$$-\frac{dU}{d\gamma}$$

hervor, wenn wir der Kürze wegen

$$\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi(t-\gamma+1)\Pi(t-k-\gamma)}x^{1+t-\gamma}=U$$

setzen und nur γ als veränderlich ansehen.[13]) Hiernach ist nun

$$\frac{dU}{Ud\gamma}=-\Psi(\alpha-\gamma+t)-\Psi(\beta-\gamma+t)+\Psi(t-\gamma+1)+\Psi(t-k-\gamma)-\log x$$

mithin ergiebt sich, für $\gamma=-k$,

[88] $F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1+k,\ 1-x)$

$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta+k)\Pi k}{\Pi(\alpha+k)\Pi(\beta+k)}X$$

$$+\frac{\Pi(\alpha+\beta+k)\Pi k}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(\alpha+k)\Pi(\beta+k)(-1)(-2)\ldots(-k)}\sum\Big\{(\log x+\Psi(\alpha+t+k)$$

$$+\Psi(\beta+t+k)-\Psi(t+k+1)-\Psi t)\frac{\Pi(\alpha+t+k)\Pi(\beta+t+k)}{\Pi(t+k+1)\Pi t}x^{1+t+k}\Big\}$$

$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta+k)\Pi k}{\Pi(\alpha+k)\Pi(\beta+k)}X\pm\frac{\Pi(\alpha+\beta+k)x^{1+k}}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)\Pi(k+1)}Y$$

wo[14])

$$Y=\{\log x+\Psi(\alpha+k)+\Psi(\beta+k)-\Psi(k+1)-\Psi(0)\}F(\alpha+k+1,\ \beta+k+1,\ k+2,\ x)$$

$$+A\frac{\alpha+k+1.\beta+k+1}{1\ .\ k+2}x$$

$$+(A+B)\frac{\alpha+k+1.\alpha+k+2.\beta+k+1.\beta+k+2}{1\ .\ 2\ .\ k+2\ .\ k+3}xx$$

$$+(A+B+C)\frac{\alpha+k+1.\alpha+k+2.\alpha+k+3.\beta+k+1.\beta+k+2.\beta+k+3}{1\ .\ 2\ .\ 3\ .\ k+2\ .\ k+3\ .\ k+4}x^3$$

$$+\cdots$$

und

$$A = \frac{1}{\alpha+k+1} + \frac{1}{\beta+k+1} - \frac{1}{k+2} - 1$$
$$B = \frac{1}{\alpha+k+2} + \frac{1}{\beta+k+2} - \frac{1}{k+3} - \frac{1}{2}$$
$$C = \frac{1}{\alpha+k+3} + \frac{1}{\beta+k+3} - \frac{1}{k+4} - \frac{1}{3}$$
u. s. f.

und wobei das obere oder untere Vorzeichen zu nehmen ist, je nachdem k eine gerade oder ungerade Zahl ist.

46.

Auf diese Weise wird also $F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$ umgeformt, wenn γ Null oder eine negative ganze Zahl ist. Den Fall $\gamma = +1$ können wir ganz ebenso behandeln oder auch kürzer in den vorstehenden Rechnungen $k = -1$ setzen, wodurch X ganz verschwindet und wir erhalten

[89] $$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta, 1-x)$$
$$= -\frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}\left\{\log x + \Psi(\alpha-1) + \Psi(\beta-1) - 2\Psi 0\right\} F(\alpha, \beta, 1, x)$$
$$-\frac{\Pi(\alpha+\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}\left\{A\,\frac{\alpha.\beta}{1.1}x\right.$$
$$+ (A+B)\,\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1\;.\;2\;.\;1\;.\;2}xx$$
$$+ (A+B+C)\,\frac{\alpha.\alpha+1.\alpha+2.\beta.\beta+1.\beta+2}{1\;.\;2\;.\;3\;.\;1\;.\;2\;.\;3}x^3$$
$$\left. + \cdots\right\}$$

wobei

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} - 2,\quad B = \frac{1}{\alpha+1} + \frac{1}{\beta+1} - \frac{2}{2},\quad C = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{1}{\beta+2} - \frac{2}{3}, \cdots$$

So erhalten wir beispielsweise für $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = \frac{1}{2}$ (vgl. Form. 52 u. 71)

[90] $$F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, 1-x\right)$$
$$= -\frac{1}{\pi}\log\frac{1}{16}x.F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right)$$
$$-\frac{1}{\pi}\left\{2\cdot\frac{1.1}{2.2}x + \left(2+\frac{1}{3}\right)\frac{1.1.3.3}{2.2.4.4}xx + \left(2+\frac{1}{3}+\frac{2}{15}\right)\frac{1.1.3.3.5.5}{2.2.4.4.6.6}x^3\right.$$
$$\left. + \left(2+\frac{4}{3.4}+\frac{4}{5.6}+\frac{4}{7.8}\right)\frac{1.1.3.3.5.5.7.7}{2.2.4.4.6.6.8.8}x^4 + \cdots\right\}$$
$$= -\frac{1}{\pi}\left\{\log\frac{1}{16}x\,F\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 1, x\right) + \frac{1}{2}x + \frac{21}{64}xx + \frac{185}{768}x^3 + \frac{18655}{98304}x^4\right.$$
$$\left. + \frac{102501}{655360}x^5 + \frac{1394239}{10485760}x^6 + \cdots\right\}$$

Der dritte Fall endlich, wo γ eine positive ganze Zahl, grösser als eins, ist, braucht nicht besonders behandelt zu werden, da

$$F(\alpha, \beta, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)=x^{1-\gamma} F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$$

ist und die Transformation der Reihe $F(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, \alpha+\beta+1-\gamma, 1-x)$ für $\gamma > 1$ ohne Weiteres auf den ersten Fall zurückkommt.

47.

Wir gehen zu anderen Transformationen über, unter denen die Substitution $x=\frac{y}{y-1}$ die erste Stelle erhalten soll. Ihr zufolge wird $dx=-\frac{dy}{(y-1)^2}$, somit

$$\frac{dP}{dx}=-\frac{dP}{dy}(1-y)^2, \text{ und durch weiteres Differentiiren}$$

$$d\frac{dP}{dx}=-(1-y)^2 d\frac{dP}{dy}+2(1-y)dP, \text{ sowie}$$

$$\frac{ddP}{dx^2}=+(1-y)^4\frac{ddP}{dy^2}-2(1-y)^3\frac{dP}{dy}$$

Durch Einsetzung dieser Werte geht Gleichung 80 über in

$$0=\alpha\beta P+(1-y)\big(\gamma+(\alpha+\beta-1-\gamma)y\big)\frac{dP}{dy}+(1-y)(y-yy)\frac{ddP}{dy^2}$$

Um nun eine ebensolche Gleichung wie 80 zu erhalten, setzen wir $P=(1-y)^{\mu}P'$, woraus

$$\frac{dP}{dy}=-\mu(1-y)^{\mu-1}P'+(1-y)^{\mu}\frac{dP'}{dy}$$

$$\frac{ddP}{dy^2}=(\mu\mu-\mu)(1-y)^{\mu-2}P'-2\mu(1-y)^{\mu-1}\frac{dP'}{dy}+(1-y)^{\mu}\frac{ddP'}{dy^2}$$

Wird dies eingesetzt, so kommt nach Division durch $(1-y)^{\mu}$

$$\begin{aligned}0=&P'\big\{\alpha\beta-\mu\big(\gamma+(\alpha+\beta-1-\gamma)y\big)+y(\mu\mu-\mu)\big\}\\&+\frac{dP'}{dy}\big\{\gamma+(\alpha+\beta-1-\gamma)y-2\mu y\big\}(1-y)\\&+\frac{ddP'}{dy^2}\big\{y-yy\big\}(1-y)\end{aligned}$$

Wir wollen μ so bestimmen, dass der Multiplicator von P' durch $1-y$ teilbar wird, was eintritt, wenn wir $\mu=\alpha$ oder $\mu=\beta$ setzen. Der erstere Wert verwandelt die vorstehende Gleichung in folgende

$$0=\alpha(\beta-\gamma)P'+(\gamma-(\gamma+\alpha+1-\beta)y)\frac{dP'}{dy}+(y-yy)\frac{ddP'}{dy^2}$$

oder

$$0=\alpha(\gamma-\beta)P'-(\gamma-(\gamma-\beta+\alpha+1)y)\frac{dP'}{dy}-(y-yy)\frac{ddP'}{dy^2}$$

welcher so zu genügen ist, dass für $y=0$, $P'=1$ und $\frac{dP'}{dy}=\frac{\alpha(\gamma-\beta)}{\gamma}$ wird. Hieraus folgt aber $P'=F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,y)$, so dass man hat

$$[91]\quad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-y)^{\alpha}F(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,y)$$
$$=(1-x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,-\frac{x}{1-x}\right)$$

Hätten wir für μ den anderen Wert β genommen, so würde sich ganz ebenso ergeben haben

$$[92]\qquad F(\alpha,\beta,\gamma,x)=(1-x)^{-\beta}F\left(\beta,\gamma-\alpha,\gamma,-\frac{x}{1-x}\right)$$

welche Formel auch aus der vorigen durch blosse Vertauschung der Elemente α und β von selbst folgt. Mit Hilfe der eben gefundenen Formel werden die Werte unserer Reihen für negative Werte des vierten Elements stets auf die Werte solcher Reihen für positive, zwischen 0 und 1 liegende Werte des vierten Elementes zurückgeführt, da man hat

$$F(\alpha,\beta,\gamma,-x)=(1+x)^{-\alpha}F\left(\alpha,\gamma-\beta,\gamma,\frac{x}{1+x}\right)$$

48.

Es verlohnt sich zu zeigen, wie mit Hilfe der Transformationen 82 und 91 sämmtliche im Art. 5 zusammengestellte Formeln sehr leicht allein aus dem binomischen Lehrsatze abgeleitet werden können. Zunächst folgen daraus nämlich die Formeln I—V. Hieraus folgen ohne Weiteres die Formeln VI—X, wenn e^x als Grenzwert der Potenz $\left(1+\frac{x}{i}\right)^i$ oder $\left(1-\frac{x}{i}\right)^{-i}$, und $\log x$ als Grenze von $i(x^{\frac{1}{i}}-1)$, für unendlich wachsendes i, angesehen wird. Aus

$$\cos n\varphi+\sqrt{-1}.\sin n\varphi=(\cos\varphi+\sqrt{-1}.\sin\varphi)^n$$
$$\cos n\varphi-\sqrt{-1}.\sin n\varphi=(\cos\varphi-\sqrt{-1}.\sin\varphi)^n$$

5*

folgt weiter durch Subtraction und Addition Formel XVIII und XXII, und hieraus durch Formel 82 sofort XIX und XXIII; aus diesen werden wieder durch Formel 91, XVI, XVII, XX und XXI abgeleitet. Wird t für nt und n unendlich gross gesetzt, so folgen XI und XII aus XVI und XX; setzen wir dagegen n unendlich klein, so folgen XIII—XV aus XVI—XVIII.[15])

49.

Aus der Substitution $x = \frac{1}{y}$ geht ebenso hervor

I. $$0 = \alpha\beta P - (\alpha + \beta - 1 - (\gamma - 2)\,y)\,y\frac{dP}{dy} + (yy - y^3)\frac{ddP}{dy^2}$$

Setzt man nun $P = y^\mu P'$, so wird

$$\begin{aligned} 0 = P'(\alpha\beta - \mu(\alpha + \beta - 1) + \mu(\gamma - 2)\,y + (\mu\mu - \mu)(1 - y)) \\ - \frac{dP'}{dy}(\alpha + \beta - 1 - (\gamma - 2)\,y - 2\mu(1 - y))\,y \\ + (yy - y^3)\frac{ddP'}{dy^2} \end{aligned}$$

Damit der Multiplicator von P' durch y teilbar werde, ist entweder $\mu = \alpha$ oder $\mu = \beta$ zu setzen; der erstere Wert liefert

II. $$0 = P'\alpha(\gamma - \alpha - 1) - \frac{dP'}{dy}(\beta - \alpha - 1 - (\gamma - 2\alpha - 2)\,y) + (y - yy)\frac{ddP'}{dy^2}$$

wovon

$$P' = F(\alpha,\ \alpha + 1 - \gamma,\ \alpha + 1 - \beta,\ y)$$

ein *particuläres* Integral ist. Der Gleichung I wird also genügt durch das particuläre Integral

$$P = y^\alpha F(\alpha,\ \alpha + 1 - \gamma,\ \alpha + 1 - \beta,\ y)$$

und ebenso giebt der zweite Wert $\mu = \beta$ das zweite particuläre Integral

$$P = y^\beta F(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \alpha,\ y)$$

so dass man das vollständige Integral erhält

$$P = Ay^\alpha F(\alpha,\ \alpha + 1 - \gamma,\ \alpha + 1 - \beta,\ y) + By^\beta F(\beta,\ \beta + 1 - \gamma,\ \beta + 1 - \alpha,\ y)$$

wobei A und B Constanten bezeichnen, die aber nicht willkürlich, sondern völlig bestimmt sind, da P nicht das vollständige Integral der Gleichung 80, sondern nur ein particuläres ist. Damit jedoch die Bestimmung der

Constanten A und B uns nicht zu unnötigen Weitläufigkeiten führe, wollen wir dieselbe Gleichung auf anderem Wege mit Hilfe des schon vorher Ermittelten ableiten.

Setzt man in Gleichung 91 $-\frac{x}{1-x}=1-z$ und verwandelt man in Gleich. 86 β in $\gamma-\beta$, γ in $\alpha+1-\beta$ und x in z, so ergiebt sich

$$(1-x)^\alpha F(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, z)$$
$$+\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}z^{\beta-\alpha}F(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, z)$$

Nach Gleichung 91 und 92 ist aber

$$F(\alpha, \gamma-\beta, \alpha+1-\beta, z)=(1-z)^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, -\frac{z}{1-z}\right)$$
$$F(\beta, \gamma-\alpha, \beta+1-\alpha, z)=(1-z)^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, -\frac{z}{1-z}\right)$$

Wird dies, sowie $z=\frac{1}{1-x}$, $1-z=-\frac{x}{1-x}$, $-\frac{z}{1-z}=\frac{1}{x}$ eingesetzt, so erhalten wir

$$[93]\quad F(\alpha, \beta, \gamma, x)=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}(-x)^{-\alpha}F\left(\alpha, \alpha+1-\gamma, \alpha+1-\beta, \frac{1}{x}\right)$$
$$+\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}(-x)^{-\beta}F\left(\beta, \beta+1-\gamma, \beta+1-\alpha, \frac{1}{x}\right)$$

welche Gleichung mit der oben gefundenen übereinkommt, wenn

$$A=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\beta-\alpha-1)}{\Pi(\gamma-\alpha-1)\Pi(\beta-1)}(-1)^\alpha$$
$$B=\frac{\Pi(\gamma-1)\Pi(\alpha-\beta-1)}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\gamma-\beta-1)}(-1)$$

gesetzt wird, wobei zu bemerken, dass

$$(-1)^\alpha=\cos\alpha k\pi+\sqrt{-1}\,.\sin\alpha k\pi$$
$$(-1)^\beta=\cos\beta k\pi+\sqrt{-1}\,.\sin\beta k\pi$$

ist, während k irgend eine ungerade ganze Zahl bedeutet.

50.

Durch Gleichung 93 wird der Wert unserer Function für Werte des vierten Elements, die grösser als eins sind, auf den Fall zurückgeführt, wo das vierte Element kleiner als eins ist. Zugleich erhellt, dass negativen Werten des vierten Elements, die grösser als eins sind, stets ein einziger reeller Wert der Function F entspricht, positiven dagegen nur dann ein reeller Wert der Function entsprechen kann, wenn α und β entweder ganzzahlig oder rationale Brüche mit ungeraden Nennern sind; in allen übrigen Fällen erhält $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ für einen positiven, die Einheit übersteigenden Wert von x nur imaginäre Werte.

51.

Die bisher entwickelten Beziehungen zwischen mehreren Functionen F waren sämmtlich linear: wir fügen eine weitere von anderer Art hinzu. Es sei

$$P = F(\alpha, \beta, \gamma, x)$$

$$Q = x^{1-\gamma} F(\alpha + 1 - \gamma, \beta + 1 - \gamma, 2 - \gamma, x)$$

$$R = F(\alpha, \beta, \alpha + \beta + 1 - \gamma, 1 - x)$$

u. z. so, dass P, Q, R drei particuläre Integrale der Gleichung 80 sind, es sei also

$$\text{I.} \qquad 0 = \alpha\beta P - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dP}{dx} - (x - xx)\frac{ddP}{dx^2}$$

$$\text{II.} \qquad 0 = \alpha\beta Q - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dQ}{dx} - (x - xx)\frac{ddQ}{dx^2}$$

$$\text{III.} \qquad 0 = \alpha\beta R - (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{dR}{dx} - (x - xx)\frac{ddR}{dx^2}$$

Wird die erste Gleichung mit Q, die zweite mit P multiplicirt, so ergiebt sich durch Subtraction

$$0 = (\gamma - (\alpha + \beta + 1)x)\frac{QdP - PdQ}{dx} + (x - xx)\frac{QddP - PddQ}{dx^2}$$

Diese Gleichung wird aber durch Multiplication mit $x^{\gamma-1}(1-x)^{\alpha+\beta-\gamma}$ integrabel und liefert

$$[94] \qquad A = x^{\gamma}(1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma}\frac{QdP - PdQ}{dx}$$

Ganz ebenso hat man

[95] $$B = x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} \frac{RdQ - QdR}{dx}$$

[96] $$C = x^\gamma (1-x)^{\alpha+\beta+1-\gamma} \frac{RdP - PdR}{dx}$$

Die Constanten A, B, C lassen sich durch folgendes Verfahren leicht bestimmen.

Für $x=0$ wird $P=1$; ferner wird $x^\gamma Q = xF(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma, x) = 0$ für $x=0$; der Differentialquotient dieses Ausdrucks aber, nämlich $\gamma x^{\gamma-1} Q + x^\gamma \frac{dQ}{dx}$ wird $=1$; hieraus ergiebt sich $\frac{x^\gamma dQ}{dx} = 1-\gamma$ für $x=0$, mithin

$$A = \gamma - 1$$

Um aber auch B und C zu bestimmen, nehmen wir die Gleichung[16])

$$R = f(\alpha, \beta, \gamma) P + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) Q$$

wieder auf, deren Differentiation ergiebt

$$\frac{dR}{dx} = f(\alpha, \beta, \gamma) \frac{dP}{dx} + f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) \frac{dQ}{dx}$$

Wird die erste mit $\frac{dQ}{dx}$, die zweite mit Q multiplicirt, so folgt durch Subtraction

$$\frac{QdR - RdQ}{dx} = f(\alpha, \beta, \gamma) \frac{QdP - PdQ}{dx} \quad \text{somit}$$

$$B = (1-\gamma) f(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(1-\gamma)}{\Pi(\alpha-\gamma)\,\Pi(\beta-\gamma)}$$

Ebenso liefert die Subtraction, nachdem die erstere Gleichung mit $\frac{dP}{dx}$, die zweite mit P multiplicirt ist,

$$\frac{RdP - PdR}{dx} = f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) \frac{QdP - PdQ}{dx}$$

mithin

$$C = (\gamma-1) f(\alpha+1-\gamma, \beta+1-\gamma, 2-\gamma) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\,\Pi(\gamma-1)}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)}$$

Wenn man lieber will, kann man die drei Gleichungen auch so darstellen, dass die abgeleiteten Functionen $\frac{dP}{dx}$, $\frac{dQ}{dx}$, $\frac{dR}{dx}$ durch endliche Functionen ausgedrückt werden; so wird z. B. Formel 96

[97] $$\frac{1}{\gamma}F(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+1-\gamma,\ 1-x)\,F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)$$
$$+\frac{1}{\alpha+\beta+1-\gamma}F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \alpha+\beta+2-\gamma,\ 1-x)\,F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)$$
$$=\frac{\Pi(\alpha+\beta-\gamma)\Pi(\gamma-1)}{\Pi\alpha\,\Pi\beta}\,x^{-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta-1}$$

52.

Wird die Function $F(-\alpha,\ -\beta,\ 1-\gamma,\ x)$ mit S bezeichnet, so ist

$$0=\alpha\beta S-(1-\gamma+(\alpha+\beta-1)x)\frac{dS}{dx}-(x-xx)\frac{ddS}{dx^2}$$

Durch Combination dieser Gleichung mit der I. des vor. Art. kommt

$$0=\alpha\beta\left(\frac{SdP+PdS}{dx}\right)-(1-2x)\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dS}{dx}-(x-xx)\frac{dSddP+dPddS}{dx^3}$$

welche Gleichung integrabel ist und liefert

$$\text{Const.}=\alpha\beta PS-(x-xx)\frac{dP}{dx}\cdot\frac{dS}{dx}$$

Der Wert der Constante ergiebt sich aus $x=0$ ohne Weiteres $=\alpha\beta$. Zieht man die endliche Form vor, so hat man

[98] $$F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\,F(-\alpha,\ -\beta,\ 1-\gamma,\ x)$$
$$-\frac{\alpha\beta}{\gamma-\gamma\gamma}(x-xx)\,F(\alpha+1,\ \beta+1,\ \gamma+1,\ x)\,F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)=1$$

Formt man hier die vier einzelnen Functionen nach Formel 82 um und schreibt dann $\gamma-\alpha$, $\gamma-\beta$ für α und β, so erhält man

[99] $$(1-x)\,F(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ x)\,F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 1-\gamma,\ x)$$
$$-\frac{\gamma-\alpha\,.\,\gamma-\beta}{\gamma-\gamma\gamma}\,x\,F(\alpha,\ \beta,\ \gamma+1,\ x)\,F(1-\alpha,\ 1-\beta,\ 2-\gamma,\ x)=1$$

Einige specielle Sätze.

53.

Alle Beziehungen, die wir bis jetzt entwickelt haben, sind insofern vollkommen allgemein, als die Elemente α, β, γ durch keine Bedingungen beschränkt sind. Ausserdem haben wir aber mehrere andere gefunden, die besondere Bedingungen für die Elemente α, β, γ voraussetzen: weit mehr jedoch sind ohne Zweifel noch verborgen, und selbst die hier mitzuteilenden wird man später vielleicht aus höheren Principien ableiten können.

Setzen wir zuerst in Gleichung 80, $x = \frac{4y}{(1+y)^2}$, also

$$dx = dy \cdot \frac{4(1-y)}{(1+y)^3}$$

mithin

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{(1+y)^3}{4(1-y)}$$

$$\frac{ddP}{dx} = d\,\frac{dP}{dy} \cdot \frac{(1+y)^3}{4(1-y)} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{(2-y)(1+y)^2}{2(1-y)^2}\,dy$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{(1+y)^6}{16(1-y)^2} + \frac{(2-y)(1+y)^5}{8(1-y)^3} \cdot \frac{dP}{dy}$$

Hierdurch wird jene Gleichung

$$\begin{aligned} 0 = {} & \alpha\beta P \\ & - \bigl(\gamma(1+y)^2 - 4(\alpha+\beta+1)y\bigr)\,\frac{1+y}{4(1-y)} \cdot \frac{dP}{dy} \\ & - \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{y(1+y)^2}{4} - \frac{y(2-y)(1+y)}{2(1-y)} \cdot \frac{dP}{dy} \end{aligned}$$

oder

$$\begin{aligned} 0 = {} & 4\alpha\beta(1-y)P \\ & - \bigl(\gamma(1+y)^2 - 4(\alpha+\beta+1)y + 2y(2-y)\bigr)(1+y)\,\frac{dP}{dy} \\ & - (y-yy)(1+y)^2\,\frac{ddP}{dy^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & 4\alpha\beta(1-y)P \\ & - (1+y)\bigl(\gamma - (4\alpha+4\beta-2\gamma)y + (\gamma-2)yy\bigr)\,\frac{dP}{dy} \\ & - (1+y)^2(y-yy)\,\frac{ddP}{dy^2} \end{aligned}$$

Wird $P = (1+y)^{2\alpha} Q$ gesetzt, so folgt hieraus

$$\text{I.} \qquad \begin{aligned} 0 = {} & 2\alpha(2\beta - \gamma + (2\alpha + 1 - \gamma)y)Q \\ & -(\gamma - (4\beta - 2\gamma)y + (\gamma - 4\alpha - 2)yy)\frac{dQ}{dy} \\ & -(y - yy)(1+y)\frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

Unter der Voraussetzung $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$ nimmt nun diese Gleichung folgende Gestalt an

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2\alpha(2\alpha + 1 - \gamma)Q \\ & -(\gamma - (4\alpha + 2 - \gamma)y)\frac{dQ}{dy} \\ & -(y - yy)\frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

Das Integral derselben ist

$$Q = F(2\alpha,\ 2\alpha + 1 - \gamma,\ \gamma,\ y)$$

so dass sich ergiebt

$$[100] \quad (1+y)^{2\alpha} F(2\alpha,\ 2\alpha + 1 - \gamma,\ \gamma,\ y) = F\left(\alpha,\ \alpha + \frac{1}{2},\ \gamma,\ \frac{4y}{(1+y)^2}\right)$$

54.

Wenn wir statt der Beziehung $\beta = \alpha + \frac{1}{2}$ diese annehmen $\gamma = 2\beta$, so wird Gleichung I des vor. Art.

$$\begin{aligned} 0 = {} & 2\alpha(2\alpha + 1 - 2\beta)yQ \\ & -(2\beta - (4\alpha + 2 - 2\beta)yy)\frac{dQ}{dy} \\ & -y(1 - yy)\frac{ddQ}{dy^2} \end{aligned}$$

Wird nun $yy = z$ gesetzt, so kommt

$$\frac{dQ}{dy} = 2y\frac{dQ}{dz}$$

$$\frac{ddQ}{dy^2} = 4yy\frac{ddQ}{dz^2} + \frac{2dQ}{dz}, \text{ somit}$$

$$\begin{aligned} 0 = {} & \alpha\left(\alpha + \frac{1}{2} - \beta\right)Q \\ & -\left(\beta + \frac{1}{2} - \left(2\alpha + \frac{3}{2} - \beta\right)z\right)\frac{dQ}{dz} \\ & -(z - zz)\frac{ddQ}{dz^2} \end{aligned}$$

und da das Integral hiervon

$$Q = F\left(\alpha,\ \alpha + \frac{1}{2} - \beta,\ \beta + \frac{1}{2},\ z\right)$$

ist, so haben wir

$$[101]\quad (1+y)^{2\alpha} F\left(\alpha,\ \alpha + \frac{1}{2} - \beta,\ \beta + \frac{1}{2},\ yy\right) = F\left(\alpha,\ \beta,\ 2\beta,\ \frac{4y}{(1+y)^2}\right)$$

55.

Wir setzen zweitens $x = 4y - 4yy$, also

$$dx = 4dy(1-2y)$$

$$\frac{dP}{dx} = \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{4(1-2y)}$$

$$\frac{ddP}{dx^2} = \frac{ddP}{dy^2} \cdot \frac{1}{16(1-2y)^2} + \frac{dP}{dy} \cdot \frac{1}{8(1-2y)^3}$$

Hierdurch wird Gleichung 80

$$\begin{aligned} 0 &= 4\alpha\beta P \\ &- (\gamma - (4\alpha + 4\beta + 2)y + (4\alpha + 4\beta + 2)yy)\,\frac{1}{1-2y} \cdot \frac{dP}{dy} \\ &- (y - yy)\,\frac{ddP}{dy^2} \end{aligned}$$

Um im zweiten Gliede den Bruch beseitigen zu können, muss man setzen $\gamma = \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, wodurch sich ergiebt

$$\begin{aligned} 0 &= 4\alpha\beta P \\ &- \left(\alpha + \beta + \frac{1}{2} - (2\alpha + 2\beta + 1)y\right)\frac{dP}{dy} \\ &- (y - yy)\,\frac{ddP}{dy^2} \end{aligned}$$

Das Integral hiervon ist

$$P = F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha + \beta + \frac{1}{2},\ y\right)$$

so dass wir haben

$$[102]\quad F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha + \beta + \frac{1}{2},\ 4y - 4yy\right) = F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha + \beta + \frac{1}{2},\ y\right)$$

Wollten wir in dieser Gleichung y in $1-y$ verwandeln, so würde daraus hervorgehen

$$F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 4y-4yy\right)=F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 1-y\right)$$

woraus das Paradoxon zu folgen scheint

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ y\right)=F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 1-y\right)$$

welche Gleichung sicher falsch ist. Um dies aufzuklären, müssen wir uns erinnern, dass man zwischen den beiden Bedeutungen des Zeichens F wohl zu unterscheiden hat, je nachdem dasselbe nämlich *entweder* die Function darstellt, deren Beschaffenheit durch die Differentialgleichung 80 angegeben wird, *oder* aber nur die Summe der unendlichen Reihe. Die letztere stellt, so lange das vierte Element zwischen -1 und $+1$ liegt, stets eine völlig bestimmte Grösse dar, man darf aber diese Grenzen nicht überschreiten, da sonst jede Bedeutung aufhört. Die erstere Bezeichnung dagegen bedeutet eine allgemeine Function, die sich stets nach dem Gesetze der Stetigkeit ändert, wenn das vierte Element sich stetig fliessend ändert, man mag demselben nun reelle oder imaginäre Werte beilegen, wenn man nur die Werte 0 und 1 immer vermeidet. Hieraus erhellt, dass in letzterem Sinne die Function für gleiche Werte des vierten Elements (beim Uebergang oder besser Rückgang durch imaginäre Grössen) ungleiche Werte erlangen kann, von denen der, den die *Reihe* F darstellt, nur einer ist; es ist sonach durchaus kein Widerspruch, dass, während *ein* Wert der Function $F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 4y-4yy\right)$ gleich $F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ y\right)$ ist, ein *anderer* Wert $=F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 1-y\right)$ wird, und hieraus die Gleichheit dieser Werte zu schliessen, wäre ebenso ungereimt, als wenn man aus Arc. sin $\frac{1}{2}=30°$ und Arc. sin $\frac{1}{2}=150°$ schliessen wollte $30°=150°$. — Nehmen wir dagegen das Zeichen F in der weniger allgemeinen Bedeutung, nämlich so, dass es nur die Summe der Reihe F darstellt, so setzen die Rechnungen, durch die wir Gleichung 102 ermittelt haben, notwendig voraus, dass y vom Werte 0 an nur so weit wachse, bis $x=1$ wird, d. h. bis zu $y=\frac{1}{2}$. In eben diesem Punkte aber würde die *Stetigkeit* der Reihe $P=F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 4y-4yy\right)$ unterbrochen werden, da offenbar $\frac{dP}{dy}$ von einem positiven (endlichen) Werte plötzlich auf einen negativen springt.[17]) In dieser Bedeutung ist also eine Ausdehnung der Gleichung 102 über die Grenzen $y = \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ bis $y = \frac{1}{2}$ hinaus, nicht erlaubt. Wenn man lieber will, kann man dieselbe Gleichung auch so schreiben

$$[103] \qquad F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ x\right) = F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{1-x}}{2}\right)$$

oder so

$$[104] \qquad F\left(\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ 1-x\right) = F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)$$

woraus als Zusatz folgt (Formel 48)

$$[105] \qquad F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\frac{1}{2})}$$

$$= \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\frac{1}{2})}$$

56.

Aus der Anwendung der Formel 87 auf Gleichung 104 folgt

$$[106] \qquad F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$= AF\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2},\ x\right) + B\sqrt{x}.F\left(\alpha+\frac{1}{2},\ \beta+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x\right)$$

woraus erhellt, dass die Reihe

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-t}{2}\right)$$

dargestellt werden kann durch die Reihe

$$A + Bt + A\frac{\alpha.\beta}{1.\frac{1}{2}}\cdot tt + B\frac{\alpha+\frac{1}{2}.\beta+\frac{1}{2}}{1\ .\ \frac{3}{2}}t^3 + A\frac{\alpha.\alpha+1.\beta.\beta+1}{1\ .\ 2\ .\ \frac{1}{2}\ .\ \frac{3}{2}}t^4 + \cdots$$

wenn der Kürze wegen

$$A = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\frac{1}{2})}, \quad B = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{3}{2})}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)}$$

gesetzt wird. Hieraus kann man schliessen, dass

[107] $$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = AF\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, x\right) - B\sqrt{x}\,.F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right)$$

Sollte dieser Schluss nicht hinreichend statthaft erscheinen (obgleich derselbe unschwer ausser allen Zweifel gesetzt werden kann), so könnten wir auf folgende Weise zu derselben Gleichung gelangen. Nach Gleichung 87 ist

$$F\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = CF\left(2\alpha, 2\beta, \alpha+\beta+\frac{1}{2}, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) + D\left(\frac{1-x}{4}\right)^{\frac{1}{2}-\alpha-\beta} F\left(1-2\alpha, 1-2\beta, \frac{3}{2}-\alpha-\beta, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)$$

wenn der Kürze halber

$$C = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha-\beta)}{\Pi(\alpha-\beta-\frac{1}{2})\Pi(\beta-\alpha-\frac{1}{2})}, \quad D = \frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(\alpha+\beta-\frac{3}{2})}{\Pi(2\alpha-1)\Pi(2\beta-1)}$$

gesetzt wird. Aus Gleichung 104 ergiebt sich aber leicht

$$F\left(1-2\alpha, 1-2\beta, \frac{3}{2}-\alpha-\beta, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}-\beta, \frac{3}{2}-\alpha-\beta, 1-x\right)$$
$$= EF\left(\frac{1}{2}-\alpha, \frac{1}{2}-\beta, \frac{1}{2}, x\right) + G\sqrt{x}.F\left(1-\alpha, 1-\beta, \frac{3}{2}, x\right)$$

wenn der Kürze halber

$$E = \frac{\Pi(\frac{1}{2}-\alpha-\beta)\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi(-\alpha)\Pi(-\beta)}, \quad G = \frac{\Pi(\frac{1}{2}-\alpha-\beta)\Pi(-\frac{3}{2})}{\Pi(-\frac{1}{2}-\alpha)\Pi(-\frac{1}{2}-\beta)}$$

gesetzt wird. Hieraus folgt wiederum nach Gleichung 82

$$F\left(1-2\alpha, 1-2\beta, \frac{3}{2}-\alpha-\beta, \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= E(1-x)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}} F\left(\alpha, \beta, \frac{1}{2}, x\right) + G\sqrt{x}\,.(1-x)^{\alpha+\beta-\frac{1}{2}} F\left(\alpha+\frac{1}{2}, \beta+\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, x\right)$$

Wird dies eingesetzt und

$$AC + DE\, 2^{2\alpha+2\beta-1} = M, \quad BC + DG\, 2^{2\alpha+2\beta-1} = N$$

geschrieben, so erhält man

$$F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right) = MF\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2},\ x\right)$$
$$+ N\sqrt{x}\,.\,F\left(\alpha+\frac{1}{2},\ \beta+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x\right)$$

was in der *Form* mit Gleichung 107 übereinstimmt. Wir könnten nun zwar bloss aus der Natur der Function Π herleiten, dass $M = A$ und $N = -B$ ist, da sich mit Hilfe der Gleich. 55 und 56[18]) leicht zeigen lässt, dass

$$C = \frac{\cos(\alpha-\beta)\pi}{\cos(\alpha+\beta)\pi},$$
$$\frac{DE\, 2^{2\alpha+2\beta-1}}{A} = -\frac{2\sin\alpha\pi\sin\beta\pi}{\cos(\alpha+\beta)\pi}, \quad \frac{DG\, 2^{2\alpha+2\beta-1}}{B} = -\frac{2\cos\alpha\pi\cos\beta\pi}{\cos(\alpha+\beta)\pi}$$

indessen ist diese Mühe nicht einmal erforderlich. Es ist nämlich klar, dass, wenn $x = 0$ gesetzt wird,

$$M = F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right) = A$$

werden muss; differentiirt man aber jene Gleichung, so kommt

$$x^{-\frac{1}{2}}\frac{\alpha\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}F\left(2\alpha+1,\ 2\beta+1,\ \alpha+\beta+\frac{3}{2},\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$
$$= 2\alpha\beta MF\left(\alpha+1,\ \beta+1,\ \frac{3}{2},\ x\right)$$
$$+\frac{2}{3}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\left(\beta+\frac{1}{2}\right)N\sqrt{x}\,.\,F\left(\alpha+\frac{3}{2},\ \beta+\frac{3}{2},\ \frac{5}{2},\ x\right)$$
$$+\frac{1}{2}Nx^{-\frac{1}{2}}F\left(\alpha+\frac{1}{2},\ \beta+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x\right)$$

woraus, wenn man $x = 0$ setzt, hervorgeht

$$N = \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}F\left(2\alpha+1,\ 2\beta+1,\ \alpha+\beta+\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta+\frac{1}{2}}\cdot\frac{\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\alpha\Pi\beta}$$
$$= -\frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})\Pi(-\frac{3}{2})}{\Pi(\alpha-1)\Pi(\beta-1)} = -B$$

57.

Aus der Verbindung der Gleichungen 106 und 107 haben wir daher

$$[108]\qquad 2AF\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{1}{2},\ x\right)$$

$$= F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) + F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$[109]\qquad 2B\sqrt{x}\,.\,F\left(\alpha+\frac{1}{2},\ \beta+\frac{1}{2},\ \frac{3}{2},\ x\right)$$

$$= F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right) - F\left(2\alpha,\ 2\beta,\ \alpha+\beta+\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$

Verwandelt man in Gleichung 109 α in $\alpha-\frac{1}{2}$, β in $\beta-\frac{1}{2}$, so sieht man leicht, dass daraus hervorgeht[19])

$$[110]\qquad \frac{2\alpha-1\,.\,2\beta-1}{\alpha+\beta-\frac{1}{2}}A\sqrt{x}\,.\,F\left(\alpha,\ \beta,\ \frac{3}{2},\ x\right)$$

$$= F\left(2\alpha-1,\ 2\beta-1,\ \alpha+\beta-\frac{1}{2},\ \frac{1+\sqrt{x}}{2}\right)$$

$$- F\left(2\alpha-1,\ 2\beta-1,\ \alpha+\beta-\frac{1}{2},\ \frac{1-\sqrt{x}}{2}\right)$$

Anmerkungen.

1) *Art. 5*, No. XIII—XXIII. Es sei daran erinnert, dass in *Gauss'* Schreibweise $\sin t^n = (\sin t)^n$ ist.

2) S. 15. Für *contiguus* wurde, statt der von *Gauss* in der Anzeige S. 3 vorgeschlagenen Verdeutschung *verwandt*, das Wort *benachbart* darum gewählt, weil dasselbe auch in der Zahlentheorie bei den „benachbarten Formen" üblich ist. Herr *Kummer* gebrauchte in einer Vorlesung über die hypergeometrische[1]) Reihe den Ausdruck „angrenzend".

3) *Art. 12*, S. 21. Dass die Kettenbrüche im letzteren Falle convergiren, ist bei *Schlömilch*, *Algebraische Analysis*, § 70 bewiesen.

4) *Art. 14*, S. 23. Die a. a. O. auftretende hypergeometrische[1]) Reihe ist

$$X = \frac{4}{3}\left(1 + \frac{6}{5}x + \frac{6.8}{5.7}xx + \frac{6.8.10}{5.7.9}x^3 + \frac{6.8.10.12}{5.7.9.11}x^4 + \cdots\right)$$

oder als Kettenbruch

$$\cfrac{\frac{4}{3}}{1 - \cfrac{\frac{6}{5}x}{1 + \cfrac{\frac{2}{5.7}x}{Q}}}$$

wo Q den im Text angegebenen Kettenbruch bedeutet. Das Bildungsgesetz der Coefficienten von x ist dabei

$$\frac{(n+2)(n+5)}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ wenn } n \text{ ungerade ist,}$$

und

$$\frac{(n-3)n}{(2n+1)(2n+3)}, \text{ wenn } n \text{ gerade ist.}$$

Die ferner im Text angeführte Gleichung für $x - \xi$ folgt unmittelbar aus der Definition von ξ durch die Beziehung

$$X = \frac{\frac{4}{3}}{1 - \frac{6}{5}(x - \xi)},$$

wenn für X der obige Kettenbruch gesetzt wird.

---

[1]) Vgl. Anmerkung 11.

Gauss.

5) *Art. 15*, S. 26. Die letzte Behauptung folgt unmittelbar aus der *Raabe*schen Convergenzbedingung

$$\lim_{n=\infty} n\left(1-\frac{u_{n+1}}{u_n}\right) > 1 \cdot$$

(*Baumgartner* u. *v. Ettingshausen*, Zeitschr. für Physik u. Math., Bd. X, Wien 1832, § 11.) Vgl. im Uebrigen *Schlömilch*, Algebr. Analysis § 26. *Stern*, Desgl. § 67 ff., *Weierstrass*, Ueber die analytischen Facultäten (*Crelle Journ.* Bd. 51, Art. 5, V—VII.)

6) *Art. 22*, S. 34. Nach *Kramp* (Analyse des réfractions astronomiques et terrestres, à Leipsic 1799. 4°) ist

$$a^{b|c} = a(a+c)(a+2c)\ldots(a+\overline{b-1}c).$$

Vgl. *Klügel*, Math. Wörterbuch, Art. „*Facultät*, numerische". (II. 1805, S. 175 ff. und das Supplement von *Grunert* 1833—1836, II. 285—319.)

7) *Art. 25*, S. 37. Man bemerkt leicht, dass aus [54] durch Multiplication mit $1-z$ folgt

$$\Pi(1-z).\Pi z = \frac{(1-z)z\pi}{\sin z\pi},$$

wodurch die Berechnung von Πz für $z=\frac{1}{2}\cdots 1$ auf Πz für $z=0\ldots.\frac{1}{2}$ zurückgeführt ist.

8) *Art. 26*, S. 38. Formel [57] ist, wegen $\Gamma z = \Pi(z-1)$ gleichbedeutend mit

$$\Gamma z\,\Gamma\left(z+\frac{1}{n}\right)\Gamma\left(z+\frac{2}{n}\right)\cdots\Gamma\left(z+\frac{n-1}{n}\right) = (2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\, n^{\frac{1}{2}-na}\,\Gamma(na),$$

welche Gleichung zuerst von *Legendre* (Traité des fonctions elliptiques, II. 444) gegeben und ausser von *Cauchy* und *Crelle* auch von *Dirichlet* (Sur les intégrales Eulériennes. *Crelle Journ.* XV) bewiesen wurde.

9) *Art. 28*, S. 40. Nach Herrn *Scherings* Mitteilung (*Gauss'* Werke, III. 230) enthält *Gauss'* Handexemplar der *Disquisitiones* bei diesem Art. die Aufzeichnung:

„Die beste Definition von Π ist, dass $\Pi m = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{(m+1)x}\, e^{-e^x}\, dx.$"

10) *Art. 29*, S. 41. Hr. *Schering* teilt (a. a. O.) aus *Gauss'* Handexemplar noch folgende Umformung mit:

$$[58] \quad \log \Pi z = \left(z+\frac{1}{2}\right)\log z - z + \frac{1}{2}\log 2\pi + \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}P + \frac{1}{8}\cdot\frac{2}{3}Q + \frac{1}{10}\cdot\frac{3}{4}R + \frac{1}{12}\cdot\frac{4}{5}S + \text{etc.},$$

die unmittelbar aus 61, 62 und 57 abgeleitet werden könne. Ferner finde sich in einem Notizbuche (nach dem Jahre 1847), mit Hilfe der *Euler*schen Form der Gleichung 58, der Wert von $\log \Pi(10+i)$ berechnet und daraus

$$\log \Pi i = 9{,}717\,3075 - 17°\,16'\,57''\,693\,i$$
$$\Pi i = +\,0{,}4980156 - 0{,}1549496\,i.$$

11) *Art. 29*, S. 41. *Gauss* gebraucht hier den Ausdruck „hypergeometrische Reihe“ für die Reihe der *Bernoulli*schen Zahlen wohl in dem Sinne, dass diese Reihe und andere von der im Texte beschriebenen Art schliesslich *stärker* divergiren, als jede wachsende *geometrische* Reihe. Man pflegt solche Reihen jetzt nach *Legendre* (Exercices de calcul intégral, I. 267) *halbconvergent* oder *semiconvergent* zu nennen, unter der *hypergeometrischen* Reihe aber die von *Gauss* mit $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ bezeichnete zu verstehen, bei der man die in den Coefficienten auftretenden Elemente auch wohl vermehrt, so dass man z. B. hat

$$F(\alpha, \beta, \gamma, \delta, x) = 1 + \frac{\alpha . \beta}{\gamma . \delta} x + \frac{\alpha . \alpha + 1 . \beta . \beta + 1}{\gamma . \gamma + 1 . \delta . \delta + 1} x^2 + \cdots$$

Man kann auch mit *Scheibner* (*Ueber unendliche Reihen und deren Convergenz*, Leipzig 1860. § 25) die hypergeometrische Reihe als solche Potenzreihe definiren, bei der der Quotient zweier aufeinanderfolgender Coefficienten sich auf die Form

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{n^\lambda + An^{\lambda-1} + Bn^{\lambda-2} + \cdots}{n^\lambda + an^{\lambda-1} + bn^{\lambda-2} + \cdots}$$

bringen lässt, also auf die Form, an die *Gauss* im *Art. 16* seine Convergenz-Untersuchung geknüpft hat.

Zuerst findet sich der Name in der 1655 erschienenen *Arithmetica infinitorum* von *Wallis* (Scholium zu Propos. 190. *Opera math.* I. Oxoniae 1695, S. 466. Vgl. auch *Dedicatio* S. 359.) Dort wird der *gleichmässigen* geometrischen Reihe (*progressio Geometrica aequabilis*), bei der jedes Glied aus dem vorhergehenden durch Multiplication mit *derselben* Zahl entsteht, die *hyper*geometrische Reihe gegenübergestellt, bei der die Multiplicatoren *ungleiche*, wachsende oder abnehmende, Zahlen sind. So ist die Reihe $1, \frac{3}{2}, \frac{15}{8}, \frac{35}{16} \cdots$ eine abnehmende hypergeometrische Reihe (*progr. Hyper-geometrica decrescens*), weil die Glieder

$$1, \quad 1 . \frac{3}{2}, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4}, \quad 1 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{7}{6} \cdots$$

durch Multiplication mit abnehmenden Factoren aus einander hervorgehen. Entsprechend dem Sachverhalt bei der geometrischen Reihe fasst *Wallis* jedes Glied seiner Reihen als *hypergeometrisches Mittel* zwischen dem vorhergehenden und dem folgenden Gliede auf. Der zwischen 1 und $^3/_2$ einzuschaltende Mittelwert giebt dann das Verhältnis der Kreisfläche zum umbeschriebenen Quadrat an und wird (*Prop. 191*) durch das nach *Wallis* benannte Product

$$\frac{3.3.5.5.7.7 \ldots.}{2.4.4.6.6.8 \ldots.},$$

sowie durch den *Brouncker*schen Kettenbruch — bekanntlich den ersten seiner Art —

$$\cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \cdots}}}}}$$

6*

dargestellt. Als geschichtlich bemerkenswert sei noch erwähnt, dass *Wallis* für das hypergeometrische Mittel ein besonderes Operationszeichen einführt, welches — wie das Wurzelzeichen beim geometrischen Mittel — die nicht immer „in wirklichen Zahlen" (*veris numeris*) ausführbare Rechnung andeuten soll. Diesem Symbol ist indessen das erhoffte Bürgerrecht in der Mathematik versagt geblieben.

Bei *Euler* (*De termino generali serierum hypergeometricarum.* Nova Acta Petrop. VII. 1776, pg. 42) lautet das *n*te Glied solcher Reihe, unter Bezugnahme auf *Wallis*,

$$a(a+1)(a+2)\ldots(a+\overline{n-1}b),$$

und ebenso definirt *Klügel* (*Math. Wörterbuch* II. 723). Indessen ist, wie wir gesehen haben, die *Wallis*sche Form schon allgemeiner.

12) *Art. 40*, S. 57. Formel [82] ist schon von *Euler* gegeben (Acta Petrop. XII.) Vgl. *Klügel* (*Grunert*) Math. Wörterbuch V. 373—375 „Umformung der Reihen" Art. 24. 25, sowie *Kummer*, „Ueber die hypergeometrische Reihe $1+\frac{a.\beta}{1.\gamma}x+\ldots$" *Crelle Journ.* Bd. 15. Gleichung 17 u. 18.

13) *Art. 45*, S. 64. Wird in

$$\lim_{\omega=0}\frac{1}{\omega}\left\{\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t+\omega)\,\Pi(\beta-\gamma+t+\omega)}{\Pi(t-\gamma+1+\omega)\,\Pi(t+\omega)}x^{1+t-\gamma+\omega}-\frac{\Pi(\alpha-\gamma+t)\,\Pi(\beta-\gamma+t)}{\Pi(t-\gamma+1)\,\Pi t}x^{1+t-\gamma}\right\}$$

der Subtrahendus gleich $V(t)$ gesetzt, so ist der gesuchte Grenzwert offenbar $\frac{dV}{dt}$, und dann

$$\left[\frac{dV}{Vdt}\right]_{\gamma=-k}=\Psi(\alpha+k+t)+\Psi(\beta+k+t)-\Psi(t+k+1)-\Psi t+\log x,$$

woraus sich der unter das Summenzeichen zu setzende Wert von $\frac{dV}{dt}$ ergiebt.

Gauss hat diesen Weg nicht eingeschlagen, sondern da es auf die Wertbestimmung des obigen Ausdrucks für einen gewissen Wert von $-\gamma$ ankommt, den Ausdruck lieber als Function von $-\gamma$ behandeln wollen; hierdurch war er genötigt, $-\gamma$ auch in die Factoren Πt und $\Pi(t+\omega)$ der Nenner einzuführen, was er durch Hinzufügung des für $\omega=0$ verschwindenden Gliedes $-k-\gamma$ bewirkte. Der Ausdruck wird so

$$\lim_{\omega=0}\frac{U(-\gamma+\omega)-U(-\gamma)}{\omega}=\frac{dU(-\gamma)}{d(-\gamma)}=-\frac{dU}{d\gamma}.$$

14) *Art. 45*, S. 64. Es ist vielleicht nicht überflüssig, auf die von *Gauss* zur Berechnung von Y angewendete Reihen-Transformation hinzuweisen, die hier noch verborgener liegt, als die von *Abel* in der Abhandlung über die binomische Reihe gegebene [Beweis zum dritten der vorausgeschickten Sätze über Convergenz und Divergenz. *Crelle Journ.* Bd. 1. *Oeuvres I.*]. Man hat zunächst

$$Y=\sum_{t=0}^{\infty}u_t v_t,\quad \text{wo}$$

$$u_t=\log x+\Psi(\alpha+t+k)+\Psi(\beta+t+k)-\Psi(t+k+1)-\Psi t$$

$$v_t=\frac{\Pi(\alpha+t+k)\,\Pi(\beta+t+k)}{\Pi(\alpha+k)\,\Pi(\beta+k)}\,\frac{\Pi(k+1)}{\Pi(t+k+1)}\,\frac{x^t}{\Pi t}$$

Nun ist allgemein

$$u_0 v_0 + u_1 v_1 + u_2 v_2 + \cdots = u_0 (v_0 + v_1 + v_2 + \cdots)$$
$$+ (u_1 - u_0) v_1 + (u_2 - u_0) v_2 + (u_3 - u_0) v_3 + \cdots,$$

oder, wenn wir

$$u_1 - u_0 = A, \ u_2 - u_1 = B, \ u_3 - u_2 = C, \text{ u. s. w.}$$

setzen,

$$Y = u_0 \sum_0^\infty v_t + A v_1 + (A + B) v_2 + (A + B + C) v_3 + \cdots,$$

und dies liefert, mit Rücksicht auf den im Anschluss an I. in diesem Art. gefundenen Wert von $\sum v_t$, wenn dort k statt $-\gamma$ geschrieben wird, die *Gauss*sche Formel.

15) *Art. 48*, S. 68. „Der Art. 48" bemerkt Herr *Schering (Gauss' Werke* III. 230) „ist hier so wiedergegeben, wie er nach vielfachen Durchstreichungen von Worten und ganzen Sätzen in der Handschrift gelesen werden muss; nach Absicht des Verfassers dürften aber wohl noch die Worte „*e solo theoremate binomiali*" fortzulassen sein." Die Tilgung dieser Worte in der Handschrift scheint hiernach zweifelhaft zu sein; wie bereits gelegentlich des Druckfehler-Verzeichnisses zu der *Gauss*schen Abhandlung (Ztschr. f. Math. u. Phys. a. a. O. S. 101) bemerkt, ist ein innerer Grund für die Fortlassung jener Worte nicht ersichtlich. Zu erwähnen ist noch, dass in beiden bis jetzt erschienenen Auflagen des 3. Bandes der *Gauss*schen Werke die im Anfang des Art. aufgeführten Formelgruppen I—IV und VI—IX lauten, so dass die Nummern V und X, die wir hier hinzugefügt haben, dort ganz fehlen.

16) *Art. 51*, S. 71. Aus Art. 42.

17) *Art. 55*, S. 77. Folgender Nachweis dieser Behauptung, bei dem eine gütige Mitteilung des Herrn Prof. *Hamburger* in Berlin mit Dank benutzt ist, dürfte nicht unangebracht sein.

Aus $P = F\left(\alpha, \beta, \alpha + \beta + \frac{1}{2}, 4y - 4y^2\right)$ folgt

$$\frac{dP}{dy} = \frac{4\alpha\beta}{\alpha + \beta + \frac{1}{2}} F\left(\alpha + 1, \beta + 1, \alpha + \beta + \frac{3}{2}, 4y - 4y^2\right)(1 - 2y).$$

Für $y = \frac{1}{2}$ erscheint das Product rechter Hand, abgesehen von dem constanten Factor, zunächst in der Form $\infty . 0$, da in der Reihe F das vierte Element $= 1$ wird und die Convergenzbedingung V des Art. 15, wonach die Summe der beiden ersten Elemente kleiner als das dritte sein müsste, nicht erfüllt ist. Um den wahren Wert des Products zu finden, schreiben wir es nach [82], mit Rücksicht auf

$$1 - 2y = (1 - (4y - 4y^2))^{(\alpha+1)+(\beta+1)-\left(\alpha+\beta+\frac{3}{2}\right)},$$

in der Form

$$F\left(\beta + \frac{1}{2}, \alpha + \frac{1}{2}, \alpha + \beta + \frac{3}{2}, 4y - 4y^2\right).$$

Diese Reihe convergirt auch noch für $y = \frac{1}{2}$ und hat in diesem Falle nach [48] den Wert $\frac{\Pi(\alpha+\beta+\frac{1}{2})\Pi(-\frac{1}{2})}{\Pi\alpha\Pi\beta}$, so dass

$$\left[\frac{dP}{dy}\right]_{y=\frac{1}{2}} = 4\sqrt{\pi}\,\frac{\Pi(\alpha+\beta-\frac{1}{2})}{\Pi(\alpha-1)\,\Pi(\beta-1)},$$

also i. A. endlich und von Null verschieden wird. Dass aber $\frac{dP}{dy}$ an dieser Stelle das Vorzeichen wechselt, ergiebt sich leicht, wenn man in dem obigen Ausdruck des Differentialquotienten für y einmal $\frac{1}{2}-\varepsilon$, dann $\frac{1}{2}+\varepsilon$ setzt, wo ε eine beliebig kleine Grösse bedeutet. Die Reihe F hat in beiden Fällen das vierte Element $1-4\varepsilon^2$, convergirt also beidemal gegen dieselbe Summe, der Factor $1-2y = \pm 2\varepsilon$ dagegen wechselt das Vorzeichen, somit auch $\frac{dP}{dy}$ selbst.

18) *Art. 56*, S. 79. Auch Gleichung 57 scheint erforderlich zu sein.

19) *Art. 57*, S. 80. Formel [110]. In den *Werken* lautet der Zähler des Bruches linker Hand $\alpha - \frac{1}{2}\cdot\beta - \frac{1}{2}\cdot$ Die geänderte Formel ist u. a. leicht durch die Annahme $\alpha = \beta = 1$, $x = \cos^2 t$, mit Rücksicht auf Art. 5, XIV als richtig zu bestätigen. Dass das Versehen unbemerkt blieb, erklärt sich einerseits daraus, dass *Gauss* den zweiten Teil seiner Untersuchungen noch nicht druckfertig gemacht hatte, während andererseits die Formel die letzte des ganzen Werkes ist, aus der weitere Schlüsse nicht gezogen wurden. Vgl. auch das schon angeführte „Verzeichniss von Druckfehlern u. s. w.“ Nr. 23.

5. Theorie der Anziehung homogener Ellipsoide

In: Ueber die Anziehung homogener Ellipsoide. Abhandlungen von Laplace (1782), Ivory (1809), Gauß (1813), Chasles (1838) und Dirichlet (1839). Hrsg. von Albert Wangerin, Leipzig 1890 (2. Aufl. 1914), Ostwald's Klassiker Nr. 19, S. 50–74.

Original:
Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 2, (1811–1813) 1813, commentationes classis mathematicae, 24 S. In: Gauß Werke 5, S. 1–22.

Theorie der Anziehung homogener Ellipsoide
(Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum methodo nova tractata)

von

Carl Friedrich Gauss.

Der Königl. Gesellschaft der Wissenschaften vorgelegt am 18. März 1813.

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores. Vol. II. Gottingae 1813.

1.

[**1**] Die genaue Bestimmung der Anziehung, welche ein homogenes Ellipsoid auf einen beliebigen Punkt ausübt, gehört bekanntlich zu den schwierigsten Aufgaben der physischen Astronomie; mit derselben haben sich schon seit *Newton*'s Zeiten verschiedene Geometer gleichsam wetteifernd beschäftigt. Der grosse *Newton* selbst that den ersten Schritt, indem er die Kraft zu finden lehrte, mit welcher ein durch Rotation einer halben Ellipse um eine ihrer Axen entstandenes Sphäroid einen auf jener Axe gelegenen Punkt anzieht. Zugleich stellte er eine Beziehung zwischen den Anziehungen für alle Punkte auf, die innerhalb des Sphäroids auf demselben Durchmesser liegen (Princip. Lib. I Prop. XCI). Sodann bestimmte der scharfsinnige *Mac Laurin* durch eine sehr elegante synthetische Betrachtung die Anziehung für Punkte, die auf der Oberfläche des Sphäroids oder in der erweiterten Ebene des Aequators liegen. [**2**] Dadurch war zugleich die Theorie der Anziehung für Punkte innerhalb des Sphäroids, die nach dem *Newton*'schen Satze leicht auf die für Punkte der Oberfläche zurückzuführen war, vollständig erledigt (De caussa physica fluxus et refluxus maris,

im Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'acad. roy. des sc. T. IV; Treatise of fluxions Bd. I Ch. 14). Die Resultate, welche *Mac Laurin* synthetisch entwickelt hatte, lehrte später *Lagrange* nicht weniger elegant mittels der Analysis (der vorher derartige Fragen unzugänglich zu sein schienen) ableiten und bahnte damit den Weg zu weiteren Fortschritten (Nouv. Mém. de l'Acad. de Berlin 1773). Noch aber blieb die Anziehung für Punkte zu ermitteln, die ausserhalb des Sphäroids, und zwar weder auf der Axe noch in der erweiterten Ebene des Aequators, liegen. Diesen schwersten Theil des Problems zu erledigen gelang *Legendre* (Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes, Mémoires présentés à l'acad. roy. des sc. T. X).

Die allgemeinste hierher gehörige Untersuchung betrifft die Anziehung derjenigen Sphäroide, die nicht durch Rotation entstanden sind, sondern deren Schnitte mit beliebigen Ebenen Ellipsen sind. Diese Untersuchung hatte bereits *Mac Laurin* begonnen; doch hatte er sich auf die Anziehung solcher Punkte beschränkt, die auf einer der drei Axen liegen. Zu dem Hauptsatze, auf dem die allgemeine Lösung des Problems wesentlich beruht, war *Legendre* in der vorher erwähnten Abhandlung zwar schon durch Induction gelangt, aber erst *Laplace* glückte es, Alles streng zu beweisen und so die Lösung nach allen Seiten hin zu vervollkommnen (Hist. de l'acad. roy. de Paris 1782; die Lösung ist auch mitgetheilt in den Werken Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes und Mécanique céleste Vol. II).

Die *Laplace*'sche Lösung verdient wegen ihrer Eleganz und ihres Scharfsinns allgemeine Bewunderung; aber gerade der Umstand, dass es besonderer Feinheiten und Kunstgriffe bedurfte, um die grossen Schwierigkeiten der Aufgabe zu überwinden, erweckte bei den Geometern den Wunsch nach einer einfacheren, weniger verwickelten und mehr directen Lösung. Dieser Wunsch wurde nicht vollständig erfüllt durch einen neuen, von *Legendre* gegebenen Beweis des Hauptsatzes (Hist. [**3**] de l'acad. roy. des sc. 1788, Sur les intégrales doubles), wiewohl die darin gezeigte ausserordentliche analytische Gewandtheit von allen Geometern anerkannt wurde*). Nachher haben noch *Biot*

*) Ueber die letztgenannten beiden Lösungen fällte z. B. *Lagrange* folgendes Urtheil: On ne peut regarder leurs solutions que comme des chefs-d'oeuvre d'analyse, mais on peut désirer encore une solution plus directe et plus simple; et les progrès continuels de l'analyse donnent lieu de l'espérer. Nouv. Mém. de Berlin 1793 p. 263.

und *Plana* den Versuch gemacht, die Lösung zu vereinfachen (Mém. de l'institut T. VI; Memorie di matematica e di fisica della società italiana T. XV); aber auch diese beiden Lösungen gehören, wie jeder leicht zugeben wird, zu den verwickeltsten Anwendungen der Analysis.

Wir hoffen daher, dass den Mathematikern und Astronomen eine neue Lösung des so berühmten Problems nicht unwillkommen sein wird, die einen ganz andern Weg einschlägt und, wie wir glauben, eine solche Einfachheit besitzt, dass nichts zu wünschen übrig bleibt.

Die eigentliche Lösung der Aufgabe wird nur wenige Seiten umfassen. Doch haben wir es der Mühe für werth gehalten, bevor wir auf das Problem, dem diese Abhandlung gewidmet ist, eingehen, einige Vorbetrachtungen, die auch bei andern Gelegenheiten zweckmässig verwendet werden können, etwas allgemeiner und ausführlicher zu entwickeln, als es unser Zweck direct erfordert hätte.

2.

Wir wollen ganz allgemein einen endlichen Körper von beliebiger Gestalt betrachten, der von dem übrigen unendlichen Raume durch eine einzige zusammenhängende Fläche getrennt ist oder auch, falls der Körper einen oder mehrere Hohlräume umschliesst, durch mehrere derartige, mit einander nicht zusammenhängende Flächen; die Gesammtheit dieser Flächen wollen wir einfach als Oberfläche des Körpers bezeichnen. Wir denken uns diese Oberfläche in unendlich kleine Elemente ds getheilt; ein Punkt P des Elements ds habe, auf drei zu einander senkrechte Ebenen bezogen, die Coordinaten [**4**] x, y, z. Die Linien PX, PY, PZ seien den Coordinatenaxen parallel und nach den Seiten hingerichtet, nach denen die Coordinaten einen positiven Zuwachs erhalten; ferner sei PQ die nach aussen gerichtete Normale der Oberfläche. M sei der beliebig gelegene angezogene Punkt, seine Coordinaten seien a, b, c und der (stets positiv zu nehmende) Abstand $PM = r$. Die Winkel, welche die Gerade PM mit PX, PY, PZ bildet, wollen wir mit MX, MY, MZ und die Winkel zwischen PQ einerseits und PX, PY, PZ, PM andrerseits mit QX, QY, QZ, QM bezeichnen. Alle diese Bezeichnungen beziehen sich auf beliebige Punkte der Oberfläche; sobald es sich aber um mehrere bestimmte Punkte der Oberfläche handelt, wollen wir die gleichen Buchstaben gebrauchen, zu denselben jedoch verschiedene Indices hinzufügen.

3.

Wir denken uns eine Ebene, die zur Coordinatenaxe x senkrecht steht und so liegt, dass, wenn ihre Gleichung $x = \alpha$ ist, α kleiner ist als der kleinste Werth, den die x-Coordinate auf der Oberfläche des Körpers annimmt. Wird der Körper auf diese Ebene projicirt, so erhält man in derselben eine endliche Figur, die wir in unendlich kleine Elemente $d\Sigma$ zerlegt denken wollen. In dem Punkte Π eines Elements $d\Sigma$ werde eine Senkrechte (oder eine zur Coordinatenaxe x parallele Gerade) errichtet, welche den Körper in den Punkten P_1, P_2, P_3 etc. schneiden möge; die Anzahl dieser Punkte ist offenbar eine gerade. Sodann mögen auch in den einzelnen Punkten des Umfangs von $d\Sigma$ Senkrechte auf der Ebene von $d\Sigma$ errichtet werden. Diese Lothe, welche eine Cylinderfläche in weiterem Sinne bilden, mögen aus der Oberfläche des Körpers die Elemente ds_1, ds_2, ds_3 etc. ausschneiden. Das Element $d\Sigma$ ist dann die Projection der einzelnen Elemente ds_1, ds_2, ds_3 etc., und daraus folgt, dass

$$\begin{aligned} d\Sigma &= \pm\, ds_1 \cos QX_1 \\ &= \pm\, ds_2 \cos QX_2 \\ &= \pm\, ds_3 \cos QX_3 \\ &= \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist. Dabei gilt das obere oder untere Zeichen, je nachdem der Winkel, dessen Cosinus in der Formel auftritt, ein spitzer oder stumpfer ist. Da nun die obige Senkrechte in P_1 in den Körper eintritt, in P_2 aus demselben heraustritt, in P_3 wiederum eintritt etc., so erkennt man leicht, dass der Winkel QX_1 ein stumpfer, QX_2 ein spitzer, QX_3 wiederum ein stumpfer ist etc., so dass

$$\begin{aligned} d\Sigma &= -\, ds_1 \cos QX_1 \\ &= +\, ds_2 \cos QX_2 \\ &= -\, ds_3 \cos QX_3 \\ &= \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

ist [5] und daher auch, da die Zahl der Theile eine gerade,

$$ds_1 \cos QX_1 + ds_2 \cos QX_2 + ds_3 \cos QX_3 + \cdots = 0\,.$$

Behandeln wir alle übrigen Elemente $d\Sigma$ ebenso und summiren, so erhalten wir das folgende Resultat:

Satz I.

Das über die ganze Oberfläche eines Körpers erstreckte Integral

$$\int ds \cos QX$$

hat den Werth Null.

Ganz ebenso findet man das allgemeinere Resultat, dass das Integral

$$\int (T \cos QX + U \cos QY + V \cos QZ) ds$$

verschwindet, wenn T, U, V rationale Functionen bezeichnen, deren erste nur von y und z, die beiden anderen nur von x und z resp. nur von x und y abhängen.

4.

Da die Volumina der Theile des betrachteten Cylinders, die von der Projectionsebene bis zu den Punkten P_1, P_2, P_3 etc. reichen, resp. gleich $d\Sigma.(x_1 - \alpha)$, $d\Sigma.(x_2 - \alpha)$, $d\Sigma.(x_3 - \alpha)$ etc. sind, so ist der Theil des Körpervolumens, der innerhalb des Cylinders liegt,

$$= - x_1 \; d\Sigma + x_2 \; d\Sigma - x_3 \; d\Sigma + \cdots$$

$$= ds_1 . x_1 \cos QX_1 + ds_2 . x_2 \cos QX_2 + ds_3 . x_3 \cos QX_3 + \cdots;$$

und daraus erhalten wir durch Summation über alle $d\Sigma$ das Resultat:

Satz II.

Das Volumen eines Körpers wird durch das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral

$$\int ds . x \cos QX$$

ausgedrückt.

Offenbar kann man dasselbe Volumen auch durch die Integrale

$$\int ds . y \cos QY \quad \text{und} \quad \int ds . z \cos QZ$$

ausdrücken.

5.

Wir wollen uns nun zunächst den ganzen Cylinder mit Masse von gleichförmiger Dichtigkeit gefüllt denken und ermitteln, welche Anziehung die einzelnen Elemente desselben auf den

Punkt M ausüben. Der Cylinder werde zu diesem Zwecke durch Ebenen, [6] die einander unendlich nahe und der Basis parallel sind, in Elementarcylinder getheilt. Einer derselben, der an dem Punkte ξ, η, ζ liegt, hat das Volumen $d\Sigma . d\xi$. Sein Abstand vom Punkte M ist

$$\varrho = \sqrt{(a-\xi)^2 + (b-\eta)^2 + (c-\zeta)^2},$$

und daher erhält man für die Anziehung, die dieser Elementarcylinder ausübt, den Ausdruck $d\Sigma . d\xi . f(\varrho)$, falls $f(\varrho)$ das Anziehungsgesetz bezeichnet. Da nun für den ganzen Cylinder ξ allein veränderlich ist, so wird $\varrho d\varrho = -(a-\xi)d\xi$ und daher die Anziehung des Elements

$$= -\frac{\varrho f(\varrho) d\varrho \, d\Sigma}{a-\xi}.$$

Zerlegen wir diese in drei den Coordinatenaxen parallele Theilkräfte, deren Richtungen denen jener Axen entgegengesetzt sind, so wird die erste derselben $= -f(\varrho) . d\varrho . d\Sigma$. Setzen wir nun

$$\int f(\varrho) d\varrho = F(\varrho),$$

so wird die x-Componente der Anziehung, welche ein von der Basis $d\Sigma$ bis zu dem Punkte, dessen erste Coordinate ξ ist, reichender Cylinder auf den Punkt M ausübt,

$$= -[F(\varrho) - \text{Const}] d\Sigma = -[F(\varrho) - F(R)] \, d\Sigma,$$

wenn R den Abstand der Basis $d\Sigma$ vom Punkte M ausdrückt. Daraus folgt, dass alle innerhalb des Cylinders liegenden Theile des Körpers eine Anziehung ausüben, deren x-Componente

$$\begin{aligned} &= \{F(r_1) - F(r_2) + F(r_3) - \cdots\} \, d\Sigma \\ &= - F(r_1) \, ds_1 \cos QX_1 - F(r_2) \, ds_2 \cos QX_2 \\ &\quad - F(r_3) \, ds_3 \cos (QX_3) - \cdots\cdots\cdots \end{aligned}$$

wird. Stellen wir dieselbe Ueberlegung auch für alle übrigen Elemente $d\Sigma$ an, so ergiebt sich der Satz:

Satz III.

Die der x-Axe parallele und zu dieser Axe entgegengesetzt gerichtete Anziehung eines Körpers auf einen Punkt M wird ausgedrückt durch das über die ganze Oberfläche erstreckte Integral

$$-\int F(r)\, ds \cos QX\,.$$

Ganz ebenso lassen sich natürlich die nach den beiden andern Hauptrichtungen genommenen Anziehungscomponenten durch die Integrale

$$-\int F(r)\, ds \cos QY, \quad -\int F(r)\, ds \cos QZ$$

ausdrücken.

6.

[7] Wir schlagen nunmehr einen andern Weg ein. Um M als Mittelpunkt denken wir uns eine Kugelfläche beschrieben, deren Radius $= 1$ ist, und diese Fläche in unendlich kleine Elemente getheilt. Ist Π ein Punkt der Kugelfläche, der dem Element $d\Sigma$ angehört, so ziehen wir den Radius $M\Pi$ und verlängern denselben, falls es erforderlich ist, beliebig über die Kugelfläche hinaus. Es seien P_1, P_2, P_3 etc. die Punkte, in welchen der in Rede stehende Radius die Oberfläche unseres Körpers nach einander schneidet, wobei jedoch der Punkt M selbst, wenn er etwa auf der Oberfläche liegt, nicht mitgerechnet wird. Die Anzahl dieser Punkte ist entweder eine gerade oder eine ungerade, je nachdem der Punkt M ausserhalb oder innerhalb des festen Körpers liegt; auch übersieht man leicht, dass der Fall, in dem M auf der Oberfläche des Körpers liegt, entweder dem ersten oder dem zweiten Falle zugezählt werden muss, je nachdem der Radius $M\Pi$ anfänglich aus dem Innenraum des Körpers austritt oder in denselben hineintritt. Wir denken uns ferner von M gerade Linien nach dem Umfange der kleinen Fläche $d\Sigma$ gezogen; diese Verbindungslinien, die eine Kegelfläche (in weiterem Sinne) bilden, mögen aus der Oberfläche des Körpers an den Punkten P_1, P_2, P_3 etc. resp. die Flächenelemente ds_1, ds_2, ds_3 etc. ausschneiden. Endlich mögen durch die Punkte P_1, P_2, P_3 etc. Kugelflächen mit dem Mittelpunkte M und den Radien

$$MP_1 = r_1\,, \quad MP_2 = r_2\,, \quad MP_3 = r_3 \text{ etc.}$$

beschrieben werden; und die Flächenelemente, welche der vorher betrachtete Kegel aus jenen Kugeln ausschneidet, mögen $d\sigma_1$, $d\sigma_2$, $d\sigma_3$ etc. sein. Alle hier vorkommenden Flächentheilchen $d\Sigma$, ds_1, $d\sigma_1$ etc. wollen wir als positiv ansehen. Dann ist

$$d\Sigma = \frac{d\sigma_1}{r_1^2} = \frac{d\sigma_2}{r_2^2} = \frac{d\sigma_3}{r_3^2} = \cdots .$$

Das Flächentheilchen $d\sigma_1$ kann als die Projection von ds_1 auf eine zur Geraden P_1M senkrechte Ebene angesehen werden. Daher wird

$$d\sigma_1 = \pm\, ds_1 \cos MQ_1 ,$$

wobei das obere oder untere Zeichen zu nehmen ist, je nachdem MQ_1 ein spitzer oder stumpfer Winkel ist. Der erstere Fall tritt ein, wenn die von P_1 nach M gezogene Gerade bei P_1 aus dem Körper austritt, d. h. wenn M ausserhalb des Körpers liegt, der zweite dagegen, wenn die Gerade P_1M bei P_1 in den Körper eintritt, d. h. wenn M innerhalb des Körpers liegt. Ebenso wird

$$d\sigma_2 = \mp\, ds_2 \cos MQ_2 , \quad d\sigma_3 = \pm\, ds_3 \cos MQ_3 \text{ etc.}$$

[8] Mithin hat man,

I. wenn M ausserhalb des Köpers liegt:

$$\begin{aligned} ds_1 \cos MQ_1 &= +\, r_1^2 d\Sigma , \\ ds_2 \cos MQ_2 &= -\, r_2^2 d\Sigma , \\ ds_3 \cos MQ_3 &= +\, r_3^2 d\Sigma , \\ \cdots\cdots &\cdots\cdots ; \end{aligned}$$

II. wenn M innerhalb des Körpers liegt, ist dagegen

$$\begin{aligned} ds_1 \cos MQ_1 &= -\, r_1^2 d\Sigma , \\ ds_2 \cos MQ_2 &= +\, r_2^2 d\Sigma , \\ ds_3 \cos MQ_3 &= -\, r_3^2 d\Sigma , \\ \cdots\cdots &\cdots\cdots \end{aligned}$$

Im ersten Falle wird daher, da die Anzahl der Gleichungen eine gerade ist,

$$\frac{ds_1 \cos MQ_1}{r_1^2} + \frac{ds_2 \cos MQ_2}{r_2^2} + \frac{ds_3 \cos MQ_3}{r_3^2} + \cdots = 0 ;$$

im zweiten Falle dagegen, wo die Anzahl der Gleichungen eine ungerade ist, wird

$$\frac{ds_1 \cos MQ_1}{r_1^2} + \frac{ds_2 \cos MQ_2}{r_2^2} + \frac{ds_3 \cos MQ_3}{r_3^2} + \cdots = -\, d\Sigma .$$

Behandelt man alle Elemente $d\Sigma$ ebenso und summirt, so erhält man links offenbar das über die ganze Oberfläche des Körpers ausgedehnte Integral

$$\int \frac{ds \cos MQ}{r^2},$$

während sich auf der rechten Seite im ersten Falle 0 ergiebt, im zweiten dagegen die gesammte Oberfläche der mit dem Radius 1 beschriebenen Kugel, negativ genommen, d. h. -4π, falls π den halben Umfang eines Kreises vom Radius 1 bezeichnet.

Der Fall, dass M auf der Oberfläche des Körpers liegt, bedarf einer besonderen Betrachtung. Man denke sich die Ebene, welche die Oberfläche des Körpers in M berührt; diese theilt die Kugelfläche in zwei gleiche Halbkugeln, und zwar liegt eine derselben auf derselben Seite wie der Innenraum des Körpers bei M, die andere auf der entgegengesetzten Seite. Hinsichtlich aller Elemente $d\Sigma$, die auf der ersten Halbkugel liegen, ist der Punkt M als ein innerer anzusehen, für alle übrigen als ein äusserer. Daraus ergiebt sich, dass man durch Summation aller [9]

$$\frac{ds_1 \cos MQ_1}{r_1^2} + \frac{ds_2 \cos MQ_2}{r_2^2} + \frac{ds_3 \cos MQ_3}{r_3^2} + \ldots.$$

nur den negativ zu nehmenden halben Flächeninhalt der Kugel erhält. Damit ist folgender Satz bewiesen:

Satz IV.

Das über die gesammte Oberfläche eines Körpers erstreckte Integral

$$\int \frac{ds \cos MQ}{r^2}$$

wird entweder $= 0$ oder $= -2\pi$ oder $= -4\pi$, je nachdem M ausserhalb des Körpers liegt oder auf seiner Oberfläche oder innerhalb des Körpers.

Uebrigens lässt sich durch dieselben Schlüsse zeigen, dass allgemein das Integral

$$\int \frac{P ds \cos MQ}{r^2}$$

im ersten Falle verschwindet, wenn P irgend eine rationale Function der Grössen $\cos MX$, $\cos MY$, $\cos MZ$ bezeichnet.

7.

Das Volumen des obigen Kegelraums vom Scheitel bis zu den Punkten P_1, P_2, P_3 etc. ist resp. gleich

$$\tfrac{1}{3}r_1 d\sigma_1\,,\quad \tfrac{1}{3}r_2 d\sigma_2\,,\quad \tfrac{1}{3}r_3 d\sigma_3\,,\;\ldots\,.$$

oder

$$\pm\tfrac{1}{3}r_1\,ds_1\cos MQ_1\,,\quad \mp\tfrac{1}{3}r_2\,ds_2\cos MQ_2\,,\quad \pm\tfrac{1}{3}r_3\,ds_3\cos MQ_3 \text{ etc.},$$

wobei die oberen oder unteren Zeichen gelten, je nachdem M ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegt. Im ersten Falle aber gehören dem Innenraum des Körpers die Theile des Kegels von P_1 bis P_2, von P_3 bis P_4 etc. an, im zweiten Falle dagegen die Theile des Kegels von M bis P_1, von P_2 bis P_3 etc. In beiden Fällen wird daher der Theil des Körpers, der innerhalb des über der Basis $d\Sigma$ construirten Kegels liegt,

$$= -\tfrac{1}{3}\{r_1 ds_1 \cos MQ_1 + r_2\,ds_2 \cos MQ_2 + r_3\,ds_3 \cos MQ_3 + \cdots\}.$$

Verfährt man mit allen Elementen $d\Sigma$ ebenso und summirt, so ergiebt sich als Resultat: [10]

Satz V.

Das Volumen eines Körpers ist gleich dem über die ganze Oberfläche desselben erstreckten Integral

$$-\tfrac{1}{3}\int r\,ds \cos MQ\,.$$

8.

Wir wollen weiter annehmen, dass der Körper gleichförmige Dichtigkeit besitzt, und dass seine einzelnen Elemente auf den Punkt M eine Anziehung ausüben, die irgend einer Function der Entfernung proportional ist, so dass, wenn ϱ den Abstand eines Elements von dem angezogenen Punkte bezeichnet, die Anziehung ausgedrückt wird durch das Volumenelement, multiplicirt mit $f(\varrho)$. Wir denken uns zunächst unsern Kegel, der über der Basis $d\Sigma$ liegt, ganz mit Masse gefüllt und durch unendlich nahe Kugelflächen, die um M als Mittelpunkt beschrieben sind, in unendlich kleine Theile getheilt. Liegt ein solches Element an der Kugel, deren Radius $=\varrho$ ist, so ist sein Volumen $\varrho^2 d\varrho . d\Sigma$ und daher die Kraft, mit der es auf M wirkt, $d\Sigma . \varrho^2 f(\varrho) d\varrho$. Setzt man noch

$$\int \varrho^2 f(\varrho)\,d\varrho = \Phi(\varrho)\,,$$

so erkennt man, dass

$$d\Sigma[\Phi(\varrho) - \Phi(0)]$$

die Anziehung desjenigen Theiles des Kegels ausdrückt, der vom Scheitel bis zum Abstand ϱ von M reicht, oder dass allgemeiner

$$d\Sigma[\Phi(\varrho') - \Phi(\varrho)]$$

die Anziehung eines Stückes des Kegels darstellt, dessen Endflächen die Abstände ϱ und ϱ' vom Scheitel haben. Von allen Theilen unseres Körpers, die innerhalb des Kegels liegen, wird daher der Punkt M in der Richtung $M\Pi$ angezogen mit einer Kraft, die gleich

$$d\Sigma[-\Phi(r_1) + \Phi(r_2) - \Phi(r_3) + \cdots]$$

wird, falls M ausserhalb des Körpers liegt, die dagegen gleich

$$d\Sigma[-\Phi(0) + \Phi(r_1) - \Phi(r_2) + \Phi(r_3) - \cdots]$$

ist, wenn M innerhalb des Körpers liegt. Diese Kraft lässt sich auch folgendermaassen ausdrücken:
im ersten Falle ist dieselbe

$$= -\frac{ds_1\,\Phi(r_1)\cos MQ_1}{r_1{}^2} - \frac{ds_2\,\Phi(r_2)\cos MQ_2}{r_2{}^2} - \frac{ds_3\,\Phi(r_3)\cos MQ_3}{r_3{}^2} - \cdots,$$

während im zweiten Falle zu dem vorstehenden Ausdruck noch das Glied

$$-d\Sigma.\Phi(0)$$

hinzukommt. [11] Multipliciren wir den eben gefundenen Ausdruck mit $\cos MX$, so erhalten wir die Kraft, mit welcher die innerhalb des Kegels gelegenen Theile des Körpers den Punkt in der der Coordinatenaxe x parallelen und entgegengesetzten Richtung anziehen. Daher wird die Kraft, mit welcher der ganze Körper in derselben Richtung wirkt, ausgedrückt durch das über die gesammte Oberfläche des Körpers erstreckte Integral

$$-\int\frac{ds\,\Phi(r)\cos MQ\cos MX}{r^2},$$

falls der angezogene Punkt ausserhalb des Körpers liegt; wenn dagegen M innerhalb des Körpers liegt, muss man zu obigem Ausdruck noch das über die ganze Kugelfläche erstreckte Integral

$$-\Phi(0).\int d\Sigma \cos MX$$

hinzufügen. Man sieht ferner ohne weiteres, dass in dem Falle, wo M auf der Oberfläche des Körpers liegt, zwar dasselbe Integral

$$-\Phi(0).\int d\Sigma \cos MX$$

hinzuzufügen ist, dass aber dieses Integral jetzt nur über die halbe Oberfläche jener Kugel zu erstrecken ist, und zwar über diejenige Halbkugel, welche von der die Oberfläche des Körpers in M berührenden Ebene begrenzt wird und auf derselben Seite dieser Ebene liegt wie der Innenraum des Körpers am Punkte M. Um den Werth des letzterwähnten Integrals zu bestimmen, betrachten wir den von jener Halbkugel und der Tangentialebene begrenzten Raum. Es bezeichne θ den Winkel, den eine beliebige zur Oberfläche dieses Raumes senkrechte und zwar nach aussen gerichtete Linie mit einer zur Coordinatenaxe x parallelen Geraden bildet. Dann verschwindet nach dem ersten Satze das über die ganze Oberfläche unseres Raumes erstreckte Integral $\int ds \,.\cos\theta$. Wird daher das nur über den ebenen Theil der Oberfläche erstreckte Integral mit J bezeichnet, so muss das über den krummen Theil der Oberfläche erstreckte Integral $-J$ sein. Für den krummen Theil fällt aber ds mit unserm $d\Sigma$ zusammen, während $\theta = 180^0 - MX$ wird. Daraus folgt, dass $-\int d\Sigma \cos MX$, über die Halbkugel erstreckt, $= -J$ wird. In dem ebenen Theil der Fläche ist ferner θ constant und gleich dem Werthe von QX im Punkte M, so dass J gleich wird dem Producte aus dem Cosinus dieses Winkels und dem Flächeninhalt des ebenen Flächenstücks, der $= \pi$ ist. Daraus folgt, dass das über die oben definirte Halbkugel zu erstreckende Integral

$$-\Phi(0)\int d\Sigma \cos MX = -\pi\,\Phi(0)\cos QX$$

ist, falls für QX der Werth dieses Winkels im Punkte M genommen wird. Ganz ebenso findet man für das über die andere [12] Halbkugel erstreckte Integral den folgenden Werth

$$-\Phi(0)\int d\Sigma \cos MX = +\pi\,\Phi(0)\cos QX,$$

so dass das über die ganze Kugelfläche ausgedehnte Integral gleich Null wird. Aus alle dem folgt das Resultat:

Satz VI.

Die der Coordinatenaxe x parallele, aber entgegengesetzt gerichtete Anziehung eines Körpers auf einen Punkt M wird dargestellt durch das über die ganze Oberfläche des Körpers zu erstreckende Integral

$$-\int \frac{ds\,\Phi(r) \cos MQ \cos MX}{r^2},$$

mag M ausserhalb oder innerhalb des Körpers liegen. Doch ist zu obigem Ausdruck noch das Glied

$$-\pi\,\Phi(0) \cos QX$$

hinzuzufügen, falls M auf der Oberfläche selbst liegt; dabei ist für QX der bestimmte Werth zu nehmen, den jener Winkel in M hat.

Ganz ebenso kann man die Theilkräfte, welche in den zu den Coordinatenaxen y, z parallelen und ihren entgegengesetzten Richtungen wirksam sind, durch die Integrale

$$-\int \frac{ds\,\Phi(r) \cos MQ \cos MY}{r^2}, \quad -\int \frac{ds\,\Phi(r) \cos MQ \cos MZ}{r^2}$$

ausdrücken; doch sind, falls M auf der Oberfläche des Körpers liegt, noch die Glieder

$$-\pi\,\Phi(0) \cos QY \quad \text{resp.} \quad -\pi\,\Phi(0) \cos QZ$$

hinzufügen und dabei für die Winkel die Werthe zu nehmen, welche sie im Punkte M haben.

Uebrigens ist leicht ersichtlich, dass die drei Kräfte

$$-\pi\,\Phi(0) \cos QX, \quad -\pi\,\Phi(0) \cos QY, \quad -\pi\,\Phi(0) \cos QZ$$

einer einzigen Kraft äquivalent sind, die $= -\pi\,\Phi(0)$, die ferner auf der Oberfläche senkrecht steht und nach innen gerichtet ist.

Offenbar würde die Entwickelung des Integrals

$$-\Phi(0).\int d\Sigma \cos MX$$

unnöthig gewesen sein, wenn die Function f so beschaffen ist, dass man $\Phi(0) = 0$ setzen kann; doch haben wir es vorgezogen, die Untersuchung ganz allgemein durchzuführen. Sobald man aber annimmt, dass die Anziehung der dritten oder einer höheren Potenz des Abstandes umgekehrt proportional ist, sieht man, dass man das in Rede stehende Glied nicht fortlassen kann, dass vielmehr $\Phi(0) = \infty$ wird. Daraus folgt, dass bei einer solchen Annahme ein auf der Oberfläche des Körpers gelegener Punkt mit einer unendlich grossen Kraft an den Körper gepresst wird.

9.

[**13**] Durch die bisher entwickelten Methoden haben wir Integrale, die über das ganze Volumen eines Körpers zu erstrecken gewesen wären (dreifache Integrale), auf solche reducirt, die nur über die Oberfläche jenes Körpers auszudehnen sind; und diese Reduction ist auf doppelte Weise bewerkstelligt. Nun kann man eine Fläche analytisch durch eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z ausdrücken, d. h. durch eine Gleichung $W = 0$, falls W eine Function der drei Variabeln x, y, z bezeichnet; wir können diese Function als von jeder Irrationalität frei annehmen. Die Differentiation von W möge ergeben

$$dW = Tdx + Udy + Vdz;$$

dann sind T, U, V proportional den Cosinus der Winkel, welche eine auf der Oberfläche senkrechte Gerade mit Linien bildet, die den Coordinatenaxen parallel sind, d. h. der Winkel QX, QY, QZ. Daraus folgt, dass

$$\cos QX = \frac{\pm T}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}},$$
$$\cos QY = \frac{\pm U}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}},$$
$$\cos QZ = \frac{\pm V}{\sqrt{T^2 + U^2 + V^2}}$$

ist; aber es bleibt noch zweifelhaft, ob die oberen oder unteren Zeichen zu nehmen sind. Um dies zu entscheiden, nehmen wir auf der Geraden PQ, die in P auf der Oberfläche senkrecht steht und nach aussen gerichtet ist, einen Punkt P' an, der dem Punkte P unendlich nahe liegt und von ihm den Abstand $PP' = dw$ hat. Dann werden die Coordinaten des Punktes P' resp.

$$x + dw \,.\, \cos QX = x + dx,$$
$$y + dw \,.\, \cos QY = y + dy,$$
$$z + dw \,.\, \cos QZ = z + dz,$$

und daher wird der Zuwachs, den der Werth der Function W vom Punkte P (wo er $= 0$ ist) bis zum Punkte P' erhält, [**14**]

$$= dw \,.\, (T \cos QX + U \cos QY + V \cos QZ)$$
$$= \pm\, dw \,.\, \sqrt{T^2 + U^2 + V^2}.$$

Daraus erkennt man, dass die oberen Zeichen gelten, wenn die Function W einen positiven Werth annimmt, sobald man sich vom Innenraum des Körpers entfernt, und demgemäss einen negativen, wenn man in den Innenraum hineingeht; dass aber im entgegengesetzten Falle die unteren Zeichen gelten. Da nun unsere Oberfläche einerseits den Innenraum des Körpers von dem übrigen Raume trennt, andrerseits aber die Theile des Raumes, in denen W einen positiven Werth hat, von denen scheidet, für welche der Werth der Function W negativ ist, so wird, allgemein zu reden, entweder der Werth der Function W ausserhalb des Körpers positiv, innerhalb negativ sein, und dann sind die oberen Zeichen zu nehmen; oder die Function W wird ausserhalb des Körpers negativ, innerhalb positiv, und dann gelten die unteren Zeichen.

Die Cosinus der übrigen Winkel, die in unsern Formeln auftreten, kann man noch leichter entwickeln. Es ist nämlich

$$a = x + r \cos MX, \quad b = y + r \cos MY, \quad c = z + r \cos MZ,$$

daher

$$r = \sqrt{(a - x)^2 + (b - y)^2 + (c - z)^2},$$

$$\cos MX = \frac{a - x}{r}, \quad \cos MY = \frac{b - y}{r}, \quad \cos MZ = \frac{c - z}{r}.$$

Endlich wird nach einem sehr bekannten Satze

$$\cos MQ = \cos MX \,.\, \cos QX + \cos MY \,.\, \cos QY + \cos MZ \,.\, \cos QZ$$

oder

$$\cos MQ = \pm \frac{T(a - x) + U(b - y) + V(c - z)}{r\sqrt{U^2 + V^2 + W^2}}.$$

10.

[**15**] Um ferner die obigen Oberflächenintegrale zu ermitteln, ist es nöthig, die zu integrirenden Differentialausdrücke so zu transformiren, dass sie nur zwei Variable enthalten. Dies kann zwar dadurch geschehen, dass man eine der Variabeln x, y, z mittels der Gleichung $W = 0$ eliminirt; aber meistentheils werden die so gewonnenen Formeln zu wenig geschmeidig. Besser ist es, zwei neue Variable p, q einzuführen derart, dass sowohl x, als y, als z als Functionen dieser Variabeln zu betrachten sind.

Sobald man den Grössen p, q bestimmte Werthe beilegt, sind auch x, y, z bestimmt; d. h. zu jenen Werthen gehört ein bestimmter Punkt der Oberfläche des Körpers. Diese gegenseitige Beziehung tritt noch klarer vor Augen, wenn wir uns eine unbegrenzte Ebene denken, deren einzelne Punkte durch die rechtwinkligen Coordinaten p, q bestimmt werden. Jedem Punkte der Ebene entspricht dann ein Punkt auf der Oberfläche des Körpers, und zwar nur einer, wenn die Beziehung eine derartige ist, dass x, y, z eindeutige Functionen der Variabeln p, q sind. Wenn auch umgekehrt durch x, y, z die Grössen p, q völlig eindeutig bestimmt sind, so wird jedem Punkte der Oberfläche des Körpers nur e i n Punkt der Ebene entsprechen; und die Ebene muss in diesem Falle allseitig ins Unendliche ausgedehnt werden, wenn man die ganze Oberfläche des Körpers erhalten will. In anderen Fällen ist es nur nöthig, einen Theil der Ebene zu betrachten, der entweder ganz im Endlichen liegt oder sich ins Unendliche erstreckt; und dieser Theil wird dann gewissermaassen ein Bild der Oberfläche des Körpers darstellen.

Wir denken uns nun die Ebene durch unendlich viele Linien, die theils der Abscissenaxe parallel sind, theils auf derselben senkrecht stehen, in Elementarrechtecke zerlegt. Ein derartiges Element, dessen Eckpunkte die Coordinaten

$$p, q\,;\; p+dp, q\,;\; p, q+dq\,;\; p+dp,\; q+dq$$

besitzen, hat den Flächeninhalt $dp\,.\,dq$. Dies Element entspricht einem parallelogrammförmigen Elemente [**16**] auf der Oberfläche des Körpers, dessen vier Eckpunkte die Coordinaten haben:

$$\begin{array}{lllll}
\text{I.} & x, & y, & z; \\
\text{II.} & x+\lambda dp, & y+\mu dp, & z+\nu dp; \\
\text{III.} & x+\lambda' dq, & y+\mu' dq, & z+\nu' dq; \\
\text{IV.} & x+\lambda dp+\lambda' dq, & y+\mu dp+\mu' dq, & z+\nu dp+\nu' dq,
\end{array}$$

falls wir annehmen, dass

$$dx = \lambda dp + \lambda' dq\,,\quad dy = \mu dp + \mu' dq\,,\quad dz = \nu dp + \nu' dq$$

sei. Die Projectionen des zuletzt erwähnten Flächenelements, welches wir mit ds bezeichnen wollen, auf drei zu den Coordinatenaxen x, y, z senkrechte Ebenen sind, wie man leicht findet, resp. gleich

$$\pm(\mu\nu' - \nu\mu')dp\,dq,\quad \pm(\nu\lambda' - \lambda\nu')dp\,dq,\quad \pm(\lambda\mu' - \mu\lambda')dp\,dq;$$

und daher ist nach einem allbekannten Satze der Flächeninhalt des Elements selbst

$$ds = dp\,dq \cdot \sqrt{(\mu\nu' - \nu\mu')^2 + (\nu\lambda' - \lambda\nu')^2 + (\lambda\mu' - \mu\lambda')^2}.$$

Hieraus ist ersichtlich, dass die einzelnen Integrale, die in unsern sechs Sätzen vorkommen, sich auf die Form

$$\int S\,dp\,dq$$

bringen lassen, wo S explicite oder implicite eine Function der beiden Variabeln p, q ist; und dass ferner die Integration entweder über die ganze unendliche Ebene zu erstrecken ist oder über den Theil der Ebene, auf dem die ganze Oberfläche unseres Körpers gleichsam abgebildet ist. Zur Ausführung der Integration selbst bedarf es bald dieses, bald jenes Kunstgriffs; darüber lassen sich allgemeine Regeln nicht aufstellen.

Uebrigens ist noch zu bemerken, dass, wenn man die Werthe für x, y, z, durch p und q ausgedrückt, substituirt, die Function W nothwendig identisch gleich Null werden muss, dass daher auch identisch, d. h. unabhängig von den Werthen von dp und dq, die Gleichung erfüllt werden muss:

$$0 = (\lambda T + \mu U + \nu V)\,dp + (\lambda' T + \mu' U + \nu' V)\,dq\,.$$

Dazu ist erforderlich, dass [**17**]

$$\begin{aligned} \lambda T + \mu U + \nu V &= 0\,, \\ \lambda' T + \mu' U + \nu' V &= 0 \end{aligned}$$

ist. Daraus folgt, dass die Grössen $\mu\nu' - \nu\mu'$, $\nu\lambda' - \lambda\nu'$, $\lambda\mu' - \mu\lambda'$ resp. den Grössen T, U, V oder den Cosinus der Winkel QX, QY, QZ proportional werden. Man hätte dies auch schon aus dem oben Gesagten schliessen können; nur würde dann unentschieden geblieben sein, ob das eine oder das andere Vorzeichen zu nehmen ist.

11.

Nach diesen allgemeinen Untersuchungen wenden wir uns speciell den Körpern zu, durch welche jene Untersuchungen veranlasst sind, nämlich den Ellipsoiden. Wird der Mittelpunkt zum Anfangspunkt der Coordinaten genommen, und werden die Halbaxen mit A, B, C bezeichnet, so ist die Gleichung der Oberfläche

$$\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1\,.$$

Da

$$W=\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}-1$$

ist, so folgt, dass W für alle Punkte innerhalb des Körpers negative, dagegen für Punkte ausserhalb positive Werthe annimmt. Ferner wird

$$T=\frac{2x}{A^2},\quad U=\frac{2y}{B^2},\quad V=\frac{2z}{C^2}\,.$$

Setzt man noch

$$\sqrt{\frac{x^2}{A^4}+\frac{y^2}{B^4}+\frac{z^2}{C^4}}=\psi\,,$$

so wird demnach

$$\cos QX=\frac{x}{\psi.A^2},\quad \cos QY=\frac{y}{\psi.B^2},\quad \cos QZ=\frac{z}{\psi.C^2},$$

$$\cos QM=\frac{1}{\psi r}\left[\frac{(a-x)\,x}{A^2}+\frac{(b-y)\,y}{B^2}+\frac{(c-z)\,z}{C^2}\right].$$

12.

Wir führen nun zwei Hülfsvariable p, q ein derart, dass

$$x=A\cos p\,,\quad y=B\sin p\cos q\,,\quad z=C\sin p\sin q$$

wird. [**18**] Man übersieht leicht, dass sich die ganze Oberfläche des Ellipsoids ergiebt, wenn p von 0 bis 180°, q aber von 0 bis 360° variirt. Ferner hat man

$$\begin{aligned}\lambda\ &=-A\sin p\,, & \mu\ &=\ \ B\cos p\cos q\,, & \nu\ &=C\cos p\sin q\,,\\ \lambda'&=0\,, & \mu'&=-B\sin p\sin q\,, & \nu'&=C\sin p\cos q\,;\end{aligned}$$

$$\mu\nu' - \nu\mu' = BC \cos p \sin p = ABC \sin p \cdot \frac{x}{A^2},$$

$$\nu\lambda' - \lambda\nu' = AC \sin^2 p \cos q = ABC \sin p \cdot \frac{y}{B^2},$$

$$\lambda\mu' - \mu\lambda' = AB \sin^2 p \sin q = ABC \sin p \cdot \frac{z}{C^2}.$$

Da nun $\sin p$ innerhalb der oben festgesetzten Grenzen überall eine positive Grösse ist, so ist zu setzen

$$ds = dp\, dq\, ABC\, \psi \sin p.$$

Wendet man diese Formeln auf den zweiten Satz an, so wird das Volumen oder (wenn man die Dichtigkeit $= 1$ annimmt) die Masse des Körpers

$$= \iint dp\, dq\, ABC \cos^2 p \sin p,$$

also, wenn man zuerst nach q integrirt,

$$= 2\pi \int dp\, ABC \cos^2 p \sin p = \tfrac{1}{2}\pi\, ABC \int dp (\sin p + \sin 3p),$$

und dies Integral ist zwischen den Grenzen $p = 0$ und $p = 180^\circ$ zu nehmen. Daraus ergiebt sich das bekannte Resultat, dass die Masse $= \frac{4}{3}\pi\, ABC$ ist.

13.

Um die Anziehung zu bestimmen, welche das Ellipsoid auf irgend einen Punkt ausübt, falls die Anziehung jedes Elements als dem Quadrate des Abstandes vom angezogenen Punkte umgekehrt proportional vorausgesetzt wird, hat man

$$f(r) = \frac{1}{r^2}, \quad F(r) = -\frac{1}{r}, \quad \Phi(r) = r.$$

Es sei X die der Coordinatenaxe x parallele, aber zu ihr entgegengesetzt gerichtete Componente der Anziehung des Ellipsoids, und es werde

$$X = ABC.\xi$$

gesetzt. Dann ist nach Satz III

$$X = \iint dp\, dq \frac{BCx \sin p}{rA} = \iint dp\, dq \frac{BC \cos p \sin p}{r}$$

[**19**] und daher

$$1) \qquad \xi = \iint \frac{dp\, dq \cos p \sin p}{A r}.$$

Ferner erhalten wir aus Satz VI

$$2) \quad \xi = -\iint \frac{dp\, dq \sin p}{r^3} (a-x)\left[\frac{(a-x)x}{A^2} + \frac{(b-y)y}{B^2} + \frac{(c-z)z}{C^2}\right].$$

Endlich giebt uns Satz IV

$$3) \quad \iint \frac{dp\, dq \sin p}{r^3} \left[\frac{(a-x)x}{A^2} + \frac{(b-y)y}{B^2} + \frac{(c-z)z}{C^2}\right] = 0$$

$$\text{oder} \quad = -\frac{4\pi}{ABC},$$

je nachdem der Punkt M ausserhalb oder innerhalb des Ellipsoids liegt.

Wir betrachten nun die Grössen A, B, C als besondere Werthe von drei Veränderlichen α, β, γ, die jedoch so beschaffen sind, dass $\alpha^2 - \beta^2$ und $\alpha^2 - \gamma^2$ constant sind. Dann kann ξ als eine Function der Variabeln α, β, γ oder vielmehr einer von ihnen angesehen werden. Die gleichzeitigen Variationen der Grössen ξ, α, β, γ wollen wir durch den Buchstaben δ bezeichnen. Aus der Gleichung 1) folgt sofort, dass, wenn α, β, γ ins Unendliche wachsen, ξ über alle Grenzen abnimmt, da dann offenbar auch der kleinste Werth von r über alle Grenzen wächst. Es wird also $\xi = 0$ für $\alpha = \infty$. Man bringe nun die Gleichung (1) auf die Form

$$\alpha \xi = \iint \frac{dp\, dq \cos p \sin p}{r}$$

und führe dann die durch das Zeichen δ ausgedrückte Differentiation aus, so ergiebt sich

$$\alpha\, \delta\xi + \xi . \delta\alpha = -\iint \frac{dp\, dq \cos p \sin p . \delta r}{r^2}.$$

Es ist aber

$$r.\delta r = -(a-x)\delta x - (b-y)\delta y - (c-z)\delta z$$
$$= -(a-x)\cos p.\delta\alpha - (b-y)\sin p\cos q.\delta\beta - (c-z)\sin p\sin q.\delta\gamma$$
$$= -(a-x)x\cdot\frac{\delta\alpha}{\alpha} - (b-y)y\cdot\frac{\delta\beta}{\beta} - (c-z)z\cdot\frac{\delta\gamma}{\gamma}$$
$$= -\alpha.\delta\alpha.\left[\frac{(a-x)x}{\alpha^2} + \frac{(b-y)y}{\beta^2} + \frac{(c-z)z}{\gamma^2}\right],$$

[20] da

$$\alpha.\delta\alpha - \beta.\delta\beta = 0\,,\quad \alpha.\delta\alpha - \gamma.\delta\gamma = 0$$

ist. Daher wird

$$\alpha.\delta\xi + \xi.\delta\alpha = \delta\alpha.\iint\frac{dp\,dq\,x\sin p}{r^3}\left[\frac{(a-x)x}{\alpha^2} + \frac{(b-y)y}{\beta^2} + \frac{(c-z)z}{\gamma^2}\right].$$

Zieht man von dieser Gleichung die Gleichung (2) ab, nachdem man sie mit $\delta\alpha$ multiplicirt und darin A, B, C mit α, β, γ vertauscht hat, so wird

$$\alpha.\delta\xi = \delta\alpha.\iint\frac{dp\,dq\,.\,a\sin p}{r^3}\left[\frac{(a-x)x}{\alpha^2} + \frac{(b-y)y}{\beta^2} + \frac{(c-z)z}{\gamma^2}\right].$$

Die rechte Seite der letzten Gleichung wird nach Gleichung (3) entweder $=0$ oder $=-\dfrac{4\pi a.\delta\alpha}{\alpha\beta\gamma}$, je nachdem M ausserhalb oder innerhalb des Ellipsoids liegt. Es wird daher im ersten Falle

$$(4)\qquad \delta\xi = 0\,,$$

im zweiten aber

$$(5)\qquad \delta\xi = -\frac{4\pi a.\delta\alpha}{\alpha^2\beta\gamma}.$$

Die Gleichung (4) lässt unmittelbar erkennen, dass ξ constant, oder dass die Anziehungscomponente X der Masse proportional ist für alle Ellipsoide, bei denen $\alpha^2 - \beta^2$ und $\alpha^2 - \gamma^2$ constante Grössen sind, d. h. für alle, deren drei Hauptschnitte Ellipsen mit denselben Brennpunkten sind, jedoch nur, so lange der angezogene Punkt ausserhalb des Ellipsoids liegt. Da dieser Schluss in aller Strenge richtig bleibt, wie nahe auch die Oberfläche des Ellipsoids dem angezogenen Punkte kommt, so gilt derselbe nothwendig auch noch für das Ellipsoid, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt selbst geht.

Damit ist die Aufgabe, die Anziehung eines Ellipsoids auf einen äusseren Punkt zu bestimmen, auf zwei andere Aufgaben zurückgeführt, nämlich erstens auf die Bestimmung der Axen eines anderen Ellipsoids, das dieselben Brennpunkte besitzt wie das gegebene und durch den angezogenen Punkt hindurchgeht, und zweitens auf die Berechnung der Anziehung eines Ellipsoids für einen auf seiner Oberfläche gelegenen Punkt. Die erste dieser Aufgaben hängt von der Lösung einer kubischen Gleichung ab, von der sich leicht zeigen lässt, dass sie stets eine einzige reelle Wurzel [**21**] besitzt; bei dieser Aufgabe zu verweilen, dürfte überflüssig sein. Um aber die zweite Aufgabe zu lösen, betrachten wir den zweiten der obigen Fälle, in welchem der angezogene Punkt innerhalb des anziehenden Körpers liegt. Da

$$\beta^2 = \alpha^2 + B^2 - A^2, \quad \gamma^2 = \alpha^2 + C^2 - A^2$$

ist, so substituire man diese Werthe in (5) und setze zugleich $\dfrac{A}{\alpha} = t$. Dann folgt

$$\delta\xi = \frac{4\,a\pi\, t^2 \delta t}{A^3 \sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right) t^2\right]\left[1 - \left(1 - \frac{C^2}{A^2}\right) t^2\right]}}$$

oder, wenn man als Differentiationszeichen den Buchstaben d anwendet und integrirt:

$$\xi = \frac{4\,a\pi}{A^3} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right) t^2\right]\left[1 - \left(1 - \frac{C^2}{A^2}\right) t^2\right]}};$$

und dies Integral ist zwischen solchen Grenzen zu nehmen, dass es für $t = 0$ verschwindet und für das bestimmte Ellipsoid, dessen Axen A, B, C sind, bis $t = 1$ zu erstrecken ist. Wir haben daher

$$(6)\quad X = \frac{4\,a\pi BC}{A^2} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{\left[1 - \left(1 - \frac{B^2}{A^2}\right) t^2\right]\left[1 - \left(1 - \frac{C^2}{A^2}\right) t^2\right]}},$$

wobei das Integral zwischen den Grenzen $t = 0$ und $t = 1$ zu nehmen ist. Offenbar ergeben sich die den Axen y, z parallelen

Anziehungscomponenten hieraus unmittelbar, wenn man a, A mit b, B, resp. mit c, C vertauscht.

Die letzte Formel ergiebt die Anziehung für alle Punkte innerhalb des Ellipsoids, und da sie streng richtig ist, wie nahe auch der angezogene Punkt der Oberfläche des Ellipsoids liegt, so gilt sie auch noch für Punkte, die auf der Oberfläche liegen. Die Anziehung für äussere Punkte aber ist bereits auf die für Punkte der Oberfläche zurückgeführt; und daher ist unsere Aufgabe nunmehr vollständig gelöst.

Die Gleichung (6) lehrt ausserdem, dass alle ähnlichen und ähnlich liegenden Ellipsoide auf einen und denselben inneren Punkt genau die gleiche Anziehung ausüben. Denkt man sich daher ein solches Ellipsoid in mehrere Schalen [**22**] getheilt, deren innere und äussere Grenzflächen zur Oberfläche des gegebenen Ellipsoids ähnlich und ähnlich liegend sind, so tragen nach dem Obigen die einzelnen Schalen, welche den Punkt umhüllen, zu der Anziehung, welche dieser Punkt erleidet, nichts bei. Es bleibt also nur die Anziehung des inneren Kerns übrig, dessen Oberfläche durch den angezogenen Punkt geht.

14.

In Betreff des in Formel (6) auftretenden Integrals bedarf es keiner ausführlichen Erörterung. Bekanntlich hängt dasselbe von höheren Transcendenten als Kreisbogen und Logarithmen ab, wenn alle drei Halbaxen A, B, C ungleich sind; in diesem Falle muss man daher seine Zuflucht zu Reihen nehmen. Dieselben convergiren um so schneller, je weniger das Ellipsoid von der Kugel abweicht. Wenn aber zwei der Grössen A, B, C gleich sind, z. B. $A = B$, in welchem Falle das Ellipsoid durch Rotation einer Ellipse um die Axe $2C$ entstanden ist, so wird

$$X = \frac{4\pi a C}{A} \int \frac{t^2 dt}{\sqrt{1 - \left(1 - \frac{C^2}{A^2}\right) t^2}} = \frac{2\pi a \cos\varphi}{\sin^3\varphi} (\varphi - \tfrac{1}{2} \sin 2\varphi),$$

wenn $C < A$ angenommen und

$$\frac{C}{A} = \cos\varphi \quad \text{oder} \quad \sqrt{1 - \frac{C^2}{A^2}} = \sin\varphi$$

gesetzt wird. Falls aber $C > A$ ist, so wird

$$X = \frac{2\pi a C^2}{C^2 - A^2} - \frac{2\pi a A^2 C}{(C^2 - A^2)^{\frac{3}{2}}} \lg \frac{C + \sqrt{C^2 - A^2}}{A}.$$

Die Anziehung in der zur Axe y parallelen und entgegengesetzten Richtung ergiebt sich, wenn man in diesen Formeln a mit b vertauscht. Daraus folgt, dass die beiden bisher betrachteten Theilkräfte einer einzigen Kraft äquivalent sind, deren Richtung auf der Axe $2C$ senkrecht steht, und deren Intensität man erhält, wenn man in der eben abgeleiteten Formel an Stelle von a den Abstand des angezogenen Punktes von dieser Axe setzt.

[**23**] Endlich ist die der Axe z parallele und entgegengesetzt gerichtete Anziehungscomponente für den Fall $B = A$

$$= \frac{4 c\pi A^2}{C^2} \int \frac{t^2 dt}{1 - \left(1 - \frac{A^2}{C^2}\right) t^2}.$$

Daraus folgt, falls $C < A$ ist und man, wie oben, $\frac{C}{A} = \cos\varphi$ setzt, der Werth

$$\frac{4\pi c \cos\varphi}{\sin^3\varphi} (\operatorname{tg}\varphi - \varphi);$$

falls aber $C > A$ ist, ergiebt sich

$$\frac{4\pi c A^2 C}{(C^2 - A^2)^{\frac{3}{2}}} \lg \frac{C + \sqrt{C^2 - A^2}}{A} - \frac{4\pi c A^2}{C^2 - A^2}.$$

Wenn endlich alle drei Grössen A, B, C einander gleich sind, d. h. wenn der anziehende Körper eine Kugel ist, so werden die Anziehungen nach den drei Hauptrichtungen

$$\tfrac{4}{3}\pi a, \quad \tfrac{4}{3}\pi b, \quad \tfrac{4}{3}\pi c;$$

d. h. sie sind identisch mit den Kräften, welche die durch den angezogenen Punkt gelegte, zur gegebenen concentrische Kugel auf diesen Punkt ausüben würde, falls ihre Masse im Mittelpunkte concentrirt wäre. Daraus folgt von selbst, dass Punkte ausserhalb der Kugel ebenso angezogen werden, als wenn sich die ganze Masse der anziehenden Kugel im Mittelpunkte befände, was zuerst *Newton* gezeigt hat.

Zusatz.

Als die vorstehende Abhandlung schon niedergeschrieben war, lernte ich, von *Laplace* aufmerksam gemacht, eine vortreffliche Abhandlung von *Ivory* in den Philosophical Transactions für das Jahr 1809 kennen; darin ist derselbe Gegenstand nach einer Methode behandelt, die von der von *Laplace* und *Legendre* benutzten ganz verschieden ist. Mit grosser Eleganz zeigt jener Geometer, wie die Anziehung eines äusseren Punktes auf die eines inneren, d. h. der Theil der Aufgabe, der immer für den schwierigeren galt, auf den leichteren zurückgeführt werden kann. Die Methode indessen, nach der er diesen zweiten Theil behandelt, ist recht complicirt [**24**] und beruht zum Theil, ebenso wie die von *Laplace* für äussere Punkte benutzte Methode, auf Betrachtungen von unendlichen Reihen, die nicht immer convergiren; und das hätte schlechterdings vermieden werden müssen. Uebrigens wird man bei genauerer Prüfung finden, dass diese Lösung von *Ivory*, die, oberflächlich betrachtet, eine gewisse Aehnlichkeit mit der hier gegebenen zu haben scheint, auf völlig verschiedener Grundlage beruht, und dass beide Lösungen fast nichts gemeinsam haben als die Benutzung der Variabeln, die oben mit p und q bezeichnet sind.

Abhandlung von Gauss.

Die Arbeit ist in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. II, 1813, erschienen und im fünften Bande von *Gauss*' Werken (Göttingen 1867) wieder abgedruckt. Die der Uebersetzung beigefügten Zahlen sind die Seitenzahlen der Originalarbeit. Eine Anzeige, die den Gedankengang der Arbeit kurz skizzirt, hat *Gauss* in den Göttinger Gelehrten Anzeigen vom 5. April 1813 veröffentlicht (vergl. *Gauss*' Werke V p. 279).

S. 58 Satz IV. In Artikel 22 der allgemeinen Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungskräfte (*Ostwald*'s Klassiker Nr. 2) bemerkt *Gauss*, dass der Theil des Satzes IV, der sich auf den Fall eines in der Fläche liegenden Punktes bezieht, nur insofern richtig ist, als die Stetigkeit der Krümmung in dem Punkte nicht verletzt wird. Dieselbe Bemerkung ist in Betreff des analogen Falles von Satz VI (S. 61) zu machen.

S. 67 Art. 12. Die Variabeln p, q bezeichnet man als *Ivory*'sche Variable.

S. 69 Art. 13. In der Einführung der variabeln Axen α, β, γ, d. h. in der Vergleichung confocaler Ellipsoide, liegt ein Kunstgriff, auf den man nur geführt wird, wenn man den *MacLaurin*'schen Satz (das Resultat am Schluss von S. 70) kennt.

S. 72. Dass das Schlussresultat von Art. 13 der *Newton*'sche Satz genannt wird, ist schon oben bemerkt.

In einer handschriftlichen Bemerkung, die in Band V von *Gauss*' Werken S. 285—286 abgedruckt ist, bemerkt *Gauss*, dass man durch eine der hier vorgetragenen ähnliche Methode auch das Potential V bestimmen kann, d. i. die Summe aller Theilchen des Ellipsoids, jedes mit seinem Abstande vom angezogenen Punkte dividirt.

Abhandlung von Chasles.

Die Arbeit ist zuerst in den Comptes rendus VI p. 902—915 (1838), sodann nochmals in *Liouville*'s Journal de Mathémat. V p. 465—488 (1840) veröffentlicht. Beide Veröffentlichungen stimmen zum grossen Theile wörtlich überein; nur ist in der zweiten die Einleitung sowie eine grössere Zahl von erklärenden Anmerkungen und Zusätzen neu hinzugefügt, endlich der

6. Neue Methode zur näherungsweisen Auffindung von Integralwerten

In: Newton, Cotes, Gauß, Jacobi. Vier grundlegende Abhandlungen über Interpolation und genäherte Quadratur (1711, 1722, 1814, 1826). Übersetzt und hrsg. von Arnold Kowalewski, Leipzig 1917, S. 26–68.

Original:
Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 3, (1814–1815) 1816, commentationes classis mathematicae, S. 39–76. In: Gauß Werke 3, S. 163–196.

Neue Methode zur näherungsweisen Auffindung von Integralwerten.

(Von Carl Friedrich Gauss, 1814.)

1.

Unter den zur näherungsweisen numerischen Bestimmung von Integralen vorgeschlagenen Methoden behaupten einen ausgezeichneten Platz die Regeln, welche, nach dem Vorgange des großen Newton, Cotes entwickelt hat. In der Tat, wenn man den Wert des Integrals

$$\int y\,dx,$$

von $x = g$ bis $x = h$ genommen, sucht, so sind die Werte von y für diese äußersten Werte des x und für beliebige andere in gleichen Zuwüchsen fortschreitende Zwischenwerte mit bestimmten numerischen Koeffizienten zu multiplizieren. Dann wird das Aggregat der Produkte mal $h - g$ das gesuchte Integral mit um so größerer Genauigkeit liefern, je mehr Werte in dieser Operation benutzt werden. Da die Prinzipien dieser Methode, welche die Geometer seltener als recht ist anzuwenden scheinen, meines Wissens nirgends ausführlicher erläutert worden sind, so wird es nicht unangebracht sein, darüber etwas vorauszuschicken.

2.

Es sei $n + 1$ die Menge der Glieder, welche man zu benutzen beliebt hat, und wir wollen $h - g = \Delta$ setzen, so daß die Werte von x folgende sind

$$g, \quad g + \frac{\Delta}{n}, \quad g + \frac{2\Delta}{n}, \quad g + \frac{3\Delta}{n} \quad \text{usw.}$$

bis $g + \Delta$, und denselben folgende Werte von y entsprechen A, A', A'', A''' usw. bis $A^{(n)}$: endlich werde unbestimmt

$$x = g + \Delta t$$

gesetzt, so daß y auch als Funktion von t betrachtet werden kann. Bezeichnen wir mit Y die folgende Funktion [1]

$$
\begin{aligned}
& A \cdot \frac{(nt-1)(nt-2)(nt-3)\ldots(nt-n)}{(-1)\quad(-2)\quad(-3)\quad\ldots\quad(-n)} \\
+ & A' \cdot \frac{nt(nt-2)(nt-3)\ldots(nt-n)}{1\quad(-1)\quad(-2)\quad\ldots\quad(1-n)} \\
+ & A'' \cdot \frac{nt(nt-1)(nt-3)\ldots(nt-n)}{2\quad 1\quad(-1)\quad\ldots\quad(2-n)} \\
+ & A''' \cdot \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n)}{3\quad 2\quad 1\quad\ldots\quad(3-n)} \\
& \text{usw.} \\
+ & A^{(n)} \cdot \frac{nt(nt-1)(nt-2)\ldots(nt-n+1)}{n(n-1)\quad(n-2)\quad\ldots\quad 1}
\end{aligned}
$$

oder

$$\sum \frac{A^{(\mu)}T^{(\mu)}}{M^{(\mu)}},$$

wo, wenn μ die einzelnen ganzen Zahlen 0, 1, 2, 3 ... n repräsentiert,

$$T^{(\mu)} = \frac{nt(nt-1)(nt-2)(nt-3)\ldots(nt-n)}{nt-\mu},$$

$M^{(\mu)}$ der Wert von T für $nt = \mu$,

Dann wird handgreiflich sein, daß Y eine ganze algebraische Funktion $n$ter Ordnung von t bildet und ihre Werte für die einzelnen $n+1$ Werte von t, nämlich $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n} \ldots 1$, den Werten von y gleich sind. Weiter ist offenbar, daß, wenn Y' eine andere ganze Funktion bedeutet, die für dieselben Werte mit y übereinstimmt, $Y' - Y$ für dieselben verschwindet und daher durch die Faktoren $t, t - \frac{1}{n}, t - \frac{2}{n}, t - \frac{3}{n} \ldots t - 1$ teilbar ist und also auch durch deren Produkt (das von der Ordnung $n+1$ ist). Daher muß zweifellos Y', wenn es nicht geradezu mit Y identisch ist, eine höhere Ordnung erreichen oder Y von allen ganzen die Ordnung n nicht überschreitenden Funktionen die einzige sein, die für jene $n+1$ Werte mit y übereinstimmt. Wenn also y, in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe entwickelt, vor dem Gliede, das t^{n+1} enthält, überhaupt abbricht, so wird es mit Y identisch sein: wenn es aber wenigstens so rasch konvergiert, daß man die folgenden Glieder vernachlässigen darf, so wird die Funktion Y innerhalb der Grenzen $t = 0$, $t = 1$ oder $x = g$, $x = h$ die Stelle von y vertreten können.

3.

Nunmehr geht unser Integral

$$\int y\,dx \quad \text{über in} \quad \Delta \int y\,dt,$$

genommen von $t = 0$ bis $t = 1$, wofür wir nach dem soeben Bemerkten

$$\Delta \int Y\,dt$$

einsetzen werden. Durch Entwicklung also von $T^{(\mu)}$ in

$$\alpha t^n + \beta t^{n-1} + \gamma t^{n-2} + \delta t^{n-3} + \text{ usw.}$$

wird

$$\int T^{(\mu)}\,dt,$$

von $t = 0$ bis $t = 1$,

$$= \frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n} + \frac{\gamma}{n-1} + \frac{\delta}{n-2} + \text{ usw.}$$

sein. Wenn man diese Größe $= M^{(\mu)} R^{(\mu)}$ setzt, so wird das gesuchte Integral

$$= \Delta(AR + A'R' + A''R'' + A'''R''' + \text{ usw.} + A^{(n)} R^{(n)})$$

sein.

Wir wollen beispielsweise die Berechnung des Koeffizienten R'' für $n = 5$ hinzufügen. Es ergibt sich hier

$$T'' = 5^5 t^5 - 13 \cdot 5^4 t^4 + 59 \cdot 5^3 t^3 - 107 \cdot 5^2 t^2 + 60 \cdot 5 \cdot t,$$

$$M'' = 2 \times 1 \times (-1) \times (-2) \times (-3) = -12.$$

Daher

$$-12 R'' = \frac{3125}{6} - 1625 + \frac{7375}{4} - \frac{2675}{3} + 150 = -\frac{25}{12},$$

also

$$R'' = \frac{25}{144}.$$

Die Berechnung wird etwas kürzer, wenn man $2t - 1 = u$ setzt. Dann ergibt sich

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu+n)(nu+n-2)(nu+n-4)\ldots(nu-n+4)(nu-n+2)(nu-n)}{2^n(nu+n-2\mu)}.$$

Setzen wir

$$\frac{(n^2u^2 - n^2) \cdot [n^2u^2 - (n-2)^2] \cdot [n^2u^2 - (n-4)^2] \cdot [n^2u^2 - (n-6)^2] \ldots}{n^2u^2 - (n-2\mu)^2} = U^{(\mu)},$$

wo der Zähler aufhören muß mit $\ldots(n^2u^2-9)(n^2u^2-1)$, wenn n ungerade ist, oder mit $\ldots(n^2u^2-4)nu$, wenn n gerade ist, und es wird

$$T^{(\mu)} = \frac{(nu-n+2\mu)\,U^{(\mu)}}{2^n}.$$

Nunmehr ist das Integral

$$\int T^{(\mu)}\,dt,$$

von $t=0$ bis $t=1$ genommen, gleich dem Integral

$$\int \frac{1}{2}T^{(\mu)}\,du = \int \frac{nu\,U^{(\mu)}\,du}{2^{n+1}} + \int \frac{(2\mu-n)\,U^{(\mu)}\,du}{2^{n+1}}$$

von $u=-1$ bis $u=+1$.

Wird daher

$$U^{(\mu)} = \alpha u^{n-1} + \beta u^{n-3} + \gamma u^{n-5} + \delta u^{n-7} + \text{usw.}$$

gesetzt (von selbst ist nämlich klar, daß die Potenzen u^{n-2}, u^{n-4}, u^{n-6} usw. fehlen), so wird von dem Integral der Teil

$$\int \frac{nu\,U^{(\mu)}\,du}{2^{n+1}}$$

für einen ungeraden Wert von n verschwinden, der andere Teil

$$\int \frac{(2\mu-n)\,U^{(\mu)}\,du}{2^{n+1}}$$

dagegen für einen geraden Wert. Also wird das Integral

$$\int T^{(\mu)}\,dt$$

für gerades n

$$= \frac{n}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n+1} + \frac{\beta}{n-1} + \frac{\gamma}{n-3} + \frac{\delta}{n-5} + \text{usw.}\right),$$

für ungerades n aber

$$= \frac{2\mu-n}{2^n}\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{\beta}{n-2} + \frac{\gamma}{n-4} + \frac{\delta}{n-6} + \text{usw.}\right).$$

In unserem Beispiel hat man

$$U'' = (25u^2-25)(25u^2-9) = 625u^4 - 850u^2 + 225$$

und demnach

$$-12R'' = -\frac{1}{32}\left(125 - \frac{850}{3} + 225\right) = -\frac{25}{12},$$

wie oben. Es ist nützlich zu beachten, daß

$$U^{(n-\mu)} = U^{(\mu)}$$

wird, und demnach

$$\int T^{(n-\mu)}\,dt = \pm \int T^{(\mu)}\,dt,$$

wobei das obere Zeichen für gerades n, das untere für ungerades gilt. Da man leicht einsieht, daß ebenso

$$M^{(n-\mu)} = \pm M^{(\mu)},$$

so wird stets

$$R^{(n-\mu)} = R^{(\mu)}$$

sein oder von den Koeffizienten

$$R,\quad R',\quad R'',\quad R''' \;\ldots\; R^{(n)}$$

der letzte dem ersten gleich, der vorletzte dem zweiten und so weiter fort.

4.

Die von Cotes bis zu $n = 10$ berechneten numerischen Werte dieser Koeffizienten schreiben wir aus der Harmonia Mensurarum hierher.

Für $n = 1$ oder zwei Glieder

$$R = R' = \frac{1}{2}\,.$$

Für $n = 2$ oder drei Glieder

$$R = R'' = \frac{1}{6},\quad R' = \frac{2}{3}\,.$$

Für $n = 3$ oder vier Glieder

$$R = R''' = \frac{1}{8},\quad R' = R'' = \frac{3}{8}\,.$$

Für $n = 4$ oder fünf Glieder

$$R = R'''' = \frac{7}{90},\quad R' = R''' = \frac{16}{45},\quad R'' = \frac{2}{15}\,.$$

Für $n = 5$ oder sechs Glieder

$$R = R^{\mathrm{V}} = \frac{19}{288},\quad R' = R'''' = \frac{25}{96},\quad R'' = R''' = \frac{25}{144}$$

Für $n = 6$ oder sieben Glieder

$$R = R^{\mathrm{VI}} = \frac{41}{840},\quad R' = R^{\mathrm{V}} = \frac{9}{35},\quad R'' = R^{\mathrm{IV}} = \frac{9}{280},$$

$$R''' = \frac{34}{105}\,.$$

Für $n = 7$ oder acht Glieder

$$R = R^{\mathrm{VII}} = \frac{751}{17280}, \quad R' = R^{\mathrm{VI}} = \frac{3577}{17280}, \quad R'' = R^{\mathrm{V}} = \frac{49}{640},$$

$$R''' = R'''' = \frac{2989}{17280}.$$

Für $n = 8$ oder neun Glieder

$$R = R^{\mathrm{VIII}} = \frac{989}{28350}, \quad R' = R^{\mathrm{VII}} = \frac{2944}{14175}, \quad R'' = R^{\mathrm{VI}} = -\frac{464}{14175},$$

$$R''' = R^{\mathrm{V}} = \frac{5248}{14175}, \quad R^{\mathrm{IV}} = -\frac{454}{2835}.$$

Für $n = 9$ oder zehn Glieder

$$R = R^{\mathrm{IX}} = \frac{2857}{89600}, \quad R' = R^{\mathrm{VIII}} = \frac{15741}{89600}, \quad R'' = R^{\mathrm{VII}} = \frac{27}{2240},$$

$$R''' = R^{\mathrm{VI}} = \frac{1209}{5600}, \quad R^{\mathrm{IV}} = R^{\mathrm{V}} = \frac{2889}{44800}.$$

Für $n = 10$ oder elf Glieder

$$R = R^{\mathrm{X}} = \frac{16067}{598752}, \quad R' = R^{\mathrm{IX}} = \frac{26575}{149688}, \quad R'' = R^{\mathrm{VIII}} = -\frac{16175}{199584},$$

$$R''' = R^{\mathrm{VII}} = \frac{5675}{12474}, \quad R^{\mathrm{IV}} = R^{\mathrm{VI}} = -\frac{4825}{11088}, \quad R^{\mathrm{V}} = \frac{17807}{24948}.$$

5.

Da die Formel

$$\Delta(AR + A'R' + A''R'' + A'''R''' + \text{usw.} + A^{(n)}R^{(n)})$$

das Integral

$$\int y\,dx$$

von $x = g$ bis $x = g + \Delta$ oder das Integral

$$\Delta\int y\,dt$$

von $t = 0$ bis $t = 1$ zwar genau liefert, so oft y, in eine Reihe entwickelt, die Potenz t^n nicht überschreitet, aber nur näherungsweise, so oft y darüber hinausgeht, bleibt übrig, daß wir den Fehler, den die nächstfolgenden Glieder hineinbringen, bestimmen lehren. Bezeichnen wir allgemein mit $k^{(m)}$ die Differenz zwischen dem wahren Wert des Integrals

$$\int t^m\,dt,$$

von $t = 0$ bis $t = 1$, und dem Wert, der aus der Formel hervorgeht, so daß

$$
\begin{aligned}
k &= 1 - R - R' - R'' - R''' - \text{usw.} - R^{(n)},\\
k' &= \frac{1}{2} - \frac{1}{n}(R' + 2R'' + 3R''' + \text{usw.} + n\, R^{(n)}),\\
k'' &= \frac{1}{3} - \frac{1}{n^2}(R' + 4R'' + 9R''' + \text{usw.} + n^2 R^{(n)}),\\
k''' &= \frac{1}{4} - \frac{1}{n^3}(R' + 8R'' + 27R''' + \text{usw.}\, n^3 R^{(n)})^*
\end{aligned}
$$

usw. Es ist daher offenbar, daß, wenn man y in die Reihe

$$K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + \text{ usw.}$$

entwickelt, die Differenz zwischen dem Wert des Integrals

$$\int y\,dt$$

und dem angenäherten Wert der Formel ausgedrückt wird durch

$$Kk + K'k' + K''k'' + K'''k''' + \text{ usw.}$$

Aber handgreiflicherweise werden k, k', k'' usw. bis $k^{(n)}$ von selbst $= 0$: Die Korrektion der angenäherten Formel wird also sein

$$K^{(n+1)}k^{(n+1)} + K^{(n+2)}k^{(n+2)} + K^{(n+3)}k^{(n+3)} + \text{ usw.}$$

Die Beschaffenheit der Größen $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$ usw. werden wir unten genauer erforschen; hier möge es genügen, die numerischen Werte der ersten oder zweiten, für einzelne Werte von n, beigefügt zu haben, damit danach der Grad der Genauigkeit, den die angenäherte Formel bietet, geschätzt werden kann.

Für $n = 1$ haben wir

$$k'' = -\frac{1}{6}, \quad k''' = -\frac{1}{4}, \quad k'''' = -\frac{3}{10}.$$

Für $n = 2$ finden wir

$$k''' = 0, \quad k'''' = -\frac{1}{120}, \quad k^{\mathrm{V}} = -\frac{1}{48}.$$

Für $n = 3$ wird

$$k'''' = -\frac{1}{270}, \quad k^{\mathrm{V}} = -\frac{1}{108}.$$

* In der Ausgabe der WW. Göttingen, 1866, steht fälschlich

$$\frac{1}{4} - \frac{1}{n^2}(R' + \text{usw.}).$$

Für $n = 4$ wird

$$k^{\mathrm{V}} = 0, \quad k^{\mathrm{VI}} = -\frac{1}{2688}, \quad k^{\mathrm{VII}} = -\frac{1}{768}.$$

Für $n = 5$ wird

$$k^{\mathrm{VI}} = -\frac{11}{52500}*, \quad k^{\mathrm{VII}} = -\frac{11}{15000}.$$

Für $n = 6$ wird

$$k^{\mathrm{VII}} = 0, \quad k^{\mathrm{VIII}} = -\frac{1}{38880}, \quad k^{\mathrm{IX}} = -\frac{1}{8640}.$$

Für $n = 7$ wird

$$k^{\mathrm{VIII}} = -\frac{167}{10588410}, \quad k^{\mathrm{IX}} = -\frac{167}{2352980}.$$

Für $n = 8$ wird

$$k^{\mathrm{IX}} = 0, \quad k^{\mathrm{X}} = -\frac{37}{17301504}**, \quad k^{\mathrm{XI}} = -\frac{37}{3145728}.$$

Für $n = 9$ wird

$$k^{\mathrm{X}} = -\frac{865}{631351908}, \quad k^{\mathrm{XI}} = -\frac{865}{114791256}.$$

Für $n = 10$ wird

$$k^{\mathrm{XI}} = 0, \quad k^{\mathrm{XII}} = -\frac{26927}{136500000000}, \quad k^{\mathrm{XIII}} = -\frac{26927}{21000000000}.$$

Für einen geraden Wert von n sehen wir hier überall

$$k^{(n+1)} = 0$$

werden und außerdem

$$k^{(n+3)} = \frac{n+3}{2}\,k^{(n+2)};$$

für einen ungeraden Wert von n aber ergibt sich überall

$$k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2}\,k^{(n+1)}.$$

Der Grund dieser Erscheinungen ist leicht aus den folgenden Überlegungen zu entnehmen.

Bezeichnen wir allgemein mit $l^{(m)}$ die Differenz zwischen dem wahren Wert des Integrals

$$\int \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt,$$

---

* In der Ausgabe der WW. Göttingen, 1866, steht fälschlich $-\frac{11}{52300}$. In Nr. 6 hat sie wieder den richtigen Wert k^{VI}.

** In der genannten Ausgabe steht wiederum fälschlich $-\frac{37}{17361504}$.

von $t = 0$ bis $t = 1$, und dem Wert, den die angenäherte Formel darbietet, so daß man hat

$$l^{(m)} = \int \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt - \left[\left(-\frac{1}{2}\right)^m R + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R' + \left(\frac{2}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R'' + \left(\frac{3}{n} - \frac{1}{2}\right)^m R''' + \text{usw.} + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{n}\right)^m R^{(n-1)} + \left(\frac{1}{2}\right)^m R^{(n)}\right];$$

das Integral von $t = 0$ bis $t = 1$ genommen.

Offenbar wird für einen ungeraden Wert von m sowohl der wahre Wert des Integrals als auch der angenäherte Wert verschwinden: es wird also

$$l' = 0, \quad l''' = 0, \quad l^{\mathrm{V}} = 0, \quad l^{\mathrm{VII}} = 0 \quad \text{usw.}$$

oder allgemein $l^{(m)} = 0$ für einen ungeraden Wert von m. Für einen geraden Wert von m aber geben wir der Formel solche Gestalt

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m(m+1)} - \frac{2}{n^m}\left[\left(\frac{1}{2}n\right)^m R + \left(\frac{1}{2}n - 1\right)^m R' + \left(\frac{1}{2}n - 2\right)^m R'' + \text{usw.} + 2^m R^{\left(\frac{1}{2}n-2\right)} + R^{\left(\frac{1}{2}n-1\right)}\right],$$

wenn gleichzeitig n gerade ist; oder diese

$$l^{(m)} = \frac{1}{2^m}\left\{\frac{1}{m+1} - \frac{2}{n^m}\left(n^m R + (n-2)^m R' + (n-4)^m R'' + \text{usw.} + 3^m R^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{3}{2}\right)} + R^{\left(\frac{1}{2}n-\frac{1}{2}\right)}\right)\right\},$$

wenn gleichzeitig n ungerade ist.

Wenn daher durch Entwicklung von y in eine nach Potenzen nach $t - \frac{1}{2}$ fortschreitende Reihe herauskommt

$$y = L + L'(t - \tfrac{1}{2}) + L''(t - \tfrac{1}{2})^2 + L'''(t - \tfrac{1}{2})^3 + \text{usw.},$$

so wird bei dem angenäherten Wert des Integrals $\int y\,dt$, von $t = 0$ bis $t = 1$, die Korrektion anzubringen sein

$$L\,l + L''\,l'' + L''''\,l'''' + L^{\mathrm{VI}}\,l^{\mathrm{VI}} + \text{usw.}$$

oder vielmehr wird, da $l^{(m)}$ für jeden ganzzahligen Wert, der nicht größer als n ist, notwendig verschwindet, die Korrektion im Falle eines geraden n

$$L^{(n+2)}\,l^{(n+2)} + L^{(n+4)}\,l^{(n+4)} + L^{(n+\mathrm{VI})}\,l^{(n+\mathrm{VI})} + \text{usw.}$$

lauten oder

$$L^{(n+1)}\, l^{(n+1)} + L^{(n+3)}\, l^{(n+3)} + L^{(n+5)}\, l^{(n+5)} + \text{usw.}$$

im Falle eines ungeraden n.

Sehr leicht lassen sich nun die Korrektionen $l^{(m)}$ auf $k^{(m)}$ zurückführen und umgekehrt. Da nämlich

$$\left(t - \frac{1}{2}\right)^m = t^m - \frac{1}{2} m\, t^{m-1} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\, t^{m-2} + \text{usw.},$$

so wird

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \frac{1}{2} m\, k^{(m-1)} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\, k^{(m-2)} + \text{usw.}$$

sein.

Und ebenso ergibt sich

$$k^{(m)} = l^{(m)} + \frac{1}{2} m\, l^{(m-1)} + \frac{1}{4}\,\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}\, l^{(m-1)} + \text{usw.}$$

Aus letzterer Formel werden die Glieder herausfallen, bei denen l mit ungeradem Index behaftet ist: jede von beiden ist aber nur bis zum Index $n+1$ (einschließlich) fortzusetzen. Offenbar werden wir also haben:

Für gerades n

$$k^{(n+1)} = 0,$$

$$k^{(n+2)} = l^{(n+2)},$$

$$k^{(n+3)} = \frac{n+3}{2} \cdot l^{(n+2)}.$$

Für ungerades n

$$k^{(n+1)} = l^{(n+1)},$$

$$k^{(n+2)} = \frac{n+2}{2} \cdot l^{(n+1)},$$

woraus die oben angezeigten Beobachtungen entspringen.

6.

Im allgemeinen ist es darum vorteilhafter, bei der Anwendung der Cotesianischen Methode dem n einen geraden Wert zu geben oder eine ungerade Menge von Gliedern zu benutzen. Gar wenig wird nämlich die Genauigkeit vermehrt werden, wenn wir statt des geraden Wertes von n zu dem nächst größeren ungeraden aufsteigen, da der Fehler von derselben Ordnung bleibt, mag er auch mit einem etwas kleineren Koeffizienten behaftet sein. Dagegen wird durch Fortschritt von einem un-

3*

geraden Wert des n zum nächstfolgenden geraden der Fehler um zwei Ordnungsstufen fortgeschoben werden und überdies wird der merklicher verminderte Koeffizient die Genauigkeit erhöhen. So läßt sich, wenn fünf Glieder zur Anwendung kommen, oder für $n = 4$, der Fehler näherungsweise durch $-\frac{1}{2688}K^{(6)}$ ausdrücken oder durch $-\frac{1}{2688}L^{(6)}$; wenn man $n = 5$ setzt, so wird der Fehler näherungsweise $-\frac{11}{52500}K^{(6)}$ oder $-\frac{11}{52500}L^{(6)}$ sein und so nicht einmal bis zur Hälfte des früheren herabgedrückt; bei $n = 6$ dagegen wird der Fehler annähernd $= -\frac{1}{38880}K^{(8)}$ oder $-\frac{1}{38880}L^{(8)}$, und die Genauigkeit wird um so größer, je rascher die Reihe, in welche man die Funktion entwickelt, schon von selbst konvergiert.

7.

Nachdem wir dies über die Methode von Cotes vorausgeschickt haben, schreiten wir zur allgemeinen Erörterung, wobei die Bedingung, daß die Werte von x eine arithmetische Reihe bilden, fortfällt. Wir nehmen also das Problem in Angriff, den Wert des Integrals $\int y\,dx$ zwischen gegebenen Grenzen aus irgendwelchen gegebenen Werten von y entweder genau oder näherungsweise zu bestimmen. Fügen wir hinzu, daß das Integral von $x = g$ bis $x = g + \Delta$ zu nehmen ist, und führen wir statt x eine andere Variable

$$t = \frac{x - g}{\Delta}$$

ein, so daß es notwendig ist, das Integral

$$\Delta \int y\,dt$$

von $t = 0$ bis $t = 1$ zu untersuchen. Es mögen $n + 1$ gegebene y-Werte

$$A,\quad A',\quad A'',\quad A''' \ldots A^{(n)}$$

den ungleichen t-Werten

$$a,\quad a',\quad a'',\quad a''' \ldots a^{(n)}$$

entsprechen, und wir wollen mit Y folgende ganze algebraische Funktion $n$ter Ordnung bezeichnen[2]:

$$
\begin{aligned}
& A\,\frac{(t-a')(t-a'')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})}{(a-a')(a-a'')(a-a''')\ldots(a-a^{(n)})} \\
& + A'\,\frac{(t-a)(t-a'')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})}{(a'-a)(a'-a'')(a'-a''')\ldots(a'-a^{(n)})} \\
& + A''\,\frac{(t-a)(t-a')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})}{(a''-a)(a''-a')(a''-a''')\ldots(a''-a^{(n)})} \\
& + \text{usw.} \\
& + A^{(n)}\,\frac{(t-a)(t-a')(t-a'')\ldots(t-a^{(n-1)})}{(a^{(n)}-a)(a^{(n)}-a')(a^{(n)}-a'')\ldots(a^{(n)}-a^{(n-1)})}\,.
\end{aligned}
$$

Offenbar fallen die Werte dieser Funktion, wenn t irgendeiner von den Größen $a, a', a'' \ldots a^{(n)}$ * gleichgesetzt wird, mit den entsprechenden Werten der Funktion y zusammen, woraus wir ebenso wie in Artikel 2 schließen, daß Y mit y identisch ist, so oft y gleichfalls eine ganze algebraische Funktion ist, die die Ordnung n nicht übersteigt, oder wenigstens für y eintreten kann, wenn y in eine nach Potenzen von t fortschreitende Reihe verwandelt eine so starke Konvergenz darbietet, daß man die Glieder der höheren Ordnungen vernachlässigen darf.

8.

Nunmehr wollen wir zur Ermittlung des Integrals $\int Y dt$ die einzelnen Teile von Y betrachten. Bezeichnen wir das Produkt

$$(t-a)(t-a')(t-a'')(t-a''')\ldots(t-a^{(n)})$$

mit T, und durch Entwicklung dieses Produkts werde

$$T = t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} + \text{usw.} + \alpha^{(n)}.$$

Der Zähler des Bruches, mit dem A in dem ersten Teile von Y multipliziert ist, wird $= \frac{T}{t-a}$; die Zähler in den folgenden Teilen sind ebenso

$$\frac{T}{t-a'}, \quad \frac{T}{t-a''}, \quad \frac{T}{t-a'''} \quad \text{usw.}$$

Die Nenner aber sind nichts anderes als bestimmte Werte dieser Zähler, wenn beziehungsweise

$$t = a, \quad t - a', \quad t = a'', \quad t = a''' \quad \text{usw.}$$

* Hier hat die Göttinger Ausgabe von 1866 wieder einen Druckfehler ($a^{(m)}$ statt $a^{(n)}$).

gesetzt wird: wir wollen diese Nenner beziehungsweise mit M, M', M'', M''' usw. bezeichnen, so daß

$$Y = \frac{AT}{M(t-a)} + \frac{A'T}{M'(t-a')} + \frac{A''T}{M''(t-a'')} + \text{usw.} + \frac{A^{(n)}T}{M^{(n)}(t-a^{(n)})}$$

ist. Da $T = 0$ wird für $t = a$, haben wir die identische Gleichung

$$a^{n+1} + \alpha a^n + \alpha' a^{n-1} + \alpha'' a^{n-2} + \text{usw.} + \alpha^{(n)} = 0$$

und demnach

$$T = t^{n+1} - a^{n+1} + \alpha(t^n - a^n) + \alpha'(t^{n-1} - a^{n-1})$$
$$+ \alpha''(t^{n-2} - a^{n-2}) + \text{usw.} + \alpha^{(n-1)}(t-a).$$

Hieraus wird durch Division mit $t - a$

$$\begin{aligned}\frac{T}{t-a} = t^n + a\,t^{n-1} &+ a^2 t^{n-2} + a^3 t^{n-3} + \text{usw.} + a^n\\
+ \alpha\, t^{n-1} &+ \alpha\, a\, t^{n-2} + \alpha\, a^2 t^{n-3} + \text{usw.} + \alpha\, a^{n-1}\\
&+ \alpha' t^{n-2} + \alpha' a\, t^{n-3} + \text{usw.} + \alpha' a^{n-2}\\
&\qquad + \alpha'' t^{n-3} + \text{usw.} + \alpha'' a^{n-3}\\
&\qquad\qquad + \text{usw. usw.}\\
&\qquad\qquad\qquad + \alpha^{(n-1)}.\end{aligned}$$

Der Wert dieser Funktion für $t = a$ beträgt

$$= (n+1)a^n + n\alpha a^{n-1} + (n-1)\alpha' a^{n-2} + (n-2)\alpha'' a^{n-3} + \text{usw.} + \alpha^{(n-1)}.$$

Daher ist M gleich dem Werte von $\frac{dT}{dt}$ für $t = a$, wie auch anderweitig[3] feststeht. Ebenso werden M', M'', M''', usw. Werte von $\frac{dT}{dt}$ sein für $t = a'$, $t = a''$, $t = a''$ usw.

Weiter finden wir den Wert des Integrals $\int \frac{T\,dt}{t-a}$, von $t = 0$ bis $t = 1$

$$\begin{aligned}= \frac{1}{n+1} + \frac{a}{n} &+ \frac{a^2}{n-1} + \frac{a^3}{n-2} + \text{usw.} + a^n\\
+ \frac{\alpha}{n} &+ \frac{\alpha a}{n-1} + \frac{\alpha a^2}{n-2} + \text{usw.} + \alpha a^{n-1}\\
&+ \frac{\alpha'}{n-1} + \frac{\alpha' a}{n-2} + \text{usw.} + \alpha' a^{n-2}\\
&\qquad + \frac{\alpha''}{n-2} + \text{usw.} + \alpha'' a^{n-3}\\
&\qquad\qquad + \text{usw. usw.}\\
&\qquad\qquad\qquad + \alpha^{(n-1)}\end{aligned}$$

Diese Glieder werden wir folgendermaßen umordnen:

$$\begin{aligned}
&a^n + \alpha a^{n-1} + \alpha' a^{n-2} + \alpha'' a^{n-3} + \text{usw.} + \alpha^{(n-1)} \\
&+ \frac{1}{2}(a^{n-1} + \alpha a^{n-2} + \alpha' a^{n-3} + \text{usw.} + \alpha^{(n-2)}) \\
&+ \frac{1}{3}(a^{n-2} + \alpha a^{n-3} + \alpha' a^{n-4} + \text{usw.} + \alpha^{(n-3)}) \\
&+ \frac{1}{4}(a^{n-3} + \alpha a^{n-4} + \alpha' a^{n-5} + \text{usw.} + \alpha^{(n-4)}) \\
&+ \text{usw.} \\
&+ \frac{1}{n-1}(a^2 + \alpha a + \alpha') \\
&+ \frac{1}{n}(a + \alpha) \\
&+ \frac{1}{n+1}.
\end{aligned}$$

Offenbar kommt aber dieselbe Größe heraus, wenn in dem Produkt aus der Multiplikation der Funktion T mit der unendlichen Reihe

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} \text{ usw.}$$

nach Ausschaltung aller Glieder, die die Potenzen von t mit negativen Exponenten enthalten (oder kürzer, in dem Teil des Produkts, der eine ganze Funktion von t ist), t für a geschrieben wird. Nehmen wir also an, es werde*

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{usw.}\right) = T' + T'',$$

so daß T' die in dem Produkt enthaltene ganze Funktion von t ist, T'' hingegen der andere Teil, nämlich eine absteigende und ins Unendliche laufende Reihe. Danach wird der Wert des Integrals $\int \frac{T\,dt}{t-a}$, von $t = 0$ bis $t = 1$, dem Wert der Funktion T' gleich sein für $t = a$. Wenn wir daher die bestimmten Werte der Funktion

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

* „Es wird kaum nötig sein zu bemerken, daß die Zeichen T, T', T'' hier in anderem Sinne genommen werden, als in Artikel 2.“

für $t = a$, $t = a'$, $t = a''$, $t = a'''$ usw. bis $t = a^{(n)}$ beziehungsweise mit R, R', R'', $R'''\ldots.R^{(n)}$ bezeichnen, so wird das Integral $\int Y dt$, von $t = 0$ bis $t = 1$,

$$= RA + R'A' + R''A'' + \text{usw.} + R^{(n)}A^{(n)},$$

was mit $\varDelta$ multipliziert den wahren oder den angenäherten Wert des $\int y\,dx$, von $x = g$ bis $x = y + \varDelta$, liefern wird.

9.

Diese Operationen werden wesentlich leichter zustande gebracht, wenn man statt der unbestimmten Größe t eine andere $u = 2t - 1$ einführt. Wir schreiben auch zur Abkürzung $b = 2a - 1$, $b' = 2a' - 1$, $b'' = 2a'' - 1$ usw. T möge, nach Einsetzung des Wertes $\frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ für t, übergehen in $\frac{U}{2^{n+1}}$ oder es sei

$$U = (u - b)(u - b')(u - b'')\ldots.(u - b^n).$$

Es wird daher

$$\frac{dT}{dt} = \frac{1}{2^n} \cdot \frac{dU}{du}$$

sein, und somit werden M, M', M'' usw. bestimmte Werte von

$$\frac{1}{2^n} \cdot \frac{dU}{du},$$

wenn man der Reihe nach $u = b$, $u = b'$, $u = b''$ usw. setzt.

Da die Reihe

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{usw.}$$

nichts anderes ist als

$$\log\frac{1}{1 - t^{-1}} = \log\frac{1 + u^{-1}}{1 - u^{-1}},$$

so wird sie durch die Einsetzung $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ notwendig übergehen in

$$2u^{-1} + \frac{2}{3}u^{-3} + \frac{2}{5}u^{-5} + \frac{2}{7}u^{-7} \text{ usw.}$$

Wenn wir daher setzen

$$U\left(u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{ usw.}\right) = U' + U'',$$

derart, daß U' die in diesem Produkt enthaltene ganze Funktion von u ist, U'' hingegen der andere Teil, nämlich eine absteigende unendliche Reihe, so ist offenbar

$$T' + T'' = \frac{1}{2^n}(U' + U'').$$

T' aber wird handgreiflicherweise als ganze Funktion von t durch die Einsetzung $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ notwendig eine ganze Funktion von u hervorbringen: T'' dagegen, welches nur negative Potenzen von t enthält, wird durch dieselbe Einsetzung lediglich negative Potenzen von u erzeugen. Deswegen wird U' nichts anderes sein als das durch diese Einsetzung umgeformte $2^n T'$ und ebenso U'' aus $2^n T''$ gewonnen werden. Es wird also kein Unterschied sein, ob wir in

$$\frac{T'}{\left(\frac{dT}{dt}\right)}$$

$t = a$ einsetzen oder in

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$$

$u = b$ machen. Daraus entnehmen wir, daß auch R, R', R'', R''' usw. bestimmte Werte der Funktion

$$\frac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$$

für $u = b$, $u = b'$, $u = b''$, $u = b'''$ usw. sind.

10.

Bevor wir weiter fortschreiten, wollen wir diese Regeln durch ein Beispiel erläutern. Es sei $n = 5$, und setzen wir

$$a = 0,\ a' = \frac{1}{5},\ a'' = \frac{2}{5},\ a''' = \frac{3}{5},\ a'''' = \frac{4}{5},\ a''''' = 1$$

fest. Daraus ergibt sich

$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{17}{5}t^4 - \frac{9}{5}t^3 + \frac{274}{625}t^2 - \frac{24}{625}t.$$

Durch Multiplikation mit

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{usw.}$$

erhalten wir

$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{19}{7500}.$$

Die Werte der Koeffizienten R, R', R'', R''', R'''', R''''' werden demnach ausgedrückt durch die gebrochene Funktion

$$\frac{t^5 - \frac{2}{5}t^4 + \frac{67}{30}t^3 - \frac{17}{20}t^2 + \frac{913}{7500}t - \frac{19}{7500}}{6t^5 - 15t^4 + \frac{68}{5}t^3 - \frac{27}{5}t^2 + \frac{548}{625}t - \frac{24}{625}},$$

wo für t der Reihe nach die Werte $0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \frac{3}{5}, \frac{4}{5}, 1$ einzusetzen sind. Viel kürzer ist die andere Methode, welche liefert

$$b = -1,\ b' = -\frac{3}{5},\ b'' = -\frac{1}{5},\ b''' = \frac{1}{5},\ b'''' = \frac{3}{5},\ b''''' = 1,$$

$$U = u^6 - \frac{7}{5}u^4 + \frac{259}{625}u^2 - \frac{9}{625},$$

$$U' = u^5 - \frac{16}{15}u^3 + \frac{277}{1875}u,$$

wonach R, R', R'' usw. die Werte der gebrochenen Funktion

$$\frac{u^4 - \frac{16}{15}u^2 + \frac{277}{1875}}{6u^4 - \frac{28}{5}u^2 + \frac{518}{625}}$$

für $u = -1$, $u = -\frac{3}{5}$, $u = -\frac{1}{5}$ usw. Beide Methoden liefern dieselben Zahlen, welche wir in Artikel 4 aus der Harmonia mensurarum angeführt haben. Übrigens werden in einem Falle, wie ihn dieses Beispiel darstellt, wo a, a', a'' usw. rationale Größen sind, die Werte des Nenners $\frac{dT}{dt}$ bequemer in der ursprünglichen Form berechnet, nämlich

$$(a - a')(a - a'')(a - a''')\ldots(a - a^{(n)})$$

für $t = a$ und ebenso im übrigen. Dasselbe gilt vom Nenner $\frac{dU}{du}$, der für $u = b$ wird

$$= (b - b')(b - b'')(b - b''')\ldots(b - b^{(n)}).$$

11.

So oft a, a', a'' usw. entweder teilweise oder ganz irrational sind, wird die Umformung der gebrochenen Funktion, aus der wir die Zahlen R, R', R'' usw. ableiten, in eine ganze Funktion nützlich sein. Da die Prinzipien solcher Umformung in den algebraischen Büchern nicht zu finden sind, wollen wir sie an dieser Stelle kurz auseinandersetzen. Sind drei ganze Funktionen Z, ζ, ζ' der unbestimmten Größe x vorgelegt, so wird also eine ganze Funktion gesucht, welche die gebrochene $\frac{Z}{\zeta}$ vertreten kann, insofern für x irgendeine Wurzel der Gleichung $\zeta' = 0$ angenommen wird. Wir wollen aber voraussetzen, daß ζ für keinen dieser Werte von x verschwinde oder, was auf dasselbe hinauskommt, daß ζ und ζ' keinen gemeinsamen unbestimmten Teiler enthalten. Die Exponenten der höchsten Potenzen von x in ζ und ζ' werden wir mit k, k' bezeichnen.

Es werde in gewohnter Weise ζ durch ζ' dividiert, bis die Ordnung des Restes unter k' herabgedrückt ist; der Rest werde $= \frac{\zeta''}{\lambda}$ gesetzt und seine Ordnung $= k''$, so daß $\frac{1}{\lambda} x^{k''}$ das höchste Glied des Restes ist; den Quotienten der Division wollen wir $= \frac{p}{\lambda}$ setzen. Ebenso möge aus der Division der Funktion ζ' durch ζ'' der Rest $\frac{\zeta'''}{\lambda'}$ von der Ordnung k''', der Quotient $\frac{p'}{\lambda'}$ hervorgehen; sodann wiederum aus der Division der Funktion ζ'' durch ζ''' der Rest $\frac{\zeta''''}{\lambda''}$ von der Ordnung k'''' und der Quotient $\frac{p''}{\lambda''}$ und so fort, bis man in der Reihe der Funktionen ζ'', ζ''', ζ'''' usw., welche einzeln ihr höchstes Glied mit dem Koeffizienten 1 behaftet haben werden, zu $\zeta^{(m)} = 1$ gelangt. Daß dies endlich eintreten muß, läßt sich leicht einsehen, da jede beliebige von den Funktionen ζ, ζ', ζ'', ζ''' usw. mit der voraufgehenden keinen gemeinsamen unbestimmten Teiler haben kann und daher gewiß keine Division ohne Rest ausführbar ist, solange der Divisor eine höhere Ordnung als 0 hat. Wir werden also die folgende Reihe von Gleichungen erhalten

$$\begin{aligned}
\zeta'' &= \lambda\, \zeta - p\, \zeta' ,\\
\zeta''' &= \lambda'\, \zeta' - p'\, \zeta'' ,\\
\zeta'''' &= \lambda''\, \zeta'' - p''\, \zeta''' ,\\
\zeta''''' &= \lambda'''\, \zeta''' - p'''\, \zeta'''' ,
\end{aligned}$$

usw. bis

$$\zeta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\, \zeta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\, \zeta^{(m-1)},$$

wo ζ'', ζ''', $\zeta''''\ldots\zeta^{(m)}$ ganze Funktionen des x von der Ordnung k'', k''', $k''''\ldots k^{(m)}$; die Zahlen k', k'', $k'''\ldots k^{(m)}$ beständig abnehmend bis zur letzten $k^{(m)}=0$; p, p', p'', p''' usw. gleichfalls ganze Funktionen des x von der Ordnung $k-k'$, $k'-k''$, $k''-k'''$, $k'''-k''''$ usw. (mit Ausnahme des Falles $k<k'$, wo offenbar $p=0$ gesetzt werden muß).

Nach solchen Vorbereitungen bilden wir eine zweite Reihe von ganzen Funktionen des x, nämlich η, η', η'', $\eta'''\ldots\eta^{(m)}$. Und zwar wollen wir $\eta=1$, $\eta'=0$ festsetzen, die übrigen aber leiten wir einzeln aus den beiden voraufgehenden nach demselben Gesetz ab, durch das die Funktionen ζ, ζ', ζ'', ζ''' usw. untereinander verknüpft sind, nämlich nach den Gleichungen

$$\begin{aligned}
\eta'' &= \lambda\ \eta - p\ \eta' , \\
\eta''' &= \lambda'\ \eta' - p'\ \eta'' , \\
\eta'''' &= \lambda''\ \eta'' - p''\ \eta''' , \\
\eta''''' &= \lambda'''\ \eta''' - p'''\ \eta'''' ,
\end{aligned}$$

usw. bis

$$\eta^{(m)} = \lambda^{(m-2)}\,\eta^{(m-2)} - p^{(m-2)}\,\eta^{(m-1)}.$$

Offenbar ist hier $\eta''=\lambda$ von der Ordnung 0; $\eta'''=-\lambda p'$ von der Ordnung $k'-k''$ und ebenso die folgenden η'''', η''''' usw. beziehungsweise von der Ordnung $k'-k'''$, $k'-k''''$ usw., so daß das letzte $\eta^{(m)}$ zur Ordnung $k'-k^{(m-1)}$ aufsteigt.

Ferner wollen wir eine dritte Reihe von Funktionen betrachten, $\zeta-\zeta\eta$, $\zeta'-\zeta\eta'$, $\zeta''-\zeta\eta''$, $\zeta'''-\zeta\eta'''$ usw., wo unter drei beliebigen aufeinanderfolgenden Gliedern offenbar eine ähnliche Relation bestehen wird, nämlich

$$\begin{aligned}
\zeta''-\zeta\eta'' &= \lambda\ (\zeta-\zeta\eta\ ) - p\ (\zeta'-\zeta\eta'\ ), \\
\zeta'''-\zeta\eta''' &= \lambda'\ (\zeta'-\zeta\eta') - p'\ (\zeta''-\zeta\eta''), \\
\zeta''''-\zeta\eta'''' &= \lambda''(\zeta''-\zeta\eta'') - p''(\zeta'''-\zeta\eta''').
\end{aligned}$$

Nun wird die erste dieser Funktionen $=0$, die zweite $=\zeta'$: daraus läßt sich leicht schließen, daß die einzelnen durch ζ' teilbar sein werden.

Hieraus folgt ohne Schwierigkeit, daß an Stelle des Bruches $\frac{Z}{\zeta}$ die ganze Funktion $Z\eta^{(m)}$ angenommen werden kann, insoweit wenigstens dem x nicht andere Werte erteilt werden als die, welche Wurzeln der Gleichung $\zeta'=0$ sind: offenbar muß nämlich die Differenz $\frac{Z(1-\zeta\eta^{(m)})}{\zeta}$ für solchen Wert von x verschwinden, da $1-\zeta\eta^{(m)} = \zeta^{(m)} - \zeta\eta^{(m)}$ durch ζ' teilbar ist.

An Stelle der Funktion $Z\eta^{(m)}$ wird auch deren Rest aus der Division mit ζ' treten können, der von niedrigerer Ordnunng sein wird, als die Funktion ζ'.

Übrigens läßt sich dieser Rest bequemer durch folgenden Algorithmus unmittelbar ausfindig machen. Es mögen folgende Gleichungen gebildet werden

$$\begin{aligned} Z &= q'\ \zeta' + Z',\\ Z' &= q''\ \zeta'' + Z'',\\ Z'' &= q'''\ \zeta''' + Z''',\\ Z''' &= q''''\zeta'''' + Z'''', \end{aligned}$$

usw. bis

$$Z^{(m-1)} = q^{(m)}\zeta^{(m)} + Z^{(m)},$$

indem man nämlich nach der Reihe Z durch ζ' dividiert, darauf den Rest der ersten Division Z' durch ζ'', dann den Rest der zweiten Division durch ζ''' und so fort. Da der Rest stets zu einer niederen Ordnung gehört, als der Divisor, wird die Ordnung der Funktionen Z', Z'', Z''', Z'''' usw. beziehungsweise niedriger sein als k', k'', k''', k'''' usw.; die letzte vollends $Z^{(m)}$ wird notwendig $= 0$, da der Divisor $\zeta^{(m)} = 1$ ist. Wir haben also

$$Z = q'\zeta' + q''\zeta'' + q'''\zeta''' + q''''\zeta'''' + \text{usw.} + q^{(m)}\zeta^{(m)}.$$

Insofern aber für x nur Wurzeln der Gleichung $\zeta' = 0$ angenommen werden, wird

$$\zeta' = 0,\quad \zeta'' = \zeta\eta'',\quad \zeta''' = \zeta\eta''',\quad \zeta'''' = \zeta\eta'''' \text{ usw.},$$

wonach unter derselben Beschränkung

$$\frac{Z}{\zeta} = q''\eta'' + q'''\eta''' + q''''\eta'''' + \text{usw.} + q^{(m)}\eta^{(m)}$$

herauskommt. Die Ordnung aber dieses Ausdrucks wird notwendig unterhalb k' sein: da nämlich die Ordnung der Quotienten q'', q''', q'''' usw. unterhalb $k'-k''$, $k''-k'''$, $k'''-k''''$ usw. sein muß, wird die Ordnung der einzelnen Teile $q''\eta''$, $q'''\eta'''$, $q''''\eta''''$ usw. unterhalb $k'-k''$, $k'-k'''$, $k'-k''''$ usw. sein.

Endlich bemerken wir noch, wenn sich zufällig unter den Werten der Unbestimmten x, die man in den Bruch $\frac{Z}{\zeta}$ einsetzen muß, rationale mit irrationalen gemischt finden, daß es zweckmäßiger sein wird, jene von diesen zu sondern und diese allein in der Gleichung $\zeta' = 0$ zusammenzufassen. Für rationale Werte nämlich wird eine Rechnungsersparnis nicht nötig sein; für irrationale aber wird die Rechnung desto einfacher sein, je geringer der Grad der ganzen Funktion ist, auf die man die gebrochene zurückführen kann.

12.

Hier nun ein Beispiel für die im vorigen Artikel auseinandergesetzte Umformung. Es sei die gebrochene Funktion

$$\frac{z^6 - \frac{50}{39}z^4 + \frac{283}{715}z^2 - \frac{256}{15015}}{7z^6 - \frac{105}{13}z^4 + \frac{315}{143}z^2 - \frac{35}{429}}$$

vorgelegt, in der z unbestimmt die Wurzeln der Gleichung

$$z^7 - \frac{21}{13}z^5 + \frac{105}{143}z^3 - \frac{35}{429}z = 0$$

darstellt.

Wenn wir hier alle sieben Wurzeln umfassen wollten, würden wir auf eine ganze Funktion sechster Ordnung kommen. Offenbar aber ist für den rationalen Wert $z = 0$ die Berechnung des Bruches leicht und gibt den Betrag $\frac{256}{1225}$. Daher wollen wir unter Ausscheidung dieser Wurzel bei der Gleichung sechsten Grades verweilen:

$$z^6 - \frac{21}{13}z^4 + \frac{105}{143}z^2 - \frac{35}{429} = 0.$$

Dann sehen wir leicht voraus, daß eine ganze Funktion vierter Ordnung herauskommen wird. Nunmehr ergibt sich aus der Anwendung der vorangegangenen Regeln folgendes:

$$\begin{aligned}
\zeta &= 7z^6 - \frac{105}{13}z^4 + \frac{315}{143}z^2 - \frac{35}{429},\\
\zeta' &= z^6 - \frac{21}{13}z^4 + \frac{105}{143}z^2 - \frac{35}{429},\\
\zeta'' &= z^4 - \frac{10}{11}z^2 + \frac{5}{33},\\
\zeta''' &= z^2 - \frac{3}{7},\\
\zeta'''' &= 1.
\end{aligned}$$

$$\lambda = \frac{13}{42}, \qquad p = \frac{13}{6},$$

$$\lambda' = -\frac{4719}{280}, \quad p' = -\frac{4719}{280}z^2 + \frac{3333}{280},$$

$$\lambda'' = -\frac{147}{8}, \quad p'' = -\frac{147}{8}z^2 + \frac{777}{88}.$$

$$\eta = 1,$$

$$\eta' = 0,$$

$$\eta'' = \frac{13}{42},$$

$$\eta''' = \frac{20449}{3920}z^2 - \frac{14443}{3920},$$

$$\eta'''' = \frac{61347}{640}z^4 - \frac{127413}{1120}z^2 + \frac{120263}{4480}.$$

$$Z = z^6 - \frac{50}{39}z^4 + \frac{283}{715}z^2 - \frac{256}{15015}, \qquad q' = 1,$$

$$' = \frac{1}{3}z^4 - \frac{22}{65}z^2 + \frac{323}{5005}, \qquad q'' = \frac{1}{3},$$

$$Z'' = -\frac{76}{2145}z^2 + \frac{632}{45045}, \qquad q''' = -\frac{76}{2145},$$

$$Z''' = -\frac{4}{3465}, \qquad q'''' = -\frac{4}{3465}.$$

Hieraus läßt sich endlich die dem vorgelegten Bruch äquivalente ganze Funktion ableiten:

$$-\frac{1859}{16800}z^4 - \frac{1573}{29400}z^2 + \frac{7947}{39200}.$$

13.

Um den Grad der Genauigkeit zu bestimmen, deren sich unsere Integralformel

$$RA + R'A' + R''A'' + \text{usw.} + R^{(n)}A^{(n)}$$

erfreut, wollen wir allgemein setzen

$$Ra^m + R'a'^m + R''a''^m + \text{usw.} + R^{(n)}a^{(n)m} = \frac{1}{m+1} - k^{(m)},$$

so daß $k^{(m)}$ die Differenz zwischen dem wahren und angenäherten Wert des Integrals $\int t^m dt$ ist, genommen von $t = 0$ bis $t = 1$.

Wir werden daher nach Entwicklung der einzelnen Brüche in Reihen erhalten

$$\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{usw.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}$$

$$= (1-k)\,t^{-1} + \left(\frac{1}{2} - k'\right) t^{-2} + \left(\frac{1}{3} - k''\right) t^{-3}$$

$$+ \left(\frac{1}{4} - k'''\right) t^{-4} + \text{usw.}$$

$$= t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{usw.} - \Theta,$$

wenn wir

$$\Theta = k\,t^{-1} + k'\,t^{-2} + k''\,t^{-3} + k'''\,t^{-4} + \text{usw.}$$

setzen oder vielmehr (da wir bereits wissen, daß k, k', k'', k''' usw. bis $k^{(n)}$ von selbst verschwinden müssen)

$$\Theta = k^{(n+1)}\,t^{-(n+2)} + k^{(n+2)}\,t^{-(n+3)} + k^{(n+3)}\,t^{-(n+4)} + \text{usw.}$$

Durch Multiplikation mit T ergibt sich

$$T\left(\frac{R}{t-a} + \frac{R'}{t-a'} + \frac{R''}{t-a''} + \text{usw.} + \frac{R^{(n)}}{t-a^{(n)}}\right) = T' + T'' - T\Theta.$$

Die linke Seite dieser Gleichung ist eine ganze Funktion des t von der Ordnung n, und ihre für $t = a$, $t = a'$, $t = a''$ usw. bestimmten Werte werden beziehungsweise MR, $M'R'$, $M''R''$ usw.: deswegen muß, da dasselbe von der Funktion T' gilt, wie aus der Bestimmungsweise der Zahlen R, R', R'' usw. ersichtlich ist, jene linke Seite der Gleichung notwendig mit T' identisch sein und somit $T'' = T\Theta$. Es entsteht daher Θ aus der Entwicklung des Bruches $\frac{T''}{T}$, und auf solche Art werden sich die Koeffizienten $k^{(n+1)}$, $k^{(n+2)}$ usw. beliebig weit bestimmen lassen. Nach diesen Ermittelungen wird die Korrektion von unserem angenäherten Wert des Integrals $\int y\,dt$ sein

$$= k^{(n+1)} K^{(n+1)} + k^{(n+2)} K^{(n+2)} + \text{usw.},$$

wenn die Reihe, in die y entwickelt wird, die Gestalt hat

$$y = K + K't + K''t^2 + K'''t^3 + \text{usw.}$$

14.

Will man die Korrektion lieber durch Koeffizienten der nach Potenzen von $t - \frac{1}{2}$ fortschreitenden Reihe

$$y = L + L'\left(t - \frac{1}{2}\right) + L''\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + L'''\left(t - \frac{1}{2}\right)^3 + \text{usw.}$$

ausdrücken, so wird jene

$$= l^{(n+1)} L^{(n+1)} + l^{(n+2)} L^{(n+2)} + l^{(n+3)} L^{(n+3)} + \text{usw.}$$

sein, wenn wir allgemein mit $l^{(m)}$ die Korrektion des angenäherten Wertes des Integrals

$$\int \left(t - \frac{1}{2}\right)^m dt$$

ausdrücken. Diese Korrektionen $l^{(m)}$ werden mit den Korrektionen $k^{(m)}$ durch die Gleichung

$$l^{(m)} = k^{(m)} - \frac{1}{2} m\, k^{(m-1)} + \frac{1}{4} \cdot \frac{m \cdot m-1}{1 \cdot 2} k^{(m-2)}$$
$$- \frac{1}{8} \cdot \frac{m \cdot m-1 \cdot m-2}{1 \cdot 2 \cdot 3} k^{(m-3)} + \text{usw.}$$

verknüpft sein. Um jene aber unabhängig ermitteln zu können, wollen wir erwägen, daß die Funktion Θ durch die Substitution

$$t = \frac{1}{2} u + \frac{1}{2}$$

übergeht in

$$\begin{aligned}
&2k\ (u^{-1} - u^{-2} + u^{-3} - u^{-4} + \text{usw.})\\
&+ 4k'\ (u^{-2} - 2u^{-3} + 3u^{-4} - 4u^{-5} + \text{usw.})\\
&+ 8k''\ (u^{-3} - 3u^{-4} + 6u^{-5} - 10u^{-6} + \text{usw.})\\
&+ 16k'''(u^{-4} - 4u^{-5} + 10u^{-6} - 20u^{-7} + \text{usw.})\\
&+ \text{usw.}
\end{aligned}$$

oder in

$$2ku^{-1} + 4\left(k' - \frac{1}{2}\right)u^{-2} + 8\left(k'' - \frac{1}{2} \cdot 2k' + \frac{1}{4}k\right)u^{-3}$$
$$+ 16\left(k''' - \frac{1}{2} \cdot 3k'' + \frac{1}{4} \cdot 3k' - \frac{1}{8}k\right)u^{-4} + \text{usw.}$$

oder in

$$2lu^{-1} + 4l'u^{-2} + 8l''u^{-3} + 16l'''u^{-4} + \text{usw.}$$

oder endlich, da wir a priori wissen, daß l, l', l'', l''' usw. bis $l^{(n)}$ von selbst verschwinden, in

$$2^{n+2} l^{(n+1)} u^{-(n+2)} + 2^{n+3} l^{(n+2)} u^{-(n+3)} + 2^{n+4} l^{(n+4)} u^{-(n+4)} + \text{usw.}$$

Nun ist aber $\Theta = \frac{T''}{T}$; daher wird, weil T, T'' durch die Substitution $t = \frac{1}{2}u + \frac{1}{2}$ in $\frac{U}{2^{n+1}}$, $\frac{U''}{2^n}$ übergehen (Art. 9), die Funktion Θ durch dieselbe Substitution in $\frac{2\,U''}{U}$ übergehen. Wenn wir also die aus der Entwicklung des Bruches $\frac{U''}{U}$ entstehende Reihe mit Ω bezeichnen, so wird

$$\Omega = 2^{n+1}\, l^{(n+1)}\, u^{-(n+2)} + 2^{n+2}\, l^{(n+2)}\, u^{-(n+3)} + 2^{n+3}\, l^{(n+3)}\, u^{-(n+4)} \quad \text{usw.}$$

sein, und auf diese Art werden sich die Koeffizienten $l^{(n+1)}$, $l^{(n+2)}$ usw. beliebig weit ermitteln lassen.

So finden wir in dem Beispiel des Art. 10

$$U'' = -\frac{176}{13125}u^{-1} - \frac{304}{28125}u^{-3} - \frac{2576}{309375}u^{-5} - \text{ usw.}$$

$$\Omega = -\frac{176}{13125}u^{-7} - \frac{832}{28125}u^{-9} - \frac{189856}{4296875}u^{-11} - \text{ usw.},$$

und die Korrektion des angenäherten Wertes des Integrals ist daher

$$= -\frac{11}{52500}L^{\mathrm{VI}} - \frac{13}{112500}L^{\mathrm{VIII}} - \frac{5933}{137500000}L^{\mathrm{X}} - \text{ usw.}$$

15.

Der Koeffizient $K^{(m)}$ der in eine Reihe entwickelten Funktion y wird nach dem Satz von Taylor gleich dem Wert von

$$\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\cdot\frac{d^m y}{dt^m} \quad \text{oder} \quad \frac{\Delta^m}{1\cdot 2\cdot 3\ldots m}\cdot\frac{d^m y}{dx^m}$$

für $t = 0$ oder $x = g$; ebenso ist der Koeffizient $L^{(m)}$ der Wert desselben Ausdrucks für $t = \frac{1}{2}$ oder $u = 0$ oder $x = g + \frac{1}{2}\Delta$: beiden Koeffizienten werden wir die Ordnung m zuschreiben. Allgemein gesprochen, wird also unsere Integration bis zur Ordnung n einschließlich genau sein, welche Werte auch immer für a, a', $a'' \ldots a^{(n)}$ angenommen werden mögen. Doch steht darum nichts im Wege, für geschickt gewählte Werte dieser Größen die Genauigkeit zu einem höheren Grad zu erheben. So haben wir schon oben gesehen, daß bei der Methode von Cotes, d. h. für

$$a = 0, \quad a' = \frac{1}{n}, \quad a'' = \frac{2}{n}, \quad a''' = \frac{3}{n} \quad \text{usw.},$$

die Genauigkeit sich von selbst zur Ordnung $n + 1$ einschließlich ausdehnt, so oft n eine gerade Zahl ist. Wenn die Werte a, a', a'', a''' usw. so gewählt worden sind, daß in der Funktion T'' oder U'' am Anfang ein Glied fortfällt oder mehrere, leuchtet allgemein ein, daß die Genauigkeit um ebenso viele Stufen über die Ordnung n hinausgerückt werden wird, als Glieder ausgefallen sein werden. Hieraus wird leicht gefolgert, daß man, da die Menge der Größen, die zur Auswahl stehen, $n + 1$ ist, durch geeignete Bestimmung derselben die Genauigkeit immer auf die Ordnung $2n + 1$ einschließlich erheben kann, und so wird sich mit Hilfe von $n + 1$ Gliedern derselbe Genauigkeitsgrad erreichen lassen, zu dessen Erlangung es nötig wäre, $2n + 1$ oder $2n + 2$ Glieder zu benutzen, wenn wir der Methode von Cotes folgten.

16.

Diese ganze Angelegenheit dreht sich darum, für einen beliebigen gegebenen Wert von n eine Funktion T zu ermitteln von der Form

$$t^{n+1} + \alpha t^n + \alpha' t^{n-1} + \alpha'' t^{n-2} \text{ usw.}$$

derart, daß in dem entwickelten Produkt

$$T\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{ usw.}\right).$$

die Potenzen

$$t^{-1}, \quad t^{-2}, \quad t^{-3} \quad \ldots \quad t^{-(n+1)}$$

alle den Koeffizienten 0 bekommen; oder, wenn man lieber will, eine Funktion U von der Form

$$u^{n+1} + \beta u^n + \beta' u^{n-1} + \beta'' u^{n-2} + \text{ usw.},$$

deren Produkt mit

$$u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{ usw.}$$

von den Potenzen

$$u^{-1}, \quad u^{-2}, \quad u^{-3}, \quad u^{-4} \quad \ldots \quad u^{-(n+1)}$$

frei wird. Die letztere Art wird etwas einfacher sein: da sich nämlich leicht ersehen läßt, daß die Koeffizienten von U, um der vorgeschriebenen Bedingung zu genügen, intermittierend verschwinden müssen oder $\beta = 0$, $\beta'' = 0$, $\beta'''' = 0$ usw. zu setzen

4*

ist, kann fast die Hälfte der Arbeit schon als erledigt gelten. Wir wollen einige einfache Fälle vorführen.

I. Für $n = 0$ muß nur der Koeffizient von t^{-1} in dem Produkt

$$(t + \alpha)\left(t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \text{ usw.}\right)$$

verschwinden. Da er $= \frac{1}{2} + \alpha$ wird, haben wir

$$\alpha = -\frac{1}{2} \quad \text{oder} \quad T = t - \frac{1}{2}\,.$$

Ebenso folgt $U = u$.

II. Für $n = 1$ hängt die Bestimmung des T von den beiden Gleichungen

$$0 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2}\alpha + \alpha',$$

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha'$$

ab, woraus wir ableiten

$$\alpha = -1, \quad \alpha' = +\frac{1}{6} \quad \text{oder} \quad T = t^2 - t + \frac{1}{6}\,.$$

Die Bestimmung der Funktion U bringt nur eine einzige Gleichung

$$0 = \frac{1}{3} + \beta'$$

mit sich. Daher

$$\beta' = -\frac{1}{3} \quad \text{oder} \quad U = u^2 - \frac{1}{3}\,.$$

III. Für $n = 2$ wird die Funktion T mit Hilfe von drei Gleichungen bestimmt:

$$0 = \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\alpha + \frac{1}{2}\alpha' + \alpha'',$$

$$0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{4}\alpha + \frac{1}{3}\alpha' + \frac{1}{2}\alpha'',$$

$$0 = \frac{1}{6} + \frac{1}{5}\alpha + \frac{1}{4}\alpha' + \frac{1}{3}\alpha'',$$

woraus wir gewinnen

$$\alpha = -\frac{3}{2}, \quad \alpha' = \frac{3}{5}, \quad \alpha'' = -\frac{1}{20},$$

also

$$T = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}\,.$$

Zur Bestimmung von U genügt eine einzige Gleichung:

$$0 = \frac{1}{5} + \frac{1}{3}\beta'.$$

Daher

$$\beta' = -\frac{3}{5} \quad \text{oder} \quad U = u^3 - \frac{3}{5}u.$$

Doch wollen wir dieses Verfahren, welches beständig lästigere Rechnungen herbeiführt, hier nicht weiter verfolgen, sondern zur echten Quelle der allgemeinen Lösung fortschreiten.

17.

Wenn ein Kettenbruch vorgelegt ist

$$\varphi = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w'' + \cfrac{v'''}{w''' + \text{usw.}}}}},$$

so steht fest, daß man fortlaufend bessere Näherungsbrüche durch folgenden Algorithmus findet. Es mögen zwei Reihen von Größen gebildet werden, V, V', V'', V''' usw., W, W', W'', W''' usw. durch nachstehende Formeln:

$$\begin{aligned}
V &= 0, & W &= 1,\\
V' &= v, & W' &= wW,\\
V'' &= w'V' + v'V & W'' &= w'W' + v'W,\\
V''' &= w''V'' + v''V', & W''' &= w''W'' + v''W',\\
V'''' &= w'''V''' + v'''V'' & W'''' &= w'''W''' + v'''W''
\end{aligned}$$

usw. Dann wird

$$\frac{V}{W} = 0,$$

$$\frac{V'}{W'} = \frac{v}{w},$$

$$\frac{V''}{W''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w'}},$$

$$\frac{V'''}{W'''} = \cfrac{v}{w + \cfrac{v'}{w' + \cfrac{v''}{w''}}}$$

usf.

Außerdem steht fest oder wird aus den vorangehenden Gleichungen leicht bestätigt, daß

$$\begin{aligned}
V W' - V' W &= -v,\\
V' W'' - V'' W' &= +vv',\\
V'' W''' - V''' W'' &= -vv'v'',\\
V''' W'''' - V'''' W''' &= +vv'v''v'''
\end{aligned}$$

usw. ist. Daraus ist ersichtlich, daß von der Reihe

$$\frac{v}{WW'} - \frac{vv'}{W'W''} + \frac{vv'v''}{W''W'''} - \frac{vv'v''v'''}{W'''W''''} + \text{usw.}$$

das erste Glied $= \dfrac{V'}{W'}$ **ist,**

die Summe der zwei ersten Glieder $= \dfrac{V''}{W''}$,

die Summe der drei ersten Glieder $= \dfrac{V'''}{W'''}$,

die Summe der vier ersten Glieder $= \dfrac{V''''}{W''''}$

usf. Daher wird die Reihe selbst, entweder ins Unendliche oder bis zum Abbruch fortgesetzt, den Kettenbruch φ **ausdrücken. Zugleich erhält man hieraus die Differenz zwischen** φ **und den einzelnen Näherungsbrüchen** $\dfrac{V'}{W'}, \dfrac{V''}{W''}, \dfrac{V'''}{W'''}$ **usw.**

Aus Formel 33 in Art. 14 der Disquisitiones generales circa seriem infinitam[4] erhalten wir leicht durch Verwandlung von t **in** $\dfrac{1}{u}$ **die Umformung der Reihe**

$$\varphi = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{usw.}$$

in folgenden Kettenbruch

$$\cfrac{1}{u - \cfrac{\frac{1}{3}}{u - \cfrac{\frac{2\cdot 2}{3\cdot 5}}{u - \cfrac{\frac{3\cdot 3}{5\cdot 7}}{u - \cfrac{\frac{4\cdot 4}{7\cdot 9}}{u - \text{usw.}}}}}}$$

so daß man hat

$$v = 1, \quad v' = -\frac{1}{3}, \quad v'' = -\frac{4}{15}, \quad v''' = -\frac{9}{35}, \quad v'''' = -\frac{16}{63} \quad \text{usw.}$$

$$w = w' = w'' = w''' = w'''' \text{ usw.} = u.$$

Hieraus bekommen wir für V, V', V'', V''' usw. W, W', W'', W''' usw. folgende Werte[5]:

$$\begin{aligned}
V &= 0,\\
V' &= 1,\\
V'' &= u,\\
V''' &= u^2 - \frac{4}{15},\\
V'''' &= u^3 - \frac{11}{21}u,\\
V^{\mathrm{V}} &= u^4 - \frac{7}{9}u^2 + \frac{64}{945},\\
V^{\mathrm{VI}} &= u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u,\\
V^{\mathrm{VII}} &= u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}u^2 - \frac{256}{15015},\\
W &= 1,\\
W' &= u,\\
W'' &= u^2 - \frac{1}{3},\\
W''' &= u^3 - \frac{3}{5}u,\\
W'''' &= u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},\\
W^{\mathrm{V}} &= u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,\\
W^{\mathrm{VI}} &= u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},\\
W^{\mathrm{VII}} &= u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u \quad \text{usw.}
\end{aligned}$$

Bei leichter Aufmerksamkeit ist ersichtlich, daß die einzelnen V, V', V'', V''' usw., W, W', W'', W''' usw., ganze Funktionen der Unbestimmten u bilden, in $V^{(m)}$ u^{m-1} das höchste Glied wird und die Potenzen u^{m-3}, u^{m-4}, u^{m-6} usw.

fehlen, in $W^{(m)}$ jedoch u^m das höchste Glied wird und die Potenzen u^{m-1}, u^{m-3}, u^{m-5} usw. fehlen.

Nach dem oben Bewiesenen aber wird

$$\varphi = \frac{1}{WW'} + \frac{1}{3\,W'W''} + \frac{2\cdot 2}{3\cdot 3\cdot 5\,W''W'''} + \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\,W'''\,W''''}$$
$$+ \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\,W''''\,W'''''} + \text{usw.}$$

sein und demnach allgemein

$$\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}} = \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots m\cdot m}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m-1)(2m+1)\,W^{(m)}\,W^{(m+1)}}$$
$$+ \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots(m+1)(m+1)}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m+1)(2m+3)\,W^{(m+1)}\,W^{(m+2)}}$$
$$+ \text{usw.}$$

Wenn man daher $\varphi - \frac{V^{(m)}}{W^{(m)}}$ in eine fallende Reihe verwandelt, so wird das erste Glied derselben

$$= \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots m\cdot m\,u^{-(2m+1)}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m-1)(2m+1)}$$

sein. Das Produkt $\varphi\,W^{(m)}$ aber wird zusammengesetzt sein aus der ganzen Funktion $V^{(m)}$ und einer unendlichen Reihe, deren erstes Glied

$$= \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots m\,m\,u^{-(m+1)}}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2m-1)(2m+1)}.$$

Hiermit ist also von selbst die Funktion U von der Ordnung $n+1$ gefunden, welche der im vorhergehenden Artikel aufgestellten Bedingung genügt, daß nämlich das Produkt φU von den Potenzen

$$u^{-1},\quad u^{-2},\quad u^{-3}\ldots u^{-(n+1)}$$

frei wird. Sie ist nämlich keine andere als $W^{(n+1)}$, und zugleich leuchtet ein, daß U' gleich $V^{(n+1)}$ wird und das erste Glied von U''

$$= \frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots(n+1)(n+1)}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\ldots(2n+1)(2n+3)}\cdot u^{-(n+2)}.$$

Wenn demnach für b, b', b'' … $b^{(n)}$ die Wurzeln der Gleichung $W^{(n+1)} = 0$ angenommen und die Werte der Koeffizienten R, R', R'' … $R^{(n)}$ nach den oben mitgeteilten Vorschriften bestimmt werden, so wird sich unsere Integralformel einer bis zur

Ordnung $2n+1$ aufsteigenden Genauigkeit erfreuen und ihre Korrektion wird sehr nahe durch

$$\frac{1}{2^{2n+2}}\cdot\frac{2\cdot2\cdot3\cdot3\ldots(n+1)(n+1)}{3\cdot3\cdot5\cdot5\ldots(2n+1)(2n+3)}L^{(2n+2)}$$

$$=\frac{1\cdot1\cdot2\cdot2\cdot3\cdot3\ldots(n+1)(n+1)}{2\cdot6\cdot6\cdot10\cdot10\cdot14\ldots(4n+2)(4n+6)}L^{(2n+2)}$$

ausgedrückt werden.

18.

Die Erörterungen des vorigen Artikels lehren zwar geeignete Funktionen U für einzelne Werte der Zahl n finden, doch nur nacheinander, indem von kleineren Werten zu größeren überzugehen ist. Leicht bemerken wir aber, daß diese Funktionen sich allgemein ausdrücken lassen durch

$$u^{n+1}-\frac{(n+1)n}{2\cdot(2n+1)}u^{n-1}+\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{2\cdot4(2n+1)(2n-1)}u^{n-3}$$
$$-\frac{(n+1)n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{2\cdot4\cdot6\cdot(2n+1)(2n-1)(2n-3)}u^{n-5}+\text{usw.}$$

oder auch, wenn wir uns der Bezeichnung F nach der Richtschnur der oben zitierten Abhandlung bedienen, durch

$$u^{n+1}F\left(-\frac{1}{2}n,\quad-\frac{1}{2}(n+1),\quad-\left(n+\frac{1}{2}\right),\quad u^{-2}\right).$$

Diese Induktion wird leicht in einen strengen Beweis verwandelt durch eine allgemein bekannte Methode oder, wenn man es so ansehen will, mit Hilfe der Formel 19 in der zitierten Abhandlung.[6] Die Funktion U kann auch, wenn man es vorzieht, mit umgekehrter Anordnung der Glieder ausgedrückt werden durch

$$\pm\frac{3\cdot5\cdot7\ldots(n+1)}{(n+3)(n+5)\ldots(2n+1)}\cdot uF\left(-\frac{1}{2}n,\ \frac{1}{2}(n+3),\ \frac{3}{2},\ u^2\right)$$

für gerades n, indem das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{1}{2}n$ gerade oder ungerade ist, oder durch

$$\pm\frac{1\cdot3\cdot5\ldots n}{(n+2)(n+4)\ldots(2n+1)}F\left(-\frac{1}{2}(n+1),\ \frac{1}{2}n+1,\ \frac{1}{2},\ u^2\right)$$

für ungerades n, indem das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{1}{2}(n+1)$ gerade oder ungerade ist.

Die Funktion U' gestattet nicht einen gleich einfachen allgemeinen Ausdruck: dennoch läßt sich schon aus der Entstehungsweise der Größen V, V', V'' usw. leicht folgern, daß das letzte Glied von U' für gerades n

$$= \pm \frac{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot 6 \ldots n\cdot n}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11\cdot 13 \ldots (2n-1)(2n+1)}$$

wird, indem das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem $\frac{1}{2}n$ gerade oder ungerade ist.

Die Funktion

$$U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)},$$

deren erstes Glied wir schon im vorigen Artikel bestimmen lehrten, kann auch durch einen rekurrierenden Algorithmus entwickelt werden, da man offenbar allgemein hat:

$$\varphi W'' - V'' = w'(\varphi W' - V') + v'(\varphi W - V),$$
$$\varphi W''' - V''' = w''(\varphi W'' - V'') + v''(\varphi W' - V'),$$
$$\varphi W'''' - V'''' = w'''(\varphi W''' - V''') + v'''(\varphi W'' - V'')$$

usw.,

somit in dem Fall, den wir behandeln:

$$\varphi W^{(m+2)} - V^{(m+2)} = u(\varphi W^{(m+1)} - V^{(m+1)}) - \frac{(m+1)^2}{(2m+1)(2m+3)}(\varphi W^{(m)} - V^{(m)}).$$

Somit finden wir

$$\varphi W - V = u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \frac{1}{7}u^{-7} + \text{usw.}$$
$$\varphi W' - V' = \frac{1}{3}u^{-2} + \frac{1}{5}u^{-4} + \frac{1}{7}u^{-6} + \frac{1}{9}u^{-8} + \text{usw.}$$
$$\varphi W'' - V'' = \frac{4}{45}u^{-3} + \frac{8}{105}u^{-5} + \frac{4}{63}u^{-7} + \frac{112}{2079}u^{-9} + \text{usw.}$$
$$\varphi W''' - V''' = \frac{4}{175}u^{-4} + \frac{8}{315}u^{-6} + \frac{4}{165}u^{-8} + \frac{16}{715}u^{-10} + \text{usw.}$$

usw.

Diese Reihen kann man auch folgendermaßen darstellen:

$$\varphi W - V = u^{-1}\Big(1 + \frac{1\cdot 2}{2\cdot 3}u^{-2} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}{2\cdot 4\cdot 3\cdot 5}u^{-4} + \frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 3\cdot 5\cdot 7}u^{-6} + \text{usw.}\Big)$$

$$\varphi W' - V' = \frac{1}{3} u^{-2} \Bigl(1 + \frac{2\cdot 3}{2\cdot 5} u^{-2*} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 5\cdot 7} u^{-4} + \frac{2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 5\cdot 7\cdot 9} u^{-6} + \text{usw.}\Bigr),$$

$$\varphi W'' - V'' = \frac{4}{45} u^{-3} \Bigl(1 + \frac{3\cdot 4}{2\cdot 7} u^{-2} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{2\cdot 4\cdot 7\cdot 9} u^{-4} + \frac{3\cdot 4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7\cdot 9\cdot 11} u^{-6} + \text{usw.}\Bigr),$$

$$\varphi W''' - V''' = \frac{4}{175} u^{-4} \Bigl(1 + \frac{4\cdot 5}{2\cdot 9} u^{-2} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 9\cdot 11} u^{-4} + \frac{4\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 8\cdot 9}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 9\cdot 11\cdot 13} u^{-6} + \text{usw.}\Bigr)$$

usw.

Indem wir dieser Induktion folgen, werden wir allgemein erhalten

$$U'' = \varphi W^{(n+1)} - V^{(n+1)}$$

gleich dem Produkt aus

$$\frac{2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\cdot 4\cdot 4\ \ldots\ (n+1)(n+1)}{3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot 7\cdot 9\ \ldots\ (2n+1)(2n+3)} u^{-(n+2)}$$

und der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{(n+2)(n+3)}{2(2n+5)} u^{-2} + \frac{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}{2\cdot 4\cdot (2n+5)(2n+7)} u^{-4} + \quad \text{usw.}$$

oder, wenn man lieber will,

$$F\Bigl(\frac{1}{2}n + 1,\quad \frac{1}{2}n + \frac{3}{2},\quad n + \frac{5}{2},\quad u^{-2}\Bigr).$$

Auch diese Induktion wird sehr leicht zur vollen Gewißheit erhoben entweder durch die allgemein bekannte Methode oder mit Hilfe der Formel 19 in der öfters zitierten Abhandlung.

19.

Da es genügt, eine von den beiden Funktionen T, U zu kennen, haben wir die Bestimmung der zweiten als die ein-

* Die Göttinger Ausgabe von 1866 hat hier wieder einen Druckfehler (u^{-4} statt u^{-2}).

fachere bevorzugt. Wie diese sich an die Entwicklung der Reihe

$$u^{-1} + \frac{1}{3}u^{-3} + \frac{1}{5}u^{-5} + \text{ usw.}$$

in einen Kettenbruch angelehnt hat, so hätten wir durch ähnliche Schlüsse aus der Entwicklung der Reihe

$$t^{-1} + \frac{1}{2}t^{-2} + \frac{1}{3}t^{-3} + \frac{1}{4}t^{-4} + \text{ usw.}$$

in den Kettenbruch

$$\cfrac{1}{t - \cfrac{\frac{1}{2}}{1 - \cfrac{\frac{1}{6}}{t - \cfrac{\frac{2}{6}}{1 - \cfrac{\frac{2}{10}}{t - \cfrac{\frac{3}{10}}{1 - \text{ usw.}}}}}}}$$

einen Algorithmus zur Bestimmung der Funktion T für die sukzessiven Werte der Zahl n ableiten können. Zu demselben Ergebnis gelangen wir aber durch die Erwägung, daß T nichts anderes ist als $\frac{U}{2^{n+1}}$ oder $\frac{W^{(n+1)}}{2^{n+1}}$, wenn für u geschrieben wird $2t - 1$, und so wird man die nacheinander für T anzunehmenden Funktionen durch folgenden Algorithmus erhalten:

$$\begin{aligned}
W &= 1, \\
\frac{1}{2}W' &= t - \frac{1}{2}, \\
\frac{1}{4}W'' &= \left(t - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}W' - \frac{1\cdot 1}{2\cdot 6}W = t^2 - t + \frac{1}{6}, \\
\frac{1}{8}W''' &= \left(t - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{4}W'' - \frac{2\cdot 2}{6\cdot 10}\cdot\frac{1}{2}W' = t^3 - \frac{3}{2}t^2 \\
&\qquad + \frac{3}{5}t - \frac{1}{20}, \\
\frac{1}{10}W'''' &= \left(t - \frac{1}{2}\right)\cdot\frac{1}{8}W''' - \frac{3\cdot 3}{10\cdot 14}\cdot\frac{1}{4}W'' = t^4 - 2t^3 \\
&\qquad + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70}
\end{aligned}$$

usw.

Durch Induktion ergibt sich hieraus allgemein

$$T = t^{n+1} - \frac{(n+1)^2}{1\cdot(2n+2)}t^n + \frac{(n+1)^2\cdot n^2}{1\cdot 2\cdot(2n+2)(2n+1)}t^{n-1} - \frac{(n+1)^2\cdot n^2\cdot(n-1)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(2n+2)(2n+1)\cdot 2n}t^{n-2} + \text{usw.}$$

oder

$$T = t^{n+1} F(-(n+1),\ -(n+1),\ -2(n+1),\ t^{-1}),$$

und es ist leicht, dieser Induktion die Kraft eines Beweises zu verschaffen. Wenn es angenehmer ist, kann T auch mit umgekehrter Anordnung der Glieder durch

$$\pm\frac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\ .\ .\ (n+1)}{2\cdot 6\cdot 10\cdot 14\ldots(4n+2)} F(n+2,\ -(n+1),\ 1,\ t)$$

ausgedrückt werden, wo das obere Vorzeichen für ungerades n gilt, das untere für gerades. Auf ähnliche Weise wird endlich allgemein gefunden T'' gleich dem Produkt aus

$$\frac{1\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 3\cdot 3\ldots(n+1)\cdot(n+1)}{2\cdot 6\cdot 6\cdot 10\cdot 10\cdot 14\ldots(4n+2)\cdot(4n+6)}t^{-(n+2)}$$

und der unendlichen Reihe

$$1 + \frac{(n+2)^2}{1\cdot(2n+4)}t^{-1} + \frac{(n+2)^2(n+3)^2}{1\cdot 2\cdot(2n+4)(2n+5)}t^{-2} + \frac{(n+2)^2(n+3)^2(n+4)^2}{1\cdot 2\cdot 3\cdot(2n+4)(2n+5)(2n+6)}t^{-3} + \text{usw.}$$

oder

$$F(n+2,\ n+2,\ 2n+4,\ t^{-1}).$$

20.

Da in der Funktion U die Potenzen u^n, u^{n-2}, u^{n-4} usw. fehlen, so werden von den Wurzeln der Gleichung $U = 0$ stets je zwei entgegengesetzt gleich sein. Dazu muß man für einen geraden Wert von n noch die singuläre Wurzel 0 gesellen. Nach Auffindung der Wurzeln wird man die Werte der Koeffizienten R, R', R'' usw. gemäß der Methode des Artikels 11 erhalten durch eine ganze Funktion von u, die für einen ungeraden Wert des n von der Form

$$\gamma u^{n-1} + \gamma' u^{n-3} + \gamma'' u^{n-5} + \text{usw.}$$

sein wird, für einen geraden Wert aber, wenn der der Wurzel

$u = 0$ entsprechende Koeffizient ausgeschlossen wird, von der Form

$$\gamma u^{n-2} + \gamma' u^{n-4} + \gamma'' u^{n-6} + \text{ usw.}$$

Das Beispiel des Artikels 12 zeigt eben diese Reduktion für $n = 6$. Offenbar entsprechen also entgegengesetzten Werten von u stets gleiche Koeffizienten. Übrigens kann in dem Falle, wo n gerade ist, der der Wurzel $u = 0$ entsprechende Wert leicht allgemein a priori bestimmt werden. Man gewinnt diesen Koeffizienten, wenn man in $\dfrac{U'}{\left(\dfrac{dU}{du}\right)}$ einsetzt $u = 0$. Den Wert des Zählers U' für $u = 0$ haben wir bereits in Artikel 18 mitgeteilt, der Wert des Nenners aber wird ebendaher

$$= \pm \frac{3 \cdot 5 \cdot 7 \ldots (n+1)}{(n+3)(n+5) \ldots (2n+1)} = \pm \frac{3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 7 \ldots (n+1)(n+1)}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \ldots (2n+1)}$$

sein und vollends der gesuchte Koeffizient

$$= \left(\frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8 \ldots n}{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \ldots (n+1)}\right)^2.$$

21.

Die ganze Funktion von u, welche die Koeffizienten R, R', R'' usw. darstellt, kann in dem hier behandelten Falle auch unabhängig von der allgemeinen Methode des Artikels 11 folgendermaßen ermittelt werden. Durch Differentiation der Gleichung

$$\varphi - \frac{U'}{U} = \frac{U''}{U},$$

dann durch die Substitution

$$\frac{d\varphi}{du} = \frac{1}{1-u^2}$$

und Multiplikation mit $U^2(u^2-1)$ erhalten wir

$$(u^2-1)\,U'\frac{dU}{du} - U\left\{\frac{dU'}{du}\cdot(u^2-1) + U\right\} = (u^2-1)\,U^2\frac{d\left(\dfrac{U''}{U}\right)}{du}.$$

Die Glieder dieser Gleichung zur Linken bilden offenbar eine ganze Funktion von u: deshalb müssen in dem Teile zur Rechten die Koeffizienten von u mit negativen Exponenten notwendig sich selbst zerstören.

Doch $\dfrac{d\,\frac{U''}{U}}{du}$ bringt eine unendliche Reihe hervor, die mit dem Gliede

$$-\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}\right)^2 u^{-(2n+4)}$$

beginnt, und wenn man diese also mit $(u^2-1)U^2$ multipliziert, so wird nichts anderes herauskommen können als die konstante Größe

$$-\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}\right)^2.$$

Hieraus schließen wir*, daß

$$(u^2-1)\,U'\,\frac{dU}{du}+\left(\frac{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n+1)}{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}\right)^2$$

durch U teilbar ist. Deswegen wird mit der gebrochenen Funktion $\dfrac{U'}{\left(\frac{dU}{du}\right)}$, welche die Koeffizienten R, R', R'' usw. liefert, die ganze Funktion

$$-\left(\frac{1\cdot3\cdot5\cdot7\ldots(2n+1)}{1\cdot2\cdot3\cdot4\ldots(n+1)}\,U'\right)^2\cdot(u^2-1)$$

gleichwertig sein. Statt dieser Funktion, die von der Ordnung $2n+2$ ist und offenbar bloß gerade Potenzen von u enthält, wird der Rest aus ihrer Division durch U genommen werden können, welchem die Ordnung n oder $n-1$ zukommt, je nachdem n gerade oder ungerade ist. Wenn wir aber in dem ersteren Falle lieber den Koeffizienten, der der Wurzel $u=0$ entspricht, ausschließen wollen, so werden wir statt jener Funktion deren Rest aus der Division durch $\frac{U}{u}$ wählen, welcher sich nur zur Ordnung $n-2$ erheben wird.

22.

Damit zur Hand sei, was zur Anwendung der bisher auseinandergesetzten Methode erfordert wird, erschien es gut, für

* „Zugleich wird hieraus der Beweis entnommen, daß U nicht einen unbestimmten gemeinsamen Teiler mit $\frac{dU}{du}$ haben kann und demnach die Gleichung $U=0$ keine gleichen Wurzeln.“

die sukzessiven Werte der Zahl n die numerischen Beträge sowohl der Größen a, a', a'' usw., als auch der Koeffizienten R, R', R'' usw., auf 16 Stellen berechnet, zusammen mit deren Logarithmen bis zu zehn Stellen beizufügen.

I. Ein Glied, $n = 0$.

$$U = u, \quad U' = 1, \quad T = t - \frac{1}{2}, \quad T' = 1,$$

$$a = 0{,}5,$$

$$R = 1.$$

Die Korrektion der Integralformel sehr nahe $= \frac{1}{12} L''$.

II. Zwei Glieder, $n = 1$.

$$U = u^2 - \frac{1}{3}, \quad U' = u,$$

$$T = t^2 - t + \frac{1}{6}, \quad T' = t - \frac{1}{2},$$

$$a = 0{,}2113248654051871,$$

$$a' = 0{,}7886751345948129,$$

$$R = R' = \frac{1}{2}.$$

Die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{180} L''''$.

III. Drei Glieder, $n = 2$.

$$U = u^3 - \frac{3}{5} u, \quad U' = u^2 - \frac{4}{15},$$

$$T = t^3 - \frac{3}{2} t^2 + \frac{3}{5} t - \frac{1}{20}, \quad T' = t^2 - t + \frac{11}{60}$$

$$a = 0{,}1127016653792583,$$

$$a' = 0{,}5,$$

$$a'' = 0{,}8872983346207417,$$

$$R = R'' = \frac{5}{18},$$

$$R' = \frac{4}{9}.$$

Die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{2800} L^{\mathrm{VI}}$.

IV. Vier Glieder, $n = 3$.

$$U = u^4 - \frac{6}{7}u^2 + \frac{3}{35},$$

$$U' = u^3 - \frac{11}{21}u,$$

$$T = t^4 - 2t^3 + \frac{9}{7}t^2 - \frac{2}{7}t + \frac{1}{70},$$

$$T' = t^3 - \frac{3}{2}t^2 + \frac{13}{21}t - \frac{5}{84},$$

$$a = 0{,}0694318442029754,$$

$$a' = 0{,}3300094782075677,$$

$$a'' = 0{,}6699905217924323,$$

$$a''' = 0{,}9305681557970246,$$

$$R = R''' = 0{,}1739274225687284, \quad \log = 9{,}2403680612,$$

$$R' = R'' = 0{,}3260725774312716, \quad \log = 9{,}5133142764.$$

Von diesen Koeffizienten der allgemeine Ausdruck:

$$-\frac{35}{144}u^2 + \frac{17}{48},$$

die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{44100} L^{\mathrm{VIII}}$.

V. Fünf Glieder, $n = 4$.

$$U = u^5 - \frac{10}{9}u^3 + \frac{5}{21}u,$$

$$U' = u^4 - \frac{7}{9}u^2 + \frac{64}{945},$$

$$T = t^5 - \frac{5}{2}t^4 + \frac{20}{9}t^3 - \frac{5}{6}t^2 + \frac{5}{42}t - \frac{1}{252},$$

$$T' = t^4 - 2t^3 + \frac{47}{36}t^2 - \frac{11}{36}t + \frac{137}{75600},$$

$$a = 0{,}0469100770306680,$$

$$a' = 0{,}2307653449471585,$$

$$a'' = 0{,}5,$$

$$a''' = 0{,}7692346550528415,$$

$$a'''' = 0{,}9530899229693320,$$

$$R = R'''' = 0{,}1184634425280945, \quad \log = 9{,}0735843490,$$
$$R' = R''' = 0{,}2393143352496832 \qquad 9{,}3789687142,$$
$$R'' = \frac{64}{225} = 0{,}2844444444444444 \qquad 9{,}4539974559.$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Koeffizienten, unter Ausschluß von R'':

$$-\frac{91}{400}u^2 + \frac{1099}{3600},$$

die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{698544} L^{\mathrm{X}}$.

VI. Sechs Glieder, $n = 5$.

$$U = u^6 - \frac{15}{11}u^4 + \frac{5}{11}u^2 - \frac{5}{231},$$
$$U' = u^5 - \frac{34}{33}u^3 + \frac{1}{5}u,$$
$$T = t^6 - 3t^5 + \frac{75}{22}t^4 - \frac{20}{11}t^3 + \frac{5}{11}t^2 - \frac{1}{22}t + \frac{1}{924},$$
$$T' = t^5 - \frac{5}{2}t^4 - \frac{74}{33}t^3 - \frac{19}{22}t^2 + \frac{29}{220}t - \frac{7}{1320},$$

$$a = 0{,}0337652428984240,$$
$$a' = 0{,}1693953067668678,$$
$$a'' = 0{,}3806904069584015,$$
$$a''' = 0{,}6193095930415985,$$
$$a'''' = 0{,}8306046932331322,$$
$$a''''' = 0{,}9662347571015760,$$

$$R = R''''' = 0{,}0856622461895852, \quad \log = 8{,}9327894580,$$
$$R' = R'''' = 0{,}1803807865240693 \qquad 9{,}2561902763,$$
$$R'' = R''' = 0{,}2339569672863455 \qquad 9{,}3691359831.$$

Der allgemeine Ausdruck der Koeffizienten:

$$-\frac{77}{800}u^4 - \frac{7}{75}u^2 + \frac{23}{96},$$

die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{11099088} L^{\mathrm{XII}}$.

VII. Sieben Glieder, $n = 6$.

$$U = u^7 - \frac{21}{13}u^5 + \frac{105}{143}u^3 - \frac{35}{429}u,$$

$$U' = u^6 - \frac{50}{39}u^4 + \frac{283}{715}u^2 - \frac{256}{15015},$$

$$T = t^7 - \frac{7}{2}t^6 + \frac{63}{13}t^5 - \frac{175}{52}t^4 + \frac{175}{143}t^3 - \frac{63}{286}t^2 + \frac{7}{429}t - \frac{1}{3432},$$

$$T' = t^6 - 3t^5 + \frac{535}{156}t^4 - \frac{145}{78}t^3 + \frac{1377}{2860}t^2 - \frac{223}{4290}t + \frac{323}{240240},$$

$$\begin{aligned}
a &= 0{,}0254460438286202,\\
a' &= 0{,}1292344072003028,\\
a'' &= 0{,}2970774243113015,\\
a''' &= 0{,}5,\\
a'''' &= 0{,}7029225756886985,\\
a''''' &= 0{,}8707655927996972,\\
a'''''' &= 0{,}9745539561713798,
\end{aligned}$$

$$\begin{array}{llll}
R = R'''''' & = 0{,}0647424830844348, & \log = & 8{,}8111893529,\\
R' = R''''' & = 0{,}1398526957446384 & & 9{,}1456708421,\\
R'' = R'''' & = 0{,}1909150252525595 & & 9{,}2808401093,\\
R''' = \frac{256}{1225} & = 0{,}2089795918367347 & & 9{,}3201038766.
\end{array}$$

Der allgemeine Ausdruck dieser Koeffizienten, unter Ausschluß von R''':

$$-\frac{1859}{16800}u^4 - \frac{1573}{29400}u^2 + \frac{7947}{39200},$$

die Korrektion sehr nahe $= \frac{1}{176679360} L^{XIV}$.

23.

Zum Schluß wollen wir die Leistungsfähigkeit unserer Methode vor Augen stellen durch Berechnung des Integralwertes

$$\int \frac{dx}{\log x}$$

von $x = 100000$ bis $x = 200000$.

5*

I. Aus einem Gliede erhalten wir	$\Delta R \quad A$	= 8390,394608
II. Aus zwei Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 4271,810097
	$\Delta R' \quad A'$	= 4134,144502
	Sa.	= 8405,954599
III. Aus drei Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 2390,572772
	$\Delta R' \quad A'$	= 3729,064270
	$\Delta R'' \quad A''$	= 2286,599733
	Sa.	= 8406,236775
IV. Aus vier Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 1501,957053
	$\Delta R' \quad A'$	= 2763,769240
	$\Delta R'' \quad A''$	= 2711,454637
	$\Delta R''' \quad A'''$	= 1429,062040
	Sa.	= 8406,242970
V. Aus fünf Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 1024,879445
	$\Delta R' \quad A'$	= 2041,833335
	$\Delta R'' \quad A''$	= 2386,601133
	$\Delta R''' \quad A'''$	= 1980,509616
	$\Delta R'''' \quad A''''$	= 972,419588
	Sa.	= 8406,243117
VI. Aus sechs Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 741,912854
	$\Delta R' \quad A'$	= 1545,757256
	$\Delta R'' \quad A''$	= 1976,737668
	$\Delta R''' \quad A'''$	= 1950,466223
	$\Delta R'''' \quad A''''$	= 1488,588550
	$\Delta R^{\mathrm{V}} \quad A^{\mathrm{V}}$	= 702,780570
	Sa.	= 8406,243121
VII. Aus sieben Gliedern ergibt sich	$\Delta R \quad A$	= 561,1213804
	$\Delta R' \quad A'$	= 1202,0551998
	$\Delta R'' \quad A''$	= 1621,6290819
	$\Delta R''' \quad A'''$	= 1753,4212406
	$\Delta R'''' \quad A''''$	= 1584,9790252
	$\Delta R^{\mathrm{V}} \quad A^{\mathrm{V}}$	= 1152,0681116
	$\Delta R^{\mathrm{VI}} \quad A^{\mathrm{VI}}$	= 530,9690816
	Sa.	= 8406,2431211

Nach den Berechnungen des berühmten Bessel ist der Wert desselben Integrals = 8406,24312 gefunden worden.

7. Zweiter neuer Beweis des Satzes, dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann

In: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (1799–1849), hrsg. von Eugen Netto, Leipzig 1890 (2. Aufl.1904, 3. Aufl. 1913), Ostwald's Klassiker Nr. 14, S. 37–60.

Original:
Determinatio nova altera theorematis, omnem functionem algebraicam rationalem integram unius variabilis in factores reales primi vel secundi gradus resolvi posse. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 3, (1814–1815) 1816, commentationes classis mathematicae, S. 107–134. In: Gauß Werke 3, S. 31–56.

Zweiter neuer Beweis des Satzes,

dass jede algebraische rationale ganze Function einer Veränderlichen in reelle Factoren des ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann

von

C. F. Gauss.

1.

Obgleich der Beweis des Satzes über die Zerlegung der ganzen algebraischen Functionen in Factoren, welchen ich in einer vor 16 Jahren veröffentlichten Abhandlung gegeben habe, in Anbetracht der Strenge wie der Einfachheit wohl nichts zu wünschen übrig lässt, so wird es den Mathematikern hoffentlich doch nicht unerwünscht sein, wenn ich mich von neuem zu dieser überaus wichtigen Frage wende und von vollständig verschiedenen Principien aus einen zweiten nicht minder strengen Beweis aufzubauen unternehme. Jener erste Beweis hängt nämlich wenigstens zum Theil von geometrischen Betrachtungen ab, während derjenige, den ich hier auseinanderzusetzen beginne, auf rein analytischen Principien beruhen wird. Die bedeutsameren analytischen Methoden, durch welche andere Mathematiker wenigstens bis zu jener Zeit hin unseren Lehrsatz zu beweisen unternommen haben, habe ich a. a. O. besprochen und ausführlich dargelegt, an welchen Mängeln sie leiden. Der schwerwiegendste und wahrhaft fundamentale Mangel derselben ist allen jenen Versuchen, ebenso wie den neueren, soweit mir dieselben bekannt geworden sind, gemeinsam; ich habe aber schon damals erklärt, derselbe erscheine bei einem analytischen Beweise durchaus nicht unvermeidbar. Sachkenner mögen beurtheilen, ob ich das damals gegebene Versprechen durch diese neuen Forschungen völlig ausgelöst habe.

2.

Dem Hauptthema sollen einige einleitende Untersuchungen vorausgeschickt werden, einmal, damit eine jede Lücke vermieden werde, dann, weil eine eigenartige Behandlung vielleicht auch auf dasjenige, was von Anderen entnommen ist, ein neues Licht wird werfen können. Zuerst soll von dem grössten gemeinsamen Theiler zweier algebraischer ganzer Functionen einer Veränderlichen die Rede sein. Zuvor erinnere ich daran, dass es sich hier stets nur um ganze Functionen handelt; wird aus zwei solchen ein Product gebildet, so heisst eine jede ein Theiler desselben. Die Ordnung des Theilers wird durch den Exponenten der höchsten auftretenden Potenz der Veränderlichen bestimmt, ohne dass irgend welche Rücksicht auf die numerischen Coefficienten genommen wird. Was sich übrigens auf die gemeinsamen Theiler der Functionen bezieht, kann um so kürzer abgethan werden, als es durchaus demjenigen entspricht, was bei den gemeinsamen Theilern von Zahlen gilt.

Sind zwei Functionen Y, Y' der Unbestimmten x gegeben, deren erste von höherer oder wenigstens nicht von niedrigerer Ordnung als die zweite ist, so bilden wir die folgenden Gleichungen

$$Y = qY' + Y'',\ Y' = q'Y'' + Y''',\ Y'' = q''Y''' + Y'''',\ \ldots$$
$$Y^{(\mu-1)} = q^{(\mu-1)}\, Y^{(\mu)}$$

dem Gesetze gemäss, dass zunächst Y in bekannter Weise durch Y' dividirt wird, dann Y' durch den Rest Y'' der ersten Division, welcher von niedrigerer Ordnung sein wird als Y'; dann weiter der erste Rest durch den zweiten Y''' u. s. f., bis man zu einer Division ohne Rest gelangt; dass dies endlich eintreten muss, erhellt daraus, dass die Ordnung der Functionen Y', Y'', Y''', ... beständig abnimmt. Dass diese Functionen ebenso wie die Quotienten q, q', q'', ... ganze Functionen von x seien, braucht kaum erwähnt zu werden. Hiernach ist klar:

I. Geht man von der letzten dieser Gleichungen zur ersten zurück, so ist die Function $Y^{(\mu)}$ Theiler der einzelnen vorhergehenden und also sicher gemeinsamer Theiler von Y, Y'.

II. Geht man von der ersten Gleichung zur letzten, so leuchtet es ein, dass jeder gemeinsame Theiler der Functionen Y, Y' auch die einzelnen darauf folgenden und somit auch die letzte $Y^{(\mu)}$ theilt. Folglich können die Functionen Y, Y' keinen anderen gemeinsamen Theiler höherer Ordnung haben als $Y^{(\mu)}$, und jeder gemeinsame Theiler derselben Ordnung wie $Y^{(\mu)}$ steht zu diesem in einem Zahlenverhältnisse, so dass $Y^{(\mu)}$ selbst als grösster gemeinsamer Theiler betrachtet werden kann.

III. Wenn $Y^{(\mu)}$ von der Ordnung 0, d. h. eine Zahl ist, dann kann keine Function der Unbestimmten x im engeren Sinne die Functionen Y, Y' theilen in diesem Falle muss man also sagen, dass diese Functionen keinen gemeinsamen Theiler besitzen.

IV. Wir greifen aus unseren Gleichungen die vorletzte heraus; dann eliminiren wir aus ihr $Y^{(\mu-1)}$ mit Hülfe der drittletzten, dann wiederum $Y^{(\mu-2)}$ mit Hülfe der vorhergehenden Gleichung u. s. w. Hieraus ergiebt sich

$$\begin{aligned} Y^{(\mu)} &= + k\, Y^{(\mu-2)} - k'\, Y^{(\mu-1)} \\ &= - k'\, Y^{(\mu-3)} + k''\, Y^{(\mu-2)} \\ &= + k''\, Y^{(\mu-4)} - k'''\, Y^{(\mu-3)} \\ &= - k'''\, Y^{(\mu-5)} + k''''\, Y^{(\mu-4)} = \ldots\,, \end{aligned}$$

falls man die Functionen k nach folgendem Gesetze bildet

$$k = 1,\ k' = q^{(\mu-2)},\ k'' = q^{(\mu-3)} k' + k,\ k''' = q^{(\mu-4)} k'' + k',$$
$$k'''' = q^{(\mu-5)} k''' + k'', \ldots .$$

Daher wird

$$\pm k^{(\mu-2)}\, Y \mp k^{(\mu-1)}\, Y' = Y^{(\mu)},$$

wo die oberen Zeichen für ein gerades, die unteren für ein ungerades μ gelten. In dem Falle also, in welchem Y und Y' keinen gemeinsamen Theiler besitzen, kann man auf die angegebene Weise zwei Functionen Z, Z' der Unbestimmten x auffinden, so dass man hat

$$Z\, Y + Z'\, Y' = 1.$$

V. Dieser Satz kann offenbar auch umgekehrt werden, nämlich so, dass, wenn man der Gleichung

$$Z Y + Z' Y' = 1$$

durch ganze Functionen Z, Z' der Unbestimmten x genügen kann, Y und Y' einen gemeinsamen Theiler sicher nicht haben können.

3.

Die zweite Voruntersuchung soll sich auf die Transformation der symmetrischen Functionen beziehen. Es mögen $a, b, c, \ldots$ unbestimmte Grössen sein, deren Zahl m ist; wir bezeichnen mit λ' die Summe derselben, mit λ'' die Summe aus den Producten von je zweien, mit λ''' die Summe aus den Producten von je dreien u. s. f., so dass aus der Entwicklung des Productes

$$(x-a)(x-b)(x-c)\ \ldots$$

entstehen möge

$$x^m - \lambda' x^{m-1} + \lambda'' x^{m-2} - \lambda''' x^{m-3} + \ldots$$

Die $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ sind also symmetrische Functionen der Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ d. h. solche, in welchen diese Unbestimmten in derselben Weise vorkommen, oder deutlicher, solche, welche durch irgend welche Permutationen dieser Unbestimmten unter einander nicht geändert werden. Allgemeiner wird offenbar jede ganze Function von $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$, (möge sie nun diese Unbestimmten allein enthalten, oder noch andere von $a, b, c, \ldots$ unabhängige Grössen einschliessen) eine ganze symmetrische Function der Unbestimmten $a, b, c, \ldots$.

4.

Die Umkehrung dieses Satzes ist bei weitem weniger naheliegend. Es sei ϱ eine symmetrische Function der Unbestimmten $a, b, c, \ldots$, welche also aus einer gewissen Anzahl von Gliedern der Form

$$M a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

besteht, wobei $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ ganze nicht negative Zahlen bedeuten, und M einen Coefficienten, der entweder einen festen oder wenigstens, wenn die Function ϱ ausser den Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ zufällig noch andere derartige enthält, einen von $a, b, c, \ldots$ unabhängigen Werth hat. Vor allem setzen wir eine bestimmte Ordnung unter diesen einzelnen Gliedern fest, und nehmen hierzu zunächst für die Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ selbst eine, an und für sich vollkommen willkürliche Ordnung an, so dass z. B. a die erste Stelle einnimmt, b die zweite, c die dritte u. s. w. Dann theilen wr dem ersten der beiden Glieder

$$M a^\alpha b^\beta c^\gamma \ \ldots \text{ und } M a^{\alpha'} b^{\beta'} c^{\gamma'}\ \ldots$$

eine höhere Ordnung zu als dem zweiten, wenn entweder $\alpha > \alpha'$, oder $\alpha = \alpha'$ und $\beta > \beta'$, oder $\alpha = \alpha'$, $\beta = \beta'$ und $\gamma > \gamma'$, oder ... ist, d. h. wenn die erste nicht verschwindende Differenz der Reihe $\alpha - \alpha'$, $\beta - \beta'$, $\gamma - \gamma'$, ... positiv ausfällt. Weil ferner die Glieder gleicher Ordnung nur hinsichtlich des Coefficienten M sich unterscheiden und also zu einem Gliede zusammengezogen werden können, so wollen wir annehmen, dass die einzelnen Glieder der Function ϱ zu verschiedenen Ordnungen gehören.

Jetzt beachten wir, dass, wenn $M\,a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ unter allen Gliedern der Function ϱ dasjenige der höchsten Ordnung ist, α nothwendigerweise grösser oder doch wenigstens nicht kleiner wird als β. Denn wenn $\beta > \alpha$ wäre, dann würde das Glied $M\,a^\beta\, b^\alpha c^\gamma \ldots$, welches ϱ als symmetrische Function gleichfalls enthalten muss, gegen die Voraussetzung von höherer Ordnung sein als $Ma^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ Ebenso wird β grösser oder wenigstens nicht kleiner sein als γ, ferner γ nicht kleiner als der folgende Exponent δ u. s. w.; somit werden die einzelnen Differenzen $\alpha - \beta$, $\beta - \gamma$, $\beta - \delta$, ... ganze nicht negative Zahlen.

An zweiter Stelle erwägen wir, dass, wenn aus irgend einer Anzahl von ganzen Functionen der Unbestimmten a, b, c, ... ein Product gebildet wird, das höchste Glied desselben gleich dem Producte aus den höchsten Gliedern jener Factoren sein muss. Ebenso klar ist es, dass die höchsten Glieder der Functionen λ', λ'', λ''', ... bezw. a, ab, abc, ... sind. Hieraus folgt, dass das höchste in dem Producte

$$p = M\lambda'^{\,\alpha-\beta}\,\lambda''^{\,\beta-\gamma}\,\lambda'''^{\,\gamma-\delta}\ldots$$

vorkommende Glied $Ma^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ ist; wenn man also $\varrho - p = \varrho'$ setzt, so wird das höchste Glied der Function ϱ' sicher von niedrigerer Ordnung werden als das höchste Glied der Function ϱ. Offenbar werden aber p und folglich auch ϱ' ganze symmetrische Functionen von a, b, c, ... Wenn man also ϱ' auf gleiche Weise behandelt wie vorher ϱ, dann wird es in $p' + \varrho''$ zerlegt, so dass p' ein Product aus Potenzen von λ', λ'', λ''', ... wird mit einem entweder fest bestimmten oder doch wenigstens von a, b, c, ... unabhängigen Coefficienten, ϱ'' dagegen eine ganze symmetrische Function von a, b, c, ... derart, dass ihr höchstes Glied zu einer niedrigeren Ordnung gehört, als das höchste Glied der Function ϱ'. Fährt man in gleicher Weise fort, dann wird ϱ schliesslich auf die Form $p + p' + p'' + p''' + \ldots$ gebracht, d. h. es wird in eine ganze Function von λ', λ'', λ''', ... transformirt sein.

5.

Den im vorigen Artikel bewiesenen Satz können wir auch so ausdrücken Ist irgend eine ganze symmetrische Function ϱ der Unbestimmten a, b, c, ... vorgelegt, so kann eine ganze Function von ebenso vielen Unbestimmten l', l'', l''', ... angegeben werden, derart, dass dieselbe durch die Substitutionen $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... in ϱ übergeht. Zudem lässt sich leicht zeigen, dass dies nur auf eine einzige Art geschehen kann. Nehmen wir nämlich an, dass aus zwei verschiedenen Functionen der Unbestimmten l', l'', l''', ... z. B. sowohl aus r als aus r' nach den Substitutionen $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... dieselbe Function von a, b, c, ... hervorgehe, dann würde $r - r'$ eine Function von l', l'', l''', ... sein, welche für sich nicht verschwindet, welche aber nach jenen Substitutionen identisch gleich Null wird. Dass dies jedoch widersinnig sei, erkennen wir leicht, wenn wir bedenken, dass $r-r'$ aus einer gewissen Anzahl von Theilen der Form

$$M l'^{\alpha} l''^{\beta} l'''^{\gamma} \ldots$$

zusammengesetzt sein muss, deren Coefficienten M nicht verschwinden, und welche einzeln hinsichtlich der Exponenten unter einander verschieden sind, und dass also die höchsten Glieder, welche aus diesen einzelnen Theilen hervorgehen, durch

$$M a^{\alpha+\beta+\gamma+\ldots}\ b^{\beta+\gamma+\ldots}\ c^{\gamma+\ldots}$$

gegeben werden. Diese besitzen also verschiedene Ordnungen, so dass das absolut höchste Glied auf keine Weise zerstört werden kann.

Die wirkliche Rechnung bei derartigen Transformationen lässt sich übrigens durch mancherlei Abkürzungen wesentlich vereinfachen; wir verweilen jedoch hier nicht dabei, weil für unseren Zweck schon die blosse Möglichkeit der Transformation ausreicht.

6.

Wir wollen nun das Product aus $m(m-1)$ Factoren

$$\begin{array}{l} (a-b)\ (a-c)\ (a-d)\ \ldots \\ \times\ (b-a)\ (b-c)\ (b-d)\ \ldots \\ \times\ (c-a)\ (c-b)\ (c-d)\ \ldots \\ \times\ (d-a)\ (d-b)\ (d-c)\ \ldots \times \ldots \end{array}$$

betrachten; wir bezeichnen es durch π, und nehmen an, da es die Unbestimmten a, b, c, ... symmetrisch enthält, dass es auf die Form einer Function von λ', λ'', λ''', ... gebracht sei. Diese Function möge in p übergehen, wenn l', l'', l''', ... an Stelle von λ', λ'', λ''', ... eingesetzt werden. Nachdem dies geschehen ist, nennen wir p die Determinante der Function

$$y = x^m - l' x^{m-1} + l'' x^{m-2} - l''' x^{m-3} + \ldots$$

So haben wir z. B. für $m = 2$

$$p = -l'^2 + 4l'';$$

ebenso wird für $m = 3$ gefunden

$$p = -l'^2 l''^2 + 4l'^3 l''' + 4l''^3 - 18 l' l'' l''' + 27 l'''^2.$$

Die Determinante der Function y ist also diejenige Function der Coefficienten $l', l'', l''', \ldots$, welche durch die Substitution $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda''', \ldots$ in das Product aus allen Differenzen je zweier der Grössen $a, b, c, \ldots$ übergeht. In dem Falle, dass $m = 1$ ist, dass man also nur eine einzige Unbestimmte a hat, und dass also gar keine Differenzen vorhanden sind, erscheint es geeignet, die Zahl 1 als Determinante der Function y anzunehmen.

Bei der Festsetzung des Begriffes der Determinante war es nothwendig, die Coefficienten der Function y als unbestimmte Grössen anzusehen. Die Determinante einer Function mit bestimmten Coefficienten

$$Y = x^m - L' x^{m-1} + L'' x^{m-2} - L''' x^{m-3} + \ldots$$

wird eine bestimmte Zahl P sein, nämlich der Werth der Function p für $l' = L', l'' = L'', l''' = L''', \ldots$ Wenn wir also voraussetzen, dass Y in Linearfactoren zerlegt werden kann

$$Y = (x - A)(x - B)(x - C) \ldots$$

oder dass Y aus

$$v = (x - a)(x - b)(x - c) \ldots$$

entsteht, indem man $a = A, b = B, c = C, \ldots$ setzt, und dass durch dieselben Substitutionen $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ bezw. in $L', L'', L''', \ldots$ übergehen, dann wird P offenbar gleich dem Producte aus den Factoren

$$\begin{aligned} &(A - B)\,(A - C)\,(A - D) \ldots \\ \times\, &(B - A)\,(B - C)\,(B - D) \ldots \\ \times\, &(C - A)\,(C - B)\,(C - C) \ldots \\ \times\, &(D - A)\,(D - B)\,(D - D) \ldots \times \ldots \end{aligned}$$

Es ist also klar, dass wenn $P = 0$ wird, mindestens zwei der Grössen $A, B, C, \ldots$ einander gleich werden; wenn dagegen P nicht gleich 0 ist, müssen alle Grössen $A, B, C, \ldots$ ungleich sein. Wir bemerken nun, dass, wenn wir $\frac{dY}{dx} = Y'$, oder

$$Y' = mx^{m-1} - (m-1)L'x^{m-2} + (m-2)L''x^{m-3} - (m-3)L'''x^{m-4} + \dots$$

setzen, dann herauskommt

$$\begin{aligned} Y' = \ & (x-B)(x-C)(x-D)\dots \\ & + (x-A)(x-C)(x-D)\dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-D)\dots \\ & + (x-A)(x-B)(x-C)\dots + \dots \end{aligned}$$

Wenn daher zwei von den Grössen $A, B, C, \dots$ einander gleich sind, z. B. A und B, dann wird Y' durch $x - A$ theilbar sein, und Y und Y' besitzen den gemeinsamen Theiler $x - A$. Wenn wir umgekehrt voraussetzen, dass Y' mit Y irgend welchen gemeinsamen Theiler besitzt, dann muss Y' einen der Linearfactoren $x - A$, $x - B$, $x - C$, ... enthalten, z. B. den ersten $x - A$, was sicher nicht geschehen kann, wenn A nicht einer der übrigen Grössen B, C, D, ... gleich gewesen wäre. Hieraus folgern wir also die beiden Lehrsätze

I. Wenn die Determinante der Function Y gleich 0 wird, dann hat Y mit Y' sicher einen gemeinsamen Theiler, und wenn also Y und Y' keinen gemeinsamen Theiler haben, dann kann die Determinante der Function Y nicht $= 0$ sein.

II. Wenn die Determinante der Function Y nicht $= 0$ ist, können Y und Y' sicher keinen gemeinsamen Theiler besitzen; oder: wenn Y und Y' einen gemeinsamen Theiler haben, muss die Determinante der Function Y gleich 0 sein.

7.

Es ist aber wohl zu beachten, dass die ganze Stärke dieses so einfachen Beweises auf der Annahme beruht, dass die Function Y in Linearfactoren zerlegt werden könne. Diese Annahme selbst ist aber, wenigstens an diesem Orte, an welchem es sich um den allgemeinen Beweis dieser Zerlegbarkeit handelt, nichts als eine Petitio principii. Und gleichwohl haben sich vor durchaus ähnlichen Schlüssen nicht Alle gehütet, welche analytische Beweise unseres Haupt-Theorems versucht haben. Den Ursprung solchen augenfälligen Irrthums kann man schon im Titel dieser Untersuchungen selbst erkennen, da Alle nur die Form der Gleichungswurzeln untersucht haben, während die unbesonnen vorausgesetzte Existenz derselben hätte bewiesen werden müssen. Doch über eine solche Art des Vorgehens, welche gar zu wenig mit Strenge und Klarheit im Einklange steht, haben wir in der oben erwähnten Abhandlung schon hinlänglich gesprochen. Deshalb wollen wir nunmehr die Sätze des vorhergehenden Paragraphen, deren einen Theil wenigstens wir für unseren Zweck durchaus brauchen, auf sicherer Grundlage aufbauen; mit dem zweiten, dem leichteren, beginnen wir.

8.

Wir wollen mit ϱ die Function

$$\frac{\pi(x-b)(x-c)(x-d)\ldots}{(a-b)^2(a-c)^2(a-d)^2\ldots}$$
$$+\frac{\pi(x-a)(x-c)(x-d)\ldots}{(b-a)^2(b-c)^2(b-d)^2\ldots}$$
$$+\frac{\pi(x-a)(x-b)(x-d)\ldots}{(c-a)^2(c-b)^2(c-d)^2\ldots}$$
$$+\frac{\pi(x-a)(x-b)(x-c)\ldots}{(d-a)^2(d-b)^2(d-c)^2\ldots}+\ldots$$

bezeichnen, welche, da ja π durch die einzelnen Nenner theilbar ist, eine ganze Function der Unbestimmten $x, a, b, c, \ldots$ wird. Wir setzen ferner $\frac{dv}{dx} = v'$, so dass sich ergiebt

$$\begin{aligned} v' = \; & (x-b)(x-c)(x-d)\ldots \\ & + (x-a)(x-c)(x-d)\ldots \\ & + (x-a)(x-b)(x-d)\ldots \\ & + (x-a)(x-b)(x-c)\ldots + \ldots \end{aligned}$$

Für $x = a$ wird offenbar $\varrho . v' = \pi$, und daraus schliessen wir, dass die Function $\pi - \varrho v'$ durch $x - a$, ebenso durch $x - b$, $x - c, \ldots$ und also auch durch das Product v unbestimmt theilbar sei. Setzen wir also

$$\frac{\pi - \varrho v'}{v} = \sigma,$$

so wird σ eine ganze Function der Unbestimmten $x, a, b, c, \ldots$ und zwar, ebenso wie ϱ, symmetrisch in den Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ Es können also zwei ganze Functionen r, s der Unbestimmten $x, l', l'', l''', \ldots$ gefunden werden, so dass dieselben durch die Substitutionen $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... bezw. in ϱ, σ übergehen. Wenn wir also, der Analogie folgend, die Function

$$mx^{m-1} - (m-1)l'x^{m-2} + (m-2)l''x^{m-3} - (m-3)l'''x^{m-4} + \ldots$$

d. h. den Differentialquotienten $\frac{dy}{dx}$ mit y' bezeichnen, so dass y' auch durch jene Substitutionen in v' übergeht, dann geht offenbar $p - sy - ry'$ durch dieselben Substitutionen in $\pi - \sigma v - \varrho v'$ d. h. in 0 über, und muss also für sich identisch verschwinden (§ 5). Wir haben folglich die identische Gleichung

$$p = sy + ry'.$$

Setzen wir demnach voraus, durch die Substitution $l' = L'$, $l'' = L''$, $l''' = L'''$, ... entstehe $r = R$, $s = S$, so wird auch identisch

$$P = SY + RY'$$

werden; und da S, R ganze Functionen von x sind, und P eine bestimmte Grösse oder eine Zahl ist, so folgt leicht, dass Y und Y' keinen gemeinsamen Theiler haben können, ausser wenn $P = 0$ ist. Dies ist gerade der zweite Satz aus § 6.

9.

Den Beweis des ersten Satzes wollen wir so führen, dass wir zeigen, es könne, wenn Y und Y' keinen gemeinsamen Theiler haben, P sicher nicht $= 0$ sein. Zu diesem Zwecke bestimmen wir nach den Vorschriften des § 2 zwei ganze Functionen der Unbestimmten x etwa $f(x)$ und $\varphi(x)$ so, dass die identische Gleichung

$$f(x).Y + \varphi(x).Y' = 1$$

besteht; diese können wir auch so darstellen

$$f(x).v + \varphi(x).v' = 1 + fx.(v - Y) + \varphi x.\frac{d(v - Y)}{dx},$$

oder, da wir ja haben

$$v' = (x-b)(x-c)(x-d)\ldots + (x-a)\frac{d[(x-b)(x-c)(x-d)\ldots]}{dx},$$

in der Form

$$\varphi(x).(x-b)(x-c)(x-d)\ldots + \varphi(x).(x-a)\frac{d[(x-b)(x-c)(x-d)\ldots]}{dx}$$
$$+ f(x).(x-a)(x-b)(x-c)(x-d)\ldots = 1 + f(x).(v-Y) + \varphi(x).\frac{d(v-Y)}{dx}$$

Der Kürze wegen wollen wir den Ausdruck

$$f(x).(y - Y) + \varphi(x).\frac{d(y-Y)}{dx},$$

welcher eine ganze Function der Unbestimmten x, l', l'', l''', ... ist, durch

$$F(x, l', l'', l''', \ldots)$$

bezeichnen; dadurch wird identisch

$$1 + f(x).(v - Y) + \varphi(x).\frac{d(v-Y)}{dx} = 1 + F(x, \lambda', \lambda'', \lambda''' \ldots),$$

und wir haben daher die identischen Gleichungen

$$\begin{array}{ll} & \varphi(a).(a-b)(a-c)(a-d)\ldots = 1 + F(a, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) \\ (1) & \varphi(b).(b-a)(b-c)(b-d)\ldots = 1 + F(b, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) \\ & \varphi(c).(c-a)(c-b)(c-d)\ldots = 1 + F(c, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) \\ & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

Nehmen wir folglich an, dass das Product aus allen

$$1 + F(a, l', l'', l''', \ldots),\ 1 + F(b, l', l'', l''', \ldots),$$
$$1 + F(c, l', l'', l''', \ldots), \ldots,$$

welches eine ganze Function der Unbestimmten a, b, c, ..., l', l'', l''', ... und zwar eine symmetrische Function hinsichtlich a, b, c, ... wird, durch

$$\psi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, l', l'', l''', \ldots)$$

dargestellt werde, so ergiebt sich aus der Multiplication aller Gleichungen (1) die neue identische Gleichung

$$(2) \qquad \pi.\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)\ldots = \psi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots).$$

Es ist ferner klar, dass das Product $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ ... die Unbestimmten a, b, c, ... symmetrisch einschliesst, und dass man also eine ganze Function der Unbestimmten l', l'', l''', ... so bilden kann, dass dieselbe durch die Substitutionen $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... in $\varphi(a)\varphi(b)\varphi(c)$ ... übergeht. Ist t diese Function, so wird auch identisch

$$(3) \qquad pt = \psi(l', l'', l''', \ldots l', l'', l''', \ldots),$$

da diese Gleichung ja durch die Substitutionen $l' = \lambda'$, $l'' = \lambda''$, $l''' = \lambda'''$, ... in die identische Gleichung (2) übergeht.

Schon aus der Definition der Function F selbst ergiebt sich, dass man identisch hat

$$F(x, L', L'', L''', \ldots) = 0.$$

Hieraus folgt auch identisch

$$1+F(a, L', L'', L''', \ldots)=1,\ 1+F(b, L', L'', L''', \ldots)=1,$$
$$1+F(c, L', L'', L''', \ldots)=1, \ldots,$$

und daher wird auch identisch

$$\psi(\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots L', L'', L''', \ldots)=1,$$

und also auch identisch

$$(4) \qquad \psi(l', l'', l''', \ldots, L', L'', L''', \ldots)=1.$$

Es folgt daher aus der Verbindung der Gleichungen (3) und (4) wenn wir $l'=L'$, $l''=L''$, $l'''=L'''$, ... setzen

$$(5) \qquad PT=1,$$

falls wir durch T den Werth der Function t bezeichnen, welcher jenen Substitutionen entspricht. Da dieser Werth eine endliche Grösse werden muss, so kann P sicher nicht $=0$ sein.

10.

Aus dem Vorangehenden ist nun ersichtlich, dass jede ganze Function Y einer Unbestimmten x, deren Determinante $=0$ ist, in Factoren zerlegt werden kann, deren keiner eine verschwindende Determinante hat. Sucht man nämlich den grössten gemeinsamen Theiler der Functionen Y und $\frac{dY}{dx}$ auf, so wird hierbei Y schon in zwei Factoren zerlegt. Wenn einer dieser Factoren*) wiederum die Determinante 0 besitzt, möge er auf dieselbe Art in zwei Factoren zerlegt werden, und auf diesem Wege werden wir fortfahren, bis Y endlich in solche Factoren aufgelöst vorliegt, von denen keiner die Determinante 0 hat.

Ferner überzeugt man sich leicht davon, dass unter denjenigen Factoren, in welche Y zerlegt wird, mindestens einer von der Eigenschaft vorkommt, dass unter den Factoren seiner Ordnungszahl der Factor 2 wenigstens nicht häufiger vorkommt, als dies bei der Zahl m geschieht, welche die Ordnung der

*) In Wirklichkeit kann nur derjenige Factor, welcher der grösste gemeinsame Theiler ist, eine verschwindende Determinante haben. Aber der Beweis dieses Satzes würde uns auf mancherlei Abwege führen; überdies ist er hier nicht nothwendig, da man den anderen Factor, falls auch dessen Determinante verschwinden sollte, auf gleiche Art behandeln und selbst in Factoren zerlegen könnte.

Function Y angiebt; wenn also etwa $m = k . 2^{\mu}$ gesetzt wird, wobei k eine ungerade Zahl bezeichnet, so wird es unter den Factoren von Y mindestens einen geben, der zur Ordnung $k' . 2^{\nu}$ gehören mag, für welchen bei ungeradem k' entweder $\nu = \mu$ oder $\nu < \mu$ wird. Die Richtigkeit dieser Behauptung ergiebt sich von selbst daraus, dass m das Aggregat der Zahlen ist, welche die Ordnung der einzelnen Factoren von Y ausdrücken.

11.

Bevor wir weiter gehen, wollen wir einen Ausdruck erklären, dessen Einführung bei allen Untersuchungen über symmetrische Functionen den grössten Nutzen gewährt, und der auch für unsere Zwecke überaus geeignet sein wird. Wir nehmen an, M sei eine Function von einigen der Unbestimmten $a, b, c, \ldots$; es sei μ die Anzahl derjenigen, welche in den Ausdruck M eingehen, ohne Rücksicht auf andere Unbestimmte, die etwa in M noch vorkommen. Werden jene μ Unbestimmten auf alle nur möglichen Arten sowohl unter sich als auch mit den $m - \mu$ von $a, b, c, \ldots$ noch vorhandenen vertauscht, dann entstehen aus M andere, dem M ähnliche Ausdrücke und zwar im Ganzen, M eingeschlossen,

$$m\,(m-1)\,(m-2)\,(m-3)\;\ldots\,(m-\mu+1);$$

den Complex derselben wollen wir einfach den Complex aller M nennen. Hieraus ergiebt sich von selbst, was unter dem Aggregat aller M, unter dem Producte aller $M, \ldots$ zu verstehen sei. So kann z. B. π das Product aus allen $a-b$ genannt werden, v das Product aus allen $x - a$, v' das Aggregat aus allen $\frac{v}{x-a}$, u. s. w.

Sollte zufällig M eine symmetrische Function einiger der μ Unbestimmten sein, die sie enthält, so werden die Permutationen von diesen untereinander die Function M nicht ändern, weswegen in dem Complexe aller M jedes Glied mehrfach, und zwar $(1 . 2 . 3 \ldots \nu)$. mal vorhanden ist, wenn ν die Anzahl der Unbestimmten bedeutet, in denen M symmetrisch ist. Ist aber M nicht allein in ν Unbestimmten symmetrisch, sondern überdies in ν' anderen, ferner in ν'' anderen u. s. f., dann ändert sich M nicht, wenn je zwei der ersten Unbestimmten unter einander vertauscht werden, oder je zwei von den folgenden ν', oder von den dritten ν'' u. s. f., so dass stets

$$1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu'\,.\,1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu''\ldots$$

Permutationen identische Gliedern entsprechen. Behält man also von diesen identischen Gliedern immer nur je eins zurück, so hat man im Ganzen

$$\frac{m(m-1)(m-2)(m-3)\ldots\ldots(m-\mu+1)}{1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu.\;1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu'.\;1\,.\,2\,.\,3\ldots\nu''\ldots\ldots}$$

Glieder, deren Complex wir den Complex aller M ohne Wiederholungen nennen, um ihn so vom Complex aller M mit Wiederholungen zu unterscheiden. So oft nichts ausdrücklich erwähnt ist, werden wir stets die Wiederholungen zulassen.

Man sieht übrigens leicht ein, dass das Aggregat aller M, oder das Product aus allen M, oder allgemein irgend welche symmetrische Function aus allen M stets eine symmetrische Function der Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ wird, mögen nun Wiederholungen zugelassen oder ausgeschlossen werden.

12.

Wir wollen nun das Product aus allen $u-(a+b)x+ab$ ohne Wiederholungen betrachten, wobei u, x Unbestimmte bezeichnen, und dasselbe durch ζ bezeichnen. Es wird also ζ das Product aus folgenden $\frac{1}{2}m\,(m-1)$ Factoren sein

$$\begin{aligned}&u-(a+b)x+ab,\; u-(a+c)x+ac,\; u-(a+d)x+ad, \ldots;\\ &u-(b+c)x+bc,\; u-(b+d)x+bd, \ldots\ldots;\\ &u-(c+d)x+cd, \ldots\ldots;\ \ldots\ldots\ldots\end{aligned}$$

Da diese Function die Unbestimmten $a, b, c, \ldots$ symmetrisch enthält, so lässt sich eine ganze Function der Unbestimmten $u, x, l', l'', l''', \ldots$ angeben, welche durch z bezeichnet werden soll, mit der Eigenschaft, dass sie in ζ übergeht, wenn an Stelle der Unbestimmten $l', l'', l''', \ldots$ eingesetzt wird $\lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ Endlich wollen wir durch Z die Function der Unbestimmten u, x allein bezeichnen, in welche z übergeht, wenn wir den Unbestimmten $l', l'', l''', \ldots$ die bestimmten Werthe $L', L'', L''', \ldots$ zuertheilen.

Diese drei Functionen ζ, z, Z, können als ganze Functionen der Ordnung $\frac{1}{2}m\,(m-1)$ der Unbestimmten u mit unbestimmten Coefficienten angesehen werden; diese Coefficienten sind

für ζ, Functionen der Unbestimmten $x, a, b, c, \ldots$
für z, Functionen der Unbestimmten $x, l', l'', l''', \ldots$
für Z, Functionen der einzigen Unbestimmten x.

Die einzelnen Coefficienten von z werden in die Coefficienten von ζ durch die Substitutionen $l' = \lambda', l'' = \lambda'', l''' = \lambda''', \ldots$ übergehen und ebenso in die Coefficienten von Z durch die Substitutionen $l' = L', l'' = L'', l''' = L''', \ldots$ Dasselbe, was wir soeben über die Coefficienten gesagt haben, gilt auch von den Determinanten der Functionen ζ, z, Z. Gerade diese wollen wir genauer untersuchen, und zwar zu dem Zwecke, um einen Beweis zu erbringen für den

Lehrsatz. So oft P nicht $= 0$ ist, kann die Determinante der Function Z sicher nicht $= 0$ sein.

13.

Der Beweis dieses Satzes würde ausserordentlich einfach sein, wenn vorausgesetzt werden dürfte, dass Y in lineare Factoren

$$(x-A)(x-B)(x-C)(x-D)\ldots$$

zerlegt werden kann. Dann müsste nämlich Z auch das Product aus allen $u-(A+B)x+AB$ werden, und die Determinante der Function Z das Product aus den Differenzen von je zweien der Grössen

$$(A+B)x-AB,\ (A+C)x-AC,\ (A+D)x-AD,\ \ldots;$$
$$(B+C)x-BC,\ (B+D)x-BD,\ldots;$$
$$(C+D)x-CD,\ldots;\ \ldots$$

Dieses Product könnte aber nur dann identisch verschwinden, wenn einer seiner Factoren für sich identisch $= 0$ wäre, woraus folgen würde, dass zwei der Grössen $A, B, C, \ldots$ einander gleich sind, und dass also, gegen die Voraussetzung, die Determinante der Function Y selbst $= 0$ wird.

Wir lassen einen solchen Schluss bei Seite, da derselbe gerade wie § 6 offenbar von einer Petitio principii ausgeht, und wenden uns sofort zur Darlegung eines strengen Beweises für den Satz aus § 12.

14.

Die Determinante der Function ζ wird das Product aus allen Differenzen je zweier $(a+b)x-ab$, deren Anzahl

4*

$$\tfrac{1}{2}m(m-1)(\tfrac{1}{2}m(m-1)-1)=\tfrac{1}{4}(m+1)m(m-1)(m-2)$$

beträgt. Diese Zahl giebt somit die Ordnung der Determinante der Function ζ nach der Unbestimmten x an. Die Determinante der Function z wird zu gleicher Ordnung gehören, während die Determinante der Function Z ganz wohl zu einer geringeren Ordnung gehören kann, sobald einige von den Coefficienten von der höchsten Potenz von x ab verschwinden. Unsere Aufgabe ist es, zu beweisen, dass in der Determinante der Function Z sicher nicht alle Coefficienten verschwinden können.

Betrachtet man die Differenzen näher, deren Product die Determinante der Function ζ ist, so bemerkt man, dass ein Theil derselben, nämlich diejenigen Differenzen je zweier $(a+b)x - ab$, welche ein gemeinsames Element besitzen,

das Product aus allen $(a-b)(x-c)$

liefern, während aus den übrigen, nämlich aus denjenigen Differenzen zwischen je zwei $(a+b)x-ab$, deren Elemente verschieden sind,

das Product aus allen $(a+b-c-d)x-ab+cd$

ohne Wiederholungen entsteht. Das erste Product enthält jeden Factor $a-b$ offenbar $(m-2)$mal, jeden Factor $x-c$ aber $(m-1)(m-2)$mal, woraus man leicht schliesst, dass der Werth dieses Productes

$$=\pi^{m-2}v^{(m-1)(m-2)}$$

ist. Bezeichnen wir also das zweite Product durch ϱ, so wird die Determinante der Function ζ

$$=\pi^{m-2}v^{(m-1)(m-2)}\varrho.$$

Benennen wir ferner r diejenige Function der Unbestimmten $x, l', l'', l''', \ldots$, welche durch die Substitutionen $l'=\lambda'$, $l''=\lambda''$, $l'''=\lambda'''$, ... in ϱ übergeht, und R diejenige Function von x allein, in welche r durch die Substitutionen $l'=L'$, $l''=L''$, $l'''=L'''$ übergeht, so wird offenbar die Determinante der Function z

$$=p^{m-2}y^{(m-1)(m-2)}r$$

werden, dagegen die Determinante der Function Z

$$=P^{m-2}Y^{(m-1)(m-2)}R.$$

Da nun der Annahme nach P nicht $=0$ ist, so handelt es sich jetzt um den Beweis, dass R nicht identisch verschwinden kann.

15.

Zu diesem Zwecke führen wir noch eine andere Unbestimmte w ein und wollen das Product aus allen

$$(a+b-c-d)w+(a-c)(a-d)$$

ohne Wiederholungen betrachten; da dies die $a, b, c, \ldots$ symmetrisch umfasst, so kann es als ganze Function der Unbestimmten $w, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots$ ausgedrückt werden. Wir wollen diese Functionen mit $f(w, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots)$ bezeichnen. Die Anzahl der Factoren $(a+b-c-d)w+(a-c)(a-d)$ wird

$$= \tfrac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

sein, woraus wir leicht schliessen, dass

$$f(0, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) = \pi^{(m-2)(m-3)},$$

folglich

$$f(0, l', l'', l''', \ldots) = p^{(m-2)(m-3)}$$

und

$$f(0, L', L'', L''', \ldots) = P^{(m-2)(m-3)}$$

wird. Die Function $f(w, L', L'', L''', \ldots)$ muss im allgemeinen zur Ordnung

$$\tfrac{1}{2} m(m-1)(m-2)(m-3)$$

gehören; allein in besonderen Fällen kann sie recht wohl zu einer niedrigeren Ordnung gehören, wenn zufällig einige Coefficienten von der höchsten Potenz von w ab verschwinden; es ist jedoch unmöglich, dass sie identisch $= 0$ wird, da, wie die eben gefundene Gleichung zeigt, wenigstens das letzte Glied der Function nicht verschwindet. Wir wollen annehmen, das höchste Glied der Function $f(w, L', L'', L''', \ldots)$, welches einen nicht verschwindenden Coefficienten besitzt, sei Nw^ν. Substituiren wir nun $w = x - a$, so ist offenbar $f(x-a, L', L'', L''', \ldots)$ eine ganze Function der Unbestimmten x, a, oder was dasselbe ist, eine Function von x, deren Coefficienten von der Unbestimmten a abhängen; diese Function ist so beschaffen, dass ihr höchstes Glied Nx^ν ist; sie besitzt folglich einen von a unabhängigen und von Null verschiedenen Coefficienten. Genau so werden $f(x-b, L', L'', L''', \ldots), f(x-c, L', L'', L''', \ldots), \ldots$ ganze Functionen der Unbestimmten x, welche einzeln als höchstes Glied Nx^ν besitzen, bei denen aber die Coefficienten der folgenden Glieder bezw. von $a, b, c, \ldots$ abhängen. Folglich wird das Product aus den m Factoren

$$f(x-a, L', L'', L''', \ldots),\ f(x-b, L', L'', L''', \ldots),$$
$$f(x-c, L', L'', L''', \ldots), \ldots$$

eine ganze Function von x, deren höchstes Glied $N^m x^{m\nu}$ sein wird, während die Coefficienten der folgenden Glieder von a, b, c, ... abhängen.

Wir betrachten nun ferner das Product aus den m Factoren

$$f(x-a, l', l'', l''', \ldots),\ f(x-b, l', l'', l''' \ldots),$$
$$f(x-c, l', l'', l''', \ldots), \ldots,$$

welches als Function der Unbestimmten $x, a, b, c, \ldots l', l'', l''', \ldots$, die in $a, b, c, \ldots$ symmetrisch ist, mit Hülfe der Unbestimmten $x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots l', l'', l''', \ldots$ dargestellt und durch

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots l', l'', l''', \ldots)$$

bezeichnet werden kann. Es wird also

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots)$$

das Product aus den Factoren

$$f(x-a, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots),\ f(x-b, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots),$$
$$f(x-c, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots), \ldots$$

und folglich unbestimmt theilbar durch ϱ, da, wie man leicht einsieht, jeder Factor von ϱ in einem jener Factoren enthalten ist. Wir wollen daher setzen

$$\varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots) = \varrho\, \psi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots),$$

wo das Zeichen ψ eine ganze Function andeutet. Hieraus folgt aber leicht, dass man auch identisch hat

$$\varphi(x, L', L'', L''', \ldots, L', L'', L''', \ldots) = R\,\psi(x, L', L'', L''', \ldots).$$

Wir haben aber oben bewiesen, dass das Product der Factoren

$$f(x-a, L', L'', L''', \ldots),\ f(x-b, L', L'', L''', \ldots),$$
$$f(x-c, L', L'', L''', \ldots), \ldots,$$

welches $= \varphi(x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots L', L'', L''', \ldots)$ wird, als höchstes Glied $N^m x^{m\nu}$ besitzt; folglich wird die Function $\varphi(x, L', L'', L''', \ldots, L', L'', L''', \ldots)$ dasselbe höchste Glied besitzen und also sicher nicht identisch $= 0$ sein. Deswegen kann auch R nicht identisch $= 0$ sein, und ebenso wenig die Determinante der Function Z.

16.

Lehrsatz. Bedeutet $\varphi(u, x)$*) das Product aus einer beliebigen Anzahl von Factoren, welche in u, x nur linear und also von der Form

$$\alpha + \beta u + \gamma x, \quad \alpha' + \beta' u + \gamma' x, \quad \alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x, \ldots,$$

sind, und ist w eine andere Unbestimmte, dann wird die Function

$$\varphi\left(u + w\frac{d\varphi(u, x)}{dx},\ x - w\frac{d\varphi(u, x)}{du}\right) = \Omega$$

durch $\varphi(u,x)$ unbestimmt theilbar werden.

Beweis. Setzen wir

$$\begin{aligned}\varphi(u, x) &= (\alpha + \beta u + \gamma x) Q = (\alpha' + \beta' u + \gamma' x) Q' \\ &= (\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x) Q'' = \ldots,\end{aligned}$$

so werden Q, Q', Q'', ... ganze Functionen der Unbestimmten $u, x, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma''$, ... werden, und man erhält

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(u, x)}{dx} &= \gamma Q + (\alpha + \beta u + \gamma x)\frac{dQ}{dx} = \gamma' Q' + (\alpha' + \beta' u + \gamma' x)\frac{dQ'}{dx} \\ &= \gamma'' Q'' + (\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x)\frac{dQ''}{dx} = \ldots\ldots,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\varphi(u, x)}{du} &= \beta Q + (\alpha + \beta u + \gamma x)\frac{dQ}{du} = \beta' Q' + (\alpha' + \beta' u + \gamma' x)\frac{dQ'}{du} \\ &= \beta'' Q'' + (\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x)\frac{dQ''}{dx} = \ldots\ldots\end{aligned}$$

Setzt man diese Werthe in die Factoren ein, aus denen das Product Ω gebildet wird, nämlich in

$$\begin{aligned}&\alpha + \beta u + \gamma x + \beta w\frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma w\frac{d\varphi(u, x)}{du}, \\ &\alpha' + \beta' u + \gamma' x + \beta' w\frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma' w\frac{d\varphi(u, x)}{du}, \\ &\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x + \beta'' w\frac{d\varphi(u, x)}{dx} - \gamma'' w\frac{d\varphi(u, x)}{du}, \ldots,\end{aligned}$$

*) Auch ohne besonderen Hinweis erkennt wohl jeder Leser, dass die im vorigen § eingeführten Zeichen auf jenen einzigen Paragraphen zu beschränken sind, und ebenso, dass die jetzige mit der früheren Bedeutung der Zeichen φ, w nicht verwechselt werden darf.

so erhalten diese die folgenden Werthe

$$(\alpha + \beta u + \gamma x)\left(1 + \beta w \frac{dQ}{dx} - \gamma w \frac{dQ}{du}\right),$$
$$(\alpha' + \beta' u + \gamma' x)\left(1 + \beta' w \frac{dQ'}{dx} - \gamma' w \frac{dQ'}{du}\right),$$
$$(\alpha'' + \beta'' u + \gamma'' x)\left(1 + \beta'' w \frac{dQ''}{dx} - \gamma'' w \frac{dQ''}{du}\right), \ldots,$$

so dass also Ω das Product aus $\varphi(u, x)$ und den Factoren

$$1 + \beta w \frac{dQ}{dx} - \gamma w \frac{dQ}{du}, \quad 1 + \beta' w \frac{dQ'}{dx} - \gamma' w \frac{dQ'}{du},$$
$$1 + \beta'' w \frac{dQ''}{dx} - \gamma'' w \frac{dQ''}{du}, \ldots$$

wird, d. h. aus $\varphi(u, x)$ und einer ganzen Function der Unbestimmten $u, x, w, \alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma', \alpha'', \beta'', \gamma'', \ldots$

17.

Der Lehrsatz des vorigen Paragraphen ist offenbar auf die Function ζ anwendbar, welche wir von jetzt ab durch

$$f(u, x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots)$$

bezeichnen wollen, so dass

$$f\left(u + w\frac{d\zeta}{dx}, x - w\frac{d\zeta}{du}, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots\right)$$

durch ζ unbestimmt theilbar wird; den Qotienten, welcher eine ganze Function der Unbestimmten $u, x, w, a, b, c, \ldots$ und zwar in $a, b, c, \ldots$ symmetrisch sein wird, wollen wir durch

$$\psi(u, x, w, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots)$$

darstellen. Hieraus schliessen wir, dass man auch identisch erhält

$$f\left(u + w\frac{dz}{dx}, x - w\frac{dz}{du}, l', l'', l''', \ldots\right) = z\ \psi(u, x, w, l', l'', l''', \ldots)$$

und ebenso

$$f\left(u + w\frac{dZ}{dx}, x - w\frac{dZ}{du}, L', L'', L''', \ldots\right) = Z.\psi(u, x, w, L', L'', L''', \ldots).$$

Wenn man also die Function Z einfach durch $F(u, x)$ bezeichnet, so dass man hat

$$f(u, x, L', L'', L''', \ldots) = F(u, x),$$

dann wird identisch

$$F\left(u + w\frac{dZ}{dx}, x - w\frac{dZ}{du}\right) = Z.\psi(u, x, w, L', L'', L''', \ldots).$$

18.

Setzen wir daher voraus, dass bestimmte Werthe von u, x, etwa $u = U$, $x = X$

$$\frac{dZ}{dx} = X', \ \frac{dZ}{du} = U'$$

liefern, dann wird identisch sein

$$F(U + wX', X - wU') = F(U, X).\psi(U, X, w, L', L'', L''', \ldots).$$

So oft U' nicht verschwindet, wird man

$$w = \frac{X - x}{U'}$$

setzen können, woraus dann hervorgeht

$$F\left(U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}, x\right) = F(U, X).\psi\left(U, X, \frac{X - x}{U'}, L', L'', L''', \ldots\right),$$

und dies kann auch so ausgesprochen werden:

Setzt man $u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}$, dann geht die Function Z über in

$$F(U, X).\psi\left(U, X, \frac{X - x}{U'}, L', L'', L''', \ldots\right).$$

19.

Da in demjenigen Falle, in welchem P nicht $= 0$ ist, die Determinante der Function Z eine nicht identisch verschwindende Function der Unbestimmten x ist, so wird die Anzahl der bestimmten Werthe von x, für welche diese Determinante den Werth 0 erlangen kann, eine endliche Zahl sein; es können also unendlich viele Werthe der Unbestimmten x angegeben werden, welche jener Determinante einen von 0 verschiedenen Werth ertheilen. X sei ein solcher Werth von x, (den wir überdies als reell voraussetzen können). Es wird also die Determinante der Function $F(u, X)$ nicht $= 0$, und daraus folgt, gemäss Lehrsatz II., § 6, dass die Functionen

$$F(u, X) \text{ und } \frac{dF(u, X)}{du}$$

keinen gemeinsamen Theiler haben können. Wir wollen ferner voraussetzen, dass es einen bestimmten Werth U von u giebt, welcher reell oder imaginär, d. h. von der Form $g + h\sqrt{-1}$ sein kann, und welcher $F(u, X) = 0$ macht, so dass also $F(U, X) = 0$ ist. Es wird dann $u - U$ ein unbestimmter Factor der Function $F(u, X)$, und folglich wird die Function $\frac{dF(u, X)}{du}$ sicher nicht durch $u - U$ theilbar. Nehmen wir also an, dass diese Function $\frac{dF(u, X)}{du}$ den Werth U' erhalte, wenn $u = U$ gesetzt wird, so kann sicher U' nicht $= 0$ sein. Offenbar wird aber U' der Werth des Quotienten $\frac{dZ}{du}$ bei partieller Differentiation für $u = U$, $x = X$; wenn wir also überdies den Werth des Quotienten $\frac{dZ}{dx}$ bei partieller Differentiation für dieselben Werthe von u, x mit X' bezeichnen, so ist es nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen klar, dass die Function Z durch die Substitution

$$u = U + \frac{XX'}{U'} - \frac{X'x}{U'}$$

identisch verschwindet, und also unbestimmt theilbar durch den Factor

$$u + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX'}{U'}\right)$$

wird. Setzt man daher $u = x^2$, so wird offenbar $F(x^2, x)$ durch

$$x^2 + \frac{X'}{U'}x - \left(U + \frac{XX''}{U'}\right)$$

theilbar und erhält demnach den Werth 0, wenn für x eine Wurzel der Gleichung

$$x^2 + \frac{X'}{U'}x - \left(U' + \frac{XX'}{U'}\right) = 0$$

d. h.

$$x = \frac{-X \pm \sqrt{4\,U\,U'^2 + 4\,X\,X'\,U' + X'^2}}{2\,U'}$$

genommen wird. Diese Werthe sind offenbar entweder reell oder in der Form $g + h\sqrt{-1}$ enthalten.

Jetzt kann man leicht beweisen, dass durch dieselben Werthe von x auch die Function Y verschwinden muss. Denn offenbar ist $f(x^2, x, \lambda', \lambda'', \lambda''', \ldots)$ das Product aus allen $(x - a)\,(x - b)$ ohne Wiederholungen und somit $= v^{m-1}$. Hieraus folgt sofort

$$f(x^2, x, l', l'', l''', \ldots) = y^{m-1}$$
$$f(x^2, x, L', L'', L''', \ldots) = Y^{m-1}$$

oder $F(x^2, x) = Y^{m-1}$; ein Specialwerth dieser Function kann also nicht verschwinden, wenn nicht zugleich der Werth von Y verschwindet.

20.

Durch die bisherigen Untersuchungen ist die Lösung der Gleichung $Y = 0$, d. h die Auffindung eines bestimmten Werthes von x, welcher der Gleichung genügt und entweder reell oder unter der Form $g + h\sqrt{-1}$ enthalten ist, auf die Lösung der Gleichung $F(u, X) = 0$ zurückgeführt, sobald die Determinante der Function Y nicht $= 0$ wird. Es möge bemerkt werden, dass, wenn alle Coefficienten in Y d. h. die Zahlen $L', L'', L''', \ldots$ reelle Grössen sind, auch alle Coefficienten in $F(u, X)$ reell werden, falls man, wie es erlaubt ist, für X eine reelle Grösse angenommen hat. Die Ordnung der Hülfs-Gleichung $F(u, X) = 0$ wird durch die Zahl $\frac{1}{2}m(m-1)$ ausgedrückt; ist also m eine gerade Zahl von der Form $2^{\mu}k$, wobei k unbestimmt eine ungerade Zahl anzeigen soll, so wird die Ordnung der zweiten Gleichung durch eine Zahl von der Form $2^{\mu-1}k$ ausgedrückt

In demjenigen Falle, in welchem die Function Y eine Determinante $= 0$ besitzt, wird nach § 10 eine andere Function $\mathfrak{Y}$ angegeben werden können, welche jene theilt, deren Determinante nicht $= 0$ ist, und deren Ordnung durch eine Zahl $2^{\nu}k$ ausgedrückt wird, so dass entweder $\nu < \mu$ oder $\nu = \mu$ ist. Jede beliebige Lösung der Gleichung $\mathfrak{Y} = 0$ wird auch der Gleichung $Y = 0$ genügen; die Lösung der Gleichung $\mathfrak{Y} = 0$ wird wiederum auf die Lösung einer anderen Gleichung reducirt, deren Ordnung durch eine Zahl von der Form $2^{\nu-1}k$ ausgedrückt wird.

Hieraus schliessen wir also, dass allgemein die Lösung jeder Gleichung, deren Ordnung durch eine gerade Zahl der Form $2^{\mu}k$ ausgedrückt wird, auf die Lösung einer anderen Gleichung reducirt werden kann, deren Ordnung durch eine Zahl von der Form $2^{\mu'}k$ ausgedrückt wird, wobei $\mu' < \mu$ ist. Falls diese Zahl auch jetzt noch gerade ist, d.h. falls nicht $\mu' = 0$ ist, wird diese Methode von neuem angewendet werden, und so werden wir fortfahren, bis wir zu einer Gleichung kommen, deren Ordnung durch eine ungerade Zahl ausgedrückt wird; die Coefficienten dieser Gleichung werden sämmtlich reell sein, wenigstens sobald alle Coefficienten der ursprünglichen Gleichung reell gewesen sind. Es ist aber bekannt, dass eine solche Gleichung ungeraden Grades sicher lösbar ist, und zwar durch eine reelle Wurzel. Folglich werden auch die einzelnen vorhergehenden Gleichungen lösbar sein, sei es durch reelle Wurzeln, sei es durch solche von der Form $g + h\sqrt{-1}$.

Es ist also erwiesen, dass jede Function Y von der Form $x^m - L'x^{m-1} + L''x^{m-2} - \ldots$, wo L', L'', ... bestimmte reelle Grössen sind, einen Factor $x - A$ besitzt, wo A eine reelle oder eine unter der Form $g + h\sqrt{-1}$ enthaltene Grösse ist. Im zweiten Falle erlangt, wie man leicht einsieht, Y den Werth 0 auch durch die Substitution $x = g - h\sqrt{-1}$ und ist folglich auch durch $x - (g - h\sqrt{-1})$ theilbar und deshalb auch durch das Product $x^2 - 2gx + g^2 + h^2$. Daher hat jede Function Y sicher einen reellen Factor ersten oder zweiten Grades. Weil dasselbe wiederum von dem Quotienten gilt, so ist es offenbar, dass Y in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades zerlegt werden kann. Dies nachzuweisen war der Zweck dieser Abhandlung.

8. Dritter Beweis des Satzes über die Zerlegbarkeit ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren

In: Die vier Gauss'schen Beweise für die Zerlegung ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren ersten oder zweiten Grades (1799–1849), hrsg. von Eugen Netto, Leipzig 1890 (2. Aufl. 1904, 3. Aufl. 1913), Ostwald's Klassiker Nr. 14, S. 61–67.

Original:
Theorematis de resolubilitate functionum algebraicarum integrarum in factores reales demonstratio tertia. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 3, (1814–1815) 1816, commentationes classis mathematicae, S. 135–142. In: Gauß Werke 3, S. 57–64.

Dritter Beweis des Satzes
über die Zerlegbarkeit ganzer algebraischer Functionen in reelle Factoren

von

C. F. Gauss.

Ergänzung der vorhergehenden Abhandlung.

Nachdem die vorhergehende Abhandlung schon gedruckt war, führte mich fortgesetztes Nachdenken über denselben Gegenstand auf einen neuen Beweis des Satzes, welcher ebenso wie der vorhergehende rein analytisch ist, sich aber auf ganz verschiedene Principien stützt, und hinsichtlich der Einfachheit jenem bei weitem überlegen erscheint. Diesem dritten Beweise seien nun die folgenden Seiten gewidmet.

1.

Gegeben sei folgende Function der Unbestimmten x:

$$X = x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + Cx^{m-3} + \dots Lx + Lx + M,$$

deren Coefficienten A, B, C, ... reelle bestimmte Grössen sind. Unter r, φ verstehen wir andere Unbestimmte und setzen

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + Cr^{m-3}\cos(m-3)\varphi + \dots + Lr\cos\varphi + M = t$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + Cr^{m-3}\sin(m-3)\varphi + \dots + Lr\sin\varphi = u$$

$$mr^m \cos m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + (m-2)Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + (m-3)Cr^{m-3}\cos(m-3)\varphi + \dots + Lr\cos\varphi = t'$$

$$mr^m \sin m\varphi + (m-1)Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + (m-2)Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + (m-3)Cr^{m-3}\sin(m-3)\varphi + \dots + Lr\sin\varphi = u'$$

$$m^2 r^m \cos m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \cos(m-1)\varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \cos(m-2)\varphi + (m-3)^2 C r^{m-3} \cos(m-3)\varphi + \ldots + L r \cos\varphi = t''$$

$$m^2 r^m \sin m\varphi + (m-1)^2 A r^{m-1} \sin(m-1)\varphi + (m-2)^2 B r^{m-2} \sin(m-2)\varphi + (m-3)^2 C r^{m-3} \sin(m-3)\varphi + \ldots + L r \sin\varphi = u'',$$

$$\frac{(t^2+u^2)(tt''+uu'') + (tu'-ut')^2 - (tt'+uu')^2}{r(t^2+u^2)^2} = y.$$

Den Factor r kann man offenbar aus dem Nenner der letzten Formel wegheben, da t', u', t'', u'' durch ihn theilbar sind. Endlich sei R eine bestimmte positive Grösse, die zwar willkürlich sein, aber doch die höchste der Grössen

$$mA\sqrt{2},\ \sqrt[2]{mB\sqrt{2}},\ \sqrt[3]{mC\sqrt{2}},\ \sqrt[4]{mD\sqrt{2}},\ \ldots$$

übertreffen soll; bei diesen Grössen soll von den Vorzeichen von A, B, C, D, ... abgesehen werden, d. h. die etwa vorkommenden negativen sollen in positive verwandelt werden. Nach diesen Vorbereitungen behaupte ich, dass $tt' + uu'$ sicher einen positiven Werth erhält, wenn $r = R$ gesetzt wird, welcher (reelle) Werth dem φ auch zuertheilt werde.

Beweis. Wir wollen setzen

$$R^m \cos 45^\circ + A R^{m-1} \cos(45^\circ+\varphi) + B R^{m-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + C R^{m-3} \cos(45^\circ + 3\varphi) + \ldots + L R \cos(45^\circ + (m-1)\varphi) + M \cos(45^\circ + m\varphi) = T,$$

$$R^m \sin 45^\circ + A R^{m-1} \sin(45^\circ+\varphi) + B R^{m-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + C R^{m-3} \sin(45^\circ + 3\varphi) + \ldots + L R \sin(45^\circ + (m-1)\varphi) + M \sin(45^\circ + m\varphi) = U,$$

$$m R^m \cos 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \cos(45^\circ+\varphi) + (m-2) B R^{m-2} \cos(45^\circ + 2\varphi) + (m-3) C R^{m-3} \cos(45^\circ + 3\varphi) + \ldots + L R \cos(45^\circ + (m-1)\varphi) = T',$$

$$m R \sin 45^\circ + (m-1) A R^{m-1} \sin(45^\circ+\varphi) + (m-2) B R^{m-2} \sin(45^\circ + 2\varphi) + (m-3) C R^{m-3} \sin(45^\circ + 3\varphi) + \ldots + L R \sin(45^\circ + (m-1)\varphi) = U',$$

dann folgt offenbar:

I. T ist aus den Gliedern zusammengesetzt

$$\frac{R^{m-1}}{m\sqrt{2}}(R+mA\sqrt{2}.\cos(45^\circ+\varphi))$$
$$+\frac{R^{m-2}}{m\sqrt{2}}(R^2+mB\sqrt{2}\cos(45^\circ+2\varphi))$$
$$+\frac{R^{m-3}}{m\sqrt{2}}(R^3+mC\sqrt{2}\cos(45^\circ+3\varphi))$$
$$+\frac{R^{m-4}}{m\sqrt{2}}(R^4+mD\sqrt{2}\cos(45^\circ+4\varphi))+\ldots,$$

welche für jeden bestimmten reellen Werth von φ, wie man leicht sieht, einzeln positiv werden; folglich muss T einen positiven Werth annehmen. Auf ähnliche Art wird bewiesen, dass auch U, T', U' positiv werden, so dass auch $TT'+UU'$ eine positive Grösse werden muss.

II. Für $r=R$ gehen die Functionen t, u, t', u', bezw. in

$$\begin{aligned}
&T\cos(45^\circ+m\varphi)+U\sin(45^\circ+m\varphi),\\
&T\sin(45^\circ+m\varphi)-U\cos(45^\circ+m\varphi),\\
&T'\cos(45^\circ+m\varphi)+U'\sin(45^\circ+m\varphi),\\
&T'\sin(45^\circ+m\varphi)-U'\cos(45^\circ+m\varphi)
\end{aligned}$$

über, wie durch wirkliche Entwickelung leicht gezeigt wird. Folglich wird der Werth der Function $tt'+uu'$ für $r=R$ gleich $TT'+UU'$ und also eine positive Grösse werden.

Uebrigens schliessen wir aus denselben Formeln, dass der Werth der Function t^2+u^2 für $r=R$ gleich T^2+U^2 und also positiv wird, und daraus folgt, dass für keinen Werth von r, welcher grösser ist als die einzelnen Grössen $mA\sqrt{2}$, $\sqrt{mB\sqrt{2}}$, $\sqrt[3]{mC\sqrt{2}}$, ..., zugleich $t=0$, $u=0$ sein kann.

2.

Lehrsatz. Innerhalb der Grenzen $r=0$ und $r=R$ sowie $\varphi=0$ und $\varphi=360^\circ$ giebt es sicher solche Werthe der Unbestimmten r, φ, für welche zugleich $t=0$ und $u=0$ wird.

Beweis. Wir wollen annehmen, der Lehrsatz sei nicht richtig; es ist offenbar, dass der Werth von t^2+u^2 für alle

Werthe der Unbestimmten innerhalb der angegebenen Grenzen eine positive Grösse werden muss, sodass der Werth von y stets endlich ist. Wir betrachten das Doppelintegral

$$\iint y\,dr\,d\varphi$$

von $r=0$ bis $r=R$ und von $\varphi=0$ bis $\varphi=360^\circ$ erstreckt, welches also einen endlichen, vollkommen bestimmten Werth erlangt. Dieser Werth, den wir durch Ω bezeichnen wollen, muss erhalten werden, gleichgültig, ob man die Integration zuerst nach φ und dann nach r oder in umgekehrter Ordnung ausführt. Wir haben aber unbestimmt, wenn wir r als Constante betrachten,

$$\int y\,d\varphi=\frac{tu'-ut'}{r(t^2+u^2)},$$

wie durch Differentiation nach φ leicht bestätigt wird. Eine Constante ist nicht hinzuzufügen, falls wir voraussetzen, dass die Integration von $\varphi=0$ beginnt, da man ja für $\varphi=0$ erhält $\frac{tu'-ut'}{r(t^2+u^2)}=0$. Da nun offenbar $\frac{tu'-ut'}{r(t^2+u^2)}$ auch für $\varphi=360^\circ$ verschwindet, so wird das Integral $\int y\,d\varphi$ von $\varphi=0$ bis $\varphi=360^\circ$ genommen $=0$, während r unbestimmt bleibt. Hieraus folgt aber $\Omega=0$.

Ebenso haben wir unbestimmt, indem wir φ als constant betrachten,

$$\int y\,dr=\frac{tt'+uu'}{t^2+u^2},$$

wie ebenso leicht durch Differentiation nach r bestätigt wird; auch hier braucht keine Constante hinzugefügt zu werden, falls man die Integration mit $r=0$ beginnt. Deshalb wird nach dem im vorigen Paragraphen Bewiesenen das von $r=0$ bis $r=R$ ausgedehnte Integral $=\frac{TT'+UU'}{T^2+U^2}$, und folglich nach dem Satze des vorigen Paragraphen für jeden reellen Werth von φ stets eine positive Grösse. Folglich wird auch Ω d. h. der Werth des Integrals

$$\int\frac{TT'+UU'}{T^2+U^2}\,d\varphi$$

von $\varphi=0$ bis $\varphi=360^\circ$ genommen, nothwendig eine positive

Grösse.*) Dies ist widersinnig, da wir dieselbe Grösse vorher $= 0$ gefunden haben. Unsere Voraussetzung kann daher nicht zutreffen, und damit ist die Richtigkeit des Satzes erwiesen.

3.

Die Function X geht durch die Substitution $x = r(\cos\varphi + \sin\varphi\sqrt{-1})$ in $t + u\sqrt{-1}$ und durch die Substitution $x = r(\cos\varphi - \sin\varphi\sqrt{-1})$ in $t - u\sqrt{-1}$ über. Wenn also für bestimmte Werthe von r, φ etwa für $r = g$, $\varphi = G$ zugleich $t = 0$, $u = 0$ entsteht, (und dass es solche Werthe giebt, ist im vorigen Paragraphen nachgewiesen worden), dann erhält X für jede der Substitutionen

$$x = g(\cos G + \sin G.\sqrt{-1}),\quad x = g(\cos G - \sin G.\sqrt{-1})$$

den Werth 0, und wird folglich unbestimmt durch

$$x - g(\cos G + \sin G.\sqrt{-1})$$

und ebenso durch $x - g(\cos G - \sin G.\sqrt{-1})$

theilbar. So oft $\sin G$ nicht $= 0$ ist, noch $g = 0$, sind diese Divisoren ungleich, und X wird folglich auch durch ihr Product

$$x^2 - 2g\cos G.x + g^2$$

theilbar sein; so oft aber entweder $\sin G = 0$ und also $\cos G = \pm 1$ oder $g = 0$ ist, sind jene Factoren identisch, nämlich $= x \mp g$. Es steht also fest, dass die Function X einen reellen Divisor zweiten oder ersten Grades besitzt, und da derselbe Schluss wieder für den Quotienten gilt, so ist X vollständig in solche Factoren auflösbar.

4.

Obwohl wir im Vorangehenden die von uns unternommene Aufgabe vollständig zu Ende geführt haben, so wird es doch

---

*) Dies ist an und für sich klar. Uebrigens wird als unbestimmtes Integral leicht $m\varphi + 45^\circ - \operatorname{arc\,tang}\frac{U}{T}$ ermittelt, und man kann auf anderem Wege beweisen, (denn an und für sich ist es noch nicht zu übersehen, welchen von den unendlich vielen Werthen der mehrwerthigen Function $\operatorname{arc\,tang}\frac{U}{T}$, die zu $\varphi = 360^\circ$ gehören, man wählen muss), dass der Werth, welchen man bei der Integration für $\varphi = 360^\circ$ erhält, $= m.360^\circ$ oder $= 2m\pi$ gesetzt werden muss. Aber dies ist für unseren Zweck nicht nothwendig.

nicht überflüssig sein, noch Einiges über die Schlussfolgerungen des § 2 hinzuzufügen. Von der Voraussetzung aus, dass t und u für keine Werthe der Unbestimmten r, φ zwischen den dort angegebenen Grenzen zugleich verschwinden, sind wir in einen unvermeidlichen Widerspruch verfallen, woraus wir die Unrichtigkeit der Voraussetzung selbst erschlossen haben. Dieser Widerspruch muss also aufhören, wenn es wirklich Werthe von r, φ giebt, für welche t und u zugleich $= 0$ werden. Um dies noch weiter zu veranschaulichen, bemerken wir, dass für solche Werthe $t^2 + u^2 = 0$ und also y unendlich wird, so dass es nicht länger erlaubt ist, das Doppelintegral $\iint y\, dr\, d\varphi$ als angebbare Grösse zu behandeln. Im Allgemeinen giebt, wenn ξ, η, ζ die Coordinaten von Raumpunkten bezeichnen, das Integral $\iint y\, dr\, d\varphi$ das Volumen eines Körpers, welcher durch die fünf Ebenen begrenzt wird, deren Gleichungen

$$\xi = 0,\ \eta = 0,\ \zeta = 0,\ \xi = R,\ \eta = 360^\circ$$

sind, und durch eine Fläche, deren Gleichung $\zeta = y$ ist, wenn man diejenigen Theile des Körpers als negativ betrachtet, in denen die Coordinaten ζ negativ sind. Aber hier wird stillschweigend angenommen, dass die sechste Fläche stetig sei; wenn diese Bedingung dadurch fällt, dass y unendlich wird, kann es ganz wohl geschehen, dass jene Auffassung keinen Sinn mehr hat. In diesem Falle kann von der Auswerthung des Integrals $\iint y\, dr\, d\varphi$ keine Rede sein, und deshalb ist es nicht wunderbar, dass analytische Operationen, in blindem Rechnen auf nichtige Dinge angewendet, zu Widersinnigem führen.

Die Integration $\int y\, d\varphi = \dfrac{tu' - ut'}{r(t^2 + u^2)}$ ist nur so lange eine wirkliche Integration d. h. Summation, als zwischen den Grenzen, in denen man integrirt, y überall eine endliche Grösse ist, dagegen wird sie widersinnig, wenn y irgend wo zwischen jenen Grenzen unendlich wird. Wenn wir ein solches Integral $\int \eta\, d\xi$, welches im Allgemeinen die Fläche zwischen der Abscissenaxe und der Curve angiebt, bei welcher die Ordinate η zur Abscisse ξ gehört, nach den gewöhnlichen Regeln entwickeln und dabei der Stetigkeit uneingedenk sind, so können wir uns sehr oft in Widersprüche verstricken. Setzen wir z. B. $\eta = \dfrac{1}{\xi^2}$, so liefert die Analysis als Integral $C - \dfrac{1}{\xi}$, wodurch die Fläche richtig angegeben wird, so lange die Curve ihre Stetigkeit bewahrt; da diese bei $\xi = 0$ unterbrochen ist, so würde, wenn Jemand ungereimter Weise nach der Grösse der Fläche von einer negativen bis zu einer positiven Abscisse fragte, aus der Formel die widersinnige Antwort folgen, dieselbe sei negativ. Was aber diese und ähnliche analytische Paradoxen bedeuten, das soll bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher verfolgt werden.

Hier möge nur noch eine einzige Bemerkung angefügt werden. Werden Fragen ohne irgend welche Einschränkung vorlegt, welche in gewissen Fällen widersinnig werden können, so hilft sich die Analysis sehr häufig dadurch, dass sie eine zum Theil unbestimmte Antwort giebt. Wenn wir z. B. das Integral $\iint y\,dr\,d\varphi$ von $r = e$ bis $r = f$ und $\varphi = E$ bis $\varphi = F$ erstrecken und den Werth von $\frac{u}{t}$

$$\begin{array}{lll} \text{für } r = e, & \varphi = E & \text{durch } \Theta \\ r = e, & \varphi = F & \Theta' \\ r = f, & \varphi = E & \Theta'' \\ r = f, & \varphi = F & \Theta''' \end{array}$$

bezeichnen, so erhält man leicht durch analytische Operationen den Integralwerth

$$\text{arc tang } \Theta - \text{arc tang } \Theta' - \text{arc tang } \Theta'' + \text{arc tang } \Theta'''$$

Das Integral kann in Wirklichkeit nur dann einen bestimmten Werth haben, wenn y zwischen den angegebenen Grenzen stets endlich bleibt. Dieser Werth ist in der angegebenen Formel sicher enthalten, aber er ist durch dieselbe nicht völlig bestimmt, da ja der arc tang eine mehrwerthige Function ist, und es muss weiter durch andere, übrigens nicht schwierige Betrachtungen entschieden werden, welche Functionalwerthe in einem bestimmten Falle zu bevorzugen sind. Wenn dagegen y irgend wo zwischen den angegebenen Grenzen unendlich wird, dann ist die Frage nach dem Werthe des Integrals $\iint y\,dr\,d\varphi$ widersinnig. Dies hindert nicht, dass, wenn man durchaus eine Antwort aus der Analysis herauspressen will, verschiedene Methoden bald dies bald jenes geben, wobei die einzelnen Werthe unter der vorher gegebenen allgemeinen Formel enthalten sind.

9. Bestimmung der Anziehung, die ein Planet auf einen Punkt beliebig gegebener Lage ausübte, wenn seine Masse auf die ganze Bahn im Verhältnis zur Zeit, in der ihre einzelnen Teile durchlaufen werden, gleichmäßig verteilt wäre

In: Bestimmung der Anziehung eines elliptischen Ringes, Nachlaß zur Theorie des arithmetisch-geometrischen Mittels und der Modulfunktion, übersetzt und hrsg. von Harald Geppert, Leipzig 1927, Ostwald's Klassiker Nr. 225, S. 1–26.

Original:
Determinatio attractionis quam in punctum quodvis positionis datae exerceret planeta si eius massa per totam orbitam ratione temporis quo singulae partes describuntur uniformiter esset dispertita. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 4, (1816–1818) 1820, commentationes classis mathematicae, S. 21–48. In: Gauß Werke 3, S. 331–355.

Bestimmung der Anziehung, die ein Planet auf einen Punkt beliebig gegebener Lage ausübte, wenn seine Masse auf die ganze Bahn im Verhältnis zur Zeit, in der ihre einzelnen Teile durchlaufen werden, gleichmäßig verteilt wäre.

1.

Die säkularen Änderungen, die die Elemente einer Planetenbahn infolge der Störung durch einen andern Planeten erfahren, sind von der Lage des letzteren in seiner Bahn unabhängig, und ihre Werte sind die gleichen, mag der störende Planet die elliptische Bahn nach den Keplerschen Gesetzen durchlaufen, oder mag seine Masse in der Weise auf die Bahn gleichmäßig verteilt gedacht werden, daß die in gleicher Zeit durchlaufenen Bahnstücke auch mit gleicher Masse belegt werden, sofern nur die Umlaufszeiten des gestörten und des störenden Planeten nicht kommensurabel sind. Dieser elegante Satz kann, wenn er auch bislang von niemandem ausdrücklich ausgesprochen worden ist, aus den Grundsätzen der Himmelsmechanik sehr leicht bewiesen werden.[1]) Es erhebt sich daher die folgende Aufgabe, die sowohl an sich als auch wegen mehrerer Kunstgriffe, die ihre Lösung erfordert, des Interesses wert ist: die Anziehung einer Planetenbahn oder, besser gesagt, eines elliptischen Ringes, dessen Dicke unendlich klein und nach dem eben erwähnten Gesetze veränderlich ist, auf einen Punkt beliebig gegebener Lage genau zu bestimmen.

2.

Bezeichnen wir die Exzentrizität der Bahn mit e und die exzentrische Anomalie eines beliebigen Bahnpunktes mit

E, so wird ihrem Elemente dE das Element $(1-e \cos E)\, dE$ der mittleren Anomalie entsprechen[2]); daher verhält sich das Massenelement, das dem jenen Elementen entsprechenden Bahnteilchen zuzuordnen ist, zur Gesamtmasse, die wir als Einheit wählen wollen, wie $(1-e \cos E)\, dE$ zu 2π, wobei π den halben Umfang des Kreises mit dem Radius 1 bedeutet. Bedeutet daher ϱ den Abstand des angezogenen Punktes vom Bahnpunkt, so ist die von dem Bahnelement hervorgerufene Anziehung gleich:

$$\frac{(1-e \cos E)\, dE}{2\pi\varrho^2}$$

Wir werden ferner die größere Halbachse mit a, die kleinere mit b bezeichnen und die erstere als Abszissenachse, den Mittelpunkt der Ellipse aber als Anfangspunkt wählen. Daher ist $a^2 - b^2 = a^2 e^2$, die Abszisse eines Bahnpunktes $= a \cos E$, die Ordinate $= b \sin E$. Schließlich bezeichnen wir den Abstand des angezogenen Punktes von der Bahnebene mit C, die andern zu den beiden Halbachsen parallelen Koordinaten mit A und B. Nunmehr werde die Anziehung eines Bahnelements zerlegt in zwei zu den Halbachsen parallele und eine auf der Bahnebene senkrechte Komponente:

$$\frac{(A-a \cos E)\ (1-e \cos E)\, dE}{2\pi\varrho^3} = d\xi,$$

$$\frac{(B-b \sin E)\ (1-e \cos E)\, dE}{2\pi\varrho^3} = d\eta,$$

$$\frac{C(1-e \cos E)\, dE}{2\pi\varrho^3} = d\zeta,$$

wobei $\varrho = \sqrt{(A-a \cos E)^2 + (B-b \sin E)^2 + C^2}$ ist.

Integriert man diese Differentiale von $E=0$ bis $E=360^\circ$, so ergeben sich die Attraktionskomponenten ξ, η, ζ in Richtung der negativen Koordinatenachsen, aus denen sich die Gesamtattraktion zusammensetzen läßt, und die man nach bekannter Methode auf jede andere Richtung umrechnen kann.

3.

Der Kern der Sache liegt nun darin, an Stelle von E eine andere Variable einzuführen, durch die die Quadratwurzel eine einfachere Form erhält. Zu diesem Zwecke setzen wir:

$$\cos E = \frac{\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

$$\sin E = \frac{\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T}{\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T},$$

wo aber die neun Koeffizienten $\alpha, \alpha', \alpha''$ usw. offenbar nicht vollkommen willkürlich sind, sondern gewissen Bedingungen genügen müssen, die zunächst zu untersuchen sind. Zuvörderst bemerken wir, daß die Substitution die gleiche bleibt, wenn alle Koeffizienten mit demselben Faktor multipliziert werden, so daß man ohne Einschränkung der Allgemeinheit einem von ihnen einen bestimmten Wert geben, z. B. $\gamma = 1$ setzen könnte; dennoch mögen vorläufig der besseren Form wegen alle neun Größen noch unbestimmt bleiben. Wir bemerken ferner, daß solche Werte auszuschließen sind, für die $\alpha, \alpha', \alpha''$ oder β, β', β'' bzw. zu den $\gamma, \gamma', \gamma''$ proportional sind, denn andernfalls bliebe E nicht mehr veränderlich. Es dürfen daher die Größen $\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma''$, $\gamma''\alpha-\gamma\alpha''$, $\gamma\alpha'-\gamma'\alpha$ nicht gleichzeitig verschwinden.

Offenbar müssen die Koeffizienten $\alpha, \alpha', \alpha''$ usw. so beschaffen sein, daß allgemein

$$(\alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T)^2 + (\beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T)^2 - (\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2 = 0$$

wird, weshalb diese Funktion notwendig die Form haben muß

$$k(\cos^2 T + \sin^2 T - 1).$$

Hieraus erhalten wir sechs Bedingungsgleichungen

$$\text{(I)}\qquad \begin{aligned}
-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 &= k,\\
-\alpha'^2 - \beta'^2 + \gamma'^2 &= -k,\\
-\alpha''^2 - \beta''^2 + \gamma''^2 &= -k,\\
-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
-\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0,\\
-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0.
\end{aligned}$$

Aus diesen Gleichungen folgen mehrere andere, deren Entwicklung der Mühe lohnt. Setzt man zur Abkürzung[3])

$$\text{(II)}\qquad \alpha\beta'\gamma'' + \alpha'\beta''\gamma + \alpha''\beta\gamma' - \alpha\beta''\gamma' - \alpha'\beta\gamma'' - \alpha''\beta'\gamma = \varepsilon,$$

so leitet man durch Kombination der Gleichungen (I) leicht die folgenden neun ab:

1*

$$
\text{(III)}\qquad
\begin{aligned}
\varepsilon\alpha &= -k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')\\
\varepsilon\beta &= -k(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')\\
\varepsilon\gamma &= +k(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\
\varepsilon\alpha' &= +k(\beta''\gamma-\gamma''\beta)\\
\varepsilon\beta' &= +k(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)\\
\varepsilon\gamma' &= -k(\alpha''\beta-\beta''\alpha)\\
\varepsilon\alpha'' &= +k(\beta\gamma'-\gamma\beta')\\
\varepsilon\beta'' &= +k(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')\\
\varepsilon\gamma'' &= -k(\alpha\beta'-\beta\alpha').
\end{aligned}
$$

Aus den drei ersten dieser Gleichungen wiederum erhalten wir die folgende

$$
\begin{aligned}
&\varepsilon\alpha(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')+\varepsilon\beta(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')+\varepsilon\gamma(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')\\
&\quad=-k(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2-k(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2+k(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2,
\end{aligned}
$$

die gleichbedeutend ist mit

$$
\begin{aligned}
\varepsilon^2 = k(-\alpha'^2-\beta'^2+\gamma'^2)(-\alpha''^2-\beta''^2+\gamma''^2)\\
-k(-\alpha'\alpha''-\beta'\beta''+\gamma'\gamma'')^2,
\end{aligned}
$$ [4])

und diese verwandelt sich mittels der 2., 3., 4. Gleichung aus (I) in die folgende:

$$
\text{(IV)}\qquad \varepsilon^2 = k^3.
$$

Ebenso leitet man aus den Gleichungen (I) leicht die folgenden ab:

$$
\text{(V)}\qquad
\begin{aligned}
(\beta'\gamma''-\gamma'\beta'')^2 &= -k(k-\alpha'^2-\alpha''^2)\\
(\gamma'\alpha''-\alpha'\gamma'')^2 &= -k(k-\beta'^2-\beta''^2)\\
(\alpha'\beta''-\beta'\alpha'')^2 &= +k(k+\gamma'^2+\gamma''^2)\\
(\beta''\gamma-\gamma''\beta)^2 &= +k(k+\alpha^2-\alpha''^2)\\
(\gamma''\alpha-\alpha''\gamma)^2 &= +k(k+\beta^2-\beta''^2)\\
(\alpha''\beta-\beta''\alpha)^2 &= -k(k-\gamma^2+\gamma''^2)\\
(\beta\gamma'-\gamma\beta')^2 &= +k(k+\alpha^2-\alpha'^2)\\
(\gamma\alpha'-\alpha\gamma')^2 &= +k(k+\beta^2-\beta'^2)\\
(\alpha\beta'-\beta\alpha')^2 &= -k(k-\gamma^2+\gamma'^2).
\end{aligned}
$$

Als Beispiel geben wir die Herleitung der ersten Formel an, nach deren Muster sich die übrigen leicht bilden lassen. Die 4., 2., 3. Gleichung aus (I) liefert sofort:

$$
\begin{aligned}
(\gamma'\gamma''-\beta'\beta'')^2-(\gamma'^2-\beta'^2)(\gamma''^2-\beta''^2)\\
=\alpha'^2\alpha''^2-(\alpha'^2-k)(\alpha''^2-k),
\end{aligned}
$$

und diese Beziehung gibt entwickelt die erste Gleichung aus (V).

Aus diesen Gleichungen (V) folgern wir, daß der Wert $k = 0$ bei unserer Untersuchung nicht zulässig ist; denn andernfalls verschwänden alle neun Größen $\beta'\gamma'' - \gamma'\beta''$ usw., d. h. die Koeffizienten α, α', α'' würden sich als zu β, β', β'' und γ, γ', γ'' proportional ergeben. Daher kann auch wegen Gleichung (IV) die Größe ε nicht verschwinden, und folglich muß k notwendig eine positive Größe sein, wenn anders alle Koeffizienten α, α', α'' usw. reell sein sollen. Kombiniert man die drei ersten Gleichungen aus (III) mit den drei ersten aus (V), so entstehen die folgenden Beziehungen, die offenbar von dem nichtverschwindenden Werte von k abhängen:

$$\text{(VI)}\qquad \begin{aligned} \alpha^2 - \alpha'^2 - \alpha''^2 &= -k \\ \beta^2 - \beta'^2 - \beta''^2 &= -k \\ \gamma^2 - \gamma'^2 - \gamma''^2 &= +k. \end{aligned}$$

Die Kombination der übrigen ergäbe dasselbe. Zu diesen fügen wir die drei folgenden:

$$\text{(VII)}\qquad \begin{aligned} \beta\gamma - \beta'\gamma' - \beta''\gamma'' &= 0, \\ \gamma\alpha - \gamma'\alpha' - \gamma''\alpha'' &= 0, \\ \alpha\beta - \alpha'\beta' - \alpha''\beta'' &= 0, \end{aligned}$$

die man leicht aus den Gleichungen (III) gewinnt; z. B. ergeben die zweite, fünfte und achte Gleichung:

$$\begin{gathered} \varepsilon\beta\gamma - \varepsilon\beta'\gamma' - \varepsilon\beta''\gamma'' \\ = -k\gamma(\gamma'\alpha'' - \alpha'\gamma'') - k\gamma'(\gamma''\alpha - \alpha''\gamma) - k\gamma''(\gamma\alpha' - \gamma'\alpha) = 0. \end{gathered}$$

Offenbar sind auch diese Beziehungen von der Ausschließung des Wertes $k = 0$ abhängig.*)[5])

Da man, wie schon oben bemerkt, alle Koeffizienten α, α', α'' usw. mit demselben Faktor multiplizieren kann, wobei sich dann der Wert von k mit dem Quadrate dieses Faktors multipliziert, setzen wir von jetzt an:

$$k = 1,$$

woraus dann notwendig $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ folgt. Es

*) Es ist vielleicht nicht überflüssig, zu bemerken, daß wir die vorangehende Darstellung mit Absicht gewählt und einer anderen Ableitung der Relationen III bis VII vorgezogen haben, die zwar den Anschein etwas größerer Eleganz hat, jedoch, streng genommen, einigen Bedenken unterliegt, die man nicht ohne Weitläufigkeiten hätte beseitigen können.

erhellt daher, daß die neun Koeffizienten α, α', α'' usw., zwischen denen sechs Bedingungsgleichungen bestehen, auf drei voneinander unabhängige Größen reduzierbar sein müssen, was am einfachsten mittels dreier Winkel durch den folgenden Ansatz erreicht wird:

$$\begin{aligned}
\alpha &= \cos L \operatorname{tang} N\\
\beta &= \sin L \operatorname{tang} N\\
\gamma &= \sec N\\
\alpha' &= \cos L \cos M \sec N \pm \sin L \sin M\\
\beta' &= \sin L \cos M \sec N \mp \cos L \sin M\\
\gamma' &= \cos M \operatorname{tang} N\\
\alpha'' &= \cos L \sin M \sec N \mp \sin L \cos M\\
\beta'' &= \sin L \sin M \sec N \pm \cos L \cos M\\
\gamma'' &= \sin M \operatorname{tang} N,
\end{aligned}$$

wo von den beiden Zeichen sich die oberen auf den Fall $\varepsilon = +1$, die unteren auf den Fall $\varepsilon = -1$ beziehen. Doch wird die analytische Behandlung größtenteils eleganter ohne Benutzung dieser Winkel durchgeführt. Im übrigen wäre es nicht schwer, die geometrische Bedeutung sowohl dieser Winkel als auch der übrigen in dieser Untersuchung auftretenden Hilfsgrößen anzugeben; diese Deutung überlassen wir aber, da sie für unsern Gegenstand nicht notwendig ist, dem erfahrenen Leser.

4.

Wenn man in dem Ausdruck für die Entfernung ϱ an Stelle von $\cos E$ und $\sin E$ die oben angegebenen Werte einsetzt, so geht er in die folgende Form über:

$$\varrho = \frac{\sqrt{G + G'\cos^2 T + G''\sin^2 T + 2H\cos T\sin T + 2H'\sin T + 2H''\cos T}}{\gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T},$$

wo wir die Koeffizienten α, α', α'' usw. so bestimmen wollen, daß außer den sechs Bedingungsgleichungen

$$(1)\qquad \begin{aligned}
-\alpha^2 - \beta^2 + \gamma^2 &= 1,\\
-\alpha'^2 - \beta'^2 + \gamma'^2 &= -1,\\
-\alpha''^2 - \beta''^2 + \gamma''^2 &= -1,\\
-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' &= 0,\\
-\alpha''\alpha - \beta''\beta + \gamma''\gamma &= 0,\\
-\alpha\alpha' - \beta\beta' + \gamma\gamma' &= 0,
\end{aligned}$$

und den übrigen daraus folgenden, noch die Relationen:

$$H = 0,\ H' = 0,\ H'' = 0$$

bestehen, wodurch, allgemein zu reden, die Aufgabe bestimmt sein wird.[6]) Wenn wir daher den Nenner von ϱ mit t bezeichnen, so muß die Funktion

$$(A^2 + B^2 + C^2)t^2 + a^2(t\cos E)^2 + b^2(t\sin E)^2 \\ - 2aAt\cdot t\cos E - 2bBt\cdot t\sin E$$

der drei Größen t, $t\cos E$, $t\sin E$ durch die Substitution

$$\begin{aligned} t\cos E &= \alpha + \alpha'\cos T + \alpha''\sin T, \\ t\sin E &= \beta + \beta'\cos T + \beta''\sin T, \\ t &= \gamma + \gamma'\cos T + \gamma''\sin T \end{aligned}$$

in

$$G + G'\cos^2 T + G''\sin^2 T$$

übergehen. Offenbar ist dies das gleiche, wie wenn man verlangt, daß die Funktion

$$W = a^2x^2 + b^2y^2 + (A^2 + B^2 + C^2)z^2 - 2aAxz - 2bByz$$

der drei Unbestimmten x, y, z durch die Substitution

$$\begin{aligned} x &= \alpha u + \alpha' u' + \alpha'' u'', \\ y &= \beta u + \beta' u' + \beta'' u'', \\ z &= \gamma u + \gamma' u' + \gamma'' u'' \end{aligned}$$

in die Funktion

$$Gu^2 + G'u'^2 + G''u''^2$$

der drei Unbestimmten u, u', u'' übergehen soll. Da aber aus diesen Formeln mittels (1) leicht folgt,

$$\begin{aligned} u &= -\alpha x - \beta y + \gamma z, \\ u' &= \alpha' x + \beta' y - \gamma' z, \\ u'' &= \alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z, \end{aligned}$$

so muß offenbar die Funktion W identisch sein mit der folgenden:

$$G(-\alpha x - \beta y + \gamma z)^2 + G'(\alpha' x + \beta' y - \gamma' z)^2 \\ + G''(\alpha'' x + \beta'' y - \gamma'' z)^2,$$

woraus wir die sechs Gleichungen erhalten:

$$(2)\qquad \begin{aligned} a^2 &= G\alpha^2 + G'\alpha'^2 + G''\alpha''^2 \\ b^2 &= G\beta^2 + G'\beta'^2 + G''\beta''^2 \\ A^2 + B^2 + C^2 &= G\gamma^2 + G'\gamma'^2 + G''\gamma''^2 \\ bB &= G\beta\gamma + G'\beta'\gamma' + G''\beta''\gamma'' \\ aA &= G\gamma\alpha + G'\gamma'\alpha' + G''\gamma''\alpha'' \\ 0 &= G\alpha\beta + G'\alpha'\beta' + G''\alpha''\beta''. \end{aligned}$$

Aus diesen zwölf Gleichungen (1) und (2) werden wir unsere Unbekannten G, G', G'', α, α', α'' usw. zu bestimmen haben.

5.

Durch Kombination der Gleichungen (1) und (2) leitet man leicht die folgenden ab:

$$-\alpha a^2 + \gamma a A = \alpha G,$$
$$-\beta b^2 + \gamma b B = \beta G,$$
$$\gamma\,(A^2 + B^2 + C^2) - \alpha a A - \beta b B = \gamma G,$$

woraus weiter folgt:

(3) $$\alpha = \frac{\gamma a A}{a^2 + G},$$

(4) $$\beta = \frac{\gamma b B}{b^2 + G},$$

$$A^2 + B^2 + C^2 - \frac{a^2 A^2}{a^2 + G} - \frac{b^2 B^2}{b^2 + G} = G.$$

Die letzte Relation können wir auch so schreiben:

(5) $$\frac{A^2}{a^2 + G} + \frac{B^2}{b^2 + G} + \frac{C^2}{G} = 1.$$

Weiter erhalten wir durch Kombination der Gleichungen (1) und (2):

$$\alpha' a^2 - \gamma' a A = \alpha' G',$$
$$\beta' b^2 - \gamma' b B = \beta' G',$$
$$-\gamma'\,(A^2 + B^2 + C^2) + \alpha' a A + \beta' b B = \gamma' G',$$

und hieraus

(6) $$\alpha' = \frac{\gamma' a A}{a^2 - G'},$$

(7) $$\beta' = \frac{\gamma' b B}{b^2 - G'},$$

(8) $$\frac{A^2}{a^2 - G'} + \frac{B^2}{b^2 - G'} - \frac{C^2}{G'} = 1,$$

und schließlich auf gleichem Wege:

(9) $$\alpha'' = \frac{\gamma'' a A}{a^2 - G''},$$

$$\beta'' = \frac{\gamma'' b B}{b^2 - G''}, \tag{10}$$

$$\frac{A^2}{a^2 - G''} + \frac{B^2}{b^2 - G''} - \frac{C^2}{G''} = 1. \tag{11}$$

Man sieht daher, daß G, $-G'$, $-G''$ die Wurzeln der Gleichung

$$\frac{A^2}{a^2 + x} + \frac{B^2}{b^2 + x} + \frac{C^2}{x} = 1 \tag{12}$$

sind, die entwickelt die Form hat:

$$\begin{aligned} x^3 &- (A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2)\, x^2 \\ &+ (a^2 b^2 - a^2 B^2 - a^2 C^2 - b^2 A^2 - b^2 C^2)\, x \\ &- a^2 b^2 C^2 = 0. \end{aligned} \tag{13}$$ [7])

6.

Aus der bloßen Form dieser kubischen Gleichung ist bereits folgendes zu entnehmen:

I. Aus dem letzten Gliede $-a^2 b^2 C^2$ der Gleichung schließt man, daß diese sicher eine reelle Wurzel hat, die entweder positiv, oder falls $C = 0$, ebenfalls gleich Null ist. Wir werden diese reelle nichtnegative Wurzel mit g bezeichnen.

II. Subtrahiert man von der Gleichung (12) in der Form

$$x = \frac{A^2 x}{a^2 + x} + \frac{B^2 x}{b^2 + x} + C^2$$

die folgende:

$$g = \frac{A^2 g}{a^2 + g} + \frac{B^2 g}{b^2 + g} + C^2,$$

und dividiert durch $x - g$, so entsteht eine neue Gleichung,

$$1 = \frac{a^2 A^2}{(a^2 + x)(a^2 + g)} + \frac{b^2 B^2}{(b^2 + x)(b^2 + g)},$$

die die beiden übrigen Wurzeln liefert, und die richtig geordnet und aufgelöst ergibt:

$$(14)\quad \begin{aligned} 2x &= \frac{a^2A^2}{a^2+g} + \frac{b^2B^2}{b^2+g} - a^2 - b^2 \\ &\pm\sqrt{\left(a^2-b^2-\frac{a^2A^2}{a^2+g}+\frac{b^2B^2}{b^2+g}\right)^2+\frac{4a^2b^2A^2B^2}{(a^2+g)(b^2+g)}}. \end{aligned}$$

Da die Größe unter der Wurzel ihrer Natur nach positiv oder wenigstens nichtnegativ ist, zeigt dieser Ausdruck, daß auch die beiden übrigen Wurzeln stets reell ausfallen.

III. Subtrahiert man aber voneinander dieselben Gleichungen in folgender Gestalt:

$$gx = \frac{A^2gx}{a^2+x} + \frac{B^2gx}{b^2+x} + gC^2,$$

$$gx = \frac{A^2gx}{a^2+g} + \frac{B^2gx}{b^2+g} + xC^2,$$

und dividiert durch $g-x$, so entsteht eine Beziehung, die die beiden übrigen Wurzeln in folgender Form enthält:

$$0 = \frac{A^2gx}{(a^2+g)(a^2+x)} + \frac{B^2gx}{(b^2+g)(b^2+x)} + C^2,$$

der offenbar, da g eine positive Größe ist, durch einen positiven Wert von x nicht genügt werden kann, woraus wir schließen, daß unsere kubische Gleichung nicht mehr als eine positive Wurzel haben kann.

IV. Sofern daher 0 nicht zu den Wurzeln unserer Gleichung gehört, werden notwendig eine positive und zwei negative Wurzeln vorhanden sein. Wenn aber $C = 0$, und also 0 eine der Wurzeln ist, werden die übrigen durch die Gleichung

$$x^2 - (A^2 + B^2 - a^2 - b^2)\,x + a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2 = 0$$

geliefert, wonach die Werte dieser Wurzeln sind:

$$\tfrac{1}{2}(A^2 + B^2 - a^2 - b^2) \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(A^2 - B^2 - a^2 + b^2)^2 + 4A^2B^2}.$$

Drei Fälle wird man hier wiederum zu unterscheiden haben:

Erstens: Wenn der letzte Term $a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2$ positiv ist (d. h. wenn der angezogene Punkt in der Ebene der anziehenden Ellipse *innerhalb* dieser Kurve liegt), werden beide Wurzeln, da sie reell sein müssen, das gleiche Zeichen haben, und da sie nicht gleichzeitig positiv sein können, werden sie notwendig negativ sein. Übrigens kann dies auch unabhängig von dem schon Bewiesenen aus der Tatsache geschlossen werden, daß der mittlere Koeffizient, den man in die Form

$$(a^2b^2 - a^2B^2 - b^2A^2)\left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}\right) + \frac{b^2A^2}{a^2} + \frac{a^2B^2}{b^2}$$

setzen kann, in diesem Falle offenbar positiv ist.

Zweitens. Wenn der letzte Term negativ, also der angezogene Punkt in der Ebene der Ellipse *außerhalb* der Kurve gelegen ist, so ist notwendig die eine Wurzel positiv, die andere negativ.

Drittens aber, wenn der letzte Term verschwindet, also der angezogene Punkt in der Ellipsenperipherie selbst liegt, wird auch die zweite Wurzel gleich Null, und die dritte

$$= -\frac{b^2A^2}{a^2} - \frac{a^2B^2}{b^2},$$

also negativ. Im übrigen werden wir diesen physikalisch unmöglichen Fall, in dem die Anziehung selbst unendlich groß ausfiele, aus unserer Betrachtung, wenigstens an dieser Stelle, ausschließen.

7.

Zur Bestimmung der Koeffizienten γ, γ', γ'' finden wir aus den Gleichungen (1), (3), (4), (6), (7), (9), (10):

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \left(\frac{aA}{a^2+G}\right)^2 - \left(\frac{bB}{b^2+G}\right)^2}},$$

(15) $$\gamma' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G'}\right)^2 - 1}},$$

$$\gamma'' = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{aA}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{bB}{b^2-G''}\right)^2 - 1}}.$$

Kombiniert man diese Gleichungen passend mit (5), (8), (11), so folgt:

$$\gamma = \sqrt{\frac{G}{\left(\frac{AG}{a^2+G}\right)^2 + \left(\frac{BG}{b^2+G}\right)^2 + C^2}},$$

$$(16) \qquad \gamma' = \sqrt{\frac{G'}{\left(\frac{AG'}{a^2-G'}\right)^2 + \left(\frac{BG'}{b^2-G'}\right)^2 + C^2}},$$

$$\gamma'' = \sqrt{\frac{G''}{\left(\frac{AG''}{a^2-G''}\right)^2 + \left(\frac{BG''}{b^2-G''}\right)^2 + C^2}}.$$

Diese letzteren Ausdrücke zeigen, daß keine der Größen G, G', G'' negativ sein kann, wenn $\gamma, \gamma', \gamma''$ reell sein sollen.

In dem Falle, daß C nicht gleich Null ist, muß daher G notwendig gleich der positiven Wurzel der Gleichung (13) gesetzt werden, und es erhellt daher, daß $-G'$ gleich der einen, $-G''$ gleich der andern negativen Wurzel sein muß*); welche Wurzel wir für $-G'$ und welche für $-G''$ nehmen, ist weiterhin gleichgültig.

Falls $C = 0$ und der angezogene Punkt innerhalb der Kurve liegt, muß man notwendig die beiden negativen Wurzeln der Gleichung (13) für $-G'$ und $-G''$ nehmen, und folglich $G = 0$ setzen. Da aber in diesem Falle die erste Formel in (16) unbestimmt wird, ziehen wir statt ihrer die erste Formel aus (15) heran, die liefert:

---

*) Genau genommen folgt aus der vorangehenden Ableitung nur, daß $-G'$ und $-G''$ die Gleichung (13) befriedigen müssen, wobei es noch zweifelhaft erscheint, ob es nicht erlaubt ist, sowohl $-G'$ als auch $-G''$ *derselben* negativen Wurzel gleichzusetzen, indem man weiterhin die dritte Wurzel außer acht läßt. Aber man erkennt leicht, daß, wenn die zweite und dritte Wurzel der Gleichung verschieden sind, aus $-G' = -G''$ folgen würde: $\gamma' = \gamma''$, $\alpha' = \alpha''$, $\beta' = \beta''$ und also $-\alpha'\alpha'' - \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = -\alpha'^2 - \beta'^2 + \gamma'^2 = 1$, was der vierten Gleichung (I) widerspricht. Vgl. was im folgenden über den Fall zweier gleicher Wurzeln der Gleichung (13) gesagt wird.

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{A^2}{a^2} - \frac{B^2}{b^2}}}.$$

Falls aber für $C = 0$ der angezogene Punkt außerhalb der Ellipse liegt, ist die positive Wurzel der Gleichung (13) gleich G, und entweder die negative $= -G'$ und $G'' = 0$, oder die negative Wurzel $= -G''$ und $G' = 0$ zu setzen; den Koeffizienten γ'' bzw. γ' finden wir dann aus der Formel

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{A^2}{a^2} + \frac{B^2}{b^2} - 1}}.$$

Schließlich würden in dem schon ausgeschlossenen Falle, wo der angezogene Punkt als in der Ellipsenperipherie selbst gelegen angenommen wird, die Koeffizienten γ und γ' oder γ und γ'' unendlich groß ausfallen, was besagt, daß unsere Transformation auf diesen Fall überhaupt nicht anwendbar ist.

8.

Obgleich die Formeln (15), (16) zur Bestimmung der Koeffizienten $\gamma, \gamma', \gamma''$ ausreichen, so können wir sie doch durch elegantere ersetzen. Zu diesem Zwecke multiplizieren wir die Gleichung (5) mit $a^2b^2 - G^2$, wodurch nach leichter Reduktion folgt:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G} - A^2G + \frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G} - B^2G$$
$$+ \frac{a^2b^2C^2}{G} - C^2G = a^2b^2 - G^2.$$

Aus dem Wesen der kubischen Gleichung folgt aber, daß die Summe der Wurzeln $G - G' - G'' = A^2 + B^2 + C^2 - a^2 - b^2$, das Produkt der Wurzeln $GG'G'' = a^2b^2C^2$ ist. Daher geht die vorangehende Gleichung in die folgende über:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G} + \frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}$$
$$+ G'G'' - G(G - G' - G'' + a^2 + b^2) = a^2b^2 - G^2,$$

die man auch so darstellen kann:

$$\frac{a^2A^2(b^2+G)}{a^2+G}+\frac{b^2B^2(a^2+G)}{b^2+G}$$
$$-(a^2+G)(b^2+G)+(G+G')(G+G'')=0.$$

Damit verwandelt sich der Wert des Koeffizienten γ aus der ersten Formel (15) in den folgenden:

$$\gamma=\sqrt{\frac{(a^2+G)(b^2+G)}{(G+G')(G+G'')}}. \tag{17}$$

Durch eine ganz ähnliche Ableitung gewinnt man:

$$\gamma'=\sqrt{\frac{(a^2-G')(b^2-G')}{(G+G')(G''-G')}}, \tag{18}$$

$$\gamma''=\sqrt{\frac{(a^2-G'')(b^2-G'')}{(G+G'')(G'-G'')}}. \tag{19}$$

Nach Ermittlung der Koeffizienten γ, γ', γ'' werden die übrigen α, β, α', β', α'', β'' daraus mittels der Formeln (3), (4), (6), (7), (9), (10) abgeleitet.

9.

Man erkennt leicht, daß die Vorzeichen der Wurzeln, durch die wir $\gamma, \gamma', \gamma''$ bestimmt haben, beliebig angenommen werden können. Es verlohnt aber der Mühe, zu untersuchen, auf welche Weise das Vorzeichen der Größe ε mit jenen Vorzeichen zusammenhängt. Zu diesem Zwecke betrachten wird die dritte Gleichung in (III), Art. 3.

$$\varepsilon\gamma=\alpha'\beta''-\beta'\alpha'',$$

die sich durch die Formeln (6), (7), (9), (10) verwandelt in:

$$\varepsilon\gamma=\frac{abAB\gamma'\gamma''}{(a^2-G')(b^2-G'')}-\frac{abAB\gamma'\gamma''}{(a^2-G'')(b^2-G')}$$
$$=\frac{ab(a^2-b^2)AB(G''-G')\gamma'\gamma''}{(a^2-G')(a^2-G'')(b^2-G')(b^2-G'')}.$$

Andererseits finden wir leicht aus der Gleichung (13):

$$(a^2+G)(a^2-G')(a^2-G'')=a^2(a^2-b^2)A^2,$$
$$(b^2+G)(b^2-G')(b^2-G'')=-b^2(a^2-b^2)B^2.$$

Daher wird die vorangehende Gleichung:

$$\varepsilon\gamma = \frac{(a^2 + G)(b^2 + G)(G' - G'')\gamma'\gamma''}{ab(a^2 - b^2)AB},$$

was mit (17) kombiniert liefert:

$$\gamma\gamma'\gamma'' = \frac{\varepsilon ab(a^2 - b^2)AB}{(G + G')(G + G'')(G' - G'')}.$$

Daraus erhellt, daß, wenn für $-G'$ die absolut größere negative Wurzel der kubischen Gleichung genommen wird und man die Koeffizienten γ, γ', γ'' alle gleichzeitig positiv annimmt, ε dasselbe Zeichen erhält wie AB, und daß das gleiche stattfindet, wenn von diesen vier Bedingungen entweder alle vier oder zwei derselben nicht erfüllt sind, daß aber das Entgegengesetzte eintritt, wenn eine oder drei dieser Bedingungen verletzt werden. Es ist übrigens zweckmäßig, hier die folgenden Beziehungen anzumerken, die sich aus den vorangehenden leicht ableiten lassen:

$$\alpha\alpha'\alpha'' = \frac{\varepsilon a^2 b A^2 B}{(G + G')(G + G'')(G' - G'')},$$

$$\beta\beta'\beta'' = \frac{-\varepsilon a b^2 A B^2}{(G + G')(G + G'')(G' - G'')},$$

$$\alpha\beta = \frac{abAB}{(G + G')(G + G'')},$$

$$\alpha'\beta' = \frac{-abAB}{(G + G')(G' - G'')},$$

$$\alpha''\beta'' = \frac{abAB}{(G + G'')(G' - G'')}.$$

10.

Unsere Formeln können in gewissen Fällen, die man gesondert betrachten muß, unbestimmt werden. Zunächst wollen wir den Fall behandeln, daß die negativen Wurzeln $-G'$, $-G''$ der kubischen Gleichung gleich werden, wodurch die Koeffizienten γ, γ'' nach den Formeln (18), (19) unendliche Werte anzunehmen scheinen, die aber in Wirklichkeit unbestimmt sind.

Setzt man in Formel (14) $g = G$, so muß offenbar, damit zwei Werte von x, nämlich $-G'$ und $-G''$, zusammenfallen,

$$AB = 0,\ a^2 - b^2 - \frac{a^2A^2}{a^2+G} + \frac{b^2B^2}{b^2+G} = 0$$

sein.

Daraus erkennt man leicht, da $a^2 - b^2$ von Natur aus entweder positiv oder gleich Null ist, daß

$$B = 0,$$

$$a^2 - b^2 = \frac{a^2A^2}{a^2+G} \quad \text{oder} \quad a^2 + G = \frac{a^2A^2}{a^2-b^2}$$

sein muß. Setzen wir diese Werte in (14) ein, so wird:

$$G' = G'' = b^2.$$

Setzt man weiter den Wert $x = -b^2$ in die kubische Gleichung (13) ein, so kommt:

$$(a^2 - b^2)(C^2 + b^2) = b^2A^2.$$

Wenn diese Bedingungsgleichung gleichzeitig mit $B = 0$ statthat, so liegt der Fall vor, den wir behandeln. Und da

$$G = \frac{a^2A^2}{a^2-b^2} - a^2 = \frac{a^2C^2}{b^2}$$

wird, liefert Formel (17)

$$\gamma = \sqrt{\frac{a^2b^2A^2}{(a^2-b^2)(a^2C^2+b^4)}} = \sqrt{\frac{a^2C^2+a^2b^2}{a^2C^2+b^4}},$$

und darauf die Formeln (3), (4):

$$\alpha = \frac{\gamma(a^2-b^2)}{aA} = \frac{\gamma b^2A}{a(C^2+b^2)} = \sqrt{\frac{b^2(a^2-b^2)}{a^2C^2+b^4}} = \sqrt{\frac{b^4A^2}{(C^2+b^2)(a^2C^2+b^4)}},$$

$\beta = 0$.

Die durch (18), (19) vermittelten Werte der Koeffizienten γ', γ'' bleiben in diesem Falle unbestimmt und ebenso die Werte der übrigen Koeffizienten α', β', α'', β''. Trotzdem lassen sich durch einen dieser Koeffizienten alle übrigen fünf ausdrücken, z. B. wird nach Formel (6):

$$\alpha' = \frac{\gamma' aA}{a^2-b^2},$$

und ferner:

$$\beta' = \sqrt{1-\alpha'^2+\gamma'^2}, \quad \gamma'' = \sqrt{\gamma^2-1-\gamma'^2},$$
$$\alpha'' = \frac{\gamma'' a A}{a^2-b^2}, \quad \beta'' = \sqrt{1-\alpha''^2+\gamma''^2}.$$

Eleganter jedoch verfährt man folgendermaßen: Aus

$$\gamma^2 = 1+\alpha^2, \; \alpha\alpha' = \gamma\gamma', \; 1 = \alpha'^2+\beta'^2-\gamma'^2$$

folgt

$$\beta'^2 + \frac{\gamma'^2}{\alpha^2} = 1-\alpha'^2+\frac{\gamma^2\gamma'^2}{\alpha^2} = 1.$$

Daher können wir setzen:

$$\beta' = \cos f, \; \gamma' = \alpha \sin f, \; \alpha' = \gamma \sin f.$$

Dann finden wir aber aus den Formeln:

$$\varepsilon\alpha'' = \beta\gamma'-\gamma\beta', \quad \varepsilon\beta'' = \gamma\alpha'-\alpha\gamma', \quad \varepsilon\gamma'' = \beta\alpha'-\alpha\beta', \quad \varepsilon^2 = 1,$$

daß

$$\alpha'' = -\varepsilon\gamma \cos f, \; \beta'' = \varepsilon \sin f, \; \gamma'' = -\varepsilon\alpha \cos f.$$

Der Wert des Winkels f ist hierbei willkürlich und man kann auch beliebig $\varepsilon = +1$ oder $\varepsilon = -1$ wählen.[8])

11.

Wenn G', G'' ungleich sind, können die aus den Formeln (17), (18), (19) folgenden Werte der Koeffizienten γ, γ', γ'' nicht unbestimmt sein; sobald dagegen eine der Größen a^2-G', b^2-G', a^2-G'', b^2-G'' verschwindet, scheint der bezw. aus den Formeln (6), (7), (9), (10) abgeleitete Wert der Koeffizienten α', β', α'', γ'' auf den ersten Anblick unbestimmt zu werden; jedoch lehrt ein wenig Achtsamkeit, daß sich die Sache anders verhält.

Nehmen wir z. B. an, es sei $a^2-G'=0$, dann wird nach Gleichung (18) $\gamma'=0$ und nach Gleichung (7) $\beta'=0$ (es sei denn, daß gleichzeitig $a^2=b^2$ wird), wonach notwendig $\alpha'=\pm 1$ sein muß. Ist aber gleichzeitig $a^2=b^2$, so gibt die Formel, die der Gleichung (6) des Art. 5 voraufgeht, $\alpha'A+\beta'B=0$, was in Verbindung mit $\alpha'^2+\beta'^2=1$ liefert:

$$\alpha' = \frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}, \quad \beta' = \frac{-A}{\sqrt{A^2+B^2}}.$$

Diese Ausdrücke können offenbar nicht unbestimmt sein, es sei denn, daß gleichzeitig $A = 0$, $B = 0$ ist, womit wir jedoch auf den im vorangehenden Artikel behandelten Fall zurückkommen.

12.

Nachdem wir den Weg angegeben haben, um die zwölf Größen $G, G', G'', \alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma, \gamma', \gamma''$ vollständig zu bestimmen, gehen wir an die Entwicklung des Differentials dE. Wir setzen

$$t = \gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T, \tag{20}$$

so daß

$$t \cos E = \alpha + \alpha' \cos T + \alpha'' \sin T, \tag{21}$$

$$t \sin E = \beta + \beta' \cos T + \beta'' \sin T \tag{22}$$

wird.

Daraus folgern wir:

$$\begin{aligned} t\, dE &= \cos E\, d(t \sin E) - \sin E\, d(t \cos E) \\ &= \cos E\; (\beta'' \cos T - \beta' \sin T)\, dT \\ &\qquad - \sin E\, (\alpha'' \cos T - \alpha' \sin T)\, dT, \end{aligned}$$

und daher:

$$\begin{aligned} t^2\, dE &= (\alpha\beta'' - \alpha''\beta) \cos T\; dT + (\alpha'\beta - \beta'\alpha) \sin T\; dT \\ &\qquad + (\alpha'\beta'' - \beta'\alpha'')\; dT \\ &= \varepsilon\gamma' \cos T\; dT + \varepsilon\gamma'' \sin T\; dT + \varepsilon\gamma\; dT = \varepsilon t\; dT, \end{aligned}$$

oder

$$t\, dE = \varepsilon\; dT. \tag{23}$$

Bemerkenswert ist, daß die Größe t von Natur aus immer positiv ist, wenn der Koeffizient γ positiv ist, und immer negativ, wenn γ negativ ist. Da nämlich

$$(\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)^2 + (\gamma'' \cos T - \gamma' \sin T)^2 = \gamma'^2 + \gamma''^2 = \gamma^2 - 1$$

ist, wird stets $\gamma' \cos T + \gamma'' \sin T$, vom Vorzeichen abgesehen, kleiner als γ sein. Daraus schließen wir, daß, wenn $\varepsilon\gamma$ eine positive Größe ist, die Variablen E und T stets zugleich wachsen, wenn aber $\varepsilon\gamma$ negativ ist, notwendig die eine Variable beständig abnimmt, während die andere wächst.

13.

Der Zusammenhang zwischen den Variablen E und T wird durch folgende Überlegung noch besser verdeutlicht. Setzen wir $\sqrt{\gamma^2-1}=\delta$, so daß $\delta^2=\alpha^2+\beta^2=\gamma'^2+\gamma''^2$ wird, so schließen wir aus den Gleichungen (20), (21), (22):

$$\begin{aligned} t\,(\delta+\alpha\cos E+\beta\sin E) \\ &=\gamma\delta+\alpha^2+\beta^2+(\gamma'\delta+\alpha\alpha'+\beta\beta')\cos T \\ &\qquad\qquad+(\gamma''\delta+\alpha\alpha''+\beta\beta'')\sin T \\ &=(\gamma+\delta)\,(\delta+\gamma'\cos T+\gamma''\sin T). \end{aligned}$$

Ferner folgt aus den Gleichungen (21), (22)

$$t\,(\alpha\sin E-\beta\cos E)=\varepsilon\,(\gamma'\sin T-\gamma''\cos T).$$

Setzt man

$$\frac{\alpha}{\delta}=\cos L,\ \frac{\beta}{\delta}=\sin L,\ \frac{\gamma'}{\delta}=\cos M,\ \frac{\gamma''}{\delta}=\sin M,$$

so nehmen diese Gleichungen die folgende Form an:

$$t\left\{1+\cos(E-L)\right\}=(\gamma+\delta)\left\{1+\cos(T-M)\right\},$$
$$t\sin(E-L)=\varepsilon\sin(T-M),$$

woraus durch Division und wegen $(\gamma+\delta)(\gamma-\delta)=1$ folgt:

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L)=\varepsilon\,(\gamma-\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M),$$
$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(T-M)=\varepsilon\,(\gamma+\delta)\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}(E-L).$$

Hieraus ergibt sich nicht nur die Schlußfolgerung, auf die wir am Ende des vorigen Artikels geführt wurden, sondern es erhellt außerdem, daß, wenn der Wert von E um 360° wächst, der Wert von T um die gleiche Größe wächst oder abnimmt, je nachdem $\varepsilon\gamma$ positiv oder negativ ist. Setzen wir noch $\delta=\operatorname{tang}N,\ \gamma=\sec N$, so wird offenbar

$$\gamma-\delta=\operatorname{tang}(45^\circ-\tfrac{1}{2}N),\ \gamma+\delta=\operatorname{tang}(45^\circ+\tfrac{1}{2}N).$$

14.

Aus der Kombination der Gleichungen (20), (21), (22) mit denen des Art. 5 erhalten wir:

$$at\ (A-a\cos E)=\alpha G-\alpha'G'\cos T-\alpha''G''\sin T,$$
$$bt\ (B-b\sin E)=\beta G-\beta'G'\cos T-\beta''G''\sin T.$$

2*

Setzen wir daher zur Abkürzung:

$$(\alpha G - \alpha' G' \cos T - \alpha'' G'' \sin T)$$
$$\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\} = aX$$
$$(\beta G - \beta' G' \cos T - \beta'' G'' \sin T)$$
$$\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\} = bY$$
$$C(\gamma + \gamma' \cos T + \gamma'' \sin T)$$
$$\{\gamma - e\alpha + (\gamma' - e\alpha')\cos T + (\gamma'' - e\alpha'')\sin T\} = Z,$$

so wird

$$d\xi = \frac{\varepsilon X\, dT}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad d\eta = \frac{\varepsilon Y\, dT}{2\pi t^3 \varrho^3}, \quad d\zeta = \frac{\varepsilon Z\, dT}{2\pi t^3 \varrho^3}.$$

Man hat aber

$$t\varrho = \pm \sqrt{G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T},$$

wobei das obere bzw. untere Zeichen gilt, je nachdem t eine positive oder negative Größe ist (ϱ wird nämlich seiner Natur nach als beständig positiv angenommen), d. h. je nachdem der Koeffizient γ positiv oder negativ ist. Hieraus folgt:

$$\frac{\varepsilon\, dT}{2\pi t^3 \varrho^3} = \pm \frac{dT}{2\pi\,(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

wo das unbestimmte Vorzeichen von dem Zeichen der Größe $\gamma\varepsilon$ abhängt.

Um nun die Werte von ξ, η, ζ selbst zu finden, muß man die Integration der Differentiale ausführen, und zwar von dem Werte T, dem $E = 0$, bis zu dem Werte, dem $E = 360^\circ$ entspricht, oder auch (was offenbar auf dasselbe hinauskommt) von dem Werte von T ab, dem ein willkürlicher Wert von E entspricht, bis zu dem Werte T, dem dieser Wert von E, vermehrt um 360°, entspricht; man kann daher die Integration erstrecken von $T = 0$ bis $T = 360^\circ$, wenn $\varepsilon\gamma$ eine positive Größe ist, oder von $T = 360^\circ$ bis $T = 0$, wenn $\varepsilon\gamma$ negativ ist. Offenbar wird daher, unabhängig vom Vorzeichen von $\varepsilon\gamma$ sein:

$$\xi = \int \frac{X\, dT}{2\pi\ (G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

$$\eta = \int \frac{Y\, dT}{2\pi\ (G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

$$\zeta = \int \frac{Z\,dT}{2\pi\,(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

wo die Integrationen sich von $T = 0$ bis $T = 360^\circ$ erstrecken.

15.

Man erkennt ohne Mühe, daß die Integrale

$$\int \frac{\cos T\,dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

$$\int \frac{\sin T\,dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

$$\int \frac{\cos T \sin T\,dT}{(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}},$$

erstreckt von $T = 180^\circ$ bis $T = 360^\circ$, den gleichen Wert annehmen wie die von $T = 0$ bis $T = 180^\circ$ erstreckten, aber mit dem entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Integrale; daher werden diese Integrale, erstreckt von $T = 0$ bis $T = 360^\circ$, offenbar gleich Null. Hieraus entnehmen wir, daß

$$\xi = \int \frac{(\gamma - e\alpha)\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\alpha' G' \cos^2 T - (\gamma'' - e\alpha'')\alpha'' G'' \sin^2 T}{2\pi\, a\,(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}}\,dT,$$

$$\eta = \int \frac{(\gamma - e\alpha)\beta G - (\gamma' - e\alpha')\beta' G' \cos^2 T - (\gamma'' - e\alpha'')\beta'' G'' \sin^2 T}{2\pi\, b\,(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}}\,dT,$$

$$\zeta = \int \frac{\{(\gamma - e\alpha)\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma' \cos^2 T + (\gamma'' - e\alpha'')\gamma'' \sin^2 T\}\, C}{2\pi\,(G + G' \cos^2 T + G'' \sin^2 T)^{3/2}}\,dT$$

ist, wobei die Integrale von $T = 0$ bis $T = 360^\circ$ erstreckt sind. Bezeichnen wir daher die Werte der über das gleiche Intervall genommenen Integrale

$$\int \frac{\cos^2 T\,dT}{2\pi\,\{(G + G') \cos^2 T + (G + G'') \sin^2 T\}^{3/2}},$$

$$\int \frac{\sin^2 T\,dT}{2\pi\,\{(G + G') \cos^2 T + (G + G'') \sin^2 T\}^{3/2}}$$

mit P, Q, so wird:

$$a\xi = \left\{(\gamma - e\alpha)\,\alpha G - (\gamma' - e\alpha')\,\alpha' G'\right\} P$$
$$+ \left\{(\gamma - e\alpha)\,\alpha G - (\gamma'' - e\alpha'')\,\alpha'' G''\right\} Q,$$
$$b\eta = \left\{(\gamma - e\alpha)\,\beta G - (\gamma' - e\alpha')\,\beta' G'\right\} P$$
$$+ \left\{(\gamma - e\alpha)\,\beta G - (\gamma'' - e\alpha'')\,\beta'' G''\right\} Q,$$
$$\zeta = \left\{(\gamma - e\alpha)\,\gamma + (\gamma' - e\alpha')\gamma'\right\} CP$$
$$+ \left\{(\gamma - e\alpha)\,\gamma + (\gamma'' - e\alpha'')\,\gamma''\right\} CQ,$$

womit unser Problem vollständig gelöst ist.

16.

Was nun die Größen P, Q anlangt, so werden offenbar beide gleich

$$\frac{1}{2\,(G + G')^{3/2}}$$

falls $G' = G''$ ist, während sie in allen übrigen Fällen auf Transzendente führen. Wie man nun diese durch Reihen ausdrücken kann, ist hinreichend bekannt; wir hoffen aber dem Leser einen Gefallen zu tun, wenn wir bei dieser Gelegenheit ein Verfahren zur Bestimmung dieser und anderer Transzendenten durch einen besonderen, sehr handlichen Algorithmus entwickeln, den wir schon seit vielen Jahren oft verwendet haben und von dem wir an anderer Stelle ausführlicher zu handeln beabsichtigen.

Es seien m, n zwei positive Größen, dann setzen wir:

$$m' = \tfrac{1}{2}\,(m + n), \quad n' = \sqrt{m\,n},$$

so daß m' bzw. n' das arithmetische und das geometrische Mittel zwischen m und n sind. Wir setzen voraus, daß das geometrische Mittel stets positiv angenommen wird. Weiter sei

$$m'' = \tfrac{1}{2}\,(m' + n'), \quad n'' = \sqrt{m'\,n'},$$
$$m''' = \tfrac{1}{2}\,(m'' + n''), \quad n''' = \sqrt{m'' n''},$$

und so fort, dann streben die Reihen $m, m', m'', \ldots$ und $n, n', n'', \ldots$ sehr schnell gegen einen *gemeinsamen Grenzwert,* den wir mit μ bezeichnen und einfach das *arithmetisch-geometrische Mittel* zwischen m und n nennen wollen. Wir werden nun zeigen, daß $\frac{1}{\mu}$ der Wert des von $T = 0$ bis $T = 360^\circ$ erstreckten Integrals

$$\int \frac{dT}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

ist.

Beweis. Nehmen wir an, es werde die Variable T durch eine andere T' ersetzt, derart, daß

$$\sin T = \frac{2m \sin T'}{(m+n) \cos^2 T' + 2m \sin^2 T'},$$ [9])

ist, dann erkennt man leicht, daß, wenn T' von 0 an bis 90°, 180°, 270°, 360° wächst, auch T (obschon in ungleichen Intervallen) von 0 an bis 90°, 180°, 270°, 360° wächst. Durch regelrechtes Ausrechnen findet man aber, daß

$$\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = \frac{dT'}{\sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}}$$

ist, und daher sind die Werte der Integrale

$$\int \frac{dT}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}, \quad \int \frac{dT'}{2\pi \sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}},$$

wenn beide Variablen von 0 bis 360° laufen, einander gleich. Und da man so weiter fortfahren kann, erhellt, daß diesen Werten auch der Wert des von $\Theta = 0$ bis $\Theta = 360°$ erstreckten Integrals

$$\int \frac{d\Theta}{2\pi \sqrt{\mu^2 \cos^2 \Theta + \mu^2 \sin^2 \Theta}}$$

gleich wird, der offenbar $= \dfrac{1}{\mu}$ ist, w. z. b. w.

17.[10])

Aus der Gleichung, die die Verbindung zwischen T und T' herstellt

$$(m-n) \sin T \sin^2 T' = 2m \sin T' - (m+n) \sin T,$$

gewinnt man leicht:

$$\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T} = m - (m-n) \sin T \sin T',$$

$$\sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'} = m \operatorname{cotang} T \operatorname{tang} T',$$

und hieraus mit Benutzung derselben Gleichung

$$\sin T \sin T' \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T} + m' (\cos^2 T - \sin^2 T)$$
$$= \cos T \cos T' \sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'} - \tfrac{1}{2}(m-n) \sin^2 T'.$$

Multipliziert man diese Beziehung mit

$$\frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = \frac{dT'}{\sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}},$$

so kommt:

$$\frac{m' (\cos^2 T - \sin^2 T)\, dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = -\frac{\tfrac{1}{2}(m-n) \sin^2 T'\, dT'}{\sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}} + d(\sin T' \cos T).$$

Multiplizieren wir diese Gleichung mit $\dfrac{m-n}{\pi}$, setzen

$$m'(m-n) = \tfrac{1}{2}(m^2 - n^2),$$
$$(m-n)^2 = 4(m'^2 - n'^2),$$
$$\sin^2 T' = \tfrac{1}{2} - \tfrac{1}{2}(\cos^2 T' - \sin^2 T'),$$

und integrieren in Bezug auf T und T' von 0 bis 360°, so erhalten wir:

$$(m^2 - n^2) \int \frac{(\cos^2 T - \sin^2 T)\, dT}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$
$$= -\frac{2(m'^2 - n'^2)}{\mu} + 2(m'^2 - n'^2) \int \frac{(\cos^2 T' - \sin^2 T')\, dT'}{2\pi \sqrt{m'^2 \cos^2 T' + n'^2 \sin^2 T'}}.$$

Und da das bestimmte Integral rechterhand sich ebenso weiter transformieren läßt, wird offenbar das Integral

$$\int \frac{(\cos^2 T - \sin^2 T)\, dT}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}$$

durch die sehr rasch konvergierende unendliche Reihe

$$-\frac{2(m'^2 - n'^2) + 4(m''^2 - n''^2) + 8(m'''^2 - n'''^2) + \cdots}{(m^2 - n^2)\mu} = -\frac{\nu}{\mu}$$

dargestellt. Die numerische Rechnung läßt sich bequem mit Logarithmen durchführen, wenn wir setzen

$$\tfrac{1}{4}\sqrt{m^2 - n^2} = \lambda,\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{m'^2 - n'^2} = \lambda',\quad \tfrac{1}{4}\sqrt{m''^2 - n''^2} = \lambda'', \ldots$$

woraus:

$$\lambda' = \frac{\lambda^2}{m'},\ \lambda'' = \frac{\lambda'^2}{m''},\ \lambda''' = \frac{\lambda''^2}{m'''}, \ldots$$

und

$$\nu = \frac{2\lambda'^2 + 4\lambda''^2 + 8\lambda'''^2 + \ldots}{\lambda^2}$$

folgt.

18.

Durch die hier auseinandergesetzte Methode kann man auch die *unbestimmten* Integrale (die mit dem Werte 0 der Variablen beginnen), mit größter Eleganz ermitteln. Wird nämlich T'' aus m', n', T' ebenso bestimmt wie T' aus m, n, T, und weiterhin ebenso T''' aus m'', n'', T'' usf., so werden auch für einen beliebigen festen Wert von T die Werte der Glieder der Reihe $T, T', T'', T''' \ldots$ sehr schnell nach einer Grenze Θ konvergieren, und es wird:

$$\int \frac{dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = \frac{\Theta}{\mu},$$

$$\int \frac{(\cos^2 T - \sin^2 T)\, dT}{\sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} = -\frac{\nu\Theta}{\mu}$$

$$+ \frac{\lambda' \cos T \sin T' + 2\lambda'' \cos T' \sin T'' + 4\lambda''' \cos T'' \sin T''' + \cdots}{\lambda^2}.$$

Es genügt aber, dies hier beiläufig angedeutet zu haben, da es für unsere Zwecke nicht notwendig ist.

19.

Da wir $m = \sqrt{G + G'}$, $n = \sqrt{G + G''}$ gesetzt haben, so lassen sich die Werte der Größen P, Q leicht auf die Transzendenten μ, ν zurückführen. Da nämlich P, Q die Werte der Integrale

$$\int \frac{\cos^2 T\, dT}{2\pi (m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T)^{3/2}},\quad \int \frac{\sin^2 T\, dT}{2\pi (m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T)^{3/2}},$$

von $T = 0$ bis $T = 360^0$ erstreckt, sind, so ist zunächst sofort klar, daß

$$m^2 P + n^2 Q = \frac{1}{\mu} \tag{24}$$

gilt. Ferner wird:

$$\frac{(\cos^2 T - \sin^2 T)\, dT}{2\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}} + \frac{(m^2 \cos^2 T - n^2 \sin^2 T)\, dT}{2\pi\, (m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T)^{3/2}}$$

$$= \frac{(m^2 \cos^4 T - n^2 \sin^4 T)\, dT}{\pi\, (m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T)^{3/2}} = d\left[\frac{\cos T \sin T}{\pi \sqrt{m^2 \cos^2 T + n^2 \sin^2 T}}\right].$$

Integriert man diese Beziehung von $T = 0$ bis $T = 360^0$, so folgt:

$$(25) \qquad -\frac{\nu}{\mu} + m^2 P - n^2 Q = 0,$$

und aus der Kombination der Gleichungen (24), (25) erhalten wir schließlich:

$$P = \frac{1+\nu}{2m^2 \mu}, \quad Q = \frac{1-\nu}{2n^2 \mu}.$$

10. Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen. Erster Theil

In: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, hrsg. von Anton Börsch und Paul Simon, Berlin 1887 (Nachdruck 1964), S. 1–27.

Original:
Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 5, (1819–1822) 1823, commentationes classis mathematicae, S. 33–62. In: Gauß Werke 4, S. 1–26.

I.

Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

Erster Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften zu Göttingen überreicht 1821, Februar 15.)

1.

Beobachtungen, welche sich auf Grössenbestimmungen aus der Sinnenwelt beziehen, werden immer, so sorgfältig man auch verfahren mag, grösseren oder kleineren Fehlern unterworfen bleiben. Die Fehler der Beobachtungen sind im allgemeinen nicht einfache, sondern entspringen gleichzeitig mehreren Quellen, bei denen zwei Arten genau unterschieden werden müssen. Gewisse Fehlerursachen sind nämlich so beschaffen, dass ihr Einfluss auf jede Beobachtung von veränderlichen Umständen abhängt, die unter sich und mit der Beobachtung selbst in keinem wesentlichen Zusammenhang stehen; die so entstehenden Fehler werden unregelmässige oder zufällige genannt; und insoweit jene Umstände der Rechnung nicht unterworfen werden können, gilt dieses auch von den Fehlern selbst. Dahin gehören die von der Unvollkommenheit unserer Sinne herrührenden Fehler und solche, die von unregelmässigen äusseren Ursachen abhängen, z. B. von der durch das Wallen der Luft bewirkten Unsicherheit beim Sehen; auch rechnen wir hierher manche, selbst den besten Instrumenten anhaftende Unvollkommenheiten, z. B. Ungleichförmigkeiten der inneren Wandungen der Libellen, Mangel an absoluter Festigkeit u. s. w. Dagegen haben andere Fehlerursachen bei sämmtlichen Beobachtungen derselben Art ihrer Natur nach entweder einen vollkommen constanten Einfluss, oder doch einen solchen, dessen Grösse in gesetz-mässig bestimmter Weise allein von Umständen abhängt, welche mit der Beobachtung wesentlich verknüpft sind. Fehler dieser Art werden constante oder regelmässige genannt.

Uebrigens ist es klar, dass diese Unterscheidung gewissermaassen nur relativ ist und von dem weiteren oder engeren Sinne abhängt, in welchem man den Begriff von Beobachtungen derselben Art fassen will. So bringen z. B. unregelmässige Fehler der Theilung der Instrumente bei Winkelmessungen einen constanten Fehler hervor, wenn es sich nur um eine beliebig oft zu wiederholende Beobachtung desselben Winkels handelt, und wenn dabei immer dieselben fehlerhaften Theilstriche benutzt werden; während der aus derselben Quelle stammende Fehler als ein zufälliger angesehen werden kann, wenn man irgendwie Winkel von beliebiger Grösse zu messen hat, und eine Tafel, die für jeden Theilstrich den zugehörigen Fehler angiebt, nicht zu Gebote steht.

2.

Die Betrachtung der regelmässigen Fehler soll von unseren Untersuchungen ausdrücklich ausgeschlossen bleiben. Es ist nämlich Sache des Beobachters, alle Ursachen, welche constante Fehler hervorzubringen vermögen, sorgfältig aufzusuchen und dieselben entweder abzustellen, oder wenigstens ihrer Wirkung und Grösse nach auf das genaueste zu erforschen, um ihren Einfluss auf jede einzelne Beobachtung bestimmen und diese von jenem befreien zu können, so dass ein Ergebniss erzielt wird, als ob der Fehler überhaupt nicht vorhanden gewesen wäre. Ganz verschieden hiervon ist aber das Wesen der unregelmässigen Fehler, welche ihrer Natur nach der Rechnung nicht unterworfen werden können. Diese wird man daher in den Beobachtungen zwar dulden, ihren Einfluss aber auf die aus den Beobachtungen abzuleitenden Grössen durch eine geschickte Combination der ersteren möglichst abschwächen müssen. Dieser wichtigen Aufgabe ist die folgende Untersuchung gewidmet.

3.

Die Fehler in den Beobachtungen gleicher Art, welche einer bestimmten einfachen Ursache entspringen, sind der Natur der Sache nach in bestimmte *Grenzen* eingeschlossen, welche man zweifelsohne genau angeben könnte, wenn die Natur dieser Ursache selbst *vollständig* erkannt wäre. Die meisten Ursachen zufälliger Fehler sind so beschaffen, dass nach dem Gesetz der Stetigkeit alle zwischen jenen Grenzen enthaltenen Fehler für möglich gehalten werden müssen, und dass die vollständige Erkenntniss einer solchen Ursache zugleich lehren würde, ob alle diese Fehler mit gleicher oder ungleicher Leichtigkeit begangen werden können, und, in letzterem Falle, eine wie grosse relative Wahrscheinlichkeit jedem Fehler beizulegen sei. Dasselbe gilt auch in Bezug auf den totalen Fehler, der sich aus mehreren einfachen Fehlern zusammensetzt, dass er nämlich zwischen bestimmten Grenzen eingeschlossen sein wird (von denen die eine der Summe aller oberen, die andere der Summe aller unteren Theilgrenzen gleich ist); alle Fehler zwischen diesen Grenzen werden zwar möglich sein, da sich indess jeder auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Zusammensetzung der Theilfehler, welche selbst wieder mehr oder weniger wahrscheinlich sind, ergeben kann, so werden wir für den einen eine grössere, für den andern eine geringere Häufigkeit annehmen müssen, und es könnte unter der Voraussetzung, dass man die Gesetze der einfachen Fehler kennt, ein Gesetz der relativen Wahrscheinlichkeit aufgestellt werden, abgesehen von den analytischen Schwierigkeiten beim Zusammenfassen aller Combinationen.

Freilich giebt es auch gewisse Fehlerursachen, welche nicht nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende, sondern nur unstetige Fehler hervorbringen können, wie z. B. die Theilungsfehler der Instrumente (wenn man diese überhaupt zu den zufälligen Fehlern rechnen will); denn die Anzahl der Theilstriche an jedem bestimmten Instrument ist endlich. Dessen ungeachtet wird aber offenbar, wenn nur nicht alle Fehlerursachen unstetige Fehler erzeugen, die Gesammtheit aller möglichen Totalfehler eine nach dem Gesetz der Stetigkeit fortschreitende Reihe bilden, oder auch mehrere derartige getrennte Reihen, wenn es sich nämlich bei Anordnung aller möglichen unstetigen Fehler nach ihrer Grösse ergeben sollte, dass zufällig eine oder die andere Differenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern dieser Reihe grösser ist, als die Differenz zwischen den Grenzen derjenigen Totalfehler, welche den stetigen Fehlern allein entstammen. In der Praxis wird aber der letztere Fall kaum jemals eintreten, wenn nicht etwa die Theilung an groben Fehlern leidet.

4.

Bezeichnet man mit $\varphi(x)$ die relative Häufigkeit des Totalfehlers x bei einer bestimmten Gattung von Beobachtungen, so

1*

wird wegen der Stetigkeit der Fehler die Wahrscheinlichkeit eines zwischen den unendlich nahen Grenzen x und $x + dx$ liegenden Fehlers $= \varphi(x)\,dx$ zu setzen sein. Es wird in der Praxis wohl immer so gut wie unmöglich sein, diese Funktion a priori anzugeben; nichtsdestoweniger lassen sich mehrere allgemeine Eigenschaften derselben feststellen, welche hier folgen sollen. Offenbar ist die Funktion $\varphi(x)$ insofern zu den unstetigen Funktionen zu rechnen, als sie für alle Werthe des x, welche ausserhalb der Grenzen der möglichen Fehler liegen, $= 0$ sein muss; innerhalb dieser Grenzen wird sie aber überall einen positiven Werth annehmen (abgesehen von dem Fall, über den wir am Ende des vorigen Art. gesprochen haben). In den meisten Fällen wird man positive und negative Fehler von derselben Grösse als gleich häufig voraussetzen dürfen, so dass $\varphi(-x) = \varphi(x)$ sein wird. Da ferner kleinere Fehler leichter als grössere begangen werden, so wird im allgemeinen $\varphi(x)$ für $x = 0$ seinen grössten Werth erhalten und beständig abnehmen, wenn x wächst.

Allgemein giebt aber der Werth des von $x = a$ bis $x = b$ genommenen Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass irgend ein noch unbekannter Fehler zwischen den Grenzen a und b liegt. Der Werth dieses Integrals von der unteren Grenze aller möglichen Fehler bis zu ihrer oberen Grenze wird daher immer $= 1$ sein. Und da $\varphi(x)$ für alle ausserhalb dieser Grenzen liegenden Werthe des x immer $= 0$ ist, so ist offenbar auch

der Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int \varphi(x)dx$ immer $= 1$.

— 5. —

Wir betrachten ferner das Integral $\int x\,\varphi(x)\,dx$ zwischen denselben Grenzen, und setzen seinen Werth $= k$. Sind alle einfachen Fehlerursachen nun so beschaffen, dass kein Anlass vorhanden ist, zwei gleichen, aber mit entgegengesetzten Vorzeichen versehenen Fehlern verschiedene Häufigkeit beizulegen, so wird dasselbe auch für den totalen Fehler gelten, es ist also $\varphi(-x) = \varphi(x)$, und deshalb nothwendig $k = 0$. Wir schliessen hieraus, dass, jedesmal wenn k nicht verschwindet, sondern etwa eine positive Grösse ist, nothwendig eine oder die andere Fehlerursache vorhanden sein müsse, welche entweder nur positive Fehler, oder wenigstens häufiger positive als negative zu erzeugen vermöge. Diese Grösse k, welche in der That das Mittel aller möglichen Fehler oder der mittlere Werth der Grösse x ist, kann passend der constante Theil des Fehlers genannt werden. Uebrigens ist leicht zu beweisen, dass der constante Theil des totalen Fehlers gleich der Summe der constanten Theile derjenigen Fehler ist, welche aus den einzelnen einfachen Ursachen hervorgehen. Setzt man jetzt die Grösse k als bekannt voraus, subtrahirt dieselbe von jeder Beobachtung und bezeichnet den Fehler der so verbesserten Beobachtung mit x', die entsprechende Wahrscheinlichkeit aber mit $\varphi'(x')$, so wird $x' = x - k$, $\varphi'(x') = \varphi(x)$ und folglich

$$\int x'\varphi'(x')dx' = \int x\varphi(x)dx - \int k\varphi(x)dx = k - k = 0,$$

d. h. die Fehler der verbesserten Beobachtungen werden keinen constanten Theil haben, was auch an sich klar ist.

6.

Wie das Integral $\int x\varphi(x)dx$, oder der mittlere Werth von x, das Fehlen oder Vorhandensein und die Grösse eines constanten Fehlers anzeigt, ebenso erscheint das von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ ausgedehnte Integral

$$\int x^2\varphi(x)dx$$

(oder der mittlere Werth des Quadrates x^2) am geeignetsten, die Unsicherheit von Beobachtungen allgemein zu definiren und zu messen, so dass bei zwei Beobachtungsgruppen, die sich hinsichtlich der Häufigkeit der Fehler unterscheiden, diejenigen Beobachtungen für die genaueren zu halten sind, für welche das Integral $\int x^2\varphi(x)dx$ den kleineren Werth erhält. Wenn nun jemand einwenden würde, diese Festsetzung sei ohne zwingende Nothwendigkeit willkürlich getroffen, so stimmen wir gern zu. Enthält doch diese Frage der Natur der Sache nach etwas Unbestimmtes, welches nur durch ein in gewisser Hinsicht willkürliches Princip bestimmt begrenzt werden kann. Die Bestimmung einer Grösse durch eine einem grösseren oder kleineren Fehler unterworfene Beobachtung wird nicht unpassend mit einem Glücksspiel verglichen, in welchem man nur verlieren, aber nicht gewinnen kann, wobei also jeder zu befürchtende Fehler einem Verluste entspricht. Das Risiko eines solchen Spieles wird nach dem wahrscheinlichen Verlust geschätzt, d. h. nach der Summe der Produkte der einzelnen möglichen Verluste in die zugehörigen Wahrscheinlichkeiten. Welchem Verluste man aber jeden einzelnen Beobachtungsfehler gleichsetzen soll, ist keineswegs an sich klar; hängt doch vielmehr diese Bestimmung zum Theil von unserem Ermessen ab. Den Verlust dem Fehler selbst gleichzusetzen, ist offenbar nicht erlaubt; würden nämlich positive Fehler wie Verluste behandelt, so müssten negative als Gewinne gelten. Die Grösse des Verlustes muss vielmehr durch eine solche Funktion des Fehlers ausgedrückt werden, die ihrer Natur nach immer positiv ist. Bei der unendlichen Mannigfaltigkeit derartiger Funktionen scheint die einfachste, welche diese Eigenschaft besitzt, vor den übrigen den Vorzug zu verdienen, und diese ist unstreitig das Quadrat. Somit ergiebt sich das oben aufgestellte Princip.

Laplace hat die Sache zwar auf eine ähnliche Weise betrachtet, er hat aber den immer positiv genommenen Fehler selbst als Maass des Verlustes gewählt. Wenn wir jedoch nicht irren, so ist diese Festsetzung sicherlich nicht weniger willkürlich, als die unsrige: ob nämlich der doppelte Fehler für ebenso erträglich zu halten ist, wie der einfache, zweimal wiederholte, oder für schlimmer, und ob es daher angemessener ist, dem doppelten Fehler nur das doppelte Moment, oder ein grösseres beizulegen, ist eine Frage, die weder an sich klar, noch durch mathematische Beweise zu entscheiden, sondern allein dem freien Ermessen zu überlassen ist. Ausserdem kann man nicht leugnen, dass die in Rede stehende Festsetzung gegen die Stetigkeit verstösst: und gerade deshalb widerstrebt dieses Verfahren in höherem Grade der analytischen Behandlung, während die Resultate, zu welchen unser Princip führt, sich sowohl durch Einfachheit als auch durch Allgemeinheit ganz besonders auszeichnen.

7.

Wir setzen den Werth des von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals $\int x^2 \varphi(x)\,dx = m^2$, und nennen die Grösse *m den mittleren zu befürchtenden Fehler*, oder einfach *den mittleren Fehler* der Beobachtungen, deren unbestimmte Fehler x die relative Wahrscheinlichkeit $\varphi(x)$ haben. Jene Bezeichnung werden wir nicht auf unmittelbare Beobachtungen beschränken, sondern auch auf alle aus Beobachtungen abgeleiteten Bestimmungen ausdehnen. Man muss sich indess sehr wohl davor hüten, den mittleren Fehler mit dem arithmetischen Mittel aller Fehler, von welchem im Art. 5. die Rede war, zu verwechseln.

Wo mehrere Gattungen von Beobachtungen oder mehrere aus Beobachtungen erhaltene Bestimmungen, denen nicht dieselbe Genauigkeit zukommt, zu vergleichen sind, verstehen wir unter dem relativen *Gewicht* derselben eine Grösse, die dem m^2 umgekehrt proportional ist, während die *Genauigkeit* einfach dem m umgekehrt proportional genommen wird. Um demnach das Gewicht durch eine Zahl ausdrücken zu können, muss man das Gewicht einer gewissen Gattung von Beobachtungen als Einheit annehmen.

8.

Enthalten die Beobachtungsfehler einen constanten Theil, so wird durch seine Elimination der mittlere Fehler verringert, das Gewicht und die Genauigkeit vermehrt. Unter Beibehaltung der Bezeichnungen des Art. 5. erhält man, wenn m' den mittleren Fehler der verbesserten Beobachtungen bedeutet,

$$m'^2 = \int x'^2 \varphi'(x')\,dx' = \int (x-k)^2 \varphi(x)\,dx = \int x^2 \varphi(x)\,dx$$
$$-2k\int x\,\varphi(x)\,dx + k^2\int \varphi(x)\,dx = m^2 - 2k^2 + k^2 = m^2 - k^2.$$

Wenn man aber an Stelle des wahren constanten Theiles k eine andere Grösse l von den Beobachtungen abgezogen hätte, so würde das Quadrat des neuen mittleren Fehlers $= m^2 - 2kl + l^2 = m'^2 + (l-k)^2$ werden.

9.

Bezeichnet man mit λ einen bestimmten Coefficienten und mit μ den Werth des Integrals $\int \varphi(x)\,dx$ von $x = -\lambda m$ bis $x = +\lambda m$, so wird μ die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass der Fehler irgend einer Beobachtung (dem absoluten Werthe nach) kleiner als λm sei, dagegen $1-\mu$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Fehler grösser als λm sei. Wenn also der Werth $\mu = \frac{1}{2}$ dem Werth $\lambda m = \varrho$ entspricht, so wird der Fehler ebenso leicht unterhalb ϱ als oberhalb ϱ liegen können, so dass ϱ passend der *wahrscheinliche* Fehler genannt werden kann. Die Beziehung zwischen den Grössen λ und μ hängt offenbar von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ ab, welche im allgemeinen unbekannt ist. Es wird deshalb die Mühe lohnen, jene Beziehung für einige besondere Fälle näher zu betrachten.

I. Sind die Grenzen aller möglichen Fehler $-a$ und $+a$, und sind alle Fehler in diesen Grenzen gleich wahrscheinlich, so wird $\varphi(x)$ in den Grenzen $x = -a$ und $x = +a$ constant und folglich $= \frac{1}{2a}$ sein. Hieraus ergiebt sich $m = a\sqrt{\frac{1}{3}}$ und $\mu = \lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$, so lange λ nicht grösser als $\sqrt{3}$ ist; endlich wird $\varrho = m\sqrt{\frac{3}{4}} = 0{,}8660254\,m$, und die Wahrscheinlichkeit, dass ein Fehler nicht grösser als der mittlere Fehler werde, $= \sqrt{\frac{1}{3}} = 0{,}5773503$.

II. Sind die Grenzen der möglichen Fehler, wie vorher, $-a$ und $+a$, und nimmt man an, dass die Wahrscheinlichkeit dieser Fehler vom Fehler 0 ab nach beiden Seiten in arithmetischer Progression abnehme, so wird

$$\varphi(x) = \frac{a-x}{a^2}, \text{ für die Werthe von } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } +a,$$

$$\varphi(x) = \frac{a+x}{a^2}, \text{ für die Werthe von } x \text{ zwischen } 0 \text{ und } -a,$$

sein. Es folgt hieraus $m = a\sqrt{\frac{1}{6}}$, $\mu = \lambda\sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6}\lambda^2$, so lange λ zwischen 0 und $\sqrt{6}$ liegt, und endlich $\lambda = \sqrt{6} - \sqrt{6-6\mu}$, so lange μ zwischen 0 und 1 liegt, und hieraus

$$\varrho = m(\sqrt{6} - \sqrt{3}) = 0{,}7174389\, m.$$

Die Wahrscheinlichkeit eines den mittleren nicht übersteigenden Fehlers wird in diesem Falle

$$= \sqrt{\frac{2}{3}} - \frac{1}{6} = 0{,}6498299.$$

III. Nehmen wir die Funktion $\varphi(x)$ proportional zu $e^{-\frac{x^2}{h^2}}$ (was zwar in der Wirklichkeit nur sehr nahe richtig sein kann), so wird

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}}$$

sein müssen, wobei π den halben Kreisumfang für den Radius 1 bezeichnet, woraus wir ferner ableiten

$$m = h\sqrt{\frac{1}{2}}$$

(Siehe: Disquisitiones generales circa seriem infinitam etc., art. 28.). Bezeichnet man ferner den Werth des von $z = 0$ an genommenen Integrals

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-z^2}\, dz$$

mit $\Theta(z)$, so wird

$$\mu = \Theta\left(\lambda\sqrt{\frac{1}{2}}\right).$$

Die folgende Tafel giebt einige Werthe dieser Grösse:

λ	μ
0,6744897	0,5
0,8416213	0,6
1,0000000	0,6826895
1,0364334	0,7
1,2815517	0,8
1,6448537	0,9
2,5758293	0,99
3,2918301	0,999
3,8905940	0,9999
∞	1

10.

Obgleich die Beziehung zwischen λ und μ von der Natur der Funktion $\varphi(x)$ abhängt, so kann man doch einige allgemeine Eigenschaften derselben feststellen. Wie nämlich diese Funktion auch beschaffen sei, so wird sicher, wenn sie nur die Eigenschaft hat, dass ihr Werth bei wachsendem absoluten Werthe von x immer abnimmt oder wenigstens nicht wächst,

λ kleiner oder wenigstens nicht grösser als $\mu\sqrt{3}$ sein, wenn μ kleiner als $\frac{2}{3}$,

λ nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1-\mu}}$ sein, wenn μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist.

Für $\mu = \frac{2}{3}$ fallen beide Grenzen zusammen, und λ kann alsdann nicht grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ sein.

Um diesen merkwürdigen Lehrsatz zu beweisen, bezeichnen wir mit y den Werth des von $z = -x$ bis $z = +x$ genommenen Integrals $\int \varphi(z)\,dz$; y wird alsdann die Wahrscheinlichkeit dafür sein, dass irgend ein Fehler in den Grenzen $-x$ und $+x$ enthalten ist. Ferner setzen wir

$$x = \psi(y), \qquad d\,\psi(y) = \psi'(y)\,dy, \qquad d\psi'(y) = \psi''(y)\,dy.$$

Es wird demnach $\psi(0) = 0$ sein, und

$$\psi'(y) = \frac{1}{\varphi(x) + \varphi(-x)},$$

woraus mit Rücksicht auf die Voraussetzung folgt, dass $\psi'(y)$ von $y = 0$ bis $y = 1$ beständig wächst oder wenigstens nirgends abnimmt; oder, was dasselbe ist, dass der Werth von $\psi''(y)$ immer positiv oder wenigstens nicht negativ ist. Ferner haben wir $d(y.\psi'(y)) = \psi'(y)\,dy + y\,\psi''(y)\,dy$, und folglich

$$y\,\psi'(y) - \psi(y) = \int y\,\psi''(y)\,dy\,,$$

wenn man die Integration mit $y = 0$ beginnen lässt. Der Werth des Ausdrucks $y\,\psi'(y) - \psi(y)$ wird deshalb immer eine positive oder wenigstens keine negative Grösse, und folglich

$$1 - \frac{\psi(y)}{y\,\psi'(y)}$$

eine positive Grösse kleiner als 1 sein. Es sei f ihr Werth für $y = \mu$, also es sei, da man $\psi(\mu) = \lambda m$ hat,

$$f = 1 - \frac{\lambda m}{\mu\,\psi'(\mu)} \quad \text{oder} \quad \psi'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\mu}\,.$$

Nach diesen Vorbereitungen betrachten wir folgende Funktion des y

$$\frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu}(y - \mu f)\,,$$

welche wir $= \mathrm{F}(y)$ setzen, wobei $d\,\mathrm{F}(y) = \mathrm{F}'(y)\,dy$. Offenbar wird dann

$$\mathrm{F}(\mu) = \lambda m = \psi(\mu)$$
$$\mathrm{F}'(\mu) = \frac{\lambda m}{(1-f)\,\mu} = \psi'(\mu)\,.$$

Da nun $\psi'(y)$ mit wachsendem y immer wächst (oder wenigstens nicht abnimmt, was stets hinzuzudenken ist), und da $\mathrm{F}'(y)$ andererseits constant ist, so wird die Differenz $\psi'(y) - \mathrm{F}'(y) = \dfrac{d(\psi(y) - \mathrm{F}(y))}{dy}$ für Werthe von y, welche grösser als μ sind, positiv, für kleinere negativ sein. Hieraus ist leicht zu ersehen, dass $\psi(y) - \mathrm{F}(y)$ immer eine positive Grösse, und dass ferner $\psi(y)$ immer absolut grösser oder wenigstens nicht kleiner als $\mathrm{F}(y)$ ist, wenigstens so lange als der Werth von $\mathrm{F}(y)$ positiv ist, d. h. von $y = \mu f$ bis $y = 1$. Deshalb wird der Werth des Integrals $\int[\mathrm{F}(y)]^2\,dy$ von $y = \mu f$ bis $y = 1$ kleiner sein als der Werth des Integrals $\int[\psi(y)]^2\,dy$ in denselben Grenzen, und um so mehr auch kleiner als der Werth dieses Integrals von $y = 0$ bis $y = 1$, welches $= m^2$ ist. Der Werth des ersteren Integrals ergiebt sich aber

$$= \frac{\lambda^2 m^2 (1 - \mu f)^3}{3\mu^2 (1 - f)^2},$$

woraus man entnimmt, dass λ^2 kleiner sei als $\frac{3\mu^2 (1 - f)^2}{(1 - \mu f)^3}$, wo die Grösse f zwischen 0 und 1 liegt. Der Werth des Bruches $\frac{3\mu^2 (1 - f)^2}{(1 - \mu f)^3}$, dessen Differential, wenn f als Variable betrachtet wird,

$$= -\frac{3\mu^2 (1 - f)}{(1 - \mu f)^4} (2 - 3\mu + \mu f)\, df$$

ist, nimmt ferner beständig ab, wenn f vom Werthe 0 bis zum Werthe 1 steigt, sobald μ kleiner ist als $\frac{2}{3}$; der grösstmögliche Werth wird deshalb dem Werthe $f = 0$ entsprechen und folglich $= 3\mu^2$ werden, so dass in diesem Fall λ sicher kleiner oder doch nicht grösser als $\mu\sqrt{3}$ wird. W. z. b. w. Wenn hingegen μ grösser als $\frac{2}{3}$ ist, so wird der grösste Werth jenes Bruches für $2 - 3\mu + \mu f = 0$ eintreten, d. h. für $f = 3 - \frac{2}{\mu}$, und zwar wird derselbe $= \frac{4}{9(1 - \mu)}$, und λ kann also in diesem Falle nicht grösser als $\frac{2}{3\sqrt{1 - \mu}}$ sein. W. z. b. w.

So kann z. B. für $\mu = \frac{1}{2}$ sicher λ nicht grösser als $\sqrt{\frac{3}{4}}$ werden, d. h. der wahrscheinliche Fehler kann die Grenze $0{,}8660254\, m$ nicht übersteigen, welcher Werth für ihn im ersten Beispiel des Art. 9. gefunden wurde. Ferner schliesst man aus unserem Satze leicht, dass μ nicht kleiner als $\lambda\sqrt{\frac{1}{3}}$ sei, so lange λ kleiner als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist, dass hingegen μ nicht kleiner als $1 - \frac{4}{9\lambda^2}$ sein könne, wenn der Werth von λ grösser als $\sqrt{\frac{4}{3}}$ ist.

11.

Da mehrere der später zu behandelnden Aufgaben auch mit dem Werth des Integrals $\int x^4 \varphi(x)\, dx$ im Zusammenhang stehen, so wird es die Mühe lohnen, denselben für einige specielle Fälle zu ermitteln. Wir bezeichnen den Werth dieses von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$ genommenen Integrals mit n^4.

I. Für $\varphi(x) = \frac{1}{2a}$ wird, wenn x zwischen $-a$ und $+a$ eingeschlossen ist, $n^4 = \frac{1}{5}a^4 = \frac{9}{5}m^4$.

II. Für den zweiten Fall des Art. 9., wenn $\varphi(x) = \frac{a \mp x}{a^2}$ für Werthe von x zwischen 0 und $\pm a$ ist, hat man $n^4 = \frac{1}{15}a^4 = \frac{12}{5}m^4$.

III. Im dritten Fall, wenn

$$\varphi(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{h^2}}}{h\sqrt{\pi}},$$

findet man, nach den in der oben angeführten Abhandlung erhaltenen Resultaten, $n^4 = \frac{3}{4}h^4 = 3m^4$.

Ausserdem lässt sich zeigen, dass der Werth von $\frac{n^4}{m^4}$ nicht kleiner als $\frac{9}{5}$ sein kann, wenn nur die Voraussetzung des vorigen Art. erfüllt ist.

12.

Bezeichnen x, x', x'' etc. allgemein Fehler von Beobachtungen derselben Art, die unabhängig von einander seien, und drückt ein vorgesetztes Zeichen φ ihre relativen Wahrscheinlichkeiten aus, ist ferner y eine gegebene rationale Funktion der Variabeln x, x', x'' etc., dann wird das vielfache Integral

$$\int \varphi(x)\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots . \, dx\, dx'\, dx'' \ldots . , \tag{I}$$

erstreckt über alle Werthe der Variabeln x, x', x'' etc., für welche der Werth des y zwischen die gegebenen Grenzen 0 und η fällt, die Wahrscheinlichkeit dafür ausdrücken, dass der Werth des y irgendwo zwischen 0 und η liegt. Offenbar wird dieses Integral eine Funktion von η sein, deren Differential wir $= \psi(\eta)\,d\eta$ setzen, so dass das Integral selbst dem Integral $\int \psi(\eta)\,d\eta$, von $\eta = 0$ angefangen, gleich ist. Alsdann wird das Zeichen $\psi(\eta)$ die relative Wahrscheinlichkeit eines jeden Werthes von y ausdrücken müssen. Da man x nun als eine Funktion der Variabeln y, x', x'' etc. ansehen kann, die mit $f(y, x', x'' \ldots)$ bezeichnet werden möge, so verwandelt sich das Integral (I) in

$$\int \varphi[f(y, x', x'' \ldots)]\frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'') \ldots dy\, dx'\, dx'' \ldots ,$$

wo y von $y = 0$ bis $y = \eta$ genommen werden muss, die übrigen Variablen aber über alle Werthe zu erstrecken sind, denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht. Hieraus schliesst man, dass

$$\psi(y) = \int \varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)]\,\frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots dx'\,dx''\ldots,$$

wo die Integration, bei welcher y als constant betrachtet werden muss, über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc. zu erstrecken ist, die für $f(y, x', x'' \ldots)$ einen reellen Werth ergeben.

13.

Um obige Integration wirklich auszuführen, müsste man die Funktion φ kennen, welche im allgemeinen unbekannt ist. Selbst wenn aber auch die Funktion bekannt wäre, würde die Integration meistens die Kräfte der Analysis übersteigen. Deshalb werden wir zwar die Wahrscheinlichkeit der einzelnen Werthe des y nicht angeben können; anders aber wird es sich verhalten, wenn man nur den mittleren Werth des y verlangt; derselbe ergiebt sich nämlich durch Integration von $\int y\,\psi(y)\,dy$ über alle möglichen Werthe des y. Und da man offenbar für alle Werthe, welche y nicht annehmen kann — sei es der Natur der mit y bezeichneten Funktion wegen (z. B. bei $y = x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. für die negativen Werthe), sei es um der den Fehlern x, x', x'' etc. gesetzten bestimmten Grenzen willen —, $\psi(y) = 0$ setzen muss, so darf man mit demselben Rechte offenbar jene Integration über alle reellen Werthe von y erstrecken, also von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$. Nun ist aber das in den bestimmten Grenzen von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ genommene Integral $\int y\,\psi(y)\,dy$ gleich dem Integral

$$\int y\varphi\,[f(y, x', x'' \ldots)]\,\frac{df(y, x', x'' \ldots)}{dy}\,\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots dy\,dx'\,dx''\ldots,$$

welches gleichfalls von $y = \eta$ bis $y = \eta'$ und über alle Werthe der Variabeln x', x'' etc., denen ein reeller Werth von $f(y, x', x'' \ldots)$ entspricht, zu erstrecken ist; oder, was dasselbe ist, auch gleich dem Werthe des Integrals

$$\int y\,\varphi(x).\varphi(x')\,\varphi(x'')\ldots dx\,dx'\,dx''\ldots,$$

wenn bei dieser Integration für y sein Werth als Funktion von x, x', x'' etc. eingesetzt, und dieselbe über alle Werthe dieser Variabeln, welchen ein zwischen η und η' liegender Werth des y entspricht, ausgedehnt wird. Hieraus folgern wir, dass das über alle Werthe des y, von $y = -\infty$ bis $y = +\infty$ ausgedehnte Integral $\int y\, \psi(y)\, dy$ aus der Integration von

$$\int y\, \varphi(x)\, \varphi(x')\, \varphi(x'') \ldots dx\, dx'\, dx'' \ldots$$

erhalten wird, wenn man dieselbe über alle reellen Werthe von x, x', x'' etc. erstreckt, demnach von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc.

14.

Besteht daher die Funktion y nur aus einer Summe von Gliedern von der Form

$$\mathrm{A}\, x^{\alpha}\, x'^{\beta}\, x''^{\gamma} \ldots,$$

so wird der Werth des über alle Werthe von y erstreckten Integrals $\int y\, \psi(y)\, dy$, oder der mittlere Werth von y, einer Summe von Gliedern

$$\mathrm{A} \times \int x^{\alpha}\, \varphi(x)\, dx \times \int x'^{\beta}\, \varphi(x')\, dx' \times \int x''^{\gamma}\, \varphi(x'')\, dx'' \ldots$$

gleich sein, bei welchen die Integrationen von $x = -\infty$ bis $x = +\infty$, von $x' = -\infty$ bis $x' = +\infty$ etc. zu nehmen sind; oder, was dasselbe ist, gleich einer Summe von Gliedern, welche entstehen, wenn man für die einzelnen Potenzen x^{α}, x'^{β}, x''^{γ} etc. ihre mittleren Werthe einsetzt. Die Richtigkeit dieses so wichtigen Lehrsatzes hätte auch leicht aus anderen Ueberlegungen gefolgert werden können.

15.

Wir wollen den im vorigen Art. aufgestellten Lehrsatz auf den speciellen Fall anwenden, dass

$$y = \frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma},$$

wo σ die Anzahl der Glieder im Zähler bezeichnet. Den mittleren Werth des y finden wir hier ohne Weiteres $= m^2$, indem wir dem Buchstaben m dieselbe Bedeutung wie oben geben. Der wahre Werth des y kann sich zwar in einem bestimmten Fall grösser oder kleiner als dieser mittlere ergeben, ebenso wie der wahre Werth eines einzelnen Gliedes x^2; die Wahrscheinlichkeit aber, dass ein gelegentlicher Werth des y von dem mittleren m^2 nicht wesentlich abweiche, wird sich stetig um so mehr der Gewissheit nähern, je mehr die Zahl σ wächst. Um dieses noch klarer zu zeigen, werden wir, da wir die Wahrscheinlichkeit selbst nicht genau zu bestimmen im Stande sind, den mittleren bei der Annahme $y = m^2$ zu befürchtenden Fehler suchen. Nach den im Art. 6. aufgestellten Principien wird dieser Fehler offenbar gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Funktion

$$\left(\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma} - m^2\right)^2$$

sein; zur Auffindung desselben genügt die Bemerkung, dass der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{x^4}{\sigma^2}$ gleich $\frac{n^4}{\sigma^2}$ ist (wo der Buchstabe n dieselbe Bedeutung wie im Art. 11. hat), dass dagegen der mittlere Werth eines Gliedes von der Form $\frac{2\,x^2\,x'^2}{\sigma^2}$ gleich $\frac{2m^4}{\sigma^2}$ ist; woraus unmittelbar der mittlere Werth jener Funktion

$$= \frac{n^4 - m^4}{\sigma}$$

folgt.

Hieraus ersehen wir, dass, wenn nur eine hinlänglich grosse Anzahl von einander unabhängiger, zufälliger Fehler x, x', x'' etc. vorhanden ist, aus ihnen ein angenäherter Werth des m mit grosser Sicherheit mittelst der Formel

$$m = \sqrt{\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}}$$

gefunden werden könne, und dass der mittlere bei dieser Bestimmung zu befürchtende Fehler des Quadrates m^2

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}}$$

sei. Da indess diese letzte Formel die Grösse n enthält, so wird es genügen, falls es sich nur um die Erlangung einer ungefähren Vorstellung von dem Genauigkeitsgrade jener Bestimmung handelt, irgend eine specielle Form der Funktion φ anzunehmen. Z. B. wird bei der dritten Annahme der Art. 9. und 11. dieser Fehler $= m^2\sqrt{\frac{2}{\sigma}}$. Wenn dies weniger befriedigt, so kann ein angenäherter Werth von n^4 aus den Fehlern selbst mit Hülfe der Formel

$$\frac{x^4 + x'^4 + x''^4 + \text{etc.}}{\sigma}$$

abgeleitet werden. Im allgemeinen können wir aber versichern, dass für eine zweimal grössere Genauigkeit jener Bestimmung eine vierfache Anzahl von Fehlern erforderlich ist, oder dass das Gewicht der Bestimmung der Anzahl σ selbst proportional ist.

Auf ähnliche Weise wird man ferner, wenn die Beobachtungsfehler einen constanten Theil besitzen, einen angenäherten Werth dieses Theils um so sicherer aus dem arithmetischen Mittel vieler Fehler ableiten können, je grösser deren Anzahl war. Und zwar wird der mittlere zu befürchtende Fehler dieser Bestimmung durch

$$\sqrt{\frac{m^2 - k^2}{\sigma}}$$

ausgedrückt, wenn k den constanten Theil selbst und m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil noch nicht befreiten Beobachtungen ausdrückt; oder einfach durch $\frac{m}{\sqrt{\sigma}}$, wenn m den mittleren Fehler der von dem constanten Theil freien Beobachtungen bezeichnet. (Siehe Art. 8.)

16.

In den Art. 12. bis 15. haben wir vorausgesetzt, dass die Fehler x, x', x'' etc. sich auf dieselbe Gattung von Beobachtungen beziehen, so dass die Wahrscheinlichkeit jedes einzelnen durch dieselbe Funktion ausgedrückt werde. Augenscheinlich kann aber die allgemeine Untersuchung der Art. 12. bis 14. ebenso leicht auf den allgemeineren Fall ausgedehnt werden, wo die Wahrscheinlichkeiten der Fehler x, x', x'' etc. durch verschiedene Funktionen $\varphi(x)$, $\varphi'(x')$, $\varphi''(x'')$ etc. ausgedrückt werden, d. h. wo sich jene Fehler auf Beobachtungen verschiedener Schärfe oder Unsicherheit beziehen. Nehmen wir an, x sei der Fehler einer Beobachtung, deren mittlerer zu befürchtender Fehler $= m$ ist; ebenso seien x', x'' etc. die Fehler anderer Beobachtungen, deren mittlere zu befürchtende Fehler bezw. m', m'' etc. sind. Dann wird der mittlere Werth der Summe $x^2 + x'^2 + x''^2 +$ etc. gleich $m^2 + m'^2 + m''^2 +$ etc. sein. Ist nun anderweit schon bekannt, dass die Grössen m, m', m'' etc. in gegebenem Verhältniss zueinander stehen, also den Zahlen 1, μ', μ'' etc. bezw. proportional sind, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + x'^2 + x''^2 + \text{etc.}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

$= m^2$ sein. Setzen wir aber einen bestimmten Werth dieses Ausdrucks, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, dem m^2 gleich, so wird der mittlere Fehler, welcher dieser Bestimmung noch anhaftet, auf ähnliche Weise wie im vorhergehenden Art.

$$= \frac{\sqrt{n^4 + n'^4 + n''^4 + \text{etc.} - m^4 - m'^4 - m''^4 - \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}$$

gefunden, wo n', n'' etc. in Bezug auf die Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, dieselbe Bedeutung haben sollen, wie n in Bezug auf die erste Beobachtung. Wenn man nun die Zahlen n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen darf, so wird jener mittlere zu befürchtende Fehler

$$= \frac{\sqrt{n^4 - m^4}\ \sqrt{1 + \mu'^4 + \mu''^4 + \text{etc.}}}{1 + \mu'^2 + \mu''^2 + \text{etc.}}.$$

Diese Methode, einen angenäherten Werth von m zu bestimmen, ist aber nicht die zweckmässigste. Um dies desto deutlicher zu machen, betrachten wir den allgemeineren Ausdruck

$$y = \frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{1 + \alpha'\mu'^2 + \alpha''\mu''^2 + \text{etc.}},$$

dessen mittlerer Werth ebenfalls $= m^2$ wird, wie man auch die Coefficienten α', α'' etc. wählen möge. Der mittlere zu befürchtende Fehler aber wird, wenn man einen bestimmten Werth von y, jenachdem der Zufall Fehler x, x', x'' etc. liefert, gleich m^2 annimmt, mit Hülfe der oben vorgetragenen Principien

$$= \frac{\sqrt{(n^4 - m^4) + \alpha'^2 (n'^4 - m'^4) + \alpha''^2 (n''^4 - m''^4) + \text{etc.}}}{1 + \alpha'\mu'^2 + \alpha''\mu''^2 + \text{etc.}}.$$

gefunden. Damit dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird, ist zu setzen:

$$\alpha' = \frac{n^4 - m^4}{n'^4 - m'^4}\mu'^2$$

$$\alpha'' = \frac{n^4 - m^4}{n''^4 - m''^4}\mu''^2 \text{ etc.}$$

Offenbar können diese Werthe nur dann berechnet werden, wenn überdies die Beziehung der Grössen n, n', n'' etc. zu m, m', m'' etc. anderweit bekannt ist; fehlt aber diese genaue Kenntniss, so erscheint es wenigstens am sichersten*), sie zu einander proportional anzunehmen (siehe Art. 11.), woraus man die Werthe erhält

$$\alpha' = \frac{1}{\mu'^2}, \quad \alpha'' = \frac{1}{\mu''^2} \text{ etc.},$$

d. h. die Coefficienten α', α'' etc. müssen den relativen Gewichten der Beobachtungen, zu welchen die Fehler x', x'' etc. gehören, gleich gesetzt werden, nachdem man das Gewicht der Beobachtung, zu welcher der Fehler x gehört, als Einheit angenommen hat. Wenn hiernach, wie oben, σ die Anzahl der vorhandenen Fehler bezeichnet, so wird der mittlere Werth des Ausdrucks

$$\frac{x^2 + \alpha' x'^2 + \alpha'' x''^2 + \text{etc.}}{\sigma}$$

$= m^2$, und der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir einen zufällig bestimmten Werth dieses Ausdrucks als wahren Werth von m^2 annehmen, ergiebt sich

$$= \frac{\sqrt{n^4 + \alpha'^2 n'^4 + \alpha''^2 n''^4 + \text{etc.} - \sigma m^4}}{\sigma},$$

und folglich, wenn wir nur die n, n', n'' etc. den m, m', m'' etc. proportional annehmen dürfen,

$$= \sqrt{\frac{n^4 - m^4}{\sigma}},$$

welche Formel mit der oben für den Fall von Beobachtungen derselben Art gefundenen übereinstimmt.

17.

Wenn der Werth einer Grösse, die von einer anderen unbekannten Grösse abhängt, durch eine nicht völlig genaue Beobachtung bestimmt ist, so wird der hieraus berechnete Werth der Unbekannten auch einem Fehler unterworfen sein; es bleibt aber bei dieser Bestimmungsweise nichts der Willkür überlassen. Wenn aber *mehrere* von derselben Unbekannten abhängige Grössen durch nicht völlig genaue Beobachtungen bestimmt sind, so kann man den

*) Wir können uns nämlich die Kenntniss der Grössen μ', μ'' etc. nur in dem einen Falle erlangt denken, wo der Natur der Sache nach Fehler x, x', x'' etc., welche zu 1, μ', μ'' etc. proportional sind, als gleich wahrscheinlich anzunehmen sind, oder vielmehr, wo

$$\varphi(x) = \mu'\varphi'(\mu'x) = \mu''\varphi''(\mu''x) \text{ etc.}$$

Werth der Unbekannten entweder aus irgend einer dieser Beobachtungen ableiten, oder auch aus irgend einer Combination mehrerer Beobachtungen, was auf unendlich verschiedene Weisen geschehen kann. Wenn nun auch der auf eine solche Weise erhaltene Werth der Unbekannten immer einem Fehler unterworfen bleibt, so wird doch bei der einen Combination ein grösserer, bei einer anderen ein kleinerer Fehler zu befürchten sein. Aehnlich wird es sich verhalten, wenn mehrere Grössen, die von mehreren Unbekannten zugleich abhängen, beobachtet sind: jenachdem die Anzahl der Beobachtungen entweder der Anzahl der Unbekannten gleich, oder kleiner oder grösser als diese ist, wird die Aufgabe entweder bestimmt oder unbestimmt oder überbestimmt sein (wenigstens im allgemeinen), und im dritten Fall wird man zur Bestimmung der Unbekannten die Beobachtungen auf unendlich verschiedene Weisen combiniren können. Aus dieser Mannigfaltigkeit der Combinationen diejenigen auszuwählen, welche der Sache am besten dienen, d. h. welche die mit den kleinsten Fehlern behafteten Werthe der Unbekannten liefern, ist unstreitig bei der Anwendung der Mathematik auf die Naturwissenschaften eine der wichtigsten Aufgaben.

In der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" haben wir gezeigt, wie die *wahrscheinlichsten* Werthe der Unbekannten abzuleiten sind, wenn das Gesetz für die Wahrscheinlichkeit der Beobachtungsfehler bekannt ist; und da dieses Gesetz seiner Natur nach in beinahe allen Fällen hypothetisch bleibt, so haben wir jene Theorie auf das plausibelste Gesetz angewendet, wobei die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers x der Exponentialgrösse $e^{-h^2x^2}$ proportional genommen wird; und hieraus ist das Verfahren entstanden, welches von uns schon lange und zwar besonders bei astronomischen Rechnungen gebraucht wurde, und jetzt unter dem Namen der Methode der kleinsten Quadrate von den meisten Rechnern angewandt wird.

Später zeigte *Laplace*, indem er die Sache anders angriff, dass gerade dieses Princip, wie auch das Gesetz der Wahrscheinlichkeit der Fehler beschaffen sei, allen anderen immer noch vorzuziehen sei, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen eine sehr grosse ist. Ist jedoch die Anzahl der Beobachtungen eine mässige, so bleibt die Frage unentschieden, so dass bei Verwerfung unseres hypothetischen Gesetzes die Methode der kleinsten Quadrate nur deshalb vor anderen empfohlen zu werden verdiente, weil sie zur Vereinfachung der Rechnungen am besten geeignet ist.

Wir hoffen deshalb, den Mathematikern einen Dienst zu erweisen, indem wir bei dieser neuen Behandlung des Gegenstandes zeigten, dass die Methode der kleinsten Quadrate die beste von allen Combinationen liefere, und zwar nicht angenähert, sondern unbedingt, welches auch das Wahrscheinlichkeitsgesetz für die Fehler, und welches auch die Anzahl der Beobachtungen sei, wenn man nur die Definition des mittleren Fehlers nicht im Sinne von *Laplace*, sondern so, wie es von uns in den Art. 5. und 6. geschehen ist, feststellt.

Uebrigens muss hier ausdrücklich hervorgehoben werden, dass es sich in allen folgenden Untersuchungen nur um die unregelmässigen und vom constanten Theil freien Fehler handelt, da es im Grunde zu einer vollkommenen Beobachtungskunst gehört, alle Ursachen constanter Fehler möglichst fernzuhalten. Was für Vortheile aber ein Rechner, welcher solche Beobachtungen zu discutiren unternimmt, von denen man mit Recht argwöhnt, dass sie von constanten Fehlern nicht frei seien, aus der Wahrscheinlichkeitsrechnung selbst erlangen kann, darüber behalten wir uns vor, eine besondere Untersuchung bei einer anderen Gelegenheit zu veröffentlichen.

18.

Aufgabe. Es bezeichne U eine gegebene Funktion der unbekannten Grössen V, V′, V″ etc.; man sucht den mittleren bei der Bestimmung des Werthes von U zu befürchtenden Fehler M, wenn für V, V′, V″ etc. nicht ihre wahren Werthe, sondern diejenigen genommen werden, welche aus von einander unabhängigen und bezw. mit den mittleren Fehlern m, m', m'' etc. behafteten Beobachtungen hervorgehen.

Lösung. Es seien e, e', e'' etc. die Fehler der beobachteten Werthe von V, V′, V″ etc.; alsdann kann der aus ihnen folgende Fehler des Werthes von U durch die lineare Funktion

$$\lambda e + \lambda' e' + \lambda'' e'' + \text{etc.} = \mathrm{E}$$

ausgedrückt werden, wo λ, λ', λ'' etc. die Werthe der Differentialquotienten $\frac{d\mathrm{U}}{d\mathrm{V}}, \frac{d\mathrm{U}'}{d\mathrm{V}'}, \frac{d\mathrm{U}''}{d\mathrm{V}''}$ etc. für die wahren Werthe der V, V′, V″ etc. sind, wenn nur die Beobachtungen hinlänglich genau sind, um die Quadrate und Produkte der Fehler vernachlässigen zu dürfen. Hieraus folgt erstens, da ja die Beobachtungsfehler als von constanten Theilen frei angenommen werden, dass der mittlere Werth von E gleich 0 sein müsse. Ferner wird der mittlere zu befürchtende Fehler des Werthes von U gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe von E^2 sein, oder M^2 wird der mittlere Werth der Summe

$$\lambda^2 e^2 + \lambda'^2 e'^2 + \lambda''^2 e''^2 + \text{etc.} + 2\lambda\lambda' ee' + 2\lambda\lambda'' ee'' + 2\lambda'\lambda'' e'e'' + \text{etc.}$$

sein. Der mittlere Werth von $\lambda^2 e^2$ ist aber $\lambda^2 m^2$, der mittlere Werth von $\lambda'^2 e'^2$ ist $= \lambda'^2 m'^2$ etc., endlich sind die mittleren Werthe der Produkte $2\lambda\lambda' ee'$ etc. sämmtlich $= 0$. Hieraus schliessen wir also:

$$M = \sqrt{\lambda^2 m^2 + \lambda'^2 m'^2 + \lambda''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

Dieser Lösung wollen wir einige Anmerkungen beifügen.

I. Insoweit man die Beobachtungsfehler als Grössen erster Ordnung ansieht und Grössen höherer Ordnung vernachlässigt, darf man in unserer Formel für λ, λ', λ'' etc. auch diejenigen Werthe der Quotienten $\frac{dU}{dV}$ etc. nehmen, welche aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. hervorgehen. Wenn U eine lineare Funktion ist, so ist hierbei offenbar kein Unterschied vorhanden.

II. Will man an Stelle der mittleren Fehler der Beobachtungen lieber deren Gewichte einführen, so seien diese, auf eine willkürliche Einheit bezogen, bezw. p, p', p'' etc., und P sei das Gewicht der Bestimmung des sich aus den beobachteten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. ergebenden Werthes von U. Wir erhalten dann

$$P = \frac{1}{\frac{\lambda^2}{p} + \frac{\lambda'^2}{p'} + \frac{\lambda''^2}{p''} + \text{etc.}}.$$

III. Ist T eine andere gegebene Funktion der Grössen V, V′, V″ etc., und ist für deren wahre Werthe

$$\frac{dT}{dV} = \varkappa, \quad \frac{dT}{dV'} = \varkappa', \quad \frac{dT}{dV''} = \varkappa'' \text{ etc.},$$

so wird der Fehler in der aus den beobachteten Werthen von V, V′, V″ etc. erhaltenen Bestimmung des Werthes von T

$$= \varkappa e + \varkappa' e' + \varkappa'' e'' + \text{etc.} = E',$$

und der mittlere bei jener Bestimmung zu befürchtende Fehler

$$= \sqrt{\varkappa^2 m^2 + \varkappa'^2 m'^2 + \varkappa''^2 m''^2 + \text{etc.}}$$

sein. Die Fehler E, E′ werden aber offenbar nicht mehr von einander unabhängig sein, und der mittlere Werth des Produktes EE′ wird, im Gegensatz zum mittleren Werthe des Produktes ee', nicht $= 0$, sondern $= \varkappa\lambda m^2 + \varkappa'\lambda' m'^2 + \varkappa''\lambda'' m''^2 +$ etc. sein.

IV. Man kann unsere Aufgabe auch auf den Fall ausdehnen, wo die Werthe der Grössen V, V′, V″ etc. nicht unmittelbar aus den Beobachtungen gefunden, sondern irgendwie aus Combinationen der Beobachtungen abgeleitet werden, wenn nur die Bestimmungen der einzelnen von einander unabhängig sind, d. h. auf verschiedenen Beobachtungen beruhen: sobald aber diese Bedingung nicht erfüllt ist, würde die Formel für M falsch werden. Wäre z. B. eine oder die andere zur Bestimmung des Werthes von V verwendete Beobachtung auch zur Bestimmung des Werthes von V′ benutzt worden, so würden die Fehler e und e' nicht mehr von einander unabhängig, und der mittlere Werth des Produkts ee' deshalb auch nicht mehr $= 0$ sein. Wenn aber in einem solchen Fall der Zusammenhang der Grössen V und V′ mit den einfachen Beobachtungen, aus denen sie abgeleitet sind, genau bekannt ist, so wird man den mittleren Werth des Produktes ee' nach der Anmerkung III. bestimmen, und so die Formel für M vervollständigen können.

19.

Es seien V, V′, V″ etc. Funktionen der Unbekannten x, y, z etc.; die Anzahl jener sei $= \pi$, die Anzahl der Unbekannten $= \varrho$; wir nehmen an, durch Beobachtungen seien unmittelbar oder mittelbar die Werthe der Funktionen $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. gefunden, jedoch so, dass diese Bestimmungen unabhängig von einander sind. Ist ϱ grösser als π, so ist die Aufsuchung der Unbekannten offenbar eine unbestimmte Aufgabe; ist ϱ gleich π, so können die einzelnen x, y, z etc. als Funktionen von V, V′, V″ etc. entweder dargestellt oder in dieser Form gedacht werden, so dass aus den beobachteten Werthen von diesen die Werthe von jenen gefunden werden können, worauf man mit Hülfe des vorigen Art. die diesen einzelnen Bestimmungen zukommende relative Genauigkeit berechnen kann; ist endlich ϱ kleiner als π, so lassen sich die einzelnen x, y, z etc. auf unendlich verschiedene Weisen als Funktionen von V, V′, V″ etc. darstellen, und man kann deshalb für jene auf unendlich verschiedene Weisen Werthe ableiten. Diese Bestimmungen müssten nun völlig identisch sein, wenn den Beobachtungen absolute Genauigkeit zukäme; da dies indess nicht der Fall ist, so werden andere Weisen andere Werthe ergeben, und ebenso werden die aus verschiedenen Combinationen erhaltenen Bestimmungen mit verschiedener Genauigkeit begabt sein.

Wenn übrigens im zweiten oder dritten Fall die Funktionen V, V′, V″ etc. so beschaffen wären, dass $\pi - \varrho + 1$ oder mehrere unter ihnen als Funktionen der übrigen betrachtet werden könnten, so würde die Aufgabe in Bezug auf die letzteren Funktionen immer noch überbestimmt sein, in Bezug auf die Unbekannten x, y, z etc. aber unbestimmt; und man könnte die Werthe der letzteren selbst dann nicht einmal bestimmen, wenn die Werthe der Funktionen V, V′, V″ etc. völlig genau gegeben wären; diesen Fall werden wir aber von unseren Untersuchungen ausschliessen.

Sobald V, V′, V″ etc. nicht von vorn herein *lineare* Funktionen ihrer Variabeln sind, so kann man ihnen diese Form geben, indem man an Stelle der ursprünglichen Unbekannten deren Unterschiede gegen angenäherte Werthe, welche man als anderweit bekannt voraussetzen darf, einsetzt. Die mittleren in den Bestimmungen $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. zu befürchtenden Fehler bezeichnen wir bezw. mit m, m', m'' etc., und die Gewichte der Bestimmungen mit p, p', p'' etc., so dass $pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2 =$ etc. ist. Wir setzen das Verhältniss der mittleren Fehler zu einander als bekannt voraus, so dass die Gewichte, von denen man eines beliebig annehmen kann, ebenfalls bekannt sind. Endlich setzen wir

$$(V - L)\sqrt{p} = v, \quad (V' - L')\sqrt{p'} = v', \quad (V'' - L'')\sqrt{p''} = v'' \text{ etc.}$$

Dann wird sich die Sache offenbar ebenso verhalten, als wenn unmittelbare Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, deren mittlerer Fehler also $= m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''}$ etc. ist, oder denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird, auf

$$v = 0, \quad v' = 0, \quad v'' = 0 \text{ etc.}$$

geführt hätten.

20.

Aufgabe. Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die folgenden linearen Funktionen der Variabeln x, y, z etc.:

$$\left.\begin{aligned} v &= ax + by + cz + \text{etc.} + l \\ v' &= a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l' \\ v'' &= a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Es soll aus allen Systemen von Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc., welche allgemein

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = x - k$$

geben, wo k eine bestimmte, d. h. von x, y, z etc. unabhängige Grösse ist, das System ermittelt werden, für welches $\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 +$ etc. den kleinsten Werth erhält.

Lösung. Wir setzen

$$\left.\begin{aligned} av + a'v' + a''v'' + \text{etc.} &= \xi \\ bv + b'v' + b''v'' + \text{etc.} &= \eta \\ cv + c'v' + c''v'' + \text{etc.} &= \zeta \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

etc. Dann sind auch ξ, η, ζ etc. lineare Funktionen von x, y, z etc., nämlich

$$\left.\begin{aligned} \xi &= x\Sigma a^2 + y\Sigma ab + z\Sigma ac + \text{etc.} + \Sigma al \\ \eta &= x\Sigma ab + y\Sigma b^2 + z\Sigma bc + \text{etc.} + \Sigma bl \\ \zeta &= x\Sigma ac + y\Sigma bc + z\Sigma c^2 + \text{etc.} + \Sigma cl \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

(wo Σa^2 die Summe $a^2 + a'^2 + a''^2 +$ etc. bezeichnet, und analog bei den übrigen); die Anzahl der ξ, η, ζ etc. ist hierbei der Anzahl der Variabeln x, y, z etc. gleich, nämlich $= \varrho$. Man kann deshalb durch Elimination eine Gleichung folgender Art ableiten*):

$$x = A + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.},$$

aus welcher durch Substitution der Werthe von ξ, η, ζ etc. nach (3) eine identische Gleichung hervorgehen muss. Wenn man folglich

$$\left.\begin{aligned} a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha \\ a'\,[\alpha\alpha] + b'\,[\alpha\beta] + c'\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha' \\ a''\,[\alpha\alpha] + b''\,[\alpha\beta] + c''\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} &= \alpha'' \text{ etc.} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

setzt, so wird nothwendig allgemein

$$\alpha v + \alpha' v' + \alpha'' v'' + \text{etc.} = x - A. \tag{5}$$

Diese Gleichung zeigt, dass unter die Werthsysteme der Coefficienten $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. sicher auch dieses: $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. zu rechnen ist, ebenso dass für ein beliebiges System allgemein

$$(\varkappa - \alpha)\,v + (\varkappa' - \alpha')\,v' + (\varkappa'' - \alpha'')\,v'' + \text{etc.} = A - k$$

werden muss; eine Gleichung, welche die folgenden einschliesst:

*) Der Grund, weshalb wir für die aus einer solchen Elimination hervorgehenden Coefficienten gerade diese Bezeichnung ausgewählt haben, wird später einleuchten.

$$(\varkappa - \alpha)\, a + (\varkappa' - \alpha')\, a' + (\varkappa'' - \alpha'')\, a'' + \text{etc.} = 0$$
$$(\varkappa - \alpha)\, b + (\varkappa' - \alpha')\, b' + (\varkappa'' - \alpha'')\, b'' + \text{etc.} = 0$$
$$(\varkappa - \alpha)\, c + (\varkappa' - \alpha')\, c' + (\varkappa'' - \alpha'')\, c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

Multipliciren wir diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addiren, so erhalten wir wegen (4):

$$(\varkappa - \alpha)\, \alpha + (\varkappa' - \alpha')\, \alpha' + (\varkappa'' - \alpha'')\, \alpha'' + \text{etc.} = 0$$

oder, was dasselbe ist,

$$\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \text{etc.}$$
$$= \alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.} + (\varkappa - \alpha)^2 + (\varkappa' - \alpha')^2 + (\varkappa'' - \alpha'')^2 + \text{etc.},$$

woraus folgt, dass die Summe $\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \text{etc.}$ den kleinsten Werth erhält, wenn man $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. setzt. Was zu finden war.

Dieser kleinste Werth selbst wird übrigens auf folgende Weise ermittelt. Die Gleichung (5) zeigt, dass

$$\alpha a + \alpha' a' + \alpha'' a'' + \text{etc.} = 1$$
$$\alpha b + \alpha' b' + \alpha'' b'' + \text{etc.} = 0$$
$$\alpha c + \alpha' c' + \alpha'' c'' + \text{etc.} = 0 \text{ etc.}$$

ist. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$ etc. und addirt, so erhält man unter Berücksichtigung der Gleichungen (4) sofort

$$\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.} = [\alpha\alpha].$$

21.

Wenn die Beobachtungen die (der Wahrheit sehr nahe kommenden) Gleichungen $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc. geliefert haben, so muss man, um aus ihnen den Werth der Unbekannten x zu finden, eine solche Combination

$$\varkappa v + \varkappa' v' + \varkappa'' v'' + \text{etc.} = 0$$

dieser Gleichungen aufsuchen, dass der Coefficient von x gleich 1 wird, und die übrigen Unbekannten y, z etc. eliminirt werden; dieser Bestimmung wird nach Art. 18. das Gewicht

$$= \frac{1}{\varkappa^2 + \varkappa'^2 + \varkappa''^2 + \text{etc.}}$$

zu geben sein. Aus dem vorigen Art. folgt daher, die zweckmässigste Bestimmung werde die sein, wenn man $\varkappa = \alpha$, $\varkappa' = \alpha'$, $\varkappa'' = \alpha''$ etc. setzt. Alsdann erhält x den Werth A; offenbar kann man denselben Werth (ohne Kenntniss der Multiplicatoren α, α', α'' etc.) auch direkt durch Elimination aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. ableiten. Das dieser Bestimmung zu ertheilende Gewicht wird $= \frac{1}{[\alpha\alpha]}$, oder der mittlere bei ihr zu befürchtende Fehler wird

$$= m\sqrt{p\,[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'\,[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''\,[\alpha\alpha]} \text{ etc.}$$

sein.

Auf analoge Weise wird ferner die zweckmässigste Bestimmung der übrigen Unbekannten y, z etc. für sie dieselben Werthe ergeben, welche durch Elimination aus den nämlichen Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. hervorgehen.

Bezeichnen wir die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc. oder, was dasselbe ist,

$$p\,(\mathrm{V} - \mathrm{L})^2 + p'(\mathrm{V}' - \mathrm{L}')^2 + p''(\mathrm{V}'' - \mathrm{L}'')^2 + \text{etc.}$$

mit Ω, so sind offenbar 2ξ, 2η, 2ζ etc. die partiellen Differentialquotienten der Funktion Ω, nämlich

$$2\xi = \frac{d\Omega}{dx},\quad 2\eta = \frac{d\Omega}{dy},\quad 2\zeta = \frac{d\Omega}{dz} \text{ etc.}$$

Demnach werden die Werthe der Unbekannten, welche aus der zweckmässigsten Combination der Beobachtungen hervorgehen, und welche man passend die *plausibelsten Werthe* nennen kann, mit denen identisch sein, die Ω zu einem Minimum machen. Nun drückt $\mathrm{V} - \mathrm{L}$ allgemein die Differenz des berechneten und des beobachteten Werthes aus. Die plausibelsten Werthe der Unbekannten werden deshalb dieselben sein, welche die Summe der mit den Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate der Differenzen zwischen den beobachteten und berechneten Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. zu einem Minimum machen, ein Princip, welches wir in der „Theoria Motus Corporum Coelestium“ von einem ganz anderen Gesichtspunkte aus festgestellt hatten. Und wenn ausserdem die relative Genauigkeit der einzelnen Bestimmungen angegeben werden soll, so muss man die x, y, z etc. durch unbestimmte Elimination aus den Gleichungen (3) in folgender Form ableiten:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= \mathrm{B} + [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= \mathrm{C} + [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

wonach die plausibelsten Werthe der Unbekannten x, y, z etc.

bezw. A, B, C etc., und die diesen Bestimmungen zukommenden Gewichte $\frac{1}{[\alpha\alpha]}$, $\frac{1}{[\beta\beta]}$, $\frac{1}{[\gamma\gamma]}$ etc., oder die mittleren bei denselben zu befürchtenden Fehler

$$\begin{aligned}
&\text{für } x \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\alpha\alpha]} = m'\sqrt{p'\,[\alpha\alpha]} = m''\sqrt{p''\,[\alpha\alpha]} \text{ etc.}\\
&\text{für } y \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\beta\beta]} = m'\sqrt{p'\,[\beta\beta]} = m''\sqrt{p''\,[\beta\beta]} \text{ etc.}\\
&\text{für } z \ldots\ldots m\sqrt{p\,[\gamma\gamma]} = m'\sqrt{p'\,[\gamma\gamma]} = m''\sqrt{p''\,[\gamma\gamma]} \text{ etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}$$

sein werden, ein Resultat, welches mit dem in der „Theoria Motus Corporum Coelestium" abgeleiteten übereinstimmt.

22.

Wir wollen den allereinfachsten, zugleich aber auch häufigsten Fall, dass nur eine einzige Unbekannte vorhanden ist, und $V = x$, $V' = x$, $V'' = x$ etc. wird, in Kürze besonders behandeln. Es wird nämlich $a = \sqrt{p}$, $a' = \sqrt{p'}$, $a'' = \sqrt{p''}$ etc., $l = -L\sqrt{p}$, $l' = -L'\sqrt{p'}$, $l'' = -L''\sqrt{p''}$ etc., und folglich

$$\xi = (p + p' + p'' + \text{ etc.})\,x - (pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.})\,.$$

Hieraus weiter

$$[\alpha\alpha] = \frac{1}{p + p' + p'' + \text{etc.}}$$

$$A = \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}\,.$$

Wenn man demnach aus mehreren Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, deren Gewichte bezw. p, p', p'' etc. sind, den Werth einer und derselben Grösse ermittelt hat, und zwar aus der ersten $=$ L, aus der zweiten $=$ L′, aus der dritten $=$ L″ etc., so wird der plausibelste Werth derselben

$$= \frac{pL + p'L' + p''L'' + \text{etc.}}{p + p' + p'' + \text{etc.}}\,,$$

und das Gewicht dieser Bestimmung $= p + p' + p'' +$ etc. sein. Sind alle Beobachtungen von gleicher Genauigkeit, so wird der plausibelste Werth

$$= \frac{L + L' + L'' + \text{etc.}}{\pi}$$

sein, d. h. gleich dem arithmetischen Mittel der beobachteten Werthe, und das Gewicht dieser Bestimmung $= \pi$, wenn man das Gewicht der Beobachtungen als Einheit annimmt.

11. Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen. Zweiter Theil

In: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, hrsg. von Anton Börsch und Paul Simon, Berlin 1887 (Nachdruck 1964), S. 28–53.

Original:
Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars posterior. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 5, (1819–1822) 1823, commentationes classis mathematicae, S. 63–90. In: Gauß Werke 4, S. 27–53.

Zweiter Theil.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1823, Februar 2.)

23.

Es erübrigen noch mehrere Untersuchungen, welche die vorhergehende Theorie sowohl erläutern als auch besonders erweitern sollen.

Vor allen muss man nachforschen, ob das Geschäft der Elimination, mittelst deren die Unbekannten x, y, z etc. durch die ξ, η, ζ etc. auszudrücken sind, immer ausführbar ist. Da die Anzahl jener der Anzahl dieser gleich ist, so wird, wie man aus der Theorie der Elimination bei linearen Gleichungen weiss, jene Elimination sicher möglich sein, wenn ξ, η, ζ etc. von einander unabhängig sind, im anderen Falle unmöglich. Nehmen wir für den Augenblick an, ξ, η, ζ etc. seien nicht von einander unabhängig, sondern es bestehe zwischen ihnen die identische Gleichung

$$0 = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}\,.$$

Wir hätten dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{F}\Sigma a^2 + \mathrm{G}\Sigma ab + \mathrm{H}\Sigma ac + \text{etc.} &= 0\\
\mathrm{F}\Sigma ab + \mathrm{G}\Sigma b^2 + \mathrm{H}\Sigma bc + \text{etc.} &= 0\\
\mathrm{F}\Sigma ac + \mathrm{G}\Sigma bc + \mathrm{H}\Sigma c^2 + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$\mathrm{F}\Sigma al + \mathrm{G}\Sigma bl + \mathrm{H}\Sigma cl + \text{etc.} = -\mathrm{K}\,.$$

Setzt man alsdann

$$\left.\begin{aligned}
a\,\mathrm{F} + b\,\mathrm{G} + c\,\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta\\
a'\mathrm{F} + b'\mathrm{G} + c'\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta'\\
a''\mathrm{F} + b''\mathrm{G} + c''\mathrm{H} + \text{etc.} &= \Theta''
\end{aligned}\right\} \qquad (1)$$

etc., so folgt

$$a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$
$$c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} = 0$$

etc., und ausserdem

$$l\Theta + l'\Theta' + l''\Theta'' + \text{etc.} = -\mathrm{K}.$$

Multiplicirt man demnach die Gleichungen (1) bezw. mit Θ, Θ', Θ'' etc. und addirt, so erhält man

$$0 = \Theta^2 + \Theta'^2 + \Theta''^2 + \text{etc.},$$

eine Gleichung, welche offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht gleichzeitig $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. wäre. Hieraus schliessen wir erstens, dass nothwendig $\mathrm{K} = 0$ sein muss. Sodann zeigen die Gleichungen (1), dass die Funktionen v, v', v'' etc. so beschaffen sind, dass ihre Werthe sich nicht ändern, wenn die Werthe der Grössen x, y, z etc. um Grössen zu- oder abnehmen, welche bezw. den F, G, H etc. proportional sind. Dasselbe wird offenbar von den Funktionen V, V′, V″ etc. gelten. Die Voraussetzung kann also nicht statt haben, ausser in dem Falle, wenn es sogar schon unmöglich gewesen wäre, aus den genauen Werthen der Grössen V, V′, V″ etc. die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. zu bestimmen, d. h. wenn die Aufgabe ihrer Natur nach unbestimmt gewesen wäre, einen Fall, den wir von unserer Untersuchung ausgeschlossen haben.

24.

Wir bezeichnen mit β, β', β'' etc. Multiplicatoren, welche der Unbekannten y gegenüber dieselbe Rolle spielen, wie die α, α' α'' etc. gegenüber dem x; es sei also

$$a\,[\beta\alpha] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta$$
$$a'[\beta\alpha] + b'[\beta\beta] + c'[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta'$$
$$a''[\beta\alpha] + b''[\beta\beta] + c''[\beta\gamma] + \text{etc.} = \beta''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\beta v + \beta' v' + \beta'' v'' + \text{etc.} = y - \mathrm{B}.$$

Ebenso seien γ, γ', γ'' etc. analoge Multiplicatoren in Bezug auf die Unbekannte z, demnach

$$a\,[\gamma\alpha] + b\,[\gamma\beta] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma$$
$$a'[\gamma\alpha] + b'[\gamma\beta] + c'[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma'$$
$$a''[\gamma\alpha] + b''[\gamma\beta] + c''[\gamma\gamma] + \text{etc.} = \gamma''$$

etc., so dass allgemein wird

$$\gamma v + \gamma' v' + \gamma'' v'' + \text{etc.} = z - \mathrm{C}$$

und so weiter. Ebenso wie wir im Art. 20. bereits fanden, dass $\Sigma\alpha a = 1$, $\Sigma\alpha b = 0$, $\Sigma\alpha c = 0$ etc., und ausserdem $\Sigma\alpha l = -\mathrm{A}$, so erhalten wir hiernach auch

$$\begin{aligned}
\Sigma\beta a &= 0, & \Sigma\beta b &= 1, & \Sigma\beta c &= 0 \text{ etc. und } & \Sigma\beta l &= -\mathrm{B}\\
\Sigma\gamma a &= 0, & \Sigma\gamma b &= 0, & \Sigma\gamma c &= 1 \text{ etc. und } & \Sigma\gamma l &= -\mathrm{C}
\end{aligned}$$

u. s. w. Und gerade so, wie man im Art. 20. erhielt $\Sigma\alpha^2 = [\alpha\alpha]$, wird auch

$$\Sigma\beta^2 = [\beta\beta], \quad \Sigma\gamma^2 = [\gamma\gamma] \text{ etc.}$$

Wenn man ferner die Werthe der α, α', α'' etc. (Art. 20. (4)) bezw. mit β, β', β'' etc. multiplicirt und addirt, so erhält man

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\alpha\beta] \text{ oder } \Sigma\alpha\beta = [\alpha\beta].$$

Multiplicirt man aber die Werthe von β, β', β'' etc. bezw. mit α, α', α'' etc. und addirt, so folgt ebenso

$$\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.} = [\beta\alpha], \text{ also } [\alpha\beta] = [\beta\alpha].$$

Es wird weiter auf analoge Weise gefunden

$$[\alpha\gamma] = [\gamma\alpha] = \Sigma\alpha\gamma, \quad [\beta\gamma] = [\gamma\beta] = \Sigma\beta\gamma \text{ etc.}$$

25.

Ferner bezeichnen wir mit λ, λ', λ'' etc. diejenigen Werthe der Funktionen v, v', v'' etc., welche erhalten werden, wenn wir für x, y, z etc. ihre plausibelsten Werthe A, B, C etc. einsetzen, also

$$\begin{aligned}
a\mathrm{A} + b\mathrm{B} + c\mathrm{C} + \text{etc.} + l &= \lambda\\
a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} + l' &= \lambda'\\
a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} + l'' &= \lambda''
\end{aligned}$$

etc.; wir setzen ausserdem

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \mathrm{M},$$

so dass M der Werth der Funktion Ω ist, welcher den plausibelsten Werthen der Variabeln entspricht, mithin auch der kleinste Werth dieser Funktion, wie wir im Art. 20. gezeigt haben. Hiernach wird $a\lambda + a'\lambda' + a''\lambda'' + \text{etc.}$ der Werth von ξ, welcher den Werthen $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc. entspricht, und zugleich $= 0$ sein, d. h. wir erhalten

$$\Sigma a\lambda = 0,$$

und es wird ebenso

$\Sigma b\lambda = 0$, $\Sigma c\lambda = 0$ etc.; ausserdem $\Sigma \alpha\lambda = 0$, $\Sigma \beta\lambda = 0$, $\Sigma \gamma\lambda = 0$ etc. Multiplicirt man endlich die Ausdrücke von λ, λ', λ'' etc. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addirt, so erhält man

$$l\lambda + l'\lambda' + l''\lambda'' + \text{etc.} = \lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc., oder}$$

$$\Sigma l\lambda = \mathrm{M}.$$

26.

Ersetzen wir in der Gleichung $v = ax + by + cz + \text{etc.} + l$ die x, y, z etc. durch die Ausdrücke (7) des Art. 21., so folgt mit Hülfe von aus dem Vorhergehenden geläufigen Reduktionen

$$v = \alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} + \lambda$$

und ebenso wird allgemein

$$v' = \alpha'\xi + \beta'\eta + \gamma'\zeta + \text{etc.} + \lambda'$$
$$v'' = \alpha''\xi + \beta''\eta + \gamma''\zeta + \text{etc.} + \lambda''$$

etc. Multipliciren wir diese oder die Gleichungen (1) des Art. 20. bezw. mit λ, λ', λ'' etc. und addiren, so sehen wir, dass allgemein ist

$$\lambda v + \lambda' v' + \lambda'' v'' + \text{etc.} = \mathrm{M}.$$

27.

Die Funktion Ω kann im allgemeinen in mehreren Formen dargestellt werden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird. Und zwar erhält man zunächst aus den Gleichungen (1) des Art. 20. durch Quadriren und Addiren unmittelbar

$$\Omega = x^2\Sigma a^2 + y^2\Sigma b^2 + z^2\Sigma c^2 + \text{etc.} + 2xy\Sigma ab + 2xz\Sigma ac + 2yz\Sigma bc + \text{etc.} + 2x\Sigma al + 2y\Sigma bl + 2z\Sigma cl + \text{etc.} + \Sigma l^2$$

als *erste* Form.

Multiplicirt man dieselben Gleichungen bezw. mit v, v', v'' etc. und addirt, so erhält man

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} + lv + l'v' + l''v'' + \text{etc.}$$

und hieraus, indem man für v, v', v'' etc. die im vorhergehenden Art. gegebenen Ausdrücke einsetzt,

$$\Omega = \xi x + \eta y + \zeta z + \text{etc.} - \mathrm{A}\xi - \mathrm{B}\eta - \mathrm{C}\zeta - \text{etc.} + \mathrm{M}$$

oder

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

als *zweite* Form.

Setzen wir in der zweiten Form für $x - A$, $y - B$, $z - C$ etc. die Ausdrücke (7) des Art. 21., so erhalten wir die *dritte* Form

$$\begin{aligned}\Omega = [\alpha\alpha]\,\xi^2 + [\beta\beta]\,\eta^2 + [\gamma\gamma]\,\zeta^2 + \text{etc.} + 2[\alpha\beta]\,\xi\eta \\ + 2[\alpha\gamma]\,\xi\zeta + 2[\beta\gamma]\,\eta\zeta + \text{etc.} + M.\end{aligned}$$

Diesen kann als *vierte* Form die folgende hinzugefügt werden, welche sich aus der dritten und aus den Formeln des vorhergehenden Art. von selbst ergiebt,

$$\Omega = (v - \lambda)^2 + (v' - \lambda')^2 + (v'' - \lambda'')^2 + \text{etc.} + M, \text{ oder}$$
$$\Omega = M + \Sigma(v - \lambda)^2,$$

welche Form die Bedingung des Minimums unmittelbar vor Augen führt.

28.

Es seien e, e', e'' etc. die Fehler, welche bei den Beobachtungen, die $V = L$, $V' = L'$, $V'' = L''$ etc. ergeben haben, begangen sind; d. h. die wahren Werthe der Funktionen V, V', V'' etc. seien bezw. $L - e$, $L' - e'$, $L'' - e''$ etc., und folglich die wahren Werthe von v, v', v'' etc. bezw. $-e\sqrt{p}$, $-e'\sqrt{p'}$, $-e''\sqrt{p''}$ etc. Hiermit wird der wahre Werth des x

$$= A - \alpha e\sqrt{p} - \alpha' e'\sqrt{p'} - \alpha'' e''\sqrt{p''} \text{ etc.},$$

oder der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von x begangene Fehler, den wir mit $E(x)$ bezeichnen wollen, ist

$$= \alpha e\sqrt{p} + \alpha' e'\sqrt{p'} + \alpha'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Analog wird der bei der zweckmässigsten Bestimmung des Werthes von y begangene Fehler, den wir mit $E(y)$ bezeichnen werden,

$$= \beta e\sqrt{p} + \beta' e'\sqrt{p'} + \beta'' e''\sqrt{p''} + \text{etc.}$$

Den mittleren Werth des Quadrates $[E(x)]^2$ findet man

$$= m^2 p\,(\alpha^2 + \alpha'^2 + \alpha''^2 + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\alpha],$$

den mittleren Werth des Quadrates $[E(y)]^2$ ebenso $= m^2 p\,[\beta\beta]$ etc., wie wir schon oben zeigten. Nun kann man auch den mittleren Werth des *Produktes* $E(x)\,E(y)$ angeben; derselbe wird nämlich

$$= m^2 p\,(\alpha\beta + \alpha'\beta' + \alpha''\beta'' + \text{etc.}) = m^2 p\,[\alpha\beta]$$

gefunden. Man kann dieses kurz auch so ausdrücken: Die mittleren Werthe der Quadrate $[E(x)]^2$, $[E(y)]^2$ etc. sind bezw. den Produkten aus $\frac{1}{2}\,m^2 p$ in die partiellen Differentialquotienten zweiter Ordnung

$$\frac{d^2\Omega}{d\xi^2}, \quad \frac{d^2\Omega}{d\eta^2} \quad \text{etc.}$$

gleich, und der mittlere Werth eines solchen Produktes, wie $E(x)\,E(y)$, ist gleich dem Produkte aus $\frac{1}{2}m^2p$ in den Differentialquotienten $\frac{d^2\Omega}{d\xi\, d\eta}$, wenn man nämlich Ω als Funktion der Variabeln ξ, η, ζ etc. betrachtet.

29.

Es bezeichne t eine gegebene lineare Funktion der Grössen x, y, z etc., es sei also

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k.$$

Der aus den plausibelsten Werthen von x, y, z etc. hervorgehende Werth von t wird demnach $= f\mathrm{A} + g\mathrm{B} + h\mathrm{C} + \text{etc.} + k$ sein, den wir mit K bezeichnen wollen. Nimmt man diesen als wahren Werth von t an, so wird ein Fehler begangen

$$= f\mathrm{E}(x) + g\mathrm{E}(y) + h\mathrm{E}(z) + \text{etc.},$$

der mit $\mathrm{E}(t)$ bezeichnet werden möge. Der mittlere Werth dieses Fehlers wird offenbar $= 0$, d. h. der Fehler wird von einem constanten Theil frei sein. Der mittlere Werth des Quadrates $[\mathrm{E}(t)]^2$, d. h. der mittlere Werth der Summe

$$\begin{aligned} f^2[\mathrm{E}(x)]^2 &+ 2fg\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(y) + 2fh\,\mathrm{E}(x)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.} \\ &+ g^2\,[\mathrm{E}(y)]^2 + 2gh\,\mathrm{E}(y)\,\mathrm{E}(z) + \text{etc.} \\ &\qquad + h^2\,[\mathrm{E}(z)]^2 + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

wird aber nach den Ergebnissen des vorigen Art. gleich dem Produkte aus m^2p in die Summe

$$\begin{aligned} f^2[\alpha\alpha] &+ 2fg\,[\alpha\beta] + 2fh\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\ &+ g^2\,[\beta\beta] + 2gh\,[\beta\gamma] + \text{etc.} \\ &\qquad + h^2\,[\gamma\gamma] + \text{etc. etc.} \end{aligned}$$

oder gleich dem Produkte aus m^2p in den Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ sein, welcher durch die Substitutionen

$$\xi = f, \quad \eta = g, \quad \zeta = h \text{ etc.}$$

entsteht. Bezeichnen wir also diesen bestimmten Werth der Funktion $\Omega - \mathrm{M}$ mit ω, so wird der mittlere zu befürchtende Fehler, wenn wir an der Bestimmung $t = \mathrm{K}$ festhalten, $= m\sqrt{p\omega}$, oder das Gewicht dieser Bestimmung $= \frac{1}{\omega}$ sein.

Da allgemein

$$\Omega - \mathrm{M} = (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \text{etc.}$$

ist, so muss ω auch dem bestimmten Werthe des Ausdrucks

$$(x - \mathrm{A})f + (y - \mathrm{B})\,g + (z - \mathrm{C})\,h + \text{etc.},$$

d. h. dem bestimmten Werth von $t - \mathrm{K}$ gleich sein, welcher sich ergiebt, wenn man den Variabeln x, y, z etc. diejenigen Werthe beilegt, welche den Werthen f, g, h etc. der ξ, η, ζ etc. entsprechen.

Endlich merken wir noch an, dass, wenn t in der Form einer Funktion der ξ, η, ζ etc. allgemein dargestellt wird, der constante Theil derselben nothwendig $= \mathrm{K}$ wird. Wenn also allgemein

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

ist, so wird $\omega = f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}$

30.

Die Funktion Ω erlangt, wie wir oben gesehen haben, ihren *absolut kleinsten* Werth M, wenn man $x = \mathrm{A}$, $y = \mathrm{B}$, $z = \mathrm{C}$ etc., oder $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. setzt. Ist aber irgend einer dieser Grössen schon ein *anderer* Werth beigelegt, z. B. $x = \mathrm{A} + \Delta$, so kann Ω durch Aenderungen der Uebrigen einen relativ kleinsten Werth erlangen, welcher offenbar mit Hülfe der Gleichungen

$$x = \mathrm{A} + \Delta, \quad \frac{d\Omega}{dy} = 0, \quad \frac{d\Omega}{dz} = 0 \text{ etc.}$$

erhalten wird. Es muss deshalb $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. werden, und ferner, da ja

$$x = \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc. ist, } \xi = \frac{\Delta}{[\alpha\alpha]}.$$

Zugleich wird man haben:

$$y = \mathrm{B} + \frac{[\alpha\beta]}{[\alpha\alpha]}\Delta, \quad z = \mathrm{C} + \frac{[\alpha\gamma]}{[\alpha\alpha]}\Delta \text{ etc.}$$

Der relativ kleinste Werth des Ω wird aber

$$= [\alpha\alpha]\,\xi^2 + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\Delta^2}{[\alpha\alpha]}.$$

Umgekehrt schliessen wir hieraus, dass, wenn der Werth des Ω eine vorgeschriebene Grenze $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, alsdann auch der Werth des x nothwendig in den Grenzen $\mathrm{A} - \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ und $\mathrm{A} + \mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ liegen muss. Es verdient angemerkt zu werden, dass $\mu\sqrt{[\alpha\alpha]}$ dem mittleren zu befürchtenden Fehler des plausibelsten Werthes von x gleich wird, wenn man $\mu = m\sqrt{p}$ setzt, d. h. wenn μ gleich dem mittleren Fehler solcher Beobachtungen ist, welche das Gewicht 1 besitzen.

Allgemeiner wollen wir den kleinsten Werth von Ω aufsuchen, welcher für einen gegebenen Werth von t eintreten kann, wenn t wie im vorigen Art. die lineare Funktion $fx + gy + hz +$ etc. $+ k$ bezeichnet, und ihr plausibelster Werth $=$ K ist; jener vorgeschriebene Werth des t sei $\mathrm{K} + \varkappa$. Aus der Theorie der Maxima und Minima ist bekannt, dass die Lösung der Aufgabe aus den Gleichungen

$$\frac{d\Omega}{dx} = \Theta\frac{dt}{dx}$$

$$\frac{d\Omega}{dy} = \Theta\frac{dt}{dy}$$

$$\frac{d\Omega}{dz} = \Theta\frac{dt}{dz} \text{ etc.}$$

erhalten wird, d. h. aus $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc., wenn man mit Θ einen zunächst unbestimmten Faktor bezeichnet. Wenn wir also, wie in dem vorhergehenden Art., *allgemein*

$$t = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

setzen, so haben wir

$$\mathrm{K} + \varkappa = \Theta(f\mathrm{F} + g\mathrm{G} + h\mathrm{H} + \text{etc.}) + \mathrm{K}, \text{ oder}$$

$$\Theta = \frac{\varkappa}{\omega},$$

wo ω in derselben Bedeutung wie im vorigen Art. zu nehmen ist. Und da $\Omega - \mathrm{M}$ im allgemeinen eine homogene Funktion zweiter Ordnung der Variabeln ξ, η, ζ etc. ist, so wird augenscheinlich ihr Werth für $\xi = \Theta f$, $\eta = \Theta g$, $\zeta = \Theta h$ etc. $= \Theta^2\omega$, und folglich der kleinste Werth, den Ω für $t = \mathrm{K} + \varkappa$ erhalten kann, gleich $\mathrm{M} + \Theta^2\omega = \mathrm{M} + \frac{\varkappa^2}{\omega}$ werden. Umgekehrt, wenn Ω irgend einen vorgeschriebenen Werth $\mathrm{M} + \mu^2$ nicht überschreiten soll, so muss der Werth von t nothwendig in den Grenzen $\mathrm{K} - \mu\sqrt{\omega}$ und $\mathrm{K} + \mu\sqrt{\omega}$ enthalten sein, wo $\mu\sqrt{\omega}$ dem mittleren bei der plausibelsten Bestimmung von t zu befürchtenden Fehler gleich ist, wenn man μ als den mittleren Fehler der Beobachtungen annimmt, deren Gewicht $= 1$ ist.

31.

Wenn die Anzahl der Grössen x, y, z etc. etwas grösser ist, wird die numerische Bestimmung der Werthe A, B, C etc. aus den Gleichungen $\xi = 0$, $\eta = 0$, $\zeta = 0$ etc. vermittelst der gewöhnlichen Elimination ziemlich lästig sein. Deshalb haben wir in der *Theorie der Bewegung der Himmelskörper*, Art. 182., auf einen eigenthümlichen Algorithmus hingewiesen, und denselben in der *Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas* (Comment. recent. Soc. Gotting. Vol. I) des weiteren entwickelt, durch welchen jene Arbeit, soweit es der Gegenstand erlaubt, thunlichst vereinfacht wird.

Die Funktion Ω ist nämlich auf folgende Form

$$\frac{u^{0\,2}}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{u'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

zu bringen, wo die Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$, $\mathfrak{D}'''$ etc. bestimmte Grössen, u^0, u', u'', u''' etc. aber lineare Funktionen von x, y, z etc. sind, von denen indess die zweite u' kein x, die dritte u'' kein x und kein y, die vierte u''' kein x, y und z, und so weiter, enthält, wonach die letzte $u^{(\pi-1)}$ nur noch von der letzten der Unbekannten x, y, z etc. abhängt; endlich sind die Coefficienten, mit denen x, y, z etc. bezw. in u^0, u', u'' etc. multiplicirt sind, bezw. den $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gleich. Alsdann hat man $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$, $u''' = 0$ etc. zu setzen, um die Werthe der Unbekannten x, y, z etc. in umgekehrter Reihenfolge so bequem wie möglich abzuleiten. Es erscheint unnöthig, den Algorithmus selbst, durch welchen diese Transformation der Funktion Ω bewirkt wird, hier noch einmal zu wiederholen.

Aber eine noch viel weitläufigere Rechnung erfordert die unbestimmte Elimination, mit deren Hülfe man die Gewichte jener Bestimmungen aufzusuchen hat. Zwar das Gewicht der Bestimmung der letzten Unbekannten (welche allein in dem letzten $u^{(\pi-1)}$ vorkommt) wird nach dem, was in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“ gelehrt ist, leicht gleich dem letzten Gliede in der Reihe der Divisoren $\mathfrak{A}^0$, $\mathfrak{B}'$, $\mathfrak{C}''$ etc. gefunden; deshalb haben sich einige Rechner, um jene lästige Elimination zu umgehen, in Ermangelung anderer Hülfsmittel, dazu entschlossen, den öfter erwähnten Algorithmus mit veränderter Reihenfolge der Grössen x, y, z etc. zu wiederholen, indem sie nach und nach den einzelnen Unbekannten den letzten Platz anwiesen. Wir hoffen deshalb auf den Dank der Mathematiker, wenn wir zur Berechnung der Gewichte der Bestimmungen eine neue, aus einer tieferen Analyse der Beweisführung geschöpfte Methode, welche nichts mehr zu wünschen übrig zu lassen scheint, hier auseinander setzen.

32.

Nehmen wir also an, es sei

$$\begin{aligned} u^0 &= \mathfrak{A}^0 x + \mathfrak{B}^0 y + \mathfrak{C}^0 z + \text{etc.} + \mathfrak{L}^0 \\ u' &= \mathfrak{B}' y + \mathfrak{C}' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}' \\ u'' &= \mathfrak{C}'' z + \text{etc.} + \mathfrak{L}'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{1}$$

Hieraus folgt im allgemeinen

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\, d\Omega &= \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.} \\ &= \frac{u^0\, du^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{u'\, du'}{\mathfrak{B}'} + \frac{u''\, du''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} \\ &= u^0 \left(dx + \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} dy + \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} dz + \text{etc.}\right) \\ &\quad + u' \left(dy + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} dz + \text{etc.}\right) + u''(dz + \text{etc.}) + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus zu erschliessen

$$\begin{aligned} \xi &= u^0 \\ \eta &= \frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + u' \\ \zeta &= \frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} u^0 + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} u' + u'' \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{2}$$

Nehmen wir an, es ergäben sich hieraus die folgenden Formeln

$$\begin{aligned} u^0 &= \xi \\ u' &= \mathrm{A}'\xi + \eta \\ u'' &= \mathrm{A}''\xi + \mathrm{B}''\eta + \zeta \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{3}$$

Von dem vollständigen Differential der Gleichung

$$\Omega = \xi(x - \mathrm{A}) + \eta(y - \mathrm{B}) + \zeta(z - \mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ziehen wir nunmehr die Gleichung

$$\frac{1}{2}\, d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc.}$$

ab, und erhalten

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = (x - \mathrm{A})\,d\xi + (y - \mathrm{B})\,d\eta + (z - \mathrm{C})\,d\zeta + \text{etc.},$$

welcher Ausdruck mit dem übereinstimmen muss, der sich aus (3) ergiebt, nämlich mit

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}\,d\xi + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}(\mathrm{A}'d\xi + d\eta) + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}(\mathrm{A}''d\xi + \mathrm{B}''d\eta + d\zeta) + \text{etc.}$$

Hieraus folgern wir

$$\begin{aligned} x &= \frac{u^0}{\mathfrak{A}^0} + \mathrm{A}'\frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{A}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{A} \\ y &= \frac{u'}{\mathfrak{B}'} + \mathrm{B}''\frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{B} \\ z &= \frac{u''}{\mathfrak{C}''} + \text{etc.} + \mathrm{C} \\ &\text{etc.} \end{aligned} \tag{4}$$

Wenn man in diese Ausdrücke für u^0, u', u'' etc. ihre aus (3) entnommenen Werthe einsetzt, so wird die unbestimmte Elimination erledigt sein. Und zwar erhält man zur Bestimmung der Gewichte

$$\begin{aligned} [\alpha\alpha] &= \frac{1}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathrm{A}'^2}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{A}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{A}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\beta\beta] &= \frac{1}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathrm{B}''^2}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{B}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ [\gamma\gamma] &= \frac{1}{\mathfrak{C}''} + \frac{\mathrm{C}'''^2}{\mathfrak{D}'''} + \text{etc.} \\ &\text{etc.,} \end{aligned} \tag{5}$$

Formeln, deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig lässt. Uebrigens ergeben sich auch für die anderen Coefficienten $[\alpha\beta]$, $[\alpha\gamma]$, $[\beta\gamma]$ etc. gleich einfache Formeln, welche wir indessen, da sie seltener gebraucht werden, hier beizufügen unterlassen.

33.

Wegen der Bedeutung des Gegenstandes, und um Alles für die Rechnung bereit zu stellen, wollen wir auch die expliciten Formeln zur Bestimmung der Coefficienten A′, A″, A‴ etc., B″, B‴ etc. etc. hierherschreiben. Diese Rechnung kann auf eine doppelte Weise geführt werden, da dieselben Gleichungen sich ergeben müssen, ob man nun die aus (3) entnommenen Werthe der u^0, u', u'' etc. in (2) einsetzt, oder die Werthe der ξ, η, ζ etc. aus (2) in (3). Die erste Rechnungsart liefert folgendes Formelsystem:

$$\frac{\mathfrak{B}^0}{\mathfrak{A}^0} + A' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{C}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} A' + A'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}^0}{\mathfrak{A}^0} + \frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} A' + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} A'' + A''' = 0$$

etc., woraus A', A'', A''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{C}'}{\mathfrak{B}'} + B'' = 0$$

$$\frac{\mathfrak{D}'}{\mathfrak{B}'} + \frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} B'' + B''' = 0$$

etc., woraus B'', B''' etc. gefunden werden,

$$\frac{\mathfrak{D}''}{\mathfrak{C}''} + C''' = 0$$

etc., woraus C''' etc. gefunden werden. U. s. w.

Die andere Rechnungsart ergiebt folgende Formeln:

$$\mathfrak{A}^0 A' + \mathfrak{B}^0 = 0,$$

woraus A' erhalten wird,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A'' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}' B'' + \mathfrak{C}' &= 0, \end{aligned}$$

woraus B'' und A'' erhalten werden,

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}^0 A''' + \mathfrak{B}^0 B'' + \mathfrak{C}^0 C''' + \mathfrak{D}^0 &= 0 \\ \mathfrak{B}^0 B''' + \mathfrak{C}' C''' + \mathfrak{D}' &= 0 \\ \mathfrak{C}'' C''' + \mathfrak{D}'' &= 0, \end{aligned}$$

woraus C''', B''', A''' erhalten werden. U. s. w.

Beide Rechnungsarten sind ungefähr gleich bequem, wenn die Gewichte sämmtlicher Bestimmungen x, y, z etc. verlangt werden; wird aber nur eine oder die andere der Grössen $[\alpha\alpha]$, $[\beta\beta]$, $[\gamma\gamma]$ etc. gesucht, so ist offenbar das erstere System weit vorzuziehen.

Uebrigens führt eine Combination der Gleichungen (1) mit (4) zu denselben Formeln und verhilft uns ausserdem zu einer doppelten Berechnung der plausibelsten Werthe von A, B, C etc. selbst, nämlich *erstens*

$$
\begin{aligned}
\mathrm{A} &= -\frac{\mathfrak{L}^0}{\mathfrak{A}^0} - \mathrm{A}'\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{A}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{A}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
\mathrm{B} &= \qquad\quad -\frac{\mathfrak{L}'}{\mathfrak{B}'} - \mathrm{B}''\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{B}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
\mathrm{C} &= \qquad\qquad\qquad -\frac{\mathfrak{L}''}{\mathfrak{C}''} - \mathrm{C}'''\frac{\mathfrak{L}'''}{\mathfrak{D}'''} - \text{etc.}\\
&\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Die andere Rechnung ist mit der gewöhnlichen identisch, bei der $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. gesetzt wird.

34.

Die Entwickelungen des Art. 32. sind indessen nur specielle Fälle eines allgemeineren Lehrsatzes, der folgendermaassen lautet:

Lehrsatz. Es bezeichne t folgende lineare Funktion der Variabeln x, y, z etc.

$$t = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

welche sich als Funktion der Variabeln u^0, u', u'' etc. in der Form

$$t = k^0u^0 + k'u' + k''u'' + \text{etc.} + \mathrm{K}$$

darstellt. Alsdann wird K der plausibelste Werth des t sein, und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{\mathfrak{A}^0k^{02} + \mathfrak{B}'k'^2 + \mathfrak{C}''k''^2 + \text{etc.}}.$$

Beweis. Der erste Theil des Lehrsatzes folgt aus dem Umstande, dass der plausibelste Werth von t den Werthen $u^0 = 0$, $u' = 0$, $u'' = 0$ etc. entsprechen muss. Zum Beweis des zweiten Theils bemerken wir, da

$$\frac{1}{2}\,d\Omega = \xi dx + \eta dy + \zeta dz + \text{etc. und } dt = f dx + g dy + h dz + \text{etc.}$$

ist, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc., unabhängig von den Werthen der Differentiale dx, dy, dz etc.,

$$d\Omega = 2dt$$

sein muss. Daraus folgt aber, dass für dieselben Werthe $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$\frac{u^0}{\mathfrak{A}^0}du^0 + \frac{u'}{\mathfrak{B}'}du' + \frac{u''}{\mathfrak{C}''}du'' + \text{etc.} = k^0du^0 + k'du' + k''du'' + \text{etc.}$$

wird. Auch erkennt man leicht, wenn dx, dy, dz etc. von einander unabhängig sind, dass auch du^0, du', du'' etc. von einander unabhängig sein müssen; woraus wir entnehmen, dass für $\xi = f$, $\eta = g$, $\zeta = h$ etc.

$$u^0 = \mathfrak{A}^0 k^0, \quad u' = \mathfrak{B}' k', \quad u'' = \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.}$$

ist. Folglich wird der Werth von Ω, welcher zu denselben Werthen gehört,

$$= \mathfrak{A}^0 k^{0\,2} + \mathfrak{B}' k'^2 + \mathfrak{C}'' k''^2 + \text{etc.} + \mathrm{M},$$

woraus nach Art. 29. sofort die Richtigkeit unseres Lehrsatzes folgt.

Wenn wir übrigens die Transformation der Funktion t unmittelbar, d. h. ohne Kenntniss der Substitutionen (4) des Art. 32., ausführen wollen, so stehen die Formeln zur Verfügung:

$$\begin{aligned} f &= \mathfrak{A}^0 k^0 \\ g &= \mathfrak{B}^0 k^0 + \mathfrak{B}' k' \\ h &= \mathfrak{C}^0 k^0 + \mathfrak{C}' k' + \mathfrak{C}'' k'' \text{ etc.}, \end{aligned}$$

woraus nach und nach die Coefficienten k^0, k', k'' etc. bestimmt werden, und sich endlich ergiebt:

$$\mathrm{K} = k - \mathfrak{L}^0 k^0 - \mathfrak{L}' k' - \mathfrak{L}'' k'' - \text{etc.}$$

35.

Einer besonderen Behandlung werth ist das folgende Problem, sowohl seiner praktischen Nützlichkeit, als seiner eleganten Lösung wegen:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch Hinzufügung einer neuen Gleichung bewirkt werden, ebenso wie die Gewichte der neuen Bestimmungen zu finden.

Wir behalten die oben benutzten Bezeichnungen bei, so dass die auf das Gewicht $= 1$ zurückgeführten, ursprünglichen Gleichungen die folgenden sind: $v = 0$, $v' = 0$, $v'' = 0$ etc., und die allgemeine Summe $v^2 + v'^2 + v''^2 +$ etc. $= \Omega$ ist; ferner seien ξ, η, ζ etc. die partiellen Differentialquotienten

$$\frac{d\Omega}{2dx}, \quad \frac{d\Omega}{2dy}, \quad \frac{d\Omega}{2dz} \text{ etc.},$$

und endlich möge aus der unbestimmten Elimination folgen:

$$\left.\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ y &= \mathrm{B} + [\alpha\beta]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ z &= \mathrm{C} + [\alpha\gamma]\,\xi + [\beta\gamma]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} \\ &\text{etc.} \end{aligned}\right\} \quad (1)$$

Wir nehmen nun an, eine (sehr nahe richtige, auf die Gewichtseinheit bezogene) neue Gleichung $v^* = 0$ trete hinzu, und wir wollen nachforschen, wie gross die hieraus hervorgehenden Aenderungen sowohl in den plausibelsten Werthen der Unbekannten A, B, C etc., als auch in den Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. seien.

Wir setzen

$$\Omega + v^{*2} = \Omega^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dx} = \xi^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dy} = \eta^*, \quad \frac{d\Omega^*}{2dz} = \zeta^* \text{ etc.}$$

und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$x = \mathrm{A}^* + [\alpha\alpha^*]\,\xi^* + [\alpha\beta^*]\,\eta^* + [\alpha\gamma^*]\,\zeta^* + \text{etc.}$$

Endlich sei

$$v^* = fx + gy + hz + \text{etc.} + k,$$

und durch Einsetzung der Werthe für x, y, z etc. nach (1) folge hieraus

$$v^* = \mathrm{F}\xi + \mathrm{G}\eta + \mathrm{H}\zeta + \text{etc.} + \mathrm{K};$$

sodann setze man

$$\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.} = \omega.$$

Offenbar wird K der plausibelste Werth der Funktion v^* sein, wie er sich aus den ursprünglichen Gleichungen ergiebt, ohne Rücksicht auf den Werth 0, welchen die hinzutretende Beobachtung geliefert hat, und $\frac{1}{\omega}$ wird das Gewicht dieser Bestimmung sein.

Wir haben nun

$$\xi^* = \xi + fv^*, \quad \eta^* = \eta + gv^*, \quad \zeta^* = \zeta + hv^* \text{ etc.}$$

und deshalb

$$\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K} = v^*(1 + \mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.})$$

oder

$$v^* = \frac{\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}}{1 + \omega}.$$

Ebenso wird

$$\begin{aligned} x &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - v^*(f[\alpha\alpha] + g[\alpha\beta] + h[\alpha\gamma] + \text{etc.}) \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} - \mathrm{F}v^* \\ &= \mathrm{A} + [\alpha\alpha]\,\xi^* + [\alpha\beta]\,\eta^* + [\alpha\gamma]\,\zeta^* + \text{etc.} \\ &\qquad - \frac{\mathrm{F}}{1+\omega}(\mathrm{F}\xi^* + \mathrm{G}\eta^* + \mathrm{H}\zeta^* + \text{etc.} + \mathrm{K}). \end{aligned}$$

Hieraus schliessen wir demnach, dass

$$A^* = A - \frac{FK}{1+\omega}$$

der plausibelste Werth des x aus *allen* Beobachtungen sein wird; und da ferner

$$[\alpha\alpha^*] = [\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega},$$

so ist das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\alpha\alpha] - \frac{F^2}{1+\omega}}.$$

Auf dieselbe Weise wird ferner der auf *allen* Beobachtungen beruhende plausibelste Werth des y gefunden

$$B^* = B - \frac{GK}{1+\omega},$$

und das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1}{[\beta\beta] - \frac{G^2}{1+\omega}}$$

und so weiter. W. z. f. w.

Dieser Lösung mögen einige Bemerkungen beigefügt werden.

I. Durch Einsetzung dieser neuen Werthe A^*, B^*, C^* etc. erhält die Funktion v^* den plausibelsten Werth

$$K - \frac{K}{1+\omega}(Ff + Gg + Hh + \text{etc.}) = \frac{K}{1+\omega}.$$

Und da allgemein

$$v^* = \frac{F}{1+\omega}\xi^* + \frac{G}{1+\omega}\eta^* + \frac{H}{1+\omega}\zeta^* + \text{etc.} + \frac{K}{1+\omega}$$

ist, so ergiebt sich nach den Principien des Art. 29. das Gewicht dieser Bestimmung

$$= \frac{1+\omega}{Ff + Gg + Hh + \text{etc.}} = \frac{1}{\omega} + 1.$$

Dasselbe folgt unmittelbar aus der Anwendung der am Ende des Art. 22. gegebenen Regel; die Gruppe der ursprünglichen

Gleichungen würde nämlich die Bestimmung $v^* = \mathrm{K}$ mit dem Gewicht $\frac{1}{\omega}$ geliefert haben, sodann hätte die neue Beobachtung eine andere, von jener unabhängige Bestimmung $v^* = 0$ mit dem Gewichte $= 1$ gegeben, und durch Combinirung beider würde die Bestimmung $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ mit dem Gewichte $= \frac{1}{\omega} + 1$ folgen.

II. Hieraus folgt weiter, da für $x = \mathrm{A}^*$, $y = \mathrm{B}^*$, $z = \mathrm{C}^*$ etc. auch $\xi^* = 0$, $\eta^* = 0$, $\zeta^* = 0$ etc. sein muss, dass für dieselben Werthe

$$\xi = -\frac{f\mathrm{K}}{1+\omega},\ \eta = -\frac{g\mathrm{K}}{1+\omega},\ \zeta = -\frac{h\mathrm{K}}{1+\omega}\ \text{etc.}$$

wird, und ferner, da allgemein

$$\Omega = \xi(x-\mathrm{A}) + \eta(y-\mathrm{B}) + \zeta(z-\mathrm{C}) + \text{etc.} + \mathrm{M}$$

ist,

$$\Omega = \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2}(\mathrm{F}f + \mathrm{G}g + \mathrm{H}h + \text{etc.}) + \mathrm{M} = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2},$$

und endlich, weil ja allgemein $\Omega^* = \Omega + v^{*2}$ ist,

$$\Omega^* = \mathrm{M} + \frac{\omega\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} + \frac{\mathrm{K}^2}{(1+\omega)^2} = \mathrm{M} + \frac{\mathrm{K}^2}{1+\omega}.$$

III. Vergleichen wir diese Ergebnisse mit den im Art. 30. vorgetragenen, so bemerken wir, dass hier der kleinste Werth der Funktion Ω derjenige ist, welchen sie für den bestimmten Werth der Funktion $v^* = \frac{\mathrm{K}}{1+\omega}$ annehmen kann.

36.

Für das folgende, dem vorhergehenden ähnliche Problem:

Die Aenderungen in den plausibelsten Werthen der Unbekannten, welche durch die Aenderung des Gewichts irgend einer der ursprünglichen Beobachtungen bewirkt werden, und ebenso die Gewichte der neuen Bestimmungen aufzusuchen.

soll hier nur die Lösung Platz finden, während wir den Beweis, welcher nach Analogie des vorigen Art. leicht geführt wird, der Kürze halber unterdrücken.

Nehmen wir an, es werde erst nach Vollendung der Rechnung bemerkt, dass man einer gewissen Beobachtung ein zu kleines oder zu grosses Gewicht beigelegt habe; z. B. habe man etwa der ersten, welche V = L gegeben hat, an Stelle des in der Rechnung angewandten Gewichtes p richtiger das Gewicht p^* beizulegen. Alsdann wird es nicht nöthig sein, die ganze Rechnung zu wiederholen, sondern es lassen sich bequemer aus nachfolgenden Formeln Correctionen berechnen.

Die verbesserten plausibelsten Werthe der Unbekannten werden folgende sein

$$x = A - \frac{(p^* - p)\,\alpha\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$y = B - \frac{(p^* - p)\,\beta\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$z = C - \frac{(p^* - p)\,\gamma\lambda}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

etc., und die Gewichte dieser Bestimmungen werden gefunden, wenn man die Einheit bezw. durch

$$[\alpha\alpha] - \frac{(p^* - p)\,\alpha^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\beta\beta] - \frac{(p^* - p)\,\beta^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})}$$

$$[\gamma\gamma] - \frac{(p^* - p)\,\gamma^2}{p + (p^* - p)(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})} \quad \text{etc.}$$

dividirt. Diese Lösung begreift auch den Fall in sich, wo man nach vollendeter Rechnung bemerkt, dass eine der Beobachtungen gänzlich zu verwerfen sei, da dies dasselbe ist, als wenn man $p^* = 0$ setzt; und ebenso entspricht der Werth $p^* = \infty$ dem Fall, wo die Gleichung V = L, welche in der Rechnung als angenähert behandelt worden war, in der That absolut genau ist.

Wenn übrigens zu den Gleichungen, welche der Rechnung zu Grunde gelegt sind, *mehrere* neue hinzukommen, oder wenn man bemerkt, dass *mehreren* von ihnen irrige Gewichte beigelegt sind, so würde die Berechnung der Correctionen zu verwickelt werden; deshalb wird man in diesem Fall es vorziehen, die Rechnung von neuem zu beginnen.

37.

In den Art. 15., 16. haben wir eine Methode zu einer möglichst angenäherten Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen gegeben*). Diese Methode setzt aber voraus, es seien die wirklich

*) Eine Untersuchung über denselben Gegenstand, welchen wir in einer

begangenen Fehler hinlänglich zahlreich und genau bekannt, eine Voraussetzung, welche streng genommen sehr selten, oder sagen wir lieber nie, zutreffen wird. Wenn aber wenigstens die Grössen, deren angenäherte Werthe durch Beobachtungen ermittelt wurden, nach einem bekannten Gesetz von einer oder mehreren unbekannten Grössen abhängen, so lassen sich die plausibelsten Werthe der letzteren durch die Methode der kleinsten Quadrate bestimmen; und von den hieraus berechneten Werthen der Grössen, welche den Beobachtungen unterworfen waren, wird vorausgesetzt, da sie nunmehr sehr wenig von den wahren Werthen abweichen, so dass ihre Unterschiede gegen die beobachteten Werthe mit um so grösserem Rechte als wahre Beobachtungsfehler behandelt werden dürften, je grösser ihre Anzahl gewesen ist. Dieses Verfahren haben alle Rechner befolgt, welche a posteriori die Genauigkeit von Beobachtungen in bestimmt vorliegenden Fällen zu schätzen unternahmen: offenbar ist dasselbe aber theoretisch fehlerhaft, und obwohl es in vielen Fällen für den praktischen Gebrauch genügen mag, kann es gleichwohl in anderen stark irre führen. Deshalb ist dieser Gegenstand im höchsten Grade einer schärferen Analyse werth.

Wir werden bei dieser Untersuchung die vom Art. 19. ab angewandten Bezeichnungen beibehalten. Das eben erwähnte Verfahren behandelt die Grössen A, B, C etc. als wahre Werthe der x, y, z etc., und demnach die λ, λ', λ'' etc. als wahre Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. Wenn alle Beobachtungen gleiche Genauigkeit besitzen, und ihr Gewicht $p = p' = p''$ etc. als Einheit angenommen wird, so bedeuten die Grössen λ, λ', λ'' etc. mit entgegengesetzten Vorzeichen bei jener Voraussetzung die Beobachtungsfehler selbst, welche nach den Vorschriften des Art. 15. den mittleren Fehler m der Beobachtungen

$$= \sqrt{\frac{\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.}}{\pi}} = \sqrt{\frac{M}{\pi}}$$

ergeben. Ist die Genauigkeit der Beobachtungen verschieden, so würden die Grössen $-\lambda$, $-\lambda'$, $-\lambda''$ etc. die Beobachtungsfehler multiplicirt mit den Quadratwurzeln aus den Gewichten darstellen,

---

früheren Abhandlung (*Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften.* Bd. I, S. 185) veröffentlicht haben, war auf dieselbe Hypothese in Betreff des Charakters der Funktion, welche die Fehlerwahrscheinlichkeit ausdrückt, begründet, auf welcher wir auch in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper" die Methode der kleinsten Quadrate aufgebaut hatten (s. Art. 9., III).

und die Vorschriften des Art. 16. würden zu der nämlichen Formel $\sqrt{\frac{M}{\pi}}$ führen, welche schon den mittleren Fehler solcher Beobachtungen ausdrückt, denen das Gewicht $= 1$ beigelegt wird. Offenbar würde aber eine strenge Rechnung erfordern, dass an Stelle der Grössen λ, λ', λ'' etc. die aus den wahren Werthen von x, y, z etc. sich ergebenden Werthe der Funktionen v, v', v'' etc. gebraucht werden, d. h. an Stelle von M der den wahren Werthen von x, y, z etc. entsprechende Werth der Funktion Ω. Obgleich dieser nun nicht angegeben werden kann, sind wir dennoch sicher, dass er grösser als M sei (da M der kleinste mögliche Werth ist), den höchst unwahrscheinlichen Fall ausgenommen, dass die plausibelsten Werthe der Unbekannten mit den wahren genau übereinstimmen. Im allgemeinen können wir also versichern, dass das gewöhnliche Verfahren einen gewiss zu kleinen mittleren Fehler ergiebt, oder dass den Beobachtungen eine allzugrosse Genauigkeit beigelegt wird. Wir wollen jetzt zusehen, was die strenge Theorie lehrt.

38.

Vor allem muss man untersuchen, wie M von den wahren Beobachtungsfehlern abhängt. Diese bezeichnen wir, wie im Art. 28., mit e, e', e'' etc., und setzen der grösseren Einfachheit wegen

$$e\sqrt{p} = \varepsilon, \quad e'\sqrt{p'} = \varepsilon', \quad e''\sqrt{p''} = \varepsilon'' \text{ etc.}$$

und ebenso

$$m\sqrt{p} = m'\sqrt{p'} = m''\sqrt{p''} = \text{etc.} = \mu.$$

Es seien ferner die wahren Werthe der x, y, z etc. bezw. $A - x^0$, $B - y^0$, $C - z^0$ etc., und diesen mögen als Werthe der ξ, η, ζ etc. bezw. entsprechen $-\xi^0$, $-\eta^0$, $-\zeta^0$ etc. Offenbar entsprechen denselben als Werthe der v, v', v'' etc. bezw. $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc., so dass man hat

$$\begin{aligned}
\xi^0 &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.} \\
\eta^0 &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.} \\
\zeta^0 &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc., sowie

$$\begin{aligned}
x^0 &= \alpha\varepsilon + \alpha'\varepsilon' + \alpha''\varepsilon'' + \text{etc.} \\
y^0 &= \beta\varepsilon + \beta'\varepsilon' + \beta''\varepsilon'' + \text{etc.} \\
z^0 &= \gamma\varepsilon + \gamma'\varepsilon' + \gamma''\varepsilon'' + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc.

Endlich setzen wir

$$\Omega^0 = \varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.},$$

so dass Ω^0 der Werth der Funktion Ω ist, welcher den wahren Werthen der x, y, z etc. entspricht. Da man allgemein hat

$$\Omega = \mathrm{M} + (x - \mathrm{A})\,\xi + (y - \mathrm{B})\,\eta + (z - \mathrm{C})\,\zeta + \text{etc.},$$

so wird hiernach

$$\mathrm{M} = \Omega^0 - x^0\xi^0 - y^0\eta^0 - z^0\zeta^0 - \text{etc.}$$

sein. Hieraus folgt offenbar, dass M sich als homogene Funktion zweiten Grades der Fehler e, e', e'' etc. entwickeln lässt, welche für verschiedene Werthe der Fehler grösser oder kleiner werden kann. So lange uns aber die Grösse der Fehler unbekannt bleibt, wird man diese Funktion bei der Untersuchung unbestimmt lassen, und vor allem ihren mittleren Werth nach den Principien der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu bestimmen suchen. Diesen werden wir finden, wenn wir an Stelle der Quadrate e^2, e'^2, e''^2 etc. bezw. m^2, m'^2, m''^2 etc. setzen, die Produkte ee', ee'', $e'e''$ etc. aber überhaupt weglassen, oder, was dasselbe ist, wenn wir an Stelle eines jeden Quadrates ε^2, ε'^2, ε''^2 etc. μ^2 schreiben und die Produkte $\varepsilon\varepsilon'$, $\varepsilon\varepsilon''$, $\varepsilon'\varepsilon''$ etc. vernachlässigen. Auf diese Weise entsteht aus dem Gliede Ω^0 offenbar $\pi\mu^2$; das Glied $-x^0\xi^0$ geht in

$$-(a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^2 = -\mu^2$$

über, und analog geben die übrigen einzelnen Theile $-\mu^2$, so dass der mittlere totale Werth $= (\pi - \varrho)\,\mu^2$ wird, wenn π die Anzahl der Beobachtungen und ϱ die Anzahl der Unbekannten bezeichnet. Der wahre Werth des M kann zwar, je nach den zufälligen Fehlern, grösser oder kleiner als der mittlere werden, der Unterschied aber wird von um so geringerer Bedeutung sein, je grösser die Anzahl der Beobachtungen gewesen ist, so dass man als angenäherten Werth des μ

$$\sqrt{\frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}}$$

nehmen darf. Der Werth für μ, welcher sich aus der im vorigen Art. besprochenen irrthümlichen Praxis ergiebt, muss deshalb im Verhältniss der Grösse $\sqrt{\pi - \varrho}$ zu $\sqrt{\pi}$ vergrössert werden.

39.

Um noch deutlicher zu zeigen, mit wie grossem Rechte man einen zufälligen Werth des M dem mittleren gleich setzen darf, muss man den mittleren zu befürchtenden Fehler suchen, wenn $\frac{M}{\pi - \varrho} = \mu^2$ gesetzt wird. Jener mittlere Fehler ist gleich der Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe der Grösse

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2}{\pi - \varrho}\right)^2,$$

der wir die Gestalt geben wollen

$$\left(\frac{\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.}}{\pi - \varrho}\right)^2$$

$$-\frac{2\,\mu^2}{\pi - \varrho}\,[\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.} - (\pi - \varrho)\,\mu^2] - \mu^4;$$

da offenbar der mittlere Werth des zweiten Gliedes $= 0$ wird, so verwandelt sich unsere Frage in die nach dem mittleren Werthe der Funktion

$$\Psi = (\Omega^0 - x^0\,\xi^0 - y^0\,\eta^0 - z^0\,\zeta^0 - \text{etc.})^2.$$

Ist dieser gefunden, und bezeichnet man ihn mit N, so wird der gesuchte mittlere Fehler

$$= \sqrt{\frac{N}{(\pi - \varrho)^2} - \mu^4}.$$

Der Ausdruck Ψ lässt sich offenbar als homogene Funktion entweder der Fehler e, e', e'' etc. oder auch der Grössen ε, ε', ε'' etc. entwickeln, und sein mittlerer Werth wird gefunden, wenn

1. für die Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. ihre mittleren Werthe gesetzt werden,

2. für die einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten, wie $e^2e'^2$, $e^2e''^2$, $e'^2e''^2$ etc. die Produkte aus ihren mittleren Werthen, nämlich $m^2m'^2$, $m^2m''^2$, $m'^2m''^2$ etc. gesetzt werden,

3. die übrigen Glieder aber, welche entweder einen Faktor von der Form e^3e', oder von der Form $e^2e'e''$ enthalten, ganz fortgelassen werden. Die mittleren Werthe der Biquadrate e^4, e'^4, e''^4 etc. nehmen wir proportional den Biquadraten m^4, m'^4, m''^4 etc. an (siehe Art. 16.), so dass sich jene zu diesen wie ν^4 zu μ^4 verhalten, wo ν^4 also den mittleren Werth der Biquadrate solcher Beobachtungen bezeichnet, deren Gewicht $= 1$ ist. Demnach können die obigen Vorschriften auch so ausgedrückt werden: An Stelle der

einzelnen Biquadrate ε^4, ε'^4, ε''^4 etc. ist ν^4 zu schreiben, an Stelle der einzelnen Produkte aus je zwei Quadraten wie $\varepsilon^2\varepsilon'^2$, $\varepsilon^2\varepsilon''^2$, $\varepsilon'^2\varepsilon''^2$ etc. ist μ^4 zu schreiben, alle übrigen Glieder aber, die Faktoren wie $\varepsilon^3\varepsilon'$ oder $\varepsilon^2\varepsilon'\varepsilon''$ oder $\varepsilon\varepsilon'\varepsilon''\varepsilon'''$ enthalten, sind wegzulassen.

Hat man dieses genau begriffen, so findet man leicht:

I. Der mittlere Werth des Quadrates $\Omega^{0\,2}$ ist $\pi\nu^4 + (\pi^2 - \pi)\,\mu^4$.

II. Der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon^2 x^0 \xi^0$ wird

$$= a\alpha\nu^4 + (a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.})\,\mu^4$$

oder, da $a\alpha + a'\alpha' + a''\alpha'' + \text{etc.} = 1$ ist,

$$= a\alpha\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4.$$

Und da der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon'^2 x^0 \xi^0$ ebenso

$$= a'\alpha'\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

wird, der mittlere Werth des Produktes $\varepsilon''^2 x^0 \xi^0$ aber

$$= a''\alpha''\,(\nu^4 - \mu^4) + \mu^4$$

ist u. s. w., so wird offenbar der mittlere Werth des Produktes $(\varepsilon^2 + \varepsilon'^2 + \varepsilon''^2 + \text{etc.})\, x^0\xi^0$ oder von $\Omega^0 x^0 \xi^0$

$$= \nu^4 - \mu^4 + \pi\mu^4$$

sein. Denselben mittleren Werth haben die Produkte $\Omega^0 y^0 \eta^0$, $\Omega^0 z^0 \zeta^0$ etc. Folglich wird der mittlere Werth des Produktes $\Omega^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= \varrho\nu^4 + \varrho\,(\pi - 1)\,\mu^4.$$

III. Damit die noch übrigen Entwickelungen nicht zu verwickelt werden, soll eine zweckmässige Bezeichnung eingeführt werden. Wir gebrauchen zu dem Zweck das Zeichen Σ in einem etwas weiteren Sinne, als dies oben vorübergehend geschehen ist, so dass es eine Summe bezeichnet, bestehend aus dem Gliede, dem es vorgesetzt, und allen ähnlichen aber nicht identischen Gliedern, welche aus ihm durch alle Permutationen der Beobachtungen entspringen. Hiernach ist z. B. $x^0 = \Sigma\alpha\varepsilon$, $x^{0\,2} = \Sigma\alpha^2\varepsilon^2 + 2\,\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$. Setzt man dann den mittleren Werth des Produktes $x^{0\,2}\xi^{0\,2}$ gliedweise zusammen, so erhält man erstens den mittleren Werth des Produktes $\alpha^2\varepsilon^2\xi^{0\,2}$

$$\begin{aligned} &= a^2\alpha^2\nu^4 + \alpha^2\,(a'^2 + a''^2 + \text{etc.})\,\mu^4 \\ &= a^2\alpha^2\,(\nu^4 - \mu^4) + \alpha^2\mu^4\Sigma a^2. \end{aligned}$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha'^2\varepsilon'^2\xi^{0\,2}$ wird ebenso

$= a'^2\alpha'^2(\nu^4 - \mu^4) + \alpha'^2\mu^4\Sigma a^2$ u. s. w., und deshalb der mittlere Werth des Produktes $\xi^{0\,2}\,\Sigma\alpha^2\varepsilon^2$

$$= (\nu^4 - \mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + \mu^4\Sigma a^2\Sigma\alpha^2.$$

Der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'\xi^{02}$ wird weiter

$$= 2\,\alpha\alpha' a a'\mu^4,$$

und der mittlere Werth des Produktes $\alpha\alpha''\varepsilon\varepsilon''\xi^{02}$ ebenso

$$= 2\,\alpha\alpha'' a a''\mu^4 \text{ etc.},$$

woraus leicht zu schliessen ist, dass der mittlere Werth des Produktes $\xi^{02}\Sigma\alpha\alpha'\varepsilon\varepsilon'$ sich

$$= 2\,\mu^4\,\Sigma a\alpha\alpha' a' = \mu^4\left[(\Sigma a\alpha)^2 - \Sigma a^2\alpha^2\right] = \mu^4\,(1 - \Sigma a^2\alpha^2)$$

ergiebt. Wenn wir dies zusammenfassen, so erhalten wir den mittleren Werth des Produktes $x^{02}\,\xi^{02}$

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma a^2\alpha^2 + 2\,\mu^4 + \mu^4\,\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2.$$

IV. Ganz ähnlich findet man den mittleren Werth des Produktes $x^0 y^0 \xi^0 \eta^0$

$$= \nu^4\,\Sigma ab\,\alpha\beta + \mu^4\,\Sigma a\,\alpha\,b'\beta' + \mu^4\,\Sigma ab\,\alpha'\beta' + \mu^4\,\Sigma a\beta\,b'\alpha'.$$

Es ist aber

$$\begin{aligned}
\Sigma a\alpha b'\beta' &= \Sigma a\alpha\,\Sigma b\beta - \Sigma a\alpha b\beta \\
\Sigma ab\alpha'\beta' &= \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta - \Sigma ab\alpha\beta \\
\Sigma a\beta b'\alpha' &= \Sigma a\beta\,\Sigma b\alpha - \Sigma a\beta b\alpha,
\end{aligned}$$

woraus sich jener mittlere Werth, weil $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma a\beta = 0$, $\Sigma b\alpha = 0$ ist,

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ab\alpha\beta + \mu^4\,(1 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta)$$

ergiebt.

V. Da ferner der mittlere Werth des Produktes $x^0\,z^0\,\xi^0\,\zeta^0$ auf dieselbe Weise

$$= (\nu^4 - 3\,\mu^4)\,\Sigma ac\alpha\gamma + \mu^4\,(1 + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma)$$

wird, u. s. w., so ergiebt sich durch Summirung der mittlere Werth des Produktes $x^0\xi^0\,(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$\begin{aligned}
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma\left[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\right] + (\varrho + 1)\,\mu^4 \\
&\quad + \mu^4\,(\Sigma a^2\,\Sigma\alpha^2 + \Sigma ab\,\Sigma\alpha\beta + \Sigma ac\,\Sigma\alpha\gamma + \text{etc.}) \\
&= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma\left[a\alpha\,(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\right] + (\varrho + 2)\,\mu^4.
\end{aligned}$$

VI. Ferner wird auf dieselbe Weise der mittlere Werth des Produktes $y^0\eta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$ gefunden

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[b\beta(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4,$$

sodann der mittlere Werth des Produktes $z^0\zeta^0(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[c\gamma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})] + (\varrho + 2)\,\mu^4$$

u. s. w. Hieraus folgt durch Addition der mittlere Werth des Quadrates $(x^0\xi^0 + y^0\eta^0 + z^0\zeta^0 + \text{etc.})^2$

$$= (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] + (\varrho^2 + 2\varrho)\,\mu^4.$$

VII. Durch sorgfältige Addition aller Glieder ergiebt sich endlich

$$\begin{aligned} \mathrm{N} &= (\pi - 2\varrho)\,\nu^4 + (\pi^2 - \pi - 2\pi\varrho + 4\varrho + \varrho^2)\,\mu^4 \\ &\quad + (\nu^4 - 3\mu^4)\,\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2] \\ &= (\pi - \varrho)(\nu^4 - \mu^4) + (\pi - \varrho)^2\,\mu^4 \\ &\quad - (\nu^4 - 3\mu^4)\,\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\}. \end{aligned}$$

Daher wird der mittlere zu befürchtende Fehler von μ^2, wenn die Formel

$$\mu^2 = \frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}$$

angewendet wird,

$$= \sqrt{\frac{\nu^4 - \mu^4}{\pi - \varrho} - \frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\Big\{\varrho - \Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]\Big\}}.$$

40.

Die Grösse $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$, welche in den soeben gefundenen Ausdruck eingeht, kann zwar im allgemeinen nicht auf eine einfachere Form gebracht werden; nichtsdestoweniger lassen sich zwei Grenzen angeben, zwischen denen ihr Werth nothwendig liegen muss. *Erstens* nämlich lässt sich aus den oben entwickelten Relationen leicht zeigen, dass

$$\begin{aligned} &(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a\alpha' + b\beta' + c\gamma' + \text{etc.})^2 \\ &+ (a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.} = a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}, \end{aligned}$$

woraus wir schliessen, dass $a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}$ eine positive Grösse und kleiner (wenigstens nicht grösser) als die Einheit ist. Dasselbe gilt von der Grösse $a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.}$, welche ja der Summe $(a'\alpha + b'\beta + c'\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$ gleich gefunden wird; ebenso wird $a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.}$ kleiner als Eins sein, u. s. w. Hiernach ist $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ nothwendig kleiner als π. *Zweitens* hat man $\Sigma(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.}) = \varrho$, da ja $\Sigma a\alpha = 1$, $\Sigma b\beta = 1$, $\Sigma c\gamma = 1$ etc., woraus leicht geschlossen wird, dass die Summe der Quadrate $\Sigma[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2]$ grösser als $\frac{\varrho^2}{\pi}$, oder wenigstens nicht kleiner sei. Daher liegt das Glied

$$\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{(\pi - \varrho)^2}\left\{\varrho - \Sigma\left[(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2\right]\right\}$$

nothwendig zwischen den Grenzen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}\frac{\varrho}{\pi}$, oder, wenn wir weitere Grenzen vorziehen, zwischen $-\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $+\frac{\nu^4 - 3\mu^4}{\pi - \varrho}$, und hiernach das Quadrat des mittleren zu befürchtenden Fehlers für den Werth von $\mu^2 = \frac{\mathrm{M}}{\pi - \varrho}$ in den Grenzen $\frac{2\nu^4 - 4\mu^4}{\pi - \varrho}$ und $\frac{2\mu^4}{\pi - \varrho}$, so dass man jedwede Genauigkeit erreichen kann, wenn nur die Anzahl der Beobachtungen hinreichend gross gewesen ist.

Es ist sehr bemerkenswerth, dass bei derjenigen Hypothese (Art. 9., III), auf welche die Theorie der kleinsten Quadrate früher begründet worden war, jenes Glied ganz wegfällt, und dass, ebenso wie man zur Ermittelung eines angenäherten Werthes μ des mittleren Fehlers der Beobachtungen in allen Fällen die Summe

$$\lambda^2 + \lambda'^2 + \lambda''^2 + \text{etc.} = \mathrm{M}$$

so behandeln muss, als wenn sie die Summe von $\pi - \varrho$ zufälligen Fehlern wäre, gerade so bei jener Hypothese auch die Genauigkeit selbst dieser Bestimmung derjenigen gleich wird, welche nach den Ergebnissen des Art. 15. der Bestimmung aus $\pi - \varrho$ wahren Fehlern zukommt.

12. Ergänzung zur Theorie der den kleinsten Fehlern unterworfenen Combination der Beobachtungen

In: Abhandlungen zur Methode der kleinsten Quadrate, hrsg. von Anton Börsch und Paul Simon, Berlin 1887 (Nachdruck 1964), S. 54–91.

Original:
Supplementum Theoriae combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6, (1823–1827) 1828, commentationes classis mathematicae, S. 57–98. In: Gauß Werke 4, S. 55–93.

Ergänzung zur Theorie
der den kleinsten Fehlern unterworfenen
Combination der Beobachtungen.

(Der Königlichen Societät der Wissenschaften überreicht 1826, Sept. 16.)

1.

In der Abhandlung über die Theorie der Combination der Beobachtungen, welche im 5. Bande der „Commentationes recentiores" abgedruckt ist, haben wir angenommen, die Grössen, deren Werthe durch nicht völlig genaue Beobachtungen gegeben sind, seien von gewissen unbekannten Elementen so abhängig, dass sie in Form von gegebenen Funktionen dieser Elemente dargestellt seien, und es komme hauptsächlich darauf an, diese Elemente so genau als möglich aus den Beobachtungen abzuleiten.

In den meisten Fällen ist jene Annahme freilich unmittelbar zutreffend. In anderen Fällen aber tritt uns die Aufgabe in ein wenig anderer Gestalt entgegen, so dass es auf den ersten Anblick zweifelhaft erscheint, wie man sie auf die verlangte Form zurückführen könne. Es kommt nämlich nicht selten vor, dass die Grössen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen, noch nicht in der Form von Funktionen bestimmter Elemente ausgedrückt sind und auch nicht auf eine solche Form zurückführbar erscheinen, wenigstens nicht bequem oder nicht ohne Umschweife; während andererseits die Natur des Gegenstandes gewisse Bedingungen liefert, denen die wahren Werthe der beobachteten Grössen in aller Strenge genügen müssen.

Wenn man aber genauer zusieht, so bemerkt man leicht, dass dieser Fall sich von dem früheren in der That nicht wesentlich unterscheidet, sondern auf ihn zurückgeführt werden kann. Bezeichnet man nämlich mit π die Anzahl der beobachteten Grössen, mit σ aber die Anzahl der Bedingungsgleichungen, und wählt man von den ersteren nach Belieben $\pi-\sigma$ aus, so steht nichts im Wege, gerade diese als Elemente anzunehmen und die übrigen, deren Anzahl σ sein wird, mit Hülfe der Bedingungsgleichungen als Funktionen von jenen zu betrachten, wodurch die Aufgabe auf unsere Voraussetzung zurückgeführt ist.

Wenn nun aber auch dieser Weg in sehr vielen Fällen thatsächlich bequem genug zum Ziele führt, so lässt sich doch nicht leugnen, dass er nicht ganz natürlich ist, und dass es demnach die Mühe lohnt, die Aufgabe in dieser anderen Form gesondert zu behandeln, und zwar um so mehr, als sie eine sehr elegante Lösung erlaubt. Ja man darf sogar sagen: Da diese neue Lösung zu kürzeren Rechnungen, als die Lösung der Aufgabe im früheren Zustande führt, wenn σ kleiner als $\frac{1}{2}\pi$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn die in der früheren Abhandlung mit ϱ bezeichnete Anzahl der Elemente grösser als $\frac{1}{2}\pi$ ist, so wird man die in der vorliegenden Abhandlung auseinandergesetzte neue Lösung in diesem Fall auch dann noch der früheren vorzuziehen haben, wenn man die Bedingungsgleichungen aus der Natur des Problems ohne Umschweife wegschaffen kann.

2.

Wir bezeichnen mit v, v', v'' etc. die Grössen, in der Anzahl π, deren Werthe durch Beobachtung zu unserer Kenntniss kommen; es hänge nun eine unbekannte Grösse von jenen so ab, dass sie durch eine gegebene Funktion u derselben ausgedrückt sei; es seien ferner l, l', l'' etc. die Werthe der Differentialquotienten

$$\frac{du}{dv}, \quad \frac{du}{dv'}, \quad \frac{du}{dv''} \text{ etc.},$$

welche den wahren Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen. Ebenso wie nun durch Einsetzen dieser wahren Werthe in die Funktion u ihr wahrer Werth hervorgeht, so erhält man, wenn man für v, v', v'' etc. Werthe einsetzt, welche von den wahren bezw. um die Fehler e, e', e'' etc., unterschieden sind, einen fehlerhaften Werth der Unbekannten, dessen Fehler

$$= le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$

gesetzt werden kann, wenn nur, was wir stets annehmen, die Fehler e, e', e'' etc. so klein sind, dass (für eine nicht lineare Funktion u) ihre Quadrate und Produkte vernachlässigt werden dürfen. Obwohl nun die Grösse der Fehler e, e', e'' etc. unbestimmt bleibt, kann man doch die einer solchen Bestimmung der

Unbekannten anhaftende Unsicherheit allgemein schätzen, und zwar durch den mittleren bei einer solchen Bestimmung zu befürchtenden Fehler, der nach den Principien der früheren Abhandlung

$$= \sqrt{l^2m^2 + l'^2m'^2 + l''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

wird, wenn m, m', m'' etc. die mittleren Fehler der Beobachtungen bezeichnen, oder wenn die einzelnen Beobachtungen mit derselben Unsicherheit behaftet sind,

$$= m\sqrt{l^2 + l'^2 + l''^2 + \text{etc.}}\ .$$

Offenbar darf man bei dieser Rechnung für l, l', l'' etc. mit gleichem Recht auch die Werthe der Differentialquotienten nehmen, welche den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen.

3.

Sind die Grössen v, v', v'' etc. vollständig unabhängig von einander, so kann die Unbekannte nur auf eine einzige Weise durch sie bestimmt werden; es kann deshalb jene Unsicherheit alsdann auf keine Weise weder vermieden noch verringert werden, und bei der Ableitung des Werthes der Unbekannten aus den Beobachtungen ist jede Willkür ausgeschlossen.

Ganz anders verhält es sich aber, wenn zwischen den Grössen v, v', v'' etc. eine gegenseitige Abhängigkeit besteht, welche wir durch σ Bedingungsgleichungen

$$X = 0,\ \ Y = 0,\ \ Z = 0 \text{ etc.}$$

ausgedrückt annehmen wollen, wo X, Y, Z etc. gegebene Funktionen der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnen. In diesem Falle kann man unsere Unbekannte auf unendlich viele verschiedene Weisen durch Combinationen der Grössen v, v', v'' etc. bestimmen, da man an Stelle der Funktion u offenbar irgend eine andere U annehmen kann, welche so beschaffen ist, dass $U - u$ identisch verschwindet, wenn man $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. setzt.

Bei der Anwendung auf einen bestimmten Fall würde sich so zwar kein Unterschied in Bezug auf den Werth der Unbekannten ergeben, wenn die Beobachtungen völlig genau wären; insofern diese aber Fehlern unterworfen sind, würde offenbar im allgemeinen jede einzelne Combination einen anderen Werth der Unbekannten hervorbringen. So erhalten wir an Stelle des Fehlers

$$le + l'e' + l''e'' + \text{etc.},$$

welcher der Funktion u zugehört hatte, für die Funktion U den Fehler

$$Le + L'e' + L''e'' + \text{etc.},$$

wo die Werthe der Differentialquotienten $\frac{dU}{dv}$, $\frac{dU}{dv'}$, $\frac{dU}{dv''}$ etc. bezw. mit L, L′, L″ etc. bezeichnet sind. Obwohl wir nun die Fehler selbst nicht angeben können, so werden sich doch die mittleren bei den verschiedenen Combinationen der Beobachtungen zu befürchtenden Fehler mit einander vergleichen lassen; und die beste Combination wird die sein, bei der dieser mittlere Fehler so klein als möglich wird. Da dieser

$$= \sqrt{L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}}$$

ist, so wird man darauf hinwirken müssen, dass die Summe $L^2m^2 + L'^2m'^2 + L''^2m''^2 + \text{etc.}$ den kleinsten Werth erhält.

4.

Da die unendliche Mannigfaltigkeit von Funktionen U, welche unter der im vorigen Art. angegebenen Bedingung an die Stelle von u treten können, hier nur insofern zu betrachten ist, als sich hieraus verschiedene Werthsysteme der Coefficienten L, L′, L″ etc. ergeben, so muss man vor allem den Zusammenhang aufsuchen, welcher zwischen sämmtlichen zulässigen Systemen statthaben muss. Bezeichnen wir die bestimmten Werthe der partiellen Differentialquotienten

$$\frac{dX}{dv}, \frac{dX}{dv'}, \frac{dX}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dY}{dv}, \frac{dY}{dv'}, \frac{dY}{dv''} \text{ etc.}$$
$$\frac{dZ}{dv}, \frac{dZ}{dv'}, \frac{dZ}{dv''} \text{ etc. etc.}$$

für den Fall, dass den v, v', v'' etc. ihre wahren Werthe beigelegt werden, bezw. mit

$$a, a', a'' \text{ etc.}$$
$$b, b', b'' \text{ etc.}$$
$$c, c', c'' \text{ etc. etc.},$$

so folgt, wenn man die v, v', v'' etc. solche Zuwachse dv, dv', dv'' etc. annehmen lässt, durch welche X, Y, Z etc. nicht geändert werden und deshalb einzeln $= 0$ bleiben, d. h. welche den Gleichungen

$$0 = adv + a'dv' + a''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = bdv + b'dv' + b''dv'' + \text{etc.}$$
$$0 = cdv + c'dv' + c''dv'' + \text{etc. etc.}$$

genügen, dass sich auch $u - \mathrm{U}$ nicht ändern darf, und daher auch

$$0 = (l - \mathrm{L})\,dv + (l' - \mathrm{L}')\,dv' + (l'' - \mathrm{L}'')\,dv'' + \text{etc.}$$

werden wird. Hieraus schliesst man leicht, dass die Coefficienten L, L′, L″ etc. in folgenden Formeln

$$\mathrm{L} = l + ax + by + cz + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}' = l' + a'x + b'y + c'z + \text{etc.}$$
$$\mathrm{L}'' = l'' + a''x + b''y + c''z + \text{etc. etc.}$$

enthalten sein müssen, wo x, y, z etc. bestimmte Multiplicatoren bezeichnen. Umgekehrt leuchtet ein, wenn ein System von bestimmten Multiplicatoren x, y, z etc. beliebig angenommen wird, dass man stets eine solche Funktion U angeben kann, welcher den obigen Gleichungen genügende Werthe von L, L′, L″ etc. entsprechen, und welche der Bedingung des vorigen Art. gemäss die Funktion u ersetzen kann; ja dass man dies auf unendlich verschiedene Weisen erreichen kann. Der einfachste Fall wird der sein, dass man $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} +$ etc. setzt; allgemeiner darf man setzen $\mathrm{U} = u + x\mathrm{X} + y\mathrm{Y} + z\mathrm{Z} + \text{etc.} + u'$, wo u' eine solche Funktion der Variabeln v, v', v'' etc. bezeichnet, welche für $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. immer verschwindet, und deren Werth in dem betreffenden bestimmten Fall ein Maximum oder Minimum wird. Aber für unseren Zweck erwächst daraus kein Unterschied.

5.

Es wird nunmehr leicht sein, den Multiplicatoren x, y, z etc. solche Werthe zu geben, dass die Summe

$$\mathrm{L}^2 m^2 + \mathrm{L}'^2 m'^2 + \mathrm{L}''^2 m''^2 + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält. Offenbar ist hierzu eine vollkommene Kenntniss der mittleren Fehler m, m', m'' etc. nicht nothwendig, sondern es genügt ihr gegenseitiges Verhältniss. Wir führen deshalb an Stelle derselben die Gewichte der Beobachtungen p, p', p'' etc. ein, d. h. Zahlen, welche den Quadraten m^2, m'^2, m''^2 etc. umgekehrt proportional sind, wobei das Gewicht irgend einer Beobachtung willkürlich gleich der Einheit angenommen wird. Die Grössen

x, y, z etc. müssen daher so bestimmt werden, dass das allgemeine Polynom

$$\frac{(ax + by + cz + \text{etc.} + l)^2}{p} + \frac{(a'x + b'y + c'z + \text{etc.} + l')^2}{p'}$$
$$+ \frac{(a''x + b''y + c''z + \text{etc.} + l'')^2}{p''} + \text{etc.}$$

den kleinsten Werth erhält, was für die *bestimmten* Werthe x^0, y^0, z^0 etc. der Fall sein möge.

Führen wir die Bezeichnungen ein:

$$\frac{a^2}{p} + \frac{a'^2}{p'} + \frac{a''^2}{p''} + \text{etc.} = [aa]$$
$$\frac{ab}{p} + \frac{a'b'}{p'} + \frac{a''b''}{p''} + \text{etc.} = [ab]$$
$$\frac{ac}{p} + \frac{a'c'}{p'} + \frac{a''c''}{p''} + \text{etc.} = [ac]$$
$$\frac{b^2}{p} + \frac{b'^2}{p'} + \frac{b''^2}{p''} + \text{etc.} = [bb]$$
$$\frac{bc}{p} + \frac{b'c'}{p'} + \frac{b''c''}{p''} + \text{etc.} = [bc]$$
$$\frac{c^2}{p} + \frac{c'^2}{p'} + \frac{c''^2}{p''} + \text{etc.} = [cc]$$

etc., und ferner

$$\frac{al}{p} + \frac{a'l'}{p'} + \frac{a''l''}{p''} + \text{etc.} = [al]$$
$$\frac{bl}{p} + \frac{b'l'}{p'} + \frac{b''l''}{p''} + \text{etc.} = [bl]$$
$$\frac{cl}{p} + \frac{c'l'}{p'} + \frac{c''l''}{p''} + \text{etc.} = [cl]$$

etc.,

so erfordert die Bedingung eines Minimum offenbar, dass wird

$$\left.\begin{array}{l} 0 = [aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] \\ 0 = [ab]\,x^0 + [bb]\,y^0 + [bc]\,z^0 + \text{etc.} + [bl] \\ 0 = [ac]\,x^0 + [bc]\,y^0 + [cc]\,z^0 + \text{etc.} + [cl] \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (1)$$

Sind die Grössen x^0, y^0, z^0 etc. durch Elimination hieraus abgeleitet, so setze man

$$\left.\begin{array}{l} a\,x^0 + b\,y^0 + c\,z^0 + \text{etc.} + l \;\,= \mathrm{L} \\ a'x^0 + b'y^0 + c'z^0 + \text{etc.} + l' \;= \mathrm{L}' \\ a''x^0 + b''y^0 + c''z^0 + \text{etc.} + l'' = \mathrm{L}'' \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad (2)$$

Alsdann wird die zur Bestimmung unserer Unbekannten zweckmässigste und der geringsten Unsicherheit unterworfene Funktion der Grössen v, v', v'' etc. die sein, deren partielle Differentialquotienten in dem betreffenden bestimmten Fall bezw. die Werthe L, L′, L″ etc. haben, und das Gewicht dieser Bestimmung, welches wir mit P bezeichnen wollen, wird

$$= \frac{1}{\frac{\mathrm{L}^2}{p} + \frac{\mathrm{L}'^2}{p'} + \frac{\mathrm{L}''^2}{p''} + \text{etc.}} \quad (3)$$

sein, oder $\frac{1}{\mathrm{P}}$ wird der Werth des oben angeführten Polynoms für dasjenige Werthsystem der Grössen x, y, z etc. sein, welches den Gleichungen (1) Genüge leistet.

6.

Im vorhergehenden Art. lehrten wir diejenige Funktion U kennen, welche zur zweckmässigsten Bestimmung unserer Unbekannten verhilft; nun wollen wir sehen, welchen *Werth* die Unbekannte auf diese Weise erlangt. Es werde dieser Werth mit K bezeichnet, welcher demnach entsteht, wenn man in U die beobachteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. einsetzt; für dieselbe Substitution erhalte die Funktion u den Werth k; endlich sei $\varkappa$ der wahre Werth der Unbekannten, wie er also durch die Substitution der wahren Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten werden würde, wenn man eine solche in U oder u ausführen könnte. Hiernach wird mithin

$$k = \varkappa + le + l'e' + l''e'' + \text{etc.}$$
$$\mathrm{K} = \varkappa + \mathrm{L}e + \mathrm{L}'e' + \mathrm{L}''e'' + \text{etc.}$$

und ferner

$$\mathrm{K} = k + (\mathrm{L} - l)\,e + (\mathrm{L}' - l')\,e' + (\mathrm{L}'' - l'')\,e'' + \text{etc.}$$

Setzt man in dieser Gleichung für $\mathrm{L} - l$, $\mathrm{L}' - l'$, $\mathrm{L}'' - l''$ etc. ihre Werthe aus (2), und bezeichnet

$$\left.\begin{array}{l} ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{A} \\ be + b'e' + b''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{B} \\ ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.} = \mathfrak{C} \end{array}\right\} \quad (4)$$

etc., so hat man

$$\mathrm{K} = k + \mathfrak{A}x^0 + \mathfrak{B}y^0 + \mathfrak{C}z^0 + \text{etc.} \tag{5}$$

Die Werthe der Grössen $\mathfrak{A}$, $\mathfrak{B}$, $\mathfrak{C}$ etc. kann man nun freilich nach den Formeln (4) nicht berechnen, da die Fehler e, e', e'' etc. unbekannt bleiben; aber es ist von selber klar, dass jene nichts anderes sind, als die Werthe der Funktionen X, Y, Z etc., welche sich ergeben, wenn man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt. Sonach bildet das System der Gleichungen (1), (3), (5) die vollständige Lösung unserer Aufgabe, da unsere am Ende des Art. 2. gegebenen Vorschriften über die Berechnung der Grössen l, l', l'' etc. aus den beobachteten Werthen der Grössen v, v', v'' etc. offenbar mit gleichem Rechte auf die Berechnung der Grössen a, a', a'' etc., b, b', b'' etc. ausgedehnt werden dürfen.

7.

An Stelle der Formel (3), welche das Gewicht der plausibelsten Bestimmung ausdrückt, lassen sich noch einige andere finden, welche zu entwickeln die Mühe lohnen wird.

Zunächst bemerken wir, dass durch Multiplication der Gleichungen (2) bezw. mit $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$ etc. und durch Addition erhalten wird

$$[aa]\,x^0 + [ab]\,y^0 + [ac]\,z^0 + \text{etc.} + [al] = \frac{a\mathrm{L}}{p} + \frac{a'\mathrm{L}'}{p'} + \frac{a''\mathrm{L}''}{p''} + \text{etc.}$$

Die linke Seite wird $= 0$, die rechte bezeichnen wir der Analogie gemäss mit $[a\mathrm{L}]$, und erhalten so

$$[a\mathrm{L}] = 0, \text{ und weiter ebenso } [b\mathrm{L}] = 0,\ [c\mathrm{L}] = 0 \text{ etc.}$$

Ferner finden wir, wenn wir die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{\mathrm{L}}{p}, \frac{\mathrm{L}'}{p'}, \frac{\mathrm{L}''}{p''}$ etc. multipliciren und addiren

$$\frac{l\mathrm{L}}{p} + \frac{l'\mathrm{L}'}{p'} + \frac{l''\mathrm{L}''}{p''} + \text{etc.} = \frac{\mathrm{L}^2}{p} + \frac{\mathrm{L}'^2}{p'} + \frac{\mathrm{L}''^2}{p''} + \text{etc.},$$

und erhalten so einen *zweiten* Ausdruck für das Gewicht

$$\mathrm{P} = \frac{1}{\frac{l\mathrm{L}}{p} + \frac{l'\mathrm{L}'}{p'} + \frac{l''\mathrm{L}''}{p''} + \text{etc.}}.$$

Multipliciren wir endlich die Gleichungen (2) der Reihe nach mit $\frac{l}{p}, \frac{l'}{p'}, \frac{l''}{p''}$ etc. und addiren, so gelangen wir zum *dritten* Ausdruck für das Gewicht

$$P = \frac{1}{[al]\,x^0 + [bl]\,y^0 + [cl]\,z^0 + \text{etc.} + [ll]},$$

wenn wir nach Analogie der übrigen Bezeichnungen

$$\frac{l^2}{p} + \frac{l'^2}{p'} + \frac{l''^2}{p''} + \text{etc.} = [ll]$$

setzen. Hiernach gehen wir mit Hülfe der Gleichungen (1) leicht zum *vierten* Ausdruck über, den wir folgendermaassen schreiben:

$$\begin{aligned}\frac{1}{P} = [ll] - [aa]\,x^{0\,2} - [bb]\,y^{0\,2} - [cc]\,z^{0\,2} - \text{etc.}\\ - 2[ab]\,x^0y^0 - 2[ac]\,x^0z^0 - 2[bc]\,y^0z^0 - \text{etc.}\end{aligned}$$

8.

Die allgemeine Lösung, die wir bis jetzt gaben, ist besonders auf den Fall eingerichtet, dass nur *eine* von den beobachteten Grössen abhängige Unbekannte zu bestimmen ist. Wenn aber die plausibelsten Werthe mehrerer von denselben Beobachtungen abhängiger Unbekannten in Frage stehen, oder wenn es noch ungewiss ist, welche Unbekannten man vor allem aus den Beobachtungen ableiten soll, dann verfährt man mit ihnen besser auf eine andere Weise, welche wir nun entwickeln wollen.

Wir betrachten die Grössen x, y, z etc. als Variable und setzen

$$\left.\begin{aligned}[aa]\,x + [ab]\,y + [ac]\,z + \text{etc.} &= \xi\\ [ab]\,x + [bb]\,y + [bc]\,z + \text{etc.} &= \eta\\ [ac]\,x + [bc]\,y + [cc]\,z + \text{etc.} &= \zeta\end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

etc., und nehmen an, durch Elimination folge hieraus

$$\left.\begin{aligned}[\alpha\alpha]\,\xi + [\alpha\beta]\,\eta + [\alpha\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= x\\ [\beta\alpha]\,\xi + [\beta\beta]\,\eta + [\beta\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= y\\ [\gamma\alpha]\,\xi + [\gamma\beta]\,\eta + [\gamma\gamma]\,\zeta + \text{etc.} &= z\end{aligned}\right\} \qquad (7)$$

etc.

Vor allem ist hier zu bemerken, dass die symmetrisch stehenden Coefficienten nothwendig einander gleich sind, also

$$
\begin{aligned}
[\beta\alpha] &= [\alpha\beta] \\
[\gamma\alpha] &= [\alpha\gamma] \\
[\gamma\beta] &= [\beta\gamma] \\
&\text{etc.,}
\end{aligned}
$$

was sich zwar schon aus der allgemeinen Theorie der Elimination aus linearen Gleichungen von selber ergiebt, ausserdem aber später auch noch einmal direkt von uns bewiesen werden soll.

Wir erhalten also

$$
\left.\begin{aligned}
x^0 &= -[\alpha\alpha][al] - [\alpha\beta][bl] - [\alpha\gamma][cl] - \text{etc.} \\
y^0 &= -[\alpha\beta][al] - [\beta\beta][bl] - [\beta\gamma][cl] - \text{etc.} \\
z^0 &= -[\alpha\gamma][al] - [\beta\gamma][bl] - [\gamma\gamma][cl] - \text{etc.}
\end{aligned}\right\} \quad (8)
$$
etc.

und hieraus, wenn wir

$$
\left.\begin{aligned}
[\alpha\alpha]\mathfrak{A} + [\alpha\beta]\mathfrak{B} + [\alpha\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{A} \\
[\alpha\beta]\mathfrak{A} + [\beta\beta]\mathfrak{B} + [\beta\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{B} \\
[\alpha\gamma]\mathfrak{A} + [\beta\gamma]\mathfrak{B} + [\gamma\gamma]\mathfrak{C} + \text{etc.} &= \mathrm{C}
\end{aligned}\right\} \quad (9)
$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - \mathrm{A}[al] - \mathrm{B}[bl] - \mathrm{C}[cl] - \text{etc.}$$

oder, wenn wir ausserdem

$$
\left.\begin{aligned}
a\,\mathrm{A} + b\,\mathrm{B} + c\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= p\,\varepsilon \\
a'\mathrm{A} + b'\mathrm{B} + c'\mathrm{C} + \text{etc.} &= p'\varepsilon' \\
a''\mathrm{A} + b''\mathrm{B} + c''\mathrm{C} + \text{etc.} &= p''\varepsilon''
\end{aligned}\right\} \quad (10)
$$

etc. setzen,

$$\mathrm{K} = k - l\varepsilon - l'\varepsilon' - l''\varepsilon'' - \text{etc.} \quad (11)$$

9.

Eine Vergleichung der Gleichungen (7) und (9) lehrt, dass die Hülfsgrössen A, B, C etc. diejenigen Werthe der Variabeln x, y, z etc. sind, welche den Werthen $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. der Variabeln ξ, η, ζ etc. entsprechen; woraus folgt, dass man

$$
\left.\begin{aligned}
[aa]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [ac]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\
[ab]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [bc]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{B} \\
[ac]\,\mathrm{A} + [ab]\,\mathrm{B} + [cc]\,\mathrm{C} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}
\end{aligned}\right\} \quad (12)
$$

etc. erhält. Multiplicirt man also die Gleichungen (10) bezw. mit $\frac{a}{p}, \frac{a'}{p'}, \frac{a''}{p''}$ etc. und addirt, so erhält man

und analog weiter
$$\left.\begin{aligned}\mathfrak{A} &= a\varepsilon + a'\varepsilon' + a''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \mathfrak{B} &= b\varepsilon + b'\varepsilon' + b''\varepsilon'' + \text{etc.}\\ \mathfrak{C} &= c\varepsilon + c'\varepsilon' + c''\varepsilon'' + \text{etc.}\end{aligned}\right\} \quad (13)$$

etc. Da nun $\mathfrak{A}$ der Werth der Funktion X ist, falls man für v, v', v'' etc. die beobachteten Werthe einsetzt, so sieht man leicht, dass, wenn man an diese bezw. die Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. anbringt, die Funktion X alsdann den Werth 0 erhalte, und dass die Funktionen Y, Z etc. alsdann ebenfalls zum Verschwinden gebracht werden. Auf dieselbe Weise schliesst man aus der Gleichung (11), dass K der Werth der Funktion u ist, welcher sich durch die nämliche Substitution ergiebt.

Das Anbringen der Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. an die Beobachtungen werden wir *die Ausgleichung der Beobachtungen* nennen, und offenbar werden wir zu dem folgenden sehr wichtigen Schluss geführt, dass die auf die vorgetragene Weise ausgeglichenen Beobachtungen alle Bedingungsgleichungen genau erfüllen, und dass jede von den Beobachtungen irgendwie abhängige Grösse gerade den Werth erhält, welcher aus der zweckmässigsten Combination der ungeänderten Beobachtungen hervorgehen würde. Wenn es also auch unmöglich ist, die Fehler e, e', e'' etc. selbst aus den Bedingungsgleichungen zu bestimmen, da ja deren Anzahl nicht ausreicht, so haben wir wenigstens *plausibelste Fehler* erlangt, welchen Namen wir den Grössen ε, ε', ε'' etc. geben dürfen.

10.

Da wir die Anzahl der Beobachtungen grösser, als die Anzahl der Bedingungsgleichungen annehmen, so lassen sich ausser dem System der plausibelsten Verbesserungen $-\varepsilon$, $-\varepsilon'$, $-\varepsilon''$ etc. unendlich viele andere finden, welche die Bedingungsgleichungen befriedigen, und es ist der Mühe werth, zu untersuchen, wie diese sich zu jenen verhalten. Es sei also $-\mathrm{E}$, $-\mathrm{E}'$, $-\mathrm{E}''$ etc. ein solches, von dem plausibelsten verschiedenes System, so haben wir

$$\begin{aligned} a\mathrm{E} + a'\mathrm{E}' + a''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{A}\\ b\mathrm{E} + b'\mathrm{E}' + b''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{B}\\ c\mathrm{E} + c'\mathrm{E}' + c''\mathrm{E}'' + \text{etc.} &= \mathfrak{C}\end{aligned}$$

etc. Multiplicirt man diese Gleichungen bezw. mit A, B, C etc., und addirt, so erhält man mit Hülfe der Gleichungen (10)

$$p\varepsilon\mathrm{E} + p'\varepsilon'\mathrm{E}' + p''\varepsilon''\mathrm{E}'' + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.}$$

Auf ganz ähnliche Weise liefern aber die Gleichungen (13)

$$p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} = \mathrm{A}\mathfrak{A} + \mathrm{B}\mathfrak{B} + \mathrm{C}\mathfrak{C} + \text{etc.} \qquad (14)$$

Durch Combination dieser beiden Gleichungen leitet man leicht ab

$$\begin{aligned} & p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.} \\ = {} & p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.} + p(\mathrm{E}-\varepsilon)^2 + p'(\mathrm{E}'-\varepsilon')^2 \\ & + p''(\mathrm{E}''-\varepsilon'')^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Die Summe $p\mathrm{E}^2 + p'\mathrm{E}'^2 + p''\mathrm{E}''^2 + \text{etc.}$ wird also nothwendig *grösser* sein als die Summe $p\varepsilon^2 + p'\varepsilon'^2 + p''\varepsilon''^2 + \text{etc.}$, was man ausdrücken kann als

Lehrsatz. Die Summe der mit den beziehentlichen Gewichten der Beobachtungen multiplicirten Quadrate von Verbesserungen, durch welche man die Beobachtungen mit den Bedingungsgleichungen in Uebereinstimmung zu bringen vermag, wird ein Minimum, wenn man die plausibelsten Verbesserungen anwendet.

Dies ist eben das Princip der kleinsten Quadrate, aus welchem auch die Gleichungen (12) und (10) leicht unmittelbar hätten abgeleitet werden können. Uebrigens liefert uns die Gleichung (14) für diese kleinste Summe, welche wir im Folgenden mit S bezeichnen werden, den Ausdruck $\mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$

11.

Die Bestimmung der plausibelsten Fehler giebt, da sie von den Coefficienten l, l', l'' etc. unabhängig ist, offenbar die bequemste Vorbereitung zu jedwedem Gebrauch, für den man die Beobachtungen verwenden will. Ausserdem ist es klar, dass man zu diesem Geschäft der *unbestimmten* Elimination oder der Kenntniss der Coefficienten $[\alpha\alpha]$, $[\alpha\beta]$ etc. nicht bedarf, und dass man nur die Hülfsgrössen A, B, C etc., welche wir im Folgenden die *Correlaten* der Bedingungsgleichungen $\mathrm{X} = 0$, $\mathrm{Y} = 0$, $\mathrm{Z} = 0$ etc. nennen werden, aus den Gleichungen (12) durch bestimmte Elimination abzuleiten und in die Formeln (10) einzusetzen hat.

Obwohl nun diese Methode thatsächlich nichts zu wünschen übrig lässt, wenn allein die plausibelsten Werthe der von den Beobachtungen abhängigen Grössen verlangt werden, so scheint es sich doch anders zu verhalten, wenn ausserdem das Gewicht irgend einer Bestimmung gewünscht wird, da hierzu, mag man nun diesen oder jenen der oben gegebenen vier Ausdrücke benutzen, die Kenntniss der Grössen L, L′, L″ etc., oder doch wenigstens die Kenntniss von x^0, y^0, z^0 etc. nothwendig erscheint. Aus diesem Grunde wird es nützlich sein, das Eliminationsverfahren genauer zu untersuchen, wodurch sich uns auch ein leichterer Weg zur Auffindung der Gewichte erschliessen wird.

12.

Der Zusammenhang der in dieser Untersuchung vorkommenden Grössen wird wesentlich durch die Einführung der allgemeinen Funktion zweiten Grades

$$\begin{gathered}[aa]x^2 + 2[ab]xy + 2[ac]xz + \text{etc.}\\ + [bb]y^2 + 2[bc]yz + \text{etc.} + [cc]z^2 + \text{etc.},\end{gathered}$$

welche wir mit T bezeichnen wollen, aufgehellt. Zunächst ist diese Funktion offenbar sofort gleich

$$\left.\begin{gathered}\frac{(ax+by+cz+\text{etc.})^2}{p} + \frac{(a'x+b'y+c'z+\text{etc.})^2}{p'}\\ + \frac{(a''x+b''y+c''z+\text{etc.})^2}{p''} + \text{etc.}\end{gathered}\right\} \quad (15)$$

Ferner ist offenbar

$$T = x\xi + y\eta + z\zeta + \text{etc.} \quad (16)$$

und, wenn hier wiederum x, y, z etc. mit Hülfe der Gleichungen (7) durch ξ, η, ζ etc. ausgedrückt werden,

$$\begin{aligned}T = {} & [\alpha\alpha]\xi^2 + 2[\alpha\beta]\xi\eta + 2[\alpha\gamma]\xi\zeta + \text{etc.}\\ & + [\beta\beta]\eta^2 + 2[\beta\gamma]\eta\zeta + \text{etc.} + [\gamma\gamma]\zeta^2 + \text{etc.}\end{aligned}$$

Die oben entwickelte Theorie enthält je zwei Systeme von bestimmten Werthen der Grössen x, y, z etc. und ξ, η, ζ etc.: dem ersten, in welchem $x = x^0$, $y = y^0$, $z = z^0$ etc. und $\xi = -[al]$, $\eta = -[bl]$, $\zeta = -[cl]$ etc. ist, entspricht der folgende Werth des T

$$T = [ll] - \frac{1}{P},$$

was entweder durch Vergleichung des dritten Ausdrucks für das Gewicht P mit der Gleichung (16) oder unmittelbar aus dem vierten Ausdrucke erhellt; dem zweiten, in welchem $x = A$, $y = B$, $z = C$ etc. und $\xi = \mathfrak{A}$, $\eta = \mathfrak{B}$, $\zeta = \mathfrak{C}$ etc. ist, entspricht der Werth $T = S$, wie sowohl aus den Formeln (10) und (15), als aus (14) und (16) klar ist.

13.

Unsere Hauptarbeit besteht nunmehr in einer ähnlichen Transformation der Funktion T, wie die, welche wir in der „Theorie der Bewegung der Himmelskörper“, Art. 182., und weitläufiger in der „Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas“ vorgetragen haben. Wir setzen nämlich

$$\left.\begin{aligned}
[bb,1] &= [bb] - \frac{[ab]^2}{[aa]}\\
[bc,1] &= [bc] - \frac{[ab]\,[ac]}{[aa]}\\
[bd,1] &= [bd] - \frac{[ab]\,[ad]}{[aa]}\\
&\text{etc.}\\
[cc,2] &= [cc] - \frac{[ac]^2}{[aa]} - \frac{[bc,1]^2}{[bb,1]}\\
[cd,2] &= [cd] - \frac{[ac]\,[ad]}{[aa]} - \frac{[bc,1]\,[bd,1]}{[bb,1]}\\
&\text{etc.}\\
[dd,3] &= [dd] - \frac{[ad]^2}{[aa]} - \frac{[bd,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cd,2]^2}{[cc,2]}
\end{aligned}\right\} \qquad (17)$$

etc. etc. Setzt man alsdann*)

$$\begin{aligned}
[bb,1]\,y + [bc,1]\,z + [bd,1]\,w + \text{etc.} &= \eta'\\
[cc,2]\,z + [cd,2]\,w + \text{etc.} &= \zeta''\\
[dd,3]\,w + \text{etc.} &= \varphi'''
\end{aligned}$$

etc., dann wird

$$T = \frac{\xi^2}{[aa]} + \frac{\eta'^2}{[bb,1]} + \frac{\zeta''^2}{[cc,2]} + \frac{\varphi'''^2}{[dd,3]} + \text{etc.},$$

und die Abhängigkeit der Grössen η', ζ'', φ''' etc. von ξ, η, ζ, φ etc. wird durch folgende Gleichungen ausgedrückt:

*) Im Vorhergehenden konnten je drei, auf die drei ersten Bedingungsgleichungen bezügliche Buchstaben für die verschiedenen Grössensysteme genügen; hier schien es aber gut, um das Gesetz des Algorithmus deutlicher zu zeigen, einen vierten hinzuzufügen; während nun in der natürlichen Ordnung auf die Buchstaben a, b, c; A, B, C; 𝔄, 𝔅, ℭ von selbst d, D, 𝔇 folgt, fügten wir der Reihe x, y, z, da das Alphabet versagte, das w und den ξ, η, ζ das φ an.

$$\eta' = \eta - \frac{[ab]}{[aa]}\xi$$

$$\zeta'' = \zeta - \frac{[ac]}{[aa]}\xi - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\eta'$$

$$\varphi''' = \varphi - \frac{[ad]}{[aa]}\xi - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\eta' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\zeta''$$

etc.

Hieraus werden nun alle für unseren Zweck nothwendigen Formeln leicht entnommen. Zur Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. setzen wir nämlich

$$\left.\begin{aligned} \mathfrak{B}' &= \mathfrak{B} - \frac{[ab]}{[aa]}\mathfrak{A} \\ \mathfrak{C}'' &= \mathfrak{C} - \frac{[ac]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bc, 1]}{[bb, 1]}\mathfrak{B}' \\ \mathfrak{D}''' &= \mathfrak{D} - \frac{[ad]}{[aa]}\mathfrak{A} - \frac{[bd, 1]}{[bb, 1]}\mathfrak{B}' - \frac{[cd, 2]}{[cc, 2]}\mathfrak{C}'' \end{aligned}\right\} \qquad (18)$$

etc., und hiernach werden A, B, C, D etc. durch folgende Formeln, und zwar in umgekehrter Reihenfolge, indem man mit der letzten beginnt, erhalten:

$$\left.\begin{aligned} [aa]\mathrm{A} + [ab]\mathrm{B} + [ac]\mathrm{C} + [ad]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{A} \\ [bb, 1]\mathrm{B} + [bc, 1]\mathrm{C} + [bd, 1]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{B}' \\ [cc, 2]\mathrm{C} + [cd, 2]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{C}'' \\ [dd, 3]\mathrm{D} + \text{etc.} &= \mathfrak{D}''' \\ \text{etc.} & \end{aligned}\right\} \qquad (19)$$

Für die Summe S aber erhalten wir die neue Formel

$$\mathrm{S} = \frac{\mathfrak{A}^2}{[aa]} + \frac{\mathfrak{B}'^2}{[bb, 1]} + \frac{\mathfrak{C}''^2}{[cc, 2]} + \frac{\mathfrak{D}'''^2}{[dd, 3]} + \text{etc.} \qquad (20)$$

Wenn schliesslich das Gewicht P verlangt wird, welches der plausibelsten Bestimmung der durch die Funktion u ausgedrückten Grösse zu geben ist, so machen wir

$$\left.\begin{aligned} [bl, 1] &= [bl] - \frac{[ab][al]}{[aa]} \\ [cl, 2] &= [cl] - \frac{[ac][al]}{[aa]} - \frac{[bc, 1][bl, 1]}{[bb, 1]} \\ [dl, 3] &= [dl] - \frac{[ad][al]}{[aa]} - \frac{[bd, 1][bl, 1]}{[bb, 1]} - \frac{[cd, 2][cl, 2]}{[cc, 2]} \end{aligned}\right\} \qquad (21)$$

etc., und erhalten alsdann

$$\frac{1}{P} = [ll] - \frac{[al]^2}{[aa]} - \frac{[bl,1]^2}{[bb,1]} - \frac{[cl,2]^2}{[cc,2]} - \frac{[dl,3]^2}{[dd,3]} - \text{etc.} \quad (22)$$

Die Formeln (17) bis (22), deren Einfachheit nichts zu wünschen übrig zu lassen scheint, enthalten die in jeder Beziehung vollständige Lösung unserer Aufgabe.

14.

Nachdem wir die Hauptaufgaben gelöst haben, wollen wir noch einige Nebenfragen behandeln, welche auf diesen Gegenstand ein helleres Licht werfen werden.

Zunächst muss man untersuchen, ob die Elimination, vermittelst deren x, y, z etc. aus ξ, η, ζ etc. abzuleiten sind, jemals unmöglich werden kann. Dies würde offenbar eintreten, wenn die Funktionen ξ, η, ζ etc. nicht von einander unabhängig wären. Nehmen wir daher für den Augenblick an, eine von ihnen werde durch die übrigen bereits bestimmt, so dass die identische Gleichung stattfinde

$$\alpha\xi + \beta\eta + \gamma\zeta + \text{etc.} = 0,$$

wo α, β, γ etc. bestimmte Zahlen bezeichnen. Es wird demnach

$$\begin{aligned}
\alpha[aa] + \beta[ab] + \gamma[ac] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ab] + \beta[bb] + \gamma[bc] + \text{etc.} &= 0\\
\alpha[ac] + \beta[bc] + \gamma[cc] + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc.; setzen wir nun

$$\begin{aligned}
\alpha a + \beta b + \gamma c + \text{etc.} &= p\Theta\\
\alpha a' + \beta b' + \gamma c' + \text{etc.} &= p'\Theta'\\
\alpha a'' + \beta b'' + \gamma c'' + \text{etc.} &= p''\Theta''
\end{aligned}$$

etc., so folgt hieraus von selbst

$$\begin{aligned}
a\Theta + a'\Theta' + a''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
b\Theta + b'\Theta' + b''\Theta'' + \text{etc.} &= 0\\
c\Theta + c'\Theta' + c''\Theta'' + \text{etc.} &= 0
\end{aligned}$$

etc., und ferner

$$p\Theta^2 + p'\Theta'^2 + p''\Theta''^2 + \text{etc.} = 0,$$

eine Gleichung, welche, da alle p, p', p'' etc. ihrer Natur nach positive Grössen sind, offenbar nicht bestehen kann, wenn nicht $\Theta = 0$, $\Theta' = 0$, $\Theta'' = 0$ etc. gewesen ist.

Nun betrachten wir die Werthe der vollständigen Differentiale

dX, dY, dZ etc., welche denjenigen Werthen der Grössen v, v', v'' etc. entsprechen, auf welche sich die Beobachtungen beziehen. Diese Differentiale, nämlich

$$a\,dv + a'\,dv' + a''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$b\,dv + b'\,dv' + b''\,dv'' + \text{etc.}$$
$$c\,dv + c'\,dv' + c''\,dv'' + \text{etc.}$$

etc., werden dem Schlusse zufolge, zu dem wir eben geführt worden sind, so von einander abhängen, dass ihre Summe nach der beziehentlichen Multiplication mit α, β, γ etc. identisch verschwinden muss, oder, was dasselbe ist, dass jedes einzelne von ihnen (wenigstens wenn der ihm entsprechende Faktor α, β, γ etc. nicht verschwindet) von selbst verschwinden muss, sobald wie alle übrigen als verschwindend vorausgesetzt werden. Deshalb muss (mindestens) eine von den Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. überflüssig sein, da sie von selbst erfüllt wird, sobald den übrigen genügt ist.

Wird übrigens die Sache genauer untersucht, so ist klar, dass dieser Schluss an und für sich nur für einen unendlich kleinen Spielraum der Veränderlichkeit der Variabeln gilt. Es sind nämlich eigentlich zwei Fälle zu unterscheiden: erstens, wo eine der Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc. unbedingt und allgemein bereits in den übrigen enthalten ist, was man in jedem einzelnen Fall leicht wird vermeiden können; zweitens, wo so zu sagen zufällig für die bestimmten Werthe der Grössen v, v', v'' etc., auf welche sich die Beobachtungen beziehen, eine der Funktionen X, Y, Z etc., z. B. die erste X, einen grössten oder kleinsten (oder allgemeiner einen stationären) Werth erlangt in Hinblick auf alle Aenderungen, welche wir den Grössen v, v', v'' etc. geben können, ohne die Gleichungen $Y = 0$, $Z = 0$ etc. zu stören. Da aber in unserer Untersuchung die Veränderlichkeit der Grössen nur in so engen Grenzen betrachtet werden soll, dass sie als unendlich klein behandelt werden kann, so hat dieser zweite Fall (der in der Praxis kaum je vorkommt) dieselbe Wirkung wie der erste, nämlich dass eine der Bedingungsgleichungen als überflüssig zu verwerfen sein wird; wir können also sicher sein, wenn alle aufgenommenen Bedingungsgleichungen in dem hier vorausgesetzten Sinne von einander unabhängig sind, dass die Elimination nothwendigerweise möglich sein muss. Eine ausführlichere Untersuchung dieses Gegenstandes, deren er mehr seiner theoretischen Feinheit als seiner praktischen Nützlichkeit wegen würdig ist, müssen wir uns indessen für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

15.

In den Art. 37. u. ff. der früheren Abhandlung haben wir eine Methode gelehrt, wie man die Genauigkeit der Beobachtungen a posteriori so scharf wie möglich bestimmen kann. Wenn nämlich die angenäherten Werthe von π Grössen durch Beobachtungen von gleicher Genauigkeit gefunden worden sind und mit denjenigen Werthen verglichen werden, welche durch Rechnung aus den plausibelsten Werthen der ϱ Elemente hervorgehen, von denen jene abhängen, so muss man die Quadrate der Differenzen addiren, und diese Summe durch $\pi - \varrho$ dividiren, wonach der Quotient als angenäherter Werth des Quadrates des einer derartigen Beobachtungsgruppe anhaftenden mittleren Fehlers betrachtet werden kann. Sind die Beobachtungen von ungleicher Genauigkeit, so sind diese Vorschriften nur insofern abzuändern, als vor der Addition die Quadrate mit den Gewichten der Beobachtungen zu multipliciren sind, worauf der sich so ergebende mittlere Fehler für Beobachtungen gilt, deren Gewicht als Einheit angenommen worden ist.

In der vorliegenden Untersuchung stimmt nun jene Summe offenbar mit der Summe S, und die Differenz $\pi - \varrho$ mit der Anzahl σ der Bedingungsgleichungen überein, weshalb wir für den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ den Ausdruck $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ erhalten, eine Bestimmung, welche um so grösseres Vertrauen verdient, je grösser die Anzahl σ gewesen ist.

Es wird aber die Mühe lohnen, dies auch unabhängig von der früheren Untersuchung festzustellen. Hierzu empfiehlt es sich, einige neue Bezeichnungen einzuführen. Es mögen nämlich den nachstehenden Werthen der Variabeln ξ, η, ζ etc.

$$\xi = a, \quad \eta = b, \quad \zeta = c \text{ etc.}$$

folgende Werthe der x, y, z etc. entsprechen

$$x = \alpha, \quad y = \beta, \quad z = \gamma \text{ etc.},$$

so dass man erhält

$$\begin{aligned}
\alpha &= a\,[\alpha\alpha] + b\,[\alpha\beta] + c\,[\alpha\gamma] + \text{etc.} \\
\beta &= a\,[\alpha\beta] + b\,[\beta\beta] + c\,[\beta\gamma] + \text{etc.} \\
\gamma &= a\,[\alpha\gamma] + b\,[\beta\gamma] + c\,[\gamma\gamma] + \text{etc.}
\end{aligned}$$

etc. Ebenso mögen den Werthen

$$\xi = a', \quad \eta = b', \quad \zeta = c' \text{ etc.}$$

die folgenden

$$x = \alpha',\ \ y = \beta',\ \ z = \gamma' \text{ etc.}$$

entsprechen, und den

$$\xi = a'',\ \ \eta = b'',\ \ \zeta = c'' \text{ etc.}$$

ebenso

$$x = \alpha'',\ \ y = \beta'',\ \ z = \gamma'' \text{ etc.}$$

und so weiter.

Unter dieser Voraussetzung erhält man durch Combination der Gleichungen (4) und (9)

$$\begin{aligned} \mathrm{A} &= \alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.} \\ \mathrm{B} &= \beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.} \\ \mathrm{C} &= \gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.} \end{aligned}$$

etc. Da nun $\mathrm{S} = \mathfrak{A}\mathrm{A} + \mathfrak{B}\mathrm{B} + \mathfrak{C}\mathrm{C} + \text{etc.}$ ist, so wird offenbar

$$\begin{aligned} \mathrm{S} = &\ (ae + a'e' + a''e'' + \text{etc.})(\alpha e + \alpha' e' + \alpha'' e'' + \text{etc.}) \\ &+ (be + b'e' + b''e'' + \text{etc.})(\beta e + \beta' e' + \beta'' e'' + \text{etc.}) \\ &+ (ce + c'e' + c''e'' + \text{etc.})(\gamma e + \gamma' e' + \gamma'' e'' + \text{etc.}) + \text{etc.} \end{aligned}$$

16.

Das Anstellen von Beobachtungen, durch welche wir die mit den zufälligen Fehlern e, e', e'' etc. behafteten Werthe der Grössen v, v', v'' etc. erhalten, können wir als einen Versuch betrachten, welcher zwar nicht die Grösse der einzelnen begangenen Fehler zu zeigen vermag, wohl aber durch Anwendung der früher auseinandergesetzten Vorschriften zu einem Werthe der Grösse S führt, welcher nach der eben gefundenen Formel eine gegebene Funktion jener Fehler ist. Bei einem solchen Versuch können gewiss bald grössere, bald kleinere zufällige Fehler begangen werden; je mehr Fehler aber vorhanden sind, um so grösser wird die Hoffnung sein, dass der Werth der Grösse S bei einem bestimmten Versuch von seinem mittleren Werth wenig abweichen werde. Es wird also hauptsächlich darauf ankommen, den mittleren Werth der Grösse S festzustellen. Nach den in unserer früheren Abhandlung vorgetragenen Principien, welche hier nicht wiederholt zu werden brauchen, finden wir diesen mittleren Werth

$$\begin{aligned} = (a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})\, m^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})\, m'^2 \\ + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})\, m''^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

Bezeichnet man den mittleren Fehler der Beobachtungen vom Gewichte $= 1$ mit μ, so dass also $\mu^2 = pm^2 = p'm'^2 = p''m''^2$ etc. ist, so kann der eben gefundene Ausdruck auf die Form

$$\left(\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2+\left(\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2$$
$$+\left(\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\text{etc.}\right)\mu^2+\text{etc.}$$

gebracht werden. Die Summe $\frac{a\alpha}{p}+\frac{a'\alpha'}{p'}+\frac{a''\alpha''}{p''}+\text{etc.}$ wird aber

$$=[aa][\alpha\alpha]+[ab][\alpha\beta]+[ac][\alpha\gamma]+\text{etc.}$$

und deshalb $= 1$ gefunden, wie man aus der Verbindung der Gleichungen (6) und (7) leicht entnehmen kann. Ebenso wird

$$\frac{b\beta}{p}+\frac{b'\beta'}{p'}+\frac{b''\beta''}{p''}+\text{etc.}=1$$
$$\frac{c\gamma}{p}+\frac{c'\gamma'}{p'}+\frac{c''\gamma''}{p''}+\text{etc.}=1$$

u. s. w.

Hiernach wird der mittlere Werth des S schliesslich $=\sigma\mu^2$, und insofern man nun den zufälligen Werth des S als mittleren annehmen darf, wird $\mu=\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ sein.

17.

Ein wie grosses Vertrauen diese Bestimmung verdiene, muss man nach dem mittleren, bei ihr oder ihrem Quadrat zu befürchtenden Fehler entscheiden; der letztere wird die Quadratwurzel aus dem mittleren Werthe des Ausdrucks

$$\left(\frac{S}{\sigma}-\mu^2\right)^2$$

sein, dessen Entwicklung durch ähnliche Berechnungen wie die in den Art. 39. u. ff. der früheren Abhandlung vorgetragenen erlangt wird. Wir unterdrücken dieselben hier der Kürze halber und setzen nur die Formel selbst hierher. Der mittlere bei der Bestimmung des Quadrates μ^2 zu befürchtende Fehler wird nämlich ausgedrückt durch

$$\sqrt{\frac{2\mu^4}{\sigma}+\frac{\nu^4-3\mu^4}{\sigma^2}N},$$

wo ν^4 den mittleren Werth der Biquadrate der Fehler vom Gewichte $= 1$, und N die Summe

$$(a\alpha + b\beta + c\gamma + \text{etc.})^2 + (a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' + \text{etc.})^2 + (a''\alpha'' + b''\beta'' + c''\gamma'' + \text{etc.})^2 + \text{etc.}$$

bezeichnet. Diese Summe lässt sich im allgemeinen auf keine einfachere Form bringen; auf ähnliche Weise aber wie im Art. 40. der früheren Abhandlung kann man zeigen, dass ihr Werth immer zwischen den Grenzen π und $\frac{\sigma^2}{\pi}$ liegen muss. Bei derjenigen Hypothese, auf welche die Methode der kleinsten Quadrate ursprünglich begründet worden war, fällt das Glied, welches diese Summe enthält, ganz fort, weil alsdann $\nu^4 = 3\mu^4$ wird, worauf die Genauigkeit, welche dem nach der Formel $\sqrt{\frac{S}{\sigma}}$ bestimmten mittleren Fehler zukommt, dieselbe sein wird, als wenn derselbe aus σ genau bekannten Fehlern nach den Art. 15. und 16. der früheren Abhandlung ermittelt worden wäre.

18.

Zur Ausgleichung der Beobachtungen ist, wie wir oben gesehen haben, zweierlei erforderlich: erstens die Ermittelung der Correlaten der Bedingungsgleichungen, d. h. der Zahlen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) Genüge leisten, zweitens das Einsetzen dieser Zahlen in die Gleichungen (10). Die so erhaltene Ausgleichung kann man eine *vollkommene* oder *vollständige* nennen, um sie von einer *unvollkommenen* oder *unvollständigen* zu unterscheiden; mit diesem Namen werden wir nämlich die Resultate bezeichnen, welche sich zwar aus denselben Gleichungen (10) ergeben, aber unter Zugrundelegung von Werthen der Grössen A, B, C etc., welche den Gleichungen (12) nicht, d. h. nur einigen oder keiner, genügen. Solche Aenderungen der Beobachtungen aber, welche unter den Formeln (10) nicht enthalten sein können, sollen von der gegenwärtigen Untersuchung ausgeschlossen sein und auch den Namen Ausgleichung nicht erhalten. Da, sobald die Gleichungen (10) statt haben, die Gleichungen (13) mit den Gleichungen (12) völlig gleichbedeutend sind, kann man diesen Unterschied auch so fassen: Die vollständig ausgeglichenen Beobachtungen genügen allen Bedingungsgleichungen $X = 0$, $Y = 0$, $Z = 0$ etc., die unvollständig ausgeglichenen aber entweder keiner oder doch wenigstens nicht allen; die Ausgleichung, durch welche allen Bedingungsgleichungen genügt wird, ist daher nothwendigerweise von selbst vollständig.

19.

Da nun aus dem Begriff einer Ausgleichung schon von selbst folgt, dass die Summe zweier Ausgleichungen wieder eine Ausgleichung ergebe, so sieht man leicht, dass es einerlei ist, ob man die Vorschriften zur Erlangung einer vollkommenen Ausgleichung unmittelbar auf die ursprünglichen Beobachtungen, oder auf bereits unvollständig ausgeglichene Beobachtungen anwendet.

Es mögen in der That $-\Theta$, $-\Theta'$, $-\Theta''$ etc. ein System einer unvollständigen Ausgleichung bilden, welches aus den Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \Theta p = A^0 a + B^0 b + C^0 c + \text{etc.} \\ \Theta' p' = A^0 a' + B^0 b' + C^0 c' + \text{etc.} \\ \Theta'' p'' = A^0 a'' + B^0 b'' + C^0 c'' + \text{etc.} \\ \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \text{(I)}$$

hervorgehe. Da vorausgesetzt wird, dass die durch diese Ausgleichungen geänderten Beobachtungen nicht allen Bedingungsgleichungen genügen, so seien $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe, welche X, Y, Z etc. durch Einsetzung jener erlangen. Man suche die Zahlen A^*, B^*, C^* etc., welche den Gleichungen

$$\left.\begin{array}{l} \mathfrak{A}^* = A^*[aa] + B^*[ab] + C^*[ac] + \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* = A^*[ab] + B^*[bb] + C^*[bc] + \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* = A^*[ac] + B^*[bc] + C^*[cc] + \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \text{(II)}$$

etc. genügen; alsdann wird die vollständige Ausgleichung der auf jene Weise geänderten Beobachtungen durch neue Aenderungen $-\varkappa$, $-\varkappa'$, $-\varkappa''$ etc. bewirkt, wo $\varkappa$, $\varkappa'$, $\varkappa''$ etc. aus den Formeln

$$\left.\begin{array}{l} \varkappa p = A^* a + B^* b + C^* c + \text{etc.} \\ \varkappa' p' = A^* a' + B^* b' + C^* c' + \text{etc.} \\ \varkappa'' p'' = A^* a'' + B^* b'' + C^* c'' + \text{etc.} \end{array}\right\} \quad \text{(III)}$$

etc. zu berechnen sind. Wir wollen nun untersuchen, wie diese Verbesserungen mit der vollständigen Ausgleichung der ursprünglichen Beobachtungen zusammenhängen. Zunächst ist klar, dass man hat

$$\begin{array}{l} \mathfrak{A}^* = \mathfrak{A} - a\Theta - a'\Theta' - a''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{B}^* = \mathfrak{B} - b\Theta - b'\Theta' - b''\Theta'' - \text{etc.} \\ \mathfrak{C}^* = \mathfrak{C} - c\Theta - c'\Theta' - c''\Theta'' - \text{etc.} \end{array}$$

etc. Setzen wir in diesen Gleichungen für Θ, Θ', Θ'' etc. die Werthe aus (I) und für $\mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{B}^*$, $\mathfrak{C}^*$ etc. die Werthe aus (II), so finden wir

$$\mathfrak{A} = (A^0 + A^*)[aa] + (B^0 + B^*)[ab] + (C^0 + C^*)[ac] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{B} = (A^0 + A^*)[ab] + (B^0 + B^*)[bb] + (C^0 + C^*)[bc] + \text{etc.}$$
$$\mathfrak{C} = (A^0 + A^*)[ac] + (B^0 + B^*)[bc] + (C^0 + C^*)[cc] + \text{etc.}$$

etc., woraus folgt, dass die Correlaten, welche die Bedingungsgleichungen (12) erfüllen,

$$A = A^0 + A^*, \quad B = B^0 + B^*, \quad C = C^0 + C^* \text{ etc.}$$

sind. Hiernach zeigen die Gleichungen (10), (I) und (III), dass

$$\varepsilon = \Theta + \varkappa, \quad \varepsilon' = \Theta' + \varkappa', \quad \varepsilon'' = \Theta'' + \varkappa'' \text{ etc.}$$

ist, d. h. die Ausgleichung der Beobachtungen ergiebt sich gleich vollständig sowohl bei unmittelbarer, als auch bei mittelbarer, von einer unvollständigen Ausgleichung ausgehenden Rechnung.

20.

Wenn die Anzahl der Bedingungsgleichungen allzugross ist, kann die Bestimmung der Correlaten A, B, C etc. durch die direkte Elimination so weitschichtig werden, dass ihr die Geduld des Rechners nicht gewachsen ist; alsdann wird es häufig bequem sein können, die vollständige Ausgleichung durch successive Annäherungen mit Hülfe des im vorigen Art. enthaltenen Theorems zu ermitteln. Man theile die Bedingungsgleichungen in zwei oder mehrere Gruppen, und suche zuerst die Ausgleichung, durch welche der ersten Gruppe von Gleichungen, unter Vernachlässigung der übrigen, genügt wird. Darauf behandele man die durch diese Ausgleichung geänderten Beobachtungen so, dass allein den Gleichungen der zweiten Gruppe Rechnung getragen wird. Im allgemeinen wird durch das Anbringen des zweiten Systems von Ausgleichungen das Zusammenstimmen mit den Gleichungen der ersten Gruppe gestört werden; deshalb kehren wir, wenn nur zwei Gruppen gebildet sind, zu den Gleichungen der ersten Gruppe zurück, und bestimmen ein drittes System, welches dieser Genüge leistet; darauf unterwerfen wir die dreimal verbesserten Beobachtungen einer vierten Ausgleichung, wo nur die Gleichungen der zweiten Gruppe berücksichtigt werden. So werden wir, indem wir abwechselnd bald die erste, bald die zweite Gruppe berücksichtigen, fortwährend abnehmende Ausgleichungen erhalten, und war die Gruppentheilung geschickt getroffen, so werden wir nach wenigen Wiederholungen zu festen Zahlen gelangen. Wurden mehr als zwei Gruppen gebildet, so verhält sich die Sache ähnlich; die einzelnen Gruppen kommen nach einander zur Berechnung, nach der letzten wieder die erste

u. s. w. Hier möge indess der Hinweis auf diese Methode genügen, deren Erfolg sicher sehr von einer geschickten Anwendung abhängen wird.

21.

Es erübrigt noch, dass wir den Beweis des im Art. 8. vorausgesetzen Hülfssatzes nachholen, wobei wir indess der Durchsichtigkeit wegen andere hierzu mehr geeignete Bezeichnungen anwenden wollen.

Es seien also x^0, x', x'', x''' etc. Variable; und wir nehmen an, aus den Gleichungen

$$\begin{aligned}
n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.} &= X^0\\
n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.} &= X'\\
n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.} &= X''\\
n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.} &= X'''\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

folge durch Elimination

$$\begin{aligned}
N^{00}X^0 + N^{01}X' + N^{02}X'' + N^{03}X''' + \text{etc.} &= x^0\\
N^{10}X^0 + N^{11}X' + N^{12}X'' + N^{13}X''' + \text{etc.} &= x'\\
N^{20}X^0 + N^{21}X' + N^{22}X'' + N^{23}X''' + \text{etc.} &= x''\\
N^{30}X^0 + N^{31}X' + N^{32}X'' + N^{33}X''' + \text{etc.} &= x'''\\
\text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man daher in die erste und zweite Gleichung des zweiten Systems die Werthe der Grössen X^0, X', X'', X''' etc. aus dem ersten System ein, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
x^0 = \quad & N^{00}.(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{01}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{02}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{03}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
x' = \quad & N^{10}(n^{00}x^0 + n^{01}x' + n^{02}x'' + n^{03}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{11}(n^{10}x^0 + n^{11}x' + n^{12}x'' + n^{13}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{12}(n^{20}x^0 + n^{21}x' + n^{22}x'' + n^{23}x''' + \text{etc.})\\
& + N^{13}(n^{30}x^0 + n^{31}x' + n^{32}x'' + n^{33}x''' + \text{etc.}) + \text{etc.}
\end{aligned}$$

Da jede dieser beiden Gleichungen offenbar eine identische Gleichung sein muss, so darf man sowohl in die erste, als in die zweite beliebige bestimmte Werthe für x^0, x', x'', x''' etc. einsetzen. Wir setzen in die erste ein

$$x^0 = N^{10},\quad x' = N^{11},\quad x'' = N^{12},\quad x''' = N^{13} \text{ etc.},$$

in die zweite aber

$$x^0 = N^{00},\quad x' = N^{01},\quad x'' = N^{02},\quad x''' = N^{03} \text{ etc.}$$

Alsdann folgt durch Subtraktion

$$\begin{aligned} N^{10} - N^{01} = \; & (N^{00} N^{11} - N^{10} N^{01})(n^{01} - n^{10}) \\ & + (N^{00} N^{12} - N^{10} N^{02})(n^{02} - n^{20}) \\ & + (N^{00} N^{13} - N^{10} N^{03})(n^{03} - n^{30}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{01} N^{12} - N^{11} N^{02})(n^{12} - n^{21}) \\ & + (N^{01} N^{13} - N^{11} N^{03})(n^{13} - n^{31}) \\ & + \text{etc.} \\ & + (N^{02} N^{13} - N^{12} N^{03})(n^{23} - n^{32}) \\ & + \text{etc. etc.}, \end{aligned}$$

welche Gleichung auch so geschrieben werden kann

$$N^{10} - N^{01} = \Sigma[N^{0\alpha} N^{1\beta} - N^{1\alpha} N^{0\beta}](n^{\alpha\beta} - n^{\beta\alpha}),$$

wo durch $\alpha\beta$ alle Combinationen von ungleichen Indices bezeichnet werden.

Hieraus folgt, dass, wenn

$$n^{01} = n^{10},\; n^{02} = n^{20},\; n^{03} = n^{30},\; n^{12} = n^{21},\; n^{13} = n^{31},\; n^{23} = n^{32} \text{ etc.}$$

oder allgemein

$$n^{\alpha\beta} = n^{\beta\alpha}$$

war, auch

$$N^{10} = N^{01}$$

sein wird. Da nun die Reihenfolge der Variabeln in den gegebenen Gleichungen willkürlich ist, so wird offenbar unter jener Voraussetzung allgemein

$$N^{\alpha\beta} = N^{\beta\alpha}.$$

22.

Da die in dieser Abhandlung dargelegte Methode vorzüglich eine häufige und bequeme Anwendung in den Rechnungen der höheren Geodäsie findet, so hoffen wir, unseren Lesern werde die Erläuterung der Vorschriften an einigen aus dieser entnommenen Beispielen nicht unlieb sein.

Die Bedingungsgleichungen zwischen den Winkeln eines Systems von Dreiecken sind hauptsächlich einer dreifachen Quelle zu entnehmen.

I. Die Summe der Horizontalwinkel, welche bei einem vollständigen Umlauf um denselben Scheitel den Horizont ausfüllen, muss vier Rechten gleich sein.

II. Die Summe der drei Winkel in jedem Dreieck ist einer gegebenen Grösse gleich, da man, wenn das Dreieck auf einer krummen Oberfläche liegt, den Ueberschuss jener Summe über zwei Rechte so scharf berechnen kann, dass er für vollkommen genau gelten darf.

III. Die dritte Quelle entspringt dem Verhältniss der Seiten in Dreiecken, welche eine geschlossene Kette bilden. Ist nämlich eine Reihe von Dreiecken so mit einander verbunden, dass das zweite Dreieck eine Seite a mit dem ersten Dreieck, eine andere b mit dem dritten gemeinsam hat; ebenso habe das vierte Dreieck mit dem dritten die Seite c, mit dem fünften die Seite d gemeinsam; und so weiter bis zum letzten Dreieck, welches mit dem vorhergehenden die Seite k und mit dem ersten wiederum die Seite l gemeinsam habe, dann werden die Werthe der Quotienten

$$\frac{a}{l}, \frac{b}{a}, \frac{c}{b}, \frac{d}{c} \cdots \frac{l}{k}$$

nach bekannten Methoden bezw. aus je zwei, den gemeinschaftlichen Seiten gegenüberliegenden Winkeln auf einander folgender Dreiecke zu erhalten sein, und da das Produkt jener Brüche $= 1$ sein muss, so ergiebt sich hieraus eine Bedingungsgleichung zwischen den Sinus jener Winkel (welche bezw. um den dritten Theil des sphärischen oder sphäroidischen Excesses vermindert sind, wenn die Dreiecke auf einer krummen Oberfläche liegen).

Uebrigens kommt es in complicirteren Dreiecksnetzen sehr häufig vor, dass Bedingungsgleichungen der zweiten oder dritten Art sich in grösserer Anzahl darbieten, als man beibehalten darf, weil nämlich ein Theil derselben in den übrigen schon enthalten ist. Dagegen wird der Fall seltener eintreten, wo man den Bedingungsgleichungen der zweiten Art ähnliche Gleichungen, die sich auf mehrseitige Figuren beziehen, beifügen muss, nämlich nur dann, wenn Polygone gebildet werden, welche nicht durch Messungen in Dreiecke getheilt sind. Ueber diese Dinge werden wir aber, weil es unserem gegenwärtigen Zweck zu fern liegt, bei einer anderen Gelegenheit des weiteren reden. Indessen können wir die Bemerkung nicht mit Stillschweigen übergehen, dass unsere Theorie, wenn eine reinliche und strenge Anwendung gewünscht wird, voraussetzt, es seien die mit v, v', v'' etc. bezeichneten Grössen wirklich und unmittelbar beobachtet, oder so aus Beobachtungen abgeleitet, dass sie von einander unabhängig bleiben oder wenigstens als von einander unabhängig betrachtet werden können. In der gewöhnlichen Praxis werden die Dreieckswinkel selbst beobachtet und können demnach für v, v', v'' etc. angenommen werden; wir dürfen aber nicht vergessen, falls das System zufällig ausserdem solche Dreiecke enthält, deren Winkel nicht unmittelbar beobachtet sind, sondern sich aus Summen oder Differenzen wirklich beobachteter Winkel ergeben, dass diese nicht unter die Zahl der beobachteten gerechnet, sondern in der Form ihrer Zusammensetzung bei den Rechnungen beibehalten werden müssen. Anders aber wird sich die Sache bei einer Beobachtungsweise verhalten, welche der von *Struve* (Astronomische Nachrichten, II, S. 431) befolgten ähnlich ist, bei der die Richtungen der einzelnen von demselben Scheitel ausgehenden Seiten durch Vergleichung mit einer und derselben willkürlichen Richtung erhalten werden. Dann sind nämlich gerade diese Winkel für v, v', v'' etc. anzunehmen, wodurch sich alle Dreieckswinkel in Form von Differenzen darstellen, während die Bedingungsgleichungen der ersten Art, denen der Natur der Sache nach von selbst genügt wird, als überflüssig fortfallen. Die Beobachtungsweise, welche ich selbst bei der in den letzten Jahren ausgeführten Triangulation angewandt habe, unterscheidet sich zwar sowohl von der ersten, als von der zweiten Methode, kann jedoch in Bezug auf das Resultat der letzteren gleichgeachtet werden, so dass man bei den einzelnen Stationen die von einem gleichsam beliebigen Anfang aus gezählten Richtungen der von ihnen ausgehenden Seiten für die Grössen v, v', v'' etc. annehmen darf. Wir werden nun zwei Beispiele ausarbeiten, von denen das eine der ersten, das andere der zweiten Weise entspricht.

23.

Das erste Beispiel entnehmen wir dem Werke von *de Krayenhoff*, „Précis historique des opérations trigonométriques faites en Hollande", und zwar unterwerfen wir den Theil des Dreiecksnetzes einer Ausgleichung, welcher zwischen den neun Punkten Harlingen, Sneek, Oldeholtpade, Ballum, Leeuwarden, Dockum, Drachten, Oosterwolde und Gröningen enthalten ist. Es werden zwischen diesen Punkten neun Dreiecke gebildet, welche in jenem Werke mit den Nummern 121, 122, 123, 124, 125, 127, 128, 131, 132 bezeichnet sind, und deren Winkel (welche wir durch vorgesetzte Indices unterscheiden) nach der Tabelle, S. 77 bis 81, folgendermaassen beobachtet worden sind:

Dreieck 121.

0.	Harlingen	50°	58′	15,238″
1.	Leeuwarden	82	47	15,351
2.	Ballum	46	14	27,202

Dreieck 122.

3.	Harlingen	51	5	39,717
4.	Sneek	70	48	33,445
5.	Leeuwarden	58	5	48,707

Dreieck 123.

6.	Sneek	49	30	40,051
7.	Drachten	42	52	59,382
8.	Leeuwarden	87	36	21,057

Dreieck 124.

9.	Sneek	45	36	7,492
10.	Oldeholtpade	67	52	0,048
11.	Drachten	66	31	56,513

Dreieck 125.

12.	Drachten	53	55	24,745
13.	Oldeholtpade	47	48	52,580
14.	Oosterwolde	78	15	42,347

Dreieck 127.

15.	Leeuwarden	59	24	0,645
16.	Dockum	76	34	9,021
17.	Ballum	44	1	51,040

Dreieck 128.

18.	Leeuwarden	72	6	32,043
19.	Drachten	46	53	27,163
20.	Dockum	61	0	4,494

Dreieck 131.

21.	Dockum	57	1	55,292
22.	Drachten	83	33	14,515
23.	Gröningen	39	24	52,397

Dreieck 132.

24. Oosterwolde	81°	54′	17,447″
25. Gröningen	31	52	46,094
26. Drachten	66	12	57,246 .

Die Betrachtung des Zusammenhangs zwischen diesen Dreiecken zeigt, dass zwischen den 27 Winkeln, deren angenäherte Werthe durch Beobachtung bekannt geworden sind, 13 Bedingungsgleichungen bestehen, und zwar zwei der ersten, neun der zweiten und zwei der dritten Art. Es ist aber unnöthig, diese Gleichungen alle in ihrer geschlossenen Form hinzuschreiben, da für die Rechnungen nur die in der allgemeinen Theorie mit $\mathfrak{A}$, a, a', a'' etc.; $\mathfrak{B}$, b, b', b'' etc.; etc. bezeichneten Grössen verlangt werden; deshalb schreiben wir an deren Stelle sofort die oben mit (13) bezeichneten Gleichungen, welche jene Grössen vor Augen stellen; anstatt der Zeichen ε, ε', ε'' etc. setzen wir hier einfach (0), (1), (2) etc.

Demnach entsprechen den beiden Bedingungsgleichungen erster Art die folgenden:

$$\begin{aligned}(1) + (5) + (8) + (15) + (18) &= -2{,}197'' \\ (7) + (11) + (12) + (19) + (22) + (26) &= -0{,}436\,.\end{aligned}$$

Die sphäroidischen Excesse der neun Dreiecke finden wir der Reihe nach: 1,749″; 1,147″; 1,243″; 1,698″; 0,873″; 1,167″; 1,104″; 2,161″; 1,403″. Es entsteht daher als erste Bedingungsgleichung der zweiten Art die folgende*): $v^{(0)} + v^{(1)} + v^{(2)} - 180^\circ\, 0'\, 1{,}749'' = 0$, und analog die übrigen. Hieraus erhalten wir die neun folgenden Gleichungen:

$$\begin{aligned}(0) + (1) + (2) &= -3{,}958'' \\ (3) + (4) + (5) &= +0{,}722 \\ (6) + (7) + (8) &= -0{,}753 \\ (9) + (10) + (11) &= +2{,}355 \\ (12) + (13) + (14) &= -1{,}201 \\ (15) + (16) + (17) &= -0{,}461 \\ (18) + (19) + (20) &= +2{,}596 \\ (21) + (22) + (23) &= +0{,}043 \\ (24) + (25) + (26) &= -0{,}616\,.\end{aligned}$$

*) Wir ziehen es vor, die Indices in diesem Beispiel durch arabische Ziffern auszudrücken.

Die Bedingungsgleichungen der dritten Art werden bequemer in logarithmischer Form aufgestellt; so heisst die erste

$$\log\sin(v^{(0)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(2)}-0{,}583'')-\log\sin(v^{(3)}-0{,}382'') +\log\sin(v^{(4)}-0{,}382'')-\log\sin(v^{(6)}-0{,}414'')+\log\sin(v^{(7)}-0{,}414'') -\log\sin(v^{(16)}-0{,}389'')+\log\sin(v^{(17)}-0{,}389'')-\log\sin(v^{(19)}-0{,}368'') +\log\sin(v^{(20)}-0{,}368'')=0\,.$$

Es erscheint überflüssig, die andere in geschlossener Form hinzuschreiben. Diesen beiden Gleichungen entsprechen die folgenden, wo die einzelnen Coefficienten sich auf die siebente Stelle der *Brigg*'schen Logarithmen beziehen,

$$\begin{aligned}17{,}068\,(0)&-20{,}174\,(2)-16{,}993\,(3)+7{,}328\,(4)-17{,}976\,(6)\\&+22{,}672\,(7)-5{,}028\,(16)+21{,}780\,(17)-19{,}710\,(19)\\&+11{,}671\,(20)=-371\\17{,}976\,(6)&-0{,}880\,(8)-20{,}617\,(9)+8{,}564\,(10)-19{,}082\,(13)\\&+4{,}375\,(14)+6{,}798\,(18)-11{,}671\,(20)+13{,}657\,(21)\\&-25{,}620\,(23)-2{,}995\,(24)+33{,}854\,(25)=+370\,.\end{aligned}$$

Da kein Grund angegeben ist, weshalb wir den Beobachtungen ungleiche Gewichte beilegen sollten, so setzen wir $p^{(0)}=p^{(1)}=p^{(2)}$ etc. $=1$. Bezeichnen wir daher die Correlaten der Bedingungsgleichungen in der Reihenfolge, in der wir die ihnen entsprechenden Gleichungen aufgestellt haben, mit A, B, C, D, E, F, G, H, I, K, L, M, N, so ergeben sich zur Bestimmung derselben folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}-2{,}197''&=5A+C+D+E+H+I+5{,}917\,N\\-0{,}436&=6B+E+F+G+I+K+L+2{,}962\,M\\-3{,}958&=A+3C-3{,}106\,M\\+0{,}722&=A+3D-9{,}665\,M\\-0{,}753&=A+B+3E+4{,}696\,M+17{,}096\,N\\+2{,}355&=B+3F-12{,}053\,N\\-1{,}201&=B+3G-14{,}707\,N\\-0{,}461&=A+3H+16{,}752\,M\\+2{,}596&=A+B+3I-8{,}039\,M-4{,}874\,N\\+0{,}043&=B+3K-11{,}963\,N\\-0{,}616&=B+3L+30{,}859\,N\\-\;371&=+2{,}962\,B-3{,}106\,C-9{,}665\,D+4{,}696\,E+16{,}752\,H\\&\quad-8{,}039\,I+2902{,}27\,M-459{,}33\,N\\+\;370&=+5{,}917\,A+17{,}096\,E-12{,}053\,F-14{,}707\,G\\&\quad-4{,}874\,I-11{,}963\,K+30{,}859\,L-459{,}33\,M\\&\quad+3385{,}96\,N\,.\end{aligned}$$

Hieraus erhalten wir durch Elimination

$A = -0{,}598$	$H = +0{,}659$
$B = -0{,}255$	$I = +1{,}050$
$C = -1{,}234$	$K = +0{,}577$
$D = +0{,}086$	$L = -1{,}351$
$E = -0{,}477$	$M = -0{,}109792$
$F = +1{,}351$	$N = +0{,}119681\,.$
$G = +0{,}271$	

Endlich erhalten wir die plausibelsten Fehler aus den Formeln

$$(0) = C + 17{,}068\,M$$
$$(1) = A + C$$
$$(2) = C - 20{,}174\,M$$
$$(3) = D - 16{,}993\,M$$

etc., woraus wir die folgenden numerischen Werthe finden; zur Vergleichung setzen wir (mit entgegengesetzten Vorzeichen) die von *de Krayenhoff* an die Beobachtungen angebrachten Verbesserungen hinzu:

	de Kr.		*de Kr.*
$(0) = -3{,}108''$	$-2{,}090''$	$(14) = +0{,}795''$	$+2{,}400''$
$(1) = -1{,}832$	$+0{,}116$	$(15) = +0{,}061$	$+1{,}273$
$(2) = +0{,}981$	$-1{,}982$	$(16) = +1{,}211$	$+5{,}945$
$(3) = +1{,}952$	$+1{,}722$	$(17) = -1{,}732$	$-7{,}674$
$(4) = -0{,}719$	$+2{,}848$	$(18) = +1{,}265$	$+1{,}876$
$(5) = -0{,}512$	$-3{,}848$	$(19) = +2{,}959$	$+6{,}251$
$(6) = +3{,}648$	$-0{,}137$	$(20) = -1{,}628$	$-5{,}530$
$(7) = -3{,}221$	$+1{,}000$	$(21) = +2{,}211$	$+3{,}486$
$(8) = -1{,}180$	$-1{,}614$	$(22) = +0{,}322$	$-3{,}454$
$(9) = -1{,}116$	0	$(23) = -2{,}489$	0
$(10) = +2{,}376$	$+5{,}928$	$(24) = -1{,}709$	$+0{,}400$
$(11) = +1{,}096$	$-3{,}570$	$(25) = +2{,}701$	$+2{,}054$
$(12) = +0{,}016$	$+2{,}414$	$(26) = -1{,}606$	$-3{,}077\,.$
$(13) = -2{,}013$	$-6{,}014$		

Die Summe der Quadrate unserer Ausgleichungen findet man $= 97{,}8845$. Hieraus findet man den mittleren Fehler, insoweit er aus den 27 beobachteten Winkeln abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{97{,}8845}{13}} = 2{,}7440''\,.$$

Die Summe der Quadrate der Aenderungen, welche *de Krayenhoff* selbst an die beobachteten Winkel angebracht hat, wird = 341,4201 gefunden.

24.

Das zweite Beispiel liefern uns die Dreiecke zwischen den fünf Punkten Falkenberg, Breithorn, Hauselberg, Wulfsode und Wilsede der Triangulation von Hannover. Beobachtet sind die Richtungen*):

Auf der Station *Falkenberg*			
0. Wilsede	187°	47′	30,311″
1. Wulfsode.	225	9	39,676
2. Hauselberg	266	13	56,239
3. Breithorn	274	14	43,634
Auf der Station *Breithorn*			
4. Falkenberg	94	33	40,755
5. Hauselberg	122	51	23,054
6. Wilsede	150	18	35,100
Auf der Station *Hauselberg*			
7. Falkenberg	86	29	6,872
8. Wilsede	154	37	9,624
9. Wulfsode.	189	2	56,376
10. Breithorn	302	47	37,732
Auf der Station *Wulfsode*			
11. Hauselberg	9	5	36,593
12. Falkenberg	45	27	33,556
13. Wilsede	118	44	13,159
Auf der Station *Wilsede*			
14. Falkenberg	7	51	1,027
15. Wulfsode.	298	29	49,519
16. Breithorn	330	3	7,392
17. Hauselberg	334	25	26,746.

*) Die Nullrichtungen, auf welche sich die einzelnen Richtungen beziehen, werden hier als willkürlich angesehen, obwohl sie thatsächlich mit den Meridianlinien der Stationen zusammenfallen. Die Beobachtungen werden seiner Zeit vollständig veröffentlicht werden; einstweilen findet man eine Figur in den „Astronomischen Nachrichten“, Bd. I, S. 441.

Aus diesen Beobachtungen lassen sich sieben Dreiecke bilden.

Dreieck I.

Falkenberg	8°	0′	47,395″
Breithorn	28	17	42,299
Hauselberg	143	41	29,140

Dreieck II.

Falkenberg	86	27	13,323
Breithorn	55	44	54,345
Wilsede	37	47	53,635

Dreieck III.

Falkenberg	41	4	16,563
Hauselberg	102	33	49,504
Wulfsode	36	21	56,963

Dreieck IV.

Falkenberg	78	26	25,928
Hauselberg	68	8	2,752
Wilsede	33	25	34,281

Dreieck V.

Falkenberg	37	22	9,365
Wulfsode	73	16	39,603
Wilsede	69	21	11,508

Dreieck VI.

Breithorn	27	27	12,046
Hauselberg	148	10	28,108
Wilsede	4	22	19,354

Dreieck VII.

Hauselberg	34	25	46,752
Wulfsode	109	38	36,566
Wilsede	35	55	37,227.

Es sind also sieben Bedingungsgleichungen zweiter Art vorhanden (die Bedingungsgleichungen erster Art fallen offenbar fort), zu deren Aufstellung vor allem die sphäroidischen Excesse der sieben Dreiecke zu ermitteln sind. Hierzu ist die Kenntniss der absoluten Grösse wenigstens einer Seite erforderlich; die Seite zwischen den

Punkten Wilsede und Wulfsode ist 22877,94 Meter lang. Hieraus ergeben sich die sphäroidischen Excesse der Dreiecke I ... 0,202″; II ... 2,442″; III ... 1,257″; IV ... 1,919″; V ... 1,957″; VI ... 0,321″; VII ... 1,295″.

Wenn wir jetzt die Richtungen in der Reihenfolge, wie sie oben angeführt und durch Indices unterschieden sind, mit $v^{(0)}$, $v^{(1)}$, $v^{(2)}$, $v^{(3)}$ etc. bezeichnen, so werden die Winkel des ersten Dreiecks

$$v^{(3)} - v^{(2)}, \quad v^{(5)} - v^{(4)}, \quad 360^\circ + v^{(7)} - v^{(10)},$$

und deshalb die erste Bedingungsgleichung

$$-v^{(2)} + v^{(3)} - v^{(4)} + v^{(5)} + v^{(7)} - v^{(10)} + 179^\circ\ 59'\ 59{,}798'' = 0\,.$$

Ebenso liefern die übrigen Dreiecke die sechs anderen; eine geringe Achtsamkeit wird aber zeigen, dass diese sieben Gleichungen nicht von einander unabhängig sind, sondern dass die zweite identisch mit der Summe der ersten, vierten und sechsten, die Summe der dritten und fünften aber identisch mit der Summe der vierten und siebenten ist; deshalb lassen wir die zweite und fünfte unberücksichtigt. An Stelle der übrigbleibenden Bedingungsgleichungen in geschlossener Form schreiben wir die entsprechenden Gleichungen des Systems (13), indem wir für die Zeichen ε, ε' etc. hier (0), (1), (2) etc. benutzen,

$$\begin{array}{rcl}
-1{,}368'' &=& -(2)+(3)-(4)\ +(5)\ \ +(7)\ \ -(10)\\
+1{,}773\ &=& -(1)+(2)-(7)\ +(9)\ \ -(11)+(12)\\
+1{,}042\ &=& -(0)+(2)-(7)\ +(8)\ \ +(14)-(17)\\
-0{,}813\ &=& -(5)+(6)-(8)\ +(10)-(16)+(17)\\
-0{,}750\ &=& -(8)+(9)-(11)+(13)-(15)+(17)\,.
\end{array}$$

Von Bedingungsgleichungen der dritten Art würden sich *acht* aus dem System der Dreiecke finden lassen, da man je drei der vier Dreiecke I, II, IV, VI und je drei von III, IV, V, VII zu diesem Zweck combiniren kann; eine geringe Aufmerksamkeit lehrt indess, dass *zwei* ausreichen, eine von jenen und eine von diesen, da die übrigen in ihnen und den früheren Bedingungsgleichungen schon enthalten sein müssen. Unsere sechste Bedingungsgleichung wird daher sein

$$\begin{array}{l}
\log\sin(v^{(3)} - v^{(2)} - 0{,}067'') - \log\sin(v^{(5)} - v^{(4)} - 0{,}067'')\\
+ \log\sin(v^{(14)} - u^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')\\
+ \log\sin(v^{(6)} - v^{(5)} - 0{,}107'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(16)} - 0{,}107'') = 0
\end{array}$$

und die siebente

$$\begin{aligned}
&\log\sin(v^{(2)} - v^{(1)} - 0{,}419'') - \log\sin(v^{(12)} - v^{(11)} - 0{,}419'')\\
&+\log\sin(v^{(14)} - v^{(17)} - 0{,}640'') - \log\sin(v^{(2)} - v^{(0)} - 0{,}640'')\\
&+\log\sin(v^{(13)} - v^{(11)} - 0{,}432'') - \log\sin(v^{(17)} - v^{(15)} - 0{,}432'') = 0,
\end{aligned}$$

und es entsprechen ihnen als Gleichungen des Systems (13)

$$\begin{aligned}
+25 = &+ 4{,}31\,(0) - 153{,}88\,(2) + 149{,}57\,(3) + 39{,}11\,(4)\\
&- 79{,}64\,(5) + 40{,}53\,(6) + 31{,}90\,(14) + 275{,}39\,(16)\\
&- 307{,}29\,(17)\\
-3 = &+ 4{,}31\,(0) - 24{,}16\,(1) + 19{,}85\,(2) + 36{,}11\,(11)\\
&- 28{,}59\,(12) - 7{,}52\,(13) + 31{,}90\,(14) + 29{,}06\,(15)\\
&- 60{,}96\,(17).
\end{aligned}$$

Wenn wir nun den einzelnen Richtungen dieselbe Genauigkeit beilegen, indem wir $p^{(0)} = p^{(1)} = p^{(2)}$ etc. $= 1$ setzen, und die Correlaten der sieben Bedingungsgleichungen in der obigen Reihenfolge mit A, B, C, D, E, F, G bezeichnen, so werden dieselben aus den folgenden Gleichungen zu bestimmen sein:

$$\begin{aligned}
-1{,}368 &= +6A - 2B - 2C - 2D + 184{,}72F - 19{,}85G\\
+1{,}773 &= -2A + 6B + 2C + 2E - 153{,}88F - 20{,}69G\\
+1{,}042 &= -2A + 2B + 6C - 2D - 2E + 181{,}00F + 108{,}40G\\
-0{,}813 &= -2A - 2C + 6D + 2E - 462{,}51F - 60{,}96G\\
-0{,}750 &= +2B - 2C + 2D + 6E - 307{,}29F - 133{,}65G\\
+25 &= +184{,}72A - 153{,}88B + 181{,}00C - 462{,}51D\\
&\quad - 307{,}29E + 224868F + 16694{,}1G\\
-3 &= -19{,}85A - 20{,}69B + 108{,}40C - 60{,}96D - 133{,}65E\\
&\quad + 16694{,}1F + 8752{,}39G.
\end{aligned}$$

Hieraus leiten wir durch Elimination ab

$$\begin{aligned}
A &= -0{,}225\\
B &= +0{,}344\\
C &= -0{,}088\\
D &= -0{,}171\\
E &= -0{,}323\\
F &= +0{,}000215915\\
G &= -0{,}00547462.
\end{aligned}$$

Die plausibelsten Fehler erhält man nunmehr aus den Formeln

$$\begin{aligned}
(0) &= -C + 4{,}31F + 4{,}31G\\
(1) &= -B - 24{,}16G\\
(2) &= -A + B + C - 153{,}88F + 19{,}85G
\end{aligned}$$

etc., woraus sich die numerischen Werthe ergeben

$(0) = +\,0{,}065''$	$(9) = +\,0{,}021''$
$(1) = -\,0{,}212$	$(10) = +\,0{,}054$
$(2) = +\,0{,}339$	$(11) = -\,0{,}219$
$(3) = -\,0{,}193$	$(12) = +\,0{,}501$
$(4) = +\,0{,}233$	$(13) = -\,0{,}282$
$(5) = -\,0{,}071$	$(14) = -\,0{,}256$
$(6) = -\,0{,}162$	$(15) = +\,0{,}164$
$(7) = -\,0{,}481$	$(16) = +\,0{,}230$
$(8) = +\,0{,}406$	$(17) = -\,0{,}139$.

Die Summe der Quadrate dieser Fehler wird $= 1{,}2288$ gefunden; hieraus folgt der mittlere Fehler einer einzelnen Richtung, insoweit er aus den beobachteten 18 Richtungen abgeleitet werden kann,

$$= \sqrt{\frac{1{,}2288}{7}} = 0{,}4190''.$$

25.

Um auch den zweiten Theil unserer Theorie durch ein Beispiel zu erläutern, suchen wir die Genauigkeit auf, mit welcher die Seite Falkenberg—Breithorn aus der Seite Wilsede—Wulfsode mit Hülfe der ausgeglichenen Beobachtungen bestimmt wird. Die Funktion u, durch welche dieselbe in diesem Fall ausgedrückt wird, ist

$$u = 22877{,}94^{\mathrm{m}} \times \frac{\sin(v^{(13)} - v^{(12)} - 0{,}652'')\sin(v^{(14)} - v^{(16)} - 0{,}814'')}{\sin(v^{(1)} - v^{(0)} - 0{,}652'')\sin(v^{(6)} - v^{(4)} - 0{,}814'')}.$$

Der Werth derselben wird mit den verbesserten Werthen der Richtungen $v^{(0)}$, $v^{(1)}$ etc. gefunden

$$= 26766{,}68^{\mathrm{m}}.$$

Die Differentiation jenes Ausdrucks liefert aber, wenn man sich die Differentiale $dv^{(0)}$, $dv^{(1)}$ etc. in Secunden ausgedrückt denkt,

$$\begin{aligned} du = {} & 0{,}16991^{\mathrm{m}}(dv^{(0)} - dv^{(1)}) + 0{,}08836^{\mathrm{m}}(dv^{(4)} - dv^{(6)}) \\ & - 0{,}03899^{\mathrm{m}}(dv^{(12)} - dv^{(13)}) + 0{,}16731^{\mathrm{m}}(dv^{(14)} - dv^{(16)}). \end{aligned}$$

Hieraus findet man weiter

$$\begin{aligned} [al] &= -\,0{,}08836 \\ [bl] &= +\,0{,}13092 \\ [cl] &= -\,0{,}00260 \\ [dl] &= +\,0{,}07895 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[el] &= + \quad 0{,}03899 \\
[fl] &= -40{,}1315 \\
[gl] &= +10{,}9957 \\
[ll] &= + \quad 0{,}13238.
\end{aligned}
$$

Man findet hiernach endlich mit Hülfe der oben entwickelten Methoden, wenn wir das Meter als lineare Längeneinheit annehmen,

$$\frac{1}{\mathrm{P}} = 0{,}08329\,, \quad \text{oder} \quad \mathrm{P} = 12{,}006\,,$$

woraus der mittlere im Werthe der Seite Falkenberg—Breithorn zu befürchtende Fehler $= 0{,}2886\, m$ Meter ist (wo m der mittlere zu befürchtende Fehler der beobachteten Richtungen, und zwar in Sekunden ausgedrückt, ist), und folglich, wenn wir den oben ermittelten Werth des m nehmen,

$$= 0{,}1209^{\mathrm{m}}.$$

Uebrigens lehrt der Anblick des Systems der Dreiecke unmittelbar, dass der Punkt Hauselberg darin ganz weggelassen werden kann, ohne dass der Zusammenhang zwischen den Seiten Wilsede—Wulfsode und Falkenberg—Breithorn gestört würde. Aber es wäre aus methodischen Grundsätzen nicht zu billigen, wollte man deshalb die auf den Punkt Hauselberg bezüglichen Bebachtungen *unterdrücken**), da sie doch sicher zur Erhöhung der Genauigkeit beitragen. Um deutlicher zu zeigen, wie gross die Zunahme der Genauigkeit hierdurch wird, wiederholen wir die Berechnung, indem wir Alles, was sich auf den Punkt Hauselberg bezieht, weglassen, wodurch von den oben gegebenen 18 Richtungen 8 fortfallen, und die plausibelsten Fehler der übrigen folgendermaassen gefunden werden:

$$
\begin{array}{l|l}
(0) = +0{,}327'' & (12) = +0{,}206'' \\
(1) = -0{,}206 & (13) = -0{,}206 \\
(3) = -0{,}121 & (14) = +0{,}327 \\
(4) = +0{,}121 & (15) = +0{,}206 \\
(6) = -0{,}121 & (16) = +0{,}121\,.
\end{array}
$$

Der Werth der Seite Falkenberg—Breithorn ergiebt sich dann

*) Der grössere Theil dieser Beobachtungen war schon angestellt, ehe der Punkt Breithorn aufgefunden und in das System aufgenommen ward.

$= 26766{,}63^{m}$, zwar wenig von dem oben gefundenen abweichend, die Berechnung des Gewichts liefert aber

$$\frac{1}{P} = 0{,}13082, \quad \text{oder} \quad P = 7{,}644$$

und deshalb den mittleren zu befürchtenden Fehler $= 0{,}36169\,m$ Meter $= 0{,}1515^{m}$. Es erhellt daher, dass durch Hinzunahme der auf Hauselberg bezüglichen Beobachtungen das Gewicht der Bestimmung der Seite Falkenberg—Breithorn im Verhältniss der Zahl 7,644 zu 12,006, oder der Einheit zu 1,571 vermehrt ist.

13. Allgemeine Flächentheorie

Hrsg. von Albert Wangerin, Leipzig 1889 (2. Aufl. 1900, 3. Aufl. 1905, 4. Aufl. 1912, 5. Aufl. 1921), Ostwald's Klassiker Nr. 5, 62 S.

Original:
Disquisitiones generales circa superficies curvas. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6, (1823–1827) 1828, commentationes classis mathematicae, S. 99–146. In: Gauß Werke 4, S. 217–256.

Allgemeine Flächentheorie

(Disquisitiones generales circa superficies curvas)

von

Carl Friedrich Gauss.

Aus »Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI ad a. 1823—1827.« Göttingen 1828.

1.

[99] Untersuchungen, bei denen eine Mannigfaltigkeit von Richtungen gerader Linien im Raume ins Spiel kommt, lassen sich häufig übersichtlicher und einfacher darstellen, wenn man eine Kugelfläche zu Hülfe nimmt, die mit einem Radius $= 1$ um einen willkürlich angenommenen Mittelpunkt beschrieben ist; die verschiedenen Richtungen werden dann durch diejenigen Punkte auf der Oberfläche dieser Hülfskugel dargestellt, welche die Endpunkte der mit ihnen parallel gezogenen Radien sind. Wird die Lage eines Punktes im Raum durch drei Coordinaten bestimmt, d. i. durch seine Abstände von drei festen, auf einander senkrechten Ebenen, so sind vor allem die Richtungen der zu jenen Ebenen senkrechten Axen ins Auge zu fassen; die Punkte der Kugelfläche, welche diese Axenrichtungen darstellen, sollen mit 1, 2, 3 bezeichnet werden; ihr gegenseitiger Abstand beträgt 90 Grad. Uebrigens sind dabei unter den Axenrichtungen diejenigen Richtungen zu verstehen, nach denen hin die entsprechenden Coordinaten wachsen.

2.

[100] Es wird zweckmässig sein, einige Sätze, die bei der folgenden Untersuchung häufige Anwendung finden, hier im Zusammenhang vorzuführen.

I. Der Winkel zwischen zwei sich schneidenden Geraden wird gemessen durch den Bogen zwischen denjenigen Punkten, welche auf der Kugelfläche den Richtungen jener Geraden entsprechen.

II. Die Stellung einer beliebigen Ebene kann durch einen grössten Kugelkreis dargestellt werden, dessen Ebene jener ersten parallel ist.

III. Der Winkel zwischen zwei Ebenen ist gleich dem Winkel zwischen den beiden grössten Kugelkreisen, durch welche jene dargestellt werden; der in Rede stehende Winkel wird daher auch durch den zwischen den Polen der beiden grössten Kugelkreise liegenden Bogen gemessen. Gleicherweise wird der Neigungswinkel einer Geraden gegen eine Ebene durch den Bogen gemessen, der von dem der Richtung der Geraden entsprechenden Punkte der Kugelfläche ausgeht und auf dem grössten Kreise, der die Stellung der Ebene darstellt, senkrecht steht.

IV. Bezeichnen x, y, z; x', y', z' die Coordinaten zweier Punkte, r ihren Abstand; ist ferner L der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung der von dem ersten jener Punkte zum zweiten gezogenen Geraden darstellt, so wird

$$\begin{aligned} x' &= x + r \cos 1L, \\ y' &= y + r \cos 2L, \\ z' &= z + r \cos 3L. \end{aligned}$$

V. Daraus folgt unmittelbar, dass allgemein

$$\cos^2 1L + \cos^2 2L + \cos^2 3L = 1$$

wird, dass ferner, wenn L' irgend einen andern Punkt der Kugelfläche bezeichnet,

$$\cos 1L \,.\, \cos 1L' + \cos 2L \,.\, \cos 2L' + \cos 3L \,.\, \cos 3L' = \cos LL'$$

ist.

VI. Lehrsatz. Bezeichnen L, L', L'', L''' vier auf der Kugel liegende Punkte und bezeichnet A den Winkel, welchen die Bogen LL', $L''L'''$, bis zu ihrem Schnittpunkt verlängert, bilden, so ist

$$\begin{aligned} &\cos LL'' \,.\, \cos L'L''' - \cos LL''' \,.\, \cos L'L'' \\ &= \sin LL' \,.\, \sin L''L''' \,.\, \cos A. \end{aligned}$$

[101] Beweis. Der Schnittpunkt von LL' und $L''L'''$ möge ebenfalls mit A bezeichnet werden; ferner sei

$$AL = t, \quad AL' = t', \quad AL'' = t'', \quad AL''' = t'''.$$

Dann ist

$$\begin{aligned}
\cos LL'' &= \cos t \cos t'' + \sin t \sin t'' \cos A,\\
\cos L'L''' &= \cos t' \cos t''' + \sin t' \sin t''' \cos A,\\
\cos LL''' &= \cos t \cos t''' + \sin t \sin t''' \cos A,\\
\cos L'L'' &= \cos t' \cos t'' + \sin t' \sin t'' \cos A;
\end{aligned}$$

folglich

$$\begin{aligned}
&\cos LL'' . \cos L'L''' - \cos LL''' . \cos L'L''\\
&= \cos A\,[\cos t \cos t'' \sin t' \sin t''' + \cos t' \cos t''' \sin t \sin t''\\
&\qquad - \cos t \cos t''' \sin t' \sin t'' - \cos t' \cos t'' \sin t \sin t''']\\
&= \cos A (\cos t \sin t' - \sin t \cos t')(\cos t'' \sin t''' - \sin t'' \cos t''')\\
&= \cos A . \sin (t' - t) . \sin (t''' - t'')\\
&= \cos A . \sin LL' . \sin L''L''' .
\end{aligned}$$

Hierbei ist noch Folgendes zu beachten. Vom Punkte A gehen je zwei Zweige der beiden grössten Kreise aus, und dieselben bilden dort zwei Winkel, die sich zu 180^0 ergänzen; von diesen Zweigen sind, wie aus unserer Ableitung hervorgeht, diejenigen zu nehmen, deren Richtungen mit der Richtung des Fortschreitens vom Punkte L nach L' und vom Punkte L'' nach L''' übereinstimmen. Daraus erkennt man zugleich, dass es gleichgültig ist, welchen der beiden Schnittpunkte der grössten Kreise man ausgewählt hat. An Stelle des Winkels A kann auch der Bogen zwischen den Polen der grössten Kreise, von denen LL' und $L''L'''$ Theile bilden, gesetzt werden: offenbar aber muss man diejenigen Pole nehmen, die in Bezug auf diese Bogen gleiche Lage haben, nämlich beide Pole zur Rechten, wenn man von L nach L' und von L'' nach L''' hin fortschreitet, oder beide zur Linken.

VII. Es seien L, L', L'' drei Punkte der Kugelfläche, und es werde zur Abkürzung gesetzt

$$\begin{aligned}
\cos 1L &= x, & \cos 2L &= y, & \cos 3L &= z,\\
\cos 1L' &= x', & \cos 2L' &= y', & \cos 3L' &= z',\\
\cos 1L'' &= x'', & \cos 2L'' &= y'', & \cos 3L'' &= z'',
\end{aligned}$$

[102] ferner

$$xy'z'' + x'y''z + x''yz' - xy''z' - x'yz'' - x''y'z = \triangle.$$

λ möge den Pol des grössten Kreises bezeichnen, von dem der Bogen LL' ein Theil ist, und zwar denjenigen Pol, der in Bezug auf diesen Bogen ebenso liegt, wie der Punkt 1 in Bezug auf den Bogen 23. Dann ist nach dem vorhergehenden Lehrsatze

$$yz' - y'z = \cos 1\lambda \, . \, \sin 23 \, . \, \sin LL'$$

oder, da $23 = 90^0$,

$$\begin{aligned} yz' - y'z &= \cos 1\lambda \, . \, \sin LL', \text{ und ebenso} \\ zx' - z'x &= \cos 2\lambda \, . \, \sin LL', \\ xy' - x'y &= \cos 3\lambda \, . \, \sin LL'. \end{aligned}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen resp. mit x'', y'', z'' und addirt sie dann, so erhält man mit Hülfe des zweiten in V angeführten Satzes

$$\triangle = \cos \lambda L'' \, . \, \sin LL'.$$

Nun sind drei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann L'' auf demselben grössten Kreise liegen, von dem der Bogen LL' einen Theil bildet; dann ist $\lambda L'' = 90^0$ und daher $\triangle = 0$. Liegt dagegen L'' ausserhalb jenes grössten Kreises, so tritt der zweite Fall ein, wenn L'' und λ auf derselben Seite, der dritte, wenn beide auf entgegengesetzten Seiten des Kreises liegen: in beiden Fällen bilden die Punkte L, L', L'' ein sphärisches Dreieck, und zwar folgen diese Punkte im zweiten Falle in derselben Reihenfolge auf einander wie die Punkte 1, 2, 3, während im dritten Falle die Reihenfolge die entgegengesetzte ist. Bezeichnet man die Winkel jenes sphärischen Dreiecks einfach mit L, L', L'' und mit p die vom Punkte L'' auf die Seite LL' gefällte sphärische Höhe, so wird

$$\sin p = \sin L \, . \, \sin LL'' = \sin L' \, . \, \sin L'L'',$$

ferner ist

$$\lambda L'' = 90^0 \mp p,$$

wobei das obere Zeichen für den zweiten, das untere für den dritten Fall gilt. Hieraus folgt, dass

$$\begin{aligned} \pm \triangle &= \sin L \, . \, \sin LL' \, . \, \sin LL'' \\ &= \sin L' \, . \, \sin LL' \, . \, \sin L'L'' \\ &= \sin L'' \, . \, \sin LL'' \, . \, \sin L'L'' \end{aligned}$$

ist. Uebrigens kann man den ersten Fall als sowohl im zweiten wie im dritten enthalten ansehen; und ebenso erkennt man leicht, dass $\pm \triangle$ das sechsfache Volumen der Pyramide darstellt, deren Ecken die Punkte L, L', L'' und der Kugelmittelpunkt sind. Endlich schliesst man hieraus unmittelbar, dass derselbe Ausdruck $\pm \frac{1}{6} \triangle$ allgemein das Volumen einer beliebigen [103] Pyramide darstellt, deren Ecken im Coordinatenanfangspunkte und in den Punkten mit den Coordinaten x, y, z; x', y', z'; x'', y'', z'' liegen.

3.

Von einer krummen Fläche sagt man, dass sie in einem auf ihr gelegenen Punkte A eine stetige Krümmung besitzt, wenn die Richtungen der Geraden, die von A nach den verschiedenen dem Punkte A unendlich nahen Punkten der Fläche gezogen werden können, sämmtlich von ein und derselben durch A gehenden Ebene unendlich wenig abweichen. Diese Ebene berührt, wie man zu sagen pflegt, die krumme Fläche in A. Sobald dieser Bedingung in einem Punkte nicht genügt werden kann, wird hier die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen, wie es z. B. an der Spitze eines Kegels stattfindet. Die folgenden Untersuchungen sollen auf solche krummen Flächen oder auf solche Theile von Flächen beschränkt werden, bei denen die Stetigkeit der Krümmung nirgends unterbrochen wird. Wir bemerken nur noch, dass die Methoden, welche zur Bestimmung der Lage der Berührungsebene dienen, für singuläre Punkte, in denen die Stetigkeit der Krümmung unterbrochen wird, ihre Bedeutung verlieren und auf Unbestimmtes führen müssen.

4.

Die Lage der Berührungsebene wird am bequemsten durch die Lage des auf ihr im Punkte A errichteten Lothes bestimmt; man nennt dasselbe eine Normale der krummen Fläche. Die Richtung dieser Normale soll durch den Punkt L auf der Oberfläche der Hülfskugel dargestellt und

$$\cos 1L = X,\ \cos 2L = Y,\ \cos 3L = Z$$

gesetzt werden, während mit x, y, z die Coordinaten des Punktes A bezeichnet werden sollen. Es seien ferner $x + dx$, $y + dy$, $z + dz$ die Coordinaten eines andern Punktes A' der krummen Fläche, ds der unendlich kleine Abstand desselben von A; endlich sei λ der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung des Bogenelements AA' darstellt. Dann wird

$$dx = ds . \cos 1\lambda,\quad dy = ds . \cos 2\lambda,\quad dz = ds . \cos 3\lambda,$$

und da $\lambda L = 90^\circ$ sein soll,

$$X \cos 1\lambda + Y \cos 2\lambda + Z \cos 3\lambda = 0.$$

[**104**] Aus dieser Gleichung in Verbindung mit den vorhergehenden ergiebt sich

$$Xdx + Ydy + Zdz = 0.$$

Nun giebt es zwei allgemeine Methoden, eine krumme Fläche analytisch darzustellen. Die erste Methode benutzt eine Gleichung zwischen den Coordinaten x, y, z; diese Gleichung soll, wie wir annehmen wollen, auf die Form $W = 0$ gebracht sein, wo W eine Function der Veränderlichen x, y, z ist. Es sei das vollständige Differential der Function W

$$dW = Pdx + Qdy + Rdz,$$

so wird auf der krummen Fläche

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

und daher auch

$$P\cos 1\lambda + Q\cos 2\lambda + R\cos 3\lambda = 0.$$

Da diese Gleichung, eben so wie die oben aufgestellte, für die Richtungen aller auf der Fläche liegenden Bogenelemente ds gelten soll, so übersieht man leicht, dass X, Y, Z den Grössen P, Q, R proportional sein müssen; und in Folge dessen wird, da noch

$$X^2 + Y^2 + Z^2 = 1$$

ist, entweder

$$X = \frac{P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}$$

oder

$$X = \frac{-P}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}, \quad Y = \frac{-Q}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}},$$
$$Z = \frac{-R}{\sqrt{P^2 + Q^2 + R^2}}.$$

Die zweite Methode stellt die Coordinaten als Functionen von zwei neuen Veränderlichen p, q dar. Durch Differentiation dieser Functionen mögen die Gleichungen entstehen

$$dx = a\,dp + a'dq,$$
$$dy = b\,dp + b'dq,$$
$$dz = c\,dp + c'dq;$$

[**105**] dann erhält man durch Einsetzen dieser Ausdrücke in die oben aufgestellte Formel:

$$(aX + bY + cZ)\,dp + (a'X + b'Y + c'Z)\,dq = 0.$$

Da nun diese Gleichung stattfinden soll unabhängig von dem Werth der Differentiale dp, dq, so muss offenbar

$$aX + bY + cZ = 0, \quad a'X + b'Y + c'Z = 0$$

sein; daraus schliesst man, dass X, Z, Y den Grössen

$$bc' - cb', \quad ca' - ac', \quad ab' - ba'$$

proportional sein müssen.

Setzt man noch zur Abkürzung

$$\sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2} = \triangle,$$

so wird entweder

$$X = \frac{bc' - cb'}{\triangle}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\triangle}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\triangle}$$

oder

$$X = \frac{cb' - bc'}{\triangle}, \quad Y = \frac{ac' - ca'}{\triangle}, \quad Z = \frac{ba' - ab'}{\triangle}.$$

Zu den beiden eben besprochenen allgemeinen Methoden kommt noch eine dritte, bei welcher eine der Coordinaten, z. B. z, als Function der beiden andern x, y ausgedrückt wird. Diese Methode ist augenscheinlich nichts anderes, als ein Specialfall der ersten oder zweiten Methode. Setzt man daher hier

$$dz = t\,dx + u\,dy,$$

so wird entweder

$$X = \frac{-t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{-u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}},$$
$$Z = \frac{1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}$$

oder

$$X = \frac{t}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}, \quad Y = \frac{u}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}},$$
$$Z = \frac{-1}{\sqrt{1 + t^2 + u^2}}.$$

5.

Die beiden im vorhergehenden Artikel gefundenen Lösungen beziehen sich, wie leicht ersichtlich ist, auf entgegengesetzte Punkte der Kugelfläche oder auf entgegengesetzte Richtungen; [106] und naturgemäss rühren diese davon her, dass die Normale auf einer oder der andern Seite der Fläche errichtet werden kann. Wenn man nun von jetzt an die beiden Seiten der Fläche unterscheidet und die eine die äussere, die andere die innere nennt, so kann man mit Hülfe des in Artikel 2 (VII) abgeleiteten Satzes für jede der beiden Normalen die zugehörige Lösung angeben, sobald sich ein Kriterium zur Unterscheidung der einen Seite von der andern aufstellen lässt.

Bei der ersten Methode lässt sich ein solches Kriterium aus dem Vorzeichen des Werthes der Grösse W ableiten. Denn, allgemein zu reden, scheidet die krumme Fläche die Theile des Raumes, in denen W einen positiven Werth hat, von denen, in denen der Werth von W negativ ist. Aus dem vorher angeführten Satze aber ergiebt sich leicht, dass, wenn W einen positiven Werth auf der äussern Seite annimmt, und wenn die Normale nach aussen gezogen ist, die erste Lösung zu nehmen ist. Uebrigens wird man in jedem Einzelfalle leicht beurtheilen, ob in Bezug auf das Vorzeichen von W dieselbe Regel für die ganze Fläche gilt oder ob für verschiedene Theile verschiedene Regeln Platz greifen; so lange die Coefficienten P, Q, R endliche Werthe haben und nicht alle drei gleichzeitig verschwinden, schliesst das Gesetz der Stetigkeit einen Wechsel aus.

Benutzt man die zweite Methode, so kann man auf der krummen Fläche zwei Systeme von krummen Linien ins Auge fassen, eins, für welches p veränderlich, q constant ist, während für das andere q veränderlich und p constant ist: die gegenseitige Lage dieser Linien in Bezug auf die äussere Seite muss entscheiden, welche von beiden Lösungen zu nehmen ist. Sobald nämlich die folgenden drei Linien, 1) der vom Punkt A ausgehende Zweig einer Linie des ersten Systems, für den p wächst, 2) der ebenfalls von A ausgehende, dem zweiten System angehörige Zweig, für den q wächst, 3) die in A nach aussen errichtete Normale, ähnlich liegen, wie am Anfangspunkt die Coordinatenaxen x, y, z (z. B. wenn sowohl von jenen drei Linien als von diesen die erste nach links, die zweite nach rechts, die dritte nach oben gerichtet ist), so muss die erste Lösung genommen werden; sobald aber die gegenseitige Lage der ersten drei Linien der gegenseitigen Lage der Axen x, y, z entgegengesetzt ist, wird die zweite Lösung gelten.

[**107**] Bei der dritten Methode ist zu ermitteln, ob, wenn z einen positiven Zuwachs erhält, während x und y unverändert bleiben, der betrachtete Flächenpunkt nach der äussern oder innern Seite übergeht. Im ersten Falle gilt für die nach aussen gerichtete Normale die erste Lösung, im andern Falle die zweite.

6.

Wie durch Uebertragung der Richtung der Normale einer krummen Fläche auf die Oberfläche der Hülfskugel jedem Punkte der ersten Fläche ein bestimmter Punkt der zweiten zugeordnet ist, so wird auch jede Linie resp. jede Figur auf der ersteren durch eine entsprechende Linie oder Figur auf der Kugel dargestellt werden. Die Vergleichung zweier derart einander entsprechenden Figuren, deren eine gleichsam ein Bild der andern ist, kann aus einem doppelten Gesichtspunkte stattfinden; man kann nämlich einmal allein die Grösse ins Auge fassen, sodann aber kann man auch von allen Grössenbeziehungen abstrahiren und nur die Lage in Betracht ziehen.

Der erste Gesichtspunkt bildet die Grundlage einiger Begriffe, deren Einführung in die Lehre von den krummen Flächen von grossem Nutzen sein wird. Wir schreiben jedem bestimmt abgegrenzten Theile einer krummen Fläche eine Totalkrümmung oder Gesammtkrümmung zu, die durch den Flächeninhalt derjenigen Figur auf der Kugelfläche gemessen werden soll, welche jenem Theile entspricht. Von dieser Gesammtkrümmung ist wohl zu unterscheiden die gewissermaassen specifische Krümmung, die wir das Krümmungsmaass nennen wollen. Dieses letztere bezieht sich auf einen Punkt einer Fläche und soll den Quotienten bezeichnen, der entsteht, wenn die Gesammtkrümmung des an dem Punkte liegenden Oberflächenelements durch den Flächeninhalt des Elements selbst dividirt wird; dasselbe giebt also das Verhältniss unendlich kleiner Flächen an, die einander auf der krummen Fläche und der Hülfskugel entsprechen. Der Nutzen dieser neuen Begriffe wird, wie wir hoffen, aus den folgenden Untersuchungen noch deutlicher hervorgehen. Was die Terminologie betrifft, so haben wir unser Augenmerk vor allem darauf richten zu sollen geglaubt, dass jeder Doppelsinn ausgeschlossen werde; deswegen haben wir es auch nicht für zweckmässig gehalten, die in der Lehre von den ebenen Curven gewöhnlich benutzten (obwohl nicht allseitig als angemessen angesehenen) Ausdrücke ohne weiteres auf unsern Fall zu übertragen; denn [108] dann hätte das Krümmungsmaass einfach Krümmung, die Gesammtkrümmung aber Amplitude genannt werden müssen. Aber warum sollen wir uns in der Wahl der Worte nicht frei bewegen, wenn dieselben nur nicht inhaltleere Dinge bezeichnen und der Ausdruck zu einer irrigen Auslegung verführt?

Die Lage einer Figur auf der Hülfskugelfläche kann mit der Lage der entsprechenden Figur auf der krummen Fläche entweder übereinstimmend, oder ihr entgegengesetzt (die umgekehrte) sein. Der erste Fall findet statt, wenn zwei auf der krummen Fläche von demselben Punkt nach verschiedenen, jedoch nicht entgegengesetzten Richtungen gezogene Linien auf der Kugelfläche durch ähnlich liegende Linien dargestellt werden, d. h. wenn das Bild der rechts liegenden Linie ebenfalls rechts liegt. Der zweite Fall tritt ein, wenn das Entgegengesetzte gilt. Beide Fälle wollen wir durch das positive oder negative Vorzeichen des Krümmungsmaasses unterscheiden. Diese Unterscheidung kann offenbar nur insofern statthaben, als wir auf beiden Flächen eine bestimmte Seite auswählen, auf der wir die Figur liegend denken. Auf der Hülfskugel wollen wir stets die äussere, vom Mittelpunkt abgewandte Seite nehmen: auf der krummen Fläche kann ebenfalls die äussere Seite, oder die, die als äussere angesehen wird, gewählt werden, oder besser dieselbe Seite, auf der die Normale errichtet wird; augenscheinlich wird nämlich hinsichtlich der Uebereinstimmung der Lage der Figuren nichts geändert, wenn man auf der Fläche sowohl die Figur, als die Normale auf der entgegengesetzten Seite gezogen denkt, falls nur ihr Bild immer auf derselben Seite der Kugelfläche beschrieben wird.

Das positive oder negative Vorzeichen, das wir je nach der Lage einer unendlich kleinen Figur dem Krümmungsmaass zuschreiben, können wir auch auf die gesammte Krümmung einer endlichen Figur auf der Fläche ausdehnen. Wollen wir jedoch den Gegenstand in seiner vollen Allgemeinheit abhandeln, so sind noch einige Erörterungen nöthig, die hier nur kurz berührt werden sollen. Wenn die Figur auf der krummen Fläche so beschaffen ist, dass den einzelnen in ihr liegenden Punkten verschiedene Punkte auf der Kugelfläche entsprechen, so bedarf die Definition keiner weiteren Erläuterung. Falls aber eine derartige Bedingung nicht stattfindet, wird es nöthig sein, gewisse Theile der auf der Kugelfläche gelegenen Figur [**109**] zweimal oder mehrmals in Rechnung zu ziehen. Dadurch kann, je nachdem die Lage übereinstimmend oder entgegengesetzt ist, eine Vergrösserung oder ein gegenseitiges Aufheben entstehen. Am einfachsten verfährt man in einem solchen Falle folgendermaassen: man denke die Figur auf der krummen Fläche in solche Theile getheilt, die, jeder für sich betrachtet, der obigen Bedindung genügen, man bestimme sodann für die einzelnen Theile die Gesammtkrümmung vermittelst der Grösse der Fläche der entsprechenden Figur auf der Kugel, wobei für das Vorzeichen die Lage maassgebend ist, und man nehme endlich als Gesammtkrümmung der ganzen Figur denjenigen Werth an, welcher durch Addition der den einzelnen Theilen entsprechenden Gesammtkrümmungen entsteht. Allgemein ist daher die Gesammtkrümmung einer Figur

$$\int k\,d\sigma,$$

falls $d\sigma$ das Flächenelement, k das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte bezeichnet. Was die geometrische Darstellung dieses Integrals betrifft, so kommt es dabei hauptsächlich auf das Folgende an. Dem Umfang einer Figur auf der krummen Fläche wird (unter der in Art. 3 angegebenen Einschränkung) auf der Kugelfläche stets eine in sich zurückkehrende Linie entsprechen. Wenn dieselbe sich selbst nirgends durchschneidet, so wird durch sie die ganze Kugelfläche in zwei Theile getheilt, deren einer der Figur auf der krummen Fläche entspricht; der Flächeninhalt dieses Theiles, positiv oder negativ genommen, je nachdem derselbe hinsichtlich seines Umfangs dieselbe Lage hat wie die Figur auf der krummen Fläche oder die entgegengesetzte, wird dann die Gesammtkrümmung der zuletzt genannten Figur ausdrücken. Sobald aber jene Linie sich selbst einmal oder mehrmals schneidet, ist die Gestalt der Figur zwar eine complicirte, jedoch kann man ihr noch einen bestimmten Flächeninhalt mit demselben Rechte zuschreiben, wie einer Figur ohne Knoten; und dieser Flächeninhalt, richtig verstanden, liefert stets den rechten Werth der Gesammtkrümmung. Indessen müssen wir die weitere Erörterung dieses Gegenstandes, der die allgemeinste Auffassung von Figuren betrifft, uns für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

7.

Wir wollen nun eine Formel für das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte einer krummen Fläche ableiten. Bezeichnet $d\sigma$ den Flächeninhalt des betrachteten Oberflächenelements, so ist $Zd\sigma$ der Flächeninhalt der Projection dieses Elements auf die xy-Ebene; und ebenso ist, wenn $d\Sigma$ der Flächeninhalt des entsprechenden Elements **[110]** der Kugelfläche ist, $Zd\Sigma$ der Flächeninhalt seiner Projection auf dieselbe Ebene: das positive oder negative Vorzeichen von Z aber zeigt an, ob die Lage der Projection mit der des projicirten Elements übereinstimmt oder die entgegengesetzte ist; offenbar haben daher jene Projectionen dasselbe Grössenverhältniss und zugleich dieselbe gegenseitige Lage wie die Elemente selbst. Wir wollen jetzt ein Element der Oberfläche betrachten, das die Gestalt eines Dreiecks hat, und annehmen, dass die Projectionen der drei Eckpunkte die Coordinaten haben

$$\begin{array}{ll} x, & y, \\ x + dx, & y + dy, \\ x + \delta x, & y + \delta y. \end{array}$$

Der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks ist

$$dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x,$$

und zwar ergiebt dieser Ausdruck den doppelten Inhalt mit dem positiven oder negativen Vorzeichen, je nachdem die Seite, die vom ersten zum dritten Punkte führt, in Bezug auf die Seite, die den ersten mit dem zweiten verbindet, ebenso liegt, wie die Coordinatenaxe y zur Coordinatenaxe x oder entgegengesetzt.

Sind ferner die Coordinaten der drei Punkte, welche die Ecken der Projection des entsprechenden Elements der Kugelfläche sind, auf das Centrum der Kugel als Anfangspunkt bezogen,

$$\begin{array}{ll} X, & Y, \\ X + dX, & Y + dY, \\ X + \delta X, & Y + \delta Y, \end{array}$$

so wird der doppelte Flächeninhalt dieser Projection

$$dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X,$$

und von dem Vorzeichen dieses Ausdrucks gilt dasselbe wie oben. Daher ist das Krümmungsmaass an der betrachteten Stelle der krummen Fläche

$$k = \frac{dX \,.\, \delta Y - dY \,.\, \delta X}{dx \,.\, \delta y - dy \,.\, \delta x}\,.$$

Nehmen wir nunmehr an, die Fläche sei in der [**111**] dritten der in Art. 4 betrachteten Formen gegeben, so sind X und Y Functionen von x, y, und es ist daher

$$dX = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot dy,$$

$$\delta X = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot \delta x + \frac{\partial X}{\partial y}\cdot \delta y,$$

$$dY = \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot dx + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot dy,$$

$$\delta Y = \frac{\partial Y}{\partial x}\cdot \delta x + \frac{\partial Y}{\partial y}\cdot \delta y.$$

Durch Substitution dieser Werthe geht der obige Ausdruck in folgenden über:

$$k = \frac{\partial X}{\partial x}\cdot\frac{\partial Y}{\partial y} - \frac{\partial X}{\partial y}\cdot\frac{\partial Y}{\partial x}.$$

Setzen wir, wie oben,

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t,\quad \frac{\partial z}{\partial y} = u,$$

ausserdem

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = T,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial x\,\partial y} = U,\quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = V$$

oder

$$dt = Tdx + Udy,$$
$$du = Udx + Vdy,$$

so geben die obigen Formeln

$$X = -tZ,\quad Y = -uZ,\quad (1+t^2+u^2)Z^2 = 1,$$

und daher

$$dX = -Zdt - tdZ,$$
$$dY = -Zdu - udZ,$$
$$(1+t^2+u^2)dZ + Z(t\,dt + u\,du) = 0;$$

oder

$$dZ = -Z^3(t\,dt + u\,du),$$
$$dX = -Z^3(1+u^2)dt + Z^3 tu\,du,$$
$$dY = +Z^3 tu\,dt - Z^3(1+t^2)du,$$

[**112**] und schliesslich

$$\frac{\partial X}{\partial x} = Z^3\left[-(1+u^2)T + tuU\right],$$
$$\frac{\partial X}{\partial y} = Z^3\left[-(1+u^2)U + tuV\right],$$
$$\frac{\partial Y}{\partial x} = Z^3\left[tuT - (1+t^2)U\right],$$
$$\frac{\partial Y}{\partial y} = Z^3\left[tuU - (1+t^2)V\right].$$

Substituirt man diese Werthe, so geht aus dem vorher aufgestellten Ausdrucke von k der folgende hervor:

$$k = Z^6(TV - U^2)(1+t^2+u^2) = Z^4(TV - U^2)$$
$$= \frac{TV - U^2}{(1+t^2+u^2)^2}.$$

8.

Durch geeignete Wahl des Anfangspunktes und der Coordinatenaxen kann man es leicht bewerkstelligen, dass für einen bestimmten Punkt A die Werthe der Grössen t, u, U verschwinden. Die beiden ersten Bedingungen werden ja schon erfüllt, wenn die Berührungsebene des Punktes zur Coordinatenebene xy genommen wird. Legt man ausserdem den Anfangspunkt der Coordinaten in den Punkt A, so nimmt der Ausdruck für die Coordinate z offenbar die Form an:

$$z = \tfrac{1}{2}T_0x^2 + U_0xy + \tfrac{1}{2}V_0y^2 + \Omega_0,$$

wo Ω_0 von höherer als der zweiten Ordnung ist. Dreht man dann die Axen x, y um einen solchen Winkel M, dass

$$\operatorname{tang} 2M = \frac{2U_0}{T_0 - V_0}$$

ist, so sieht man leicht, dass eine Gleichung von folgender Form herauskommt:

$$z = \tfrac{1}{2}Tx^2 + \tfrac{1}{2}Vy^2 + \Omega,$$

und dadurch ist auch der dritten Bedingung genügt. Hieraus ergiebt sich Folgendes:

[113] I. Wenn die krumme Fläche durch eine zu ihr senkrechte Ebene geschnitten wird, welche durch die x-Axe geht, so entsteht eine ebene Curve, deren Krümmungsradius im Punkte

A gleich $\frac{1}{T}$ wird; dabei zeigt das positive oder negative Zeichen die Concavität oder Convexität gegen die Seite hin an, nach der die z-Coordinaten positiv sind.

II. Ebenso wird $\frac{1}{V}$ der Krümmungsradius im Punkt A für diejenige ebene Curve, die durch den Schnitt der krummen Fläche mit der durch die Axen y und z gelegten Ebene entsteht.

III. Setzt man $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, so wird

$$z = \tfrac{1}{2}(T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi)r^2 + \Omega.$$

Daraus schliesst man, dass, wenn die Fläche von einer durch A gehenden, auf ihr senkrechten Ebene geschnitten wird, die mit der Axe x den Winkel φ bildet, eine ebene Curve entsteht, deren Krümmungsradius im Punkte A

$$= \frac{1}{T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi}$$

ist.

IV. Wenn daher $T = V$ ist, so werden die Krümmungsradien in allen ebenen Normalschnitten gleich. Sind aber T und V ungleich, so ist daraus, dass $T\cos^2\varphi + V\sin^2\varphi$ für jeden Werth des Winkels φ zwischen T und V liegt, leicht zu ersehen, dass die Krümmungsradien in den in I. und II. betrachteten Hauptschnitten die extremen Werthe der Krümmung ergeben, dass nämlich der eine die grösste, der andere die kleinste Krümmung giebt, wenn T und V mit demselben Zeichen behaftet sind, dagegen der eine die grösste Convexität, der andere die grösste Concavität, wenn T und V verschiedene Vorzeichen besitzen. Diese Schlüsse enthalten fast Alles, was *Euler* zuerst über die Krümmung von Oberflächen gelehrt hat.

V. Für das Krümmungsmaass der Fläche im Punkte A aber erhält man den sehr einfachen Ausdruck $k = TV$; wir haben daher folgenden wichtigen

Lehrsatz. Das Krümmungsmaass in einem beliebigen Punkte einer Fläche ist gleich einem Bruche, dessen Zähler $= 1$, und dessen Nenner [**114**] das Product der beiden extremen Krümmungsradien in den durch Normalebenen gebildeten Schnitten ist.

Zugleich erhellt, dass das Krümmungsmaass positiv wird für concav-concave oder convex-convexe Flächen (zwischen beiden besteht kein wesentlicher Unterschied), dagegen negativ für concav-convexe. Besteht eine Fläche aus Theilen von beiden Arten, so muss an der Grenze beider das Krümmungsmaass verschwinden. Die Eigenschaften solcher Flächen, in denen das Krümmungsmaass überall verschwindet, werden weiter unten entwickelt werden.

9.

Die am Schluss des Art. 7 für das Krümmungsmaass aufgestellte allgemeine Formel ist von allen die einfachste, da sie nur fünf Elemente enthält; auf eine etwas complicirtere, die aus neun Elementen gebildet ist, werden wir geführt, wenn wir die erste Art, eine krumme Fläche auszudrücken, anwenden wollen. Wir behalten die Bezeichnungen des Art. 4 bei und setzen ausserdem

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} = P', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} = Q', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial z^2} = R',$$
$$\frac{\partial^2 W}{\partial y\, \partial z} = P'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial z} = Q'', \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x\, \partial y} = R'',$$

so dass

$$\begin{aligned} dP &= P'dx + R''dy + Q''dz, \\ dQ &= R''dx + Q'dy + P''dz, \\ dR &= Q''dx + P''dy + R'dz \end{aligned}$$

wird. Da nun $t = -\frac{P}{R}$ ist, so finden wir durch Differentiation

$$R^2 dt = -RdP + PdR$$
$$= (PQ'' - RP')dx + (PP'' - RR'')dy + (PR' - RQ'')dz$$

oder, falls dz mit Hülfe der Gleichung

$$Pdx + Qdy + Rdz = 0$$

eliminirt wird,

[115] $$\begin{aligned} R^3 dt = {} & (-R^2P' + 2PRQ'' - P^2R')dx \\ & + (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dy. \end{aligned}$$

Auf ganz ähnliche Weise erhalten wir

$$\begin{aligned} R^3 du = {} & (PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'')dx \\ & + (-R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R')dy. \end{aligned}$$

Hieraus ersehen wir, dass

$$R^3T = -R^2P' + 2PRQ'' - P^2R',$$
$$R^3U = PRP'' + QRQ'' - PQR' - R^2R'',$$
$$R^3V = -R^2Q' + 2QRP'' - Q^2R'$$

ist. Substituiren wir diese Werthe in Art. 7, so erhalten wir für das Krümmungsmaass k den folgenden symmetrischen Ausdruck:

$$\begin{aligned}&(P^2 + Q^2 + R^2)^2 \,.\, k \\ = P^2(Q'R' - P''^2) + Q^2(P'R' - Q''^2) + R^2(P'Q' - R''^2) \\ + 2QR(Q''R'' - P'P'') + 2PR(P''R'' - Q'Q'') \\ + 2PQ(P''Q'' - R'R'').\end{aligned}$$

10.

Eine noch complicirtere Formel, nämlich eine aus fünfzehn Elementen zusammengesetzte, erhalten wir, wenn wir die zweite allgemeine Methode der Darstellung einer Fläche benutzen. Es ist jedoch von grosser Wichtigkeit, auch diese Formel zu entwickeln. Wir wollen wieder die Bezeichnung des Art. 4 festhalten und ausserdem setzen

$$\frac{\partial^2 x}{\partial p^2} = \alpha, \quad \frac{\partial^2 x}{\partial p\,\partial q} = \alpha', \quad \frac{\partial^2 x}{\partial q^2} = \alpha'',$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial p^2} = \beta, \quad \frac{\partial^2 y}{\partial p\,\partial q} = \beta', \quad \frac{\partial^2 y}{\partial q^2} = \beta'',$$
$$\frac{\partial^2 z}{\partial p^2} = \gamma, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial p\,\partial q} = \gamma', \quad \frac{\partial^2 z}{\partial q^2} = \gamma''.$$

Sodann wollen wir folgende Abkürzungen einführen

$$bc' - cb' = A,$$
$$ca' - ac' = B,$$
$$ab' - ba' = C.$$

116] Zuerst beachten wir, dass

$$Adx + Bdy + Cdz = 0$$

oder

$$dz = -\frac{A}{C}\,dx - \frac{B}{C}\,dy$$

ist; insofern daher z als Function von x und y angesehen wird, wird

2*

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t = -\frac{A}{C},$$
$$\frac{\partial z}{\partial y} = u = -\frac{B}{C}.$$

Ferner schliessen wir aus den Formeln

$$dx = adp + a'dq, \quad dy = bdp + b'dq,$$

dass

$$Cdp = b'dx - a'dy,$$
$$Cdq = -bdx + ady$$

ist. Daraus erhalten wir für die vollständigen Differentiale von t und u

$$C^3dt = \left(A\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{\partial A}{\partial p}\right)(b'dx - a'dy)$$
$$+\left(C\frac{\partial A}{\partial q} - A\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx - ady),$$
$$C^3du = \left(B\frac{\partial C}{\partial p} - C\frac{B\partial}{\partial p}\right)(b'dx - a'dy)$$
$$+\left(C\frac{\partial B}{\partial q} - B\frac{\partial C}{\partial q}\right)(bdx - ady).$$

Setzen wir in diesen Formeln

$$\frac{\partial A}{\partial p} = c'\beta + b\gamma' - c\beta' - b'\gamma,$$
$$\frac{\partial A}{\partial q} = c'\beta' + b\gamma'' - c\beta'' - b'\gamma',$$
$$\frac{\partial B}{\partial p} = a'\gamma + c\alpha' - a\gamma' - c'\alpha,$$
$$\frac{\partial B}{\partial q} = a'\gamma' + c\alpha'' - a\gamma'' - c'\alpha',$$

[117]

$$\frac{\partial C}{\partial p} = b'\alpha + a\beta' - b\alpha' - a'\beta,$$
$$\frac{\partial C}{\partial q} = b'\alpha' + a\beta'' - b\alpha'' - a'\beta';$$

und erwägen, dass die Werthe der so entstehenden Differentiale dt, du den Grössen $Tdx + Udy$ resp. $Udx + Vdy$ gleich sein müssen, und zwar für beliebige Werthe der Differentiale dx, dy, so finden wir nach einigen nahe liegenden Transformationen:

$$\begin{aligned}
C^3T = {} & \alpha Ab'^2 + \beta Bb'^2 + \gamma Cb'^2 \\
& - 2\alpha' Abb' - 2\beta' Bbb' - 2\gamma' Cbb' \\
& + \alpha'' Ab^2 + \beta'' Bb^2 + \gamma'' Cb^2, \\
C^3U = {} & - \alpha Aa'b' - \beta Ba'b' - \gamma Ca'b' \\
& + \alpha' A(ab' + ba') + \beta' B(ab' + ba') + \gamma' C(ab' + ba') \\
& - \alpha'' Aab - \beta'' Bab - \gamma'' Cab, \\
C^3V = {} & \alpha Aa'^2 + \beta Ba'^2 + \gamma Ca'^2 \\
& - 2\alpha' Aaa' - 2\beta' Baa' - 2\gamma' Caa' \\
& + \alpha'' Aa^2 + \beta'' Ba^2 + \gamma'' Ca^2.
\end{aligned}$$

Wenn wir jetzt noch zur Abkürzung setzen

$$\begin{aligned}
&(1) \quad A\alpha + B\beta + C\gamma = D, \\
&(2) \quad A\alpha' + B\beta' + C\gamma' = D', \\
&(3) \quad A\alpha'' + B\beta'' + C\gamma'' = D'',
\end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned}
C^3T &= Db'^2 - 2D'bb' + D''b^2, \\
C^3U &= - Da'b' + D'(ab' + ba') - D''ab, \\
C^3V &= Da'^2 - 2D'aa' + D''a^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nach Ausführung der Rechnung

$$\begin{aligned}
C^6(TV - U^2) &= (DD'' - D'^2)(ab' - ba')^2 \\
&= (DD'' - D'^2)\, C^2,
\end{aligned}$$

und mithin wird die Formel für das Krümmungsmaass

$$k = \frac{DD'' - D'^2}{(A^2 + B^2 + C^2)^2}.$$

[118] 11.

Die eben gefundene Formel bahnt nun den Uebergang zu einer andern, die als einer der fruchtbarsten Sätze in der Lehre von den krummen Flächen anzusehen ist. Wir führen folgende Bezeichnungen ein:

$$\begin{aligned}
& a^2 + b^2 + c^2 = E, \\
& aa' + bb' + cc' = F, \\
& a'^2 + b'^2 + c'^2 = G, \\
(4) \quad & a\alpha + b\beta + c\gamma = m, \\
(5) \quad & a\alpha' + b\beta' + c\gamma' = m', \\
(6) \quad & a\alpha'' + b\beta'' + c\gamma'' = m'',
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&(7) \quad a'\alpha + b'\beta + c'\gamma = n, \\
&(8) \quad a'\alpha' + b'\beta' + c'\gamma' = n', \\
&(9) \quad a'\alpha'' + b'\beta'' + c'\gamma'' = n'';
\end{aligned}$$

$$A^2 + B^2 + C^2 = EG - F^2 = \triangle.$$

Eliminiren wir aus den Gleichungen (1), (4), (7) die Grössen β, γ, was dadurch geschieht, dass wir jene Gleichungen resp. mit $bc' - cb'$, $b'C - c'B$, $cB - bC$ multipliciren und dann addiren, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
&[A(bc' - cb') + a(b'C - c'B) + a'(cB - bC)]\,\alpha \\
&= D(bc' - cb') + m(b'C - c'B) + n(cB - bC),
\end{aligned}$$

eine Gleichung, die wir leicht in die folgende überführen können:

$$AD = \alpha\triangle + a(nF - mG) + a'(mF - nE).$$

Auf gleiche Weise ergiebt die Elimination der Grössen α, γ oder α, β aus denselben Gleichungen

$$\begin{aligned}
BD &= \beta\triangle + b(nF - mG) + b'(mF - nE), \\
CD &= \gamma\triangle + c(nF - mG) + c'(mF - nE).
\end{aligned}$$

Multipliciren wir die letzten drei Gleichungen mit α'', β'', γ'' und addiren sie, so erhalten wir

$$(10) \quad \begin{aligned} DD'' = (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'')\triangle &+ m''(nF - mG) \\ &+ n''(mF - nE). \end{aligned}$$

Wenn wir sodann die Gleichungen (2), (5), (8) auf gleiche Weise behandeln, so wird

$$\begin{aligned}
AD' &= \alpha'\triangle + a(n'F - m'G) + a'(m'F - n'E), \\
BD' &= \beta'\triangle + b(n'F - m'G) + b'(m'F - n'E), \\
CD' &= \gamma'\triangle + c(n'F - m'G) + c'(m'F - n'E),
\end{aligned}$$

[119] und die Addition dieser Gleichungen, nachdem sie mit α', β', γ' multiplicirt sind, liefert

$$D'^2 = (\alpha'^2 + \beta'^2 + \gamma'^2)\triangle + m'(n'F - m'G) + n'(m'F - n'E).$$

Eine Combination dieser Gleichung mit der Gleichung (10) führt zu dem Resultat

$$\begin{aligned}
DD'' - D'^2 &= (\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2)\triangle \\
&+ E(n'^2 - nn'') + F(nm'' - 2m'n' + mn'') + G(m'^2 - mm'').
\end{aligned}$$

Ferner erhellt, dass

$$\frac{\partial E}{\partial p} = 2m,\quad \frac{\partial E}{\partial q} = 2m',\quad \frac{\partial G}{\partial p} = 2n',\quad \frac{\partial G}{\partial q} = 2n'',$$
$$\frac{\partial F}{\partial p} = m' + n,\quad \frac{\partial F}{\partial q} = m'' + n'$$

oder

$$m = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial p},\quad m' = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{dq},\quad m'' = \frac{\partial F}{\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},$$
$$n = \frac{\partial F}{\partial p} - \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q},\quad n' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p},\quad n'' = \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial q}$$

ist. Ausserdem lässt sich leicht zeigen, dass

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' - \alpha'^2 - \beta'^2 - \gamma'^2 = \frac{\partial n}{\partial q} - \frac{\partial n'}{\partial p} = \frac{\partial m''}{\partial p} - \frac{\partial m'}{\partial q}$$
$$= -\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2 G}{\partial p^2}$$

ist. Wenn wir nun diese verschiedenen Ausdrücke in der Formel für das Krümmungsmaass, die am Schluss des vorhergehenden Artikels entwickelt ist, substituiren, so gelangen wir zu der folgenden Formel, die allein aus den Grössen E, F, G und deren Differentialquotienten erster und zweiter Ordnung zusammengesetzt ist:

$$4(EG - F^2)^2 . k$$
$$= E\left[\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} + \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2\right]$$
$$+ F\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial q} - \frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial F}{\partial q} + 4\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} - 2\frac{\partial F}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p}\right]$$
$$+ G\left[\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} - 2\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial F}{\partial q} + \left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2\right]$$

[120] $$- 2(EG - F^2)\left[\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} - 2\frac{\partial^2 F}{\partial p\,\partial q} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right].$$

12.

Da die Beziehung

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2$$

unbeschränkt gilt, so erhellt, dass

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

der allgemeine Ausdruck für das Bogenelement auf der krummen Fläche ist. Das im vorigen Artikel entwickelte Resultat zeigt daher, dass man zur Auffindung des Krümmungsmaasses der endlichen Formeln, welche die Coordinaten x, y, z als Functionen der Veränderlichen p, q darstellen, gar nicht bedarf, dass vielmehr dazu der allgemeine Ausdruck für die Grösse eines beliebigen Bogenelements ausreicht. Gehen wir nun zu einigen Anwendungen dieses äusserst wichtigen Satzes.

Wir wollen annehmen, dass unsere krumme Fläche auf eine andere Fläche, sei dieselbe gekrümmt oder eben, abgewickelt werden kann, so dass jedem Punkt der ersten Fläche, der durch die Coordinaten x, y, z bestimmt ist, ein bestimmter Punkt der zweiten entspricht, dessen Coordinaten x', y', z' seien. Offenbar können dann auch x', y', z' als Functionen der Veränderlichen p, q betrachtet werden; dadurch entsteht für das Bogenelement $\sqrt{dx'^2 + dy'^2 + dz'^2}$ ein Ausdruck der Form

$$\sqrt{E'dp^2 + 2F'dp\,dq + G'dq^2},$$

wobei E', F', G' ebenfalls Functionen von p und q bezeichnen. Aber aus dem blossen Begriff der Abwickelung einer Fläche auf eine andere geht hervor, dass Elemente, die einander auf beiden Flächen entsprechen, nothwendig gleich sind, und dass daher die Gleichungen

$$E = E',\ F = F',\ G = G'$$

identisch erfüllt sein müssen. Die Formel des vorhergehenden Artikels führt daher von selbst zu dem hervorragend wichtigen

Lehrsatz. Wenn eine krumme Fläche auf irgend eine andere Fläche abgewickelt wird, so bleibt dabei das Krümmungsmaass in den einzelnen Punkten ungeändert.

[121] Offenbar wird auch jeder endliche Theil der krummen Fläche nach der Abwickelung auf eine andere Fläche dieselbe Gesammtkrümmung behalten. Einen besonderen Fall, auf den die Geometer bisher ihre Untersuchungen beschränkt haben, bilden die auf eine Ebene abwickelbaren Flächen. Unsere Theorie ergiebt von selbst, dass das Krümmungsmaass derartiger Flächen in jedem Punkte $= 0$ wird, weshalb für dieselben, wenn sie nach der dritten Methode analytisch ausgedrückt werden, überall

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\cdot\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}-\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\right)^2=0$$

wird, ein Kriterium, das zwar längst bekannt ist, meistentheils aber, wenigstens nach unserer Ansicht, nicht mit der erforderlichen Strenge bewiesen wird.

13.

Der in vorigem Artikel abgeleitete Satz führt dahin, die krummen Flächen aus einem neuen Gesichtspunkte zu betrachten, und diese neue Betrachtungsweise verdient von Seiten der Geometer eine sorgfältige Ausbildung. Falls man nämlich die Flächen nicht als Grenzen von Körpern, sondern als Körper, deren eine Dimension verschwindend klein ist, und zugleich als biegsam, aber nicht als dehnbar betrachtet, hängen die Eigenschaften einer Fläche theils von der Form ab, welche dieselbe gerade angenommen hat, theils aber sind sie absolute und bleiben ungeändert, in welche Form jene auch gebogen wird. Zu den letzteren Eigenschaften, deren Untersuchung der Geometrie ein neues und fruchtbares Feld eröffnet, gehört das Krümmungsmaass und die Gesammtkrümmung in dem Sinne, wie diese Ausdrücke von uns aufgefasst sind; ferner gehört hierher die Lehre von den kürzesten Linien und einiges Andere, dessen Behandlung wir uns für später vorbehalten. Bei dieser Auffassung wird eine ebene Fläche und eine auf die Ebene abwickelbare Fläche, wie z. B. eine Cylinderfläche, Kegelfläche u. s. w., als wesentlich identisch angesehen. Der eigentliche Ausgangspunkt für den allgemeinen Ausdruck einer Fläche bei solcher Auffassung liegt in der Formel

$$\sqrt{Edp^2+2Fdp\,dq+Gdq^2},$$

welche den Zusammenhang [122] eines Bogenelements mit zwei Hülfsvariabeln darstellt. Aber bevor wir diesen Gegenstand weiter verfolgen, müssen wir die Principien der Theorie der kürzesten Linien auf einer gegebenen Fläche vorausschicken.

14.

Eine Raumcurve wird im allgemeinen dadurch gegeben, dass die den einzelnen Punkten zugehörigen Coordinaten als Functionen einer einzigen Variabeln dargestellt werden, die wir mit

w bezeichnen wollen. Die Länge einer solchen Linie von einem willkürlichen Anfangspunkte bis zu dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind, wird ausgedrückt durch das Integral

$$\int dw \, . \sqrt{\left(\frac{dx}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dw}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dw}\right)^2}.$$

Wenn wir nun annehmen, dass die Lage der Curve eine unendlich kleine Veränderung erfahre, derart, dass die Coordinaten der einzelnen Punkte um δx, δy, δz geändert werden, so ergiebt sich die Aenderung der ganzen Länge

$$= \int \frac{dx \, . \, d\delta x + dy \, . \, d\delta y + dz \, . \, d\delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}},$$

und diesen Ausdruck transformiren wir in den folgenden:

$$\frac{dx \, . \, \delta x + dy \, . \, \delta y + dz \, . \, \delta z}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}$$

$$- \int \left[\delta x \, . \, d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right) + \delta y \, . \, d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right) + \delta z \, . \, d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right)\right].$$

In dem Falle, wo die Linie eine kürzeste zwischen ihren Endpunkten ist, muss bekanntlich der Ausdruck, der hier unter dem Integralzeichen steht, verschwinden. Falls die Linie auf einer gegebenen Fläche liegen soll, welche durch die Gleichung

$$P dx + Q dy + R dz = 0$$

ausgedrückt wird, müssen auch die Variationen δx, δy, δz der Gleichung

$$P \delta x + Q \delta y + R \delta z = 0$$

genügen, woraus man nach bekannten Regeln leicht schliesst, dass die Differentiale

$$d\left(\frac{dx}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right), \quad d\left(\frac{dy}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right),$$

$$d\left(\frac{dz}{\sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}}\right)$$

[123] resp. den Grössen P, Q, R proportional sein müssen. Es

sei ferner dr ein Element der Curve, λ der Punkt auf der Kugelfläche, welcher die Richtung dieses Elements darstellt, L der Punkt der Kugelfläche, welcher die Richtung der Normale der krummen Fläche darstellt; endlich seien ξ, η, ζ die Coordinaten des Punktes λ und X, Y, Z die Coordinaten des Punktes L, sämmtlich auf den Mittelpunkt der Kugel bezogen. Dann ist

$$dx = \xi \,.\, dr, \quad dy = \eta \,.\, dr, \quad dz = \zeta \,.\, dr,$$

woraus folgt, dass die obigen Differentiale $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ werden. Und da die Grössen P, Q, R den X, Y, Z proportional sind, so besteht die Eigenthümlichkeit einer kürzesten Linie darin, dass sie den Gleichungen

$$\frac{d\xi}{X} = \frac{d\eta}{Y} = \frac{d\zeta}{Z}$$

genügt. Uebrigens übersieht man leicht, dass

$$\sqrt{d\xi^2 + d\eta^2 + d\zeta^2}$$

gleich wird dem kleinen Bogen auf der Kugelfläche, welcher den Winkel zwischen den Richtungen der Tangenten am Anfang und am Ende des Elements dr misst, und daher $= \dfrac{dr}{\varrho}$, wenn ϱ den Krümmungsradius in dem betreffenden Punkte der kürzesten Linie bezeichnet. So wird also

$$\varrho \,.\, d\xi = X \,.\, dr, \quad \varrho \,.\, d\eta = Y \,.\, dr, \quad \varrho \,.\, d\zeta = Z \,.\, dr.$$

15.

Wir wollen annehmen, dass auf der krummen Fläche von einem gegebenen Punkte A unzählig viel kürzeste Linien ausgehen; sie unterscheiden sich von einander durch den Winkel, welchen das erste Element jeder einzelnen mit dem ersten Element einer von ihnen, die wir als erste nehmen, bildet: es sei φ jener Winkel, oder allgemeiner eine Function jenes Winkels, ferner r die Länge einer solchen kürzesten Linie vom Punkte A bis zu dem Punkte, dessen Coordinaten x, y, z sind. Da jetzt bestimmten Werthen der Variabeln r, φ bestimmte Punkte der Fläche zugehören, so können wir die Coordinaten x, y, z als Functionen von r, φ ansehen. Die Bezeichnungen λ, L, ξ, η, ζ, X, Y, Z wollen wir in derselben Bedeutung beibehalten wie

[124] im vorigen Artikel, nur sollen sich dieselben unbeschränkt auf einen unbestimmten Punkt irgend einer der kürzesten Linien beziehen.

Alle kürzesten Linien, die gleiche Länge r besitzen, werden bis zu einer andern Linie reichen, deren von einem willkürlichen Anfangspunkte ab gerechnete Länge wir mit v bezeichnen. Es kann dann v als Function von r und φ angesehen werden, und wenn wir mit λ' den Punkt auf der Kugelfläche bezeichnen, der der Richtung des Elements dv entspricht, ebenso mit ξ', η', ζ' die Coordinaten dieses Punktes, bezogen auf den Mittelpunkt der Kugel, so haben wir

$$\frac{\partial x}{\partial \varphi} = \xi' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial y}{\partial \varphi} = \eta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}, \quad \frac{\partial z}{\partial \varphi} = \zeta' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Hieraus, in Verbindung mit

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \xi, \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \eta, \quad \frac{\partial z}{\partial r} = \zeta,$$

folgt

$$\frac{\partial x}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial y}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial z}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} = (\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta')\frac{\partial v}{\partial \varphi}$$
$$= \cos \lambda\lambda' \cdot \frac{\partial v}{\partial \varphi}.$$

Das erste Glied dieser Gleichung, das gleichfalls eine Function von r und φ ist, bezeichnen wir mit S; die Differentiation desselben nach r ergiebt

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial^2 x}{\partial r^2}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 y}{\partial r^2}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial^2 z}{\partial r^2}\frac{\partial z}{\partial \varphi}$$
$$+ \frac{1}{2}\frac{\partial\left[\left(\frac{\partial x}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial y}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial r}\right)^2\right]}{\partial \varphi}$$
$$= \frac{\partial \xi}{\partial r}\frac{\partial x}{\partial \varphi} + \frac{\partial \eta}{\partial r}\frac{\partial y}{\partial \varphi} + \frac{\partial \zeta}{\partial r}\frac{\partial z}{\partial \varphi} + \frac{1}{2}\frac{\partial(\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2)}{\partial \varphi}$$

Es ist aber

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$$

und daher die Ableitung dieses Ausdrucks $= 0$; und aus dem vorigen Artikel wissen wir, dass, wenn auch hier ϱ den Krümmungsradius der Linie r bezeichnet,

[125] $$\frac{\partial\xi}{\partial r} = \frac{X}{\varrho}, \quad \frac{\partial\eta}{\partial r} = \frac{Y}{\varrho}, \quad \frac{\partial\zeta}{\partial r} = \frac{Z}{\varrho}$$

ist. Somit erhalten wir

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{1}{\varrho}(X\xi' + Y\eta' + Z\zeta')\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi} = \frac{1}{\varrho}\cos L\lambda'\cdot\frac{\partial v}{\partial\varphi} = 0,$$

da, wie leicht ersichtlich, λ' auf dem grössten Kreise liegt, dessen Pol L ist. Daraus schliessen wir, dass S unabhängig von r und daher allein eine Function von φ ist. Aber für $r = 0$ wird offenbar $v = 0$ und ferner auch $\frac{\partial v}{\partial\varphi} = 0$, desgleichen $S = 0$ unabhängig von φ. Nothwendig muss daher allgemein $S = 0$ sein und daher $\cos\lambda\lambda' = 0$, d. h. $\lambda\lambda' = 90^\circ$. Das Resultat fassen wir zusammen in folgenden

Lehrsatz. Werden auf einer krummen Fläche von demselben Anfangspunkte aus kürzeste Linien von gleicher Länge gezogen, so steht die ihre Endpunkte verbindende Linie auf ihnen allen senkrecht.

Wir haben geglaubt, dass es der Mühe werth sei, diesen Satz aus der Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie abzuleiten: übrigens kann man die Richtigkeit desselben auch ohne Rechnung durch folgende Ueberlegung erkennen. Es seien AB, AB' zwei kürzeste Linien von derselben Länge, die einen unendlich kleinen Winkel bei A einschliessen. Angenommen nun, es wäre einer der beiden Winkel, den das Element BB' mit den Linien BA, BA' bildet, um eine endliche Grösse von einem rechten Winkel unterschieden, dann müsste nach dem Gesetze der Stetigkeit einer jener beiden Winkel grösser, der andere kleiner sein als ein Rechter. Es werde angenommen, dass der Winkel bei $B = 90^\circ - \omega$ sei; bestimmt man dann auf der Linie BA denjenigen Punkt C, für den

$$BC = \frac{BB'}{\sin\omega}:$$

so wäre, da das unendlich kleine Dreieck $BB'C$ als ein ebenes behandelt werden kann,

$$CB' = BC.\cos\omega$$

und daher

$$AC + CB' = AC + BC . \cos\omega = AB - BC(1 - \cos\omega$$
$$= AB' - BC(1 - \cos\omega),$$

d. h. der Weg vom Punkte A nach B' über C wäre kürzer als die kürzeste Linie, was widersinnig ist.

16.

[**126**] Mit dem Satze des vorigen Artikels verbinden wir einen andern, den wir folgendermaassen aussprechen. Wenn man auf einer krummen Fläche eine beliebige Linie gezogen denkt, von deren einzelnen Punkten unter rechten Winkeln und nach derselben Seite hin unzählige kürzeste Linien von gleicher Länge ausgehen, so schneidet die Curve, welche die andern Endpunkte derselben verbindet, jene sämmtlich unter rechten Winkeln. Zum Beweise braucht man in der obigen Entwickelung nichts zu ändern, als dass φ die Länge der gegebenen Curve, von einem willkürlichen Punkte an gerechnet, bezeichnen soll, oder auch eine Function dieser Länge. Dann werden alle Schlüsse auch jetzt noch Gültigkeit haben, nur mit dem Unterschied, dass das Bestehen der Gleichung $S = 0$ für $r = 0$ jetzt schon aus der Voraussetzung sich ergiebt. Uebrigens ist dieser zweite Satz allgemeiner, als der vorhergehende, der sogar als in ihm enthalten aufgefasst werden kann, wenn man nur als gegebene Linie einen unendlich kleinen um A beschriebenen Kreis nimmt. Endlich bemerken wir, dass auch hier geometrische Ueberlegungen an die Stelle der Rechnung treten können; doch wollen wir uns bei denselben, da sie ziemlich nahe liegen, nicht aufhalten.

17.

Wir kehren zu der Formel

$$\sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2},$$

welche ohne Beschränkung die Grösse eines Bogenelements auf der krummen Fläche ausdrückt, zurück, und prüfen vor allem die geometrische Bedeutung der Coefficienten E, F, G. Schon in Art. 5 haben wir darauf hingewiesen, dass man auf der krummen Fläche zwei Systeme von Linien gezogen denken kann, eines, für dessen einzelne Linien allein p veränderlich, q constant ist, während auf den Linien des andern allein q veränderlich, p dagegen constant ist. Ein beliebiger Punkt der Fläche kann als Schnittpunkt einer Linie des ersten Systems mit einer des zweiten angesehen werden; und dann ist das Bogenelement der ersten von dem betreffenden Punkte ausgehenden Linie, das der Aenderung dp entspricht, $= \sqrt{E}\,.\,dp$; ebenso ist das Element der zweiten Linie, das zur Aenderung dq gehört, $= \sqrt{G}\,.\,dq$. Bezeichnet man endlich mit ω den Winkel zwischen diesen Elementen, so erkennt man leicht, dass

[**127**]
$$\cos\omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}$$

wird. Ferner ist der Inhalt des parallelogrammförmigen Flächenelements, das von zwei Linien des ersten Systems, zu denen die Werthe q und $q + dq$ gehören, und von zwei Linien des zweiten Systems, zu denen die Werthe p und $p + dp$ gehören, begrenzt wird,

$$= \sqrt{EG - F^2}\,.\,dp\,.\,dq.$$

Eine beliebige Linie auf der Fläche, die zu keinem jener beiden Systeme gehört, entsteht, wenn man p und q als Functionen einer neuen Veränderlichen, oder eine von beiden als Function der andern auffasst. Es sei s die Länge einer solchen Curve, von einem beliebigen Anfangspunkte an gerechnet und beliebig nach einer oder der andern Seite als positiv betrachtet. Es bezeichne θ den Winkel, welchen das Element

$$ds = \sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

mit der durch den Anfangspunkt des Elements gelegten Linie des ersten Systems bildet, und zwar soll, damit kein Doppelsinn möglich ist, dieser Winkel stets als von der Seite jener Linie, auf der die Werthe von p wachsen, anfangend und nach der Seite hin als positiv angenommen werden, nach der die Werthe von q wachsen. Nach diesen Festsetzungen übersieht man leicht, dass

$$\cos\theta\,.\,ds = \sqrt{E}\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\cos\omega\,.\,dq = \frac{Edp + Fdq}{\sqrt{E}},$$

$$\sin\theta\,.\,ds = \sqrt{G}\,.\sin\omega\,.\,dq = \frac{\sqrt{EG - F^2}\,.\,dq}{\sqrt{E}}$$

ist.

18.

Es soll nun die Bedingung dafür gesucht werden, dass diese Linie eine kürzeste ist. Da die Länge von s durch das Integral

$$s = \int \sqrt{Edp^2 + 2Fdp\,dq + Gdq^2}$$

ausgedrückt wird, so erfordert die Bedingung des Minimums, dass die durch eine unendlich kleine Aenderung in der Lage der Linie entstehende Variation $= 0$ werde. Die zum Ziele führende Rechnung wird in diesem Falle am zweckmässigsten durchgeführt, wenn p als Function von q betrachtet wird. Somit ist, wenn die Variation durch die Charakteristik δ bezeichnet wird, [**128**]

$$\delta s = \int \frac{\left(\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} dq^2\right)\delta p + (2Edp + 2Fdq)\,d\delta p}{2ds}$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{ds}\,\delta p$$

$$+ \int \delta p \left\{ \frac{\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} \partial q^2}{2ds} - d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right) \right\},$$

und es muss bekanntlich das, was hier unter dem Integralzeichen steht, unabhängig von δp verschwinden. Es wird daher

$$\frac{\partial E}{\partial p} dp^2 + 2\frac{\partial F}{\partial p} dp\,dq + \frac{\partial G}{\partial p} dq^2 = 2ds\,.\,d\left(\frac{Edp + Fdq}{ds}\right)$$

$$= 2ds\,.\,d(\sqrt{E}\,.\cos\theta) = \frac{ds\,.\,dE\,.\cos\theta}{\sqrt{E}} - 2ds\,.\,d\theta\,.\sqrt{E}\,.\sin\theta$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{E}\,.\,dE - 2\sqrt{EG - F^2}\,.\,dq\,.\,d\theta$$

$$= \frac{Edp + Fdq}{E}\left(\frac{\partial E}{\partial p} dp + \frac{\partial E}{\partial q} dq\right) - 2\sqrt{EG - F^2}\,.\,dq\,.\,d\theta.$$

Hieraus ergiebt sich folgende Bedingungsgleichung für eine kürzeste Linie:

$$\sqrt{EG - F^2}\,.\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial p} dp + \frac{1}{2}\frac{F}{E}\frac{\partial E}{\partial q} dq + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q} dp$$

$$- \frac{\partial F}{\partial p} dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p} dq;$$

dieselbe kann man auch so schreiben:

$$\sqrt{EG-F^2}\,.\,d\theta = \frac{1}{2}\frac{F}{E}dE + \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{\partial F}{\partial p}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

Uebrigens könnte man mit Hülfe der Gleichung

$$\operatorname{cotg}\theta = \frac{E}{\sqrt{EG-F^2}}\cdot\frac{dp}{dq} + \frac{F}{\sqrt{EG-F^2}}$$

[**129**] aus jener Gleichung den Winkel θ eliminiren und so eine Differentialgleichung zwischen p und q ableiten; diese würde jedoch complicirter und bei den Anwendungen von geringerem Nutzen sein, als die vorstehende.

19.

Die allgemeinen Formeln für das Krümmungsmaass und für die Richtungsänderung einer kürzesten Linie, die in den Artikeln 11, 18 abgeleitet sind, werden viel einfacher, wenn die Grössen p, q so gewählt sind, dass die Linien des ersten Systems die des zweiten überall senkrecht schneiden, d. h. dass allgemein $\omega = 90^\circ$ oder $F = 0$ ist. Dann ergiebt sich nämlich für das Krümmungsmaass

$$4E^2G^2k = E\frac{\partial E}{\partial q}\frac{\partial G}{\partial q} + E\left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 + G\frac{\partial E}{\partial p}\frac{\partial G}{\partial p} + G\left(\frac{\partial E}{\partial q}\right)^2$$
$$- 2EG\left(\frac{\partial^2 E}{\partial q^2} + \frac{\partial^2 G}{\partial p^2}\right),$$

und für die Aenderung des Winkels θ

$$\sqrt{EG}\cdot d\theta = \frac{1}{2}\frac{\partial E}{\partial q}dp - \frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}dq.$$

Unter den verschiedenen Fällen, in denen die obige Orthogonalitätsbedingung erfüllt ist, nimmt den ersten Platz der ein, wo alle Linien des einen der beiden Systeme, z. B. des ersten, kürzeste Linien sind. Hier wird für einen constanten Werth von q der Winkel $\theta = 0$, die eben aufgestellte Gleichung für die Aenderung des Winkels θ lehrt daher, dass $\frac{\partial E}{\partial q} = 0$ oder der Coefficient E von q unabhängig sein muss, d. h. E muss entweder constant oder eine Function von p allein sein. Am einfachsten ist es, für p die Länge einer Linie des ersten Systems zu wählen, und dieselbe, falls alle Linien des ersten Systems in einem Punkte zusammenlaufen, von diesem Punkte ab zu rechnen, oder, wenn ein gemeinsamer Schnittpunkt nicht existirt, von irgend einer Linie des zweiten Systems ab. Aus diesen Festsetzungen erhellt, dass p und q jetzt dasselbe bezeichnen, was in den Artikeln 15, 16 durch r und φ ausgedrückt war, und [**130**] dass $E = 1$ wird. Damit gehen die beiden vorhergehenden Formeln in folgende über:

$$4G^2k = \left(\frac{\partial G}{\partial p}\right)^2 - 2G\frac{\partial^2 G}{\partial p^2},$$

$$\sqrt{G}\,.\,d\theta = -\frac{1}{2}\frac{\partial G}{\partial p}\,dq\,,$$

oder, wenn man $\sqrt{G} = m$ setzt,

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2},\quad d\theta = -\frac{\partial m}{\partial p}\,dq.$$

Allgemein zu reden, wird m eine Function von p und q und mdq der Ausdruck für das Bogenelement einer Linie des zweiten Systems. In dem besonderen Falle aber, wo alle Linien p von demselben Punkte ausgehen, muss offenbar für $p = 0$ auch $m = 0$ sein; wenn man ferner in diesem Falle für q den Winkel selbst wählt, den das erste Element irgend einer Linie des ersten Systems mit dem ersten Element einer andern, beliebig gewählten Linie bildet, so wird für einen unendlich kleinen Werth von p das Element einer Linie des zweiten Systems (die dann als ein mit dem Radius p beschriebener Kreis angesehen werden kann) gleich pdq, und daher wird für einen unendlich kleinen Werth von p auch $m = p$; mithin wird für $p = 0$ gleichzeitig $m = 0$ und $\frac{\partial m}{\partial p} = 1$.

20.

Wir wollen vorläufig noch dieselbe Annahme beibehalten, dass nämlich p die Länge einer kürzesten Linie bezeichnet, die von einem bestimmten Punkte A nach einem beliebigen Punkte der Fläche gezogen ist, und q den Winkel, den das erste Element dieser Linie mit dem ersten irgend einer andern von A ausgehenden kürzesten Linie bildet. Es sei B ein bestimmter Punkt auf der Linie, für welche $q = 0$ ist, und C ein anderer bestimmter Punkt der Fläche, für welchen der Werth von q einfach durch A bezeichnet werden soll. Die Punkte B und C mögen durch eine kürzeste Linie verbunden sein; irgend ein Stück derselben, von B an gerechnet, soll wie in Art. 18 mit s bezeichnet werden, desgleichen, genau ebenso wie dort, mit θ der Winkel, [**131**] den irgend ein Element ds mit dp bildet: endlich mit θ^0 und θ' die Werthe des Winkels θ in den Punkten B und C. Man hat dann auf der krummen Fläche ein von kürzesten Linien begrenztes Dreieck, und von den Winkeln bei B und C, die einfach mit diesen Buchstaben bezeichnet werden sollen, wird der erste die Ergänzung des Winkels θ^0 zu 180^0, während der zweite θ' selber ist. Da indessen bei unsern Entwickelungen, wie üblich, alle Winkel nicht in Graden, sondern durch blosse Zahlen ausgedrückt werden, so dass der Winkel $57^0\,17'\,45''$, zu welchem ein dem Radius gleicher Bogen gehört, als Einheit genommen wird, so muss, falls 2π den Kreisumfang bezeichnet,

$$\theta^0 = \pi - B, \quad \theta' = C$$

gesetzt werden. Es soll nun die Gesammtkrümmung dieses Dreiecks bestimmt werden; dieselbe ist

$$= \int k\, d\sigma,$$

falls $d\sigma$ ein Flächenelement des Dreiecks ist. Da nun dies Element durch $m\,dp\,dq$ ausgedrückt wird, so muss man das Integral

$$\iint k m\, dp\, dq,$$

über die ganze Dreiecksfläche ausgedehnt, ermitteln. Wird zuerst nach p integrirt, so ergiebt sich, da

$$k = -\frac{1}{m}\frac{\partial^2 m}{\partial p^2}$$

ist,

$$dq\left(\text{Const.} - \frac{\partial m}{\partial p}\right)$$

als Gesammtkrümmung der Fläche, die zwischen den Linien des ersten Systems liegt, denen die Werthe q und $q + dq$ zugehören: da diese Krümmung für $p = 0$ verschwinden muss, so muss die Integrationsconstante gleich dem Werthe von $\frac{\partial m}{\partial p}$ für $p = 0$, d. h. gleich 1 sein. Das vorige Resultat ist daher

3*

$$dq\left(1-\frac{\partial m}{\partial p}\right),$$

wo man für $\frac{\partial m}{\partial p}$ den Werth nehmen muss, der zu der auf der Linie BC gelegenen Grenze der in Rede stehenden Fläche gehört. Auf dieser Linie aber wird nach dem vorhergehenden Artikel

$$\frac{\partial m}{\partial p}\cdot dq = -\,d\theta,$$

wodurch der fragliche Ausdruck sich in $dq + d\theta$ umwandelt. Da noch eine zweite von $q = 0$ bis $q = A$ zu erstreckende Integration hinzukommt, so ergiebt sich die Gesammtkrümmung des Dreiecks

$$= A + \theta' - \theta^0 = A + B + C - \pi.$$

[**132**] Die Gesammtkrümmung ist gleich dem Flächeninhalte des Theiles der Kugelfläche, welcher dem Dreieck entspricht, mit dem positiven oder negativen Zeichen genommen, je nachdem die Fläche, auf der das Dreieck liegt, concav-concav oder concav-convex ist. Als Flächeneinheit ist dabei das Quadrat zu nehmen, dessen Seite $= 1$ (gleich dem Kugelradius) ist, wonach die ganze Kugelfläche $= 4\pi$ wird. Es verhält sich daher der Theil der Kugelfläche, welcher dem Dreieck entspricht, zur Fläche der ganzen Kugel wie $\pm\,(A + B + C - \pi)$ zu 4π. Dieser Satz, der zweifellos zu den elegantesten in der Flächentheorie gehört, kann auch folgendermaassen ausgesprochen werden:

Der Ueberschuss der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer concav-concaven Fläche gebildeten Dreiecks über 180°, oder der Fehlbetrag der Winkelsumme eines von kürzesten Linien auf einer concav-convexen Fläche gebildeten Dreiecks an 180° wird gemessen durch den Flächeninhalt desjenigen Theils einer Kugelfläche, der jenem Dreieck bei Abbildung durch gleichgerichtete Normalen entspricht, falls die ganze Kugelfläche = 720° gesetzt wird.

Allgemeiner ist in jedem Polygon von n Seiten, deren jede eine kürzeste Linie bildet, der Ueberschuss der Winkelsumme über $(2n - 4)$ Rechte oder der Fehlbetrag an $(2n - 4)$ Rechten, je nach der Art der Flächenkrümmung, gleich dem Flächeninhalt des entsprechenden Polygons auf der Kugelfläche, falls die ganze Oberfläche der Kugel $= 720^\circ$ gesetzt wird. Es ergiebt sich dies unmittelbar aus dem vorhergehenden Satze durch Zerlegung des Polygons in Dreiecke.

21.

Es sollen jetzt wiederum die Zeichen p, q, E, F, G, ω in dem allgemeinen Sinne gebraucht werden, in dem sie oben angewandt waren; es werde ferner angenommen, dass die betrachtete Fläche noch auf eine andere Weise durch zwei Variable p', q' bestimmt werden kann, wobei das Bogenelement durch

$$\sqrt{E'dp'^2 + 2F'dp'dq' + G'dq'^2}$$

ausgedrückt werde. [**133**] Dann gehören zu jedem Punkte der Fläche, welcher durch bestimmte Werthe der Variabeln p, q gegeben ist, auch bestimmte Werthe von p', q', weshalb diese letzteren Functionen von p und q sind. Ihre Differentiation möge ergeben

$$dp' = \alpha\, dp + \beta\, dq,$$
$$dq' = \gamma\, dp + \delta\, dq.$$

Es soll die geometrische Bedeutung der Coefficienten α, β, γ, δ gesucht werden. Man muss dazu vier Systeme von Linien auf der krummen Fläche ins Auge fassen, für welche resp. q, p, q', p' constant sind. Denkt man durch einen bestimmten Punkt, welchem die Werthe p, q, p', q' der Variabeln zugehören, die vier Linien gezogen, welche je einem jener Systeme angehören, so werden die den positiven Aenderungen dp, dq, dp', dq' entsprechenden Elemente derselben

$$\sqrt{E}\,.dp, \quad \sqrt{G}\,.dq, \quad \sqrt{E'}\,.dp', \quad \sqrt{G'}\,.dq'.$$

Die Winkel, welche die Richtungen dieser Elemente mit einer willkürlich gewählten festen Richtung bilden, sollen mit M, N, M', N' bezeichnet werden, wobei die Winkel nach der Seite hin als wachsend angenommen werden, auf welcher das zweite Element von dem ersten aus liegt, so dass $\sin(N - M)$ eine positive Grösse wird: es werde ausserdem (was ohne weiteres freisteht) angenommen, dass das vierte Element in Bezug auf das dritte die gleiche Lage hat, so dass auch $\sin(N' - M')$ positiv ist. Wird nach diesen Festsetzungen ein andrer Punkt ins Auge gefasst, der von dem ersten eine unendlich kleine Entfernung hat, und dem die Werthe $p + dp$, $q + dq$, $p' + dp'$, $q' + dq'$ der Variabeln zugehören, so sieht man ohne Mühe, dass allgemein, d. h. unabhängig von den Werthen der Variationen dp, dq, dp', dq',

$$\begin{aligned}&\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin M + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin N\\ = &\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'\end{aligned}$$

ist; beide Ausdrücke sind ja nichts anderes, als der Abstand des neuen Punktes von der Linie, an der die obigen Winkel sämmtlich ihren Anfang nehmen. Nach einer schon früher eingeführten Bezeichnung ist aber

$$N - M = \omega,$$

und analog werde

$$N' - M' = \omega',$$

ausserdem

$$N - M' = \psi$$

gesetzt. Dann kann die eben gefundene Gleichung folgendermaassen ausgedrückt werden: [134]

$$\begin{aligned}&\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(M' - \omega + \psi) + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(M' + \psi)\\ = &\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin M' + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin(M' + \omega')\end{aligned}$$

oder auch

$$\begin{aligned}&\sqrt{E}\,.\,dp\,.\,\sin(N' - \omega - \omega' + \psi) + \sqrt{G}\,.\,dq\,.\,\sin(N' - \omega' + \psi)\\ = &\sqrt{E'}\,.\,dp'\,.\,\sin(N' - \omega') + \sqrt{G'}\,.\,dq'\,.\,\sin N'.\end{aligned}$$

Da diese Gleichung offenbar unabhängig von der Anfangsrichtung stattfinden muss, so kann man letztere willkürlich annehmen. Setzt man daher in der zweiten Form $N' = 0$ oder in der ersten $M' = 0$, so erhält man folgende Gleichungen:

$$\begin{aligned}&\sqrt{E'}\,.\,\sin\omega'\,.\,dp'\\ = &\sqrt{E}\,.\,\sin(\omega + \omega' - \psi)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\,\sin(\omega' - \psi)\,.\,dq,\\ &\sqrt{G'}\,.\,\sin\omega'\,.\,dq' = \sqrt{E}\,.\,\sin(\psi - \omega)\,.\,dp + \sqrt{G}\,.\,\sin\psi\,.\,dq;\end{aligned}$$

und diese Gleichungen ergeben, da sie mit den Gleichungen

$$\begin{aligned}dp' &= \alpha\,dp + \beta\,dq,\\ dq' &= \gamma\,dp + \delta\,dq\end{aligned}$$

identisch sein müssen, die zu bestimmenden Coefficienten α, β, γ, δ. Dieselben werden

$$\alpha = \sqrt{\frac{E}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega + \omega' - \psi)}{\sin \omega'}, \quad \beta = \sqrt{\frac{G}{E'}} \cdot \frac{\sin(\omega' - \psi)}{\sin \omega'},$$

$$\gamma = \sqrt{\frac{E}{G'}} \cdot \frac{\sin(\psi - \omega)}{\sin \omega'}, \quad \delta = \sqrt{\frac{G}{G'}} \cdot \frac{\sin \psi}{\sin \omega'}.$$

Mit diesen muss man die Gleichungen

$$\cos \omega = \frac{F}{\sqrt{EG}}, \quad \cos \omega' = \frac{F}{\sqrt{E'G'}},$$

$$\sin \omega = \sqrt{\frac{EG - F^2}{EG}}, \quad \sin \omega' = \sqrt{\frac{E'G' - F'^2}{E'G'}}$$

verbinden, und daher können die vier obigen Gleichungen auch so geschrieben werden:

$$\alpha \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EG'} \,.\, \sin(\omega + \omega' - \psi),$$
$$\beta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GG'} \,.\, \sin(\omega' - \psi),$$
$$\gamma \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{EE'} \,.\, \sin(\psi - \omega),$$
$$\delta \sqrt{E'G' - F'^2} = \sqrt{GE'} \,.\, \sin \psi.$$

Da durch die Substitution von

$$dp' = \alpha\, dp + \beta\, dq, \quad dq' = \gamma\, dp + \delta\, dq$$

[**135**] das Trinom

$$E' dp'^2 + 2F' dp' dq' + G' dq'^2$$

in

$$E dp^2 + 2F dp\, dq + G dq^2$$

übergehen muss, so erhält man

$$EG - F^2 = (E'G' - F'^2)\,(\alpha\delta - \beta\gamma)^2.$$

Umgekehrt muss das letztere Trinom wieder in das erste übergehen durch die Substitution

$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dp = \delta\, dp' - \beta\, dq',$$
$$(\alpha\delta - \beta\gamma)\, dq = -\gamma\, dp' + \alpha\, dq',$$

und daher ergiebt sich

$$E\delta^2 - 2F\gamma\delta + G\gamma^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot E',$$

$$-E\beta\delta + F(\alpha\delta + \beta\gamma) - G\alpha\gamma = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot F',$$

$$E\beta^2 - 2F\alpha\beta + G\alpha^2 = \frac{EG - F^2}{E'G' - F'^2} \cdot G'.$$

22.

An die allgemeine Untersuchung des vorhergehenden Artikels soll eine nahe liegende Anwendung angeknüpft werden, bei der, während p, q noch ihre allgemeine Bedeutung behalten, für p', q' die in Art. 15 mit r, φ bezeichneten Grössen genommen werden sollen; auch sollen diese Buchstaben beibehalten werden, so dass für jeden Punkt der Fläche r seine kürzeste Entfernung von einem bestimmten Punkte ist und φ der Winkel, welchen im letzteren Punkte das erste Element von r mit einer festen Richtung bildet. Dann ist

$$E' = 1, \ F' = 0, \ \omega' = 90^\circ.$$

Es werde ausserdem

$$\sqrt{G'} = m$$

gesetzt, so dass irgend ein Bogenelement

$$= \sqrt{dr^2 + m^2 d\varphi^2}$$

wird. Dann geben die vier im vorhergehenden Artikel für α, β, γ, δ entwickelten Gleichungen:

$$1)\ \sqrt{E}\,.\cos(\omega - \psi) = \frac{\partial r}{\partial p},$$

$$2)\ \sqrt{G}\,.\cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q},$$

$$3)\ \sqrt{E}\,.\sin(\psi - \omega) = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial p},$$ [136]

$$4)\ \sqrt{G}\,.\sin\psi = m \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial q}.$$

Die letzte und vorletzte Gleichung des vorhergehenden Artikels aber giebt

$$5)\ EG - F^2 = E\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 - 2F\frac{\partial r}{\partial p}\frac{\partial r}{\partial q} + G\left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,$$

$$6)\ \left(E\frac{\partial r}{\partial q} - F\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial q} = \left(F\frac{\partial r}{\partial q} - G\frac{\partial r}{\partial p}\right)\frac{\partial \varphi}{\partial p}.$$

Aus diesen Gleichungen können die Grössen r, φ, ψ und (falls es nöthig ist) m durch p und q bestimmt werden: die Integration der Gleichung 5) ergiebt nämlich r, und wenn dies gefunden, liefert die Integration der Gleichung 6) φ, ferner eine der beiden Gleichungen 1), 2) ψ; endlich erhält man m aus einer der beiden Gleichungen 3), 4).

Die allgemeine Integration der Gleichungen 5), 6) muss nothwendig zwei willkürliche Functionen ergeben, deren Bedeutung man leicht erkennt, wenn man erwägt, dass die Gültigkeit jener Gleichungen nicht auf den hier betrachteten Fall beschränkt ist, sondern dass dieselben eben so gelten, wenn r und φ in der allgemeinen Bedeutung des Art. 16 genommen werden, so dass r die Länge einer kürzesten Linie ist, die zu einer bestimmt gegebenen, aber an sich willkürlichen Curve senkrecht gezogen ist, und φ eine willkürliche Function der Länge desjenigen Theiles dieser Curve, der zwischen einer unbestimmten Kürzesten und einem bestimmten, willkürlich zu wählenden Punkte liegt. Die allgemeine Lösung muss nun alles dies unbestimmt lassen, und die willkürlichen Functionen gehen erst dann in bestimmte über, wenn jene willkürliche Curve und die Function von Theilen derselben, die φ darstellen soll, vorgeschriebene Werthe annehmen. In unserm Falle ist an Stelle der Curve der unendlich kleine Kreis zu nehmen, der seinen Mittelpunkt in dem Punkte hat, von dem aus die Längen r gerechnet werden, und φ bezeichnet Theile dieses Kreises, durch den Radius dividirt; daraus kann man leicht schliessen, dass die Gleichungen 5), 6) für unsern Fall völlig hinreichen, wenn nur über das, was unbestimmt bleibt, so verfügt wird, dass r und φ für jenen Anfangspunkt und die demselben unendlich nahen Punkte den obigen Festsetzungen entsprechen.

[**137**] Was übrigens die Integration der Gleichungen 5), 6) betrifft, so kann man dieselbe bekanntlich auf die Integration gewöhnlicher Differentialgleichungen reduciren; doch sind dieselben meist so verwickelt, dass daraus wenig Nutzen entspringt. Dagegen unterliegt die Entwickelung in Reihen, welche für praktische Bedürfnisse völlig ausreichend sind, so lange es sich um nicht allzugrosse Theile einer Fläche handelt, keiner Schwierigkeit, und damit eröffnen die aufgestellten Formeln eine ergiebige Quelle zur Lösung vieler sehr wichtiger Aufgaben. Hier soll indessen nur ein einziges Beispiel entwickelt werden, um das Wesen der Methode klar zu legen.

23.

Wir wollen den Fall betrachten, wo alle Linien, für die p constant ist, kürzeste Linien sind, welche die Linie, für welche $\varphi = 0$ ist, und die wir gewissermaassen als Abscissenaxe ansehen können, senkrecht schneiden. Es sei A der Punkt, für den $r = 0$ ist, D ein unbestimmter Punkt auf der Abscissenaxe $AD = p$, B ein unbestimmter Punkt auf der kürzesten Linie, die auf AD in D senkrecht steht, und $BD = q$, so dass p gewissermaassen als Abscisse, q als Ordinate des Punktes B angesehen werden kann. Die Abscissen nehmen wir positiv auf dem Zweige der Abscissenaxe, dem $\varphi = 0$ zugehört, während wir r stets als positive Grösse betrachten; die Ordinaten nehmen wir als positiv auf der Seite an, auf welcher φ von 0 bis 180° wächst.

Nach dem Satz des Art. 16 haben wir

$$\omega = 90^\circ, \quad F = 0, \text{ ferner } G = 1;$$

dazu setzen wir

$$\sqrt{E} = n.$$

Dann wird n eine Function von p und q, und zwar eine solche, die $= 1$ werden muss für $q = 0$. Die Anwendung der in Art. 18 aufgestellten Formel auf unsern Fall zeigt, dass für jede kürzeste Linie

$$d\theta = \frac{\partial n}{\partial q} \cdot dp$$

sein muss, falls θ der Winkel zwischen dem Element der Kürzesten und demjenigen Curvenelement ist, für welches q constant ist: da nun die Abscissenaxe selbst eine Kürzeste und für dieselbe überall $\theta = 0$ ist, so erhellt, dass für $q = 0$ überall $\frac{\partial n}{\partial q} = 0$ werden muss. [138] Daraus schliessen wir, dass, wenn n in eine nach Potenzen von q fortschreitende Reihe entwickelt wird, diese die folgende Form haben muss:

$$n = 1 + fq^2 + gq^3 + hq^4 + \text{etc.},$$

wo f, g, h etc. Functionen von p sind, und zwar setzen wir:

$$\begin{aligned} f &= f_0 + f_1 p + f_2 p^2 + \text{etc.}, \\ g &= g_0 + g_1 p + g_2 p^2 + \text{etc.}, \\ h &= h_0 + h_1 p + h_2 p^2 + \text{etc.} \end{aligned}$$

oder

$$n = 1 + f_0 q^2 + f_1 p q^2 + f_2 p^2 q^2 + \text{etc.}$$
$$+ g_0 q^3 + g_1 p q^3 + \text{etc.}$$
$$+ h_0 q^4 + \text{etc.}$$

24.

Die Gleichungen des Artikels 22 geben in unserm Falle

$$n \sin\psi = \frac{\partial r}{\partial p},\ \cos\psi = \frac{\partial r}{\partial q},\ -n\cos\psi = m\frac{\partial\varphi}{\partial p},\ \sin\psi = m\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$

$$n^2 = n^2\left(\frac{\partial r}{\partial q}\right)^2 + \left(\frac{\partial r}{\partial p}\right)^2,\quad n^2\frac{\partial r}{\partial q}\,\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \frac{\partial r}{\partial p}\,\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0.$$

Mit Hülfe dieser Gleichungen, deren fünfte und sechste bereits in den andern enthalten sind, können Reihen für r, φ, ψ, m oder für irgend welche Functionen dieser Grössen entwickelt werden; von diesen Reihen wollen wir diejenigen, die vor allem der Beachtung werth sind, hier aufstellen.

Da für unendlich kleine Werthe von p, q

$$r^2 = p^2 + q^2$$

werden muss, so wird die Reihe für r^2 mit dem Gliede $p^2 + q^2$ beginnen: die Glieder höherer Ordnung erhalten wir nach der Methode der unbestimmten Coefficienten*) mit Hülfe der Gleichung

$$\left(\frac{1}{n}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 = 4r^2.$$

[**139**] So ergiebt sich

[1] $$r^2 = p^2 + \tfrac{2}{3}f_0 p^2 q^2 + \tfrac{1}{2}f_1 p^3 q^2 + (\tfrac{2}{5}f_2 - \tfrac{4}{45}f_0^2)p^4 q^2$$
$$+ q^2 \qquad + \tfrac{1}{2}g_0 p^2 q^3 + \tfrac{2}{5}g_1 p^3 q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h_0 - \tfrac{7}{45}f_0^2)p^2 q^4$$
$$+ \text{etc.}$$

Aus der Formel

$$r\sin\psi = \frac{1}{2n}\cdot\frac{\partial(r^2)}{\partial p}$$

erhält man ferner

---

*) Die Rechnung, die durch einige Kunstgriffe etwas abgekürzt werden kann, hier auszuführen, haben wir für überflüssig gehalten.

$$[2]\quad r\sin\psi = p - \tfrac{1}{3}f_0pq^2 - \tfrac{1}{4}f_1\,p^2q^2 - (\tfrac{1}{5}f_2 + \tfrac{8}{45}f_0{}^2)\,p^3q^2$$
$$- \tfrac{1}{2}g_0\,pq^3 - \tfrac{2}{5}g_1p^2q^3$$
$$- (\tfrac{3}{5}h_0 - \tfrac{8}{45}f_0{}^2)\,pq^4$$
$$+ \text{etc.}$$

und aus $r\cos\psi = \frac{1}{2}\,\frac{\partial(r^2)}{\partial q}$

$$[3]\quad r\cos\psi = q + \tfrac{2}{3}f_0p^2q + \tfrac{1}{2}f_1p^3q + (\tfrac{2}{5}f_2 - \tfrac{4}{45}f_0{}^2)\,p^4q$$
$$+ \tfrac{3}{4}g_0p^2q^2 + \tfrac{3}{5}g_1p^3q^2$$
$$+ (\tfrac{4}{5}h_0 - \tfrac{14}{45}f_0{}^2)\,p^2q^3$$
$$+ \text{etc.}$$

Hiermit ist zugleich der Winkel ψ bestimmt. Ebenso werden zur Berechnung des Winkels φ am zweckmässigsten die Reihen für $r\cos\varphi$ und $r\sin\varphi$ entwickelt; dazu dienen die partiellen Differentialgleichungen:

$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p} = n\cos\varphi\sin\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q} = \cos\varphi\cos\psi - r\sin\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p} = n\sin\varphi\sin\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p},$$
$$\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q} = \sin\varphi\cos\psi + r\cos\varphi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q},$$
$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0;$$

eine Combination derselben ergiebt:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\cos\varphi)}{\partial q} = r\cos\varphi,$$
$$[140]\quad \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(r\sin\varphi)}{\partial q} = r\sin\varphi.$$

Hieraus werden die Reihen für $r\cos\varphi$, $r\sin\varphi$, deren erste Glieder offenbar p, q sein müssen, hergeleitet, nämlich

$$[4]\quad r\cos\varphi = p + \tfrac{2}{3}f_0pq^2 + \tfrac{5}{12}f_1\,p^2q^2 + (\tfrac{3}{10}f_2 - \tfrac{8}{45}f_0{}^2)p^3q^2$$
$$+ \tfrac{1}{2}g_0pq^3 + \tfrac{7}{20}g_1p^2q^3$$
$$+ (\tfrac{2}{5}h_0 - \tfrac{7}{45}f_0{}^2)p\,q^4$$
$$+ \text{etc.}$$

$$[5]\ r\sin\varphi = q - \tfrac{1}{3}f_0p^2q - \tfrac{1}{6}f_1p^3q - (\tfrac{1}{10}f_2 - \tfrac{7}{90}f_0^2)p^4q$$
$$- \tfrac{1}{4}g_0p^2q^2 - \tfrac{3}{20}g_1p^3q^2$$
$$- (\tfrac{1}{5}h_0 + \tfrac{13}{90}f_0^2)p^2q^3$$
$$+ \text{etc.}$$

Aus den Gleichungen [2], [3], [4], [5] könnte man eine Reihe für $r^2\cos(\varphi + \psi)$ und daraus durch Division mit der Reihe [1] eine Reihe für $\cos(\psi + \varphi)$ ableiten, und von der letzteren könnte man zu einer Reihe für den Winkel $\psi + \varphi$ selbst gelangen. Eleganter erhält man jedoch diese Reihe auf folgende Weise: Differentiiren wir die erste und zweite von den Gleichungen, die am Anfang dieses Artikels aufgestellt sind, so erhalten wir

$$\sin\psi\cdot\frac{\partial n}{\partial q} + n\cos\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\psi}{\partial p} = 0;$$

verbinden wir damit die Gleichung

$$n\cos\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial q} + \sin\psi\cdot\frac{\partial\varphi}{\partial p} = 0,$$

so entsteht

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial n}{\partial q} + \frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial(\psi+\varphi)}{\partial q} = 0.$$

Aus dieser Gleichung können wir mittelst der Methode der unbestimmten Coefficienten leicht die Reihe für $\psi + \varphi$ herleiten, wenn wir erwägen, dass das erste Glied derselben $\frac{1}{2}\pi$ sein muss, falls der Radius als Einheit genommen wird und 2π den Kreisumfang bezeichnet. Die genannte Reihe wird

$$[6]\ \psi + \varphi = \tfrac{1}{2}\pi - f_0pq - \tfrac{2}{3}f_1p^2q - (\tfrac{1}{2}f_2 - \tfrac{1}{6}f_0^2)p^3q$$
$$- g_0pq^2 - \tfrac{3}{4}g_1p^2q^2$$
$$- (h_0 - \tfrac{1}{3}f_0^2)pq^3$$
$$- \text{etc.}$$

[**141**] Es ist der Mühe werth, auch den Flächeninhalt des Dreiecks ABC in eine Reihe zu entwickeln. Zu dieser Entwickelung führt folgende Bedingungsgleichung, die sich aus ziemlich nahe liegenden geometrischen Betrachtungen leicht ableiten lässt, und in der S den gesuchten Flächeninhalt bezeichnet:

$$\frac{r\sin\psi}{n}\cdot\frac{\partial S}{\partial p} + r\cos\psi\cdot\frac{\partial S}{\partial q} = \frac{r\sin\psi}{n}\,.\int ndq,$$

wobei die Integration mit $q = 0$ beginnt. Daraus erhält man nach der Methode der unbestimmten Coefficienten

[7]

$$S = \tfrac{1}{2}pq - \tfrac{1}{12}f_0 p^3 q - \tfrac{1}{20}f_1 p^4 q - (\tfrac{1}{30}f_2 - \tfrac{1}{60}f_0{}^2)p^5 q$$
$$- \tfrac{1}{12}f_0 pq^3 - \tfrac{3}{40}g_0 p^3 q^2 - \tfrac{1}{20}g_1 p^4 q^2$$
$$- \tfrac{7}{120}f_1 p^2 q^3 - (\tfrac{1}{15}h_0 + \tfrac{2}{45}f_2 + \tfrac{1}{60}f_0{}^2)p^3 q^3$$
$$- \tfrac{1}{10}g_0 p q^4 - \tfrac{3}{40}g_1 p^2 q^4$$
$$- (\tfrac{1}{10}h_0 - \tfrac{1}{30}f_0{}^2) p q^5$$
$$- \text{etc.}$$

25.

Von den allgemeinen Formeln des vorhergehenden Artikels, die sich auf ein von kürzesten Linien gebildetes rechtwinkliges Dreieck beziehen, schreiten wir zu denen für Dreiecke im allgemeinen fort. Es sei C ein anderer Punkt auf derselben kürzesten Linie DB, und für diesen mögen, während p bleibt, die Buchstaben q', r', φ', ψ', S' dasselbe bezeichnen, was q, r, φ, ψ, S für den Punkt B sind. So entsteht ein Dreieck mit den Ecken A, B, C, dessen Winkel mit A, B, C bezeichnet werden mögen, während die gegenüberliegenden Seiten a, b, c seien, der Flächeninhalt aber σ; das Krümmungsmaass in den Punkten A, B, C soll resp. durch α, β, γ ausgedrückt werden. Wird noch (was stets zulässig ist) vorausgesetzt, dass die Grössen p, q, $q - q'$ positiv sind, so ist

$$A = \varphi - \varphi', \quad B = \psi, \quad C = \pi - \psi',$$
$$a = q - q', \quad b = r', \quad c = r, \quad \sigma = S - S'.$$

Vor allem soll der Flächeninhalt σ durch eine Reihe dargestellt werden. Vertauscht man in [7] die einzelnen auf B bezüglichen Grössen mit denen, die sich auf C beziehen, so ergiebt sich eine Formel für S', aus der man weiter, bis auf Grössen sechster Ordnung, [**142**]

$$\sigma = \tfrac{1}{2}p(q - q').\{1 - \tfrac{1}{6}f_0(p^2 + q^2 + qq' + q'^2)$$
$$- \tfrac{1}{60}f_1 p(6p^2 + 7q^2 + 7qq' + 7q'^2)$$
$$- \tfrac{1}{20}g_0(q + q')(3p^2 + 4q^2 + 4q'^2)\}$$

erhält. Diese Formel geht mit Hülfe der Reihe [2], die

$$c \sin B = p\{1 - \tfrac{1}{3}f_0 q^2 - \tfrac{1}{4}f_1 pq^2 - \tfrac{1}{2}g_0 q^3 - \cdots\}$$

ergiebt, in die folgende über:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac \sin B.\{1 - \tfrac{1}{6}f_0(p^2 - q^2 + qq' + q'^2)$$
$$- \tfrac{1}{60}f_1 p(6p^2 - 8q^2 + 7qq' + 7q'^2)$$
$$- \tfrac{1}{20}g_0(3p^2 q + 3p^2 q' - 6q^3 + 4q^2 q'$$
$$+ 4qq'^2 + 4q'^3)\}.$$

Das Krümmungsmaass wird für jeden Punkt der Oberfläche (nach Art. 19, wo m, p, q dieselbe Bedeutung hatten, wie hier n, q, p)

$$= -\frac{1}{n}\frac{\partial^2 n}{\partial q^2} = -\frac{2f + 6gq + 12hq^2 + \cdots\cdots}{1 + fq^2 + \cdots\cdots}$$
$$= -2f - 6gq - (12h - 2f^2)q^2 - \cdots\cdots$$

Daher wird, da p, q sich auf den Punkt B beziehen,

$$\beta = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q - 2f_2 p^2 - 6g_1 pq$$
$$- (12h_0 - 2f_0^2)q^2 - \text{etc.},$$

ebenso

$$\gamma = -2f_0 - 2f_1 p - 6g_0 q' - 2f_2 p^2 - 6g_1 pq'$$
$$- (12h_0 - 2f_0^2)q'^2 - \text{etc.},$$

$$\alpha = -2f_0.$$

Setzt man diese Krümmungsmaasse in der Reihe für σ ein, so erhält man folgenden Ausdruck, der bis auf Glieder sechster Ordnung (excl.) genau ist:

$$\sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(4p^2 - 2q^2 + 3qq' + 3q'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3p^2 - 6q^2 + 6qq' + 3q'^2)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3p^2 - 2q^2 + qq' + 4q'^2)\}.$$

Die Genauigkeit bleibt dieselbe, wenn man für p, q, q' setzt $c\sin B$, $c\cos B$, $c\cos B - a$; dadurch wird [**143**]

$$[8]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}ac\sin B\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3a^2 + 4c^2 - 9ac\cos B)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3a^2 + 3c^2 - 12ac\cos B)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(4a^2 + 3c^2 - 9ac\cos B)\}.$$

Da aus dieser Gleichung alles verschwunden ist, was sich auf die Linie AD bezieht, die senkrecht zu BC gezogen war, so kann man noch die Punkte A, B, C und alles, was sich darauf bezieht, mit einander vertauschen; es wird daher mit derselben Genauigkeit

$$[9]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}bc\sin A\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3b^2 + 3c^2 - 12bc\cos A)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(3b^2 + 4c^2 - 9bc\cos A)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(4b^2 + 3c^2 - 9bc\cos A)\},$$

$$[10]\quad \sigma = \tfrac{1}{2}ab\sin C\{1 + \tfrac{1}{120}\alpha(3a^2 + 4b^2 - 9ab\cos C)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\beta(4a^2 + 3b^2 - 9ab\cos C)$$
$$+ \tfrac{1}{120}\gamma(3a^2 + 3b^2 - 12ab\cos C)\}.$$

26.

Sehr nützlich ist die Vergleichung des betrachteten Dreiecks mit dem ebenen geradlinigen Dreieck, dessen Seiten gleich a, b, c sind. Die Winkel dieses letzteren, die wir mit A^*, B^*, C^* bezeichnen wollen, unterscheiden sich von den Winkeln des Dreiecks auf der Fläche, nämlich von A, B, C, um Grössen zweiter Ordnung; und es ist lohnend, diese Unterschiede genau zu ermitteln. Die Rechnungen aber, die mehr umfangreich, als schwierig sind, wird es genügen, hier in ihren Grundzügen anzuführen.

Vertauscht man in den Formeln [1], [4], [5] die Grössen, welche sich auf B beziehen, mit den auf C bezüglichen, so erhält man Formeln für r'^2, $r'\cos\varphi'$, $r'\sin\varphi'$. Dann ergiebt die Entwickelung des Ausdrucks

$$r^2+r'^2-(q-q')^2-2r\cos\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-2r\sin\varphi\,.\,r'\sin\varphi',$$

welcher

$$=b^2+c^2-a^2-2bc\cos A=2bc(\cos A^*-\cos A)$$

wird, in Verbindung mit der Entwickelung des Ausdrucks

$$r\sin\varphi\,.\,r'\cos\varphi'-r\cos\varphi\,.\,r'\sin\varphi',$$

welcher

$$=bc\sin A$$

wird, folgende Formel:

$$\begin{aligned}&\cos A^*-\cos A\\ &=-(q-q')p\sin A\{\tfrac{1}{3}f_0+\tfrac{1}{6}f_1p+\tfrac{1}{4}g_0(q+q')\\ &\qquad+(\tfrac{1}{10}f_2-\tfrac{1}{45}f_0^2)p^2+\tfrac{3}{20}g_1p(q+q')\\ &\qquad+(\tfrac{1}{5}h_0-\tfrac{7}{90}f_0^2)(q^2+qq'+q'^2)+\cdots\}.\end{aligned}$$

[**144**] Daher wird, bis auf Grössen fünfter Ordnung,

$$\begin{aligned}A^*-A=(q-q')p\{&\tfrac{1}{3}f_0+\tfrac{1}{6}f_1p+\tfrac{1}{4}g_0(q+q')+\tfrac{1}{10}f_2p^2\\ &+\tfrac{3}{20}g_1p(q+q')+\tfrac{1}{5}h_0(q^2+qq'+q'^2)\\ &-\tfrac{1}{90}f_0^2(7p^2+7q^2+12qq'+7q'^2)\}.\end{aligned}$$

Verbindet man diese Gleichung mit

$$2\sigma=ap\{1-\tfrac{1}{6}f_0(p^2+q^2+qq'+q'^2)-\cdots\}$$

und mit den im vorigen Artikel aufgestellten Werthen von α, β, γ, so erhält man bis auf Grössen fünfter Ordnung

$$[11]\quad\begin{aligned}A^*=A-\sigma\{&\tfrac{1}{6}\alpha+\tfrac{1}{12}\beta+\tfrac{1}{12}\gamma+\tfrac{2}{15}f_2p^2\\ &+\tfrac{1}{5}g_1p(q+q')+\tfrac{1}{5}h_0(3q^2-2qq'+3q'^2)\\ &+\tfrac{1}{90}f_0^2(4p^2-11q^2+14qq'-11q'^2)\}.\end{aligned}$$

Ganz ähnliche Operationen führen zu folgenden Entwickelungen

$$[12]\ B^* = B - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{6}\beta + \tfrac{1}{12}\gamma + \tfrac{1}{10}f_2p^2 + \tfrac{1}{10}g_1p(2q+q') + \tfrac{1}{5}h_0(4q^2 - 4qq' + 3q'^2) - \tfrac{1}{90}f_0^2(2p^2 + 8q^2 - 8qq' + 11q'^2)\},$$

$$[13]\ C^* = C - \sigma\{\tfrac{1}{12}\alpha + \tfrac{1}{12}\beta + \tfrac{1}{6}\gamma + \tfrac{1}{10}f_2p^2 + \tfrac{1}{10}g_1p(q+2q') + \tfrac{1}{5}h_0(3q^2 - 4qq' + 4q'^2) - \tfrac{1}{90}f_0^2(2p^2 + 11q^2 - 8qq' + 8q'^2)\}.$$

Hieraus folgt, da die Summe $A^* + B^* + C^*$ gleich zwei Rechten ist, zugleich der Ueberschuss der Summe $A + B + C$ über zwei Rechte, nämlich

$$[14]\quad A + B + C = \pi + \sigma\{\tfrac{1}{3}\alpha + \tfrac{1}{3}\beta + \tfrac{1}{3}\gamma + \tfrac{1}{3}f_2p^2 + \tfrac{1}{2}g_1p(q+q') + (2h_0 - \tfrac{1}{3}f_0^2)(q^2 - qq' + q'^2)\}.$$

Diese letzte Gleichung hätte auch aus der Formel [6] hergeleitet werden können.

27.

Ist die betrachtete Fläche eine Kugel mit dem Radius R, so wird

$$\alpha = \beta = \gamma = -2f_0 = \frac{1}{R^2};\ f_2 = 0,\ g_1 = 0,\ 6h_0 - f_0^2 = 0,$$

also

$$h_0 = \frac{1}{24R^4}.$$

Daher wird die Formel [14]

$$[\mathbf{145}]\qquad A + B + C = \pi + \frac{\sigma}{R^2},$$

und diese ist absolut genau. Die Formeln [11]—[13] ergeben aber

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(2p^2 - q^2 + 4qq' - q'^2),$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 - 2q^2 + 2qq' + q'^2),$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} + \frac{\sigma}{180R^4}(p^2 + q^2 + 2qq' - 2q'^2)$$

oder ebenso genau

$$A^* = A - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(b^2 + c^2 - 2a^2),$$

$$B^* = B - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + c^2 - 2b^2),$$

$$C^* = C - \frac{\sigma}{3R^2} - \frac{\sigma}{180R^4}(a^2 + b^2 - 2c^2).$$

Bei Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung folgt hieraus ein bekannter, zuerst von *Legendre* aufgestellter Satz.

28.

Unsere allgemeinen Formeln werden bei Weglassung der Glieder vierter Ordnung sehr einfache, nämlich

$$\begin{aligned} A^* &= A - \tfrac{1}{12}\sigma(2\alpha + \beta + \gamma), \\ B^* &= B - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + 2\beta + \gamma), \\ C^* &= C - \tfrac{1}{12}\sigma(\alpha + \beta + 2\gamma). \end{aligned}$$

An den Winkeln A, B, C sind daher bei einer nicht kugelförmigen Fläche ungleiche Reductionen anzubringen, damit nach der Aenderung die Sinus den gegenüberliegenden Seiten proportional werden. Die Ungleichheit wird, allgemein zu reden, von der dritten Ordnung sein, indessen kann dieselbe, falls die Oberfläche nur wenig von einer Kugel abweicht, eine höhere Ordnung erreichen: selbst bei den grössten Dreiecken auf der Erdoberfläche, [**146**] deren Winkel man noch messen kann, kann die Differenz stets als unmerklich betrachtet werden. So hat z. B. bei dem grössten unter den Dreiecken, die wir in den letzten Jahren gemessen haben, nämlich dem zwischen den Punkten Hohehagen, Brocken, Inselsberg, für welches der Ueberschuss der Winkelsumme = 14",85348 war, die Rechnung folgende Reductionen für die einzelnen Winkel geliefert:

Hohehagen	4",95113,
Brocken	4",95104,
Inselsberg	4",95131.

29.

Zum Schluss wollen wir noch den Flächeninhalt eines auf einer krummen Fläche gelegenen Dreiecks mit dem Flächeninhalt des geradlinigen Dreiecks vergleichen, dessen Seiten

a, b, c sind. Den letzteren Flächeninhalt wollen wir mit σ^* bezeichnen. Derselbe ist

$$\sigma^* = \tfrac{1}{2} bc \sin A^* = \tfrac{1}{2} ac \sin B^* = \tfrac{1}{2} ab \sin C^*.$$

Wir haben bis auf Grössen vierter Ordnung:

$$\sin A^* = \sin A - \tfrac{1}{12} \sigma \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma)$$

oder mit gleicher Genauigkeit

$$\sin A = \sin A^* \{1 + \tfrac{1}{24} bc \cos A \,.\, (2\alpha + \beta + \gamma)\}.$$

Substituirt man diesen Werth in Formel [9], so wird bis auf Grössen sechster Ordnung:

$$\begin{aligned}\sigma = \tfrac{1}{2} bc \sin A^* \,.\, \{1 &+ \tfrac{1}{120} \alpha (3b^2 + 3c^2 - 2bc \cos A) \\ &+ \tfrac{1}{120} \beta (3b^2 + 4c^2 - 4bc \cos A) \\ &+ \tfrac{1}{120} \gamma (4b^2 + 3c^2 - 4bc \cos A)\}\end{aligned}$$

oder ebenso genau

$$\begin{aligned}\sigma = \sigma^* \{1 &+ \tfrac{1}{120} \alpha (a^2 + 2b^2 + 2c^2) + \tfrac{1}{120} \beta (2a^2 + b^2 + 2c^2) \\ &+ \tfrac{1}{120} \gamma (2a^2 + 2b^2 + c^2)\}.\end{aligned}$$

Für eine Kugelfläche nimmt diese Formel folgende Gestalt an:

$$\sigma = \sigma^* \{1 + \tfrac{1}{24} \alpha (a^2 + b^2 + c^2)\};$$

statt dieser Formel kann auch, wie leicht zu beweisen ist, mit derselben Genauigkeit folgende genommen werden:

$$\sigma = \sigma^* \sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}}.$$

Wird diese Formel auf Dreiecke angewandt, die auf einer nicht kugelförmigen krummen Fläche liegen, so wird der Fehler, allgemein zu reden, von der fünften Ordnung, doch unmerklich bei allen Dreiecken, wie sie auf der Erdoberfläche gemessen werden können.

4*

Anmerkungen.

Die Bedeutung der vorstehenden Abhandlung von *Gauss* beruht theils in der Eröffnung neuer Gesichtspunkte für die Behandlung der Lehre von den krummen Flächen, theils in der Ableitung neuer wichtiger Resultate. In ersterer Beziehung ist vor allem die Aufstellung der Begriffe des Krümmungsmaasses und der Gesammtkrümmung (Art. 6) hervorzuheben, sowie die Scheidung der Eigenschaften einer Fläche in solche, die eine bestimmte Form der Fläche im Raume voraussetzen, und solche, die bei einer Verbiegung ungeändert bleiben (Art. 13). Hinsichtlich der Methode ferner ist wichtig die Benutzung der Darstellung einer beliebigen Fläche durch zwei Hülfsvariable. Diese Darstellung bildet die Quelle einer grossen Zahl von neuen Sätzen, von denen besonders erwähnenswerth sind: der Nachweis, dass das Krümmungsmaass bei der Verbiegung einer Fläche ungeändert bleibt (Art. 11, 12), die Sätze der Art. 15 und 16 über geodätische Linien, der Satz des Art. 20, endlich die am Schluss abgeleiteten Resultate, welche die Beziehung der von geodätischen Linien gebildeten Dreiecke zu geradlinigen Dreiecken mit gleich langen Seiten betreffen.

Veröffentlicht wurden die Disquisitiones generales circa superficies curvas zuerst in den Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores Vol. VI (ad a. 1823—1827), Gottingae 1828; Commentationes classis mathematicae p. 99 bis 146. Dies Original, dessen Seitenzahlen dem Text beigefügt sind, ist der vorstehenden Uebersetzung des Herausgebers zu Grunde gelegt. Später wurde die Arbeit wieder abgedruckt im Anhange zu der von *Liouville* herausgegebenen fünften Auflage von *Monge's*: »Application de l'analyse à la géométrie« (Paris 1850), ferner im Band IV der *Gauss*'schen Werke (Göttingen 1873). Eine französische Uebersetzung findet sich in den Nouvelles Annales de Mathémat. T. XI, eine deutsche, vom Herausgeber jedoch an keiner Stelle benutzte, in der »Analytischen Geometrie des Raumes« von *Böklen* (2. Aufl., Stuttgart 1884).

Von *Gauss* selbst ist eine Anzeige seiner Arbeit in den Göttinger gelehrten Anzeigen vom 5. November 1827 veröffentlicht.

Art. 1. Die Einführung der Hülfskugel kommt, wie *Gauss* in der eben erwähnten Anzeige bemerkt, im Grunde auf das Verfahren hinaus, welches in der Astronomie in stetem Gebrauch ist, wo man alle Richtungen auf eine fingirte Himmelskugel von unendlich grossem Halbmesser bezieht.

Art. 2. Der Ausdruck »Stellung einer Ebene« ist von *Staudt* (Geometrie der Lage Nr. 40) eingeführt.

Neu ist von den Resultaten dieses Artikels der Satz VI, eigenartig die Ableitung der Resultate von VII.

Art. 4. Die zweite Methode der Darstellung einer Fläche (Ausdruck der Coordinaten durch zwei Hülfsveränderliche) ist für beliebige Flächen zuerst von *Gauss* bei der Aufgabe der conformen Abbildung benutzt [Astronomische Abhandlungen, herausgegeben von *H. C. Schumacher*, drittes Heft, Altona 1825; *Gauss*' Werke IV p. 189. — Vergl. auch *Gauss* »Theoria attractionis corporum sphaer. ellipt.«, Comment. Gott. II, 1813; *Gauss*' Werke Bd. V p. 10]. Hier wird diese Darstellung zum ersten Male zur Bestimmung der Richtung der Flächennormale verwandt, weiterhin auch in der Lehre von der Krümmung und von den geodätischen Linien. Die geometrische Bedeutung der Variabeln p, q wird in Art. 17 ausführlicher erörtert.

Als eine Erweiterung dieser Darstellung kann man die Bestimmung der Punkte des Raumes durch krummlinige Coordinaten ansehen.

Art. 5. Zur Entscheidung der Frage, welches der beiden in Art. 4 für X, Y, Z gefundenen Werthsysteme der nach aussen, welches der nach innen gerichteten Normale zugehört, bedarf es der Anwendung des Satzes Art. 2 (VII) nur, falls man die zweite Methode der Darstellung einer Fläche benutzt. Ist dagegen die Fläche durch eine Gleichung $W = 0$ zwischen den Coordinaten gegeben, so führt folgende einfachere Ueberlegung zum Ziele. Vom Punkte A ziehe man die Linie $d\sigma$ nach der äusseren Seite, so ist, wenn dx, dy, dz die Projectionen von $d\sigma$ sind,

$$Pdx + Qdy + Rdz > 0.$$

Andererseits ist der Winkel zwischen σ und der äusseren Normale ein spitzer, also

$$\frac{dx}{d\sigma} X + \frac{dy}{d\sigma} Y + \frac{dz}{d\sigma} Z > 0.$$

Diese Bedingung ist, da $d\sigma$ positiv ist, mit der vorhergehenden nur zu vereinigen, wenn für X, Y, Z die erste Lösung genommen wird. — Auf ähnliche Weise ergiebt sich das Resultat, wenn die Fläche nach der dritten Methode analytisch ausgedrückt ist.

Art. 6. Die Einführung der Begriffe Gesammtkrümmung und Krümmungsmaass motivirt *Gauss* in der Anzeige seiner Arbeit folgendermaassen: »Je geringer die Abweichung eines Stückes einer krummen Fläche von der Ebene ist, desto kleiner wird der entsprechende Theil der Kugelfläche sein, und es ist mithin ein sehr natürlicher Gedanke, zum Maassstabe der Totalkrümmung, welche einem Stück einer krummen Fläche beizulegen ist, den Inhalt des entsprechenden Stücks der Kugelfläche zu gebrauchen. Ausser der Grösse kommt aber zugleich noch die Lage der Theile in Betracht, die, ganz abgesehen von dem Grössenverhältniss, in den beiden Stücken entweder eine ähnliche, oder eine verkehrte sein kann. diese beiden Fälle werden durch das der Totalkrümmung vorzusetzende positive oder negative Zeichen unterschieden werden können.« Weiterhin heisst es dann: »Die Vergleichung des Inhalts zweier einander correspondirender Stücke der krummen Fläche und der Oberfläche der Hülfskugel führt nun (auf dieselbe Art, wie z. B. aus der Vergleichung von Volumen und Masse der Begriff von Dichtigkeit hervorgeht) zu einem neuen Begriffe«, dem des Krümmungsmaasses. Durch Einführung dieses Begriffes ist zuerst der bis dahin ganz vage Ausdruck Flächenkrümmung präcis definirt, und zwar vollkommen analog dem Begriff der Krümmung einer Curve [vergl. *Bertrand* »Traité de calcul différentiel § 720]. Den Ausdruck »Krümmung einer Curve« hält *Gauss* zwar nicht für angemessen (darauf bezieht sich die Bemerkung p. 12 Z. 2—3), derselbe hat sich aber doch so eingebürgert, dass er zweckmässiger Weise beibehalten werden muss.

Die in Rede stehende Definition des Krümmungsmaasses, deren Aufstellung zu den werthvollsten wissenschaftlichen Leistungen von *Gauss* gehört, ist allseitig acceptirt, während eine abweichende, von *Sophie Germain* vorgeschlagene Definition [*Crelle* Journ. Bd. VII], die als Maass der Flächenkrümmung in einem Punkte das arithmetische Mittel der reciproken Hauptkrümmungsradien (die sogenannte mittlere Krümmung) ergiebt, verworfen ist. In neuester Zeit hat *Casorati* [Rendiconti del R. Istituto Lombardo, Serie II, Vol. XXII, Fasc. VIII, 1889] die *Gauss*'sche Definition der Flächenkrümmung durch eine andere zu ersetzen gesucht, die darauf führt, die Krümmung durch die halbe Summe der reciproken Quadrate der Hauptkrümmungsradien zu messen. Dass diese neue Definition allseitige Zustimmung finden wird, möchte der Herausgeber bezweifeln.

Seit etwa zwei Jahrzehnten hat man den Begriff des Krümmungsmaasses auch auf drei- und mehrdimensionale Mannigfaltigkeiten ausgedehnt. Doch sind hier verschiedene Erweiterungen möglich. Die wichtigsten derselben sind die von *Riemann* [»Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen«, Götting. Abhandl. XIII, 1868; *Riemann*'s Werke, herausgegeben von *H. Weber*, Göttingen 1876, p. 254], ferner die von *Kronecker* [»Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln«, Monatsber. der Berl. Akad. 1869], die auch von *Lipschitz* (*Borchardt* Journ. Bd. 71 und Bd. 81) adoptirt ist. Man vergleiche auch das Buch von *Killing* »Die nichteuklidischen Raumformen in analytischer Behandlung«, Leipzig 1885.

Die am Schluss von p. 13 in Aussicht gestellte Erörterung über die allgemeinste Auffassung von Figuren hat *Gauss* nicht veröffentlicht.

Art. 7. Dass die Betrachtung eines Oberflächenelements, welches die Gestalt eines Dreiecks hat, zur Berechnung des Krümmungsmaasses genügt, ergiebt sich daraus, dass das Verhältniss einer unendlich kleinen Figur auf der Fläche zu ihrer Projection von der Gestalt der Figur unabhängig ist.

Art. 8. Die Arbeit von *Euler*, in der die unter I—IV mitgetheilten Resultate zuerst abgeleitet sind, steht in den Mém. de l'Acad. de Berlin, T. XVI, 1760. Auf die Krümmung schiefer Schnitte, die von *Meunier* erledigt ist [Mém. de Math. de l'Acad. des sciences, T. X, Paris 1785], ist *Gauss* nicht eingegangen.

Die hier abgeleiteten Resultate erfordern übrigens eine Modification, wenn die Tangentialebene eine Berührung höherer Ordnung mit der Fläche eingeht (vergl. *Plücker*, *Crelle* J. Bd. III). — Die Krümmung in singulären Punkten einer Fläche ist neuerdings von *de Salvert* behandelt (Annales de la société scientif. de Bruxelles VII, 1882).

Dem Lehrsatze V dieses Artikels hat *R. Sturm* (Mathemat. Annal. XXI p. 379, 1883) das folgende Analogon an die Seite gestellt: »Beschreibt man um einen Flächenpunkt P eine Kugel mit unendlich kleinem Radius und bildet die dadurch in die Fläche eingeschnittene Curve mittels paralleler Normalen auf der Hülfskugel ab, so ist der Grenzwerth des Verhältnisses der

Umfänge beider Curven die mittlere Flächenkrümmung im Punkte P.«

Art. 10, 11. Die Grössen E, F, G pflegt man als Fundamentalgrössen erster, die Grössen D, D', D'' als Fundamentalgrössen zweiter Ordnung zu bezeichnen. An Stelle der letzteren sind von *Hoppe* (»Principien der Flächentheorie«, *Grunert* Archiv Bd. 59; auch als besondere Schrift erschienen, Leipzig 1876) andre Grössen eingeführt, die in der Bezeichnung von *Gauss*

$$\frac{D}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D'}{\sqrt{EG-F^2}},\quad \frac{D''}{\sqrt{EG-F^2}}$$

lauten würden; die *Hoppe*'schen Fundamentalgrössen sind auch von *Knoblauch* (»Einleitung in die allgemeine Theorie der Flächen«, Leipzig 1888) adoptirt. Noch andere Fundamentalgrössen haben *Bour* und *Lipschitz* in ihren bei Art. 12 zu erwähnenden Arbeiten benutzt. Manche Fragen erfordern die Einführung von Fundamentalgrössen dritter Ordnung, so z. B. die Bestimmung desjenigen Normalschnitts, welcher von dem zugehörigen Krümmungskreis in der dritten Ordnung berührt wird.

Eine directe Herleitung des in Art. 10 gefundenen Ausdrucks für k, welche die Betrachtungen des Art. 7 nicht voraussetzt, findet man bei *Hoppe* (§ 11 der erwähnten Schrift) und bei *Escherich* (*Grunert* Arch. Bd. 57).

Unter Zugrundelegung von speciellen Variabeln lässt sich, wie *Liouville* [Journ. d. Mathém. XII und Anhang zu der schon erwähnten Ausgabe von *Monge*] gezeigt hat, dem Resultat des Artikels 11 eine einfachere Form geben. Noch eine andere Gestalt hat die in Rede stehende Formel bei *Weingarten* [cf. Anmerkung zu Art. 12].

Art. 12. Den wichtigen Satz des Art. 12 haben *Bertrand* und *Puiseux* [*Liouville* J. XIII, cf. auch Anhang zu *Liouville*'s Ausgabe von *Monge*, Note IV] durch Berechnung des Umfangs einer geodätischen Kreisfläche von sehr kleinem Radius abgeleitet; *Diguet* hat dann den Beweis durch Ermittelung des Flächeninhalts einer solchen Fläche vervollständigt. Andere Beweise rühren von *Beltrami* (Atti d. Ateneo Veneto V, 1869) und *Chelini* (Mem. di Bologna (2) VIII, 1868) her.

Ein instructives Beispiel zweier auf einander abwickelbarer Flächen bilden das Catenoid und die windschiefe Schraubenfläche. Von anderen Beispielen sind besonders erwähnenswerth die Flächen constanten Krümmungsmaasses. Dieselben sind namentlich studirt von *Beltrami* [*Brioschi* Annali di Matem. (1) VII, (2) II; *Battaglini* Giornale VI], *Schläfli* [*Brioschi* Ann. (1) V], *Dini* [*Battaglini* Giorn. V], *Enneper* [Göttinger Nachr. 1868, 1876], *Lie* [Arch. for Math. og Nat. IV, V, Christiania 1879, 1880], *Weingarten* [*Kronecker* Journ. Bd. 94, 95], *Bianchi* [Math. Ann. XVI, *Battaglini* Giorn. XX].

Die Flächen constanter Krümmung spielen insofern eine besondere Rolle, als für sie auch die Umkehrung des *Gauss*'schen Satzes gilt; d. h. wenn zwei Flächen in allen Punkten gleiches constantes Krümmungsmaass haben, sind sie auf einander abwickelbar, während bei zwei Flächen mit variabelem Krümmungsmaass die Gleichheit des Krümmungsmaasses in entsprechenden Punkten noch nicht zur Abwickelung genügt. [Vergl. *Minding*, *Crelle* Journ. Bd. 19].

Hinsichtlich der sehr reichhaltigen Litteratur, die im Anschluss an *Gauss* die Abwickelbarkeit von Flächen auf einander weiter untersucht hat, müssen wir uns hier mit einem kurzen Hinweis auf die wichtigsten Arbeiten begnügen, da ein näheres Eingehen auf den Inhalt zu weit führen würde. Folgende Autoren sind vorzugsweise zu nennen: *Bour* [Journ. de l'école polytechn. Bd. 22 (Cah. 39) 1862], *Bonnet* [Journ. de l'école polyt. Bd. 24, 25 (Cah. 41, 42) 1865, 1867; *Liouville* Journ. XVI], *Aoust* [Comptes rend. 1850, 1862, 1863, 1868; *Borchardt* Journ. Bd. 58], *Beltrami* [*Battaglini* Giorn. Bd. II, III, Memor. d. Bologna (2) VIII, Mathemat. Ann. I], *Dini* [*Brioschi* Annali di Mat. (2) IV], *Enneper* [Götting. Nachr. 1874, 1875], *Lipschitz* [Ber. d. Berl. Akad. 1882, 1883], *Weingarten* [*Borchardt* Journ. Bd. 59; Festschrift der technischen Hochschule zu Berlin 1884; *Kronecker* Journ. Bd. 100, Ber. d. Berl. Akad. 1886].

Art. 13. Das Versprechen, andere Eigenschaften auf einander abwickelbarer Flächen später zu behandeln, hat *Gauss* nicht erfüllt. Dagegen hat *Minding* gezeigt, dass bei Verbiegung einer Fläche die sogenannte geodätische Krümmung, d. i. der Grenzwerth für das Verhältniss eines Bogenelements zu dem Winkel zwischen zwei auf einander folgenden geodätischen Tangenten, ungeändert bleibt [*Crelle* Journ. Bd. VI].

Art. 14. Die hier abgeleitete Fundamentaleigenschaft der kürzesten Linie, die darin besteht, dass ihre Hauptnormale überall mit der Flächennormale zusammenfällt, ist zuerst von *Euler* gefunden [»Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes« etc., Lausannae 1744].

Gauss unterscheidet hier nicht zwischen eigentlichen kürzesten und geodätischen Linien. Darauf, dass diese Unterscheidung nöthig ist, hat vor allem *Jacobi* hingewiesen [*Crelle* Journ. Bd. XVII, Gesammelte Werke Band IV, p. 49, 50; Vorlesungen über Dynamik p. 46, 47]. In neuerer Zeit ist die Frage, wann eine geodätische Linie aufhört, kürzeste Entfernung zwischen zweien ihrer Punkte zu sein, ausführlicher erörtert von *Braunmühl* (Math. Annal. Bd. XIV) und *Mangoldt* (*Kronecker* Journ. Bd. 91).

Art. 15, 16. Die beiden hier aufgestellten Sätze rühren, wie schon oben bemerkt, von *Gauss* her.

Art. 17. Die Darstellung einer Fläche mittelst der Parameter zweier Curvenschaaren, die auf ihr liegen, hat sich seit *Gauss* allgemein eingebürgert und wird gegenwärtig als die grundlegende angesehen. Von speciellen Curven auf Flächen sind zu erwähnen die Krümmungscurven, die asymptotischen Linien auf den Flächen mit negativem Krümmungsmaass, die isometrischen Curven, d. h. die, welche eine Fläche in unendlich kleine Quadrate theilen, endlich die weiterhin im Art. 19 besprochenen Curvensysteme.

Art. 18. *Gauss* begnügt sich hier damit, die Differentialgleichungen aufzustellen, von denen die Bestimmung der geodätischen Linie einer Fläche abhängt, ohne diese Bestimmung für specielle Flächen wirklich durchzuführen. Das wichtigste Beispiel einer derartigen, allerdings nach einer ganz andern Methode durchgeführten Bestimmung ist die Ermittelung der geodätischen Linie des dreiaxigen Ellipsoids von *Jacobi* [*Crelle* Journ. XIX; Gesammelte Werke Band II p. 59; Vorlesungen über Dynamik, Vorl. 28]. Eine andere diesen Gegenstand betreffende Untersuchung rührt von *Liouville* her [Zusätze zu *Monge*, Note III], der zeigte, dass man für eine grosse Klasse von Flächen die geodätischen Linien durch Quadraturen finden kann.

In analoger Art wie die geodätischen Linien lassen sich nach *Darboux* [C. R. Bd. 96, 1883] die Curven constanter geodätischer Krümmung behandeln.

Art. 19. Die hier auftretenden Variabeln pflegt man als geodätische Polarcoordinaten, die Curven, welche auf den von einem Punkte ausgehenden geodätischen Linien senkrecht stehen, als geodätische Kreise zu bezeichnen. Analog werden die aus dem Satze in Art. 16 entspringenden Variabeln, falls die Grund-curve eine geodätische Linie ist, geodätische Parallelcoordinaten genannt.

Art. 20. Diesen wichtigen Satz hat *Jacobi* [*Crelle* Journ. XVI p. 344] folgendermaassen verallgemeinert: Ein Dreieck werde von drei beliebigen Raumcurven begrenzt, die nur der Beschränkung unterworfen sind, dass je zwei der Curven in ihren Schnittpunkten dieselbe Hauptnormale haben. Zieht man dann durch den Mittelpunkt der Hülfskugel zu allen Hauptnormalen des Umfangs des Dreiecks parallele Radien, so schneiden diese auf der Kugelfläche ein zweites Dreieck ab, dessen Inhalt gleich dem Ueberschuss der Winkelsumme des gegebenen Dreiecks über π oder gleich dem Fehlbetrag jener Summe an π ist.

Art. 21. Die vorletzte Formel dieses Art. (S. 40 Z. 1) hat bei *Gauss* sowie im *Liouville*'schen Abdruck falsches Vorzeichen.

Art. 23. Die Formel für $d\theta$ (Mitte von S. 42) hat im Original sowie in *Gauss*' Werken Bd. IV falsches Vorzeichen.

Art. 24. Um die Art der Rechnung, die zur angenäherten Lösung der in den vorhergehenden Artikeln aufgestellten Differentialgleichungen führt, zu kennzeichnen, möge hier die vollständige Ableitung der Formel [1] Platz finden, jedoch mit Beschränkung auf die Glieder fünfter Ordnung. Man setze

$$r^2 = p^2 + q^2 + R_3 + R_4 + R_5,$$

wobei der Index von R die Ordnung des betreffenden Gliedes in Bezug auf p und q bezeichnet. Dann wird, falls man die die fünfte Ordnung übersteigenden Glieder fortlässt,

$$\text{a)}\quad \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 - 4r^2 = 4\left[p\frac{\partial R_3}{\partial p} + q\frac{\partial R_3}{\partial q} - R_3\right]$$
$$+ 4\left[p\frac{\partial R_4}{\partial p} + q\frac{\partial R_4}{\partial q} - R_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]$$
$$+ 4\left[p\frac{\partial R_5}{\partial p} + q\frac{\partial R_5}{\partial q} - R_5 + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right]$$
$$= 8R_3 + 4\left[3R_4 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial p}\right)^2 + \frac{1}{4}\left(\frac{\partial R_3}{\partial q}\right)^2\right]$$
$$+ 4\left[4R_5 + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial p}\frac{\partial R_4}{\partial p} + \frac{1}{2}\frac{\partial R_3}{\partial q}\frac{\partial R_4}{\partial q}\right],$$

da nach einem bekannten Satze

$$p\frac{\partial R_3}{\partial p} + q\frac{\partial R_3}{\partial q} = 3R_3 \text{ etc.}$$

ist. Ferner ist mit Vernachlässigung der Glieder vierter Ordnung

$$1 - \frac{1}{n^2} = 2f_0 q^2 + 2f_1 pq^2 + 2 g_0 q^3,$$

also wird

b) $$\left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2$$

$$= 8f_0 p^2q^2 + 8f_1 p^3q^2 + 8g_0 p^2q^3 + 8f_0 pq^2 \frac{\partial R_3}{\partial p},$$

welche Gleichung, ebenso wie a), bis auf Glieder sechster Ordnung genau ist. Die Differentialgleichung für r aber lässt sich schreiben

$$\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2 + \left(\frac{\partial(r^2)}{\partial q}\right)^2 - 4r^2 = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)\left(\frac{\partial(r^2)}{\partial p}\right)^2.$$

In den Ausdrücken a) und b) müssen daher die Glieder gleicher Ordnung übereinstimmen. Das giebt, da b) ein Glied dritter Ordnung nicht enthält,

$$R_3 = 0,$$

ferner

$$12 R_4 = 8f_0 p^2q^2, \quad 16 R_5 = 8f_1 p^3q^2 + 8g_0 p^2q^3,$$

womit die Formel [1] bewiesen ist. Analog würde sich auch das Glied sechster Ordnung ergeben.

Art. 24, Formel [6]. Dass das erste Glied rechts $= \frac{1}{2}\pi$ ist, folgt so: Nach S. 38 ist $N - M = \omega$, $N - M' = \psi$, also $M' - M = \omega - \psi$. Andrerseits ist (für unendlich kleine Werthe von r) $M' - M = \varphi$ und ω ist $= \frac{1}{2}\pi$, folglich $\varphi + \psi = \frac{1}{2}\pi$.

Art. 24, Formel [7]. Die Differentialgleichung, aus der [7] folgt, lässt sich folgendermaassen ableiten. Man verlängere AB um $BB' = dp$, ziehe durch B' die zu AB' senkrechte geodätische Linie, welche AD in D' treffe. Endlich mache man $B'D'' = BD$, so dass DD'' auf $B'D'$ senkrecht steht. Dann ist, wenn unter ABD die Fläche des Dreiecks ABD verstanden wird,

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \lim \frac{AB'D' - ABD}{DD'} = \lim \frac{BDD'B'}{DD'}$$

$$= \lim \frac{BDD''B'}{BB'} \cdot \lim \frac{BB'}{DD'},$$

da die Fläche $BDD''B'$ sich von $BDD'B'$ nur um unendlich Kleines zweiter Ordnung unterscheidet. Es ist aber

$$BDD''B' = dp \,.\int ndq, \quad \text{also} \lim \frac{BDD''B'}{BB'} = \int ndq,$$

ferner

$$\lim \frac{BB'}{DD'} = \frac{\partial p}{\partial r},$$

mithin

$$\frac{\partial S}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r} \cdot \int ndq,$$

also auch

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\partial p}{\partial r} + \frac{\partial S}{\partial q}\frac{\partial q}{\partial r} = \frac{\partial p}{\partial r}\int ndq.$$

Endlich folgt aus den im Anfang des Art. 24 angegebenen Werthen von $\frac{\partial r}{\partial p}$ etc.

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{n}\sin\psi, \quad \frac{\partial q}{\partial r} = \cos\psi,$$

so dass schliesslich

$$\frac{\partial S}{\partial p}\frac{\sin\psi}{n} + \frac{\partial S}{\partial q}\cos\psi = \frac{\sin\psi}{n}\int ndq$$

wird, q. e. d.

Art. 25, 26. In diesen Artikeln sind bei *Gauss* mehrere Zwischenformeln fehlerhaft, vermuthlich in Folge von Druckfehlern. Die betreffenden Fehler sind auch in *Liouville*'s Anhang zu *Monge*, sowie in *Gauss*' Werke Band IV übergegangen. Es sind folgende: In der ersten Formel für σ [S. 46 Z. 10—8 von unten] heisst bei *Gauss* die letzte Klammer

$$3p^2 + 4q^2 + 4qq' + 4q'^2.$$

Hier ist das Glied $4qq'$ zu tilgen.

In der Formel S. 47 Z. 16—18 steht zum Schluss $4qq'$, während es $4q'^2$ heissen muss (bei *Liouville* verbessert).

Die Formel S. 48 Z. 8—10 von unten hat bei *Gauss* falsches Vorzeichen. Statt

$$A^* - A = -(q-q')\,p\,.\{\ldots\}$$

muss es heissen

$$A^* - A = (q-q')\,p\,.\{\ldots\}.$$

Art. 27. Dass $f_0 = -\frac{1}{2R^2}$, $f_2 = 0$ etc., ergiebt sich auch noch folgendermaassen: Für die Kugel ist

$$ds^2 = \cos^2\left(\frac{q}{R}\right) \cdot dp^2 + dq^2,$$

also

$$n = \cos\left(\frac{q}{R}\right) = 1 - \frac{q^2}{2R^2} + \frac{q^4}{24R^4} - \cdots,$$

d. h.

$$f_0 = -\frac{1}{2R^2},\ h_0 = \frac{1}{24R^4},\ f_1 = g_0 = f_2 = g_1 = 0.$$

Der Satz von *Legendre* findet sich in den Mém. de Paris 1787 p. 338 und Trigonom. Append. V.

Art. 28. Der Hohehagen ist ein Berg zwischen Göttingen und Hannöversch-Münden. — Die Seiten des in Rede stehenden Dreiecks sind ungefähr 69, 85, 107 Kilometer lang.

Art. 29. Ableitung der letzten Formel. Nach den vorhergehenden Formeln ist für $\alpha = \beta = \gamma$

$$\frac{\sin A}{\sin A^*} = 1 + \frac{\alpha}{12} \cdot 2bc \cos A = 1 + \frac{\alpha}{12}(b^2 + c^2 - a^2),$$

daher bei Vernachlässigung von α^2

$$\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*} = 1 + \frac{\alpha}{12}(a^2 + b^2 + c^2),$$

$$\sqrt{\frac{\sin A \,.\, \sin B \,.\, \sin C}{\sin A^* \,.\, \sin B^* \,.\, \sin C^*}} = 1 + \frac{\alpha}{24}(a^2 + b^2 + c^2).$$

Die die Vergleichung kleiner geodätischer Dreiecke mit geradlinigen Dreiecken von gleicher Seitenlänge betreffenden Entwickelungen sind durch Berechnung der Glieder nächster Ordnung weiter geführt von *Hansen* (geodätische Untersuchungen, 1865), *Schering* (Götting. Nachr. 1867), *Weingarten* (Astronomische Nachr. Bd. 73, 1869). Ferner ist die allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke weiter ausgebildet durch *Christoffel* [Abhandl. d. Berl. Akad. 1868], *Weingarten* [Ber. d. Berliner Akad. 1882], *Brill* [Münch. Abhandl. 1883], *Mangoldt* [*Kronecker* Journ. Bd. 94, 1883].

Halle a. S., den 11. Juni 1889.

A. Wangerin.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

14. Allgemeine Grundlagen einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten im Zustande des Gleichgewichts

Hrsg. von Heinrich Weber, Leipzig 1903, Ostwald's Klassiker Nr. 135, 73 S.

Original:
Principia generalia theoriae figurae fluidorum in statu aequilibrii. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 7, (1828–1831) 1832, commentationes classis mathematicae, S. 39–88. In: Gauß Werke 5, S. 29–77.

Allgemeine Grundlagen
einer Theorie der Gestalt von Flüssigkeiten
im Zustande des Gleichgewichts.

Die Kräfte, die das Aufsteigen oder Herabdrücken von Flüssigkeiten in Capillarröhren verursachen, hat zuerst eingehend *Clairaut* aufgezählt. Da er aber das Gesetz der Kräfte überhaupt nicht berührt hat, so konnten keine Früchte für eine mathematische Behandlung der Erscheinungen daraus gewonnen werden. Die gewöhnliche Anziehung, die dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional ist, und die alle Bewegungen am Himmel mit so gutem Erfolge darstellen lässt, kann weder bei der Erklärung der Capillarerscheinungen, noch der der Adhäsion oder Cohäsion Anwendung finden; es lehrt nämlich eine richtig aufgestellte Berechnung, dass eine nach diesem Gesetze wirkende Anziehung eines beliebigen Körpers, der zur Ausführung von Experimenten geeignet ist, d. h. dessen Masse im Vergleich mit der der Erde vernachlässigt werden kann, auf einen beliebig gelegenen, sogar den Körper berührenden Punkt im Vergleich mit der Schwere verschwinden muss*). Wir schliessen hieraus, dass jenes Anziehungsgesetz in den kleinsten Abständen mit der Wahrheit nicht mehr übereinstimmt, sondern dass es eine Modification erfordert. Mit anderen Worten: die Partikeln der Körper üben ausser jenen anziehenden Kräften noch eine andere Kraft aus, die nur in den kleinsten Abständen merklich ist. Alle Erscheinungen beweisen übereinstimmend, dass dieser

---

*) Die grösste Anziehung, die eine gegebene homogene Masse auf einen gegebenen Punkt nach diesem Gesetze ausüben kann, verhält sich zu der Anziehung, die die gleiche Masse, wenn wir sie in Kugelgestalt überführen, auf einen auf ihrer Oberfläche gelegenen Punkt ausübt, wie $3 : \sqrt[3]{25}$. Diese letztere Anziehung aber lässt sich leicht mit der Schwere vergleichen.

1*

zweite Theil der anziehenden Kraft (die Molecularanziehung) auch in den kleinsten noch messbaren Abständen unmerklich ist. Dagegen kann er in unmessbar kleinen Abständen den ersten (dem Quadrat des Abstandes umgekehrt proportionalen) Theil weitaus überwiegen.

Laplace hat, von dieser einzigen Voraussetzung über die Beschaffenheit der Molecularkräfte ausgehend, im Uebrigen aber ohne irgend welche Annahmen über das Gesetz des Abnehmens der Kräfte bei zunehmenden Abständen, zuerst die Einwirkung derselben auf die Form von Flüssigkeitsoberflächen einer strengen Rechnung unterworfen. Er hat die allgemeine Gleichung für die Gleichgewichtsform aufgestellt und daraus nicht nur die eigentlichen capillaren, sondern auch manche damit verwandte Erscheinungen zu erklären vermocht. Diese Untersuchungen, die in der auffälligen Uebereinstimmung mit sorgfältigen Experimenten ihre Bestätigung gefunden haben, zählen zu den schönsten Bereicherungen der Naturwissenschaft, die wir dem grossen Mathematiker verdanken. Die von einigen Autoren gegen sie gerichteten Entgegnungen aber sind meist von geringem oder gar keinem Belang*).

Bei den Berechnungen von *Laplace* finden wir gleichwohl einiges, was mit einer strengen Beweisführung nicht völlig verträglich ist. In der ersten Abhandlung: »théorie de l'action capillaire«, bezeichnet *Laplace* mit $\varphi(f)$ die Intensität der Anziehung im Abstande f und führt weiter folgende Zeichen ein:

$$\int_x^\infty \varphi(f)\,df = \Pi(x)$$

$$\int_x^\infty \Pi(f) f\,df = \Psi(x)$$

$$2\pi\int_0^\infty \Psi(f)\,df = K$$

$$2\pi\int_0^\infty \Psi(f)\,f\,df = H.$$

Die Form der Function $\varphi(f)$ wird weiter nicht bestimmt, nur

*) Dieses Urtheil gilt von den meisten Entgegnungen in der Zeitschrift von Pavia (Giornale di fisica etc. T. 9), auf die Petit in den »Annales de chimie et de physique« T. 4 treffend erwidert hat.

wird festgesetzt, dass sie unmessbar kleine Werthe annimmt, wenn f messbare Grössen erreicht. Aber aus dieser einen Annahme darf keineswegs geschlossen werden, dass auch $\Pi(f)$ und $\Psi(f)$ für messbare Werthe f unbedingt unmessbar klein werden. Ebenso wenig geht daraus hervor, dass die Integrale $2\pi \int \psi(f)\, df$; $2\pi \int \psi(f)\, f df$ von $f = 0$ bis zu einem endlichen, aber messbar grossen Werthe von f integrirt, nur noch unmessbar wenig von K und H abweichen, wie in der Abhandlung angenommen ist. Denn es lassen sich unendlich viele Formen der Function $\varphi(f)$ denken, die der Grundhypothese zwar genügen, bei denen aber ein solcher Schluss irrig wäre. Wenn z. B. angenommen wird, dass $\varphi(f)$ die vollständige Anziehung ausdrückt, so muss auch ein Glied der Form a/f darin enthalten sein, das die gewöhnliche Massen-Anziehung darstellt. Wenn aber auch dieses Glied als unmessbar klein anzusehen ist, wenn die Dimensionen der anziehenden Körper, wie sie in Experimenten vorkommen können, gegenüber der ganzen Erde unmessbar klein sind, so würde doch schon die zweite Integration, wenn sie ins Unendliche erstreckt wird, einen unendlich grossen Term der Function $\psi(f)$ liefern. Wenn aber auch hierdurch der Schein einer leichten Unachtsamkeit erweckt wird, so betrifft diese doch sicherlich mehr die Form der Darstellung, als die Sache selbst. Aus der zweiten Abhandlung: »Supplément à la théorie de l'action capillaire«, geht nämlich hervor, dass *Laplace* stillschweigend unter $\varphi(f)$ nicht die gesammte Anziehung, sondern nur den Theil verstanden hat, der zu der gewöhnlichen Anziehung hinzutritt. Denn es ist leicht einzusehen, dass die letztere keine merkliche Veränderung bei unseren Experimenten bedingen kann. In der That bemerkt er, dass er sich $\varphi(f)$ nach Art einer Exponentialfunction e^{-if} vorstellt, worin i sehr gross ist, oder, besser gesagt, worin $1/i$ eine sehr kleine Länge bedeutet. Aber es ist keineswegs nöthig, die Allgemeinheit so sehr zu beschränken. Denn wer mehr auf die Sache als auf die Worte sieht, bemerkt leicht, dass es genügt, wenn man jene Integration nicht bis ins Unendliche, sondern nur bis zu einer willkürlichen messbaren Entfernung erstreckt oder, wenn man so will, bis zu einer endlichen Entfernung, die an Grösse alle im Experiment auftretenden Dimensionen übertrifft.

Jedoch an einem weit schwerer wiegenden Mangel leidet die *Laplace*'sche Theorie, und den haben, so viel ich sehe, seine Angreifer nicht einmal bemerkt. Die Theorie besteht aus zwei

Theilen. Im einen wird für die freie Oberfläche der Flüssigkeit eine allgemeine Gleichung zwischen den partiellen Differentialen der Coordinaten aufgestellt. Diese Gleichung hängt aber von der anziehenden Molecularkraft ab, die die Flüssigkeitstheilchen wechselseitig auf einander ausüben. Und dieser Theil ist so durchgeführt, dass nichts Wesentliches hinzuzusetzen bleibt. Aber eine solche Gleichung zwischen partiellen Differentialen (deren Integration, wenn überhaupt möglich, willkürliche Functionen liefert) genügt nicht zur vollständigen Bestimmung der Oberflächengestalt. Diese erfordert vielmehr eine neue Bedingung, die eine Eigenschaft der Oberfläche an den Grenzen ausdrückt. Eine solche Bedingung stellt der zweite Theil der Theorie auf, nämlich die, dass der Winkel constant ist, den die Tangentialebene an die freie Oberfläche an der Grenze des Gefässes (oder genauer an der Grenze des Bereiches der merkbaren anziehenden Kraft der Gefässwandung) mit der Tangentialebene an die Gefässwand an eben der Stelle einschliesst. Dieser Winkel ist nämlich bestimmt durch das Verhältniss der Molecularkräfte des Gefässes und der Flüssigkeit, und er ist nur insofern constant, als die Continuität der Gefässform in der Nachbarschaft der freien Oberfläche nirgends unterbrochen ist. Aber diesen für die ganze Theorie wichtigen Satz hat *Laplace* nicht durch Rechnung bewiesen; denn was er auf Seite 5 der ersten Abhandlung darauf bezügliches beibringt, ist nur eine undeutliche Ausführung und setzt das zu Beweisende bereits voraus. Die Rechnungen Seite 44 u. f. führen nicht zum Ziel. In der zweiten Abhandlung aber wird die Steighöhe von Flüssigkeiten in Capillaren nach anderer Methode behandelt. Die Ergebnisse dieser vereint mit der ersten Methode liefern eine Formel (und zwar die richtige) für den erwähnten Winkel zwischen den Tangentialebenen. Es ist aber zu bemerken, dass hier eigentlich schon vorausgesetzt wird, dass der Winkel constant ist. Ausserdem beschränkt sich die an sich schon wenig befriedigende Methode auf einen sehr speciellen Fall, nämlich den, dass das Gefäss prismatisch ist und verticale Wände besitzt. Nach diesen Erwägungen muss man zugeben, dass die von *Laplace* aufgestellte Theorie in wesentlichen Punkten bis jetzt noch unzureichend und unvollständig ist.

Wir wollen deshalb die Theorie der Gleichgewichtsfigur von Flüssigkeiten, die unter dem Einflusse der Schwere und der von ihr selbst und dem Gefässe ausgeübten Molecularkräfte stehen, von neuem wieder aufnehmen. Hierbei werden wir eine wesentlich andere Methode anwenden, die wir aus den Grundprincipien der Dynamik ableiten, und wir wollen von Anfang an die grösste Allgemeinheit bewahren. Diese Untersuchung führt zu einem ausgezeichneten neuen Theorem, das die vollständige Theorie in einer einzigen sehr einfachen Formel enthält. Aus dieser lassen sich leicht die beiden Theile der *Laplace*'schen Theorie ableiten.

1.

Um eine Gleichgewichtsgleichung für ein System beliebig vieler Massenpunkte, deren Bewegungen irgend welchen Bedingungen unterworfen sind, aufzustellen, eignet sich am besten das Princip der virtuellen Verschiebungen, das wir folgendermaassen aussprechen.

Es möge ein System aus den Massenpunkten m, m', m'' etc. bestehen, und in diesen Punkten seien Massen concentrirt, die wir mit denselben Buchstaben bezeichnen wollen. Ferner sei P eine der beschleunigenden Kräfte, die auf den Punkt m wirken. Denken wir uns nun dem System irgend eine unendlich kleine mit den Bedingungen verträgliche Bewegung (virtuelle Verschiebung) zuertheilt, so soll dp die Verschiebung des Punktes m in Richtung der Kraft P bedeuten, d. h. also die Verschiebung multiplicirt mit dem Cosinus des Winkels, den sie mit der Richtung der Kraft P bildet. Es sei endlich $\Sigma P dp$ die Summe aller solcher Produkte, die man bilden kann unter Berücksichtigung aller im Punkte m angreifenden Kräfte. In gleicher Weise soll P' die auf den Punkt m' wirkenden Kräfte, dp' die Projectionen der Verschiebungen auf die Kraftrichtungen bezeichnen, und ebenso für die übrigen Punkte.

Die Gleichgewichtsbedingung für das System besteht nun darin, dass die Summe

$$m \Sigma P dp + m' \Sigma P' dp' + m'' \Sigma P'' dp'' + \cdots$$

für jede virtuelle Verschiebung verschwindet. Es ist dies die allgemein gegebene Fassung des »Princips der virtuellen Verschiebungen«. Strenger genommen darf diese Summe für keine virtuelle Verschiebung positive Werthe annehmen.

2.

Die hier in Betracht kommenden Kräfte können in drei Klassen zerlegt werden.

I. Die Schwere. Ihre Intensität kann für die einzelnen Punkte als gleich, ihre Richtungen als einander parallel angesehen werden. Wir bezeichnen sie mit dem Buchstaben g.

II. Die anziehenden Kräfte, die die Punkte m, m', m'' u. s. w. auf einander ausüben. Die Grösse dieser Anziehung setzen wir proportional einer Function des Abstandes an, d. h. gleich dem Product aus dieser Function — die wir durch das Zeichen f charakterisiren wollen — und der in dem anziehenden Punkte concentrirten Masse.

III. Die Kräfte, mit denen die Punkte m, m', m'' u. s. f. nach irgend welchen festen Punkten hin angezogen werden. Zur Bezeichnung dieser Kräfte möge in gleicher Weise, wie vorher, der Buchstabe F, der dem jeweiligen Abstand voran zu schreiben ist, dienen. Die festen Punkte selber, sowie auch die in ihnen concentrirt gedachten Massen mögen mit M, M', M'' etc. bezeichnet werden.

Wir wollen nun noch den Abstand der zwei Punkte m und m' mit dem Zeichen (m, m'), den Abstand von m und M mit (m, M) bezeichnen u. s. f. Endlich seien z, z', z'' ... die verticalen Höhen der Punkte m, m', m'' ... über einer willkürlich festzulegenden Horizontalebene H. Der Complex $\Sigma P dp$ enthält dann folgende Glieder:

$$\begin{aligned}
&- g\,dz \\
&- m' f(m,m')\,d(m,m') - m'' f(m,m'')\,d(m,m'') \\
&\qquad\qquad - m''' f(m,m''')\,d(m,m''') \ldots \text{ etc.} \\
&- MF(m,M)\,d(m,M) - M'F(m,M')\,d(m,M') \\
&\qquad\qquad - M''F(m,M'')\,d(m,M'') \ldots \text{ etc.}
\end{aligned}$$

Es sind hier $d(m,m')\,d(m,m'')$ u. s. w. partielle Differentiale, d. h. sie beziehen sich nur auf die virtuelle Verschiebung des Punktes m.

Wir wollen hier an Stelle von f diejenige Function einführen, durch deren Differentiation f entsteht. Es sei also

$$- f(x)\,dx = d\,\varphi(x)$$

oder:

$$\int f(x)\,dx = - \varphi(x).$$

Die Integrationsconstante kann hier beliebig gewählt werden. Wenn es zweckmässig scheint, mag sie so bestimmt werden, dass $f(\infty) = 0$ wird. Es bezeichnet dann $\varphi(t)$ das bestimmte Integral:

$$\int_{x=t}^{x=\infty} f(x)\,dx.$$

In gleicher Weise führen wir an Stelle von F eine Function Φ ein, die gegeben ist durch die Gleichung:

$$-F(x)\,dx = d\Phi(x).$$

Es wird jetzt

$$\begin{aligned}
&\Sigma P dp = \\
&-g dz \\
&+m' d\varphi(m,m') + m'' d\varphi(m,m'') + m''' d\varphi(m,m''') + \cdots \\
&+M d\Phi(m,M) + M' d\Phi(m,M') + M'' d\varphi(m,M'') + \cdots
\end{aligned}$$

und hierin sind wieder die Differentiale der zweiten Zeile partielle Differentiale, die nur von der Verschiebung von m abhängen.

Es hat offenbar jedes dieser Differentiale seine Ergänzung in einem anderen Complex. So enthält sowohl der Complex $m\Sigma P dp$ als auch der Complex $m'\Sigma P' dp'$ das partielle Differential $m\,m' d\varphi(m,m')$, aber im einen bezieht sich das partielle Differential d nur auf die Bewegung von m, im anderen nur auf die von m'. Es geht hieraus hervor, dass die in Abschnitt 1 aufgestellte Summe ein vollständiges Differential bildet, das $= d\Omega$ ist, wenn wir setzen:

$$\begin{aligned}
&\Omega = \\
&-gmz - gm'z' - gm''z'' \cdots\cdot \\
&+mm'\varphi(m,m') + mm''\varphi(m,m'') + mm'''\varphi(m,m''') + \cdots\cdot \\
&\qquad\qquad + m'm''\varphi(m,'m'') + m'm'''\varphi(m,'m''') + \cdots\cdot \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + m''m'''\varphi(m,''m''') + \cdots\cdot \\
&+mM\Phi(m,M) + mM'\Phi(m,M') + mM''\Phi(m,M'') + \cdots\cdot \\
&+m'M\Phi(m,'M) + m'M'\Phi(m,'M') + m'M''\Phi(m,'M'') + \cdots\cdot \\
&+m''M\Phi(m,''M) + m''M'\Phi(m,''M') + m''M''\Phi(m,''M'') + \cdots\cdot \\
&+\cdots\cdot
\end{aligned}$$

Die Gleichgewichtsbedingung besteht demnach darin, dass der Werth der Function Ω durch keine virtuelle Verschiebung einen positiven Zuwachs erlangen kann, oder, was dasselbe ist, dass Ω ein Maximum ist.

Wir können die Function Ω auch in der Form schreiben:

$$\begin{aligned}
\Omega = \Sigma m\{&-gz + \tfrac{1}{2}m'\varphi(m,m') + \tfrac{1}{2}m''\varphi(m,m'') + \tfrac{1}{2}m'''\varphi(m,m''') + \cdots\cdot \\
&+ M\Phi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \cdots\cdot\}
\end{aligned}$$

Hierin soll das Zeichen Σ ausdrücken, dass über alle die Ausdrücke summirt werden soll, die man erhält, wenn in vorstehender Form nach einander m mit m', m'', m''' u. s. w. vertauscht wird.

3.

Wenn wir uns an Stelle discreter Punkte $M, M', M'' \ldots$ einen Körper denken, der continuirlich einen Raum S mit gleichförmiger Dichte $= C$ erfüllt, dann tritt an Stelle der Summe

$$M\Phi(m,M) + M'\Phi(m,M') + M''\Phi(m,M'') + \text{etc.}$$

das Integral

$$C\int dS\,\Phi(m,dS),$$

das über den ganzen Raum S zu erstrecken ist. Es bezeichnet hier analog der früheren Bedeutung (m,dS) den Abstand des Punktes m von jedem Raumelemente dS des Raumes S.

Wenn nun ferner an Stelle der discreten Punkte m, m', m'' etc. ein continuirlicher Körper tritt, der einen Raum s mit gleichförmiger Dichte $= c$ erfüllt, dann erfordert die Berechnung von Ω eine zweifache Integration.

Es ergiebt sich dann zunächst für einen vorerst noch unbestimmten Punkt μ ein Werth

$$-gz + \tfrac{1}{2}c\int ds\,\varphi(\mu,ds) + C\int dS\,\Phi(\mu,dS),$$

worin z die Höhe des Punktes μ über der Ebene H bedeutet, und das erste Integral über den ganzen Raum s, das zweite über den ganzen Raum S zu erstrecken ist. Dieser Werth hängt nur von der Lage von μ ab. Bezeichnen wir ihn mit $[\mu]$, so wird

$$\Omega = c\int ds\,[\mu],$$

und hierin ist die Integration wieder über den ganzen Raum s zu erstrecken.

Wir können das kurz ausdrücken durch:

$$\Omega = -gc\int z\,ds + \tfrac{1}{2}c^2\iint ds\,ds'\,\varphi(ds,ds') + Cc\iint ds\,dS\,\Phi(ds,dS).$$

Hierin bezeichnen s und s' beide ein und denselben Raum (nämlich den vom beweglichen Körper erfüllten). Er muss aber zweimal in seine Elemente aufgelöst werden zum Zwecke der doppelten Integration.

4.

Das charakteristische Merkmal flüssiger Körper besteht in der vollkommenen Beweglichkeit selbst der kleinsten Theilchen. Sie können also beliebige Formen annehmen und müssen auch den denkbar kleinsten Kräften, die ihre Formen zu verändern suchen, nachgeben. In inexpansibeln (tropfbaren) Flüssigkeiten, mit denen sich unsere Untersuchung beschäftigen soll, muss bei allen Formänderungen das Volumen eines jeden Theiles constant bleiben. Betrachten wir aber einen flüssigen Körper, dessen Bewegung durch einen unbeweglichen festen Körper (ein Gefäss) begrenzt wird, und auf dessen Theilchen ausser der Schwere die wechselseitige Anziehung der Theilchen unter einander und die Anziehung der Gefässtheilchen wirken mögen, so erfordert die Gleichgewichtsbedingung, dass der Werth von Ω ein Maximum sei, das heisst, es darf keine unendlich kleine Verschiebung der Flüssigkeitstheilchen einen positiven Zuwachs von Ω verursachen. Da aber offenbar der Werth von Ω nur dadurch geändert werden kann, dass sich die Gestalt des Raumes, den die ganze Flüssigkeit erfüllt, ändert (und nicht durch eine alleinige Bewegung im Inneren der Flüssigkeit), so wird Gleichgewicht herrschen, wenn bei keiner unendlich kleinen Veränderung dieser Gestalt — die verträglich mit der Form des Gefässes vorausgesetzt werden muss — bei constant bleibendem Volumen ein Zuwachs von Ω eintritt. Es folgt hieraus sofort, dass, wenn die Gestalt der Flüssigkeit überhaupt keine Veränderung erfahren kann — (wenn etwa das Gefäss die Flüssigkeit von allen Seiten dicht anliegend umgiebt) die genannten, auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte eine innere Bewegung der Flüssigkeit nicht verursachen können, dass sie sich also gegenseitig das Gleichgewicht halten.

5.

Wir gehen jetzt zu einer genaueren Erforschung des Ausdruckes Ω über, der als Grundlage der Gleichgewichtstheorie der Flüssigkeiten angesehen werden muss. Beginnen wir mit dem ersten Term, so sieht man ohne Weiteres, dass $\int z\,ds$ das Product aus dem Volumen des Raumes s und der Höhe seines Schwerpunktes über der Ebene H bedeutet. Ebenso ist $c\int z\,ds$ das Product aus der Masse, $gc\int z\,ds$ das Product aus dem Gewicht der Flüssigkeit und derselben Höhe. Wenn nun die

Flüssigkeitstheile anderen Kräften, als der Schwere, nicht unterworfen wären, dann müsste die Höhe des Schwerpunktes in der Gleichgewichtslage möglichst klein sein. Es folgt hieraus leicht, dass die freie Oberfläche, respective die freien Oberflächen in ein und derselben Horizontalebene liegen müssen, die dann die Flüssigkeit von oben her begrenzt.

6.

Die Betrachtung des zweiten und dritten Terms ist zurückzuführen auf zwei particuläre Fälle des allgemeinen Problems, in dem die einzelnen Elemente zweier beliebig gegebener Räume wechselseitig mit einander combinirt und die Producte aus je drei Factoren, nämlich aus dem Volumen eines Elementes des ersten Raumes, dem Volumen eines Elementes des zweiten, und einer gegebenen Function des wechselseitigen Abstandes zu einer Summe vereinigt werden sollen. Der zweite Term führt dann zu dem Falle, wo beide Räume mit einander identisch sind, der dritte Term zu dem, wo der eine Raum ganz ausserhalb des anderen liegt. Das vollständige Problem umfasst noch zwei andere Fälle, nämlich die, wo der eine Raum ein Theil des anderen ist, und wo der eine Raum mit dem anderen einen Theil gemeinsam hat. Wenn nun auch die zwei ersten Fälle für unser Vorhaben ausreichen würden, und sich andererseits auch die zwei letzten leicht auf die ersteren zurückführen lassen, so scheint es doch der Mühe werth, das an sich wichtige Problem ganz allgemein zu behandeln. Die beiden Räume wollen wir in dieser allgemeinen Untersuchung mit s, S, die Function des Abstandes durch das Zeichen φ kennzeichnen. Wir haben dann bei Anwendung auf den zweiten Term für S den Raum s, bei Anwendung auf den dritten an Stelle von φ die Function Φ einzuführen. Es handelt sich also um das Integral

$$\iint ds\, dS\, \varphi(ds, dS),$$

das äusserlich die Form eines Doppelintegrals hat. In der That aber umfasst es, da die Elemente eines jeden Raumes von drei Variabeln abhängen, eine sechsfache Integration, die wir — wie gleich gezeigt wird — auf eine vierfache zurückführen können.

7.

Wir beginnen mit der Behandlung des Integrals $\int ds\,\varphi(\mu, ds)$, das über alle Theile des Raumes s zu erstrecken ist. Es bedeutet hierin μ einen bestimmten Punkt, der entweder ausserhalb oder innerhalb von s gelegen ist. Wir denken uns eine Kugelfläche mit dem Radius 1 um den Mittelpunkt μ herum beschrieben, und in unendlich kleine Elemente zerlegt. Es sei $d\Pi$ ein solches Flächenelement, und es schneide eine Gerade, die von μ aus gegen einen Punkt dieses Elementes geführt wird, die Oberfläche des Raumes s der Reihe nach in den Punkten p', p'', p''' u. s. w. Die Anzahl dieser Punkte wird eine gerade oder ungerade sein, jenachdem μ ausserhalb oder innerhalb von s liegt. Die Abstände $\mu p'$, $\mu p''$, $\mu p'''$ etc. bezeichnen wir mit r', r'', r''' etc. Es sollen ferner von μ aus nach den einzelnen Punkten der Peripherie des Elementes $d\Pi$ gerade Linien gezogen werden, so dass dadurch ein pyramidenförmiger Raum gebildet wird. Durch dessen Mantelfläche werden aus der Oberfläche des Raumes s an den Orten der Punkte p', p'', p''' etc. Flächenelemente herausgeschnitten, die wir mit dt', dt'', dt''' etc. bezeichnen wollen. Es sei endlich q' der Winkel, den die Gerade $p'\mu$ mit der äusseren Normalen auf dem Flächenelement dt' bildet. Analog seien q'', q''' ... die Winkel, die die entsprechenden Normalen bei p'', p''' ... mit der nach μ hin gezogenen Geraden einschliessen. Es wird somit offenbar

$$d\Pi = \pm \frac{dt' \cos q'}{r'^2} = \mp \frac{dt'' \cos q''}{r''^2} = \pm \frac{dt''' \cos q'''}{r'''^2} \quad \text{etc.}$$

Hierin gelten die oberen, resp. unteren Vorzeichen, je nachdem μ ausserhalb oder innerhalb s liegt.

Es leuchtet ferner ein, dass das Integral $\int ds\,\varphi(\mu, ds)$ für diejenigen Theile des Raumes s, die in unserem pyramidenförmigen Raume enthalten sind, wiedergegeben werden durch das Integral

$$d\Pi \int r^2 \varphi(r)\, dr\,,$$

das zu erstrecken ist von $r = r'$ bis $r = r''$, dann von $r = r'''$ bis $r = r''''$ u. s. f., wenn μ ausserhalb s liegt, oder aber von $r = 0$ bis $r = r'$, dann von $r = r''$ bis $r = r'''$ u. s. f., wenn μ innerhalb s liegt. Setzen wir nun das unbestimmte Integral

$$\int r^2 \varphi(r)\, dr = -\,\psi(r)\,,$$

worin die Integrationsconstante willkürlich angenommen ist, so erhält das Integral $\int ds\, \varphi(\mu, ds)$, in soweit es über die in dem pyramidenförmigen Raume von s gelegenen Theile erstreckt wird, den Werth

$$d\Pi(\psi(r') - \psi(r'') + \psi(r''') - \text{etc.})$$
$$= \frac{dt' \cos q' \psi(r')}{r'^2} + \frac{dt'' \cos q'' \psi(r'')}{r''^2} + \frac{dt''' \cos q''' \psi(r''')}{r'''^2} + \text{u. s. w.},$$

vorausgesetzt, dass μ ausserhalb s liegt; und

$$d\Pi(\psi(0) - \psi(r') + \psi(r'') \cancel{+} \psi(r''') + \text{etc.})$$
$$= d\Pi\,\psi(0) + \frac{dt' \cos q' \psi(r')}{r'^2} + \frac{dt'' \cos q'' \psi(r'')}{r''^2} + \frac{dt''' \cos q''' \psi(r''')}{r'''^2} + \text{u. s. w.},$$

wenn μ innerhalb des Raumes s liegt.

Erstrecken wir nun diese Summation auf alle Theile der Kugeloberfläche, so wird das vollständige Integral $\int ds\, \varphi(\mu, ds)$

im ersten Falle $= \int \frac{dt \cos q\, \psi(r)}{r^2}$,

im zweiten $= 4\pi\psi(0) + \int \frac{dt \cos q\, \psi(r)}{r^2}$.

Es bezeichnet hier dt unbestimmt alle Elemente der Oberfläche des Raumes s, und q, r für diese Elemente das gleiche, was die mit den Accenten versehenen entsprechenden Buchstaben für die bestimmten einzelnen Elemente bedeutet haben. Endlich ist π der halbe Umfang des Einheitskreises.

Man erkennt ausserdem noch leicht, dass, wenn der Punkt μ weder innerhalb, noch ausserhalb von s, sondern in der Oberfläche selbst liegt, die zweite Formel gilt, nachdem der Factor 4π durch 2π ersetzt ist, vorausgesetzt, dass die Oberfläche im Punkte μ weder eine Spitze, noch eine scharfe Kante aufzuweisen hat. Für unseren Zweck aber ist es nicht nöthig, auf diesen Fall einzugehen.

8.

Durch die Untersuchung des vorhergehenden Abschnittes wird die Entwicklung des Integrals $\iint ds\, dS\, \varphi(ds, dS)$ zurückgeführt auf

$$4\pi\,\sigma\,\psi(0) + \iint dt\,dS\;\frac{\cos q\;\psi\,(dt,dS)}{(dt,dS)^2}\,,$$

wenn wir mit σ das Volumen des Raumes bezeichnen, der beiden Räumen S und s gemeinsam ist. Es fällt somit der erste Term $4\pi\sigma\,\psi(0)$ weg, wenn beide Räume sich gegenseitig ausschliessen. Es bleibt noch ein neues Integral übrig, das dem Anschein nach immer noch zweifach, in der That aber fünffach ist. Um dieses auf ein Vierfaches zurückzuführen, betrachten wir das Integral:

$$\int dS\,\frac{\cos q\;\psi\,(\mu,dS)}{(\mu,dS)^2}\,,$$

das über alle Elemente des Raumes S zu erstrecken ist.

Es bezeichnet hierin wieder μ einen festen Punkt und q den Winkel zwischen zwei von diesem Punkte ausgehenden Geraden, von denen die eine gegen das Element dS hin gerichtet, die andere im Raume fest ist*). Dieses Integral, das dem Anscheine nach einfach, in Wirklichkeit dreifach ist, werden wir jetzt auf ein zweifaches zurückführen, und zwar auf zwei ganz verschiedene Arten.

Wir denken uns durch den Punkt μ eine Ebene, die wir mit Π bezeichnen, senkrecht zu der festen Geraden gelegt, und theilen diese, soweit sie von der Projection des Raumes S getroffen wird, in unendlich kleine Flächenelemente $d\Pi$. In einem Punkte eines solchen Elementes $d\Pi$ errichten wir eine Senkrechte zu Π, die der Reihe nach, d. h. beim Fortschreiten in einer zu der festen Geraden parallelen Richtung, die Oberfläche von S in den Punkten P', P'', P''' etc. schneidet. Die Abstände dieser Punkte von μ seien R', R'', R''' etc. Die in ähnlicher Weise in allen Punkten der Peripherie von $d\Pi$ senkrecht zu Π errichteten Geraden bilden einen prismatischen Raum und schneiden aus der Oberfläche von S Elemente heraus, die wir mit dT', dT'', dT''' u. s. w. bezeichnen wollen. Endlich sei χ' der Winkel zwischen den zwei von P' ausgehenden Geraden, von denen die eine auf dT' normal und nach aussen gerichtet, die andere zu der festen Geraden parallel ist. Die entsprechenden Winkel für P'', P''' etc. seien χ'', χ''' etc. Es wird somit offenbar:

$$d\Pi = -\,dT'\cos\chi' = +\,dT''\cos\chi'' = -\,dT'''\cos\chi''' \quad \text{etc.}$$

*) Diese wird nachher die Normale auf die Oberfläche von s. (W.)

Den prismatischen Raum wollen wir in unendlich kleine Elemente $d\Pi\,dz$ zerlegen, wo z den Abstand eines unbestimmten Punktes von der Ebene Π bezeichnet (z sei positiv nach der Richtung hin, nach welcher die feste Gerade weist). Wenn wir also den Abstand dieses Punktes von μ mit r bezeichnen, so ist

$$z = r \cos q,$$

und da $r^2 - z^2$ constant ist, wird $z\,dz = r\,dr$ oder:

$$d\Pi\, \overset{dz}{\cancel{dr}} \cos q = d\Pi\, dr.$$

Hieraus schliessen wir, dass unser Integral

$$\int dS \,\frac{\cos q\, \psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2},$$

soweit es sich auf die Theile des Raumes S erstreckt, die in dem prismatischen Raum enthalten sind, durch das Integral

$$d\Pi \int \frac{dr\, \psi(r)}{r^2}$$

ausgedrückt wird, welches zu erstrecken ist von $r = R'$ bis $r = R''$, ferner von $r = R'''$ bis $r = R''''$ u. s. w. Wenn wir also setzen

$$\int \frac{dr\, \psi(r)}{r^2} = - \vartheta(r)$$

mit willkürlich angenommenen Integrationsconstanten, dann wird unser Integral, soweit es sich auf die innerhalb des prismatischen Raumes gelegenen Theile von S erstreckt

$$= d\Pi(\vartheta(R') - \vartheta(R'') + \vartheta(R''') - \text{etc.})$$
$$= - dT' \cos\chi' \vartheta(R') - dT'' \cos\chi'' \vartheta(R'') - dT''' \cos\chi''' \vartheta(R''') \text{ etc.}$$

Addiren wir nun diese Summen, die für die Prismenräume aller einzelnen Elemente $d\Pi$ gelten, so sind offenbar dadurch alle Oberflächenelemente von S erschöpft, und wir haben das vollständige Integral

$$\int dS \frac{\cos q\, \psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2} = - \int dT \cos\chi\, \vartheta(R).$$

Hierin bedeutet dT unbestimmt jedes Oberflächenelement von S, R dessen Abstand von μ, und χ den Winkel zwischen der äusseren Normalen auf dem Elemente dT und einer zu der festen Geraden parallelen Geraden.

Auf diese Weise ist also das Integral

$$\iint ds\, dS\, \varphi(ds, dS)$$

zurückgeführt auf die Form

$$4\pi\sigma\psi(0) - \iint dt\, dT \cos\chi\, \vartheta(dt, dT)\,,$$

worin χ den Winkel bezeichnet, den die zwei Oberflächenelemente dt, dT mit einander einschliessen, gemessen durch die Neigung der beiden nach dem Aussenraume von s und S hin auf ihnen errichteten Normalen gegen einander. Die Integrationen sind über die ganzen Oberflächen der beiden Räume zu erstrecken.

9.

So wie die vorhergehende Methode mit einer Zerlegung des Raumes S in prismatische Raumelemente verknüpft ist, so erfordert die folgende eine Zerlegung dieses Raumes in pyramidenförmige Elemente. Wir denken uns eine Kugelfläche mit dem Radius 1 um den Punkt μ als Mittelpunkt gelegt und in unendlich kleine Flächenelemente zerlegt. Gegen einen Punkt eines solchen Elementes $d\Pi$ werde eine Gerade von μ aus gezogen, die die Oberfläche von S der Reihe nach in P', P'', P''' etc. treffen möge. Die Abstände dieser Punkte von μ seien R', R'', R''' etc. Die nach allen Punkten der Peripherie von $d\Pi$ hin gezogenen Geraden schliessen einen pyramidenförmigen Raum ein und schneiden bei den Punkten P', P'', P''' etc. aus der Oberfläche von S Flächenelemente heraus, die wir mit dT', dT'', dT''' etc. bezeichnen wollen. Es sei endlich Q' der Winkel, den die Gerade $P'\mu$ mit der äusseren Normalen auf dT' einschliesst. Q'', Q''' etc. sind die Winkel zwischen den entsprechenden Normalen in P'', P''' etc. und der Geraden nach μ. Es wird somit:

$$d\Pi = \pm\frac{dT'\cos Q'}{R'^2} = \mp\frac{dT''\cos Q''}{R''^2} = \pm\frac{dT'''\cos Q'''}{R'''^2}\ \text{etc.}$$

Hier gelten die oberen oder unteren Vorzeichen, je nachdem μ ausserhalb oder innerhalb von S liegt. Der Fall, dass μ auf der Oberfläche des Raumes S selber liegt, ist dem ersten oder zweiten Falle zuzuschreiben, je nachdem die Gerade $\mu P'$ ausserhalb von S liegt oder innerhalb.

Es leuchtet ein, dass für alle Theile des Raumes S, die in jenem pyramidenförmigen Gebiete liegen, der Winkel q constant ist. Wir setzen jetzt das unbestimmte Integral

$$\int \psi(r)dr = -\theta(r)$$

mit willkürlich gewählter Integrationsconstante und es wird dann ähnlich wie früher in Abschnitt 7 das Integral

$$\int \frac{dS \cos q\, \psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2},$$

insoweit es über alle in dem pyramidenförmigen Gebiete gelegenen Theile zu erstrecken ist, im ersten Falle

$$= \cos q \left(\frac{dT' \cos Q' \theta(R')}{R'^2} + \frac{dT'' \cos Q'' \theta(R'')}{R''^2} + \frac{dT''' \cos Q''' \theta(R''')}{R'''^2} \text{ etc.}\right),$$

im zweiten Falle tritt hierzu noch der Term

$$d\Pi \cos q\, \theta(0).$$

Erstrecken wir jetzt diese Summation über alle Oberflächenelemente der Einheitskugel, so wird das vollständige Integral

$$\int \frac{dS \cos q\, \psi(\mu, dS)}{(\mu, dS)^2}$$

I. in dem Falle, wo der Punkt μ ausserhalb des Raumes S liegt

$$= \int \frac{dT \cos q \cos Q\theta(R)}{R^2}.$$

Hier bezeichnet dT unbestimmt alle Oberflächenelemente des Raumes S, und Q, R bezüglich dieses Elementes das gleiche, was früher die gleichen mit Accent versehenen Buchstaben für die bestimmten einzelnen Elemente dT' etc. besagten. Ferner bedeutet q die Neigung der vom Punkte μ aus nach dT hin gezogenen Geraden gegen unsere feste Gerade.

II. In dem Falle, wo μ innerhalb des Raumes S liegt, tritt zu dem Integral additiv noch der Term

$$\theta(0)\int d\Pi \cos q,$$

wo q den Winkel zwischen der von μ nach $d\Pi$ gezogenen

Geraden und der festen Geraden bedeutet, und die Integration hier über die ganze Kugeloberfläche zu erstrecken ist. Man überzeugt sich aber leicht, dass dieses Integral, erstreckt über die Halbkugel, innerhalb deren q ein spitzer Winkel ist, $= + \pi$ wird, über die andere Halbkugel erstreckt aber $= - \pi$. Deshalb verschwindet das über die ganze Kugel erstreckte Integral, und es gilt also auch in diesem zweiten Falle ganz die gleiche Formel, die wir für den ersten aufgestellt haben. Anders verhält es sich im dritten,

III. in dem der Punkt μ auf der Oberfläche von S liegt. Auch hier tritt der Term

$$\theta(0) \int d\Pi \cos q$$

hinzu, aber die Integration ist nur über die Theile der Oberfläche der Kugel zu erstrecken, für die das Anfangsstück der von μ nach $d\Pi$ gezogenen Geraden in den Raum S fällt, oder (wenn wenigstens die Oberfläche von S bei μ weder eine Spitze noch eine Schneide bildet) für welche diese Gerade einen stumpfen Winkel mit der im Punkte μ auf S nach aussen hin errichteten Normalen bildet. Es bleibt uns also noch übrig, das sich unter diesen Gesichtspunkten bietende Integral zu ermitteln. Es mögen diese Normale und die feste Gerade die Kugeloberfläche resp. in den Punkten G, H schneiden, und es sei der Bogen $GH = k$, der Bogen zwischen G und einem variabeln Punkt der Kugelfläche $= v$; es sei schliesslich w der sphärische Winkel zwischen k und v. Auf die Weise wird

$$\cos q = \cos k \cos v + \sin k \sin v \cos w,$$

und für $d\Pi$ haben wir das Element $\sin v\, dv\, dw$ zu setzen. Es wird demnach das Integral

$$\int d\Pi \cos q$$
$$= \iint (\cos k \cos v + \sin k \sin v \cos w) \sin v\, dv\, dw,$$

und diese Integrale sind zu erstrecken von $w = 0$ bis $w = 360^\circ$ und von $v = 90^\circ$ bis $v = 180^\circ$. Unter diesen Umständen liefert uns die erste Integration

$$\int 2\pi \cos k \cos v \sin v dv$$

2*

und die zweite

$$-\pi \cos k\,.$$

Für unseren Zweck kommt nun dieser dritte Fall nur dann in Betracht, wenn die Oberflächen der Räume s und S ein gewisses endliches Stück der Oberfläche gemeinsam haben. Befindet sich der Punkt μ auf diesem, so wird entweder $k=0$ oder $=180^0$, und es wird somit $\int d\Pi \cos q$ entweder $=-\pi$ oder $=+\pi$, je nachdem die Räume s, S sich auf der gleichen oder auf entgegengesetzten Seiten bezüglich der gemeinsamen Tangentialebene beider Oberflächen befinden.

Wenden wir dieses Resultat auf das Integral an, von dem wir ausgegangen sind: $\iint ds\,dS\,\varphi(ds,dS)$, so wird dessen Werth:

I. wenn die Oberflächen der Räume s, S keinen gemeinsamen Theil haben

$$=4\pi\sigma\psi(0)+\iint\frac{dt\,dT\cos q\cos Q\,\theta(dt,dT)}{(dt,dT)^2}\,;$$

II. wenn die Oberflächen von s und S einen endlichen Theil $=\mathfrak{t}$ gemeinsam haben

$$=4\pi\sigma\psi(0)\mp\pi\,\mathfrak{t}\,\theta(0)+\iint\frac{dt\,dT\cos q\cos Q\,\theta(dt,dT)}{(dt,dT)^2}\,,$$

worin das obere oder untere Zeichen gilt, je nachdem die Räume s, S auf gleicher oder auf entgegengesetzten Seiten der gemeinsamen Oberfläche $\mathfrak{t}$ liegen;

III. wenn die Oberflächen der Räume (s, S) mehrere discrete endliche Theile gemein haben, sei $\mathfrak{t}$ die Summe derer, die von den Räumen s, S auf gleicher Seite, $\mathfrak{t}'$ die Summe derer, die auf entgegengesetzter berührt werden. Dann wird unser Integral

$$=4\pi\sigma\psi(0)+\pi(\mathfrak{t}'-\mathfrak{t})\,\theta(0)$$
$$+\iint\frac{dt\,dT\cos q\cos Q\,\theta(dt,dT)}{(dt,dT)^2}\,.$$

Diese dritte Formel kann als die Zusammenfassung aller möglichen Fälle aufgefasst werden. Das doppelte Integral ist über alle Elemente beider Oberflächen zu erstrecken. Es bezeichnen q, Q die Winkel, die die Verbindungslinie von dt und dT mit den beiden äusseren Normalen auf diesen Elementen bilden, und es ist hierbei die Richtung dieser Verbindungslinien für den Winkel q von dt nach dT, für den Winkel Q von dT nach dt als positiv zu erachten.

10.

Die zwei in Abschnitt 8 und 9 behandelten Umformungen des Integrals $\int ds\, dS\, \varphi(ds, dS)$ sind ungefähr von gleicher Einfachheit, für unseren Zweck ist aber die zweite geeigneter. Noch weiter kann das allgemeine Problem nicht reducirt werden, wenn wir nicht specielle Annahmen bezüglich der Räume s, S oder bezüglich der Function φ zu Grunde legen. Die Function φ leitet sich aus der Function f ab, und wir wollen bezüglich dieser unsere weitere Behandlung auf der gleichen Hypothese aufbauen, von der *Laplace* ausgegangen ist, dass nämlich die anziehenden Molecularkräfte erst in unmessbar kleinen Abständen messbare Werthe annehmen. Da dieser Ausdruck etwas Unbestimmtes hat, so lange wir nicht eine Einheit zu Grunde legen, wollen wir vor allem darauf aufmerksam machen, dass wir die anziehende Kraft $f(r)$, ausgedrückt als eine Function des Abstandes r, mit einer Masse multiplicirt denken müssen, damit sie mit der Gravitation g in den Dimensionen übereinstimmt. Der Sinn unserer Voraussetzung ist dann der folgende: Bezeichnet M irgend eine Masse, derart, wie sie uns in Experimenten vorkommt, nämlich eine, die im Vergleich mit der ganzen Erde als verschwindend angesehen werden kann, dann muss $Mf(r)$ immer unmerklich sein im Vergleich mit der Schwere, so lange r einen unseren Messungen zugänglichen, wenn auch noch so kleinen Werth hat. Gleichwohl hindert nichts, dass der Werth von $Mf(r)$ in unmessbar kleinen Abständen nicht nur merkbare Grössen annehmen, sondern beim Abnehmen von r sogar alle Grenzen übersteigen kann. Es ist überraschend, wie wichtige Thatsachen mathematisch speciellen Charakters sich aus dieser einen Hypothese ableiten lassen, auch wenn wir im Uebrigen das Gesetz der Function $f(r)$ als unbekannt ansehen: Und wenn auch diese Thatsache unter solchen Umständen eine absolute mathematische Genauigkeit nicht beanspruchen kann, so ist doch diese Genauigkeit sicher so gross, dass durch kein Experiment irgend eine Abweichung von der absoluten Wahrheit gefunden werden kann; denn sobald es gelänge, eine solche Abweichung einer Messung zu unterwerfen, dann würde die Hypothese selbst fallen müssen.

11.

Es wird die Annahme erlaubt sein, dass die Function $f(r)$ [und ebenso auch $F(r)$] eine Anziehung bedeutet, in der der Theil fehlt, der mit r^2 umgekehrt proportional ist und der zur Erklärung der astronomischen Erscheinungen dient; denn dieser Theil vermag an jedem Orte nur eine unmerklich kleine Beeinflussung der Schwere zu verursachen, wie beschaffen auch die Form der Flüssigkeit und des Gefässes ist. Wenn also r von einem messbaren Werthe an ins Unendliche wächst, so wird $f(r)$ nicht nur an sich unendlich klein, sondern es wird sogar schneller abnehmen als $\frac{1}{r^2}$. Hieraus folgt leicht, dass auch das Integral $\int f(r)dr$, von einem messbaren Werthe bis ins Unendliche erstreckt; unmessbar klein ist. Wir denken uns daher die Integrationsconstante von:

$$\int f(r)dr = -\varphi(r)$$

so festgesetzt, dass sich ergiebt:

$$\varphi(\infty) = 0$$

oder so, dass $\varphi(r)$ den Werth des Integrals $\int_r^\infty f(x)dx$ bedeutet. Nach dieser Festsetzung bedeutet $\varphi(r)$ für jeden Abstand r eine positive Grösse, die aber unendlich klein ist, so lange r messbar ist; dagegen kann $\varphi(r)$ für einen unmessbar kleinen Werth von r nicht nur endlich sein, sondern sogar bei stetig abnehmendem r alle Grenzen übersteigen. Mit anderen Worten, es steht nichts im Wege, dass $\varphi(0) = \infty$ wird.

12.

Da also die Function $\varphi(r)$ für jeden messbaren Werth von r unmessbar klein ist und mit wachsendem r stetig abnimmt, so folgt sogleich, dass das Integral $\int r^2\varphi(r)dr$ von irgend einem messbaren Werthe bis zu einem anderen grösseren erstreckt auch jetzt noch unmessbar bleibt, wenn nur dieser zweite Werth in den Grenzen des dem Experiment Zugänglichen liegt: man darf aber aus dieser einen Eigenschaft keineswegs schliessen, dass das Integral unmessbar bleibt, wenn wir die Integration bis zu einem beliebig grossen Werthe von r erstrecken. Die Rechnungen von *Laplace* sind so dargestellt, dass sie eine solche Hypothese einschliessen; aber da die Natur der Function $\varphi(r)$ uns unbekannt ist, scheint es vorsichtiger, von allen Hypothesen abzusehen, deren wir nicht unbedingt bedürfen. Da nun die Integrationsconstante von

$$\int r^2 \varphi(r)\, dr = -\psi(r)$$

willkürlich ist, so genügt es, sie so gewählt zu denken, dass $\psi(r) = 0$ wird für irgend einen willkürlichen messbaren Werth von r, der nur in dem Gebiete der Körper gelegen ist, die wir in unser Experiment einbegreifen können. Unter dieser Voraussetzung wird $\psi(r)$ für jeden ähnlichen Werth immer unmessbar klein sein (positiv für einen kleineren, negativ für einen grösseren Werth), aber es steht hier nichts im Wege, dass $\psi(r)$ für einen unmessbar kleinen Werth von r messbare Grenzen erreicht. Es muss noch hinzugefügt werden, dass die Erklärung der Erscheinungen die Annahme erfordert, dass bei einem ins Unendliche abnehmenden r der Werth von $\psi(r)$ immer endlich bleibt, dass also $\psi(0)$ eine endliche Grösse ist.

Es ist im Uebrigen offenbar $\frac{c\,\psi(r)}{r}$ von gleicher Dimension wie g, also $\frac{c\,\psi(r)}{g}$ eine Länge und $\frac{c\,\psi(0)}{g}$ eine durch die Natur der Körper, auf deren anziehende Kräfte sich $f(r)$ bezieht, bestimmte Länge, deren Grösse wir zwar als sehr beträchtlich vermuthen können, die wir aber in bestimmten Fällen kaum angenähert anzugeben vermögen, wenigstens nicht ohne Zuhilfenahme von irgend welchen Hypothesen*).

*) Wenn man die Lichterscheinungen nach der Emanationstheorie erklärt, hängt die Brechung ab von der molecularen Anziehung der Theilchen des durchsichtigen Körpers auf die Lichttheilchen, und das Brechungsverhältniss von dem Werthe $\psi(0)$, und zwar in der Art, dass

$$\frac{c\,\psi(0)}{g} = \frac{(n^2-1)k^2}{8\pi^3 l}$$

13.

Wir haben weiter in ähnlicher Weise bei der Integration $\int \psi(r)\,dr = -\theta(r)$ die Constante so gewählt zu denken, dass $\theta(r) = 0$ wird für einen willkürlich zu wählenden Werth von r, innerhalb der Grenzen gelegen, die uns für unser Experiment zugänglich sind. Es wird so wieder $\theta(r)$ unmessbar klein für jeden derartigen messbaren Werth von r, kann aber trotzdem messbar werden für ein unmessbar kleines r. Offenbar erhält $\frac{c\theta(r)}{g}$ die Dimensionen einer Fläche, und es wird $\frac{\theta(r)}{\psi(r)}$ eine Länge. Nothwendiger Weise aber wird $\frac{\theta(0)}{\psi(0)}$ eine unmessbar kleine Länge, was wir folgendermassen beweisen. Da $\psi(r)$ von $r = 0$ an continuirlich abnimmt, und zwar so schnell, dass es schon unmessbar klein geworden ist, wenn r einen messbaren Werth erreicht hat, so folgt, dass der Werth von r, für den $\psi(r) = \frac{1}{2}\psi(0)$ wird, noch unmessbar klein ist. Wir wollen ihn ϱ nennen. Wir betrachten das Integral

$$\int_0^R [\psi(0) - \psi(r)]\,dr\,,$$

das $= R\psi(0) - \theta(0) + \theta(R)$ wird. Offenbar muss dieses Integral grösser sein, als wenn wir es blos von $r = \varrho$ bis $r = R$ integriren, und dieses wieder grösser, als das Integral

$$\int [\psi(0) - \psi(\varrho)]\,dr\,,$$

in denselben Grenzen integrirt. Da nun dieses letztere Integral den Werth erhält:

$$= [\psi(0) - \psi(\varrho)](R - \varrho) = \tfrac{1}{2}\psi(0)(R - \varrho)\,,$$

---

ist. Es ist hierin l die Länge des Secundenpendels, k der vom Lichte im Vacuum in der Secunde zurückgelegte Weg, n das Verhältniss der Sinus des Einfallswinkels und des Brechungswinkels. Unter dieser Annahme wird für Wasser $\frac{c\,\psi(0)}{g}$ zweitausendmal grösser als die mittlere Entfernung der Sonne von der Erde.

so wird allgemein für jeden Werth R (grösser als ϱ)

$$R\psi(0) - \theta(0) + \theta(R) > \tfrac{1}{2}\psi(0)(R - \varrho).$$

Setzen wir jetzt für R den Werth des Bruches $\dfrac{\theta(0)}{\psi(0)}$, so wird aus dieser Relation:

$$\theta(R) > \tfrac{1}{2}\psi(0)(R - \varrho),$$

eine Beziehung, die widersinnig sein würde, wenn R eine messbare Grösse wäre.

Während also $\psi(0)$ eine sehr bedeutende Grösse ist, so kann gleichwohl $\theta(0)$ von mässiger Grösse und mit den Dimensionen der bei unserem Experiment vorhandenen Körper wohl vergleichbar sein.

14.

Es bleibt uns noch zu untersuchen, was aus dieser Eigenschaft der Function θ für das Integral

$$\int \frac{dt\,dT \cos q \cos Q\,\theta(dt, dT)}{(dt, dT)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(I)}$$

folgt. Wir machen den Anfang mit einer einfacheren Untersuchung, indem wir einen auf der einen Oberfläche festliegenden Punkt μ betrachten und das über die ganze Oberfläche t zu erstreckende Integral

$$\int \frac{dt \cos q \cos Q\,\theta(\mu, dt)}{(\mu, dt)^2} \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

untersuchen. Es bezeichnet hierin Q den Winkel zwischen zwei von μ ausgehenden Geraden, von denen die eine gegen das Element dt gerichtet, die andere im Raume fest ist; q den Winkel zwischen den zwei von dt ausgehenden Geraden, deren eine nach μ hin gerichtet ist, die andere auf dt nach aussen hin senkrecht steht.

Zunächst bemerken wir, dass, wenn der Punkt μ in messbarem Abstand von der Oberfläche t entfernt liegt, alle Werthe $\theta(\mu, dt)$ unmessbar klein werden. In diesem Falle wird also das ganze Integral (II) unmessbar klein. Es erlangt also dieses Integral nur dann einen messbaren Werth, wenn die Oberfläche t Theile besitzt, die in unmessbar kleinem Abstand vom Punkte μ liegen, und es genügt dann offenbar, das Integral (II) nur über diese Theile zu erstrecken. Alle in messbarem Abstand gelegenen Theile können wir vernachlässigen.

Wir setzen jetzt für $\frac{dt\cos q}{(\mu,dt)^2}$ den Werth $\pm\, d\Pi$ ein, so dass $d\Pi$ das Oberflächenelement der um μ beschriebenen Einheitskugel bedeutet, auf welches das Element dt vom Punkt μ aus gesehen projicirt wird. Es gilt das obere oder untere Vorzeichen, je nachdem dt seine äussere oder innere Seite dem Punkte μ zukehrt. Es wird somit das Integral (II)

$$=\int \pm\, d\Pi \cos Q\theta(\mu,dt),$$

und es ergiebt sich, dass dieses Integral nur dann einen messbaren Werth annehmen kann, wenn diejenigen Elemente $d\Pi$, die zu unmessbar kleinen Abständen (μ,dt) gehören, einen messbar grossen Raum auf der Kugeloberfläche erfüllen.

Hieraus kann man leicht folgern, dass unser Integral, allgemein gesagt, auch dann noch unmessbar klein bleibt, wenn der Punkt μ auf der Oberfläche t selber liegt. Denn es ergiebt sich, dass die Projectionen aller der Elemente dt, die von μ unmessbar kleinen Abstand haben, auch von dem grössten Kreis, den die Tangentialebene an t im Punkte μ aus der Kugelfläche herausschneidet, unmessbar kleinen Abstand haben. Es müssen aber drei Fälle ausgenommen werden, nämlich

1. der Fall, wo die Krümmungsradien der Fläche t im Punkte μ unmessbar klein sind;

2. der Fall, dass die Continuität der Krümmung von t im Punkte μ oder in unmessbar kleinem Abstand von ihm eine Unterbrechung erfährt (vgl. Disquis. gen. circu superficies curvas art. 3)*);

3. der Fall, wo die Oberfläche t noch einen anderen von μ unmessbar wenig entfernten Theil enthält, also wenn bei diesem Punkte die Dicke des Raumes s unmessbar klein ist. Diesen Fall können wir übrigens dem unterordnen, den wir im folgenden Artikel behandeln werden.

*) Klassiker d. e. W. Nr. 5.

15.

Es bleibt uns noch der Fall, wo der Punkt μ nicht selbst auf der Oberfläche t liegt, aber doch in unmessbar kleinem Abstand von ihr. In diesem Falle kann jedenfalls unser Integral einen messbaren Werth haben, und diesen wollen wir jetzt eingehender untersuchen.

Es mögen die vom Punkte μ auf die Fläche t gefällte Normale und die von μ ausgehende im Raume feste Gerade die Kugeloberfläche in den Punkten G und H schneiden, und es werde der Bogen $GH = k$ gesetzt. Der Bogen zwischen G und einem variabeln Punkte der Kugelfläche sei v. Es sei endlich w der sphärische Winkel zwischen k und v. Es darf nach diesen Festsetzungen für das Element $d\Pi$ gesetzt werden:

$$\sin v dv dw\,,$$

und demnach wird, wenn wir statt (μ, dt) der Kürze halber r schreiben, das Integral (II)

$$=\iint \pm (\cos k \cos v + \sin k \sin v \cos w)\,\theta(r) \sin v\, dv dw.$$

Die Integration braucht hierin nur über die Theile der Kugeloberfläche erstreckt zu werden, gegen die die unmessbar kleinen Abstände r gerichtet sind. Es beziehen sich diese auf einen unmessbar kleinen Theil der Oberfläche t. Sehen wir diesen Theil als eben an und bezeichnen wir den kleinsten Abstand desselben von μ (den Abstand, der dem Punkte G, also dem Werthe $v = 0$ entspricht) mit ϱ, so wird $r = \frac{\varrho}{\cos v}$, also von w unabhängig. Führen wir also die Integration bezüglich der Variabeln w durch, und zwar von $w = 0$ bis $w = 360^\circ$, so wird unser Integral

$$= \pm \int 2\pi\,\theta(r) \cos k \cos v \sin v dv$$

$$= \pm \int \frac{2\pi \cos k\, \varrho^2 \theta(r)\, dr}{r^3}\,.$$

Hierin ist die Integration zu erstrecken von $r = \varrho$ bis zu einem willkürlichen messbar grossen, sonst aber beliebig kleinen Werth von r.

Setzen wir also das unbestimmte Integral

$$2k^2\int\frac{\theta(r)\,dr}{r^3}=-\theta'(r),$$

und bestimmen wir die Integrationsconstante so, dass

$$\int\frac{\theta(r)\,dr}{r^3}=0$$

wird für einen beliebigen messbaren Werth innerhalb der dem Experiment zugänglichen Grenzen, dann wird das Integral (II) unter Vernachlässigung von unmessbar kleinen Grössen

$$=\pm\,\pi\cos k\theta'(r)\,.$$

Sollte es zweifelhaft sein, ob es erlaubt ist, den Antheil der Oberfläche t, der innerhalb unmessbarer Enfernung von μ gelegen ist, als Ebene anzusehen, so denken wir ihn uns als Kugelfläche. Es sei dann R der Abstand des Kugelmittelpunktes vom Punkte μ, positiv oder negativ zu setzen, je nachdem der Mittelpunkt von μ aus in Richtung nach G hin gelegen ist oder entgegengesetzt. Es wird dann

$$\cos v=\frac{\varrho}{r}\left(1-\frac{\varrho}{2R}\right)+\frac{r}{2R},$$

$$\sin v\,dv=\left[\frac{\varrho}{r^2}\left(1-\frac{\varrho}{2R}\right)-\frac{1}{2R}\right]dr,$$

und hieraus kann man leicht entnehmen, dass das Integral nicht um einen merklichen Betrag von dem früher gefundenen Werth $\pm\,\pi\cos k\theta'(\varrho)$ abweicht, so lange wenigstens R einen messbar grossen Werth besitzt. Wie beschaffen nun aber auch die Krümmung der Oberfläche t an der in Betracht kommenden Stelle ist, es lassen sich immer zwei Kugelflächen finden, die die Oberfläche t in dem μ am nächsten gelegenen Punkte berühren, so dass t zwischen diesen beiden gelegen ist, und deren Radien endliche Grössen haben. Dann muss offenbar auch unser Integral zwischen die auf diese beiden Kugelflächen bezogenen Integrale fallen, und es wird ohne merklichen Fehler durch eben dieselbe Formel ausgedrückt. Eine Ausnahme tritt nur dann ein, wenn die Oberfläche t in unmessbar kleinem Abstand von μ eine Krümmung von unmessbar kleinem Krümmungsradius oder eine Schneide oder eine Spitze besitzt.

16.

Gehen wir jetzt vom Integral (II) zum Integral (I) über, so ist es klar, dass dieses nicht nur in dem Falle unmessbar klein wird, wenn (II) für keinen Punkt der Oberfläche T einen messbaren Werth erhält, sondern auch dann, wenn die Gesammtheit der Elemente von T, für deren Punkte das Integral (II) endlich wird, nur eine Fläche von unmessbar kleiner Grösse ausmacht. Aus dieser Erwägung geht hervor, dass das Integral (I) nur dann einen messbar grossen Werth erreicht, wenn die Oberfläche T einen oder mehrere Theile von endlicher Grösse enthält, die von der Oberfläche t in unmessbar kleinem Abstand liegen. Da diese Theile von der Parallelität mit der Oberfläche t nicht merklich abweichen können, so kann für keinen dieser Punkte $\cos k$ merklich von $+1$ oder von -1 abweichen, je nachdem die Oberfläche T ihre äussere oder innere Seite der Oberfläche t zukehrt.

Bezeichnen wir nun mit τ, τ' die Theile von T, die in unmessbarem Abstand von t liegen, und zwar mit τ die Summe aller derer, bei denen die äussere Seite der einen der inneren Seite der anderen zugekehrt ist, mit τ' die, bei der gleichartige Seiten einander zugekehrt sind; bezeichnen wir ferner mit ϱ den kleinsten Abstand eines jeden Elementes $d\tau$ oder $d\tau'$ von t, dann wird das Integral (I) unter Vernachlässigung unmessbar kleiner Grössen

$$= -\int \pi\, \theta'(\varrho)\, d\tau + \int \pi\, \theta'(\varrho)\, d\tau'$$

Es ist offenbar hier kein Unterschied, ob wir die Antheile τ, τ' auf die Oberfläche T oder t beziehen.

Auf diese Weise haben wir also bereits eine Lösung des Problems erhalten, das wir uns im Abschnitt 6 gestellt haben, und zwar auf Grund der Eigenschaft der Function φ, auf die sich unsere Untersuchung über das Gleichgewicht von Flüssigkeiten stützt. Es ergiebt sich danach:

$$\iint ds\, dS\, \varphi(ds, dS)$$

$$= 4\pi\sigma\psi(0) - \pi \mathrm{t}\theta(0) + \pi \mathrm{t}'\theta(0) - \pi\int d\tau\, \theta'(\varrho)$$

$$+ \pi\int d\tau'\, \theta'(\varrho).$$

17.

Die Function θ' lässt sich definiren durch

$$\frac{\theta'(r)}{r^2} = \int \frac{2\,\theta(x)\,dx}{x^3},$$

wobei das Integral zwischen den Grenzen $x = r$ und einem willkürlich festzusetzenden constanten messbaren Werthe zu erstrecken ist, den wir hier mit R bezeichnen wollen. Offenbar wird dieses Integral kleiner sein als $\int \frac{2\,\theta(r)\,dx}{x^3}$, zwischen denselben Grenzen integrirt, und dieses ist $= \frac{\theta(r)}{r^2} - \frac{\theta(r)}{R^2}$. Es wird also erst recht kleiner sein als $\frac{\theta(r)}{r^2}$. Da sich nun bei unbestimmter Integration ergiebt:

$$\int \frac{2\,\theta(x)\,dx}{x^3} = -\frac{\theta(x)}{x^2} + \int \frac{d\theta(x)}{x^2} = -\frac{\theta(x)}{x^2} - \int \frac{\psi(x)\,dx}{x^2},$$

so folgt:

$$\frac{\theta'(r)}{r^2} = \frac{\theta(r)}{r^2} - \frac{\theta(R)}{R^2} - \int_r^R \frac{\psi(x)\,dx}{x^2},$$

und das hierin enthaltene Integral ist wieder kleiner als $\int \frac{\psi(r)\,dx}{x^2}$ und um so mehr kleiner als $\frac{\psi(r)}{r}$; deshalb wird der Werth von $\frac{\theta'(r)}{r^2}$ grösser als

$$\frac{\theta(r)}{r^2} - \frac{\theta(R)}{R^2} - \frac{\psi(r)}{r}.$$

Es fällt also $\theta'(r)$ zwischen die Grenzen

$$\theta(r) \quad \text{und} \quad \theta(r) - r^2\frac{\theta(R)}{R^2} - r\,\psi(r),$$

deren Differenz mit unendlich abnehmendem r jedenfalls kleiner werden kann als eine beliebig anzugebende Grösse, weil wir voraussetzen, dass $\psi(0)$ eine endliche Grösse ist. Hieraus entnehmen wir, dass $\theta'(0) = \theta(0)$ zu setzen ist. Es geht daraus hervor, dass wir in der Gleichung, zu der wir im vorigen Abschnitt gelangt sind, den Term $-\pi \mathfrak{t} \theta(0)$ in dem Term $-\pi \int d\tau \theta'(\varrho)$, und den Term $\pi \mathfrak{t}' \theta(0)$ in dem Term $\pi \int d\tau' \theta'(\varrho)$ enthalten denken können, wenn wir deu Abstand 0 als Specialfall des unmessbar kleinen Abstandes ansehen, und wenn wir die Theile $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ mit unter die Theile τ, τ' rechnen.

Aber wenn wir auch hierdurch eine im mathematischen Sinne elegantere Lösung erhalten, so ist es doch für unsere Absicht zweckdienlicher, den Unterschied zwischen den beiden Arten von Flächentheilen aufrecht zu erhalten.

18.

Wenden wir die vorliegende Untersuchung auf den zweiten Term des Ausdrucks Ω (Abschnitt 3) an, so wird der zweite Raum, den wir von Abschnitt 6 an mit S bezeichnet haben, identisch mit dem ersten; was in Abschnitt 16 also σ, $\mathfrak{t}$, $\mathfrak{t}'$ war, das wird jetzt s, t, 0, wenn t die ganze Oberfläche des von Flüssigkeit erfüllten Raumes s bedeutet. In dem Falle aber, wo dieser Raum weder Theile von zwar messbarer Ausdehnung, aber unmessbar kleiner Dicke enthält, noch auch Zwischenräume (Spalten) von gleicher Beschaffenheit, wird das zweite Glied von Ω

$$= \tfrac{1}{2} \pi c^2 [4 s \psi(0) - t \theta(0)].$$

Es giebt hiervon zwei Ausnahmen.

1. Wenn der Raum s einen unmessbar dünnen Theil enthält, dann besitzt dieser Theil zwei bis auf unmessbare Grössen gleiche Oberflächen, deren jede wir mit t' bezeichnen wollen. Die Dicke des Raumes an der Stelle jeden Elementes dt' bezeichnen wir unbestimmt mit ϱ. Es tritt dann zu vorigem Werthe noch das Glied hinzu

$$\pi c^2 \int \theta'(\varrho) dt'.$$

2. Wenn der Raum s eine unmerklich schmale Höhlung enthält, dann tritt ein ähnlicher Term hinzu, nämlich

$$\pi c^2 \int \theta'(\varrho) dt'',$$

wenn wir mit t'' jede der beiden benachbarten Flächen des Spaltes bezeichnen und wieder mit ϱ die laufende Dicke des Spaltes.

Bei der Umformung des dritten Gliedes im Ausdrucke Ω müssen wir das Zeichen S beibehalten, um damit den vom Gefässe erfüllten Raum zu bezeichnen. An Stelle des Functionszeichens f tritt F für die anziehende Molecularkraft des Gefässes ein, und an Stelle der durch $\varphi, \psi, \theta, \theta'$ ausgedrückten Functionen treten andere, die wir mit Φ, Ψ, Θ, Θ' wiedergeben wollen. Diese sollen von F ebenso abhängen, wie jene von f. Was bei der allgemeinen Untersuchung σ, $\mathfrak{t}'$ war, nimmt hier offenbar den Werth 0 an. Für $\mathfrak{t}$ führen wir hier den Buchstaben T ein, der nicht die ganze Oberfläche S, sondern nur den Theil bezeichnen soll, an den die Flüssigkeit angrenzt. Es wird unter dieser Festsetzung der dritte Theil von Ω im allgemeinen

$$= \pi c C T \Theta(0),$$

und auch hier treten zwei Ausnahmefälle ein, nämlich

3. Wenn in der Nähe eines messbaren Gebietes T' der Oberfläche T die Flüssigkeit eine unmessbar kleine Dicke hat, die mit ϱ bezeichnet werde, so kommt der Term

$$-\pi c C \int \Theta'(\varrho)\, d T'$$

hinzu.

4. Wenn die Oberfläche des Gefässes ausser dem Theile T, der der Flüssigkeit anliegt, noch einen anderen Theil T'' besitzt, der zwar die Flüssigkeit nicht berührt, aber ihr doch in unmessbar kleinem Abstand benachbart ist, so tritt ein Term hinzu

$$+\pi c C \int \Theta'(\varrho)\, d T'',$$

worin wieder ϱ den Abstand des dünnen Zwischenraumes bedeutet.

Es wäre überflüssig, länger bei dem ersten Ausnahmefalle, soweit er nicht im dritten mit einbegriffen ist, und ebenso beim zweiten und vierten zu verweilen; denn wenn auch in gewissen hierunter fallenden Fällen — die aber sehr specieller Natur sind — Gleichgewicht der Flüssigkeit statthaben kann, so ist doch ein solches Gleichgewicht weder stabil noch auch dem Experiment zugänglich.

Dagegen ist der erste Ausnahmefall, soweit er im dritten enthalten ist, für die Theorie durchaus wesentlich. Gleichwohl soll er aber einstweilen bei Seite gelassen werden, um zunächst einmal die Gleichgewichtsbedingungen, wie sie ohne eine dem Gefässe anhaftende Flüssigkeitshaut gelten, zu untersuchen.

Wir sehen also vorerst von allen Ausnahmen ab. Es wird dann der Ausdruck, dessen Werth im Zustand des Gleichgewichts ein Maximum sein muss, gegeben sein durch

$$-gc\int z\,ds + 2\pi c^2 s\psi(0) - \tfrac{1}{2}\pi c^2 t\theta(0) + \pi c C T \Theta(0)\,,$$

und da bei allen Veränderungen, die die Gestalt der Flüssigkeit eingehen kann, der Raum s unveränderlich bleibt, so muss der Ausdruck:

$$\int z\,ds + \frac{\pi c\theta(0)}{2g}t - \frac{\pi C\Theta(0)}{g}T$$

im Gleichgewichtszustand ein Minimum werden.

Wir haben bereits früher angegeben, dass $\dfrac{c\theta(0)}{g}$ einen Raum zweier Dimensionen bedeute, und dasselbe gilt von $\dfrac{C\Theta(0)}{g}$. Setzen wir also:

$$\frac{\pi c\theta(0)}{2g} = \alpha^2; \qquad \frac{\pi C\Theta(0)}{2g} = \beta^2\,,$$

so werden α, β constante Längen, abhängig von dem Verhältniss der Schwere zu der Grösse der Kräfte, die die Theilchen der Flüssigkeit unter sich und von den Molekülen des Gefässes erfahren. Wenn wir ferner die freie Oberfläche der Flüssigkeit, also die, die dem Gefässe nicht anliegt, mit U bezeichnen, so dass $t = T + U$ wird, dann muss der folgende Ausdruck, den wir W nennen wollen, im Zustand des Gleichgewichts ein Minimum sein:

$$W = \int z\,ds + (\alpha^2 - 2\beta^2)\,T + \alpha^2 U\,.$$

19.

Bevor wir allgemein und vollständig untersuchen, was sich aus diesem wichtigen Theorem folgern lässt, lohnt es sich wohl zu zeigen, mit welcher Leichtigkeit das Grundphänomen in Capillarröhren sich daraus ergiebt.

Wir denken uns eine Flüssigkeit im Gleichgewicht in einem zweischenkligen Gefässe, und zwar so, dass ein Theil der freien Flüssigkeitsoberfläche sich im einen, ein anderer Theil im anderen Schenkel befindet. Die Gefässwandungen setzen wir in der Nachbarschaft dieser Oberflächentheile als vertical voraus. Es sei a der Flächeninhalt des inneren Horizontalschnittes des ersten Schenkels (genauer gesagt, der Flächeninhalt der horizontalen Projection der freien Oberfläche im ersten Schenkel), b die Peripherie desselben. Es sei ferner ah das Flüssigkeitsvolumen in diesem Schenkel, unter der Voraussetzung, dass man die Verticalwandung bis zu der Ebene, von der aus z gerechnet wird, abwärts verlängert denkt, oder, was aufs Gleiche hinauskommt, es sei h eine mittlere Höhe der Flüssigkeit über dieser Ebene. Ebenso sollen im zweiten Schenkel die entsprechenden Stücke mit a', b', h' bezeichnet werden. Stellen wir uns jetzt vor, dass die Einstellung der Flüssigkeit eine unendlich kleine Veränderung erfährt, und zwar derart, dass beide Theile der freien Oberfläche ihre Form beibehalten, dann wird die Variation des ersten Theiles von W, also des Integrals $\int z\,ds$ offenbar

$$= ahdh + a'h'dh',$$

die Variation von T aber

$$= bdh + b'dh'.$$

Nach Voraussetzung wird aber $dU = 0$. Also folgt:

$$dW = ahdh + a'h'dh' - (2\beta^2 - \alpha^2)(bdh + b'dh').$$

Da nun ferner das Gesammtvolumen der Flüssigkeit unverändert bleibt, so folgt:

$$adh + a'dh' = 0$$

und deshalb:

$$dW = dh\left[a(h - h') - (2\beta^2 - \alpha^2)\left(b - \frac{ab'}{a'}\right)\right].$$

Die Bedingung, dass W im Zustand des Gleichgewichts ein Minimum sein soll, führt also zu der Gleichung, die die Hauptertscheinungen der Capillarröhren umfasst:

$$h - h' = (2\beta^2 - \alpha^2)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'}{a'}\right).$$

Und es ergiebt sich sofort, dass dieser Gleichung in der That ein Minimum von W entspricht, denn es wird

$$\frac{d^2 W}{dh^2} = a + \frac{a^2}{a'},$$

also wesentlich positiv.

Der zweite Schenkel wird weiter als der erste genannt, wenn der Quotient $\frac{a'}{b'}$ grösser als $\frac{a}{b}$ ist. Es wird also die Flüssigkeit im engeren Schenkel stärker herabgedrückt oder stärker gehoben als im weiteren, je nachdem β^2 kleiner oder grösser als α^2 ist; und wenn zufällig einmal $\beta^2 = \frac{\alpha^2}{2}$ wäre, dann würden die Höhen in beiden Schenkeln gleich sein. Wenn der zweite Schenkel so weit ist, dass $\frac{b'}{a'}$ gegen $\frac{b}{a}$ vernachlässigt werden kann, dann wird angenähert

$$h - h' = (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b}{a}.$$

Es ist demnach in cylindrischen Capillaren die Senkung oder Hebung einer Flüssigkeit dem Durchmesser des Rohres umgekehrt proportional. Alles dies stimmt sowohl mit dem Experiment als auch mit den Ergebnissen, die *Laplace* theoretisch abgeleitet hat, überein.

Wenn das Gefäss mit mehreren Verticalschenkeln, die alle mit einander communiciren, versehen ist, und es bedeuten a'', b'', h'' für den dritten, a''', b''', h''' für den vierten Schenkel u. s. f. das Gleiche wie a, b, h für den ersten, dann ergiebt sich auch:

$$h - h'' = (2\beta^2 - \alpha^2)\left(\frac{b}{a} - \frac{b''}{a''}\right),$$

$$h - h''' = (2\beta^2 - \alpha^2)\left(\frac{b}{a} - \frac{b'''}{a'''}\right).$$

Eleganter schreibt sich das in folgender Gestalt:

3*

$$h - (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b}{a} = h' - (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b'}{a'}$$
$$= h'' - (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b''}{a''} = h''' - (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b'''}{a'''} \text{ etc.}$$

Da die Horizontalebene, von der aus die Höhen gerechnet werden, willkürlich ist, so ergiebt sich, wenn man sie so wählt, dass

$$h = (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b}{a},$$

dass auch in den übrigen Schenkeln

$$h' = (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b'}{a'}, \quad h'' = (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b''}{a''},$$
$$h''' = (2\beta^2 - \alpha^2)\frac{b'''}{a'''}, \text{ etc.}$$

Diese Ebene, die wir späterhin noch allgemeiner definiren werden, kann man die »normale Horizontalebene« nennen (plan de niveau). Denken wir uns (wenn es nöthig ist) die Verticalwände der einzelnen Schenkel bis zu dieser Ebene verlängert, so bedeuten ah, $a'h'$, $a''h''$ etc., wenn $2\beta^2 > \alpha^2$, die Mengen der in den einzelnen Schenkeln über diese Ebene gehobenen Flüssigkeit, oder wenn $2\beta^2 < \alpha^2$, die unter dieser Ebene fehlenden Flüssigkeitsmengen. Diese Mengen sind also gleich dem Product aus der constanten Flächengrösse $(2\beta^2 - \alpha^2)$ und den Peripherien b, b', b'', b''' etc.

20.

Es liegt uns jetzt die Aufgabe ob, aus dem Theorem im Abschnitt 18 die Beschaffenheit der Gleichgewichtsfigur zu bestimmen, eine Aufgabe, die in der Hauptsache auf die allgemeine Entwicklung der Variation hinauskommt, die der Ausdruck W erfährt, wenn die Form des von Flüssigkeit erfüllten Raumes irgend eine unendlich kleine Aenderung eingeht. Da aber die Variationsrechnung für doppelte Integrale in dem Falle, wo auch die Grenzen als variabel anzusehen sind, bisher noch wenig ausgebaut ist, so ist es nöthig, diese Untersuchung etwas tiefer anzugreifen.

Wir wollen von der Oberfläche, die den Raum s vom übrigen Raume trennt, den Theil U betrachten, und setzen voraus, dass jeder seiner Punkte durch drei Coordinaten x, y, z bestimmt sei. Die dritte von diesen sei der Abstand von einer willkürlichen Horizontalebene. Man kann deshalb z als Function der unabhängigen Variabeln x, y ansehen, und wir bezeichnen die partiellen Differentiale dieser Function, wie gebräuchlich, mit

$$\frac{\partial z}{\partial x} dx; \quad \frac{\partial z}{\partial y} dy.$$

In jedem Punkte der Oberfläche denken wir uns die Normale errichtet, und zwar vom Raume s aus gerechnet, nach aussen hin. Die Cosinus der Winkel zwischen der Normalen und den Coordinatenaxen nennen wir ξ, η, ζ. Es wird danach

$$\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1,$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\xi}{\zeta}, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\eta}{\zeta}.$$

Die Umgrenzung der Oberfläche U ist eine in sich zurücklaufende Linie, die wir mit P bezeichnen wollen, und indem wir diese in einem bestimmten Sinn stetig umlaufen, nehmen wir ihre Elemente dP (ebenso wie die Elemente dU der Oberfläche) immer positiv an. Die Cosinus der Winkel, die die Richtung des Elementes dP mit den Coordinatenaxen x, y, z einschliessen, bezeichnen wir mit X, Y, Z. Damit aber der Sinn der Richtung nicht zweideutig bleibt, verfügen wir so über sie, dass an erster Stelle sie selbst, an zweiter die auf dP senkrechte Normale, die die Oberfläche U berührt und nach innen gerichtet ist, und an dritter Stelle die auf der Oberfläche vom Raume s aus nach aussen errichtete Normale ein System von Geraden bilden, die der Reihe nach ebenso auf einander folgen, wie die Coordinatenaxen x, y, z. Man sieht leicht (vgl. Disquiss. gen. circa superficies curvas art. 2)*), dass die Richtungscosinus zwischen der an zweiter Stelle aufgeführten Richtung und den Coordinatenaxen x, y, z sind

$$\eta^0 Z - \zeta^0 Y, \quad \zeta^0 X - \xi^0 Z, \quad \xi^0 Y - \eta^0 X,$$

wenn ξ^0, η^0, ζ^0 die Werthe von ξ, η, ζ am Orte des Elementes dP bedeuten.

---

*) Klassiker d. e. W. Nr. 5.

21.

Nach diesen Vorbemerkungen wollen wir uns vorstellen, die Oberfläche U erfahre irgend eine unendlich kleine Veränderung. Wenn es genügte, nur solche Veränderungen zu betrachten, bei denen die Umgrenzung P immer ungeändert oder wenigstens in der gleichen verticalen Oberfläche bleibt, dann brauchte man blos die Aenderung der einen dritten Coordinate z einzuführen. Es würde dann das Problem sich wesentlich einfacher darstellen. Da wir aber das Problem ganz allgemein behandeln müssen, so würde bei einem solchen Vorgehen die Betrachtung der Veränderlichkeit der Grenzen zu unbequemen, die Uebersicht störenden Weitschweifigkeiten führen. Es ist deshalb vorzuziehen, von vorn herein alle drei Coordinaten der Veränderung zu unterwerfen. Wir stellen uns daher vor, dass wir einen jeden Punkt x, y, z der Oberfläche in einen anderen mit den Coordinaten $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ überführen. Es können dann δx, δy, δz als unbestimmte Functionen von x und y angesehen werden, deren Werthe aber unendlich klein bleiben. Wir fragen nun nach den Variationen der einzelnen Elemente von W und beginnen mit der Variation des Elementes dU.

Wir stellen uns ein dreieckiges Oberflächenelement dU der Oberfläche U, gelegen zwischen den Punkten mit den Coordinaten

$$\begin{array}{lll} x, & y, & z \\ x + dx, & y + dy, & z + \frac{\partial z}{\partial x} dx + \frac{\partial z}{\partial y} dy, \\ x + d'x, & y + d'y, & z + \frac{\partial z}{\partial x} d'x + \frac{\partial z}{\partial y} d'y. \end{array}$$

Der doppelte Flächeninhalt dieses Dreiecks ist nach bekannten Gesetzen

$$= (dx\,d'y - dy\,d'x) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2},$$

wenn wir voraussetzen — was gestattet ist —, dass $dx\,d'y - dy\,d'x$ eine positive Grösse ist.

In der variirten Oberfläche haben wir statt dieser Punkte drei andere mit den Coordinaten des ersten Punktes:

$$x + \delta x\,, \quad y + \delta y\,, \quad z + \delta z\,.$$

des zweiten:

$$x + dx + \delta x + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,x}dx + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y}dy\,,$$

$$y + dy + \delta y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,x}dx + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,y}dy\,,$$

$$z + \frac{\partial\,z}{\partial\,x}dx + \frac{\partial\,z}{\partial\,y}dy + \delta z + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x}dx + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,y}dy\,;$$

des dritten:

$$x + d'x + \delta x + \frac{\partial\,\delta x}{\partial x}d'x + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y}d'y\,,$$

$$y + d'y + \delta y + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,x}d'x + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,y}d'y\,,$$

$$z + \frac{\partial\,z}{\partial x}d'x + \frac{\partial\,z}{\partial\,y}d'y + \delta z + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x}d'x + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,y}d'y\,.$$

Man findet den doppelten Flächeninhalt des zwischen diesen neuen Punkten gelegenen Dreiecks in der gleichen Weise

$$= (dx\,d'y - dy\,d'x)\sqrt{N}\,,$$

wenn wir der Kürze halber mit N das Aggregat

$$\left[\left(1 + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,x}\right)\left(1 + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,y}\right) - \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y}\,\frac{\partial\,\delta y}{\partial\,x}\right]^2$$

$$+\left[\left(1 + \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,x}\right)\left(\frac{\partial\,z}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,y}\right) - \frac{\partial\,\delta x}{\partial\,y}\left(\frac{\partial\,z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x}\right)\right]^2$$

$$+\left[\left(1 + \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,y}\right)\left(\frac{\partial\,z}{\partial x} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,x}\right) - \frac{\partial\,\delta y}{\partial\,x}\left(\frac{\partial\,x}{\partial\,y} + \frac{\partial\,\delta z}{\partial\,y}\right)\right]^2$$

bezeichnen. Führen wir die Entwicklung durch, so folgt unter Vernachlässigung vou Grössen zweiter Ordnung:

$$\sqrt{N} = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial y}\right)^2}\cdot\left[1 + \frac{L}{1 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\,z}{\partial y}\right)^2}\right]$$

Hierin ist wieder der Kürze halber L gesetzt für

$$\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right]-\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}-\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial y}$$
$$+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}\left[1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]+\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\,\frac{\partial z}{\partial x}+\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\,\frac{\partial z}{\partial y}\,.$$

Es verhält sich also das erste Dreieck zum zweiten wie

$$1:1+\frac{L}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}\,.$$

Dieses Verhältniss ist also unabhängig von der Dreiecksfigur des Elementes dU, und es wird

$$\delta\,dU=\frac{L\,dU}{1+\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2}$$

oder nach Entwicklung der Glieder:

$$\delta\,dU=dU\left[\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}(\eta^2+\zeta^2)-\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}\,\xi\eta-\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}\,\xi\eta\right.$$
$$\left.+\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}(\xi^2+\zeta^2)-\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\,\xi\zeta-\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\,\eta\zeta\right].$$

22.

Die Variation der ganzen Oberfläche U erhalten wir durch Integration dieses Ausdruckes über alle Elemente dU. Zu diesem Zweck wollen wir die zwei Theile des Integrals:

$$\int dU\left[(\eta^2+\zeta^2)\frac{\partial\,\delta x}{\partial x}-\xi\eta\frac{\partial\,\delta y}{\partial x}-\xi\zeta\frac{\partial\,\delta z}{\partial x}\right]=A$$

und

$$\int dU\left[-\xi\eta\frac{\partial\,\delta x}{\partial y}+(\xi^2+\zeta^2)\frac{\partial\,\delta y}{\partial y}-\eta\zeta\frac{\partial\,\delta z}{\partial y}\right]=B$$

von einander gesondert betrachten.

Wir denken uns eine zur Y-Axe normale Ebene, und zwar so gelegen, dass der constante Werth y, der ihr entspricht, in das Gebiet zwischen den Extremwerthen fällt, die y auf der Oberfläche U einnimmt. Diese Ebene muss die Peripherie P

in zwei oder vier oder sechs etc. Punkten schneiden, deren x-Coordinaten der Reihe nach x^0, x', x'' etc. seien. Alle übrigen diesen Punkten zugehörenden Grössen wollen wir durch die gleichen Indices unterscheiden. Die Oberfläche soll in gleicher Weise noch von einer zweiten Ebene geschnitten werden, die der ersteren unendlich benachbart und parallel und die durch die Coordinate $y + dy$ gegeben ist. Zwischen diesen beiden Ebenen mögen sich die Elemente dP^0, dP', dP'' etc. der Grenzlinie befinden. Man erkennt leicht, dass:

$$dy = -Y^0 dP^0 = +Y' dP' = -Y'' dP'' = +Y''' dP''' \text{ etc.}$$

ist. Denken wir uns ausserdem unendlich viele zur x-Axe senkrechte Ebenen, so wird jedem Elemente dx, das zwischen x^0 und x' oder zwischen x'' und x''' etc. gelegen ist, ein Flächenelement $dU = \dfrac{dx\,dy}{\zeta}$ entsprechen. Es ergiebt sich demnach für denjenigen Theil von A, der dem zwischen den Ebenen y, $y + dy$ gelegenen Theile der Oberfläche entspricht, der Werth

$$dy \int dx \left(\frac{\eta^2 + \zeta^2}{\zeta} \frac{\partial\, \delta x}{\partial x} - \frac{\xi \eta}{\zeta} \frac{\partial\, \delta y}{\partial x} - \xi \frac{\partial\, \delta z}{\partial x} \right),$$

zu erstrecken von $x = x^0$ bis $x = x'$, dann von $x = x''$ bis $x = x'''$ etc. Unbestimmt integrirt ergiebt dieses Integral:

$$\left(\frac{\eta^2 + \zeta^2}{\zeta} \delta x - \frac{\xi \eta}{\zeta} \delta y - \xi \delta z \right) dy$$

$$- dy \int \left(\delta x \frac{\partial \dfrac{\eta^2 + \zeta^2}{\zeta}}{\partial x} - \delta y \frac{\partial \dfrac{\xi \eta}{\zeta}}{\partial x} - \delta z \frac{\partial \xi}{\partial x} \right) dx,$$

und dieses geht in unserem Falle über in

$$\left(\frac{\eta^{0\,2} + \zeta^{0\,2}}{\zeta^0} \delta x^0 - \frac{\xi^0 \eta^0}{\zeta^0} \delta y^0 - \xi^0 \delta z^0 \right) Y^0 dP^0$$

$$+ \left(\frac{\eta'^{\,2} + \zeta'^{\,2}}{\zeta'} \delta x' - \frac{\xi' \eta'}{\zeta'} \delta y' - \xi' \delta z' \right) Y' dP'$$

$$+ \left(\frac{\eta''^{\,2} + \zeta''^{\,2}}{\zeta''} \delta x'' - \frac{\xi'' \eta''}{\zeta''} \delta y' - \xi'' \delta z' \right) Y'' dP''$$

$+$ etc.

$$-\int \zeta\, dU \left(\delta x \frac{\partial \frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial x} - \delta y \frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial x} - \delta z \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

oder in kürzerer Schreibweise:

$$\sum \left(\frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}\delta x + \frac{\xi\eta}{\zeta}\delta y - \xi\delta z\right) Y dP$$

$$-\int \zeta\, dU \left(\delta x \frac{\partial \frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial x} - \delta y \frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial x} - \delta z \frac{\partial \xi}{\partial x}\right).$$

Hierin ist die Summation über alle zwischen den Ebenen y und $y + dy$ gelegenen Elemente dP, die Integration über alle zwischen y und $y + dy$ gelegenen Elemente dU zu erstrecken.

Die ganze Grösse A wird demnach ausgedrückt durch

$$\int \left(\frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}\delta x - \frac{\xi\eta}{\zeta}\delta y - \xi\delta z\right) Y dP$$

$$-\int \zeta\, dU \left(\delta x \frac{\partial \frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial x} - \delta y \frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial x} - \delta z \frac{\partial \xi}{\partial x}\right),$$

worin die erste Integration über die ganze Peripherie P, die zweite über die ganze Oberfläche U zu erstrecken ist.

23.

Durch eine ganz ähnliche Rechnung finden wir:

$$B = \int \left(\frac{\xi\eta}{\zeta}\delta x - \frac{\xi^2+\zeta^2}{\zeta}\delta y + \eta\delta z\right) X dP$$

$$+\int \zeta\, dU \left(\delta x \frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial y} - \delta y \frac{\partial \frac{\xi^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial y} + \delta z \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Setzen wir also für irgend einen Punkt der Grenzlinie P

$$[X\xi\eta + Y(\eta^2+\zeta^2)]\delta x - [X(\xi^2+\zeta^2) + Y\xi\eta]\delta y$$
$$+ [X\eta\zeta - Y\xi\zeta]\delta z = \zeta Q,$$

und für einen Punkt der Oberfläche U

$$\left(\frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial x}\right)\zeta\,\delta x + \left(\frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial y} - \frac{\partial \frac{\xi^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial y}\right)\zeta\,\delta y$$
$$+\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right)\zeta\,\delta z = V,$$

so wird endlich

$$\delta U = \int Q\,dP + \int V\,dU,$$

worin die erste Integration über die ganze Peripherie P, die zweite über die ganze Oberfläche U zu erstrecken ist.

24.

Die eben aufgestellten Formeln für Q und V kann man wesentlich zusammenziehen. Unter Zuhilfenahme der Beziehung:

$$X\xi + Y\eta + Z\zeta = 0$$

nimmt Q sofort die symmetrische Form an:

$$Q = (Y\zeta - Z\eta)\,\delta x + (Z\xi - X\zeta)\,\delta y + (X\eta - Y\xi)\,\delta z.$$

Um auch den für V erhaltenen Ausdruck in eine übersichtlichere Form überzuführen, beachten wir, dass aus den Gleichungen:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{\xi}{\zeta}; \quad \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{\eta}{\xi}$$

folgt:

$$\frac{\partial \frac{\xi}{\zeta}}{\partial y} = \frac{\partial \frac{\eta}{\zeta}}{\partial x}.$$

Daher wird

$$\frac{\partial \frac{\xi\eta}{\zeta}}{\partial y} = \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta\frac{\partial \frac{\xi}{\zeta}}{\partial y} = \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial \eta}{\partial y} + \eta\frac{\partial \frac{\eta}{\zeta}}{\partial x}.$$

Aus der Relation $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2 = 1$ folgt:

$$\xi\frac{\partial \xi}{\partial x} + \eta\frac{\partial \eta}{\partial x} + \zeta\frac{\partial \zeta}{\partial x} = 0,$$

und folglich:

$$\frac{\partial \frac{\eta^2+\zeta^2}{\zeta}}{\partial x} = \eta \frac{\partial \frac{\eta}{\zeta}}{\partial x} + \frac{\eta}{\zeta}\frac{\partial \eta}{\partial x} + \frac{\partial \zeta}{\partial x} = \eta \frac{\partial \frac{\eta}{\zeta}}{\partial x} - \frac{\xi}{\zeta}\frac{\partial \xi}{\partial x}.$$

Substituiren wir diese Werthe in dem Coefficienten von δx im Ausdrucke V, so wird dieser

$$= \xi \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

In gleicher Weise erhalten wir ferner in demselben Ausdruck für den Coefficienten von δy

$$\eta \left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right),$$

und es ergiebt sich daher:

$$V = (\xi \delta x + \eta \delta y + \zeta \delta z)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

25.

Bevor wir weiter gehen, scheint es angebracht, die geometrische Deutung der erhaltenen Ausdrücke uns zu vergegenwärtigen. Zu diesem Zwecke wollen wir die verschiedenen hier auftretenden Richtungen der Anschauung leichter zugänglich machen, indem wir die Methode befolgen, die in den »Disquiss. gen. circa superficies curvas« benutzt ist: Wir veranschaulichen sie durch Punkte auf einer um ein willkürliches Centrum mit dem Radius 1 gelegten Kugelfläche. Wir bezeichnen so zunächst die Richtungen der Coordinatenaxen x, y, z durch die Punkte (1), (2), (3), dann die Richtung der auf der Oberfläche von s aus nach aussen hin errichteten Normalen durch den Punkt (4), endlich die Richtung der Geraden, die von einem jeden Punkte der Oberfläche nach dem Orte, in dem er sich nach der Variation befindet, gezogen wird, durch den Punkt (5). Die Variation des Punktes selber, d. h. die Grösse $\sqrt{(\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2)}$, die wir immer als positiv rechnen wollen, bezeichnen wir der Kürze halber mit δe, und den Bogen zwischen zwei Punkten der Kugel — z. B. (1) und (5) — oder den Winkel, der diesen Bogen misst, schreiben wir (1, 5).

Es wird also:

$$\delta x = \delta e \cos(1, 5)\,; \qquad \delta y = \delta e \cos(2, 5)\,;$$
$$\delta z = \delta z \cos(3, 5)\,.$$

Dies gilt für jeden Punkt der Oberfläche. Auf ihrer Umgrenzung, d. h. der Peripherie P, treten noch zwei andere Richtungen auf. Einmal die Richtung des Elementes dP, der der Punkt (6) entsprechen möge, dann die Richtung der Normalen hierauf, die die Oberfläche tangirt und in das Innere derselben gerichtet ist. Dieser soll der Punkt (7) entsprechen. Nach unserer Voraussetzung folgen sich die Punkte (6), (7), (4) im gleichen Sinne wie die Punkte (1), (2), (3). Es sei noch darauf aufmerksam gemacht, dass (4, 6), (4, 7), (6, 7) Quadranten oder rechte Winkel darstellen. Es folgen so die Gleichungen, die wir schon in Abschnitt 20 gegeben haben:

$$\eta Z - \zeta Y = \cos(1, 7)\,, \qquad \zeta X - \xi Z = \cos(2, 7)\,,$$
$$\xi Y - \eta X = \cos(3, 7)\,.$$

Die Formeln des vorigen Abschnittes gehen dann über in:

$$Q = -\delta e \cos(5, 7)\,,$$
$$V = \delta e \cos(4, 5)\left(\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}\right).$$

Es bezeichnet daher Q die Verschiebung eines Punktes der Peripherie P senkrecht zu der zu U normalen Tangentialebene an P, positiv zu rechnen in der Richtung von der Oberfläche U aus abgewendet. Der Factor in V aber, $\delta e \cos(4, 5)$, bezeichnet die Verschiebung eines beliebigen Punktes der Oberfläche U in der Richtung der Normalen auf U, positiv zu rechnen in der Richtung vom Raume s abgewendet.

Wir können aber auch den anderen Factor von V durch eine geometrische Darstellung deuten. Wir haben nämlich:

$$\xi = -\zeta \frac{\partial z}{\partial x}\,; \qquad \eta = -\zeta \frac{\partial z}{\partial y}\,;$$
$$\frac{1}{\zeta^2} = 1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2.$$

Daraus ergiebt sich:

$$d\zeta = \xi \zeta^2 d\frac{\partial z}{\partial x} + \eta \zeta^2 d\frac{\partial z}{\partial y}\,,$$

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} = -\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - \frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial \zeta}{\partial x}$$
$$= -\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \xi^2 \zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \xi\eta\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$= -\zeta(\eta^2 + \zeta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \xi\eta\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$
$$\frac{\partial \eta}{\partial y} = -\zeta \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \eta^2\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$$
$$= -\zeta(\xi^2 + \zeta^2)\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} + \xi\eta\zeta\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y},$$

und somit:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
$$= -\zeta^3\left\{\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2\right] - \frac{2\,\partial^2 z}{\partial x \partial y}\frac{\partial z}{\partial x}\frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\left[1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2\right]\right\}.$$

Der Werth dieses Ausdruckes ist bekanntlich

$$= \frac{1}{R} + \frac{1}{R'},$$

wenn R und R' die extremen Krümmungsradien in dem zu betrachtenden Punkte bezeichnen, und zwar sind sie positiv zu rechnen, wenn die Oberfläche ihre convexe Seite nach aussen kehrt.

26.

Eine aufmerksame Prüfung unserer Rechnung von Abschnitt 22 an lässt uns eine stillschweigende Annahme erkennen, die ihr anhaftet, nämlich die, dass jedem Werthepaare von x, y nur ein einziger Werth von z zugehört, und dass ζ überall auf der Oberfläche positiv ist. Nichtsdestoweniger wird aber die Allgemeingültigkeit des endlichen Theorems, auf das uns die Rechnung geführt hat, nämlich:

$$\delta U = -\int \delta e \cos(5,7)\,dP + \int \delta e \cos(4,5)\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)dU, \quad \text{(I)}$$

durch diese Annahme nicht beeinträchtigt. Wenn wir diese Allgemeingültigkeit gleich von Anfang an hätten wahren wollen, hätten wir entweder uns auf Weitschweifigkeiten einlassen oder einen etwas anderen Weg verfolgen müssen. Aber wir können leicht zum selben Ziele auch durch folgende Erwägungen gelangen.

Unsere Analysis ist offenbar unabhängig von der Voraussetzung, dass die z-Axe vertical steht. Es ist überhaupt die Lage des Axensystems vollkommen willkürlich, und die Gültigkeit des Theorems bleibt aufrecht erhalten für alle Oberflächen, bei denen der Complex aller Punkte (4) durch eine einzige Halbkugel umfasst werden kann: es genügt nämlich, das Centrum dieser Halbkugel, d. h. den Pol mit dem Punkte (3) zusammenzulegen.

Wenn aber eine Oberfläche dieser Bedingung nicht genügt, so ist es immer möglich, sie in zwei oder mehr Theile zu zerlegen, von denen jeder einer solchen Bedingung genügt. Man erkennt dann leicht, dass, wenn eine Oberfläche in zwei Theile zerlegt ist, die Gültigkeit des Theorems für die ganze Oberfläche aus der Gültigkeit für die einzelnen Theile sich folgern lässt. Es bestehe z. B. die Fläche U aus den Theilen U', U'', und es sei P' die Umgrenzung von U', P'' die von U''. Es habe ferner P' mit P'' den Theil P''' gemeinsam, so dass P' aus P''' und P'''', P'' aus P''' und P''''' besteht. Es soll also die Umgrenzung P der ganzen Fläche U sich aus P'''' und P''''' zusammensetzen. Dann wird

$$\int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP' = \int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP''' + \int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP'''' ,$$

$$\int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP'' = \int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP''' + \int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP''''' .$$

Es ist nun wohl zu beachten, dass der Werth von

$$\int \delta e \cos(5,\, 7)\, dP''',$$

so weit er einen Theil des ersten Integrals bildet, gerade entgegengesetzt ist dem Werthe des gleichen Integrals, sobald es ein Theil des zweiten Ausdruckes ist. Denn einem jeden Punkte der Linie P''', die in diesen beiden Fällen in entgegengesetzter Richtung zu durchlaufen ist, entsprechen entgegengesetzte Punkte (7) und folglich entgegengesetzte Werthe des Factors cos (5, 7). Bei der Addition heben diese beiden Theile sich also gegenseitig auf, und es folgt:

$$\int \delta e \cos(5, 7)\, dP' + \int \delta e \cos(5, 7)\, dP'' = \int \delta e \cos(5, 7)\, dP\,.$$

Es ergiebt sich hieraus, dass, da $\delta U = \delta U' + \delta U''$ ist, der Werth von δU mit dem in Formel (I) aufgestellten im Einklang steht, wenn diese Formel für die Werthe der Variationen $\delta U'$, $\delta U''$ zutreffend angenommen wird. Zum Schlusse bemerken wir noch, dass wir die Gültigkeit des Theorems (I) auch aus geometrischen Betrachtungen hätten folgern können, und zwar leichter als auf analytischem Wege. Wir haben aber diesen letzteren hier eingeschlagen, um die Gelegenheit zu benutzen, die Variationsrechnung, angewandt auf doppelte Integrale mit variabeln Grenzen, die bisher nur wenig erforscht ist, aufzuklären. Die ziemlich nahe liegende andere, geometrische Methode überlassen wir dem erfahrenen Leser.

27.

Es bleiben uns jetzt noch die Variationen zu untersuchen, die die übrigen Elemente des Ausdruckes W bei einer Formänderung des Raumes s erfahren. Zuerst wollen wir auf die Variation des Volumens von s eingehen.

Wir nehmen die zwei in Abschnitt 21 betrachteten Dreiecke wieder auf und verbinden entsprechende Punkte der Seiten mit einander. Es entsteht dadurch ein Körper, an Stelle dessen wir ein Prisma setzen können mit der Basis dU und der Höhe $\xi\delta x + \eta\delta y + \zeta\delta z = \delta e \cos(4, 5)$. Diese Formel liefert eine positive oder negative Zahl, je nachdem das verschobene Dreieck — und damit der ganze Körper — ausserhalb oder innerhalb des Raumes s gelegen ist. Wir haben somit:

$$\delta s = \int dU\, \delta e \cos(4, 5) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(II)}$$

Und weiter folgt hieraus für die Variation des Integrals $\int z ds$:

$$\delta \int z ds = \int z dU\, \delta e \cos(4, 5) \quad \ldots\ldots \quad \text{(III)}$$

Was nun ferner die Variation der Grösse T anbelangt, so sei auf Folgendes aufmerksam gemacht. Da P die gemeinsame Grenzlinie der Oberflächen T, U darstellt, so müssen die Verschiebungen der Punkte von P der Bedingung genügen, dass ihre neuen Orte auf der Oberfläche von S bleiben. Es erfährt demnach augenscheinlich durch die Verschiebung des Elementes dP die Oberfläche T eine Veränderung

$$\pm\, dP\delta e \sin(5,\,6)\,.$$

Das Vorzeichen dieser Veränderung wird, wie man leicht übersieht, allgemein positiv oder negativ ausfallen, je nach dem Vorzeichen der Grösse $\cos(4,5)$. Zweckmässiger aber drücken wir diese Veränderung durch Einführung einer neuen Richtung aus. Diese soll die Oberfläche von S tangiren, auf P senkrecht stehen und von s aus nach auswärts gerichtet sein. Den dieser Richtung zugehörenden Punkt der Kugelfläche bezeichnen wir mit (8). Dann wird die Variation der Oberfläche T, die von der Verschiebung des Elementes dP herrührt

$$dP\delta e \cos(5,\,8)\,,$$

oder es wird

$$\delta T = \int dP\,\delta e \cos(5,8) \quad \ldots\ldots\ldots \quad \text{(IV)}$$

Das Vorzeichen des Factors $\cos(5,8)$ entscheidet darüber von selbst, ob die Veränderung einen Zuwachs oder eine Abnahme bedeutet.

Da der Punkt (6) der Pol zu dem durch (7) und (8) gezogenen grössten Kreis ist, und da der Punkt (5) auf dem grössten Kreis durch die Punkte (6), (8) liegt, so bilden (5), (7), (8) ein Dreieck, das bei (8) einen rechten Winkel besitzt. Es ist demnach $\cos(5,7) = \cos(5,8)\cos(7,8)$. Der Bogen (7, 8) misst aber den Winkel zwischen zwei Ebenen, die die Oberflächen von s und S in ihrer Schnittlinie P tangiren, und zwar den Winkel zwischen den Theilen dieser Ebenen, die den leeren Raum einschliessen. Nennen wir diesen Winkel i, so ist $180^\circ - i$ der Winkel zwischen den Seiten der Tangentialebenen, die den Raum s in sich fassen, und es wird unsere Formel

$$\cos(5,7) = \cos(5,8)\cos i \quad \ldots\ldots \quad \text{(V)}$$

28.

Aus den Formeln (I) bis (IV) folgt die Variation des Ausdruckes W

$$\delta W = \int dU \, \delta e \cos(4,5) \left[z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$

$$- \int dP \, \delta e \cos(5,8) (\alpha^2 \cos i - \alpha^2 + 2\beta^2),$$

wo das erste Integral über alle Elemente dU des freien Theiles oder (wenn mehrere getrennt vorhanden) der freien Theile der Oberfläche von s zu erstrecken ist. Das zweite Integral muss über alle Elemente dP der Linie oder der Linien erstreckt werden, die diese freien Oberflächentheile von den den Raum S berührenden Theilen trennen.

Es muss nun im Zustande des Gleichgewichts der Werth von W ein Minimum sein, und somit kann W bei einer unendlich kleinen Aenderung der Flüssigkeitsform, bei der das Volumen s unverändert bleibt, d. h. bei der

$$\delta s = \int dU \, \delta e \cos(4,5)$$

verschwindet, eine negative Aenderung nicht erfahren. Es folgt daraus leicht, dass die Form der Oberfläche U in der Gleichgewichtslage so beschaffen sein muss, dass auf allen ihren Punkten das Element der Aenderung δW

$$dU \, \delta e \cos(4,5) \left[z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) \right]$$

proportional mit dem Elemente der Variation δs, also mit $dU \delta e \cos(4,5)$ sein muss, mit anderen Worten, es muss

$$z + \alpha^2 \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} \right) = \text{const.} \quad \ldots \ldots \quad \text{(VI)}$$

sein. Denn, wenn diese Proportionalität nicht bestände, dann würde bei geeigneter Wahl der Oberflächenänderung von U der Werth von W einer Abnahme fähig sein, während dabei die Grenzlinie P ungeändert gehalten wird. Uebrigens gilt diese Gleichung für die ganze Oberfläche U, auch wenn diese aus mehreren gesonderten Theilen besteht, so lange nur die Flüssigkeit in sich im Zusammenhang steht.

Diese Gleichung bildet das erste grundlegende Theorem in der Gleichgewichtstheorie der Flüssigkeiten, dasselbe, das schon *Laplace*, allerdings auf ganz anderem Wege, aufgefunden hat.

Wenn wir die Horizontalebene, für die z gleich der in unserer Gleichung auftretenden Constanten ist, und die wir als »normale Horizontalebene« (plan de niveau) bezeichnen können, an Stelle unserer Ebene $z = 0$ einführen, so wird

$$z = -\alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

und wir ziehen daraus die nachstehenden Folgerungen:

I. Wenn die Normalebene die freie Oberfläche U irgendwo schneidet, so muss an jedem Punkte der Schnittlinie die Oberfläche nothwendig concav-convex sein, und der grösste Krümmungsradius der Convexität muss gleich dem grössten Krümmungsradius der Concavität sein.

II. Oberhalb der Normalebene muss die Oberfläche entweder concav-concav sein, oder, wenn sie irgendwo concav-convex ist, so muss die Concavkrümmung die Convexkrümmung überwiegen.

III. Unterhalb der Normalebene muss die Oberfläche entweder convex-convex sein, oder, wenn sie irgendwo concav-convex ist, so muss die Convexkrümmung die Concavkrümmung überwiegen.

IV. Die freie Oberfläche kann keinen ebenen Theil von endlicher Ausdehnung besitzen, der anders als horizontal gelegen wäre und mit der Normalebene zusammenfiele.

29.

Mittels der soeben aufgestellten Gleichung reducirt sich die Variation von W auf

$$\delta W = -\int dP\,\delta e \cos(5,8)(\alpha^2 \cos i - \alpha^2 + 2\beta^2)).$$

Führen wir nun einen Winkel A ein, gegeben durch die Bedingung

$$\cos A = \frac{\alpha^2 - 2\beta^2}{\alpha^2} \quad \text{oder} \quad \sin\frac{A}{2} = \frac{\beta}{\alpha},$$

so folgt

$$\delta W = \alpha^2\int dP\,\delta e \cos(5,8)(\cos A - \cos i),$$

worin die Integration über die ganze Grenzlinie P zu erstrecken ist. Es sei daran erinnert, dass der Factor cos $(5, 8)$ gleich $\pm$ sin $(5, 6)$ ist, wobei das positive oder negative Zeichen zu wählen ist, je nachdem die Flüssigkeit in ihrer virtuellen Bewegung am Orte des Elementes dP über die Grenze P hinaustritt oder unter sie zurücksinkt. Hieraus entnehmen wir leicht, dass allgemein im Zustande des Gleichgewichts überall

$$i = A \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad \text{(VII)}$$

sein muss. Denn wenn z. B. an irgend einer Stelle der Linie P $i < A$ wäre, dann würde eine virtuelle Verschiebung der ersten Art an dieser Stelle — bei Festbleiben des übrigen Theiles von P — offenbar eine negative Aenderung von W hervorbringen. Andererseits würde eine negative Aenderung von W durch eine virtuelle Flüssigkeitsverschiebung der zweiten Art hervorgerufen, wenn an irgend einer Stelle der Linie P $i > A$ wäre. Beide Annahmen widersprechen also der Gleichgewichtsbedingung des Minimums.

Dies ist das zweite Fundamentaltheorem, das ebenfalls in die Untersuchungen von *Laplace* eingewebt ist. Aber aus einem Princip der Molecularkräfte ist es nicht abgeleitet.

30.

Das im vorigen Abschnitt gewonnene Theorem bedarf in einem gewissen Falle, den wir nicht übergehen dürfen, einer Ergänzung. Wir haben stillschweigend vorausgesetzt, dass die Oberfläche des Gefässes in der Nachbarschaft der Grenzlinie P eine sich stetig ändernde Krümmung besitzt, so dass an jeder Stelle dieser Grenzlinie nur eine die Gefässwand berührende Tangentialebene existirt. Wenn die Continuität der Krümmung in irgend einem singulären Punkte von P gestört ist, sei es dass die Fläche hier eine Spitze besitzt, sei es dass eine Schneide die Linie P durchsetzt, so erkennt man leicht, dass unsere Schlussfolgerungen dadurch nicht beeinträchtigt werden. Anders verhält es sich, wenn die Continuität der Krümmung längs eines endlichen Theiles der Grenzlinie P eine Unterbrechung erfährt, also wenn etwa die Oberfläche des Gefässes längs eines endlichen Theiles der Linie P (oder auch längs der ganzen Linie) eine Schneide besitzt. Dann existiren an jedem Punkte dieses Theiles zwei die Gefässwand berührende

Tangentialebenen, von denen die eine dem freien Oberflächentheile des Gefässes angehört, die andere dem Theile T. Behalten wir für den zwischen der erstgenannten und der die Fläche U tangirenden Ebene gelegenen Winkel das Zeichen i bei, und bezeichnen wir den Winkel zwischen der zweitgenannten Ebene und der Tangentialebene zu U mit k, dann wird nicht mehr $i + k = 180^\circ$ sein, sondern es muss grösser oder kleiner sein, je nachdem die Schneide convex oder concav ist. Während nun das Element der Variation δW bei einer virtuellen Verschiebung der Flüssigkeit über die Grenzlinie P hinaus auch jetzt noch durch

$$\alpha^2 dP \delta e \sin(5, 6)(\cos A - \cos i)$$

gegeben ist, so wird das Element dieser Variation, wenn die virtuelle Verschiebung durch ein Zurücktreten der Flüssigkeit unter die Grenzlinie bedingt ist, gleich

$$-\alpha^2 dP \delta e \sin(5, 6)(\cos A + \cos k).$$

Damit es nun unmöglich gemacht wird, dass W eine negative Aenderung erfährt, ist zu verlangen, dass weder $\cos A - \cos i$ negativ, noch $\cos A + \cos k$ positiv ausfällt, d. h. es muss sein

$$\begin{array}{llll} \text{entweder} & i = A & \text{oder} & i > A, \\ \text{und} & k = 180^\circ - a & \text{oder} & k > 180^\circ - A. \end{array}$$

Im Zustande des Gleichgewichts kann also niemals

$$i + k < 180^\circ$$

werden, oder mit anderen Worten: **Im Zustande des Gleichgewichts kann niemals die Grenzlinie der freien Oberfläche U sich längs eines endlichen Stückes auf einer concaven Schneide befinden.** Sobald dagegen ein Theil dieser Grenzlinie mit einer Convexschneide zusammenfällt, ist die nothwendige und hinreichende Bedingung des Gleichgewichts, dass der Winkel zwischen den Tangentialebenen an die Flüssigkeit und an das Gefäss innerhalb der Grenzen A und $A + a$ (einschliesslich) gelegen ist, wenn wir ihn ausserhalb der Flüssigkeit messen, und zwischen $180^\circ - A$ und $180^\circ - A + a$, wenn wir ihn innerhalb der Flüssigkeit messen. Wir haben hier den Winkel zwischen den zwei Tangentialebenen, die man am Orte der Schneide an die Gefässoberfläche legen kann, unbestimmt mit $180^\circ - a$ bezeichnet, gemessen im Inneren der Gefässwand.

31.

Die Constanten α^2, β^2, deren Verhältniss den Winkel A bestimmt, hängen von den Functionen f, F ab, und sie können in gewissem Sinne angesehen werden als ein Maass für die Intensität der Molecularkräfte, die die Theilchen der Flüssigkeit und des Gefässes ausüben. Wenn diese Functionen so eingerichtet sind, dass $f(x)$, $F(x)$ in einem festen vom Abstand x unabhängigen Verhältniss stehen, wenn sie sich z. B. wie n zu N verhalten, so können wir sofort schliessen

$$\alpha^2 : \beta^2 = cn : CN,$$

d. h. die Constanten α^2, β^2 werden proportional den anziehenden Kräften, die im gleichen Abstand zwei hinsichtlich ihres Volumens gleiche Molekeln ausüben, deren eine der Flüssigkeit, die andere dem Gefässe angehört. Denken wir uns jetzt die vier Fälle, dass A gleich einem spitzen, einem rechten, einem stumpfen, gleich zwei rechten Winkeln wird, je nachdem

$$\beta^2 < \tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \beta^2 = \tfrac{1}{2}\alpha^2, \quad \tfrac{1}{2}\alpha^2 < \beta^2 < \alpha^2, \quad \beta^2 = \alpha^2$$

wird. Im Sinne unserer Hypothese (die zwar unbewiesen ist, aber der Wahrscheinlichkeit nicht widerspricht) müssen wir dann sagen: Der erste Fall tritt ein, wenn die wechselseitige Anziehung der Flüssigkeitstheilchen grösser ist als die doppelte Anziehung der Gefässtheile auf die Flüssigkeit; der zweite, wenn die erstgenannte Anziehung doppelt so gross ist als die letztere; der dritte Fall, wenn die erstere grösser ist als die letztere, aber kleiner als ihr doppelter Betrag; der vierte Fall endlich, wenn beide Anziehungen einander gleich sind. Ein Beispiel zum ersten Falle bietet Quecksilber in Glasgefässen.

32.

Wie gross wird aber der Winkel A in dem Falle, wo die Anziehung des Gefässes grösser ist als die wechselseitige Anziehung der Flüssigkeitstheile unter einander? Der imaginäre Werth, den nach der Formel $\sin \tfrac{1}{2} A = \frac{\beta}{\alpha}$ der Winkel A für $\beta^2 > \alpha^2$ erlangt, beweist, dass diesem Falle irgend eine unzulässige Annahme zu Grunde liegt. In der That, sobald $\beta^2 > \alpha^2$, ist die Annahme einer Begrenzung der Oberfläche T mit der Minimumbedingung für die Function W nicht mehr verträglich. Denn wo man auch die Grenze annimmt, man erkennt sofort: Wenn man über diese Grenze hinaus eine sehr dünne Haut ausgedehnt denkt, so dass T den Zuwachs T' und U einen diesem fast gleichen Zuwachs erhält, so erfährt W eine Aenderung, die merklich gleich der Grösse

$$-(2\beta^2 - 2\alpha^2)T'$$

ist. Es ist also der Werth von W so lange einer weiteren Verkleinerung fähig, bis T' die ganze freie Oberfläche des Gefässes bedeckt hat. Der Werth der Veränderung

$$-(2\beta^2 - 2\alpha^2)T'$$

wird um so mehr sich der Wahrheit nähern, je geringer wir die Dicke der Haut annehmen. Und so lange es sich nur um den Werth des Ausdruckes W handelt, steht nichts im Wege, diese Dicke bis zum Verschwinden verkleinert zu denken. Jedoch ist eine Haut von verschwindender Dicke (wohl zu unterscheiden von einer unmerklichen Dicke) nur eine mathematische Fiction, und die Form des Raumes s, so weit sie dieser Fiction genügt, wird sich in der That nicht von der unterscheiden, bei der im Falle $\beta^2 = \alpha^2$ die Function W einen Minimalwerth erreicht.

Etwas anders liegt die Sache bei unserem physikalischen Problem, wo eine solche Haut eine gewisse, wenn auch unmessbar kleine Dicke besitzen muss, damit Gleichgewicht herrschen kann. Wenn ein solcher Theil vorhanden ist, ist der Ausdruck W, wie in Abschnitt 18 gezeigt ist, nicht vollständig. Bezeichnet T' den von der Haut bedeckten Theil des Gefässes, und ist ϱ die Dicke derselben, so treten zu Ω noch die Glieder

$$\pi c^2 \int \theta'(\varrho)\,dT' - \pi c C \int \Theta'(\varrho)\,dT',$$

also zu W die Glieder

$$\begin{aligned}\frac{\pi C}{g}\int \Theta'(\varrho)\,dT' &- \frac{\pi c}{g}\int \theta'(\varrho)\,dT' \\ &= \int dT'\left(\frac{2\beta^2}{\Theta(0)}\Theta'(\varrho) - \frac{2\alpha^2}{\theta(0)}\theta'(\varrho)\right).\end{aligned}$$

Da also W, wenn eine solche Haut auftritt, bereits die Aenderung $-(2\beta^2 - 2\alpha^2)T'$ erfährt, so folgt, dass die Gesammtänderung, die hinzutritt zu dem Werthe von W, der ohne Berücksichtigung der Haut statt hat, gleich

$$-2\int dT'\left[\beta^2\left(1-\frac{\Theta'(\varrho)}{\Theta(0)}\right)-\alpha^2\left(1-\frac{\theta'(\varrho)}{\theta(0)}\right)\right]$$

ist. Diese Aenderung wird wegen $\theta'(0)=\theta(0)$, $\Theta'(0)=\Theta(0)$ bei verschwindender Dicke gleich 0; und da $\theta'(\varrho)$, $\Theta'(\varrho)$ mit zunehmender Dicke ϱ sehr schnell abfällt und schon für einen unmessbar kleinen Werth von ϱ unmessbar klein wird, so ergiebt sich, dass diese Aenderung sehr schnell gegen den Werth $-(2\beta^2-2\alpha^2)\,T'$ convergirt, und sie muss im Gleichgewichtszustand ihm merklich gleich sein, damit der strenge Werth von W einer weiteren Verminderung nicht mehr fähig ist. Uebrigens verlangt die Aufstellung eines vollkommenen Gesetzes, dem die Dicke ϱ folgen muss, tiefergehende Entwicklungen, bei denen wir uns hier aber nicht länger aufhalten wollen; denn ohne Kenntniss der Functionen f, F, von denen die Functionen θ', Θ' abhängen, und wegen der Erwägungen, die wir im Abschnitt 34 geben wollen, scheint diese Frage müssig zu sein. Für die Erforschung des wesentlichen Theiles der Flüssigkeit, d. h. des Theiles, dessen Dimensionen sämmtlich messbare Grössen sind, genügt es in unserem Falle, also wenn $\beta^2>\alpha^2$, das Gefäss in der Nachbarschaft der Grenzlinie dieses wesentlichen Theiles benetzt, d. h. mit einer Flüssigkeitshaut bedeckt zu denken, deren Dicke zwar unmessbar klein, aber doch so gross ist, dass $\theta'(\varrho)$ und $\Theta'(\varrho)$ vernachlässigt werden können. Unter dieser Annahme wird die Function, die im Gleichgewichtszustand ein Minimum werden soll, gleich

$$\int z\,ds-2(\beta^2-\alpha^2)(T+T')-\alpha^2T+\alpha^2U;$$

hierin dürfen T und U nur auf den wesentlichen Theil der Flüssigkeit bezogen werden. Es folgt demnach, dass die Variation dieser Function, soweit sie von einer virtuellen Formänderung des wesentlichen Theiles der Flüssigkeit herrührt (eine Aenderung, die die Summe $T+T'$ nicht beeinflusst), zusammenfällt mit der Aenderung des Ausdruckes

$$\int z\,ds-\alpha^2T+\alpha^2U,$$

d. h. mit der Aenderung des Ausdruckes, der im Falle $\beta^2=\alpha^2$

ein Minimum sein muss. Wir entnehmen daraus, dass eine Flüssigkeit in einem Gefässe, bei dem $\beta^2 > \alpha^2$ ist, dieselbe Gleichgewichtsfigur bildet, wie in einem Gefässe, bei dem $\beta^2 = \alpha^2$, nur mit dem Unterschied, dass sie im ersten Falle streng genommen in eine Haut von unmessbar kleiner Dicke auslaufen muss.

Uebrigens hat bereits *Laplace* darauf hingewiesen, dass in diesem Falle ein Gefäss, das mit einer unmessbar dünnen Flüssigkeitshaut bedeckt ist, gleichwerthig ist mit einem Gefäss, dessen Massentheile die gleiche anziehende Kraft auf die Flüssigkeit ausüben, wie die Flüssigkeitstheilchen unter einander.

Es folgt hieraus von selbst die Abänderung, die wir bei unseren Darlegungen in Abschnitt 19, betreffend die Steighöhe von Flüssigkeiten in verticalen Capillarröhren, anzubringen haben: Sobald $\beta^2 > \alpha^2$, haben wir in den dort aufgestellten Formeln β^2 durch α^2 zu ersetzen.

33.

In dem Falle, wo $\beta^2 < \alpha^2$, kann eine Benetzung des Gefässes mit einer Flüssigkeitshaut von unmessbar kleiner Dicke nicht statt haben, wenigstens nicht, wenn das Gesetz der Functionen θ', Θ' derart ist, dass der Werth der Function

$$\alpha^2\left(1 - \frac{\theta'(\varrho)}{\theta'(0)}\right) - \beta^2\left(1 - \frac{\Theta'(\varrho)}{\Theta'(0)}\right),$$

die wir kurz mit $Q(\varrho)$ bezeichnen wollen, stetig zunimmt, wenn ϱ von 0 bis zu einem messbaren Werthe anwächst. Denn es würde offenbar bei einer derartigen Beschaffenheit der Function $Q(\varrho)$ die Existenz einer solchen Haut der Bedingung des Minimums widersprechen. Diese Beschaffenheit von $Q(\varrho)$ leitet sich von selbst aus der Hypothese ab, über die wir in Abschnitt 31 gesprochen haben, nämlich dass $f(x)$ und $F(x)$ in einem festen, von x unabhängigen Verhältniss stehen. Hieraus würde nämlich folgen, dass $\frac{\theta'(\varrho)}{\theta'(0)} = \frac{\Theta'(\varrho)}{\Theta'(0)}$, und somit

$$Q(\varrho) = (\alpha^2 - \beta^2)\left(1 - \frac{\theta'(\varrho)}{\theta'(0)}\right).$$

Wenn aber f und F einem anderen Gesetze folgen würden, dann wäre denkbar, dass $\frac{\Theta'(\varrho)}{\Theta'(0)}$ schneller abnimmt als $\frac{\theta'(\varrho)}{\theta'(0)}$, und dass daher die Function $Q(\varrho)$ innerhalb des Gebietes, das die unmessbar kleinen Werthe von ϱ umfasst, zuerst negativ wird, und nachdem sie ihren kleinsten (d. h. den äussersten negativen) Werth erreicht hat, wieder durch den Werth 0 hindurch sich ihrem positiven Grenzwerthe $\alpha^2 - \beta^2$ nähert. In einem solchen Falle würde das Gleichgewicht entschieden eine unmessbar dünne Flüssigkeitshaut fordern, deren Dicke so gross sein müsste, dass sich $Q(\varrho)$ nicht merklich von seinem Minimalwerthe unterschiede. Bezeichnen wir diesen mit $-\beta'^2$, so folgt $\beta'^2 < \beta^2$; und die Form des wesentlichen Flüssigkeitstheiles wird ebenso begrenzt sein, als wenn sich die Flüssigkeit in einem Gefässe befände, für welches an Stelle von β^2 die Grösse β'^2 einträte, d. h. der Winkel zwischen der Tangentialebene, die an der Grenze des wesentlichen Theiles die freie Oberfläche der Flüssigkeit berührt, und der Gefässwand ergiebt sich gleich $2 \arcsin \frac{\beta'}{\alpha}$. Da es aber sehr zweifelhaft ist, ob ein solcher Fall in Wirklichkeit vorkommt, so scheint es nicht nöthig, länger dabei zu verweilen.

34.

Es wäre nicht im Sinne unserer Absicht, wenn wir von den hier aufgestellten allgemeinen Principien auf specielle Erscheinungen übergehen wollten, zumal da diese Principien ihrem Wesen nach mit der Theorie übereinstimmen, aus der *Laplace* mit gutem Erfolg eine grosse Zahl auffallender Erscheinungen aus dem Gebiete der Gleichgewichtsform von Flüssigkeiten erklärt hat. Es bleibt noch ein weites Feld, das reiche Ernte verheisst. Doch soll das späteren Arbeiten vorbehalten bleiben. Dagegen ist es angemessen, einige Bemerkungen anzufügen, die theils neues Licht über unseren Gegenstand verbreiten, theils irrige Deutung verhindern sollen.

I. Unsere Theorie beansprucht nicht, eine mathematisch genaue Bestimmung der Gleichgewichtsfigur geben zu wollen. Sie begnügt sich damit, die Bestimmung einer Figur zu liefern, derart, dass die wahre Gleichgewichtsfigur nur unmessbar wenig von ihr abweicht. Es wäre ein Irrthum, wenn man dies einer Unvollkommenheit der Theorie zuschreiben wollte. Unsere

Theorie leistet so viel, als sie in anbetracht unserer Unbekanntschaft mit dem Wirkungsgesetz der Molecularkräfte zu bieten vermag. Im Zustande des Gleichgewichts muss streng genommen die Function Ω ein Maximum sein, also

$$\frac{2\pi c s \Psi(0)}{g} - \frac{\Omega}{gc}$$

ein Minimum; diese Function ist je nach dem Gesetz der Molecularanziehung nicht streng gleich der Function W, sie weicht aber nur unmessbar wenig von ihr ab. Also wird auch die Flüssigkeitsgestalt, bei der W ein Minimum wird, nicht streng gleich der Gleichgewichtsfigur sein, aber der Unterschied muss unmessbar klein sein, wenigstens so lange irgend eine messbare Aenderung dieser Figur einen um einen messbaren Betrag vergrösserten Werth von W hervorbringt. Offenbar wird hierdurch aber eine messbare Abweichung der Oberflächenkrümmung nicht ausgeschlossen, wenn diese sich nur auf ein unmessbar kleines Gebiet der Oberfläche beschränkt. Es darf deshalb auch bei der strengen Gleichgewichtsfigur der constante Winkel, den wir früher mit A bezeichnet haben, nicht mehr als der Neigungswinkel der Flüssigkeitsoberfläche gegen die Gefässwand am Orte des Contactes beider angesehen werden, sondern lediglich als der Neigungswinkel derselben in unmessbar kleinem Abstande vom Gefäss. Aehnlich hat schon *Laplace* richtig erkannt, dass die Neigung auf der Grenze der Wirkungssphäre mit dem Winkel A merklich übereinstimmt.

II. Man muss wohl unterscheiden zwischen der Gleichgewichtsgestalt und der der Ruhe. Sobald sich die Flüssigkeit im Zustande des Gleichgewichts befindet, muss sie sicherlich darin verharren. Wenn aber die Gestalt etwas von der der Gleichgewichtslage abweicht, so kann es gleichwohl vorkommen, dass die Flüssigkeit in Ruhe bleibt, oder, wenn sie in Bewegung ist, dass sie zur Ruhe kommt, bevor sie die Gleichgewichtslage erreicht hat. Aehnlich wird z. B. ein Würfel, auf eine Horizontalebene gelegt, in Ruhe bleiben, aber er wird auch auf einer etwas geneigten Ebene noch in Ruhe bleiben, wenn die Reibung seine Bewegung hindert. Somit wird die Flüssigkeit in einer solchen Lage, in der W einen Minimalwerth besitzt, sicher ruhen. Befindet sie sich aber in einer etwas abweichenden Lage, bei der W noch einer Verminderung fähig ist, wird sie aus dieser nur dann in die Gleichgewichtslage übergehen, wenn die Reibung sie nicht daran hindert.

Mit Rücksicht hierauf sind zwei Gleichgewichtsbedingungen wesentlich verschieden. Sicherlich ist die erste Fundamentalgleichung (Abschnitt 28, VI) unabhängig von einer Veränderlichkeit der Grenzlinie P, d. h. sie ist für die Bedingung des Minimums auch dann noch erforderlich, wenn diese Grenze als unveränderlich vorausgesetzt wird. Wenn somit die Flüssigkeit eine vollkommene Flüssigkeit ist, so dass ein Theil frei über den anderen hingleiten kann, und auch die kleinste Kraft eine Bewegung verursacht, dann muss die Flüssigkeit sich nothwendig jener Bedingung fügen. Ganz anders liegen die Verhältnisse bei dem zweiten Grundprincip (Abschnitt 29, VII), das wesentlich von der vollkommenen Beweglichkeit der Grenzlinie auf der Gefässwand abhängt. Die Minimumbedingung für den Werth W fordert unter allen Umständen die Beziehung $i = A$. Wenn nun die Flüssigkeitsoberfläche sich dem ersten Princip angepasst hat, und der Winkel i seinen Normalwerth, also auch W seinen absoluten Minimalwerth noch nicht erreicht hat, so kann der Uebergang zum vollkommenen Gleichgewicht nicht ohne Verschiebung der Grenzlinie P, also nicht ohne Bewegung der Flüssigkeit an der Berührungsstelle mit dem Gefässe erfolgen. Einer solchen Bewegung kann sich aber die Reibung widersetzen. Daraus erklärt es sich, warum wir bei Versuchen, angestellt an den gleichen Körpern, so grossen Differenzen in den Werthen des Winkels i begegnen. Desgleichen vertheilt sich in dem Falle, dass $\beta^2 > \alpha^2$, die Flüssigkeit in dem Gefäss, dessen Wände bereits benetzt sind, entsprechend dem Gleichgewichtsgesetze, dem zufolge für den wesentlichen Theil der Flüssigkeit $i = 180^\circ$ sein muss. Wenn aber in einem Gefässe, dessen Wände ausserhalb der Flüssigkeit noch trocken sind, diese aus einer dem Gleichgewicht nicht zukommenden Stellung sich über die trockenen Wände ausbreitet, so kann sie zur Ruhe kommen, noch bevor der Winkel i den Werth 180° erreicht hat. Hieraus erklärt sich auch die Thatsache, dass die Capillarerscheinungen benetzender Flüssigkeiten in trockenen Röhren so grosse Unregelmässigkeiten aufweisen. Die Flüssigkeiten erreichen hier meist eine weit geringere Steighöhe als in vorher benetzten Röhren, in welchen man immer die schönste Uebereinstimmung mit der Theorie findet.

III. Das Verhältniss der Constanten α, β lässt sich aus Versuchen nicht mehr bestimmen, wenn β grösser als α ist. Denn die Gleichgewichtsgestalten der gleichen Flüssigkeit in gleichgeformten, aber der Materie nach verschiedenen Gefässen unterscheiden sich in diesem Falle nicht mehr von einander, ausser in der unmessbaren Haut, die die Gefässwand bedeckt. Sobald aber β kleiner als α ist, ist die Bestimmung des Verhältnisses dieser zwei Constanten mit Hilfe des Winkels i zwar möglich, kann aber wegen der vorhin angeführten Umstände kaum grosse Genauigkeit liefern. Für Quecksilber in Glasgefässen fand *Laplace* den Winkel $i = 43^{\circ}\,12'$.

Weit grösserer Genauigkeit ist die Bestimmung der Constanten α fähig, besonders wenn es möglich ist, benetzbare Gefässe zu verwenden. Wasser von 8,5° C. liefert nach Versuchen, die *Laplace* anführt*), die Werthe

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 7{,}5675 \text{ mm}^2 \text{ oder} \\ \alpha &= 2{,}7509 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Alkohol vom spec. Gew. 0,81961 giebt bei derselben Temperatur

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 3{,}0441 \text{ mm}^2 \text{ oder} \\ \alpha &= 1{,}7447 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Terpentinöl von 8° C. giebt

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 3{,}305 \text{ mm}^2, \\ \alpha &= 1{,}818 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Für Quecksilber bei einer Temperatur von 10° hat man, bis neue Experimente eine grössere Genauigkeit gewährleisten, zu setzen

$$\begin{aligned} \alpha^2 &= 3{,}25 \text{ mm}^2 \text{ oder} \\ \alpha &= 1{,}803 \text{ mm.} \end{aligned}$$

Es ist übrigens wahrscheinlich, dass die Temperatur nur insofern den Werth von α^2 beeinflusst, als von ihr die Dichte abhängt, der in unserer Theorie α^2 proportional ist.

Die hier angegebenen Werthe sind erschlossen aus der Steighöhe oder der Depression der Flüssigkeiten in Capillarröhren. Es ist jedoch sehr schwer, deren Durchmesser exact zu messen, und noch schwerer, Sicherheit über die kreisförmige Gestalt des Querschnittes zu erlangen. Weit grössere Genauigkeit versprechen Versuche über Durchmesser und Volumen grosser Quecksilbertropfen, die man auf horizontalen Platten

*) Es sei bemerkt, dass die Grösse, die *Laplace* mit H bezeichnet, unserem $\pi c \theta(0)$ entspricht. Somit ist sein α dasselbe, was in unserer Bezeichnung $\frac{g}{\pi c \theta(0)}$ oder $\frac{1}{2\alpha^2}$ ist.

oder Schalen von sehr kleiner bekannter Krümmung ruhen lässt. Solche Versuche haben schon *Segner* und *Gay-Lussac* angestellt. Desgleichen möchte ich für Flüssigkeiten, welche Glasgefässe benetzen, Untersuchungen über die Dimensionen grosser Luftblasen empfehlen, angestellt in Gefässen, die man mit einem benetzten horizontalen und ebenen oder auch schwach, aber in bekannter Weise gekrümmten Deckglase verschliesst.

IV. Um nicht die Grenzen dieser Abhandlung zu überschreiten, musste die Anwendung unserer Grundprincipien an dieser Stelle auf den einfachsten Fall beschränkt werden, nämlich den, wo eine einzige Flüssigkeit in einem festen Gefässe angenommen war. Es hindert aber nichts, die grösste Allgemeinheit der Theorie zu gewinnen, so dass sie auch das Problem mehrerer Flüssigkeiten in einem Gefässe, ja sogar den Fall umfasst, wo starre Körper ganz oder zum Theil in die Flüssigkeit eintauchen. Aber die ausführlichere Behandlung dieser Fragen müssen wir uns für eine andere Gelegenheit vorbehalten.

Anmerkungen.

1) *Zu Art. 26 (S. 47).* Die andere Methode, die *Gauss* hier im Sinne hat, beruht ohne Zweifel auf der Darstellung der krummen Oberflächen, die in der mehrfach citirten Abhandlung zur Flächentheorie gegeben ist, bei der die rechtwinkligen Coordinaten x, y, z eines Punktes der Fläche als Functionen zweier unabhängiger Variablen p, q dargestellt sind. Dieser Weg hat überdies vor dem im Text eingeschlagenen den Vorzug der Symmetrie und mag hier kurz skizzirt werden. Wir wenden die Bezeichnung an, die *Gauss* in der Abhandlung über die Flächentheorie gebraucht.

Wir setzen

$$dx = a\,dp + a'\,dq\,,$$
$$dy = b\,dp + b'\,dq\,,$$
$$dz = c\,dp + c'\,dq\,,$$

also

$$a = \frac{\partial x}{\partial p}, \quad a' = \frac{\partial x}{\partial q}, \quad b = \frac{\partial y}{\partial p}, \quad b' = \frac{\partial y}{\partial q},$$
$$c = \frac{\partial z}{\partial p}, \quad c' = \frac{\partial z}{\partial q}.$$

Dann ergeben sich für die Cosinus der Winkel, die die Normale n mit den Coordinatenaxen bilden, die Ausdrücke:

$$(1) \qquad X = \frac{bc' - cb'}{\varDelta}, \quad Y = \frac{ca' - ac'}{\varDelta}, \quad Z = \frac{ab' - ba'}{\varDelta},$$

worin

$$\varDelta = \sqrt{(bc' - cb')^2 + (ca' - ac')^2 + (ab' - ba')^2}$$

und

$$(2) \qquad X^2 + Y^2 + Z^2 = 1\,.$$

Die Quadratwurzel ist positiv zu nehmen, wenn die Richtungen der positiven dp, dq, dn in demselben Sinne auf einander folgen, wie die der positiven x, y, z-Axe. (Man braucht, um dies einzusehen, nur die Richtungen von x, y, z mit dp, dq, dn zusammenfallen zu lassen.)

Das Quadrat des Linienelementes ds auf der Fläche U hat den Ausdruck

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 = E\,dp^2 + 2F\,dp\,dq + G\,dq^2,$$

worin

$$E = a^2 + b^2 + c^2,$$
$$F = aa' + bb' + cc',$$
$$G = a'^2 + b'^2 + c'^2.$$
$$\Delta^2 = EG - F^2,$$

und für das Oberflächenelement dU kann man setzen

$$dU = \Delta\,dp\,dq = \sqrt{EG - F^2}\,dp\,dq\,.$$

Wenn nun durch die Variation von U die Coordinaten x, y, z eines Punktes in $x + \delta x$, $y + \delta y$, $z + \delta z$ übergehen, so können auch δx, δy, δz als Functionen von p und q betrachtet werden, und es ergiebt sich

$$\delta U = \iint (\tfrac{1}{2} E\delta G + \tfrac{1}{2} G\delta E - F\delta F)\frac{dp\,dq}{\Delta}$$
$$= \int (\tfrac{1}{2} E\delta G + \tfrac{1}{2} G\delta E - F\delta F)\frac{dU}{\Delta^2}\,.$$

Um nun diesen Ausdruck weiter umzuformen, bedienen wir uns des Zeichens Σ, um die Summe dreier entsprechender, auf die x, y, z bezüglicher Ausdrücke zu bezeichnen, also z. B. $E = \Sigma a^2$, $F = \Sigma aa'$, $G = \Sigma a'^2$, und

$$\tfrac{1}{2}\delta E = \Sigma a\delta a\,, \quad \delta F = \Sigma(a\delta a' + a'\delta a)\,, \quad \tfrac{1}{2}\delta G = \Sigma a'\delta a'.$$

Setzen wir noch zur Abkürzung

$$(3)\left\{\begin{aligned} \xi &= \frac{Ga - Fa'}{\Delta}, & \eta &= \frac{Gb - Fb'}{\Delta}, & \zeta &= \frac{Gc - Fc'}{\Delta}, \\ \xi' &= \frac{Ea' - Fa}{\Delta}, & \eta' &= \frac{Eb' - Fb}{\Delta}, & \zeta' &= \frac{Ec' - Fc}{\Delta}, \end{aligned}\right.$$

so folgt

$$\delta U = \int \Sigma (\xi \delta a + \xi' \delta a')\, dp\, dq\,;$$

darin ist

$$\delta a = \delta \frac{\partial x}{\partial p} = \frac{\partial \delta x}{\partial p}, \quad \delta a' = \delta \frac{\partial x}{\partial q} = \frac{\partial \delta x}{\partial q},$$

und folglich

$$\delta U = \iint \Sigma \left(\xi \frac{\partial \delta x}{\partial p} + \xi' \frac{\partial \delta x}{\partial q} \right) dp\, dq\,,$$

und wenn hierin

$$\xi \frac{\partial \delta x}{\partial p} = \frac{\partial \xi \delta x}{\partial p} - \delta x \frac{\partial \xi}{\partial p},$$

$$\xi' \frac{\partial \delta x}{\partial q} = \frac{\partial \xi' \delta x}{\partial q} - \delta x \frac{\partial \xi'}{\partial q}$$

gesetzt wird, so zerfällt δU in zwei Theile

$$\delta U = \delta U_1 + \delta U_2\,,$$

die wir so darstellen:

$$\delta U_1 = \iint \Sigma \left(\frac{\partial \xi \delta x}{\partial p} + \frac{\partial \xi' \delta x}{\partial q} \right) \cdot dp\, dq,$$

$$\delta U_2 = -\iint \Sigma \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q} \right) \delta x \quad dp\, dq\,.$$

In dem ersten Theil δU_1 lässt sich eine Integration ausführen (ähnlich wie in Art. 22), und es ergiebt sich für δU_1 ein über den Rand P zu erstreckendes Integral

$$\delta U_1 = \int \Sigma (\xi dq - \xi' dp)\, \delta x\,,$$

worin aber dp, dq nicht mehr im absoluten Sinne, sondern mit dem Vorzeichen behaftet zu nehmen sind, das einem positiven Element der Randcurve dP entspricht (Art. 20).

Setzt man in ξ, ξ' für E, F, G ihre Ausdrücke durch a, a', ... ein, so ergiebt eine leichte Rechnung

$$(4) \qquad \xi = b'Z - c'Y\,, \quad \xi' = -bZ + cY\,,$$

und demnach erhält man für δU_1

$$\delta U_1 = \int \Sigma (Zdy - Ydz)\, \delta x\,,$$

worin die dx, dy, dz die Projectionen von dP auf die Coordinatenaxen sind. Es ist aber nach der Bezeichnung im Text

$$X = \cos(1, 4)\,, \qquad dx = dP \cos(1, 6)\,, \qquad \delta x = \delta e \cos(1, 5)\,,$$

und da die Richtung 7 auf 4 und 6 senkrecht steht, während 6, 7, 4 in demselben Sinne auf einander folgen wie 1, 2, 3, so ergiebt sich

$$\delta U_1 = -\int \delta e \cos(5, 7)\, dP\,,$$

was der erste Theil des Ausdruckes δU in Art. 26 ist.

Es ist nun der zweite Theil δU_2 von δU umzuformen. Nach der Definition der a, b, c, a', b', c' ist

$$\frac{\partial a}{\partial q} = \frac{\partial a'}{\partial p} = \frac{\partial^2 x}{\partial p\, \partial q} \quad \text{etc.}$$

und demnach ergiebt sich nach (4)

$$(5) \quad \begin{cases} \dfrac{\partial \xi}{\partial p} + \dfrac{\partial \xi'}{\partial q} = b' \dfrac{\partial Z}{\partial p} - c' \dfrac{\partial Y}{\partial p} - b \dfrac{\partial Z}{\partial q} + c \dfrac{\partial Y}{\partial q}\,, \\ \dfrac{\partial \eta}{\partial p} + \dfrac{\partial \eta'}{\partial q} = c' \dfrac{\partial X}{\partial p} - a' \dfrac{\partial Z}{\partial p} - c \dfrac{\partial X}{\partial q} + a \dfrac{\partial Z}{\partial q}\,, \\ \dfrac{\partial \zeta}{\partial p} + \dfrac{\partial \zeta'}{\partial q} = a' \dfrac{\partial Y}{\partial p} - b' \dfrac{\partial X}{\partial p} - a \dfrac{\partial Y}{\partial q} + b \dfrac{\partial X}{\partial q}\,. \end{cases}$$

Multiplicirt man diese Gleichungen der Reihe nach mit a, b, c, sodann mit a', b', c', und addirt jedesmal, so folgt mit Rücksicht auf (1), (2)

$$\Sigma a \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q}\right) = \Delta \Sigma X \frac{\partial X}{\partial p} = 0\,,$$

$$\Sigma a' \left(\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q}\right) = \Delta \Sigma X \frac{\partial X}{\partial q} = 0\,.$$

Daraus aber ergiebt sich, dass die drei Grössen:

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q}\,, \qquad \frac{\partial \eta}{\partial p} + \frac{\partial \eta'}{\partial q}\,, \qquad \frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \zeta'}{\partial q}$$

den

$$X\,, \qquad Y\,, \qquad Z$$

proportional sind. Wir setzen

$$\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q} = L\Delta X, \quad \frac{\partial \eta}{\partial p} + \frac{\partial \eta'}{\partial q} = L\Delta Y,$$

$$\frac{\partial \zeta}{\partial p} + \frac{\partial \zeta'}{\partial q} = L\Delta Z,$$

woraus durch Multiplication mit X, Y, Z und Addition

$$\Sigma X\left(\frac{\partial \xi}{\partial p} + \frac{\partial \xi'}{\partial q}\right) = L\Delta \tag{6}$$

folgt, und es wird

$$\delta U_2 = -\iint L\Delta \Sigma X \delta x \cdot dp\, dq,$$

oder in der Bezeichnung des Textes Art. 25

$$\delta U_2 = -\int L \cos(4, 5)\, \delta e\, dU.$$

Multipliciren wir die Gleichungen (5) mit X, Y, Z und addiren, so folgt nach (4) und (6)

$$L\Delta = \Sigma \frac{\partial X}{\partial p}(c'Y - b'Z) - \Sigma \frac{\partial X}{\partial q}(cY - bZ)$$

$$= -\Sigma \xi \frac{\partial X}{\partial p} - \Sigma \xi' \frac{\partial X}{\partial q},$$

und nach (3)

$$L\Delta^2 = -G\Sigma a \frac{\partial X}{\partial p} + F\left(\Sigma a' \frac{\partial X}{\partial p} + a\frac{\partial X}{\partial q}\right) - E\Sigma a' \frac{\partial X}{\partial q}.$$

Aus $\Sigma aX = 0$, $\Sigma a'X = 0$ ergiebt sich aber, wenn wir drei neue Zeichen E', F', G' einführen

$$\Sigma a \frac{\partial X}{\partial p} = -\Sigma X \frac{\partial a}{\partial p} = -E',$$

$$\Sigma a' \frac{\partial X}{\partial p} = -\Sigma X \frac{\partial a'}{\partial p} = -F',$$

$$\Sigma a \frac{\partial X}{\partial q} = -\Sigma X \frac{\partial a}{\partial q} = -F',$$

$$\Sigma a' \frac{\partial X}{\partial q} = -\Sigma X \frac{\partial a'}{\partial q} = -G',$$

5*

woraus folgt

$$L\Delta^2 = GE' - 2\,FF' + EG'.$$

Denken wir uns vom Punkte p, q aus eine geodätische Linie auf der Fläche U gezogen, und nehmen an, dass auf dieser die Coordinaten x, y, z (oder p, q) als Functionen der Länge r dieser Linie gegeben seien, so ergiebt sich

$$(7) \qquad X = -\varrho\frac{d^2x}{dr^2}, \quad Y = -\varrho\frac{d^2y}{dr^2}, \quad Z = -\varrho\frac{d^2z}{dr^2}\ *),$$

worin ϱ den Krümmungsradius der geodätischen Linie bedeutet, positiv gerechnet, wenn die Curve ihre convexe Seite nach der Richtung der positiven (äusseren) Normalen kehrt. (Die Zeichenbestimmung ergiebt sich, wenn man die x-Axe in die positive Normale legt.) Es ist aber

$$\frac{d^2x}{dr^2} = a\frac{d^2p}{dr^2} + a'\frac{d^2q}{dr^2} + \left(\frac{da}{dp}\frac{dp}{dr} + \frac{da}{dq}\frac{dq}{dr}\right)\frac{dp}{dr}$$
$$+ \left(\frac{da'}{dp}\frac{dp}{dr} + \frac{da'}{dq}\frac{dq}{dr}\right)\frac{dq}{dr} \text{ etc.},$$

und daraus folgt, wenn man die Gleichungen (7) mit X, Y, Z multiplicirt und addirt

$$(8) \qquad -\frac{1}{\varrho} = E'\left(\frac{dp}{dr}\right)^2 + 2\,F'\frac{dp}{dr}\frac{dq}{dr} + G'\left(\frac{dq}{dr}\right)^2,$$

während ausserdem

$$(9) \qquad 1 = E\left(\frac{dp}{dr}\right)^2 + 2\,F\frac{dp}{dr}\frac{dq}{dr} + G\left(\frac{dq}{dr}\right)^2$$

sein muss. Die Richtungen der grössten und kleinsten Krümmung erhält man, wenn man $\frac{dp}{dr}$ und $\frac{dq}{dr}$ so bestimmt, dass der Ausdruck (8) unter der Bedingung (9) ein Extremwerth wird. Dafür ergeben sich nach den Regeln der Differentialrechnung die Bedingungen

$$(E + \varrho E')dp + (F + \varrho F')dq = 0,$$
$$(F + \varrho F')dp + (G + \varrho G')dq = 0,$$

---

*) Vgl. Untersuchungen über krumme Flächen Art. 14.

oder durch Elimination von dp, dq die quadratische Gleichung für $\frac{1}{\varrho}$

$$\frac{\Delta^2}{\varrho^2} + \frac{1}{\varrho}(EG' + GE' - 2FF') + (E'G' - F'^2) = 0 .$$

Hieraus aber folgt, wenn R und R' die Hauptkrümmungshalbmesser sind

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = -\frac{EG' + GE' - 2FF'}{\Delta^2} = -L ,$$

also

$$\delta U_2 = \int \delta e \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) \cos(4, 5)\, dU ,$$

wie in Art. 26.

2) *Zu Art. 26 (S. 48).* Der Ausdruck für δU

$$\delta U = -\int \delta e \cos(5, 7)\, dP + \int \delta e \cos(4, 5) \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right) dU$$

lässt sich auf folgende Weise geometrisch ableiten.

Wir denken uns von jedem Punkt der Fläche U die Normale n gezogen und bezeichnen ein Element dieser Linie bis zum Schnitt mit der variirten Fläche mit δn (positiv nach aussen). Die Variation ist dabei so angenommen, dass nicht nur die Verschiebung der Punkte, sondern auch die Aenderung in der Richtung der Tangentialebene überall unendlich klein ist, was auch in den *Gauss*'schen Entwicklungen stillschweigend vorausgesetzt ist. Es ist dann $\delta e \cos(4, 5) = \delta n$.

Wenn wir mit $d\omega$ das sphärische Bild des Elementes dU bezeichnen, so ist (vgl. *Gauss*, Flächentheorie, Art. 6, 8)

$$dU = RR' d\omega .$$

Verbindet man die Endpunkte aller Normalen δn, die über dem Element dU stehen, durch eine Fläche, so entsteht ein neues Flächenelement $dU + \delta dU$, dessen sphärisches Bild gleichfalls $d\omega$ ist, in dem aber die Krümmungsradien

$$R + \delta n , \quad R' + \delta n$$

sind, da man in dem unendlich kleinen Element dU die Strecke δn als constant betrachten kann. Es ist also

$$dU + \delta dU = (R + \delta n)(R' + \delta n)\, d\omega ,$$

also mit Vernachlässigung von δn^2

$$\delta d U = (R + R')\,\delta n\,\delta\omega = \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta n\,d U\,.$$

Es sei nun ferner ν die Richtung der Flächentangente, die von einem Punkt des Elementes dP der Begrenzung von U ausgeht und auf dP normal steht und von dem Flächenstück U gesehen nach aussen gerichtet ist, und $\delta\nu$ sei die Projection der Verschiebung δe von dP auf ν. Dann ist

$$\delta\nu = -\delta e \cos(5, 7)\,,$$

und $\delta\nu\,dP$ ist die Fläche eines Rechtecks, dessen Seiten $\delta\nu$ und dP sind, und die Summe aller dieser Flächen ist bis auf unendlich kleines höherer Ordnung gleich dem Zuwachs, den die Fläche U durch die Verschiebung der Grenze erfahren hat. Hieraus ergiebt sich für den ganzen Zuwachs von U

$$\delta U = \int \delta\nu\,dP + \int\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\delta n\,d U\,,$$

was wieder mit der Formel des Art. 26 übereinstimmt.

3) *Zu Art. 28 (S. 50).* Nach Art. 28 soll das Integral

$$(1) \qquad \int\left[z + \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right)\right]\delta n\,d U$$

für alle Variationen δn verschwinden, die am Rande P überall $= 0$ sind, und die der Bedingung genügen

$$(2) \qquad \int \delta n\,d U = 0\,;$$

es wird geschlossen, dass dies unmöglich ist, wenn nicht der Ausdruck

$$z + \alpha^2\left(\frac{1}{R} + \frac{1}{R'}\right),$$

den wir für den Augenblick mit Q bezeichnen wollen, über die ganze Fläche U constant ist. Vorausgesetzt muss dabei werden, dass Q nicht unstetig sei.

Man überzeugt sich hiervon auf folgende Weise. Angenommen, es seien zwei Punkte A, B auf der Fläche vorhanden, in denen Q verschiedene Werthe Q_A und Q_B hat, und es sei etwa $Q_A < Q_B$. Man nehme irgend einen Zahlenwerth C zwischen diesen beiden Werthen an, so dass also

$$Q_A < C < Q_B$$

ist. Nun kann man wegen der Stetigkeit von Q um die Punkte A und B zwei Gebiete a, b auf der Fläche U abgrenzen, so dass in a alle Werthe Q_a von Q kleiner, in b alle Werthe Q_b grösser als C sind, dass also $Q_a - C$ in a negativ, $Q_b - C$ in b positiv ist. Man nehme nun δn ausserhalb der Gebiete a, b überall gleich Null, in a aber δn negativ, in b positiv, und so, dass

$$\int \delta n_a \, d U_a + \int \delta n_b \, d U_b = 0 \tag{3}$$

wird, was offenbar immer möglich ist.

Dann soll also

$$\int Q_a \, \delta n_a \, d U_a + \int Q_b \, \delta n_b \, d U_b = 0 \tag{4}$$

sein. Multiplicirt man aber (3) mit C und subtrahirt das Product von (4), so folgt

$$\int (Q_a - C) \, \delta n_a \, d U_a + \int (Q_b - C) \, \delta n_b \, d U_b = 0 \, .$$

Dies ist aber unmöglich, weil $(Q_a - C)\,\delta n_a$ und $(Q_b - C)\,\delta n_b$ nur positive Werthe haben. Unsere Annahme, dass Q_A von Q_B verschieden sei, ist also unstatthaft, d. h. es muss Q in der ganzen Fläche U constant sein.

4) *Zu Art. 34 (S. 61).* Die Bestimmung der Capillarconstanten leidet ausser an den von *Gauss* erwähnten Schwierigkeiten vor allem noch an der Schwierigkeit, eine reine Oberfläche herzustellen. In der That liefern Methoden, die es gestatten, mit möglichst frischen oder noch besser mit sich immer erneuernden Oberflächen zu arbeiten, stets grössere Werthe für die Capillarconstante, als andere Methoden. Ganz besonders gilt dies vom Quecksilber. Nach den neuesten Untersuchungen scheint die Oberfläche von Quecksilber Gase zu condensiren, was sich durch ständige Abnahme der Capillarconstanten zu erkennen giebt. *J. Stöckle* *) wies nach, dass im Vacuum der Werth der Capillarconstanten nicht abnimmt. Die Maximalwerthe für Quecksilber sind die von

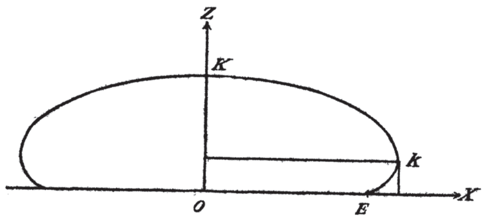
*) Wiedemann's Annalen. **66**, 499.

G. Quincke *), gefunden mit der Steighöhenmethode bei hervorragend reinem Quecksilber, und die von *G. Meyer* **) mittels »schwingender Strahlen«. Ist c die Dichte (für Quecksilber 13,6), so ist nach *Gauss*'scher Bezeichnung $\alpha^2 \cdot c$ die Grösse, die man heute allgemein »Capillarconstante« nennt. Für diese findet

$$\begin{array}{lll} G.\ Quincke & 52{,}25 \text{ bis } 56{,}43 \ \frac{\text{mg}}{\text{mm}}, \\ G.\ Meyer & 50 \quad\ \text{ bis } 53 \quad \frac{\text{mg}}{\text{mm}} \end{array}$$

gegenüber dem Werthe von *Gauss*, der $44{,}2\ \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ angiebt. Andere neuere Beobachtungen ergeben, dass diese Werthe bis etwa $37\ \frac{\text{mg}}{\text{mm}}$ im Contact mit Gasen abnehmen können***).

5) *Zu Art. 34 (S. 61, unten).* Die hier von *Gauss* vorgeschlagene Methode ist von *G. Quincke* zur Messung der Capillarconstanten des Quecksilbers mittels Quecksilbertropfen †) und zur Messung der von anderen Flüssigkeiten mittels Luftblasen sowie zur Messung von »Grenzflächenspannungen« ††) verwendet worden.



Bedeutet μ den constanten Krümmungsradius an der höchsten Stelle des Tropfens, und K die Höhe dieses höchsten

*) Wiedemann's Annalen. **52**, 19.
) Ebd. **66, 523.
***) Vgl. hierüber die Zusammenstellung bei *A. Kalähne*, Ann. der Phys. **7**, 473.
†) Poggendorff's Annalen. **105**, 1.
††) Ebd. **129**, 1.

Punktes über der festen Horizontalebene, so liefert die erste Fundamentalgleichung (VI) (S. 50) die Relation

$$\frac{1}{R} + \frac{1}{R'} = \frac{2}{\mu} + \frac{K - z}{\alpha^2} .$$

Unter Berücksichtigung, dass der Tropfen als Rotationskörper anzusehen ist, wird diese Gleichung

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\left[1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}} + \frac{\frac{1}{x}\frac{dz}{dx}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{2}{\mu} + \frac{K - z}{\alpha^2} .$$

Diese Differentialgleichung bietet der Integration grosse Schwierigkeiten, und ist von *Quincke* auch nur unter gewissen vereinfachenden Annahmen integrirt worden. Ist der Tropfen sehr ausgedehnt, so wird er an der Stelle K nahezu eben, also μ sehr gross. Es wird ferner, wenn R den Krümmungsradius der Curve KkE bezeichnet, R' sehr gross, und die Differentialgleichung erhält die Form

$$\frac{\frac{d^2 z}{dx^2}}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}^{\,3}} = \frac{K - z}{\alpha^2} .$$

Diese Gleichung lässt sich leicht integriren, und giebt das erste Integral

$$1 - \frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2}} = \frac{(K - z)^2}{2\alpha^2} ,$$

worin die Integrationsconstante aus der Bedingung bestimmt wird, dass $\frac{dz}{dx} = 0$ sein muss für $z = K$. Setzt man darin $z = k$ und $\frac{dz}{dx}$ unendlich, so folgt die sehr einfache angenäherte Relation:

$$2\alpha^2 = (K - k)^2 .$$

Sind die Voraussetzungen nicht hinreichend erfüllt, so treten noch Correctionen hinzu, bezüglich derer wir auf die Originalarbeiten verweisen müssen.

15. Die Intensität der erdmagnetischen Kraft auf absolutes Maaß zurückgeführt

Hrsg. von Ernst Dorn, Leipzig 1894, Ostwald's Klassiker Nr. 53, 62 S.

Original:
Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 8, (1832–1837) 1841, commentationes classis mathematicae, S. 3–44. In: Gauß Werke 5, S. 79–118.

[3]

Die Intensität der erdmagnetischen Kraft

auf absolutes Maass zurückgeführt,

von

Carl Friedrich Gauss.

Zur vollständigen Bestimmung der erdmagnetischen Kraft an einem gegebenen Orte sind drei Elemente erforderlich: die Abweichung (Declination) oder der Winkel zwischen der Ebene, worin sie wirkt, und der Meridianebene; die Neigung (Inclination) der Richtung zur Horizontalebene; endlich drittens die Stärke (Intensität). Die Declination, welche mit Rücksicht auf alle Anwendungen in der Schifffahrt und Geodäsie als das wichtigste Element zu betrachten ist, hat gleich von Anfang an die Astronomen und Physiker beschäftigt, die aber auch der Inclination ihre fortwährende Aufmerksamkeit bereits seit einem Jahrhundert geschenkt haben. Das dritte Element dagegen, die Intensität der erdmagnetischen Kraft, welches sicherlich ein ebenso würdiger Gegenstand der Wissenschaft ist, blieb bis auf die neuere Zeit völlig vernachlässigt. *Humboldt* gebührt unter so vielen anderen auch das Verdienst, dass er wohl zuerst auf diesen Gegenstand sein Augenmerk gerichtet und auf seinen Reisen eine grosse Menge von Beobachtungen über die relative Stärke des Erdmagnetismus gesammelt hat, aus denen sich eine fortwährende Zunahme dieser Stärke beim Fortschreiten von dem magnetischen Aequator gegen den Pol hin ergeben hat. Sehr viele Physiker sind in die Fusstapfen jenes grossen Naturforschers getreten und haben bereits eine solche Menge von Bestimmungen zusammengetragen, dass der um die Kenntniss des

1*

Erdmagnetismus hochverdiente *Hansteen* neulich bereits den Versuch einer allgemeinen isodynamischen Karte hat herausgeben können.

Die bei allen diesen Untersuchungen angewandte Methode besteht in der Beobachtung der Zeit, während welcher eine und dieselbe Magnetnadel an den verschiedenen Orten dieselbe Anzahl von [4] Schwingungen ausführt oder der Anzahl der Schwingungen innerhalb desselben Zeitraumes, und die Stärke wird dem Quadrate der Anzahl der Schwingungen in einer gegebenen Zeit proportional gesetzt: auf diese Weise werden die ganzen Intensitäten unter einander verglichen, wenn eine im Schwerpunkt aufgehängte Inclinationsnadel um eine horizontale und senkrecht gegen den magnetischen Meridian gerichtete Axe oscillirt, oder die horizontalen Componenten, wenn eine horizontale Nadel um eine verticale Axe schwingt. Die letztere Art der Beobachtung führt zu einer grösseren Genauigkeit und die daraus hervorgehenden Resultate lassen sich nach Feststellung der Inclination leicht auf die ganzen Intensitäten beziehen.

Offenbar hängt die Zulässigkeit dieses Verfahrens von der Voraussetzung ab, dass die Vertheilung des freien Magnetismus in den Theilchen der zu dieser Vergleichung angewandten Nadel bei den einzelnen Versuchen unverändert geblieben ist: wenn nämlich die magnetische Kraft der Nadel im Laufe der Zeit irgend eine Schwächung erlitten hätte, so würde sie deswegen später langsamer schwingen, und der Beobachter, der von einer solchen Aenderung keine Kenntniss hat, würde der Stärke des Erdmagnetismus für den späteren Ort einen zu kleinen Werth beilegen. Wenn die Versuche einen nur mässigen Zeitraum umfassen und eine aus gut gehärtetem Stahl hergestellte und sorgfältig magnetisirte Nadel angewandt wird, ist eine beträchtliche Schwächung der Kraft nicht gerade zu befürchten; ausserdem wird die Unsicherheit noch vermindert werden, wenn mehrere Nadeln zur Vergleichung herangezogen werden; endlich wird man dieser Annahme ein grösseres Vertrauen schenken, wenn man nach Zurückkunft an den ersten Ort findet, dass sich die Schwingungsdauer der Nadel nicht geändert hat. Aber welche Vorsichtsmaassregeln auch angewandt werden mögen, eine langsame Schwächung der Kraft der Nadel wird kaum vermieden und daher wird eine solche Uebereinstimmung nach längerer Abwesenheit selten erwartet werden können. Deshalb wird man bei der Vergleichung der Intensitäten für weit auseinander gelegene Orte der Erde eine so grosse Genauigkeit, wie wir sie wünschen müssen, nicht erreichen können.

Uebrigens fällt dieser Nachtheil der Methode weniger ins Gewicht, so lange es sich nur um die Vergleichung von gleichzeitigen oder solchen Intensitäten handelt, welche nicht weit von einander entfernten Zeiten entsprechen. Aber da die Erfahrung gelehrt hat, dass sowohl die Declination als auch die Inclination an einem gegebenen Orte fortwährend Veränderungen erleiden, welche nach vielen Jahren sehr gross werden, so kann es nicht zweifelhaft sein, dass auch die Intensität des Erdmagnetismus ähnlichen gleichsam säcularen Veränderungen unterworfen ist. Offenbar verliert, sobald es sich um [5] diese Frage handelt, die genannte Methode alle Brauchbarkeit. Und doch wäre es für den Fortschritt der Naturwissenschaft ausserordentlich zu wünschen, dass diese höchst wichtige Frage vollständig erledigt werde, was sicherlich nicht geschehen kann, wenn nicht an Stelle jener rein vergleichenden Methode eine andere gesetzt wird, welche von den zufälligen Ungleichheiten der Nadeln unabhängig ist und die Intensität des Erdmagnetismus auf feststehende Einheiten und unabhängige Maasse zurückführt.

Es ist nicht schwer, die theoretischen Grundsätze anzugeben, auf welche sich eine solche schon längst gewünschte Methode stützen muss. Die Anzahl der Schwingungen, welche eine Nadel in einer gegebenen Zeit ausführt, hängt sowohl von der Intensität des Erdmagnetismus, als auch von der Beschaffenheit der Nadel, nämlich von dem statischen Momente der in jener enthaltenen Elemente des freien Magnetismus und von ihrem Trägheitsmomente ab. Da dieses Trägheitsmoment ohne Schwierigkeit ermittelt werden kann, so giebt offenbar die Beobachtung der Schwingungen uns das Produkt aus der Intensität des Erdmagnetismus in das statische Moment des Magnetismus der Nadel an die Hand: aber diese zwei Grössen können nicht getrennt werden, wenn nicht Beobachtungen einer anderen Art hinzugezogen werden, welche eine hiervon verschiedene Beziehung derselben liefern. Diesen Zweck erreicht man, wenn man noch eine zweite Nadel zu Hülfe nimmt und dieselbe der Einwirkung des Erdmagnetismus und der ersten Nadel unterwirft, um das Verhältniss dieser beiden Kräfte unter einander zu ermitteln. Jede der beiden Wirkungen wird zwar von der Vertheilung des freien Magnetismus in der zweiten Nadel abhängen: aber die zweite ausserdem noch von der Beschaffenheit der ersten Nadel, der Entfernung der Mittelpunkte, der Lage der ihre Mittelpunkte verbindenden Geraden gegen die magnetischen Axen der beiden Nadeln, endlich von dem Gesetze der magnetischen Anziehung und Abstossung. *Tobias Mayer* hatte als erster bereits die Vermuthung aufgestellt, dass dieses Gesetz mit dem Gesetz der Gravitation insofern übereinstimme, als auch jene Wirkungen im Verhältniss des Quadrats der Entfernungen abnehmen: die Versuche von *Coulomb* und *Hansteen* haben dieser Vermuthung grosse Wahrscheinlichkeit verschafft und die neuesten Versuche erheben sie über jeden Zweifel. Aber es ist wohl zu beachten, dass dieses Gesetz sich nur auf die einzelnen Elemente des freien Magnetismus bezieht: die Gesammtwirkung eines magnetischen Körpers wird sich ganz anders verhalten und wird bei sehr grossen Entfernungen, wie sich aus eben jenem Gesetze ableiten lässt, sehr nahe dem umgekehrten Verhältniss der Cuben der Entfernungen proportional sein, so dass die Wirkung der Nadel mit dem Cubus der Entfernung multiplicirt sich bei immer wachsender Entfernung unter sonst gleichen Umständen einer bestimmten Grenze nähert. [6] Dieser Grenzwerth wird, sobald eine bestimmte Länge als Einheit angenommen ist und die Entfernungen durch Zahlen ausgedrückt werden, mit der Wirkung der Erdkraft von gleicher Art und mit ihr vergleichbar sein.

Durch eine zweckmässige Einrichtung und Behandlung der Versuche lässt sich der Grenzwerth dieses Verhältnisses bestimmen. Da derselbe nur das statische Moment des Magnetismus der ersten Nadel enthält, so wird man nunmehr den Quotienten dieses Momentes durch die Intensität der Erdkraft erhalten; vergleicht man nun diesen mit dem schon vorher ermittelten Produkte dieser Grössen, so wird er dazu dienen, dieses statische Moment zu eliminiren, und wird den Werth der Intensität des Erdmagnetismus liefern.

Was die Art und Weise betrifft, die Wirkungen des Erdmagnetismus und der ersten Nadel auf die zweite Nadel dem Versuch zu unterwerfen, so steht ein zweifacher Weg offen, da man die zweite Nadel entweder im Zustande der Bewegung oder im Zustande des Gleichgewichts beobachten kann. Die erstere Art läuft darauf hinaus, die Schwingungen dieser Nadel zu beobachten, während die Wirkung des Erdmagnetismus verbunden wird mit der Wirkung der ersten Nadel. Diese muss in geeigneter Entfernung derart angebracht sein, dass ihre Axe in dem durch den Mittelpunkt der schwingenden Nadel gehenden magnetischen Meridian liegt: dadurch werden die Schwingungen entweder beschleunigt oder verzögert, je nachdem ungleichnamige oder gleichnamige Pole einander zugekehrt sind, und die Vergleichung entweder der Schwingungszeiten für jede der beiden Lagen der ersten Nadel unter einander oder der Schwingungszeit einer der beiden Lagen mit der Schwingungszeit, die (nach Entfernung der ersten Nadel) unter der alleinigen Wirkung des Erdmagnetismus stattfindet, wird das Verhältniss dieser Kraft zur Wirkung der ersten Nadel kennen lehren. Bei der zweiten Art legt man die erste Nadel so, dass die Richtung ihrer Kraft, welche sie am Ort der zweiten frei aufgehängten Nadel ausübt, einen Winkel (z. B. einen rechten) mit dem magnetischen Meridian bildet; hierdurch wird diese selbst aus dem magnetischen Meridian abgelenkt, und aus der Grösse der Ablenkung kann man das Verhältniss zwischen der erdmagnetischen Kraft und der Einwirkung der ersten Nadel ableiten.

Uebrigens stimmt die erste Art im wesentlichen mit derjenigen überein, welche *Poisson* schon vor einigen Jahren vorgeschlagen hat. Aber die nach dieser Vorschrift von einigen Physikern angestellten Versuche sind, wenigstens soweit sie mir bekannt geworden, entweder völlig missglückt, oder können höchstens als unvollkommene Annäherungen betrachtet werden.

Die eigentliche Schwierigkeit liegt darin, dass aus den in mässigen Entfernungen beobachteten Einwirkungen der Nadel ein Grenzwerth berechnet werden muss, der sich auf eine gewissermaassen unbegrenzt grosse Entfernung bezieht, und dass die zu diesem Zwecke nothwendigen Eliminationen [7] um so mehr von den kleinsten Beobachtungsfehlern getrübt, ja sogar völlig unbrauchbar gemacht werden, je mehr Unbekannte, die von der besonderen Beschaffenheit der Nadel abhängen, zu eliminiren sind: auf eine kleine Anzahl von Unbekannten kann aber die Berechnung nur dann gebracht werden, wenn die Einwirkungen in Entfernungen geschehen, welche im Verhältniss zu der Länge der Nadeln ziemlich gross sind und deshalb selbst sehr klein werden. Aber um so kleine Einwirkungen genau zu messen, dazu reichen die bis jetzt angewandten praktischen Hülfsmittel nicht hin.

Ich erkannte, dass ich meine Bemühungen vor allem an die Auffindung neuer Hülfsmittel zu wenden hatte, um die Schwingungszeiten, wie auch die Richtungen der Nadeln mit weit grösserer Genauigkeit als seither beobachten und messen zu können. Die zu diesem Zwecke unternommenen und durch mehrere Monate fortgesetzten Arbeiten, bei welchen ich von *Weber* vielfach unterstützt worden bin, haben derart zum gewünschten Ziel geführt, dass sie die Erwartung nicht nur nicht getäuscht, sondern weit übertroffen haben, und dass nichts mehr zu wünschen bleibt, um die Genauigkeit der Versuche der Schärfe der astronomischen Beobachtungen gleich zu machen, als ein gegen die Einwirkung von nahem Eisen und Luftzug völlig geschütztes Local. Es stehen zwei Apparate zu Gebote, die sich durch ihre Einfachheit nicht minder als durch die Genauigkeit auszeichnen, welche sie gewähren. Die Beschreibung muss ich mir allerdings für eine andere Gelegenheit vorbehalten, während ich die zur Bestimmung der Intensität des Erdmagnetismus bis jetzt in unserer Sternwarte ausgeführten Versuche den Physikern in der vorliegenden Abhandlung übergebe.

[8] 1.

Zur Erklärung der magnetischen Erscheinungen nehmen wir zwei magnetische Flüssigkeiten an: die eine nennen wir die nördliche, die andere die südliche. Wir setzen voraus, dass die Elemente der einen Flüssigkeit die der anderen anziehen, dass dagegen je zwei Elemente derselben Flüssigkeit sich gegenseitig abstossen, und dass sich jede der beiden Wirkungen im umgekehrten Verhältniss des Quadrats der Entfernung ändert. Es wird sich unten zeigen, dass die Richtigkeit dieses Gesetzes durch unsere Beobachtungen selbst bestätigt wird.

Diese Flüssigkeiten kommen nicht für sich vor, sondern nur verbunden mit den wägbaren Theilchen solcher Körper, welche den Magnetismus annehmen, und die Wirkungen jener äussern sich darin, dass sie die Körper entweder in Bewegung setzen oder dass sie die Bewegung, welche andere auf diese Körper wirkende Kräfte, z. B. die Schwerkraft, hervorrufen würden, hindern oder verändern.

Daher wird die Wirkung einer gegebenen Menge von magnetischer Flüssigkeit auf eine gegebene Menge entweder derselben oder der anderen Flüssigkeit in einer gegebenen Entfernung vergleichbar sein mit einer gegebenen bewegenden Kraft, d. h. mit der Wirkung einer gegebenen beschleunigenden Kraft auf eine gegebene Masse, und da die magnetischen Flüssigkeiten selbst nur durch die Wirkungen, die sie hervorbringen, erkennbar sind, so müssen gerade diese zum Maasse jener dienen.

Damit wir jedoch dieses Maass auf bestimmte Begriffe zurückführen können, müssen vor allem für drei Grössenarten die Einheiten festgesetzt werden, nämlich die Einheit der Entfernungen, die Einheit der wägbaren Massen und die Einheit der beschleunigenden Kräfte. Für die dritte kann die Schwerkraft an dem Beobachtungsorte angenommen werden: wenn aber dies nicht zusagt, so muss ausserdem die Einheit der Zeit hinzutreten, und für uns wird diejenige beschleunigende Kraft = 1 sein, welche in der Zeiteinheit eine Aenderung der Geschwindigkeit des Körpers in der Richtung seiner Bewegung hervorbringt, die der Einheit gleichkommt.

Demgemäss wird die Einheit der Menge von nördlicher Flüssigkeit diejenige sein, deren abstossende Wirkung auf eine andere ihr gleiche und in der Einheit der Entfernung befindliche Menge der bewegenden Kraft = 1 ist, d. h. der Wirkung einer beschleunigenden Kraft = 1 auf eine Masse = 1; dasselbe [**9**] wird von der Einheit der Menge von südlicher Flüssigkeit gelten: bei dieser Bestimmung muss offenbar sowohl die wirkende Flüssigkeit, als auch die der Wirkung unterliegende in physischen Punkten vereinigt gedacht werden. Ueberdies aber muss man annehmen, dass die Anziehung zwischen gegebenen Mengen von verschiedenartigen Flüssigkeiten in gegebener Entfernung gleich sei der Abstossung zwischen den bezüglichen gleichen Mengen von gleichartigen Flüssigkeiten. Daher wird die Wirkung einer Menge m von nordmagnetischer Flüssigkeit auf eine Menge m' derselben Flüssigkeit in der Entfernung r (wobei jede der beiden Flüssigkeiten als in einem Punkte vereinigt vorausgesetzt wird) ausgedrückt durch $\frac{m\,m'}{r\,r}$, oder sie kommt einer bewegenden Kraft $= \frac{m\,m'}{r\,r}$ gleich, welche in der Richtung von der ersteren gegen die zweite Flüssigkeit wirkt, und augenscheinlich gilt diese Formel allgemein, wenn, was wir von jetzt ab immer festhalten wollen, eine Menge von südlicher Flüssigkeit als negativ angesehen wird, und ein negativer Werth der Kraft $\frac{m\,m'}{r\,r}$ Anziehung andeuten soll.

Wenn daher in einem physischen Punkte gleiche Mengen von nördlicher und südlicher Flüssigkeit sich gleichzeitig befinden, so wird davon überhaupt keine Wirkung entstehen, wenn aber ungleiche Mengen, so wird nur der Ueberschuss der einen, welchen wir freien Magnetismus (positiven oder negativen) nennen wollen, in Betracht kommen.

2.

Zu diesen grundlegenden Voraussetzungen müssen wir noch eine andere hinzufügen, welche von der Erfahrung überall bestätigt wird, dass nämlich jeder Körper, in welchem magnetische Flüssigkeiten vorhanden sind, immer eine gleiche Menge von jeder der beiden enthält. Ja die Erfahrung lehrt sogar, dass diese Annahme auch auf die kleinsten Theilchen eines solchen Körpers auszudehnen ist, welche noch durch unsere Sinne unterschieden werden können. Aber da nach dem, was wir am Ende des vorigen Artikels hervorgehoben haben, eine Wirkung nur insoweit vorhanden sein kann, als irgend eine Trennung der Flüssigkeiten stattfindet, so müssen wir nothwendig annehmen, dass diese durch so kleine Zwischenräume geschieht, dass sie unseren Messungen unzugänglich sind.

Ein magnetisirbarer Körper muss daher aufgefasst werden als die Vereinigung von unzähligen Partikelchen, von denen ein jedes eine gewisse Menge von nördlicher magnetischer Flüssigkeit [10] und eine eben so grosse von südlicher enthält, und zwar so, dass sie entweder gleichmässig unter einander vermischt sind (der Magnetismus verborgen ist) oder eine geringere oder grössere Trennung erlitten haben (der Magnetismus entwickelt ist), eine Trennung jedoch, welche niemals in ein Ueberfliessen der Flüssigkeit von einem Partikelchen auf ein anderes übergehen kann. Es macht keinen Unterschied, ob man annimmt, dass eine grössere Trennung von einer grösseren Menge der frei werdenden Flüssigkeiten herrührt oder von einem grösseren zwischen ihnen gelegenen Zwischenraum: offenbar aber muss ausser der Grösse der

Trennung gleichzeitig deren Richtung in Betracht kommen, denn je nachdem diese in den verschiedenen Theilchen des Körpers übereinstimmt oder nicht, wird eine grössere oder geringere Gesammtwirkung rücksichtlich der Punkte ausserhalb des Körpers entstehen können.

Wie auch immer aber die Vertheilung des freien Magnetismus innerhalb des Körpers sich verhalten mag, stets kann man an deren Stelle, infolge eines allgemeinen Theorems, nach einem bestimmten Gesetze eine andere Vertheilung auf der Oberfläche des Körpers allein einsetzen, welche nach aussen hin vollständig dieselben Kräfte ausübt wie jene, so dass ein irgendwo ausserhalb gelegenes Element von magnetischer Flüssigkeit genau dieselbe Anziehung oder Abstossung von der wirklichen Vertheilung des Magnetismus innerhalb des Körpers erfährt, wie von der auf der Oberfläche desselben gedachten *). Dieselbe Fiction kann man auf zwei Körper ausdehnen, welche nach Maassgabe des in ihnen entwickelten freien Magnetismus auf einander wirken, so dass für jeden von beiden die auf der Oberfläche gedachte Vertheilung an die Stelle der wirklichen inneren treten kann. Auf diese Weise können wir endlich der gewöhnlichen Sprechweise, welche z. B. dem einen Ende einer Magnetnadel ausschliesslich Nordmagnetismus, dem anderen Südmagnetismus zuschreibt, den wahren Sinn unterlegen, da offenbar diese Redewendung mit dem oben ausgesprochenen Grundsatz, den andere Erscheinungen unbedingt fordern, nicht im Einklang steht. Aber es mag hinreichen, dies hier nebenbei bemerkt zu haben; über den Lehrsatz selbst werden wir, da er für den vorliegenden Zweck nicht nothwendig ist, bei einer anderen Gelegenheit ausführlicher uns auslassen.

3.

Der magnetische Zustand eines Körpers besteht in dem Verhältniss der Vertheilung des freien Magnetismus in den einzelnen Theilchen desselben. Hinsichtlich der Veränderlichkeit dieses Zustandes nehmen wir einen wesentlichen Unterschied zwischen den verschiedenen magnetisirbaren Körpern wahr. [11] Bei einigen, z. B. bei weichem Eisen, ändert

*) Vgl. Gauss, Allgemeine Lehrsätze u. s. w. Art. 36. Werke Bd. V. S. 240 (auch Ostwald's Klassiker, No. 2, S. 49).

sich jener Zustand infolge der geringsten Kraft sogleich, und wenn diese Kraft aufhört, kehrt der frühere Zustand zurück: dagegen bei anderen, zumal bei gehärtetem Stahl, muss die Kraft eine gewisse Stärke erreicht haben, bevor sie eine wahrnehmbare Aenderung des magnetischen Zustandes hervorrufen kann, und wenn die Kraft aufhört, so verbleibt entweder der Körper in dem erlangten Zustand oder er kehrt wenigstens nicht völlig in den früheren zurück. In den Körpern der ersteren Art ordnen sich daher die magnetischen Molekel so an, dass zwischen den magnetischen Kräften, welche theils von den Körpern selbst, theils von äusseren Ursachen herrühren, vollkommenes Gleichgewicht besteht, oder es unterscheidet sich wenigstens der Zustand kaum merklich von dem eben beschriebenen. Bei den Körpern der zweiten Art dagegen kann der magnetische Zustand auch ohne vollkommenes Gleichgewicht zwischen jenen Kräften dauernd sein, wofern nur stärkere äussere Kräfte ferngehalten werden. Wenn auch die Ursache dieser Erscheinung unbekannt ist, so kann man sich dieselbe doch so vorstellen, als ob die wägbaren Theile eines Körpers der zweiten Art der Bewegung der mit ihnen verbundenen magnetischen Flüssigkeiten ein der Reibung ähnliches Hinderniss entgegensetzen, ein Widerstand, der in weichem Eisen entweder gar nicht vorhanden oder nur sehr gering ist.

In der theoretischen Untersuchung erfordern diese beiden Fälle eine vollständig verschiedene Behandlung; aber in der gegenwärtigen Abhandlung wird nur von den Körpern der zweiten Art die Rede sein: bei den Versuchen, über welche wir sprechen wollen, wird die Unveränderlichkeit des Zustandes in den einzelnen Körpern eine Grundvoraussetzung sein, und man muss sich daher sorgfältig hüten, während der Versuche andere Körper, welche diesen Zustand ändern könnten, allzu nahe heranzubringen.

Jedoch ist eine gewisse Ursache der Aenderung vorhanden, der auch die Körper der zweiten Art unterworfen sind, nämlich die Wärme. Die Erfahrung lehrt unzweifelhaft, dass der magnetische Zustand eines Körpers sich mit seiner Temperatur ändert, jedoch so, dass, wenn der Körper nicht übermässig erwärmt gewesen ist, mit der früheren Temperatur auch der frühere magnetische Zustand zurückkehrt. Diese Abhängigkeit ist durch geeignete Versuche zu bestimmen, und wenn zu einem Versuch gehörige Beobachtungen bei verschiedenen Temperaturen vorgenommen worden sind, so werden sie vor allem auf eine und dieselbe Temperatur zurückzuführen sein.

[12] 4.

Unabhängig von den magnetischen Kräften, welche wir einzelne hinreichend nahe Körper auf einander ausüben sehen, wirkt eine andere Kraft auf die magnetischen Flüssigkeiten, die wir, da sie überall auf der Erde sich offenbart, der Erdkugel selbst zuschreiben und daher Erdmagnetismus nennen. Auf eine doppelte Weise äussert sich diese Kraft: Körper der zweiten Art, bei denen der Magnetismus erregt ist, werden, wenn sie im Schwerpunkt unterstützt sind, nach einer bestimmten Richtung gedreht: in den Körpern der ersteren Art dagegen werden die magnetischen Flüssigkeiten durch jene Kraft von selbst geschieden, eine Scheidung, welche sehr bemerkbar gemacht werden kann, wenn man Körper von zweckmässiger Gestalt wählt und in zweckmässiger Lage aufstellt. Jede der beiden Erscheinungen wird durch die Auffassung erklärt, dass jene Kraft die nordmagnetische Flüssigkeit an jedem beliebigen Ort nach einer bestimmten Richtung hintreibt, die südmagnetische aber mit gleicher Stärke nach der entgegengesetzten. Die Richtung der ersteren wird immer verstanden, wenn wir von der Richtung des Erdmagnetismus reden; sie wird daher durch die Neigung zur Horizontalebene wie durch die Abweichung der Verticalebene, in welcher sie wirkt, von der Meridianebene bestimmt: jene heisst magnetische Meridianebene. Die Intensität des Erdmagnetismus aber ist durch die bewegende Kraft zu messen, welche er auf die Einheit der freien magnetischen Flüssigkeit ausübt.

Diese Kraft ist nicht nur an verschiedenen Orten der Erde verschieden, sondern auch an demselben Orte veränderlich, sowohl im Laufe der Jahrhunderte und Jahre, als auch im Laufe der Jahreszeiten und der Tagesstunden. Hinsichtlich der Richtung ist zwar diese Veränderlichkeit lange bekannt gewesen; aber hinsichtlich der Intensität hat sie bis jetzt nur im Laufe der Stunden eines Tages beobachtet werden können, da wir keine Hülfsmittel hatten, die sich für längere Zeiträume eigneten. Diesem Mangel wird in Zukunft die Zurückführung der Intensität auf absolutes Maass Abhülfe schaffen.

5.

Um die Wirkung des Erdmagnetismus auf magnetische Körper der zweiten Art (an solche hat man von jetzt ab immer zu denken) der Berechnung zu unterwerfen, fasse man einen solchen Körper als in unendlich kleine Theile getheilt auf; es sei dm das Element des freien Magnetismus in einem Theilchen, dessen Coordinaten in Bezug auf drei senkrecht zu einander stehende, im Körper feste Ebenen durch x, y, z [**13**] bezeichnet werden mögen: die Elemente der südlichen Flüssigkeit nehmen wir als negativ an. Alsdann ist zunächst klar, dass das über den ganzen Körper (ja sogar über jeden messbaren Theil des Körpers) genommene Integral $\int dm = 0$ sei. Wir wollen ferner $\int x\,dm = X$, $\int y\,dm = Y$ und $\int z\,dm = Z$ nennen, welche Grössen die Momente des freien Magnetismus in Bezug auf die drei Grundebenen oder in Bezug auf die senkrecht zu ihnen stehenden Axen heissen mögen. Da unter der Voraussetzung, dass a eine beliebige constante Grösse bezeichnet, $\int (x - a)\,dm = X$ wird, so erhellt, dass das Moment in Bezug auf eine gegebene Axe nur von deren Richtung, nicht aber von ihrem Anfang abhängt. Wenn wir durch den Coordinatenanfang eine vierte Axe ziehen, welche mit den ersten die Winkel A, B, C bildet, so wird das Moment des Elements dm in Bezug auf diese Axe $= (x \cos A + y \cos B + z \cos C)\,dm$ sein und ferner das Moment des freien Magnetismus im ganzen Körper

$$= X \cos A + Y \cos B + Z \cos C = V.$$

Setzt man

$$\sqrt{(XX + YY + ZZ)} = M \text{ und}$$

$$X = M \cos \alpha;\ Y = M \cos \beta;\ Z = M \cos \gamma,$$

und zieht man eine fünfte Axe, welche mit den drei ersten die Winkel α, β, γ und mit der vierten den Winkel ω bildet, so wird, da infolge dieser Festsetzungen $\cos \omega = \cos A \cos \alpha + \cos B \cos \beta + \cos C \cos \gamma$ ist, $V = M \cos \omega$ sein. Diese fünfte Axe nennen wir einfach die **magnetische Axe** des Körpers, und von der **Richtung** derselben setzen wir voraus, dass sie zum positiven Werth der Wurzel $\sqrt{(XX + YY + ZZ)}$ gehört. Wenn die vierte Axe mit dieser magnetischen Axe zusammenfällt, so wird das Moment $V = M$, welches offenbar unter allen Momenten das grösste ist: das Moment in Bezug auf eine beliebige andere Axe wird gefunden, indem man dieses grösste Moment (welches, so oft eine Zweideutigkeit nicht zu fürchten ist, einfach das Moment des Magnetismus genannt werden kann) mit dem Cosinus des Winkels zwischen dieser und der magnetischen Axe multiplicirt. Das Moment in Bezug auf eine beliebige senkrecht auf der magnetischen stehende Axe wird $= 0$, negativ aber in Bezug auf jede Axe, welche mit der magnetischen Axe einen stumpfen Winkel bildet.

Die magnetische Axe ist daher keine bestimmte Gerade, da sie durch jeden beliebigen Punkt gelegt werden kann, sondern nur eine bestimmte Richtung, mit andern Worten, es giebt unbegrenzt viele, unter einander parallele magnetische Axen. Wenn wir aus diesen irgend eine nach Belieben auswählen und ihr eine bestimmte Länge zuschreiben, so werden die Enden derselben Pole genannt, der eine der südliche, von dem aus, der andere der nördliche, nach welchem hin die Richtung der Axe geht.

[14] 6.[1])

Wenn auf die einzelnen Theilchen der magnetischen Flüssigkeiten eine Kraft von constanter Intensität und Richtung wirkt, so lässt sich die daraus hervorgehende Gesammtkraft auf den Körper leicht aus den statischen Grundsätzen ableiten, da bei den hier in Betracht kommenden Körpern jene Theilchen ihre flüssige Beschaffenheit gewissermaassen verloren haben und mit dem wägbaren Körper eine feste Masse bilden. Es möge auf ein beliebiges magnetisches Theilchen dm die bewegende Kraft $= P\,dm$ nach einer Richtung D wirken (wo für die Molekel der südlichen Flüssigkeit das negative Zeichen an sich schon die entgegengesetzte Richtung andeutet); es seien A und B zwei in der Richtung der magnetischen Axe liegende Punkte des Körpers und deren Entfernung $= r$, positiv genommen, wenn die magnetische Axe von A nach B hin gerichtet ist: alsdann sieht man leicht ein, dass, wenn zu diesen Kräften zwei neue hinzugefügt werden, jede $= \frac{PM}{r}$, von denen die eine auf A nach der Richtung D, die andere auf B nach der entgegengesetzten Richtung wirkt, zwischen all diesen Kräften Gleich-

1) S. Anm. 1.

gewicht sein wird. Deswegen werden die ersteren Kräfte zwei Kräften $= \frac{PM}{r}$ gleichwerthig sein, von denen die eine auf B nach der Richtung D, die andere auf A nach der entgegengesetzten Richtung wirkt, und offenbar können diese beiden Kräfte nicht in eine einzige vereinigt werden.

Wenn ausser der Kraft P eine andere ähnliche P' nach der Richtung D' auf die magnetischen Flüssigkeiten des Körpers wirkt, so können an deren Stelle wiederum zwei andere gesetzt werden, die entweder auf dieselben Punkte A und B oder allgemeiner auf andere Punkte A' und B' wirken, wofern nur $A'B'$ ebenfalls eine magnetische Axe ist, und zwar müssen, wenn man den Abstand $A'B' = r'$ macht, diese Kräfte $= \frac{P'M}{r'}$ sein, und auf B' nach der Richtung D', auf A' nach der entgegengesetzten wirken. Dasselbe gilt von mehreren.

Der erdmagnetischen Kraft kann man innerhalb eines so kleinen Raumes, wie ihn der den Versuchen zu unterwerfende Körper einnimmt, sicher überall eine constante, wenn auch mit der Zeit veränderliche Intensität und Richtung zuschreiben, daher kann man das, was wir soeben gesagt haben, auf sie anwenden. Aber es kann von Vortheil sein, gleich von Anfang an dieselbe in zwei Kräfte zu zerlegen, in eine horizontale $= T$ und in eine verticale $= T'$, die in unseren Gegenden nach unten gerichtet ist. [15] Da man für den Fall, dass man für die letztere zwei andere auf die Punkte A' und B' wirkende einsetzen will, den Punkt A' wie auch den Abstand $A'B' = r'$ nach Belieben annehmen darf, so wollen wir für A' den Schwerpunkt wählen und, indem wir das Gewicht des Körpers, d. i. die bewegende Kraft, der Schwere auf seine Masse mit p bezeichnen, $\frac{T'M}{p} = r'$ setzen. Hierdurch wird die Wirkung der Kraft T' aufgelöst in eine Kraft $= p$ auf A' nach oben und in eine andere gleichgrosse auf B' nach unten gerichtet, und da ferner die erstere offenbar durch die Schwerkraft selbst aufgehoben wird, so wird die Wirkung der Verticalcomponente einfach zurückgeführt auf die Verlegung des Schwerpunktes von A' nach B'. Uebrigens ist klar, dass für diejenigen Gegenden, wo die erdmagnetische Kraft einen spitzen Winkel mit der Verticalen bildet, oder, anders ausgedrückt, wo ihr verticaler Theil das magnetische Nord-Fluidum nach oben treibt, eine ähnliche Verlegung des Schwerpunkts auf der magnetischen Axe nach dem Südpol hin stattfindet.

Bei dieser Auffassungsweise leuchtet von selbst ein, dass, was immer für Versuche mit einer Magnetnadel in einem einzigen magnetischen Zustande gemacht werden mögen, aus diesen allein die Inclination nicht abgeleitet werden kann, sondern dass die Lage des wirklichen Schwerpunktes anderswoher schon bekannt sein muss. Diese Lage pflegt bestimmt zu werden, bevor die Nadel magnetisirt wird: aber diese Art ist nicht sicher genug, da meistens eine Stahlnadel schon während ihrer Herstellung einen wenn auch schwachen Magnetismus annimmt. Es ist daher für die Bestimmung der Inclination nothwendig, dass durch eine zweckmässige Aenderung des magnetischen Zustandes der Nadel eine andere Verlegung des Schwerpunktes hervorgerufen werde. Damit diese von der ersteren möglichst verschieden werde, wird es nothwendig sein, die Pole umzukehren, wodurch eine doppelte Verlegung erhalten wird. Uebrigens kann die Verlegung des Schwerpunktes selbst bei Nadeln, welche die geeignetste Form haben und mit Magnetismus gesättigt sind, eine gewisse Grenze nicht überschreiten, die (für eine einfache Verschiebung) in unseren Gegenden ungefähr 0,4 mm beträgt, und in Gegenden, wo die verticale Kraft am grössten ist, unter 0,6 mm bleibt; daraus ersieht man gleichzeitig, eine wie grosse mechanische Feinheit bei den Nadeln erfordert wird, die zur Bestimmung der Inclination dienen sollen.

7. [2])

Wenn irgend ein Punkt C eines magnetischen Körpers als fest angenommen wird, so ist die nothwendige und hinreichende Bedingung für das Gleichgewicht, dass eine durch C, den Schwerpunkt und [**16**] die magnetische Axe gelegte Ebene mit dem magnetischen Meridian zusammenfällt und dass ausserdem die Momente, mit denen die erdmagnetische Kraft und die Schwerkraft jene Ebene um den Punkt C zu drehen suchen, sich aufheben: die zweite Bedingung läuft darauf hinaus, dass, wenn T den horizontalen Theil der erdmagnetischen Kraft und i die Neigung der Magnetaxe gegen die Horizontalebene bezeichnet, $TM \sin i$ gleich sei dem Producte aus dem Gewichte des Körpers in die Entfernung des verschobenen Schwerpunkts B' von der durch C gezogenen Verticallinie: offenbar muss diese Entfernung auf der südlichen oder nördlichen Seite liegen, je nachdem i eine Elevation oder Depression ist, und für $i = 0$ liegt B' in dieser Verticallinie selbst. Wenn der Körper um diese Verticallinie schon so bewegt worden ist, dass die magnetische Axe in die Verticalebene gelangt ist, deren magnetisches Azimuth, d. h. deren Winkel mit dem nördlichen Theil des magnetischen Meridians (nach Belieben nach Osten oder nach Westen als positiv genommen) $= u$ ist, so wird der Erdmagnetismus auf den um die Verticalaxe drehbaren Körper eine Kraft ausüben, welche den Winkel u zu vermindern strebt und deren Moment $= TM \cos i \sin u$ sein wird, und der Körper wird um diese Axe Schwingungen ausführen, deren Dauer nach bekannten Methoden berechnet werden kann. Wenn man nämlich durch K das Trägheitsmoment des Körpers in Bezug auf die Schwingungsaxe bezeichnet (d. h. die Summe der wägbaren Molekeln multiplicirt mit dem Quadrat der Abstände von der Axe) und wie üblich durch π den halben Kreisumfang für den Radius $= 1$, so wird die Dauer einer unendlich kleinen Schwingung

$$= \pi \sqrt{\frac{K}{TM \cos i}}$$

sein, falls nämlich den Grössen T und M als Einheit der beschleunigenden Kräfte diejenige zu Grunde liegt, welche in der Einheit der Zeit die Geschwindigkeit $= 1$ erzeugt· die Zurückführung endlicher Schwingungen auf unendlich kleine wird auf ähnliche Weise wie für die Schwingungen des Pendels berechnet werden können. Wenn daher die Dauer e i n e r unendlich kleinen Schwingung aus der Beobachtung $= t$ gefunden worden ist, so werden wir die Gleichung haben: $TM = \frac{\pi\pi K}{tt \cos i}$, und wenn ausserdem, was wir von jetzt ab immer voraussetzen, der Körper so aufgehängt ist, dass die Magnetaxe horizontal ist:

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt}$$

Wollte man lieber die Schwerkraft als Einheit der beschleunigenden Kräfte annehmen, so muss man jenen Werth durch

$\pi\pi l$ dividiren, wenn l die Länge [17] des einfachen Secundenpendels bezeichnet, so dass man allgemein haben würde:

$$TM = \frac{K}{ttl \cos i} \text{ oder für unseren Fall } TM = \frac{K}{ttl}.$$

8.[3])

Wenn derartige Versuche an Magnetnadeln angestellt werden, welche an einem senkrechten Faden aufgehängt sind, so wird die Rückwirkung, welche die Torsion ausübt, bei feineren Versuchen nicht vernachlässigt werden dürfen. Wir wollen bei einem derartigen Faden zwei horizontale Durchmesser unterscheiden, den einen D am unteren Ende, wo die Nadel angeknüpft ist, parallel der magnetischen Axe der Nadel, den anderen E am oberen Ende, wo der Faden befestigt ist, und zwar sei E mit D parallel im ungedrillten Zustande des Fadens. Wir wollen annehmen, dass mit dem magnetischen Meridian E den Winkel v, die Magnetaxe oder D dagegen den Winkel u bilde, dann wird nach der Erfahrung die Torsionskraft wenigstens annähernd dem Winkel $v - u$ proportional sein: wir werden daher das Moment, womit diese Kraft den Winkel u dem Winkel v gleich zu machen sucht, $= (v - u)\,\Theta$ setzen. Da nun das Moment der erdmagnetischen Kraft, welches den Winkel u zu vermindern strebt, $= TM \sin u$ ist, so ist die Bedingung für das Gleichgewicht in der Gleichung enthalten: $(v - u)\,\Theta = TM \sin u$, welche um so mehr reelle Lösungen zulassen wird, je kleiner Θ im Vergleich mit TM ist: so lange es sich aber hier nur um kleine Werthe von u handelt, kann man sicher statt dieser Gleichung die folgende annehmen: $(v - u)\,\Theta = TMu$ oder $\frac{v}{u} = \frac{TM}{\Theta} + 1$. Bei unseren Apparaten ist das obere Ende des Fadens an einem beweglichen Arm befestigt, welcher einen Zeiger trägt, der auf der Peripherie eines in Grade eingetheilten Kreises spielt. Wenn daher auch der Collimationsfehler (d. i. der Theilstrich, welchem der Werth $v = 0$ entspricht) noch nicht hinlänglich genau bekannt ist, so giebt dennoch dieser Zeiger den Unterschied je zweier Werthe von v an: ebenso liefert ein anderer Theil des Apparates den Unterschied zwischen den Werthen von u, die dem Gleichgewichtszustande entsprechen, mit der grössten Genauigkeit, und es ist klar, dass der Werth von $\frac{TM}{\Theta}+1$ aus der Division des Unterschieds zwischen zwei Werthen von v durch den Unterschied zwischen den entsprechenden Werthen von u erhalten wird. Wenn zwischen den zu diesem Zwecke anzustellenden Versuchen ein etwas längerer Zeitraum liegt, wird es zur Erreichung der grössten Genauigkeit nöthig sein, auf die tägliche Aenderung der magnetischen Declination Rücksicht [**18**] zu nehmen, was leicht erreicht wird mit Hülfe der gleichzeitigen Beobachtungen an einem zweiten Apparate, an welchem das obere Ende des Fadens unberührt bleibt: es ist wohl kaum nothwendig, daran zu erinnern, dass der Abstand zwischen den beiden Apparaten so gross sein muss, dass sie sich gegenseitig nicht merklich stören können.

Um zu zeigen, eine wie grosse Feinheit derartige Beobachtungen zulassen, führen wir ein Beispiel aus dem Tagebuch an. Es wurden am 22. September 1832, vorbehaltlich der Collimationsfehler, folgende Declinationen u und Winkel v*) beobachtet:

Versuche	Zeit	Erste Nadel		Zweite Nadel
		u	v	u
I	9h 33′ Vm	$+0^\circ\ 4'\ 19{,}5''$	300°	$+0^\circ\ 2'\ 12{,}1''$
II	9 57	$-0\ \ 0\ \ 19{,}6$	240	$+0\ \ 1\ \ 37{,}7$
III	10 16	$-0\ \ 4\ \ 40{,}5$	180	$+0\ \ 1\ \ 18{,}8$

Es sind daher die Declinationen der ersten Nadel, bezogen auf den Stand der ersten Beobachtung, folgende:

I	$u = 0^\circ\ 4'\ 19{,}5''$	$v = 300^\circ$
II	$+0\ \ 0\ \ 14{,}8$	240
III	$-0\ \ 3\ \ 47{,}2$	180

Hieraus geht als Werth des Bruches $\frac{TM}{\Theta}$ aus der Verbindung der Beobachtungen

I und II 881,7
II und III 891,5
I und III . . . . . 886,6 hervor.

*) Beide Theilungen wachsen von links nach rechts.

Die täglichen Aenderungen der magnetischen Declination werden durch die Torsion im Verhältniss der Einheit zu $\frac{n}{n+1}$ vermindert, wobei $\frac{TM}{\Theta} = n$ gesetzt ist, welche Aenderung, wenn wir Fäden von so geringen Torsion gebrauchen, wie sie das vorhergehende Beispiel zeigt, als unmerklich betrachtet werden kann. Was aber die Dauer der (unendlich kleinen) Schwingungen anbelangt, so kann aus den dynamischen Principien leicht geschlossen werden, dass diese im [19] Verhältniss der Einheit zu $\sqrt{\frac{n}{n+1}}$ durch die Torsion vermindert wird. Eigentlich bezieht sich dies auf den Fall, wo $v = 0$ ist. Die Formeln würden aber allgemein gelten, wenn wir $\frac{TM \cos u^0}{\Theta} = n$ setzen würden, wobei wir durch u^0 den Werth von u bezeichnen, der dem Gleichgewicht entspricht: aber der Unterschied wird sicherlich unmerklich sein.

9.

Der Coefficient Θ hängt wesentlich von der Länge, der Dicke und dem Stoff des Fadens ab, ausserdem bei Metallfäden etwas von der Temperatur, bei Seidenfäden von der Feuchtigkeit der Luft: dagegen scheint er bei jenen (vielleicht auch bei diesen, wenn sie einfach sind) durchaus nicht von dem Gewicht abzuhängen, womit sie belastet werden. Anders verhält sich aber die Sache bei mehrfachen Seidenfäden, wie man sie zum Tragen von schwereren Nadeln anwenden muss: bei diesen wächst Θ mit dem angehängten Gewichte, jedoch bleibt es weit kleiner, als der Werth von Θ für einen Metallfaden von ebenderselben Länge und Tragkraft. So ist z. B. durch eine ganz ähnliche Methode wie die im vorhergehenden Artikel entwickelte (aber bei einem anderen Faden und einer anderen Nadel) der Werth von $n = 597{,}4$ gefunden worden, während der Faden eine Nadel mit der gewöhnlichen Zurüstung allein trug, wo das gesammte Gewicht 496,2 g war; dagegen $= 424{,}8$, als das Gewicht bis zu 710,8 g vermehrt worden war, oder es war im ersten Falle $\Theta = 0{,}0016740\, TM$, im zweiten Falle $\Theta = 0{,}0023542\, TM$. Der Faden, dessen Länge 800 mm beträgt, ist aus 32 einzelnen Fäden zusammengesetzt*), welche einzeln fast 30 g sicher tragen und so geordnet sind, dass sie eine gleiche Spannung erleiden. Uebrigens ist es wahrscheinlich, dass der Werth von Θ aus einem constanten Theil und einem dem Gewichte proportionalen Theile besteht, und dass der constante Theil gleich wird der Summe der Werthe von Θ für die einzelnen einfachen Fäden. Bei dieser Hypothese (die durch Versuche bis jetzt noch nicht hinlänglich begründet ist) wird als constanter Werth für das angezogene Beispiel $= 0{,}0001012\ TM$ gefunden und daher als Werth von Θ für einen einfachen Faden $= 0{,}00000316\ TM$. Unter Zuhülfenahme des bald zu entwickelnden Werthes von TM wird aus dieser [20] Hypothese berechnet, dass die Rückwirkung eines einfachen Fadens, der um einen Bogen gleich dem Radius ($57^\circ\ 18'$) gedreht ist, der Schwere eines Milligramms gleichkommt, welches auf einen Hebelarm von der Länge von ungefähr $^1/_{17}$ mm drückt.

10.[4]

Wenn der schwingende Körper eine einfache Nadel von regelmässiger Gestalt und homogener Masse ist, so kann das Trägheitsmoment K durch bekannte Methoden berechnet werden. Wenn z. B. der Körper ein rechtwinkliges Parallelepipedon ist, dessen Seiten a, b, c, dessen Dichtigkeit $= d$ und dessen Masse q daher $= abcd$ ist, so wird das Trägheitsmoment in Bezug auf eine durch den Mittelpunkt gehende und der Seite c parallele Axe $= \frac{1}{12}(aa + bb)q$ sein: und da bei Magnetnadeln von solcher Gestalt die Seite, welcher die Magnetaxe parallel ist, nämlich a, weit grösser an Länge zu sein pflegt als b, so wird für rohere Versuche es ausserdem genügen, $K = \frac{1}{12}aaq$ zu setzen. Aber bei feineren Versuchen würden wir auch dann, wenn eine einfache Nadel zur Anwendung kommt, kaum die bequeme Annahme einer vollkommen homogenen Masse und einer vollkommen regelmässigen Gestalt zulassen dürfen, und für unsere Versuche, wo nicht eine einfache Nadel, sondern eine mit verwickelterer Zurüstung verbundene Nadel schwingt, ist es überhaupt

*) Genau genommen sind diese Fäden nicht wirklich einfach, sondern nur solche, welche von den Kaufleuten als ungesponnene verkauft werden.

unmöglich, die Sache durch eine solche Rechnung zu ermitteln, und es war vielmehr ein anderes Verfahren zur genauen Bestimmung des Momentes K aufzusuchen.

Mit der Nadel wurde ein hölzerner Querstab verbunden, an welchem zwei gleiche Gewichte hingen, die vermittelst sehr feiner Spitzen auf die Punkte A und B des Stabes drückten: diese Punkte befanden sich auf einer horizontalen Geraden, in derselben Verticalebene wie die Aufhängungsaxe und waren von dieser beiderseits gleichweit entfernt. Bezeichnet man die Masse eines jeden der beiden Gewichte durch p und die Entfernung AB durch $2r$, so wird durch Hinzukommen dieses Apparates das Moment K um die Grösse $C + 2prr$ vermehrt werden, wo C die Summe des Moments des Stabes in Bezug auf die Aufhängungsaxe und der Momente der Gewichte in Bezug auf die verticalen durch die Spitzen und die Schwerpunkte gehenden Axen ist. Wenn daher die Schwingungen der unbelasteten und in zwei verschiedenen Entfernungen belasteten Nadel, nämlich für $r = r'$ und $r = r''$, beobachtet und die Schwingungsdauern (nachdem sie auf unendlich kleine Amplituden zurückgeführt und von der Wirkung der Torsion befreit sind) bzw. $= t, t', t''$ gefunden worden sind, so werden sich aus der Verbindung der Gleichungen:

[21]
$$\begin{aligned} TMtt &= \pi\pi K \\ TMt't' &= \pi\pi(K + C + 2pr'r') \\ TMt''t'' &= \pi\pi(K + C + 2pr''r'') \end{aligned}$$

die drei Unbekannten TM, K und C bestimmen lassen. Eine noch grössere Genauigkeit werden wir erreichen, wenn wir für mehrere Werthe von r, nämlich $r = r', r'', r'''$ u. s. w., die zugehörigen Schwingungsdauern t', t'', t''' u. s. w. beobachten und nach der Methode der kleinsten Quadrate die zwei Unbekannten x und y so bestimmen, dass möglichst genau den Gleichungen genügt wird:

$$t' = \sqrt{\frac{r'r' + y}{x}}$$

$$t'' = \sqrt{\frac{r''r'' + y}{x}}$$

$$t''' = \sqrt{\frac{r'''r''' + y}{x}} \quad \text{u. s. w.}$$

Dadurch werden wir nämlich erhalten:

$$TM = 2\pi\pi px$$
$$K + C = 2py.$$

Bezüglich dieser Methode ist das Folgende zu bemerken:

I. Wenn eine nicht allzuglatte Nadel angewandt wird, reicht es hin, den Holzstab einfach auf dieselbe aufzulegen. Wenn aber die Oberfläche sehr glatt ist, so dass die Reibung ein Gleiten des Stabes nicht hindern kann, ist es nothwendig, damit der ganze Apparat wie ein einziger fester Körper sich bewege, den Stab mit dem übrigen Apparat fester zu verbinden. In beiden Fällen ist aber dafür Sorge zu tragen, dass die Punkte A und B hinreichend genau in einer horizontalen Geraden sich befinden.

II. Da die Gesammtheit solcher Versuche einige Stunden erfordert, darf die Veränderlichkeit des Erdmagnetismus innerhalb dieses Zeitraums, wenigstens wenn die grösste Genauigkeit gewünscht wird, nicht vernachlässigt werden. Bevor daher die Elimination vorgenommen wird, muss man die beobachteten Zeiten auf einen constanten Werth von T, z. B. auf den mittleren Werth zurückführen, welcher dem ersten Versuche entspricht. Zu diesem Zwecke sind gleichzeitige Beobachtungen an einer anderen Nadel (ebenso wie im Artikel 8) nothwendig; wenn diese als Dauer einer Schwingung für die mittleren Zeiten der einzelnen Versuche bzw. ergeben haben $= u, u', u'', u'''$ **[22]** u. s. w., so sind zur Berechnung anstatt der beobachteten Werthe t', t'', t''' u. s. w. bzw. folgende anzuwenden: $\frac{ut'}{u'}, \frac{ut''}{u''}, \frac{ut'''}{u'''}$ u. s. w.

III. Eine ähnliche Bemerkung gilt bezüglich der Veränderlichkeit von M, die von der Veränderung der Temperatur, wenn diese während der Versuche stattgefunden, herrührt. Aber es ist klar, dass die soeben beschriebene Zurückführung schon an und für sich diese Verbesserung einschliesst, wenn jede der beiden Nadeln der gleichen Temperaturänderung unterworfen gewesen ist, und auf gleiche Weise von einer solchen Aenderung beeinflusst wird.

IV. Wenn es sich nur um die Ermittelung des Werthes von TM handelt, ist offenbar der erste Versuch überflüssig. Jedoch wird es nützlich sein, den mit einer belasteten Nadel angestellten Versuchen einen anderen mit einer unbelasteten Nadel anzuschliessen, damit zugleich der Werth von K daraus hervorgehe, so dass dieser Versuchen zu Grunde gelegt werden kann, die zu einer anderen Zeit mit derselben Nadel angestellt werden, da offenbar dieser Werth unveränderlich bleibt, auch wenn T und M im Laufe der Zeit eine Veränderung erleiden.

11.

Zur besseren Erläuterung dieser Methode fügen wir aus der grossen Menge der Anwendungen ein Beispiel hier an. Die am 11. September 1832 angestellten Versuche haben folgende Tabelle ergeben:

Versuche	Gleichzeitige Schwingungen der ersten Nadel		Gleichzeitige Schwingungen der zweiten Nadel
	Belastung	eine Schwingung	eine Schwingung
I	$r = 180^{\mathrm{mm}}$	24,63956″	17,32191″
II	$r = 130$	20,77576	17,32051
III	$r = 80$	17,66798	17,31653
IV	$r = 30$	15,80310	17,30529
V	ohne Belastung	15,22990	17,31107

Die Zeiten sind an einer Uhr beobachtet worden, welche täglich 14,24″ mittlere Zeit zurückblieb, jedes der beiden Gewichte betrug 103,2572 g; die Entfernungen r in mm sind mit mikroskopischer Genauigkeit bestimmt worden; [23] die Dauer einer Schwingung, die zum mindesten aus 100 Schwingungen (bei dem fünften Versuche sogar aus 677 für die erste Nadel) ermittelt wurden, hat bereits die Zurückführung auf unendlich kleine Bogen erhalten: übrigens sind diese Zurückführungen wegen der sehr kleinen Amplitude der Schwingungen*), die man an unseren Apparaten unbeschadet der grössten Genauigkeit anwenden kann, unmerklich. Wir wollen diese Schwingungszeiten zurückführen, zuerst auf den mittleren Werth von TM, der während des fünften Versuchs stattgefunden hat, unter Anwendung der Vorschriften des voranstehenden Artikels Nr. II; dann auf die Werthe, welche ohne Torsion sich ergeben hätten, durch Multiplication mit

*) So ist die Amplitude der Schwingungen beim ersten Versuche anfangs 0° 37′ 26″, am Schluss 0° 28′ 34″ gewesen; beim fünften Versuch anfangs 1° 10′ 21″, nach 177 Schwingungen 0° 45′ 35″ nach 677 Schwingungen 0° 6′ 44″.

$\sqrt{\frac{n+1}{n}}$, wo n bei den vier ersten Versuchen $= 424{,}8$, beim fünften Versuch $= 597{,}4$ ist (vergl. Art. 9); endlich auf die mittlere Sonnenzeit durch Multiplication mit $\frac{864{,}00}{86\,385{,}76}$; hierdurch erhalten wir:

$$
\begin{array}{rl}
\text{I} & 24{,}65717'' = t' \text{ für } r' = 180^{\text{mm}} \\
\text{II} & 20{,}79228'' = t'' \text{ für } r'' = 130^{\text{mm}} \\
\text{III} & 17{,}68610'' = t''' \text{ für } r''' = 80^{\text{mm}} \\
\text{IV} & 15{,}82958'' = t'''' \text{ für } r'''' = 30^{\text{mm}} \\
\text{V} & 15{,}24515'' = t \text{ für die unbelastete Nadel.}
\end{array}
$$

Wenn wir für die Einheiten der Zeit, der Entfernung und der Masse die Secunde, das Millimeter und das Milligramm annehmen, so dass $p = 103\,257{,}2$ ist, leiten wir aus der Verbindung des ersten Versuchs mit dem vierten ab:

$$TM = 179\,641\,070;\quad K + C = 4\,374\,976\,000$$

und dann aus dem fünften Versuche

$$K = 4\,230\,282\,000 \text{ und ebenso } C = 144\,694\,000.$$

Wenn man aber alle Versuche zur Berechnung heranziehen will, so wird die Methode der kleinsten Quadrate am bequemsten auf folgende Weise angewandt. Wir gehen von den Näherungswerthen der Unbekannten x und y aus, die aus der Verbindung des ersten und vierten Versuchs hervorgehen, und indem wir die noch hinzuzufügenden Verbessegen durch ξ und η bezeichnen, setzen wir:

[**24**]
$$
\begin{aligned}
x &= 88{,}13646 + \xi \\
y &= 21184{,}85 + \eta.
\end{aligned}
$$

Hierdurch ergeben sich als berechnete Werthe der Zeiten t', t'', t''', t'''' durch bekannte Methoden:

$$
\begin{aligned}
t' &= 24{,}65717 - 0{,}13988\,\xi + 0{,}00023008\,\eta \\
t'' &= 20{,}78731 - 0{,}11793\,\xi + 0{,}00027291\,\eta \\
t''' &= 17{,}69121 - 0{,}10036\,\xi + 0{,}00032067\,\eta \\
t'''' &= 15{,}82958 - 0{,}08980\,\xi + 0{,}00035838\,\eta,
\end{aligned}
$$

deren Vergleichung mit den beobachteten Werthen, nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, die Resultate liefert:

$$
\begin{aligned}
\xi &= -0{,}03230; & \eta &= -12{,}38 \\
x &= 88{,}10416; & y &= 21172{,}47.
\end{aligned}
$$

Hieraus geht endlich hervor

$$TM = 179\,575\,250, \quad K + C = 4372\,419\,000,$$

und dann mit Hinzuziehung des ersten Versuchs:

$$K = 4\,228\,732\,400, \quad C = 143\,686\,600.$$

Ich lasse noch eine Vergleichung der Zeiten, die aus den verbesserten Werthen der Grössen x, y berechnet sind, mit den beobachteten folgen.

Versuche	Berechnete Zeit	Beobachtete Zeit	Unterschied
I	24,65884″	24,65717″	+ 0,00167″
II	20,78774	20,79228	— 0,00454
III	17,69046	17,68610	+ 0,00436
IV	15,82805	15,82958	— 0,00153

Die Länge des einfachen Secundenpendels in Göttingen setzen wir = 994,126 mm, daher wird die Schwere, durch diejenige Einheit der beschleunigenden Kräfte gemessen, welche den vorangehenden Berechnungen zu Grunde liegt, = 9811,63; wenn wir daher lieber die Schwerkraft selbst als Einheit nehmen wollen, so wird $TM = 18302{,}29$: diese Zahl drückt die Menge von Milligrammen aus, deren Druck unter dem Einfluss der Schwerkraft auf einen Hebel von der Länge eines Millimeters der Kraft gleichkommt, mit welcher der Erdmagnetismus jene Nadel um die verticale Axe zu drehen sucht.

[25] 12.

Nachdem wir die Bestimmung des Productes der horizontalen Componente T der erdmagnetischen Kraft in das magnetische Moment M der gegebenen Nadel erledigt haben, gehen wir zum zweiten Theil der Untersuchung über, nämlich zur Bestimmung des Quotienten $\frac{M}{T}$. Hiezu werden wir gelangen durch Vergleichung der Wirkung dieser Nadel auf eine andere Nadel mit der Wirkung des Erdmagnetismus auf ebendieselbe, und zwar wird diese, wie bereits in der Einleitung auseinandergesetzt worden ist, entweder im Zustande der Bewegung oder im Zustande des Gleichgewichts beobachtet werden; jede der beiden Methoden haben wir häufig versucht: aber da die letztere aus mehreren Gründen der ersteren weit vorzuziehen ist, so werden wir an dieser Stelle die Untersuchung auf jene beschränken, zumal da die erstere auf ähnliche Weise und ohne Schwierigkeit behandelt werden kann.

13.

Die Bedingungen des Gleichgewichts eines beweglichen Körpers, auf den beliebige Kräfte wirken, können durch das Princip der virtuellen Verrückungen leicht in eine einzige Formel zusammengezogen werden: es muss nämlich die Summe der Producte einer jeden Kraft multiplicirt in die Projection einer unendlich kleinen Verrückung ihres Angriffspunktes auf die Kraftrichtung so beschaffen sein, dass sie für keine virtuelle, d. h. mit den Bedingungen verträgliche Bewegung einen positiven Werth erlangen kann, so dass, wenn die virtuellen Bewegungen sämmtlich nach entgegengesetzten Richtungen möglich sind, jenes Aggregat, welches wir mit $d\Omega$ bezeichnen wollen, für jede virtuelle Bewegung $= 0$ ist.

Der bewegliche Körper, den wir hier betrachten, ist die Magnetnadel, die in einem Punkt G an einem drehbaren, oben festen Faden angeknüpft ist. Dieser Faden hindert nur, dass die Entfernung des Punktes G von dem festen Ende des Fadens grösser werden kann als die Länge des Fadens, so dass auch hier wie in dem Falle eines vollkommen freien Körpers die Lage des Körpers im Raume von sechs Veränderlichen und ferner das Gleichgewicht desselben von sechs Bedingungen abhängt. Da aber hier die Lösung des Problems nur zur Bestimmung des Bruches $\frac{M}{T}$ dienen soll, reicht die Betrachtung derjenigen virtuellen Bewegung hin, welche in der Drehung um die verticale, durch G [**26**] hindurchgehende Axe besteht, und offenbar wird man eine solche Axe als fest und nur den Winkel zwischen der verticalen Ebene, worin die magnetische Axe sich befindet, und der magnetischen Meridianebene als veränderlich betrachten können. Diesen Winkel wollen wir auf der nördlichen Seite des Meridians nach Osten zählen und durch u bezeichnen.

14.

Wir wollen uns das Volumen der beweglichen Magnetnadel in unendlich kleine Elemente getheilt denken, und es mögen die Coordinaten eines beliebigen Elements x, y, z, sowie e das in demselben enthaltene Element des freien Magnetismus sein. Den Anfang der Coordinaten legen wir in den willkürlichen, innerhalb der Nadel liegenden Punkt h auf der verticalen, durch G hindurchgehenden Geraden; die Axen der Coordinaten x und y sollen horizontal sein, jene in dem magnetischen Meridian nach Norden, diese nach Osten gerichtet, die Coordinate z zählen wir nach oben. Dann bringt die Wirkung des Erdmagnetismus auf das Element e den Theil $Tedx$ von $d\Omega$ hervor.

Auf ähnliche Weise werde das Volumen der zweiten festen Nadel in unendlich kleine Elemente getheilt und es mögen irgend einem Element die Coordinaten X, Y, Z, und die Menge E des freien Magnetismus entsprechen; endlich sei $r = \sqrt{(X-x)^2 + (Y-y)^2 + (Z-z)^2}$. Unter dieser Festsetzung liefert die Wirkung des Elements E auf das Element e den Beitrag $\frac{eEdr}{r^n}$ zu der Summe $d\Omega$, wenn sie der Potenz r^n der Entfernung r umgekehrt proportional angenommen wird. Bezeichnet man durch N den Werth von u, welcher dem ungedrillten Zustande des Fadens entspricht, so wird das Moment der Torsionskraft des Fadens durch $\Theta(N-u)$ ausgedrückt werden können: diese Kraft kann so aufgefasst werden, als wenn auf jedes Ende eines durch G gelegten horizontalen Durchmessers des Fadens die Tangentialkraft $= \frac{\Theta(N-u)}{D}$ wirkte, wobei D diesen Durchmesser bezeichnet, und man ersieht daraus leicht, dass hiervon als Theil der Summe $d\Omega$ hervorgeht: $\Theta(N-u)du$.

Die Schwere der Theilchen der Nadel trägt offenbar zur Summe $d\Omega$ nichts bei, da u allein veränderlich ist: deswegen haben wir die Gleichung:

$$d\Omega = \Sigma Tedx + \Sigma \frac{eEdr}{r^n} + \Theta(N-u)\,du,$$

[**27**] wobei die Summation in dem ersten Gliede sich auf alle Elemente e, im zweiten auf alle Verbindungen der einzelnen e

mit den einzelnen E bezieht. Es ist daher klar, dass die Bedingung des stabilen Gleichgewichts darin besteht, dass

$$\Omega = \Sigma Tex - \Sigma \frac{eE}{(n-1)\,r^{n-1}} - \tfrac{1}{2}\Theta(N-u)^2$$

ein Maximum werde.

15.

Unserem Zweck entspricht es, die Versuche immer so einzurichten, dass die Magnetaxe einer jeden der beiden Nadeln horizontal ist und dass beide Nadeln sich ungefähr in derselben Höhe befinden: wir wollen daher die weiteren Rechnungen auf diese Voraussetzungen beschränken.

Wir wollen die Coordinaten der Punkte der ersten Nadel auf feste Axen in dieser beziehen, welche sich auch noch im Punkte h schneiden, und zwar liege die erste Axe in der Richtung der magnetischen Axe, die zweite horizontal und zur Rechten der ersten, die dritte vertical und nach oben gerichtet; die Coordinaten des Elements e in Bezug auf diese Axen seien a, b, c. Ebenso seien A, B, C die Coordinaten des Elements E in Bezug auf ähnliche feste Axen in der zweiten Nadel, die sich in einem Punkte H dieser Nadel schneiden: diesen Punkt wählen wir nahe bei der Mitte der Nadel und in derselben Höhe mit dem Punkte h.

Die Lage des Punktes H würde zwar am bequemsten durch die Entfernung vom Punkte h und die Richtung der sie verbindenden Geraden bestimmt, wenn es sich nur um einen Versuch handelte: da aber für unsern Zweck immer mehrere Versuche erforderlich sind, die sich auf verschiedene Lagen des Punktes H beziehen, welche zwar sämmtlich in derselben Geraden, jedoch nicht nothwendig in einer durch den Punkt h gehenden Geraden liegen, so ist es besser, die Zeichen gleich von Anfang an so einzurichten, dass das System derartiger Versuche von einer einzigen Unbekannten abhängt. Wir wollen daher den Punkt H auf einen willkürlichen Punkt h' in derselben Horizontalebene beziehen, der nahe bei h liegt und dessen Coordinaten α, β, 0 seien, und wollen die Entfernung $h'H = R$ und den Winkel der Geraden $h'H$ mit dem magnetischen Meridian $= \psi$ setzen. Wenn wir nun noch den Winkel der magnetischen Axe der zweiten Nadel mit dem magnetischen Meridian durch U bezeichnen, so werden wir haben:

[28]
$$\begin{aligned}
x &= a \cos u - b \sin u \\
y &= a \sin u + b \cos u \\
z &= c \\
X &= \alpha + R \cos \psi + A \cos U - B \sin U \\
Y &= \beta + R \sin \psi + A \sin U + B \cos U \\
Z &= C.
\end{aligned}$$

So ist alles zur Entwickelung der Summe Ω und des Bruches $\frac{d\Omega}{du}$, der für die Gleichgewichtslage verschwinden muss, vorbereitet.

16.

Zunächst wird $\Sigma T e x = T \cos u \Sigma a e - T \sin u \Sigma b e = m T \cos u$, wenn wir das Moment des freien Magnetismus der ersten Nadel $\Sigma a e$ durch m bezeichnen, da ja $\Sigma b e = 0$ ist: der Theil von $\frac{d\Omega}{du}$, der aus dem ersten Gliede von Ω hervorgeht, wird sein $= - m T \sin u$.

Wenn man der Kürze wegen setzt:

$$k = \alpha \cos \psi + \beta \sin \psi + A \cos (\psi - U) + B \sin (\psi - U) - a \cos (\psi - u) - b \sin (\psi - u)$$

$$l = [\alpha \sin \psi - \beta \cos \psi + A \sin (\psi - U) - B \cos (\psi - U) - a \sin (\psi - u) - b \cos (\psi - u)]^2 + (C - c)^2,$$

so wird $rr = (R + k)^2 + l$ sein.

Da bei verwerthbaren Versuchen R viel grösser sein muss, als die Dimensionen jeder der beiden Nadeln, so lässt sich die Grösse $\frac{1}{r^{n-1}}$ in die schnell convergente Reihe entwickeln:

$$R^{-(n-1)} - (n-1) k R^{-n} + \left(\frac{nn-n}{2} kk - \frac{n-1}{2} l\right) R^{-(n+1)}$$
$$- \left(\tfrac{1}{6} (n^3 - n) k^3 - \tfrac{1}{2} (nn - 1) k l\right) R^{-(n+2)} + \text{u. s. w.},$$

deren Gesetz, wenn es der Mühe werth wäre, leicht angegeben werden könnte. Die einzelnen Glieder der Summe $\Sigma \frac{eE}{r^{n-1}}$, welche nach Einsetzung der Werthe der Grössen k und l hervorgehen, werden einen Factor enthalten von der Form:

$$\Sigma e E a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'};$$

[29] derselbe ist dem Producte aus den Factoren $\Sigma e a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu}$ und $\Sigma E A^{\lambda'} B^{\mu'} C^{\nu'}$ gleich, die von dem magnetischen Zustande der ersten und zweiten Nadel bezüglich abhängen. Was wir mit Rücksicht hierauf festsetzen dürfen, beschränkt sich auf die Gleichungen:

$$\Sigma e = 0,\ \Sigma e a = m,\ \Sigma e b = 0,\ \Sigma e c = 0,$$

$$\Sigma E = 0,\ \Sigma E A = M,\ \Sigma E B = 0,\ \Sigma E C = 0,$$

wo wir durch M das magnetische Moment des freien Magnetismus der zweiten Nadel bezeichnen. In dem besonderen Falle, dass die Gestalt der ersteren Nadel (der beweglichen) und der Vertheilung des Magnetismus in der Längsrichtung symmetrisch ist, so dass sich immer zwei Elemente entsprechen, für welche a und e entgegengesetzte Werthe, b und c gleiche haben, wird, sobald der Mittelpunkt mit dem Punkte h zusammenfällt, immer $\Sigma e a^{\lambda} b^{\mu} c^{\nu} = 0$ für einen geraden Werth der Zahl $\lambda + \mu + \nu$ sein, und ähnliches gilt von der zweiten Nadel, wenn die Gestalt und die Vertheilung des Magnetismus in Beziehung auf den Punkt H symmetrisch ist. Im Allgemeinen werden daher in der Summe $\Sigma \frac{eE}{r^{(n-1)}}$ die Coefficienten der Potenzen $R^{-(n-1)}$ und R^{-n} verschwinden; in dem besonderen Falle, wo jede der beiden Nadeln symmetrisch gestaltet und symmetrisch magnetisirt ist, sowie gleichzeitig der Mittelpunkt der ersteren, h und h', zusammenfallen und ebenso der Mittelpunkt der letzteren und H, werden auch die Coefficienten der Potenzen $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$, $R^{-(n+6)}$ u. s. w. verschwinden; so oft jene Bedingungen sehr annähernd stattfinden, müssen sie wenigstens sehr klein werden. Das Hauptglied, welches aus der Entwickelung des zweiten Theils von Ω, nämlich von $-\Sigma \frac{eE}{(n-1) r^{(n-1)}}$ hervorgeht, wird sein:

$$= -\tfrac{1}{2} R^{-(n+1)} (n \Sigma e E k k - \Sigma e E l)$$

$$= m M R^{-(n+1)} \big(n \cos(\psi - U) \cos(\psi - u) - \sin(\psi - U) \sin(\psi - u)\big).$$

Hieraus folgt, dass der Theil von $\frac{d\Omega}{du}$, welcher der Einwirkung der zweiten Nadel entspricht, durch folgende Reihe ausgedrückt werden kann:

$$f R^{-(n+1)} + f' R^{-(n+2)} + f'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.},$$

worin die Coefficienten rationale Functionen der Cosinus und Sinus der Winkel ψ, u, U und der Grössen α, β sind und überdies constante Grössen enthalten, die von dem magnetischen Zustande der Nadeln abhängen; und zwar wird sein:

$$f = mM(n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u)).$$

Die vollständige Entwickelung der folgenden Coefficienten f', f'' u. s. w. ist für unseren Zweck nicht nöthig; es genügt, zu bemerken, dass

[**30**] 1) im Falle der vollkommenen Symmetrie die soeben angedeuteten Coefficienten f', f''' u. s. w. verschwinden;

2) wenn die übrigen Grössen unverändert bleiben und ψ um zwei Rechte vermehrt wird (oder was dasselbe ist, wenn die Entfernung R auf derselben, rückwärts verlängerten Geraden auf der anderen Seite des Punktes h' genommen wird), die Coefficienten f, f'', f'''' u. s. w. ihre Werthe beibehalten, dagegen f', f''', f^{v} u. s. w. entgegengesetzte Werthe annehmen, oder dass die Reihe übergeht in

$$fR^{-(n+1)} - f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} - \text{u. s. w.};$$

dies wird leicht daraus geschlossen, dass durch jene Aenderung von ψ, k in $-k$ übergeht, l aber nicht geändert wird.

17. [5])

Die Bedingung, dass die bewegliche Nadel durch das Zusammenwirken der Kräfte nicht um die verticale Axe gedreht werde, wird daher in der folgenden Gleichung zusammengefasst:

$$0 = -mT\sin u + fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + f''R^{-(n+3)} \\ + \text{u. s. w.} - \Theta(u - N).$$

Da leicht bewirkt werden kann, dass der Werth von N, wenn nicht $= 0$, doch wenigstens sehr klein ist, und auch u für die Versuche, um welche es sich hier handelt, innerhalb enger Grenzen bleibt, so wird man für das Glied $\Theta(u - N)$, ohne einen merklichen Fehler befürchten zu müssen, $\Theta\sin(u - N)$ einsetzen können, um so mehr, als $\frac{\Theta}{mT}$ ein sehr kleiner Bruch ist. Es möge u^0 der Werth von u sein, der dem

Gleichgewicht der ersten Nadel in Abwesenheit der zweiten entspricht, oder es sei

$$mT \sin u^0 + \Theta \sin (u^0 - N) = 0;$$

hieraus folgt leicht

$$\begin{aligned} &mT \sin u + \Theta \sin (u - N) \\ &\qquad = (mT \cos u^0 + \Theta \cos (u^0 - N)) \sin (u - u^0), \end{aligned}$$

wo man an die Stelle des ersten Factors unbedenklich $mT + \Theta$ annehmen kann. So wird unsere Gleichung:

$$\begin{aligned} &(mT + \Theta) \sin (u - u^0) \\ &\qquad = fR^{-(n+1)} + f' R^{-(n+2)} + f'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.} \end{aligned}$$

Wenn wir das Glied $fR^{-(n+1)}$ allein beibehalten, liegt die Lösung auf der Hand, wir haben nämlich

$$\operatorname{tg}(u - u^0) = \frac{mM(n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0))R^{-(n+1)}}{mT + \Theta + mM(n \cos(\psi - U) \cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U) \sin(\psi - u^0))R^{-(n+1)}}$$

wo wir im Nenner den Theil, der den Factor $R^{-(n+1)}$ enthält, mit ebendemselben Rechte unterdrücken oder setzen können:

$$\begin{aligned} &\operatorname{tg}(u - u^0) = \\ &\frac{mM}{mT + \Theta}(n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0))R^{-(n+1)} \\ &\qquad = FR^{-(n+1)}. \end{aligned} \tag{31}$$

Wenn wir aber die weiteren Glieder berücksichtigen wollen, so ist klar, dass $tg(u - u^0)$ in eine Reihe folgender Gestalt entwickelt werden kann:

$$\operatorname{tg}(u - u^0) = FR^{-(n+1)} + F' R^{-(n+2)} + F'' R^{-(n+3)} + \text{u. s. w.},$$

worin, wie eine leichte Ueberlegung lehrt, die Coefficienten F, F', F'' u. s. w. bis zum Coefficienten der Potenz $R^{-(2n+1)}$ einschliesslich bezüglich aus

$$\frac{f}{mT + \Theta}, \quad \frac{f'}{mT + \Theta}, \quad \frac{f''}{mT + \Theta} \text{ u. s. w.},$$

durch Aenderung von u in u^0 entstehen; vom folgenden Gliede ab werden aber neue Theile hinzutreten, die wir jedoch für unseren Zweck nicht genauer zu verfolgen brauchen. Uebrigens kann augenscheinlich $u - u^0$ in eine Reihe von einer ähnlichen Form entwickelt werden, die bis zur Potenz $R^{-(3n+2)}$ mit der Reihe für tg $(u - u^0)$ zusammenfällt.

18.*)

Es ist nunmehr klar, dass, wenn die zweite Nadel in verschiedenen Punkten derselben Geraden aufgestellt wird, so dass ψ und U ihren Werth behalten, während R allein sich ändert, und die Ablenkungen der beweglichen Nadel von der Gleichgewichtslage, wobei die zweite Nadel entfernt ist, nämlich die Winkel $u - u^0$ beobachtet werden, hieraus die Werthe der Coefficienten F, F', F'' u. s. w., so viele noch bemerkbar sind, durch Elimination ermittelt werden können; hierdurch werden wir die Gleichung erhalten:

$$\frac{M}{T} = \left(1 + \frac{\Theta}{Tm}\right) \frac{F}{n \cos(\psi - U) \sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U) \cos(\psi - u^0)}$$

worin der Werth der Grösse $\frac{\Theta}{Tm}$ auf die Art und Weise gefunden werden kann, welche wir im Artikel 8 gelehrt haben. Aber für eine bequemere Ausführung wird es von Nutzen sein, das Folgende zu beachten:

I. An Stelle der Vergleichung von u mit u^0 verdient es den Vorzug, je zwei entgegengesetzte Ablenkungen mit einander zu vergleichen, durch Umkehr der Lage der zweiten Nadel, so nämlich, dass R und ψ unverändert bleiben und der Winkel U um zwei Rechte vermehrt wird. Sind die Werthe von u, welche diesen Stellungen entsprechen, durch u' und u'' bezeichnet, so müsste im Falle der vollkommenen Symmetrie genau $u'' = -u'$ sein, wenn zugleich $u^0 = 0$ wäre. Aber es ist überflüssig, [32] diese Bedingungen ängstlich innezuhalten, da klar ist, dass u' und u'' durch ähnliche Reihen bestimmt werden, worin die ersten Glieder g e n a u entgegengesetzte Werthe haben, und ferner auch $\frac{1}{2}(u' - u'')$, ebenso tg $\frac{1}{2}(u' - u'')$ durch eine ähnliche Reihe, worin der Coefficient des ersten Gliedes g e n a u $= F$ ist.

II. Noch besser wird es sein, stets je vier Versuche zu verbinden, nachdem auch der Winkel ψ um zwei Rechte verändert oder der Abstand R auf der anderen Seite genommen worden ist. Wenn den beiden letzteren Versuchen die Werthe

*) S. Anm. 5, Schluss.

u''' und u'''' entsprechen, so wird auch die Differenz $\frac{1}{2}(u'''-u'''')$ durch eine ähnliche Reihe ausgedrückt werden, deren erstes Glied ebenfalls einen Coefficienten $= F$ haben wird. Es ist zu beachten (was aus dem Vorhergehenden leicht gefolgert wird), dass, wenn n eine ungerade Zahl wäre, die Coefficienten F, F'', F'''' u. s. w. bis ins Unendliche in jeder Reihe für $u' - u^0$ und $u''' - u^0$ genau gleich, und die Coefficienten F', F''', $F^{\rm v}$ u. s. w. bis ins Unendliche genau entgegengesetzt sein würden, und ebenso für $u'' - u^0$ und $u'''' - u^0$, so dass in der Reihe für $u' - u'' + u''' - u''''$ die abwechselnden Glieder verschwinden würden. Aber im Falle der Wirklichkeit, wo $n = 2$, ist, um allgemein zu reden, eine solche Beziehung zwischen den Reihen für $u' - u^0$ und $u''' - u^0$ strenge nicht vorhanden, da schon für die Potenz R^{-6} nicht genau entgegengesetzte Coefficienten sich ergeben; jedoch kann gezeigt werden, dass auch für dieses Glied eine vollständige Aufhebung in der Verbindung $u'-u''+u'''-u''''$ eintritt, so dass $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ die Form hat:

$$LR^{-3} + L'R^{-5} + L''R^{-7} + \text{u. s. w.}$$

oder allgemeiner, wenn wir einstweilen den Werth von n noch unbestimmt lassen, die folgende Form:

$$LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} + \text{u. s. w.},$$

worin $L = F$ ist.

III. Es wird dienlich sein, die Winkel ψ und U so zu wählen, dass kleine Fehler, die beim Messen derselben begangen worden sind, den Werth von F nicht merklich verändern. Zu diesem Zweck muss der Werth von U für einen gegebenen Werth von ψ so angenommen werden, dass F ein Maximum wird, es muss nämlich:

$$\operatorname{ctg}(\psi - U) = n \operatorname{tg}(\psi - u^0)$$

sein. Dann wird

$$F = \pm \frac{mM}{mT + \Theta} \sqrt{(nn \sin(\psi - u^0)^2 + \cos(\psi - u^0)^2)}.$$

[33] Der Winkel ψ ist aber so zu wählen, dass dieser Werth von F entweder ein Maximum oder ein Minimum werde: jenes geschieht für $\psi - u^0 = 90^0$ oder 270^0, in welchen Fällen $F = \pm \dfrac{nmM}{mT + \Theta}$ ist, dieses für $\psi - u^0 = 0$ oder 180^0, wo $F = \pm \dfrac{mM}{mT + \Theta}$ ist.

19.

Es stehen daher zwei Methoden zur Verfügung, die für die Ausführung am meisten sich eignen. Die Elemente derselben soll das folgende Schema zeigen.

Erste Methode.

Von der zweiten Nadel liegt sowohl der Mittelpunkt als auch die Axe in der zum magnetischen Meridian*) senkrechten Geraden.

Ablenkung	Lage der Nadel		Mittelpunkt nach	Nordpol nach
$u = u'$	$\psi = 90^\circ$	$U = 90^\circ$	Osten	Osten
$u = u''$	$\psi = 90$	$U = 270$	Osten	Westen
$u = u'''$	$\psi = 270$	$U = 90$	Westen	Osten
$u = u''''$	$\psi = 270$	$U = 270$	Westen	Westen

Zweite Methode.

Von der zweiten Nadel liegt der Mittelpunkt im magnetischen Meridian.

Ablenkung	Lage der Nadel		Mittelpunkt nach	Nordpol nach
$u = u'$	$\psi = 0^\circ$	$U = 270^\circ$	Norden	Westen
$u = u''$	$\psi = 0$	$U = 270$	Norden	Osten
$u = u'''$	$\psi = 180$	$U = 90$	Süden	Westen
$u = u''''$	$\psi = 180$	$U = 90$	Süden	Osten

[**34**] Wenn man dann $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''') = v$ und $\operatorname{tg} v = LR^{-(n+1)} + L'R^{-(n+3)} + L''R^{-(n+5)} +$ u. s. w. setzt, so wird für die erste Methode

$$L = \frac{nmM}{mT + \Theta},$$

für die zweite

$$L = \frac{mM}{mT + \Theta} \text{ sein.}$$

*) Genauer, zu der Verticalebene, welcher der Werth $u = u^0$ entspricht, d. h. in welcher die Magnetaxe sich im Gleichgewicht befindet, wenn die zweite Nadel nicht da ist. Uebrigens kann in der Praxis die Differenz sowohl wegen der Kleinheit, als auch gerade wegen des Verhältnisses, wovon wir im vorhergehenden Artikel III ausgegangen sind, sicher vernachlässigt werden.

20.

Aus der Theorie der Elimination wird leicht geschlossen, dass die Rechnung wegen der unvermeidlichen Beobachtungsfehler um so ungenauer ist, je mehr Coefficienten man durch die Elimination bestimmen muss. Deswegen ist die im Artikel 18, II vorgeschriebene Methode sehr zu schätzen, weil sie die Coefficienten $R^{-(n+2)}$, $R^{-(n+4)}$ unterdrückt. Im Falle der vollkommenen Symmetrie würden zwar diese Coefficienten schon von selbst herausfallen, aber es wäre zu unsicher, sich darauf zu verlassen. Uebrigens würde eine kleine Abweichung von der Symmetrie bei weitem von geringerem Einfluss sein bei der ersten Methode, als bei der zweiten, und wenn man bei jener wenigstens dafür sorgt, dass der Punkt h', von dem aus die Entfernungen gemessen werden, hinreichend genau in dem durch den Punkt h gehenden magnetischen Meridian liegt, wird sich kaum ein merklicher Unterschied zwischen $u' - u''$ und $u''' - u''''$ zeigen. Aber das verhält sich anders bei der zweiten Methode, zumal wenn der Apparat eine excentrische Aufhängung erfordert. Durch diese Methode wird man, so oft der Raum keine Beobachtungen von beiden Seiten gestattet, immer eine weit geringere Genauigkeit erreichen. Ausserdem ist die erste Methode auch deswegen besonders vorzuziehen, weil sie einen doppelt so grossen Werth von L ergiebt als die zweite, da im Falle der Wirklichkeit $n = 2$ ist. Wenn man übrigens bei der zweiten Art das von $R^{-(n+2)}$ abhängende Glied im Falle der excentrischen Aufhängung so viel wie möglich fortschaffen will, so ist der Punkt h' so zu wählen, dass der Mittelpunkt der Nadel (für $u = u^0$) in der Mitte zwischen h und h' liegt: die Rechnung jedoch, welche dies gelehrt hat, muss ich der Kürze halber hier unterdrücken.

21.

Bei den vorstehenden Rechnungen haben wir den Exponenten n unbestimmt gelassen: an den Tagen vom 24.—28. Juni 1832 haben wir zwei Reihen von Versuchen ausgeführt, [**35**] unter Ausdehnung auf so grosse Entfernungen, als der Raum gestattete, durch welche auf's Einleuchtendste sich zeigen wird, welchen Werth die Natur fordert. Bei der ersten Reihe wurde die zweite Nadel (nach der ersten Methode des

Artikels 19) auf einer senkrecht zu dem magnetischen Meridian stehenden Geraden, bei der zweiten Reihe der Mittelpunkt der Nadel im Meridian selbst angebracht. Hier ist eine Uebersicht dieser Versuche, wobei die Entfernungen R in Theilen des Meters ausgedrückt und die Werthe des Winkels $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ für die erste Reihe durch v, für die zweite durch v' bezeichnet sind.

R	v	v'
1,1^m		1° 57′ 24,8″
1,2		1 29 40,5
1,3	2° 13′ 51,2″	1 10 19,3
1,4	1 47 28,6	0 55 58,9
1,5	1 27 19,1	0 45 14,3
1,6	1 12 7,6	0 37 12,2
1,7	1 0 9,9	0 30 57,9
1,8	0 50 52,5	0 25 59,5
1,9	0 43 21,8	0 22 9,2
2,0	0 37 16,2	0 19 1,6
2,1	0 32 4,6	0 16 24,7
2,5	0 18 51,9	0 9 36,1
3,0	0 11 0,7	0 5 33,7
3,5	0 6 56,9	0 3 28,9
4,0	0 4 35,9	0 2 22,2

Diese Zahlen zeigen schon bei oberflächlichem Anblick, dass für grössere Werthe sowohl die Zahlen der zweiten Reihe annähernd doppelt so gross sind als die Zahlen der dritten, sowie auch dass die Zahlen einer jeden Reihe annähernd im umgekehrten Verhältniss des Cubus der Entfernungen stehen, so dass bezüglich der Richtigkeit des Werthes $n = 2$ kein Zweifel bleiben kann. Um dieses Gesetz noch mehr bei den einzelnen Versuchen zu bestätigen, haben wir sämmtliche Zahlen nach der Methode der kleinsten Quadrate behandelt, woraus die folgenden Werthe der Coefficienten hervorgegangen sind:

$$\operatorname{tg} v = 0{,}086870\, R^{-3} - 0{,}002185\, R^{-5}$$

$$\operatorname{tg} v' = 0{,}043435\, R^{-3} + 0{,}002449\, R^{-5}.$$

[**36**] Nachstehende Uebersicht zeigt die Vergleichung der nach diesen Formeln berechneten Werthe mit den beobachteten.

Berechnete Werthe.

R	v	Unterschied	v'	Unterschied
$1,1^m$			1° 57′ 22,0″	+ 2,8″
1,2			1 29 46,5	— 6,0
1,3	2° 13′ 50,4″	+ 0,8″	1 10 13,3	+ 6,0
1,4	1 47 24,1	+ 4,5	0 55 58,7	+ 0,2
1,5	1 27 28,7	— 9,6	0 45 20,9	— 6,6
1,6	1 12 10,9	— 3,3	0 37 15,4	— 3,2
1,7	1 0 14,9	— 5,0	0 30 59,1	— 1,2
1,8	0 50 48,3	+ 4,2	0 26 2,9	— 3,4
1,9	0 43 14,0	+ 7,8	0 22 6,6	+ 2,6
2,0	0 37 5,6	+ 10,6	0 18 55,7	+ 5,9
2,1	0 32 3,7	+ 0,9	0 16 19,8	+ 4,9
2,5	0 19 2,1	— 10,2	0 9 38,6	— 2,5
3,0	0 11 1,8	— 1,1	0 5 33,9	— 0,2
3,5	0 6 57,1	— 0,2	0 3 29,8	— 1,0
4,0	0 4 39,6	— 3,7	0 2 20,5	+ 1,7

22.

Die vorstehenden Versuche sind hauptsächlich in der Absicht unternommen worden, das Gesetz der magnetischen Wirkung gegen jeden Zweifel sicher zu stellen, ferner um zu prüfen, wie viele Glieder der Reihe zu berücksichtigen sind und welche Genauigkeit die Versuche zulassen. Sie haben gelehrt, dass, wenn wir die Entfernungen nicht kleiner nehmen als das Vierfache der Länge der Nadeln, zwei Glieder hinreichen*). Uebrigens dürfen die Unterschiede, welche die Berechnung ergeben hat, keineswegs bloss für Beobachtungsfehler [37] gehalten werden: denn mehrere Vorsichtsmaassregeln, von deren Anwendung man eine grössere Uebereinstimmung erwarten darf, waren damals noch nicht vorbereitet. Hierher sind die Verbesserungen wegen der stündlichen Veränderlichkeit der Intensität des Erdmagnetismus zu zählen, auf welche man Rücksicht nehmen muss unter Anwendung einer anderen Vergleichsnadel, nach der Methode, über welche wir im Artikel 10, II gesprochen haben. Damit man jedoch den Werth des Erdmagnetismus kennen lerne, soweit er sich

*) Die Länge der bei diesen Versuchen angewandten Nadeln beträgt ungefähr $0,3^m$; wenn wir das Glied R^{-7} bei der Rechnung noch zu berücksichtigen versucht hätten, wäre die Genauigkeit eher vermindert als vermehrt worden.

aus diesen Versuchen ableiten lässt, fügen wir eine Zusammenstellung der übrigen hierher gehörigen Versuche hinzu.

Der Werth des Bruches $\frac{\Theta}{Tm}$ für die erste Nadel und den Faden, an welchem sie hing, ist nach der im Artikel 8 beschriebenen Methode $= \frac{1}{251,96}$ ermittelt worden.

Hieraus ergiebt sich daher:

$$\frac{M}{T} = 0,0436074.$$

Dieser Zahl liegt das Meter als Längeneinheit zu Grunde. Wenn wir als Einheit lieber das Millimeter nehmen, so ist diese Zahl mit dem Cubus von 1000 zu multipliciren, so dass

$$\frac{M}{T} = 43607400.$$

Für die zweite Nadel ergab sich durch Versuche, die am 28. Juni angestellt wurden und denen glichen, die wir für eine andere Nadel im Artikel 11 beschrieben haben, während Millimeter, Milligramm und die Secunde der mittleren Sonnenzeit als Einheiten genommen wurden,

$$TM = 135\,457\,900,$$

und hieraus, durch Elimination der Grösse M,

$$T = 1,7625.$$

23.

Wenn Versuche zu dem Zwecke angestellt werden, den absoluten Werth T des Erdmagnetismus zu bestimmen, ist es von grosser Bedeutung, dafür zu sorgen, dass die Gesammtheit dieser Versuche innerhalb nicht allzulanger Zeit erledigt werde, damit keine merkliche Aenderung des magnetischen Zustandes der hierzu verwandten Nadeln zu befürchten ist. Es wird sich daher empfehlen, bei der Beobachtung der Ablenkungen der beweglichen Nadel das erste Verfahren [**38**] des Artikel 20 allein anzuwenden, nachdem nur zwei verschiedene Abstände passend ausgewählt sind, vorausgesetzt dass zwei Glieder der Reihe hinreichen. Wir wählen aus mehreren Anwendungen dieser Methode hier eine als Beispiel aus und zwar diejenige, auf welche die peinlichste Sorgfalt verwandt worden ist, indem die Abstände mit mikroskopischer Genauigkeit gemessen wurden.

Die Versuche sind am 18. September 1832 an zwei Apparaten angestellt worden, welche wir durch die Buchstaben A und B, und zwar mit drei Nadeln, die wir durch die Zahlen 1, 2, 3 bezeichnen wollen. Die Nadeln 1 und 2 sind dieselben, welche im Artikel 11 erste und zweite genannt wurden. Die Versuche scheiden sich in zwei Abtheilungen.

Zuerst wurden die gleichzeitigen Schwingungen der Nadel 1 im Apparat A und der Nadel 2 im Apparat B beobachtet. Als Dauer einer Schwingung, auf unendlich kleine Amplituden zurückgeführt, ging hervor

für die Nadel 1 . . 15,22450″
für die Nadel 2 . . 17,29995 ,

jene aus 305, diese aus 264 Schwingungen gefolgert.

Dann wurde die Nadel 3 im Apparat A aufgehängt, die Nadel 1 aber in der senkrecht auf dem magnetischen Meridian stehenden Geraden östlich wie auch westlich und beiderseits auf doppelte Weise angebracht und die Ablenkung der Nadel 3 für die einzelnen Lagen der Nadel 1 beobachtet. Diese Versuche, die in zwei verschiedenen Abständen R wiederholt wurden, ergaben die folgenden Werthe des Winkels v, dessen Bedeutung die gleiche wie in den Artikeln 19 u. 21 ist:

$$R = 1{,}2^{\mathrm{m}} \qquad v = 3^{\circ}\ 42'\ 19{,}4''$$
$$R' = 1{,}6 \qquad v' = 1\ \ 34\ \ 19{,}3.$$

Auch während dieser Versuche wurden die Schwingungen der Nadel 2 im Apparat B beobachtet. Der mittleren Zeit entspricht der aus 414 Schwingungen berechnete Werth der Schwingungsdauer für unendlich kleine Bogen = 17,29484.

Die Zeiten wurden an einer Uhr beobachtet, deren tägliches Zurückbleiben 14,24″ betrug. Wenn M und m die Momente des freien Magnetismus für die Nadel 1 und 3 bezeichnen und Θ die Torsionsconstante des Fadens im Apparat A, während er die Nadel 1 oder 3 trug (das Gewicht derselben ist fast dasselbe), so haben wir:

[39]
$$\frac{\Theta}{TM} = \frac{1}{597{,}4},$$

wie im Artikel 11

$$\frac{\Theta}{Tm} = \frac{1}{721{,}6};$$

weil die Nadel 3 stärker magnetisch war als die Nadel 1.

Das Trägheitsmoment der Nadel 1 war schon durch frühere Versuche bekannt (siehe Artikel 11), welche ergeben hatten: $K = 4228732400$, wobei das Millimeter und das Milligramm als Einheiten genommen sind.

Die Aenderung des Thermometers in beiden Sälen, wo die Apparate aufgestellt sind, während der ganzen Versuchszeit war so gering, dass es überflüssig ist, darauf Rücksicht zu nehmen.

Wir wollen nunmehr zur Berechnung dieser Versuche übergehen, um daraus die Intensität T des Erdmagnetismus abzuleiten. Die Ungleichheit der Schwingungen der Nadel 2 deutet auf eine geringe Aenderung dieser Intensität: damit daher von einem bestimmten Werthe die Rede sein kann, werden wir die beobachtete Dauer der Schwingungen der ersten Nadel auf den mittleren Zustand des Erdmagnetismus während des zweiten Theils der Beobachtungen zurückführen. Eine andere Zurückführung erfordert diese Dauer noch wegen des Zurückbleibens der Uhr und eine dritte wegen der Torsion des Fadens. Auf diese Weise geht als reducirte Dauer einer Schwingung hervor:

$$= 15{,}22450 \times \frac{17{,}29484}{17{,}29995} \cdot \frac{86400}{86385{,}76} \cdot \sqrt{\frac{598{,}4}{597{,}4}}$$
$$= 15{,}23500'' = t.$$

Hieraus folgt der Werth des Productes

$$TM = \frac{\pi\pi K}{tt} = 179\,770\,600.$$

Der geringe Unterschied zwischen diesem Werth und demjenigen, welchen wir oben Artikel 11 am 11. September gefunden haben, ist der Aenderung des Erdmagnetismus und auch derjenigen des magnetischen Zustandes der Nadel zuzuschreiben.

Aus den beobachteten Ablenkungen erhalten wir:

$$F = \frac{R'^5 \operatorname{tg} v' - R^5 \operatorname{tg} v}{R'R' - RR} = 113\,056\,200,$$

wenn wir das Millimeter zur Einheit nehmen, und daraus

[40] $$\frac{M}{T} = \tfrac{1}{2} F\left(1 + \frac{\Theta}{Tm}\right) = 56\,606\,437.$$

Die Vergleichung dieser Zahl mit dem Werthe von TM ergiebt endlich

$$T = 1{,}782088$$

als Werth der Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft am 18. September um 5 Uhr.

24.

Die vorstehenden Versuche sind auf der Sternwarte gemacht worden, wobei der Platz für die Apparate derartig ausgesucht worden war, dass Eisen von der Nachbarschaft so viel wie möglich ferngehalten wurde. Nichts desto weniger kann nicht bezweifelt werden, dass die Eisenmassen, welche in den Wänden, den Fenstern und Thüren des Gebäudes reichlich zerstreut vorhanden sind, ja sogar auch die eisernen Bestandtheile der grösseren astronomischen Instrumente, in denen durch die erdmagnetische Kraft Magnetismus erregt wird, eine keineswegs unmerkliche Wirkung auf die aufgehängten Nadeln ausüben. Die daraus entstehenden Kräfte ändern nicht nur die Richtung, sondern auch die Intensität des Erdmagnetismus um einen kleinen Betrag, und unsere Versuche ergeben nicht den reinen Werth der Intensität des Erdmagnetismus, sondern den für den Ort des Apparats A modificirten Werth. Diese Modification muss, so lange die Eisenmassen an ihrem Orte bleiben und die Elemente des Erdmagnetismus selbst (nämlich die Intensität und die Richtung) sich nicht sehr erheblich ändern, merklich constant bleiben, welche Grösse ihr aber zukommt, ist zwar bis jetzt unbekannt, jedoch möchte ich kaum glauben, dass dieselbe über ein oder zwei Hunderttheile des Gesammtwerthes hinausgeht. Uebrigens dürfte es nicht schwierig sein, die Grösse wenigstens annähernd durch Versuche zu bestimmen, nämlich durch Beobachtung der gleichzeitigen Schwingungen zweier Nadeln, von denen die eine am gewöhnlichen Beobachtungsort, die andere unterdessen in ziemlich grosser Entfernung von dem Gebäude und anderen störenden Eisenmassen aufzuhängen sein würde und welche dann ihre Plätze vertauschen müssten. Aber bis jetzt war es nicht möglich, diese Versuche auszuführen. Die sicherste Abhülfe aber dürfte ein besonderes Gebäude schaffen, welches für magnetische Beobachtungen bestimmt ist und in Folge königlicher Huld bald errichtet werden wird, von dessen Bau das Eisen überhaupt ausgeschlossen werden soll.

25.

Ausser den mitgetheilten Versuchen haben wir noch viele andere ähnliche ausgeführt, wenn auch früher mit geringerer Sorgfalt. Es wird jedoch von Interesse sein, die Resultate [**41**] hier in eine Tabelle zu bringen, wobei aber diejenigen übergangen werden, welche vor Aufstellung der feineren Apparate durch andere, rohere Hülfsmittel an Nadeln von den verschiedensten Dimensionen sich ergeben haben, obgleich alle wenigstens eine Annäherung an die Wirklichkeit gewährt haben. Durch wiederholte Versuche haben sich nach einander folgende Werthe von T ergeben:

Zahl	Zeit 1832	T
I	Mai 21	1,7820
II	Mai 24	1,7694
III	Juni 4	1,7713
IV	Juni 24—28	1,7625
V	Juli 23, 24	1,7826
VI	Juli 25, 26	1,7845
VII	September 9	1,7764
VIII	September 18	1,7821
IX	September 27	1,7965
X	October 15	1,7860

Die Versuche V—IX sind sämmtlich an demselben Orte angestellt worden, dagegen I—IV an verschiedenen Orten; der Versuch X ist eigentlich ein gemischter, da die Ablenkungen zwar am gewöhnlichen Ort beobachtet worden sind, die Schwingungen dagegen an einem anderen. Auf die Versuche VII und VIII ist eine fast gleiche Sorgfalt verwandt worden, dagegen auf die Versuche IV, V, VI und X eine etwas geringere, und auf die Versuche I—III eine bei weitem geringere. Bei den Versuchen I—VIII sind zwar verschiedene Nadeln angewandt worden, doch hatten dieselben dasselbe Gewicht und dieselbe Länge (das Gewicht war zwischen 400 g und 440 g); dagegen diente für den Versuch X eine Nadel, deren Gewicht 1062 g und deren Länge 485 mm betrug. Der Versuch IX ist nur unternommen worden, um zu sehen, welchen Grad der Genauigkeit man durch eine sehr kleine Nadel erreichen kann. Das Gewicht der angewandten Nadel betrug nur 58 g, übrigens war aber die Sorgfalt nicht geringer, als bei den Versuchen VII und VIII. Es besteht kein Zweifel, dass die Feinheit der Beobachtungen merklich vermehrt werden wird, wenn noch schwerere Nadeln benutzt werden, z. B. solche, deren Gewicht bis zu 2000 oder 3000 g steigt.

[42] 26.

Wenn die Intensität T der erdmagnetischen Kraft durch eine Zahl k ausgedrückt wird, so liegt dieser eine gewisse Einheit V zu Grunde, nämlich eine mit jener gleichartige Kraft, deren Zusammenhang mit den anderen unmittelbar gegebenen Einheiten im Vorhergehenden zwar enthalten ist, jedoch in einer etwas verwickelteren Weise: es wird daher der Mühe werth sein, diesen Zusammenhang hier von neuem vorzuführen, um mit elementarer Klarheit zu zeigen, welche Aenderung die Zahl k erleidet, wenn wir anstatt von den Grundeinheiten von anderen ausgehen.

Zur Festsetzung der Einheit V muss man von der Einheit des freien Magnetismus M*) und der Abstandseinheit R ausgehen, und wir setzen V gleich der von M in dem Abstande R ausgeübten Kraft.

Als Einheit M haben wir diejenige Menge der magnetischen Flüssigkeit angenommen, welche auf eine gleich grosse, in dem Abstande R befindliche Menge M eine bewegende Kraft (oder wenn man lieber will, einen Druck) hervorbringt, welche gleich derjenigen W ist, die als Einheit gilt, d. h. gleich der Kraft, welche die als Einheit angenommene beschleunigende Kraft A auf die als Einheit angenommene Masse P ausübt.

Zur Festsetzung der Einheit A steht ein doppelter Weg offen: A kann nämlich entweder von einer ähnlichen unmittelbar gegebenen Kraft entlehnt werden, z. B. von der Schwerkraft am Beobachtungsorte, oder von der Wirkung von A, welche sich in der Bewegung von Körpern äussert. Bei der letzteren Art, der wir bei unseren Berechnungen gefolgt sind, sind zwei neue Einheiten erforderlich, nämlich die Zeiteinheit

*) Es wird wohl kaum nöthig sein, daran zu erinnern, dass die den Buchstaben früher gegebene Bedeutung hier aufhört.

S und die Geschwindigkeitseinheit C, so dass als Einheit diejenige beschleunigende Kraft angenommen wird, welche, wenn sie die Zeit S hindurch wirkt, die Geschwindigkeit C hervorbringt; endlich wird für letztere diejenige Geschwindigkeit angenommen, welche der gleichförmigen Bewegung durch den Raum R in der Zeit S entspricht.

So ist klar, dass die Einheit V von drei Einheiten, entweder R, P, A oder R, P, S abhängt.

Nehmen wir nunmehr an, dass an Stelle der Einheiten V, R, M, W, A, P, C, S andere angenommen würden: V', R', M', W', A', P', C', S', die in ähnlicher Weise mit einander zusammenhängen wie die früheren, und dass beim Gebrauche des Maasses V' der Erdmagnetismus durch die Zahl k' ausgedrückt werde, so ist zu untersuchen, wie sich diese zu k verhält.

[**43**] Wenn man setzt:

$$\begin{aligned} V &= vV' \\ R &= rR' \\ M &= mM' \\ W &= wW' \\ A &= aA' \\ P &= pP' \\ C &= cC' \\ S &= sS', \end{aligned}$$

so werden v, r, m, w, a, p, c, s absolute Zahlen sein und

$$kV = k'V' \text{ oder } kv = k',$$

$$v = \frac{m}{rr},$$

$$\frac{mm}{rr} = w = pa,$$

$$a = \frac{c}{s},$$

$$c = \frac{r}{s}.$$

Aus der Verbindung dieser Gleichungen erhalten wir:

$$\text{I.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{p}{rss}}$$

$$\text{II.} \qquad k' = k\sqrt{\frac{pa}{rr}}.$$

So lange wir den Weg beibehalten, den wir bei unseren Beobachtungen verfolgt haben, müssen wir die erste Formel gebrauchen; wenn wir z. B. an Stelle des Millimeters und des Milligramms das Meter und das Gramm als Einheiten annehmen, so wird $r = \frac{1}{1000}$, $p = \frac{1}{1000}$, also $k' = k$ sein; wenn die Pariser Linie und das Berliner Pfund, so werden wir haben: $r = \frac{1}{2,255829}$, $p = \frac{1}{467711,4}$, folglich

$$k' = 0,002196161\, k,$$

woher z. B. die Versuche VIII den Werth $T = 0,0039131$ ergeben.

[44] Wenn man lieber dem anderen Wege folgen will und die Schwerkraft zur Einheit der beschleunigenden Kräfte annimmt, so wird man für die Göttinger Sternwarte $a = \frac{1}{9811,63}$ setzen; dann sind, falls wir das Millimeter und das Milligramm beibehalten, die Zahlen k mit 0,01009554 zu multipliciren und die Aenderungen jener Einheiten nach der Formel II zu behandeln.

27.

Die Intensität der horizontalen erdmagnetischen Kraft T ist mit der Secante der Inclination zu multipliciren, um die ganze Intensität zu ergeben. Dass die Inclination zu Göttingen veränderlich ist und in gegenwärtiger Zeit eine Verminderung erleidet, haben die Beobachtungen von *Humboldt* gezeigt, der im Monat December 1805 den Werth von 69° 29′ gefunden hat, im Monat September 1826 aber 68° 29′ 26″. Ebenso habe ich am 23. Juni 1832 mit Hülfe desselben Inclinatoriums, welches einst der s. *Mayer* benutzte, 68° 22′ 52″ gefunden, was eine Verzögerung der Abnahme anzudeuten scheint, jedoch möchte ich dieser Beobachtung weniger Vertrauen schenken, nicht nur wegen der Unvollkommenheit des Instruments, sondern auch wegen des Umstandes, dass die im Observatorium angestellte Beobachtung nicht hinlänglich genug vor der Störung von Eisenmassen gesichert ist. Uebrigens wird auch diesem Elemente grössere Sorgfalt in Zukunft zugewandt werden.

28.

In dieser Abhandlung sind wir der allgemein angenommenen Erklärungsweise der magnetischen Erscheinungen gefolgt, nicht nur deswegen, weil sie vollständig genügt, sondern auch, weil sie in weit einfacheren Rechnungen fortschreitet als die andere Auffassung, welche den Magnetismus galvanoelectrischen Kreisen um die Theilchen des magnetischen Körpers zuschreibt; es war unsere Absicht, diese Auffassung, die sich allerdings n mehrfacher Hinsicht empfiehlt, weder zu bekräftigen noch zurückzuweisen, denn dies wäre unangebracht gewesen, da das Gesetz der gegenseitigen Wirkung zwischen den Elementen solcher Kreise noch nicht hinlänglich erforscht zu sein scheint. Welche Auffassung aber auch künftig für die magnetischen und electromagnetischen Erscheinungen angenommen wird: bezüglich der ersteren muss sie überall zu demselben Ergebniss wie die gewöhnliche Theorie führen, und was auf Grund dieser in der vorliegenden Abhandlung entwickelt ist, wird nur in der Form, nicht aber im Wesen verändert werden können.

Die Abhandung: »Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata«, ist von *Gauss* gelesen in der Göttinger Gesellschaft der Wissenschaften am 15. December 1832 und im 8 Bande der Abhandlungen dieser Gesellschaft, Seite 3 bis 44, gedruckt.

Die Uebersetzung ist von Herrn Oberlehrer Dr. *Kiel* in Bonn besorgt und von dem Herausgeber durchgesehen worden.

Anmerkungen.

Die Abhandlung von *Gauss*, deren Uebersetzung vorstehend abgedruckt ist, hat aus mehrfachen Gründen eine ausserordentliche Bedeutung für die Physik erlangt: durch das neue Princip der Messung physikalischer Grössen (das sog. absolute Maasssystem[1])), durch die mit Hülfe desselben gewonnene Möglichkeit, die Intensität des Erdmagnetismus jederzeit in einem unveränderlichen Maasse zu bestimmen, endlich durch neue Beobachtungsmethoden von einer bis dahin unerreichten Schärfe.

In der analytischen Mechanik war es schon lange üblich, aus den Grundeinheiten für Länge, Masse und Zeit (bei *Gauss mm, mg, sec*; nach den Beschlüssen des Pariser Congresses 1881 jetzt *cm, g, sec*) die Einheiten für die übrigen mechanischen Grössen abzuleiten. Als Einheit der Geschwindigkeit gilt diejenige, bei welcher die Längeneinheit in der Zeiteinheit zurückgelegt wird; die Einheit der Beschleunigung findet dann statt, wenn die Geschwindigkeit in der Zeit 1 um die eben definirte Geschwindigkeitseinheit wächst; die Einheit der bewegenden Kraft ist diejenige, welche der Masse 1 die Beschleunigung 1 ertheilt.

Gauss[2]) erweiterte dies Verfahren über das Gebiet der reinen Mechanik hinaus: gestützt auf das *Coulomb*'sche Gesetz der Wechselwirkung zweier Magnetpole definirte er als Einheit des Magnetismus diejenige Menge Nordmagnetismus, welche auf eine ihr gleiche in der Einheit der Entfernung befindliche die absolut gemessene Kraft 1 ausübt, und setzte

---

1) Eine zusammenhängende Darstellung des absoluten Maasssystems s. z. B. bei *F. Kohlrausch,* Leitfaden der praktischen Physik, Anhang.

2) S. Art. 26.

als Einheit der magnetischen Intensität (der Stärke eines Magnetfeldes) diejenige fest, welche auf den Einheitspol mit der Kraft 1 wirkt.

Es hat *Gauss*[1]) selbst darauf hingewiesen, dass »es keine Schwierigkeiten haben würde, auch galvanische Messungen auf absolute Maasse zurückzuführen«, und sein Freund und Mitarbeiter *Wilhelm Weber*[2]) hat dann diese Aufgabe thatsächlich gelöst, indem er das absolute electromagnetische Maasssystem aufstellte.

Man pflegt gegenwärtig den abgeleiteten Einheiten gewisse »Dimensionen« in Bezug auf die Grundeinheiten beizulegen, z. B. wenn l, m, t die Grundeinheiten andeuten, als Dimension einer Geschwindigkeit lt^{-1}, und ähnlich für einen Magnetpol $l^{3/2}\,m^{1/2}\,t^{-1}$, für ein Magnetfeld $l^{-1/2}\,m^{1/2}\,t^{-1}$ anzusetzen[3]). Der Anfänger ist vor dem Missverständniss zu warnen, die Dimensionen als die wahre Bedeutung der betreffenden Grössen ansehen und etwa einen Magnetpol mit $l^{3/2}\,m^{1/2}\,t^{-1}$ als gleichwerthig betrachten zu wollen. *Gauss* hat zu diesem Missverständniss keine Veranlassung gegeben, vielmehr den wahren Sinn dessen, was man heute Dimensionen nennt, klar dargelegt und ausgeführt, dass dieselben lediglich für den Uebergang von einem System der Grundeinheiten zu einem andern Bedeutung besitzen. Führt man nämlich an Stelle von l, m, t neue Einheiten l', m', t' ein, welche mit den alten in der Beziehung stehen $l = \lambda l'$, $m = \mu m'$, $t = \tau t'$, so ist z. B. diejenige Zahl, welche die Horizontalintensität im System l, m, t ausdrückt, mit $\lambda^{-1/2}\,\mu^{1/2}\,\tau^{-1}$ zu multipliciren, um die Zahl zu finden, welche dieselbe Grösse im neuen System darstellt. So ist gegenwärtig im mittleren Deutschland die Horizontalintensität in den Gaussischen Einheiten *mm*, *mg*, *sec* etwa 1,9; will man zum *cm*, *g*, *sec*-System übergehen, so hat man, da 1 mm = 0,1 cm, 1 mg = 0,001 g, zu multipliciren mit $0{,}1^{-1/2} \cdot 0{,}001^{1/2} = 0{,}1$, wodurch man 0,19 erhält.

Dass die Dimensionen der Grössen im absoluten Maasssystem nicht die wahre Bedeutung derselben angeben und etwa alle physikalischen Grössen durch Länge, Masse und

1) Gött. gel. Anz. 24. Dec. 1832. *Gauss*, Werke V, S. 301.

2) *W. Weber*, Werke Bd. III, S. 6, 276, 320, 591.

3) Vgl. *Gauss*, Art. 26. Die Lehre von den »Dimensionen« ist zuerst von *Fourier* für das Gebiet der Wärme entwickelt worden. S. *Fourier*, Théorie analytique de la chaleur. § 159—162. 1822.

Zeit ausdrücken lehren, geht schon daraus unzweifelhaft hervor, dass es zwei[1]) absolute electrische Maasssysteme giebt, in welchen dieselben Grössen ganz verschiedene Dimensionen besitzen.

Die Werthschätzung der absoluten Maasssysteme hat im Laufe der Zeit mannigfache Wandlungen durchgemacht; nach einer Periode der Ueberschätzung scheint man jetzt in den entgegengesetzten Fehler zu verfallen.

Zunächst sichert die Anwendung der absoluten Maasse — was für das Gebiet des Magnetismus später noch eingehender erörtert werden soll — eine Vergleichbarkeit der Messungen, welche zu verschiedenen Zeiten an verschiedenen Orten angestellt sind. Ferner nimmt der Ausdruck vieler Naturgesetze eine besonders einfache Form an, indem gewisse Factoren $= 1$ werden (z. B. wird die Kraft zwischen zwei Magnetpolen μ_1 und μ_2 in der Entfernung r gleich $\frac{\mu_1 \mu_2}{r^2}$) und insbesondere wird die Einheit der »Energie« für das Gebiet der Electricität und des Magnetismus übereinstimmend mit der Einheit der mechanischen Energie.

Diese Vorzüge haben zur Folge gehabt, dass, als im letzten Jahrzehnt die Electrotechnik sich mächtig entwickelte, ihre Vertreter einmüthig ein auf die absoluten electromagnetischen Maasse gegründetes System von Einheiten annahmen.

Einen sehr beachtenswerthen Versuch zur Umbildung und Weiterentwickelung des absoluten Maasssystems hat neuerdings *W. Ostwald*[2]) unternommen. Seine positiven Vorschläge kommen im Wesentlichen darauf hinaus, zunächst für sämmtliche Gebiete als gemeinsame Grundeinheiten die der Länge, Zeit und Energie (an Stelle der nur eine beschränkte Bedeutung besitzenden Masse) einzuführen.

Für die Mechanik genügen diese Einheiten; für jedes andere Gebiet — Electricität, Magnetismus, Wärme, strahlende Energie, Chemie — muss dann noch eine vierte, dem jeweiligen Gebiet speciell angehörige Einheit festgesetzt werden.

Man übersieht, dass hierdurch die Anwendung absoluter Maasse auch für die Erscheinungen der Wärme, der strahlenden Energie und der chemischen Kräfte ermöglicht wird,

---

1) Oder sogar vier. Vgl. *Hertz*, Wied. Ann. 24. S. 114. 1885.
2) *W. Ostwald*, Studien zur Energetik, Ber. d. Sächs. Ges. d. Wissenschaften. 1891. S. 271, und 1892, S. 211.

— was auf dem von *Gauss* und *Weber* angebahnten Wege nicht gelungen war.

Für den Magnetismus ergiebt sich hiebei aber eine eigenthümliche Schwierigkeit.

Augenscheinlich muss die vierte *Ostwald*'sche Einheit, wenn sie praktisch brauchbar sein soll, entweder sich unverändert aufbewahren lassen (wie das Originalmeter) oder sicher reproducirbar sein (wie die *Siemens*'sche Widerstandseinheit).

Es giebt aber weder einen unveränderlichen Magnet, noch auch einen Ort von unveränderlicher Intensität des Erdmagnetismus, sodass der *Ostwald*'sche Vorschlag unausführbar wird, wenn man sich auf den Magnetismus allein beschränken will.

Unter Hinzuziehung der Electricität wird die Aufgabe lösbar: nach Feststellung der electrischen Maasse [1]) hätte man als Einheit des magnetischen Momentes (des »Stabmagnetismus«) dasjenige anzusetzen, welches in grosser Entfernung gleiche Wirkung ausübt, wie ein die Flächeneinheit umfliessender Strom der Stärke 1.

Um die Bedeutung der *Gauss*'schen Arbeit für unsere Kenntniss des Erdmagnetismus, insbesondere seiner Intensität, gebührend zu würdigen, muss man sich den Zustand dieses Zweiges der Wissenschaft vor ihrem Erscheinen vergegenwärtigen [2]). Vor *Gauss* konnte man (durch Beobachtung der Schwingungen einer Magnetnadel und zwar meist einer Inclinationsnadel) eine ziemlich rohe Vergleichung der an einem Orte vorhandenen Intensität mit der an einem Normalorte erhalten; die in längeren Zeiträumen vorgehenden Aenderungen derselben entzogen sich vollständig der Wahrnehmung. *Gauss* lehrte die Intensität nach einem unveränderlichen Maasse jederzeit bestimmen; er bezeichnet dieses als »absolut« im Gegensatz zu den früheren relativen Messungen. Er begnügte sich nicht damit, seine Methode in Göttingen anzuwenden, sondern gründete den weitverzweigten magnetischen Verein, dessen werthvolle Beobachtungen er im Verein mit *W. Weber* herausgegeben hat [3]).

---

1) Diese ist in verschiedener Weise ausführbar.

2) Man sehe die Einleitung von *Gauss* selbst. Die dort angeführten Beobachtungen von *Humboldt* findet man Gilbert's Ann. Bd. 7. S. 329. 1801, und Bd. 20. S. 257. 1805; die von *Sabine* Pogg. Ann. Bd. 6. S. 88. 1826.

3) Resultate aus den Beobachtungen des magnet. Vereins 1836—1841.

Gauss bezieht sich auf eine Arbeit von *Poisson*[1]; indessen würde man fehlgehen, wenn man diesen als Erfinder des absoluten Maasssystems ansehen wollte. *Poisson* zeigt, dass, wenn die Einheit des Magnetismus auf eine gleiche in der Einheit der Entfernung die Kraft f ausübt, die Intensität des Erdmagnetismus sich mit Hülfe von f ausdrücken lässt. Das Mittel hiezu bietet die Beobachtung der Schwingungen von zwei Magnetnadeln unter dem Einfluss des Erdmagnetismus allein und jeder Nadel unter dem Zusammenwirken der anderen und des Erdmagnetismus.

Man beachte, dass *Poisson* die Einheit des Magnetismus willkürlich lässt, während der Kern des *Gauss*schen absoluten Maasssystems gerade darin liegt, dieselbe aus der Kraftwirkung zu bestimmen.

Bei der Ausarbeitung der Beobachtungsmethoden[2] — welche übrigens in der vorliegenden Abhandlung nicht beschrieben sind — kam *Gauss* seine Eigenschaft als praktischer Astronom zu statten. Die von *Gauss*[3]) erfundene und bei erdmagnetischen Messungen zuerst erprobte Winkelmessung mit Fernrohr, Spiegel und Scala, sowie seine Vorschriften zur Bestimmung der Schwingungsdauer eines Magnets und zur empirischen Ermittelung eines Trägheitsmomentes u. s. w. können als die Grundlagen eines grossen Theils der modernen Beobachtungskunst betrachtet werden.

Zu Artikel 6.

1) Für den Anfänger werden einige Erläuterungen nicht überflüssig sein.

Die magnetische Kraft besitze für die in Betracht kommenden Theile des Raumes constante Richtung und Intensität (»das Magnetfeld sei homogen«).

Es werde ein im Raume festes Coordinatensystem xyz eingeführt; die auf die Einheit des Magnetismus (vgl. Art. 26) wirkende Kraft $\mathfrak{H}$ habe die Componenten X, Y, Z[4], so

---

1) *Poisson*, Solution d'un problème relatif au magnétisme terrestre. Connaissance des temps. 1828. p. 322.

2) Vgl. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins, insbes. 1836. S. 13.

3) und unabhängig von *Poggendorff*.

4) Die Bezeichnung entspricht nicht der von *Gauss*, welche sich für Anwendung rechtwinkliger Coordinaten nicht eignet.

werden die Componenten der translatorischen Wirkung auf ein magnetisches Theilchen μ sein

$$\mu X, \mu Y, \mu Z,$$

demnach für den ganzen Magnet

$$\Sigma \mu X, \Sigma \mu Y, \Sigma \mu Z.$$

Da aber X, Y, Z constant sind und $\Sigma \mu$ verschwindet, so werden diese Grössen $= 0$, und in einem homogenen Felde wird auf einen Magnet keine translatorische Kraft ausgeübt. Es kann also nur ein Drehungsmoment vorhanden sein.

Sind x, y, z die Coordinaten von μ, so ergiebt sich als Drehungsmoment um die x-Axe

$$\mathfrak{M}_x = \Sigma (y \cdot \mu Z - z \cdot \mu Y) = Z \Sigma \mu y - Y \Sigma \mu z.$$

Wenn gesetzt wird

$$\Sigma m x = \alpha, \Sigma m y = \beta, \Sigma m z = \gamma,$$

so wird

$$\mathfrak{M}_x = \beta Z - \gamma Y \text{ und ähnlich}$$
$$\mathfrak{M}_y = \gamma X - \alpha Z,$$
$$\mathfrak{M}_z = \alpha Y - \beta X.$$

Die Grössen α, β, γ sind die Momente des Magnets nach den Axen x, y, z.

Bezeichnet M das Hauptmoment des Magnetes, und wird dadurch zugleich die im Magnet feste Richtung der magnetischen Axe angedeutet, so ist (vgl. Art. 5)

$$\alpha = M \cos(M,x), \beta = M \cos(M,y), \gamma = M \cos(M,z).$$

Damit — bei Abwesenheit anderer Kräfte — der Magnet im homogenen Felde sich im Gleichgewicht befinde, muss sein

$$\mathfrak{M}_x = \mathfrak{M}_y = \mathfrak{M}_z = 0,$$

woraus sofort folgt

$$\alpha : \beta : \gamma = X : Y : Z, \text{ d. h.}$$

$$\cos(M,x) : \cos(M,y) : \cos(M,z) = \cos(\mathfrak{H},x) : \cos(\mathfrak{H},y) \cos : (\mathfrak{H},z).$$

Es muss also die magnetische Axe in die Richtung des Magnetfeldes fallen.

Ist diese Bedingung nicht erfüllt, so ergiebt sich ein resultirendes Drehungsmoment

$$\sqrt{(\beta Z - \gamma Y)^2 + (\gamma X - \alpha Z)^2 + (\alpha Y - \beta X)^2}$$
$$= M \mathfrak{H} \sin(M, \mathfrak{H})$$

um eine Axe, deren Richtungscosinus sich verhalten wie

$$\beta Z - \gamma Y : \gamma X - \alpha Z : \alpha Y - \beta X.$$

Diese Axe steht also senkrecht auf den Richtungen von M und $\mathfrak{H}$.

Da im vorliegenden Fall die translatorische Kraft verschwindet, so ist nach einem bekannten Satz dies Drehungsmoment um alle parallelen Axen gleich.

Die weiteren Erörterungen des Art. 6 werden leicht verständlich, wenn man das Drehungsmoment durch zwei nach $\mathfrak{H}$ und entgegengesetzt gerichtete Kräfte $\frac{M\mathfrak{H}}{r}$ ersetzt, deren Angriffspunkte an den Enden einer mit der magnetischen Axe parallelen Linie von der Länge r liegen.

Zu Artikel 7.

2) Der Magnet sei nunmehr um einen Punkt C drehbar, das homogene Magnetfeld sei das der Erde, und es werde auch die Wirkung der Schwere auf die Masse des Magnets berücksichtigt.

Wir verlegen den Anfangspunkt unseres Coordinatensystems nach C, zählen x horizontal im magnetischen Meridian nach Nord, y senkrecht dazu nach Ost, z vertical nach oben, und haben, wenn wir die Masse m des Magnets in seinem Schwerpunkt x_1, y_1, z_1 concentrirt denken, durch Nullsetzen der Drehungsmomente um die Coordinatenaxen

$$\begin{aligned} \beta Z \qquad\qquad - y_1 mg &= 0 \\ \gamma X - \alpha Z + x_1 mg &= 0 \\ - \beta X \qquad\qquad &= 0. \end{aligned}$$

g bedeutet die Beschleunigung der Schwere; die Componente Y ist für das gewählte Coordinatensystem $= 0$.

Aus der letzten Gleichung folgt $\beta = 0$, d. h. die magnetische Axe muss auf y senkrecht stehen, also im magnetischen Meridian liegen. Mit Rücksicht auf $\beta = 0$ ergiebt die erste Gleichung $y_1 = 0$, d. h. der Schwerpunkt des Magnets muss sich in der durch C gelegten magnetischen Meridianebene befinden.

Um endlich auch die zweite Gleichung zu deuten, beachten wir, dass, wenn $\mathfrak{H}$ die ganze Intensität, i die Inclination bezeichnet:

$$X = \mathfrak{H} \cos i, \quad Z = - \mathfrak{H} \sin i$$

und

$$\alpha = M \cos \vartheta, \quad \gamma = - M \sin \vartheta$$

wird, wo ϑ die Neigung der magnetischen Axe gegen die Horizontale ist.

Sei ferner S der Schwerpunkt, $CS = s$, und σ der Winkel zwischen CS und der x-Axe, so geht die zweite Gleichung über in

$$-M\mathfrak{H} \sin(\vartheta - i) + mgs \cos\sigma = 0,$$

d. h. das Drehungsmoment des Erdmagnetismus und der Schwerkraft um die y-Axe müssen sich aufheben.

Die veränderte Form, welche *Gauss* dieser Bedingung ertheilt, ergiebt sich so:

Die Wirkung der Verticalcomponente des Erdmagnetismus ersetzt *Gauss* (vgl. Art. 6) durch eine Verlegung des Schwerpunkts in der Richtung der magnetischen Axe, welche in unserer Bezeichnung ist

$$r' = \frac{M\mathfrak{H} \sin i}{mg}.$$

Mit Einführung von r' nimmt die zweite Gleichung die Form an:

$$-MX \sin\vartheta + mg[r' \cos\vartheta + x_1] = 0,$$

$r' \cos\vartheta + x_1$ ist aber der Abstand des verlegten Schwerpunktes von der durch C gelegten Verticalen (der z-Axe), und $MX \sin\vartheta$ ist die von *Gauss* mit $MT \sin i$ bezeichnete Grösse.

Es möge nun der Magnet Schwingungen um die Verticale z ausführen.

Ist die durch die magnetische Axe gelegte Verticalebene aus dem magnetischen Meridian um einen Winkel u herausgedreht, so wird

$$\beta = M \cos\vartheta \sin u,$$

woher, wenn K das Trägheitsmoment bedeutet, die Bewegungsgleichung wird

$$K \frac{d^2 u}{dt^2} = - MX \cos\vartheta \sin u.$$

Die auf unendlich kleine Amplituden reducirte Schwingungsdauer sei t, dann ist bekanntlich

$$MX = \frac{\pi^2 K}{t^2 \cos\vartheta}$$

oder in der Bezeichnung von *Gauss:*

$$MT = \frac{\pi^2 K}{t^2 \cos i}.$$

Zu Artikel 8.

3) Gegenwärtig ist es üblich, die Grösse $\Theta/TM = \frac{1}{n}$ als »Torsionsverhältniss« zu bezeichnen.

Die Begründung des Verfahrens zur Bestimmung von n ist leicht.

Der Einfluss der Torsion auf die Schwingungsdauer ergiebt sich folgendermaassen. Indem man die Differenz der Gleichungen für Ruhe und Bewegung

$$0 = -TM \sin u^0 + \Theta(v - u^0),$$

$$K\frac{d^2 u}{dt^2} = -TM \sin u + \Theta(v - u)$$

bildet, folgt (da u^0 constant ist):

$$K\frac{d^2(u - u^0)}{dt^2} = -TM(\sin u - \sin u^0) - \Theta(u - u^0).$$

Nun ist

$$\sin u - \sin u^0 = \sin(u - u^0)\cos u^0 - \sin u^0 [1 - \cos(u - u^0)]$$

$$= \sin(u - u^0)\cos u^0 \left[1 - \operatorname{tg} u^0 \operatorname{tg}\frac{u - u^0}{2}\right].$$

Bei nur halbwegs sorgfältiger Ausführung der Versuche unterscheidet sich $\cos u^0\left[1 - \operatorname{tg} u^0 \operatorname{tg}\frac{u - u^0}{2}\right]$ nicht merklich von 1; indem man noch $\Theta(u - u^0)$ durch $\Theta \sin(u - u^0)$ ersetzt, kommt:

$$K\frac{d^2(u - u^0)}{dt^2} = -(TM + \Theta)\sin(u - u^0)$$

$$= -TM\left(\frac{n+1}{n}\right)\sin(u - u^0),$$

woraus sofort hervorgeht, dass durch die Torsion die Schwingungsdauer für ∞ kleine Amplituden im Verhältniss $1 : \sqrt{\frac{n}{n+1}}$ verkleinert wird.

Zu Artikel 10.

4) Die von *Gauss* gewählte Art der Anbringung der Gewichte giebt zu Bedenken Veranlassung, da dieselben bei den Schwingungen eine drehende Bewegung um die Spitzen ausführen können, wodurch je nach Umständen die Schwingungen beschleunigt oder verlangsamt werden können. Besser wäre schon eine Aufhängung an Schneiden statt an Spitzen; gegenwärtig benutzt man nach Vorgang von *W. Weber* meistens durchbohrte Cylinder, welche auf verticale Stifte am Magnetträger aufgesteckt werden, so dass eine relative Bewegung ausgeschlossen ist[1]).

Auf eine weitere nicht unwesentliche Correction hat zuerst *Fechner*[2]) hingewiesen. Der Hauptmagnet liegt nämlich bei den Schwingungsbeobachtungen mit seiner Längsrichtung nahe im magnetischen Meridian, bei den Ablenkungsbeobachtungen senkrecht zu demselben. In der ersteren Lage erfährt sein Moment durch die magnetisirende Kraft der Horizontalintensität eine Verstärkung, welche sofort verschwindet, wenn der Magnet senkrecht zum magnetischen Meridian gestellt wird. *W. Weber*[3]) hat ein Verfahren angegeben, um diese Reduction zu ermitteln und in Rechnung zu ziehen.

Da die Temperaturcoefficienten des magnetischen Momentes auch für gute Magnete nicht unbedeutende Verschiedenheiten aufweisen (0,001—0,0003 für 1 Grad Celsius), wird man zur Erreichung der grössten Genauigkeit den Temperaturcoefficienten des Hauptmagnets bestimmen und die Variationen der Horizontalcomponente aus den Schwingungen eines zweiten Magnets mit ebenfalls bekanntem Temperaturcoefficienten oder aus den Angaben eines besonderen »Variometers für die Horizontalintensität« ableiten. Solche Intensitätsvariometer hat zuerst *Gauss* selbst construirt[4]); für den Gebrauch handlicher sind die Instrumente von *F. Kohlrausch*[5]).

---

1) S. auch *Dorn*, Wied. Ann. 17. S. 788. 1882. *Kreichgauer*, Wied. Ann. 25. S. 273. 1885.

2) *Fechner*, Pogg. Ann. 55. S. 189. 1842.

3) *W. Weber*, Werke, Bd. II. S. 336. (Abh. der Gött. Ges. d. Wiss. Bd. 6. 1855.) Vgl. ferner *Dorn*, Wied. Ann. 17, S. 776. 1882; ebenda 35, S. 270 u. 275. 1888.

4) *Gauss*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, S. 1.

5) *F. Kohlrausch*, Wied. Ann. 19. S. 132. 1883.

Eine scharfe Methode zur Bestimmung des Temperaturcoefficienten des magnetischen Moments hat *W. Weber*[1]) gegeben.

Zu Artikel 17 und 18.

5) In der Theorie der Ablenkungsbeobachtungen werden die Entwickelungen des Art. 16 auch einem Anfänger keine erheblichen Schwierigkeiten machen; folgende Andeutungen mögen das Verständniss des Art. 17 erleichtern.

Wegen der Gleichung

$$mT \sin u^0 + \Theta \sin(u^0 - N) = 0$$

hat man

$$mT \sin u + \Theta \sin(u - N) =$$
$$mT(\sin u - \sin u^0) + \Theta\,[\sin(u - N) - \sin(u^0 - N)].$$

Setzt man hierin

$$\sin u - \sin u^0 = \sin(u - u^0)\cos u^0 - \sin u^0\,[1 - \cos(u - u^0)],$$

vernachlässigt den zweiten Theil und transformirt die andere Sinusdifferenz entsprechend, so erhält man

$$[mT\cos u^0 + \Theta\cos(u^0 - N)]\sin(u - u^0). \text{ —}$$

Die Form der Reihe für $\operatorname{tg}(u - u^0)$ ergiebt sich so.

Zunächst beachte man, dass $f, f', f'' \ldots$ keine von $\cos(\psi - u)$ und $\sin(\psi - u)$ freien Glieder enthalten. In der Gleichung

$$(mT + \Theta)\sin(u - u^0) = fR^{-(n+1)} + f'R^{-(n+2)} + \ldots.$$

führe man ein

$$\sin(\psi - u) = \sin(\psi - u^0)\cos(u - u^0) - \cos(\psi - u^0)\sin(u - u^0)$$
$$\cos(\psi - u) = \cos(\psi - u^0)\cos(u - u^0) + \sin(\psi - u^0)\sin(u - u^0),$$

so erscheinen bei der Entwickelung $f, f', f'' \ldots$ zunächst dieselben Functionen von u^0 (statt von u) in eine Potenz von $\cos(u - u^0)$ multiplicirt, sodann Terme mit $\sin(u - u^0)$ u. s. f.

---

1) *W. Weber*, Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837. S. 38. (Werke Bd. II. S. 58.)

Da nun $\sin(u - u^0)$ von der Grössenordnung $R^{-(n+1)}$ ist und $\cos(u - u^0)$ nur um Terme der Ordnung $R^{-(2n+2)}$ von 1 sich unterscheidet, so wird man, wenn noch der Kürze wegen

$$f = mM \times$$
$$\left\{\begin{array}{l}[n\cos(\psi - U)\sin(\psi - u^0) + \sin(\psi - U)\cos(\psi - u^0)]\cos(u - u^0)\\ -[n\cos(\psi - U)\cos(\psi - u^0) - \sin(\psi - U)\sin(\psi - u^0)]\sin(u - u^0)\end{array}\right\}$$
$$= mM\{C\cos(u - u^0) - S\sin(u - u^0)\}$$

gesetzt wird, haben:

$$(mT + \Theta)\sin(u - u^0)$$
$$= mM\{C\cos(u - u^0) - S\sin(u - u^0)\}R^{-(n+1)}$$
$$+ f_0' R^{-(n+2)} + f_0'' R^{-(n+3)} + \ldots f_0^{(n+1)} R^{-(2n+2)}$$
$$+ \Phi,$$

wo Φ die weiteren Terme zusammenfasst, welche nicht mehr so einfach gebildet sind und der Index 0 die Substitution von u^0 statt u andeutet.

Man schaffe nun das Glied mit $S\sin(u - u^0)$ auf die linke Seite, dividire mit

$$\{(mT + \Theta) + mMSR^{-(n+1)}\}\cos(u - u^0)$$

und entwickele nach Potenzen von R.

Man erhält dann unter Berücksichtigung der oben über $\cos(u - u^0)$ gemachten Bemerkung

$$\operatorname{tg}(u - u^0) =$$
$$\frac{mMC}{mT + \Theta} R^{-(n+1)} + \frac{f_0'}{mT + \Theta} R^{-(n+2)} + \ldots$$
$$\frac{f_0^{(n)}}{mT + \Theta} R^{-(2n+1)} + \left\{\frac{f_0^{(n+1)}}{mT + \Theta} - \frac{m^2M^2SC}{(mT+\Theta)^2}\right\} R^{-(2n+2)}$$
$$+ \Phi',$$

indem mit Φ' die weiteren Glieder angedeutet werden.

Diese Formel enthält zunächst das Resultat von *Gauss* für $\operatorname{tg}(u - u^0)$ und führt einfach zu den Entwickelungen des Art. 18.

Da $\operatorname{arctg}\alpha = \alpha - \frac{1}{3}\alpha^3 + \ldots$, so unterscheidet sich eine für $u - u^0$ abzuleitende Reihe von der vorigen erst um Terme der Ordnung $-(3n + 3)$.

Aendert man den Winkel ψ um π, so wechseln f', f''' ... ihr Zeichen, während S und C denselben Werth behalten. Aus den Mittelwerthen $\frac{1}{2}(u' + u''')$ und $\frac{1}{2}(u'' + u'''')$ fallen also f', f''' ... heraus.

Vermehrt man andererseits U um π, so gehen S und C in ihr Gegentheil über. Im Falle der Natur ($n = 2$) werden also in der Combination $\frac{1}{4}(u' - u'' + u''' - u'''')$ die Terme mit R^{-4} und R^{-6} sich herausheben und demnach auch $\operatorname{tg}\frac{1}{4}(u' - n'' + u''' - u'''')$ die von *Gauss* angegebene Form haben[1]:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{4}(u' - u'' + u''' - '''') = LR^{-3} + L'R^{-5} + L''R^{-7} + \ldots$$

1) Vgl. auch *Riecke*, Pogg. Ann. 149. S. 62. 1873, und Wied. Ann. 8. S. 299. 1879.

Halle a. S., 22. Sept. 1893.

E. Dorn.

Druck von Breitkopf & Härtel in Leipzig.

Allgemeine Bemerkungen

Die Bibliographie sowie das Namens- und das Sachregister beziehen sich auf die Seiten 1 bis 594 des vorliegenden Bandes. Dieser Teil enthält sowohl den Gauß'schen Text in deutscher Übersetzung als auch gegebenenfalls Kommentare bzw. Anmerkungen dazu.

Ein * hinter der Seitenzahl bedeutet, dass der Titel, der Name oder der Begriff nicht von Gauß selbst, sondern von einem Kommentator bzw. in den Anmerkungen erwähnt wurde. Eckige Klammern [ ] bedeuten, dass dieser Name bzw. dieser Begriff nicht im vorliegenden Text an dieser Stelle vorkommt, aber gemeint ist, d. h. erschlossen wurde.

Bibliographie der zitierten Werke, nach Autoren und chronologisch geordnet

Gauß ging mit bibliographischen Hinweisen nicht allzu sorgfältig um, in den Originaltexten und so auch in deren Übersetzungen sind die Angaben oft unvollständig. Die Angaben wurden hier, soweit wie möglich, ergänzt. Auch wurde in die Bibliographie die von den Kommentatoren erwähnte Literatur aufgenommen, soweit sie im vorliegenden Band steht. Wenn nötig, wurden auch in diesem Fall die bibliographischen Angaben vervollständigt. Für Autoren, von denen Gesammelte Werke vorliegen, wurden auch diese erwähnt.

Wurden von einem Autor mehrere Werke zitiert, so wurden die einzelnen Werke chronologisch nach dem Erscheinungsjahr und nicht nach dem Jahr des Bandes, aufgelistet. In der jeweils letzten Zeile sind die Seiten angegeben, auf welchen das darüber stehende Werk zitiert wird.

Im Falle der „Annalen der Physik" bzw. der „Annalen der Physik und Chemie" wurde der jeweilige Herausgeber noch in Klammern dazugesetzt, da im Text oftmals nur dieser im Zusammenhang mit „Annalen" genannt wird.

Abel, Niels Henrik
1826
Untersuchungen über die Reihe
$$1+\frac{m}{1}x+\frac{m\cdot(m-1)}{1\cdot 2}x^2+\frac{m\cdot(m-1)\cdot(m-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^3+......u.s.w.$$
Journal für die reine und angewandte Mathematik 1, 1826, S. 311–339. In: Oeuvres complètes 1, Christiania 1881, S. 219–250.
160*

D'Alembert, Jean-Baptiste Le Rond
1749/50
Recherches sur le calcul intégral. Histoire de l'Académie royale des sciences et belles lettres de Berlin; 1. und 2. Teil 1746, Berlin 1749, S. 182–200, 200–224; 3. und 4. Teil 1748, Berlin 1750, S. 249–274, 274–291.
8

Aoust, Louis
1850
Sur les développées imparfaites conjuguées des courbes planes. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris 30, 1850, S. 522–524.
453*

1861
Des coordonnées curvilignes se coupant sous un angle quelconque. Journal für die reine und angewandte Mathematik 58, 1861, S. 352–368.
453*

1862
Théorie géométrique des coordonnées curvilignes quelconques. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris 54, 1862, S. 461–463.
453*

1863
Sur la courbure des surfaces. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris 57, 1863, S. 217–219.
453*

1868
Sur la courbure des surfaces. Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences Paris 67, 1868, S. 768–771.
453*

Beltrami, Eugenio
1864–65
Ricerche di analisi applicata alla geometria. Giornale di matematiche 2, 1864, S. 267–282, 297–306, 331–339, 355–375; 3, 1865, S. 15–22, 33–41, 82–91, 228–240, 311–314. In: Opere 1, Milano 1902, S. 107–198.
453*

1865
Sulla flessione delle superficie rigate. Annali di matematica pura ed applicata 7, 1865, S. 105–138. In: Opere 1, Milano 1902, S. 208–243.
453*

1868a
Saggio di interpretazione della geometria non-euclidea. Giornale di matematiche 6, 1868, S. 284–312. In: Opere 1, Milano 1902, S. 374–405.
453*

1868b
Sulla teoria generale delle superficie. Atti dell'Ateneo Veneto (2) 5, 1868, S. 535–542. In: Opere 2, Milano 1904, S. 55–62.
452*

1868c
Sulla teorica dei parametri differenziali. Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna (2) 8, 1868, S. 551–590. In: Opere 2, Milano 1904, S. 74–118.
453*

1868–69
Teoria fondamentale degli spazii di curvatura costante. Annali di matematica pura ed applicata (2) 2, 1868–69, S. 232–255. In: Opere 1, Milano 1902, S. 406–429.
453*

1869
Zur Theorie des Krümmungsmaasses. Mathematische Annalen 1, 1869, S. 575–582. In: Opere 2, Milano 1904, S. 119–128.
453*

Bertrand, Joseph
1848
Démonstration d'un théorème de M.Gauss. Journal des mathématiques pures et appliquées 13, 1848, S. 80–82.
452*

1864
Traité de calcul différentiel et de calcul intégral. Bd.1, Calcul différentiel. Paris 1864.
450*

Bianchi, Luigi
1880
Ueber die Flächen mit constanter negativer Krümmung. Mathematische Annalen 16, 1880, S. 577–582. In: Opere 5, Rom 1957, S. 89–95.
453*

1882
Sulle superficie a curvatura costante positiva. Giornale di matematiche 20, 1882, S. 287–292. In: Opere 5, Rom 1957, S. 96–101.
453*

Biot, Jean Baptiste
1806
Recherches sur le calcul aux différences partielles, et sur les attractions des sphéroides. Mémoires de l'Institut des sciences, lettres et arts, sciences mathématiques et physiques 6, 1806, S. 201–218.
165 f.

Böklen, Otto
1884
Analytische Geometrie des Raumes. 2. Aufl., Stuttgart 1884.
448*

Bonnet, Ossian Pierre
1851
Note sur quelques points de la théorie des surfaces. Journal de mathématiques pures et appliquées 16, 1851, S. 191–192.
453*

1865, 1867
Mémoire sur la théorie des surfaces applicables sur une surface donnée. Journal de l'école polytechnique 24, cahier 41, 1865, S. 209–230 und 25, cahier 42, 1867, S. 1–151.
453*

Bougainville, Louis-Antoine de
1754, 1756
Traité du calcul intégral. 2 Bde, Paris 1754, 1756.
8

Bour, Edmond
1862
Théorie de la déformation des surfaces. Journal de l'école polytechnique 22, cahier 39, 1862, S. 1–148.
452*, 453*

Brahe, Tycho
1602
Astronomiae instauratae Progymnasmatum. 3 Teile, Prag 1602. In: Opera omnia 2, Kopenhagen 1915, S. 1–303, 305–435 und 3, Kopenhagen 1916, S. 1–330.
45

Braunmühl, Anton von
1879
Ueber Enveloppen geodätischer Linien. Mathematische Annalen 14, 1879, S. 557–566.
454*

Brill, Alexander von
1883
Zur Theorie der geodätischen Linien und des geodätischen Dreiecks. Abhandlungen der Bayerischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Classe, 14, 2. Abtheilung, 1883, S. 109–140.
458*

[Brunacci, Vincenzo]
1816
Sulla dottrina dell'attrazione capillare del Sig. La-Place. Giornale di fisica, chimica, storia naturale, medicina ed arti 9, 1816, S. 7–20, 127–134, 163–173, 241–249, 343–351.
462

Casorati, Felice
1889
Nuova misura della curvatura delle superficie. Rendiconti, Reale Istituto Lombardo di scienze e lettere (2) 22, 1889, S. 335–346.
450*

Chelini, Domenico
1868
Della curvatura delle superficie con metodo diretto ed intuitivo. Memorie dell'Accademia delle scienze dell'Istituto di Bologna (2), 8, 1868, S. 27–76.
452*

Christoffel, Elwin Bruno
1868
Allgemeine Theorie der geodätischen Dreiecke. Abhandlungen der Königlichen Preußischen Akademie der Wissenschaften in Berlin 1868, Mathematische Abhandlungen, S. 119–176.
458*

Cotes, Roger
1722
Harmonia mensurarum, sive analysis, synthesis per rationum et angulorum mensuras promotae. Accedunt alia opuscula mathematica. Cambridge 1722.
196, 208

Darboux, Gaston
1883
Sur les cercles géodésiques. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des sciences Paris 96, 1883, S. 54–56.
454*

Daviet de Foncenex, François
1759
Réflexions sur les quantités imaginaires. Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis 1, 1759, S. 113–146.
18, 21

1760/61
Eclaircissemens pour le mémoire sur les quantités imaginaires. Miscellanea philosophico-mathematica societatis privatae Taurinensis 2, 1760–61, S. 337–344.
21

Diguet
1848
Note (Anhang zu Bertrand 1848). Journal de mathématiques pures et appliquées 13, 1848, S. 83–86.
452*

Dini, Ulisse
1870/71
Sopra alcune formule generali della teoria delle superficie, e loro applicazioni. Annali di matematica pura ed applicata (2) 4, 1870–71, S. 175–206. In: Opere 1, Rom 1951, S. 628–664.
453*

Dirichlet, Gustav Peter Lejeune
1836
Sur les intégrales Eulériennes. Journal für die reine und angewandte Mathematik 15, 1836, S. 258–263. In: Werke 1, Berlin 1889, S. 271–278.
158*

Dorn, Ernst
1882
Die Reduction der Siemens'schen Einheit auf absolutes Maass. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) N.F. 17, 1882, S. 773–816.
591*

1888
Ueber den Einfluss des in Stahlmagneten inducirten Magnetismus auf einige Beobachtungsmethoden. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) N.F. 35, 1888, S. 270–275.
591*

1888
Beiträge zum Verhalten harter, stark magnetisirter Stahlstäbe gegen schwache magnetisirende Kräfte. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) N.F. 35, 1888, S. 275–290.
591*

Enneper, Alfred
1867 und 1868
Analytisch-geometrische Untersuchungen. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1867, S. 232–264, 277–300; 1868, S. 258–277, 421–443.
453*

1874
Bemerkungen zu den analytisch-geometrischen Untersuchungen. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1874, S. 125–151.
453*

1874
Über ein geometrisches Problem. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1874, S. 474–485.
453*

1875
Bemerkungen über die Biegung einiger Flächen. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1875, S. 129–162.
453*

1876
Bemerkungen über einige Flächen von constantem Krümmungsmaaß. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1876, S. 597–619.
453*

Escherich, Gustav
1875
Ableitung des allgemeinen Ausdruckes für das Krümmungsmaass der Flächen. Archiv der Mathematik und Physik 57, 1875, S. 385–391.
452*

Euler, Leonhard
1744
Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici latissimo sensu accepti. Lausanne und Genf 1744. (Eneström Nr. 65). In: Opera omnia (1) 24, Bern 1952.
453*

1748
Introductio in analysin infinitorum. 2 Bde, Lausanne 1748. (Eneström Nr. 101, 102). In: Opera omnia (1) 8, Leipzig und Berlin 1922 und (1) 9, Genf 1945.
25

1751
Recherches sur les racines imaginaires des équations. Mémoires de l'Académie des sciences de Berlin 5 (1749) 1751, S. 222–288. (Eneström Nr. 170). In: Opera omnia (1) 6, Leipzig und Berlin 1921, S. 78–147.
13, 16, 19

1755
Institutiones calculi differentialis. Petersburg 1755. (Eneström Nr. 212). In: Opera omnia (1) 10, Leipzig und Berlin 1913.
11, 116

1767
Recherches sur la courbure des surfaces. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin (1760) 1767, S.119–143. (Eneström Nr. 333). In: Opera omnia (1) 28, Lausanne 1955, S. 1–22.
451*

1768–1770
Institutiones calculi integralis. Petersburg 1768, 1769, 1770. (Eneström Nr. 342, 366, 385). In: Opera omnia, Leipzig und Berlin, (1) 11, 1913; (1) 12, 1914; (1) 13, 1914.
119

1793
De termino generali serierum hypergeometricarum. Nova acta academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 7 (1789) 1793, S 42–63. (Eneström Nr. 652). In: Opera omnia (1) 16,1, Leipzig und Berlin 1933, S. 139–162.
160*

Fechner, Gustav Theodor
1842
Vom vorübergehenden Magnetismus, welcher durch galvanische Wirkung in Stahl erregt wird. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 55, 1842, S. 189–208.
591*

Fourier, Jean Baptiste Joseph
1822
Théorie analytique de la chaleur. Paris 1822. In: Oeuvres 1, Paris 1888.
583*

Gauß, Carl Friedrich
1808
Auszug aus einem Schreiben des Herrn Professors Gauß, Göttingen, am 25. Januar 1808: Beobachtungen des Cometen und Vergleichung mit den Elementen. Beobachtungen der Vesta. Neue Elemente der Pallas. Untersuchungen über die Juno und die Ephemeride für ihren Lauf im Jahre 1808. Über allgemeine Aberrations- und Nutations-Tafeln. Monatliche Correspondenz 17, 1808, S. 182–188. Gekürzt in Werke 6, S. 296–298.
59

1809
Theoria motus corporum coelestium in sectionibus conicis solem ambientium. (Theorie der Bewegung der Himmelskörper welche in Kegelschnitten die Sonne umlaufen). Hamburg 1809. In: Werke 7, S. 1–280.
61 f., 64, 69–71, 99, 134, 319, 326 f., 338, 348, 372

1809
Methodum peculiarem elevationem poli determinandi explicat simulque praelectiones
suas proximo semestri habendas indicat D. Carolus Fridericus Gauss. [Auszug in:] Monatliche Correspondenz 19, 1809, S. 134–140. Nicht in Werke.
46

1810
Pallas [Beobachtungen]. Göttingische Gelehrte Anzeigen 1810, S. 305–308 (24. Februar 1810, 32. Stück). In: Werke 6, S. 317–318.
59

1811
Disquisitio de elementis Palladis ex oppositionibus annorum 1803, 1804, 1805, 1807, 1808, 1809. (Die Untersuchung über die elliptischen Elemente der Pallas). Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 1, (1808–1811) 1811, commentationes mathematicae, 26 S. In: Werke 6, S. 1–24.
338, 372

1811
Zusatz zu Art.90 und 100 der Theoria motus corporum coelestium. Astronomisches Jahrbuch 1814, Berlin 1811, S. 256 f. In: Werke 6, S. 334 f.
134

1813
Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha(\alpha+1)\beta(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha(\alpha+1)(\alpha+2)\beta(\beta+1)(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma(\gamma+1)(\gamma+2)}x^3+etc.$$

Pars prior. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 2 (1811–1813) 1813, commentationes classis mathematicae, 46 S. In: Werke 3, S. 123–162.
220, 223, 225, 308, 312

1813
Anzeige: Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata. Göttingische Gelehrte Anzeigen 1813, S. 545–552 (5. April 1813, 55. Stück). In: Werke 5, S. 279–285.
189*

1813
Theoria attractionis corporum sphaeroidicorum ellipticorum homogeneorum, methodo nova tractata. (Theorie der Anziehung homogener Ellipsoiden). Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 2, (1811–1813), 1813, commentationes classis mathematicae, 24 S. In: Werke 5, S. 1–22.
449*

1816
Bestimmung der Genauigkeit der Beobachtungen. Zeitschrift für Astronomie und verwandte Wissenschaften 1, 1816, S.185–197. In: Werke 4, S. 109–117.
348

1822
Auszug aus einem Schreiben des Herrn Hofraths Gauß an den Herausgeber [H. C. Schumacher]. Göttingen 1822, Nov. 10.: Stand der Triangulirung. Astronomische Nachrichten 1, 1822, Nr. 24, Sp. 441–444, Dreieckskarte zwischen Sp. 456/7. In: Werke 9, S. 397–400, dort ohne Karte.
390

1823
Theoria combinationis observationum erroribus minimis obnoxiae, pars prior, pars secunda. Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 5 (1819–1822) 1823, commentationes classis mathematicae, S. 33–62; S. 63–90. In: Werke 4, S. 1–26, 27–53.
359, 361, 376–379

1825
Allgemeine Auflösung der Aufgabe: Die Theile einer gegebnen Fläche auf einer andern gegebnen Fläche so abzubilden, dass die Abbildung dem Abgebildeten in den kleinsten Theilen ähnlich wird. Astronomische Abhandlungen, hrsg. von H. C. Schumacher, 3. Heft, 1825, S. 1–30. In: Werke 4, S. 189–216.
449*

1827
Anzeige: Disquisitiones generales circa superficies curvas. Göttingische Gelehrte Anzeigen 1827 (5. November, 177. Stück), S. 1761–1768. In: Werke 4, S. 341–347.
449* f.

1828
Disquisitiones generales circa superficies curvas. (Allgemeine Flächentheorie). Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 6, (1823–1827) 1828, commentationes classis mathematicae, S. 99–146. In: Werke 4, S. 217–256.
484, 495, 502, 521*, 526* f.

1832
Anzeige: Intensitas vis magneticae terrestris ad mensuram absolutam revocata. Göttingische Gelehrte Anzeigen 1832, S. 2041–2058 (24. December, 205. Stück; 27. December, 206. und 207. Stück). In: Werke 5, S. 293–304.
583*

1837
Einleitung. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836, Göttingen 1837, S. 3–12. In: Werke 5, S. 345–351.
585*

1838
Ueber ein neues, zunächst zur unmittelbaren Beobachtung der Veränderungen in der Intensität des horizontalen Theils des Erdmagnetismus bestimmtes Instrument. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, Göttingen 1838, S. 1–19. In: Werke 5, S. 357–373.
591*

1840
Allgemeine Lehrsätze in Beziehung auf die im verkehrten Verhältnisse des Quadrats der Entfernung wirkenden Anziehungs- und Abstossungs-Kräfte. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1839, Leipzig 1840, S. 1–51; ferner in Ostwald's Klassiker Nr. 2, Leipzig 1889. In: Werke 5, S. 195–242.
189*, 543*

1850
Recherches sur la théorie générale des surfaces courbes. In: Gaspard Monge, Application de l'Analyse à la Géométrie, 5. Aufl., ed. J. Liouville, Paris 1850, S. 505–546.
448*, 455*

1862
Recherches générales sur les surfaces courbes. Übs. von Tiburce Abadie. Nouvelles annales 11, 1862, S. 195–252.
448*

1884
Untersuchungen über die allgemeine Theorie der krummen Flächen. Übs. von Otto Böklen. In: Otto Böklen, Analytische Geometrie des Raumes, 2. Aufl. Stuttgart 1884, S. 198–232.
448*

Germain, Sopie
1831
Mémoire sur la courbure des surfaces. Journal für die reine und angewandte Mathematik 7, 1831, S. 1–29.
450*

Hansen, Peter Andreas
1868
Geodätische Untersuchungen. Mit Supplement. Abhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse 8, 1868, S. 1–224.
458*

1871
Fortgesetzte geodätische Untersuchungen bestehend in zehn Supplementen zur Abhandlung von der Methode der kleinsten Quadrate im allgemeinen und ihrer Anwendung auf die Geodäsie. Abhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse 9, 1871, S. 1–184.
458*

Hertz, Heinrich
1885
Über die Dimensionen des magnetischen Pols in verschiedenen Maasssystemen. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) 24, 1885, S. 114–118.
584*

Hoppe, Reinhold Ernst Eduard
1876
Principien der Flächentheorie. Archiv der Mathematik und Physik 59, 1876, S. 225–322.
452*

1876
Principien der Flächentheorie. Leipzig 1876.
452*

Humboldt, Alexander von
1801
Neue physikalische Beobachtungen im spanischen Amerika. Aus Briefen an Fourcroy und Lalande. Annalen der Physik (Gilbert) 7, 1801, S. 329–347.
585*

Humboldt, Alexander von; Biot, Jean Baptiste
1805
Ueber die Variationen des Magnetismus der Erde in verschiedenen Breiten. Annalen der Physik (Gilbert) 20, 1805, S. 257–298.
585*

Ivory, James
1809
On the Attractions of Homogeneous Ellipsoids. Philosophical Transactions of the Royal Society of London 1809, Teil 2, S. 345–372.
188

Jacobi, Carl Gustav Jacob
1837
Demonstratio et amplificatio nova theorematis Gaussiani de quadratura trianguli in dato superficie e lineis brevissimis formati. Journal für die reine und angewandte Mathematik 16, 1837, S. 344–350. In: Gesammelte Werke 7, Berlin 1891, S. 26–33.
455*

1838
Zur Theorie der Variations-Rechnung und der Differential-Gleichungen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 17, 1838, S. 68–82. In: Gesammelte Werke 4, Berlin 1886, S. 39–55.
454*

1839
Note von der geodätischen Linie auf einem Ellipsoid und den verschiedenen Anwendungen einer merkwürdigen analytischen Substitution. Journal für die reine und angewandte Mathematik 19, 1839, S. 309–313. In: Gesammelte Werke 2, Berlin 1882, S. 59–63.
454*

1866
Vorlesungen über Dynamik, hrsg. von A. Clebsch. Berlin 1866. In: Gesammelte Werke, Supplementband, 2. Aufl. Berlin 1884.
454*

Kalähne, Alfred
1902
Ueber die Benutzung stehender Capillarwellen auf Flüssigkeiten als Beugungsgitter und die Oberflächenspannung von Wasser und Quecksilber. Annalen der Physik und Chemie (Drude) (4) 7, 1902, S. 440–476.
530*

Killing, Wilhelm
1885
Die nicht-euklidischen Raumformen in analytischer Behandlung. Leipzig 1885.
451*

Klügel, Georg Simon
1803–1836
Mathematisches Wörterbuch oder Erklärung der Begriffe, Lehrsätze, Aufgaben und Methoden der Mathematik. 5 Theile, ab Theil 4 fortgesetzt von Carl Brandan Mollweide, vollendet von Johann August Grunert, Leipzig 1803, 1805, 1808, 1823, 1831; 2 Supplementbände 1836.
158*, 160*

Knoblauch, Johannes
1888
Einleitung in die allgemeine Theorie der Flächen. Leipzig 1888.
452*

Kohlrausch, Friedrich
1870
Leitfaden der praktischen Physik zunächst für das physikalische Prakticum in Göttingen. Leipzig 1870 und öfter.
582*

1883
Ueber die Messung localer Variationen der erdmagnetischen Horizontalintensität. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) N.F. 19, 1883, S. 130–143. In: Gesammelte Abhandlungen 1, Leipzig 1910, S.569–581.
591*

Krafft, Wolfgang Ludwig
1802
Essai sur la méthode de trouver la latitude sur mer par les hauteurs simultanées des deux astres. Nova acta Academiae scientiarum imperialis Petropolitanae 13, 1802, S. 477–493.
43f, 47

Kramp, Christian
1798/9
Analyse des réfractions astronomiques et terrestres. Paris 1798, ebenso Strasbourg 1798 und Leipzig 1799.
158*

Krayenhoff, Cornelis Rudolphus Theodorus
1815
Précis historique des opérations géodésiques et astronomiques faites en Hollande pour servir de base à la topographie de cet état. Den Haag 1815.
385

Kreichgauer, D.
1885
Zur Bestimmung von Trägheitsmomenten durch Schwingungsversuche. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) N.F. 25, 1885, S. 273–308.
591*

Kronecker, Leopold
1869
Ueber Systeme von Functionen mehrerer Variabeln. Erste und Zweite Abhandlung. Monatsbericht der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1869, S. 159–193, 688–698. In: Werke 1, Leipzig 1895, S. 175–212, 213–226.
451*

Kummer, Eduard
1836
Über die hypergeometrische Reihe. Journal für die reine und angewandte Mathematik 15, 1836, S. 39–83, 127–172. In: Collected Papers 2, Berlin, Heidelberg, New York 1975, S. 75–166.
157*, 160*

Lagrange, Joseph Louis
1772
Sur la forme des racines imaginaires des équations. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin 1772, S. 222–258. In: Oeuvres 3, Paris 1869, S. 477–516.
23

1773
Sur l'attraction des sphéroides elliptiques. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin 1773, S. 121–148. In: Oeuvres 3, Paris 1869, S. 617–658.
165

1793
Sur les sphéroides elliptiques. Nouveaux Mémoires de l'Académie royale des sciences et belles-lettres de Berlin 1792–1793, S. 258–270. In: Oeuvres 5, Paris 1870, S. 643–660.
165

Laplace, Pierre Simon
1784
Théorie du mouvement et de la figure elliptique des planètes. Paris 1784. Nicht in den Oeuvres completes.
165

1785
Théorie des attractions des sphéroides et de la figure des planètes. Mémoires de l'Académie royale des sciences 1782, Paris 1785, S. 113–196. In: Oeuvres complètes 10, Paris 1894, S. 341–419.
165

1799–1825
Traité de Mécanique céleste. Bd.1, 2, Paris 1799; Bd.3, 1802, Bd.4, 1805; Bd.5, 1823–25. 2. Aufl. in 4 Bänden 1829–1839. In: Oeuvres complètes Bd.1–5, Paris 1878–1882.
165

1806
Sur l'action capillaire. Journal de physique 63, 1806, S. 474–477. Correspondance de l'Ècole polytechnique 1, 1804–1808, S. 246–256. In: Oeuvres complètes 14, Paris 1912, S. 233–246.
462–464

1807
Supplément à la théorie de l'action capillaire. Journal de physique 65, 1807, S. 88–95. Nicht in den Oeuvres completes.
463 f.

Legendre, Adrien-Marie
1785
Recherches sur l'attraction des sphéroides. Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savans 10, 1785, S. 411–434.
165

1789
Mémoire sur les opérations trigonométriques, dont les resultats dépendent de la figure de la terre. Mémoires de l'Académie royale des sciences 1787, Paris 1789, S. 352–383.
458*

1791
Mémoire sur les intégrales doubles. Mémoires de l'Acadadémie royale des sciences 1788, Paris 1791, S. 454–486.
165

1811–1817
Exercises de calcul intégral sur divers ordres de transcendantes et sur les quadratures. 3 Bde, Paris 1811, 1817, 1816.
159*

1822
Die Elemente der Geometrie und der ebenen sphärischen Trigonometrie. Aus dem Franz. übs. von A. L. Crelle, Berlin 1822 und öfter.
458*

1825–1828
Traité des fonctions elliptiques et des intégrales Euleriennes, avec des tables pour en faciliter le calcul numérique. 3 Bde, Paris 1825–1828.
158*

Lie, Sophus
1879/80
Zur Theorie der Flächen konstanter Krümmung. Archiv for mathematik og naturvidenskab 4, 1879, S. 345–354, 355–366 und 5, 1880, S. 282–306, 328–358, 518–541. In: Gesammelte Abhandlungen 3,1, Leipzig und Kristiania 1922, S. 367–374, 375–386, 398–418, 421–444, 447–465.
453*

Liouville, Joseph
1847
Sur un théorème de M. Gauss concernant le produit des deux rayons de courbure principaux en chaque point d'une surface. Journal de mathématiques pures et appliquées 12, 1847, S .291–304.
452*

Lipschitz, Rudolph
1870
Entwickelung einiger Eigenschaften der quadratischen Formen von n Differentialen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 71, 1870, S. 274–287, 288–295.
451*

1876
Ein Beitrag zur Theorie der Krümmung. Journal für die reine und angewandte Mathematik 81, 1876, S. 230–242.
451*

1882/83
Untersuchungen über die Bestimmung von Oberflächen mit vorgeschriebenen, die Krümmungsverhältnisse betreffenden Eigenschaften. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1882, 2. Teil, S. 1077–1087 und 1883, 1. Tei1, S. 169–188.
452* f.

Maclaurin, Colin
1742
A Treatise of Fluxions. 2 Bde, Edinburgh 1742.
165

1752
De causa physica Fluxus et Refluxus Maris. Recueil des pièces qui ont remporté les prix de l'Académie royale des sciences 4, 1738–1740, Paris 1752, S. 193–234.
164, 165

Mangoldt, Hans von
1881
Ueber diejenigen Punkte auf positiv gekrümmten Flächen, welche die Eigenschaft haben, dass die von ihnen ausgehenden geodätischen Linien nie aufhören, kürzeste Linie zu sein. Journal für die reine und angewandte Mathematik 91, 1881, S. 23–53.
454*

1883
Ueber die Classification der Flächen nach der Verschiebbarkeit ihrer geodätischen Dreiecke. Journal für die reine und angewandte Mathematik 94, 1883, S. 21–40.
458*

Meunier, Jean Baptiste
1785
Sur la courbure des surfaces. Mémoires de mathématique et de physique présentés à l'Académie royale des sciences par divers savans 10, 1785, S. 477–510.
451*

Meyer, Georg
1898
Die Oberflächenspannung des Quecksilbers. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) (2) 66, 1898, S. 523–529.
530*

Minding, Ferdinand
1830
Bemerkung über die Abwickelung krummer Linien von Flächen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 6, 1830, S. 159–161.
453*

1839
Wie sich entscheiden läßt, ob zwei gegebene krumme Flächen auf einander abwickelbar sind oder nicht; nebst Bemerkungen über die Flächen von unveränderlichem Krümmungsmaaße. Journal für die reine und angewandte Mathematik 19, 1839, S. 370–387.
453*

Monge, Gaspard
1850
Application de l'analyse à la géométrie. 5. Aufl. hrsg. von J. Liouville, Paris 1850.
448*, 452*, 454*, 457*

Newton, Isaac
1687
Philosophiae naturalis principia mathematica. London 1687, 2. Aufl. Cambridge 1713. 3. Aufl. London 1726.
164

Ostwald, Wilhelm
1891
Studien zur Energetik. Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse 43, 1891, S. 271–288 und 44, 1892, S. 211–237.
584*

Petit, Alexis Thérèse
1817
Observations sur les Mémoires que M.Brunacci a insérés dans Giornale di Fisica, Chimica, etc. relativement à la théorie des tubes capillaires. Annales de chimie et de physique (2) 4, 1817, S. 54–63.
462

Plana, Giovanni
1811
Sulla teoria dell'attrazione degli sferoidi elittici. Memorie di matematica e di fisica della Società italiana delle scienze 15, 1811, Teil 1, S. 370–390.
166

Plücker, Julius
1828
Ueber die Krümmung einer beliebigen Fläche in einem gegebenen Puncte. Journal für die reine und angewandte Mathematik 3, 1828, S. 324–336. In: Gesammelte Abhandlungen, Leipzig 1895, S. 89–102.
451*

Poisson, Siméon-Denis
1825
Solution d'un Problème relatif au Magnétisme terrestre. Connaissance des tems 1828, Paris 1825, S. 322–330.
586*

Puiseux, Victor
1848
Sur le même théorème (siehe Liouville 1847). Journal de mathématiques pures et appliquées 13, 1848, S. 87–90.
452*

Quincke, Georg Hermann
1858
Ueber die Capillaritätsconstante des Quecksilbers. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 105, 1858, S. 1–48.
530*

1870
Ueber Capillaritäts-Erscheinungen an der gemeinschaftlichen Oberfläche zweier Flüssigkeiten. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 139, 1870, S. 1–89.
530*

1894
Ueber die Messung der Oberflächenspannung des Wassers und Quecksilbers in Capilarröhren. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) (2) 52, 1894, S. 1–22.
530*

Raabe, Joseph Ludwig
1832
Untersuchungen über die Convergenz und Divergenz der Reihen. Zeitschrift für Physik und Mathematik, hrsg. von A. von Baumgartner und A. von Ettingshausen 10, 1832, S. 71–74.
158*

Riecke, Eduard
1873
Bemerkungen über die Polpunkte eines Magnets. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 29, 1873, S. 62–53.
594*

1879
Zur Lehre von den Polen eines Stabmagnetes. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann), N.F. 8, 1879, S. 299–325.
594*

Riemann, Bernhard
1868
Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 13, 1868, S. 133–152. In: Gesammelte mathematische Werke und wissenschaftlicher Nachlass. Hrsg. von H. Weber und R. Dedekind (1. Aufl. Leipzig 1876), 2. Aufl. Leipzig 1892, S. 272–287. Neu hrsg. von Raghavan Narasimhan, Berlin, Heidelberg, New York und Leipzig 1990.
451*

Sabine, Edward
1826
Versuche zur Bestimmung der Intensitäten des Magnetismus der Erde, nebst Beobachtungen über die täglichen Oszillationen der horizontalen Magnetnadel zu Hammerfors und Spitzbergen. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 6, 1826, S. 88–124.
585*

Salvert, François, vicomte de
1882/3
Mémoire sur les ombilics coniques. Annales de la Société scientifique de Bruxelles 7, 1882–1883, S. 143–248.
451*

Scheibner, Wilhelm
1860
Über unendliche Reihen und deren Convergenz. Leipzig 1860.
159*

Schering, Ernst
1868
Erweiterung des Gaussischen Fundamentalsatzes für Dreiecke in stetig gekrümmten Flächen. Nachrichten der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen 1868, S. 389–391. In: Werke 1, Berlin 1902, S. 149–151.
458*

Schläfli, Ludwig
1871–73
Nota alla Memoria del sig.Beltrami, "Sugli spazii di curvatura costante". Annali di matematica pura ed applicata (2) 5, 1871–73, S. 178–193.
453*

Schlömilch, Oscar
1845
Handbuch der algebraischen Analysis. Jena 1845 und öfter.
157* f.

Staudt, Georg Karl Christian von
1847
Geometrie der Lage. Nürnberg 1847.
449*

Stern, Moritz Abraham
1860
Lehrbuch der algebraischen Analysis. Leipzig 1860.
158*

Stöckle, Julius
1898
Ueber die Oberflächenspannung des Quecksilbers. Annalen der Physik und Chemie (Wiedemann) (2) 66, 1898, S. 499–522.
529*

Struve, Wilhelm
1824
Ueber das Universalinstrument von Reichenbach und Ertel als Horizontalwinkelmesser. Astronomische Nachrichten 2, 1824, Nr. 47, Sp. 431–440, 451–454, 457–464.
385

Sturm, Rudolf
1883
Ein Analogon zu Gauss' Satz von der Krümmung der Flächen. Mathematische Annalen 21, 1883, S. 379–384.
451*

Wallis, John
1695/1693/1699
Opera mathematica. 3 Bde, Oxford 1695, 1693 und 1699. Nachdruck Hildesheim, New York 1972.
159*

Weber, Wilhelm
1837
Bemerkungen über die Einrichtung magnetischer Observatorien und Beschreibung der darin aufzustellenden Instrumente. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1836, Göttingen 1837, S. 13–33. In: Werke 2, S. 3–19.
586*

1838
Ueber den Einfluss der Temperatur auf den Stabmagnetismus. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1837, Göttingen 1838, S. 38–57. In: Werke 2, Berlin 1892, S. 58–74.
592*

1841
Messung starker galvanischer Ströme bei geringem Widerstande nach absolutem Maasse. Resultate aus den Beobachtungen des magnetischen Vereins im Jahre 1840, Leipzig 1841, S. 83–90. In: Werke 3, Berlin 1893, S. 6–12.
583*

1851
Messung galvanischer Leitungswiderstände nach einem absolutem Maasse. Annalen der Physik und Chemie (Poggendorff) 82, 1851, S. 337–369. In: Werke 3, Berlin 1893, S. 276–300.
583*

1852
Elektrodynamische Maasbestimmungen insbesondere Widerstandsmessungen. Abhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften, mathematisch-physische Klasse 1, (1849) 1852, S. 199–381. In: Werke 3, Berlin 1893, S. 301–471.
583*

1855
Vorwort bei der Übergabe der Abhandlung: Elektrodynamische Maassbestimmungen, insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, mathematisch-physische Klasse 7, 1855, S. 55–61. In: Werke 3, S. 591–596.
583*

1856
Bestimmung der rechtwinkeligen Componenten der erdmagnetischen Kraft in Göttingen in dem Zeitraume von 1834–1853. Abhandlungen der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematische Classe, 6, (1853–1855) 1856, 46 S. In: Werke 2, Berlin 1892, S. 333–373.
591*

Weierstraß, Karl
1856
Über die Theorie der analytischen Facultäten. Journal für die reine und angewandte Mathematik 51, 1856, S. 1–60. In: Werke 1, Berlin 1894, S. 153–221.
158*

Weingarten, Julius
1861
Ueber eine Klasse auf einander abwickelbare Flächen. Journal für die reine und angewandte Mathematik 59, 1861, S. 382–393.
452* f.

1869
Ueber eine geodätische Aufgabe. Astronomische Nachrichten 73, 1869, Nr. 1733, Sp. 65–76.
458*

1882
Über die Verschiebbarkeit geodätischer Dreiecke in krummen Flächen. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1882, 1.Teil, S. 453–456.
458*

1883
Ueber die Eigenschaften des Linienelementes der Flächen von constantem Krümmungsmass. Journal für die reine und angewandte Mathematik 94, 1883, S. 181–202 und 95, 1883, S. 325–329.
453*

1884
Über die Theorie der auf einander abwickelbaren Oberflächen. Festschrift der Königlichen Technischen Hochschule zu Berlin zur Feier der Einweihung ihres neuen Gebäudes am 2. November 1884. Berlin 1884, S. 1–43.
453*

1886
Über die unendlich kleinen Deformationen einer biegsamen, unausdehnbaren Fläche. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin 1886, S. 83–91.
453*

1887
Ueber die Deformation einer biegsamen unausdehnbaren Fläche. Journal für die reine und angewandte Mathematik 100, 1887, S. 296–310.
453*

Namensregister

Sachregister

Es wurde generell die Original-Schreibweise beibehalten, insbesondere c anstelle von k, also Curve anstelle von Kurve. Kommen im Text zwei verschiedene Schreibweisen vor, z. B. Convergenz und Konvergenz, so wurden zwei Einträge gemacht, also Convergenz und Konvergenz; die Seitenangaben wurden dann wiederholt. Es wurde versucht, gleichbedeutende Begriffe unter einer Bezeichnung, einem Stichwort, festzuhalten, die weiteren Varianten wurden, manchmal in runde Klammern gesetzt, hinzugefügt.

Der dritte und letzte Band des Projektes „Gauß in deutscher Übersetzung“ umfasst 15 Arbeiten von Gauß aus den Bereichen Mathematik, Astronomie und Physik, die zwischen 1799 und 1841 erschienen. Damit liegen nunmehr alle Werke, die Gauß in lateinischer Sprache veröffentlichte, in deutscher Übersetzung vor. Wie schon die beiden Vorgängerbände, so wurde auch der vorliegende Band mit einer Bibliographie, einem Namens- und einem Sachregister ausgestattet.

Göttingen Campus

ISBN: 978-3-86395-370-6

Universitätsverlag Göttingen