Ein neues Blatt in Eulers Lorbeerkranz, durch Carl Friedrich Gauß eingeflochten

Karin Reich

Vorgelegt von Karin Reich
in der Sitzung vom 8. Januar 2010

Inhaltsverzeichnis

Abstract/Zusammenfassung

Im Jahre 1844 hatte Carl Friedrich Gauß in Göttingen eigenhändig eine Abschrift einer seltenen und in St. Petersburg nicht vorhandenen Schrift Leonhard Eulers angefertigt. Davon wusste zunächst nur der Empfänger dieser Abschrift, nämlich der Ständige Sekretär der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg, Paul Heinrich Fuß, ein Urenkel Eulers. Bereits im Jahre 1849 informierte Paul Heinrich Fuß in seiner Edition von Eulers zahlentheoretischen Schriften seine Leser über diese Gaußsche Abschrift (Euler 1849, Bd. 1, S. XXIV). Auch der Mathematiker und Mathematikhistoriker Paul Stäckel erwähnte sie in einem Aufsatz (Stäckel 1907/8, S. 38), doch zu Gesicht bekommen hatte er sie nicht. Trotz intensiver Suche blieb diese Abschrift ver-

schollen. Auch in den folgenden hundert Jahren tauchte sie trotz intensiver Suche nicht mehr auf: Der berühmte russische Eulerforscher und -kenner Gleb K. Michajlov (*1929) suchte sie vergeblich, ebenso wie der amerikanische Eulerexperte Edward Sandifer. Im Februar 2009 gelang es Elena Roussanova, in der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften das gesuchte Dokument an einer Stelle aufzuspüren, an der es bislang keiner vermutet hatte: inmitten eines Konvolutes von gedruckten Arbeiten von Euler (Roussanova 2009). Damit wurde Gauß' Abschrift zu einem Fundstück der besonderen Art.

1. Verzeichnisse von Eulers Werken

1.1. Verzeichnis von Nikolaus Fuß 1783, 1786

Als Leonhard Euler am 7./18.9.1783 in St. Petersburg verstorben war, blieb es seinem Sekretär, jungen Freund und Mitarbeiter Nikolaus Fuß vorbehalten, einen Nachruf auf den großen Gelehrten zu verfassen. Nikolaus Fuß (1755–1826) war im Jahre 1773 von Basel nach St. Petersburg ausgewandert, um dort den bereits erblindeten Leonhard Euler zu unterstützen. Er war es, der ein erstes Verzeichnis der gesammelten Werke Eulers erstellte; er veröffentlichte dieses Verzeichnis unter dem Titel „Vollständiges Verzeichniß der Schriften des Herrn Leonhard Euler" als Anhang zu seinem Nachruf (Fuß N. 1783, S. 74–124 und 1786, S. 123–181). Zwar wurde Nikolaus Fuß' Eloge bzw. sein Nachruf u.a. auch 1787 in den „Nova acta" (Euler 1787) und 1911 in den „Opera omnia" von Euler veröffentlicht[1], doch verzichtete man dort auf die Wiedergabe der Liste von Eulers Werken.

In Nikolaus Fuß' „Vollständigem Verzeichniß der Schriften des Herrn Leonhard Euler" wurden diese in drei Abteilungen eingeteilt, in „Besonders gedruckte Werke", in ein „Verzeichniß der Abhandlungen in den akademischen Sammlungen" sowie in „Ungedruckte Abhandlungen". Nikolaus Fuß erwähnte 32 Monographien, 485 Abhandlungen, die in Zeitschriften erschienen waren und die nunmehr, nach den Titeln der einzelnen Zeitschriften geordnet, in chronologischer Reihenfolge vorgeführt wurden, sowie 183 Arbeiten, die noch als Manuskripte vorlagen[2], also insgesamt 700 Werke, von denen kurz nach Eulers Tod 517 gedruckt vorlagen. Das bedeutet, dass damals etwa zwei Drittel von

1 Fuss, Nikolaus. Lobrede auf Herrn Leonhard Euler. In: Opera omnia (1) 1, Leipzig und Berlin 1911, S. XLIII–XCV.

2 Es gab noch eine weitaus größere Anzahl von ungedruckten Manuskripten, die damals aber noch nicht bekannt waren bzw. erst später aufgefunden wurden.

Eulers Werken bereits erschienen waren, während ein Drittel unpubliziert nur als Manuskript vorhanden war.

In der Folgezeit unternahm die Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg große Anstrengungen, um diese ungedruckten Arbeiten von Euler nach und nach in den Petersburger Akademieschriften zu veröffentlichen.

1.2. Verzeichnis von Paul Heinrich Fuß 1843, 1908

Paul Heinrich Fuß (1798–1855), Sohn von Nikolaus Fuß und Enkel von Johann Albrecht Euler (1734–1800), war der Nächste, der eine verbesserte Version des Schriftenverzeichnisses von Leonhard Euler erstellte. Diese Version wurde im Jahre 1843 unter dem Titel „Liste systématique des ouvrages de Léonard Euler“ veröffentlicht (Fuß P. H. 1843, Bd. 1, S. LI–CXXI). Sie umfasste 756 Nummern und war in 19 Themen gegliedert. Dieses Verzeichnis erlebte im Jahre 1908 durch Paul Stäckel und Wilhelm Ahrens eine neue Auflage. Es wurde zwar in derselben Weise gegliedert und nummeriert, aber es wurde um Berichtigungen und Zusätze aus dem Fußschen Handexemplar erweitert. Es war als eine „Vorarbeit zu einem Verzeichnis“ gedacht (Stäckel/Ahrens 1908, S. VIf, S. 79–169).

1.3. Verzeichnis von Johann Georg Hagen 1896

In der Zwischenzeit hatte Johann Georg Hagen (1847–1930) ein weiteres Verzeichnis von Eulers Schriften vorgestellt (Hagen 1896). Dieses Verzeichnis war grob in vier Serien eingeteilt: Series I: Opera Mathematica; Series II: Opera Physica; Series III: Opera Astronomica und schließlich Series IV: Opera Varii Argomenti. Diese Einteilung in Serien übernahm man auch in den ab 1911 herausgegebenen „Opera omnia“. Hagens Schriftenverzeichnis umfasste 774 Nummern gedruckter Schriften, sowie einen Appendix, der sieben Nummern unedierter Schriften, sechs Nummern unedierter Schriften, die nicht hatten aufgefunden werden können, und acht Nummern mit Schriften enthielt, die fälschlicherweise Euler zugeschrieben wurden.

1.4. Verzeichnis von Gustaf Eneström 1910–1913

Das bisher letzte Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers ist Gustaf Eneström (1852–1923) zu verdanken. Es umfasst 388 Seiten und erschien in den Jahren 1910 bis 1913. Eneström teilte die Werke Eulers in drei Abteilungen ein, in eine erste Abteilung: „Die Schriften Eulers chronologisch nach den Druckjahren geordnet", beginnend mit dem Jahr 1726 (Eneström 1910–1913, S. 1–217), hier wurden 866 Nummern vergeben; diese sind die nunmehr von allen Eulerforschern verwendeten sog. Eneströmnummern, die eine eindeutige Zuordnung der einzelnen Arbeiten Eulers ermöglichen. Ferner veröffentlichte Eneström in dieser ersten Abteilung „Nachträge" (S. 210–217) und als Anhang die „Schriften Johann Albrecht Eulers" (S. 218–222). Die zweite Abteilung war „Eulers Schriften nach der Abfassungszeit geordnet" gewidmet (S. 223–268) sowie den „Nachgelassenen Schriften Eulers, deren Abfassungszeit noch nicht näher ermittelt wurde" (S. 269–270). In der dritten Abteilung wurden Eulers Schriften in einer systematischen Ordnung aufgelistet: „Eulers Schriften nach dem Inhalt geordnet" (S. 271–340). Am Ende des Werkes befindet sich ein umfangreiches „Register" (S. 341–388). In den seit 1911 bis heute erscheinenden Bänden der „Opera omnia" Leonhard Eulers entschied man sich für eine systematische Gliederung in drei Serien, die aber nicht immer strikt eingehalten wurde. Es soll, wenn das Unternehmen abgeschlossen sein wird, alle im Eneström-Verzeichnis sowie alle erst später identifizierten Schriften Eulers enthalten, die veröffentlicht worden sind. Ergänzt werden diese drei Serien der „Opera omnia" um nach Personen geordnete Briefwechsel, die in der „Series IV A" vorgestellt werden; eine vollständige Veröffentlichung aller vorhandenen Briefe von bzw. an Euler wird nicht angestrebt.

Exkurs: Carl Friedrich Gauß' Leiste-Notizen 1794–1796

Wenig bekannt ist, dass auch Carl Friedrich Gauß ein handschriftliches Verzeichnis der Schriften Eulers hinterlassen hat. Für dieses fungierte das von Nikolaus Fuß edierte Verzeichnis als Vorbild. Dieses Gaußsche Verzeichnis befindet sich auf den ersten drei Blättern, insgesamt fünf Seiten, der sog. Leiste-Notizen[3]. Schon früh war Christian Leistes „Arithmetik und Algebra" (Leiste 1790) in Gauß' Besitz gekommen, ein genaues Datum bzw. Jahr dafür ist leider nicht bekannt. Gauß ließ dieses Werk mit weißen, leeren Blättern durchschießen, die er dann als Notizblätter verwendete. Es ist nicht genau bekannt, wann er diese Notizen angefertigt hat, wohl gegen Ende seines Studiums am Collegium Carolinum in Braunschweig oder zu Anfang seines Studiums an der Universität Göttingen (Fuchs 1978).

3 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Handbuch 1: zwei Blätter vor S. 1 sowie ein Blatt zwischen S. 4 und 5.

Auf dem ersten der eingeschossenen Blätter befindet sich eine „Vollständige Liste von Eulers Werken“, d.h. von den 32 Monographien Eulers; es sind dies dieselben wie bei Nikolaus Fuß, sie stimmen auch in der Reihenfolge überein. In den Titeln und in den bibliographischen Angaben jedoch gibt es einige Abweichungen. Nikolaus Fuß verwendete gelegentlich andere Abkürzungen, als Gauß dies tat. Auf dem zweiten und dem dritten Blatt (Seite 3, 4 und 5) mit der Überschrift „Academische Schriften“ befindet sich eine Liste mit Eulers Zeitschriftenbeiträgen.

Die Seite 3 beginnt mit einer Übersicht:

„In den		
Commentariis Acad. Sc. Petropol. v. II–XIV		74.
Novis Commentariis		179.
Novis Actis	bis T. IV p II a. 1780.	66.
		319“.

Die Anzahlen stimmen mit den Anzahlen der bei Nikolaus Fuß erwähnten Beiträge genau überein. Warum im Falle der „Novae Actae“ Eulers Beiträge nur bis zum Jahr 1780, einschließlich Teil II, gezählt wurden, wurde nicht begründet. Bei Nikolaus Fuß nämlich wurden noch 12 weitere Beiträge Eulers aus dem Jahr 1781 angeführt. Sodann folgen in Gauß’ Verzeichnis, wie bei Nikolaus Fuß, die zwei Beiträge aus den „Memoires de l’Académie Royale des Sciences à Paris“[*], elf Beiträge in den Ausgaben des „Recueil des pieces qui ont remporté les prix de l’Acad. royale des Sc. a Paris“, fünf Beiträge in den „Miscellanea Berolinensia“ ohne Titelangabe, 120 Beiträge in den „Memoires de l’Académie royale des Sciences à Berlin“ ohne Titelangabe, zwei Beiträge in den „nouv. Mem.“[4], drei Beiträge in den „Acta Eruditorum Lipsiensia“, ein Beitrag im „Journal litéraire de l’Allemagne“ sowie sechs Beiträge in den „Miscellanea Taurinensia“. Auf der letzten Seite seines Verzeichnisses erwähnt Gauß ferner drei Beiträge, die Euler in den „Memoires de la Société de Vlissingue“, in den „Ephemerides de Berlin“ sowie in den „Memoires de la Societe économique“ veröffentlicht

---

⋆ Hier wie auch im Folgenden wurde die Schreibweise des Originals beibehalten, gerade auch im Hinblick auf Gebrauch bzw. Nichtgebrauch der Akzentzeichen.

4 Gemeint sind die „Nouveaux Mémoires de l’académie des sciences et belles lettres de Berlin“.

hat[5]. Was die große Zahl der von Nikolaus Fuß aufgelisteten „Ungedruckten Abhandlungen" anbelangt[6], so berichtet Gauß interessanterweise den damals aktuellen Stand: „dazu 208 Abh. in Manuscript wovon indeß 13 schon im zweiten Bande der Opuscula[7] u. sehr viele in den Nouis actis abgedruckt sind". Man kann mit Recht behaupten, dass sich Gauß bereits in jungen Jahren einen vollständigen Überblick über das gesamte Werk Eulers, soweit es damals bekannt war, verschafft hatte.

2. Carl Friedrich Gauß und Leonhard Euler

Die „Leiste-Notizen" enden mit zwei Zitaten aus Werken von Euler[8]:

> „Ideal
>
> Speculationes mathematicae si ad earum utilitatem respicimus ad duas classes reduci debere videntur: ad priorem referendae sunt eae quae cum ad vitam communem tum ad alias artes insigne aliquod commodum afferunt, quarum propterea pretium ex magnitudine huius commodi statui solet. Altera autem classis eas complectitur speculationes, quae etsi cum nullo insigni commodo sunt coniunctae, tamen ita sunt comparatae ut ad fines analyseos promovendos viresque ingenii acuendas occasionem praebeant. Cum enim plurimas speculationes, unde maxima utilitas exspectari posset, ob solum analyseos defectum, deserere cogamur, non minus pretium iis speculationibus statuendum videtur quae haud contemnenda analyseos incrementa pollicentur.
>
> Euler . Comm. Nov. Petrop. VI. p. 58
>
> Il y a des verités generales que notre esprit est prêt d'embrasser aussitôt qu'il en reconnoit la justesse dans quelques cas particuliers.
>
> Euler. Histoire de l'Ac. de Berlin 1748. p. 204."[9]

5 Siehe (Fuß N. 1786, S. 165); gemeint sind dabei die „Verhandelingen uitgegeven door het zeeuwsch Genootschap der Wetenschappen te Vlissingen" (E 530), das in Berlin erschienene „Astronomische Jahrbuch oder Ephemeriden" (E 529a) und die „Abhandlungen der freyen ökonomischen Gesellschaft zu St. Petersburg" (E 341).

6 Siehe (Fuß N. 1786, S. 165–181).

7 (Euler 1862).

8 Handbuch 1, letzte Seite.

9 Aus Euler, Leonhard: Observationes de comparatione arcuum curvarum irrectificabilium. (E 252). In: Novi commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 6 (1756/7) 1761, S. 58–84, hier S. 58. In: Opera omnia (1) 20, Leipzig und Berlin 1912, S. 80–107, hier S. 81. Gauß hat den Text an zwei Stellen

So machen bereits die Leiste-Notizen klar, welch überaus große Bedeutung Euler für den jungen Gauß hatte. Es ist daher nicht weiter verwunderlich, dass Gauß, als er in Göttingen 1795 sein Studium begann, auch zahlreiche Werke Eulers in der dortigen Universitätsbibliothek auslieh und danach trachtete, für seine eigene Bibliothek möglichst viele der Werke Eulers erwerben zu können. Manche dieser Euleriana in der Gauß-Bibliothek enthalten Einträge, Anmerkungen usw. von Gauß, über die bislang leider noch keine genaueren Untersuchungen vorliegen. Auch fand sich in einem dieser Werke Eulers ein Portrait Eulers, das Gauß gezeichnet hat (Reich 2005, S. 108–111).

Da die Zahlentheorie eines der Gebiete war, denen sich Euler in besonderem Maße gewidmet hatte, war Euler der allerwichtigste Autor für Gauß, als er sein zahlentheoretisches Hauptwerk, seine „Disquisitiones arithmeticae", schrieb. Gauß zitiert dort 28 Werke von Euler, dagegen nur acht Werke von Joseph Louis Lagrange (1736–1813) sowie drei Werke von Adrien Marie Legendre (1752–1833). In diesem Werk würdigte Gauß Euler als „summus Euler", „vir immortalis", „vir sagacissimus", „vir summus" usw. (Reich 2005, S. 112).

---

verändert. Im Eulerschen Original steht „viresque ingenii nostri" und „investigationes" anstelle von „speculationes".

In deutscher Übersetzung, die Eberhard Knobloch zu verdanken ist:

„Ideal. Wenn wir auf ihre Nützlichkeit blicken, scheinen mathematische Überlegungen auf zwei Klassen zurückgeführt werden zu müssen; in die erste sind diejenigen aufzunehmen, die sowohl für das tägliche Leben wie für die anderen Künste irgendeinen bedeutenden Vorteil bringen, weshalb ihr Wert nach der Größe dieses Vorteils festgelegt zu werden pflegt. Die zweite Klasse aber umfasst diejenigen Überlegungen, die, auch wenn sie mit keinem bedeutenden Vorteil verbunden sind, dennoch so beschaffen sind, dass sie Gelegenheit bieten, die Grenzen der Analysis hinauszuschieben und die Kräfte des Geistes zu schärfen. Da wir nämlich gezwungen werden, die meisten Spekulationen, von denen der größte Nutzen erwartet werden könnte, allein wegen des mangelhaften Zustandes der Analysis aufzugeben, scheint diesen Überlegungen kein geringerer Wert zuzuordnen zu sein, die keine verachtenswerten Zuwächse der Analysis versprechen".

Ferner aus: Euler, Leonard: Démonstration sur le nombre des points, où deux lignes des ordres quelconques peuvent se couper. (E 148). In: Mémoires de l'académie des sciences de Berlin (1748) 1750, S. 234–248, hier S. 234. In: Opera omnia (1) 26, S. 46–59, hier S. 46.

3. Paul Heinrich Fuß

Am 21.5./2.6.1798 wurde Paul Heinrich Fuß als achtes von 13 Kindern und als zweiter von sieben Söhnen in St. Petersburg geboren. Seine Eltern waren Nikolaus Fuß und Albertine Euler (1766–1822), die eine Enkelin von Leonhard Euler und eine Tochter von Johann Albrecht Euler war. Schon früh zeigte sich bei Paul Heinrich Fuß eine große mathematische Begabung; bereits am 23.4./5.5.1817 konnte er der Akademie der Wissenschaften eine erste Arbeit vorlegen (Fuß P. H. 1822). Im Jahre 1818 wurde er Adjunkt an der Akademie, wo er bis 1822 noch drei weitere mathematische Arbeiten einreichen sollte. Daraufhin wurde er 1823 Außerordentliches Mitglied der Akademie. Nach dem Tode seines Vaters am 23.12.1825/4.1.1826 wurde er zum Ständigen Sekretär der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg und kurze Zeit später zum Ordentlichen Mitglied gewählt. Noch in diesem Jahr konnte die Akademie ihr 100-jähriges Bestehen feiern. Im Jahre 1835 wurde Paul Heinrich Fuß Auswärtiges Mitglied der Societät der Wissenschaften in Göttingen. Der Vorschlag dazu war nicht von Gauß gekommen, sondern von dem Mediziner und Biologen Johannes Friedrich Blumenbach (1752–1840)[10]. In der Folgezeit beschäftigte sich Paul Heinrich Fuß insbesondere mit dem Briefwechsel Leonhard Eulers. Über diese Beschäftigung trug er am 24.9./6.10.1841 in der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg vor. Dieser Beitrag wurde auch in dem von Leopold Crelle (1780–1855) herausgegebenen „Journal für die reine und angewandte Mathematik" veröffentlicht (Fuß P. H. 1842) und dort um eine Nachricht über die geplante Publikation einer Sammlung von Briefen an und von Leonhard Euler ergänzt[11]. Im Crelle-Nachlass befindet sich sowohl ein Sonderdruck des „Extrait du procès verbal" aus St. Petersburg als auch eine handgeschriebene Seite zu der erwähnten Nachricht[12]. Ferner wurden in demselben Band des „Journals für die reine und angewandte Mathematik" eine Faksimile-Seite einer Handschrift von Leonhard Euler sowie Faksimiles von zwei Briefen Daniel Bernoullis an Leonhard Euler vom 18.12.1734 und an Nikolaus Fuß vom 7.6.1777 veröffentlicht[13]. Im folgenden Band des „Journal für die reine und angewandte Mathematik" wurde ferner das Faksimile

10 Archiv der Akademie der Wissenschaften in Göttingen: Pers.19, Bl. 182.

11 Journal für die reine und angewandte Mathematik 23, 1842, S. 287–288.

12 Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Crelle-Nachlass, Nr. 23.

13 Journal für die reine und angewandte Mathematik 23, 1842, am Ende des Bandes.

einer Handschrift von Paul Heinrich Fuß wiedergegeben, wobei es um die Summierung der Reihe

$$S = \frac{z^3}{1\cdot 3} - \frac{z^7}{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7} + \frac{z^{11}}{1\cdot\ldots\cdot 11} - \frac{z^{15}}{1\cdot\ldots\cdot 15} + \text{etc.}$$

ging[14].

In St. Petersburg erschien im Jahre 1843 die von Paul Heinrich Fuß herausgegebene „Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII$^{\text{ème}}$ siècle“, und zwar der Euler-Goldbach-Briefwechsel mit 177 Briefen (Bd. 1) sowie die Briefwechsel Johann I Bernoulli – Euler, Nikolaus II Bernoulli – Goldbach, Daniel Bernoulli – Goldbach, Daniel Bernoulli – Euler, Daniel Bernoulli – Nikolaus Fuß sowie Nikolaus I Bernoulli – Euler im Band 2 (Fuß P. H. 1843). Es waren dies überhaupt die ersten Briefe bzw. Briefwechsel Eulers, die veröffentlicht wurden. Die noch 1841 ebenfalls in Erwägung gezogenen Briefe an Euler von Philipp Naudé (1684–1745), Alexis Clairaut (1713–1765), Gabriel Cramer (1704–1752) und Johann Heinrich Lambert (1728–1777)[15] wurden jedoch nicht in diese Bände aufgenommen.

Im Jahre 1843 unternahm Paul Heinrich Fuß zusammen mit seinem jüngeren Bruder Nikolaus (1810–1867) eine Reise nach Paris und in die Schweiz, um nach weiteren Materialien von und zu Euler Ausschau zu halten. In Bern trafen sich die Brüder schließlich mit dem Mathematiker Carl Gustav Jacob Jacobi (1804–1851), mit dem sie gemeinsam ins Berner Oberland reisten. Jacobi erwies sich bald als einer der wichtigsten Partner, was die Veröffentlichung von Eulers Werken anbelangt. Es existiert darüber ein umfangreicher Briefwechsel zwischen ihm und Paul Heinrich Fuß (Stäckel/Ahrens 1908). Ebenfalls 1843 stattete Paul Heinrich Fuß Gauß in Göttingen einen Besuch ab[16]. 1844 gelang es Paul Heinrich Fuß, weitere unveröffentlichte Eulermanuskripte aufzuspüren, die sich in Familienbesitz befanden. So kam der Plan einer Gesamtausgabe der Schriften von Euler auf, der aber nur kurze Zeit, bis 1846, aufrechterhalten wurde. Was zukünftige Publikationen anbelangt, so genossen von nun an die zahlentheoretischen Schriften Eulers die absolute Priorität, wenn auch Jacobi und Paul Heinrich Fuß in ihrem Briefwechsel im Jahre 1848 weitere Bände, so zur Geometrie, zur Algebra

14 Journal für die reine und angewandte Mathematik 24, 1842, zwischen S. 188 und 189.

15 Nachricht von der in Nr. 6 des vorigen Hefts dieses Journals gedachten Sammlung von Briefen an und von L. Euler. In: Journal für die reine und angewandte Mathematik 23, 1842, S. 287–288.

16 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe A: Paul Heinrich Fuß 3 (2 S.).

und zur Analysis erörterten (Stäckel/Ahrens 1908, S. 50–53). 1849 gelang den Brüdern Paul Heinrich und Nikolaus Fuß endlich die Edition von zwei Bänden mit Eulers zahlentheoretischen Schriften „Commentationes arithmeticae collectae“ (Euler 1849). Der erste Band enthielt einen Plan für sechs weitere Bände Eulerscher Schriften, die folgen sollten, nämlich ein Band „Geometria“, ein Band „Analysis algebraica“ und „Calculus probabilium“, ein Band „Analysis trigonometrica. Series“ sowie drei Bände „Calculi integralis“[17]. Leider kam es zu keinen weiteren Publikationen von Eulers Schriften zu den anderen hier angeführten Sachgebieten.

Die beiden Bände mit Eulers zahlentheoretischen Schriften ließ Paul Heinrich Fuß auch Gauß zukommen und machte sie ihm anläßlich von Gauß’ 50-jährigem Doktorjubiläum zum Geschenk[18].

Im Jahre 1851 konnte Paul Heinrich Fuß sein 25-jähriges Dienstjubiläum an der Akademie in St. Petersburg feiern. Er starb am 10./22.1.1855 in St. Petersburg, etwa einen Monat, bevor auch Carl Friedrich Gauß am 23.2.1855 in Göttingen verschied. Otto Struve (1819–1905), der Sohn des berühmten Astronomen Wilhelm Struve (1793–1864), war es, der ein Jahr später einen umfangreichen Nachruf auf Paul Heinrich Fuß veröffentlichte (Struve 1856). Es existiert kein vollständiges Schriftenverzeichnis von Paul Heinrich Fuß. Der Grund hierfür mag darin liegen, dass Fuß jährlich einen oder mehrere Berichte in den Akademiebänden veröffentlicht hat, so sowohl in den bis 1849 existierenden „Recueils des Actes de l’Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg“ als auch in den bis 1857 existierenden „Comptes rendus“, wobei Fuß’ Name als Autor nicht in Erscheinung trat. Manche seiner Akademieberichte erschienen als Sonderdrucke, ohne dass der Autor genannt wurde.

Schließlich wurden noch die 1844 neu gefundenen Schriften Eulers 1862 in zwei Bänden ediert, als Herausgeber wurden Paul Heinrich Fuß und Nikolaus Fuß genannt (Euler 1862).

---

17 „Conspectus sex tomorum subsequentium“, in: Euler (1849, Bd. 1, S. XXII–XXIII).
Einen weiteren Plan erörterten C. G. J. Jacobi und Paul Heinrich Fuß in ihrem Briefwechsel, wo von einem Band mit Eulers Werken zur Geometrie sowie je einem Band zur Algebra und zur Analysis die Rede ist (Stäckel/Ahrens 1908, S. 50–53).

18 Siehe den letzten Brief von Paul Heinrich Fuß an Gauß vom 25.7./6.8.1849. SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe A: Paul Heinrich Fuß 6 (2 S.).

3.1. Paul Heinrich Fuß und Carl Friedrich Gauß

Paul Heinrich Fuß und Carl Friedrich Gauß kannten sich persönlich und standen miteinander in Briefkontakt. Es sind elf Briefe bekannt, die Gauß und Paul Heinrich Fuß gewechselt haben. Sie stammen aus der Zeit von 1835 bis 1849. Themen, die in den Briefen erörtert wurden, waren die in St. Petersburg fehlenden Schriften der Göttinger Societät, die Beschaffung literarischer und wissenschaftlicher Literatur für Gauß, Fuß' Besuch bei Gauß im Jahre 1843, Gauß' Beobachtungen des Mauvaisschen Kometen im Jahre 1844 sowie die Suche nach zwei in St. Petersburg nicht vorhandenen Schriften Eulers. Es handelte sich dabei um die beiden Abhandlungen

1) Découverte d'une loi extraordinaire des nombres im „Journal littéraire de l'Allemagne", janvier et fevrier 1751, und um
2) „Die Vertheidigung der Offenbarung gegen die Einwürfe der Freigeister".

Beide Schriften hatte Paul Heinrich Fuß bis dahin nicht zu Gesicht bekommen, wie er Gauß in einem Brief vom 7./19.4.1844 berichtete. Ferner ließ Paul Heinrich Fuß Gauß wissen[19]: „Meine beste Hoffnung beruht noch auf der so reichen u[nd] vollständigen Göttinger Bibliothek. Dürfte ich Sie nun ersuchen, darüber Erkundigungen einzuziehen u[nd] wenn, woran ich fast nicht zweifle, das Journal u[nd] die Abhandlung sich finden, von letzterer eine getreue Copie für meine Rechnung besorgen lassen u[nd] mir diese durch die Voß'sche Buchhandlung zuschicken zu wollen, die auch den Kostenbetrag fürs Abschreiben entrichten wird".

Im zweiten Fall ließ sich leicht feststellen, dass nur der Titel nicht ganz korrekt wiedergegeben war. Gauß meldete in seinem Brief vom 15.5.1844 den richtigen Titel „Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister" und teilte Fuß mit, dass dieses Werk gerade eben eine Neuauflage erlebt habe (Euler 1747/1844)[20]. Es soll hier nicht unerwähnt bleiben, dass Gauß diese Schrift wahrscheinlich früher selbst gelesen hatte, denn am 8.5.1844 ließ er Paul Heinrich Fuß wissen: „Gleichwohl ist mir so in Sinne, als hätte ich vor vielen vielen Jahren jene Schrift einmahl gelesen"[21].

Sehr viel schwieriger gestaltete sich der erste Fall. Hier stimmten weder der Titel noch das Erscheinungsjahr, wenn man die Angabe der

---

19 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe A: Paul Heinrich Fuß 4 (2 S.).

20 Dieses Werk „Eulers Rettung der göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freigeister" (E 92) hatte 1844 Karl Dielitz in Berlin neu herausgegeben.

21 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe B: Paul Heinrich Fuß 2 (2 S.).

Zeitschrift „Journal littéraire d'Allemagne" als korrekt betrachtete. Sowohl in dem Verzeichnis von Nikolaus Fuß als auch in dem von Paul Heinrich Fuß standen diese nicht stimmigen Angaben (Fuß N. 1783, S. 108 und 1786, S. 164; Fuß P. H. 1843, S. LVII, Nr. 3).

Gauß konnte in relativ kurzer Zeit in der Göttinger Bibliothek die Zeitschrift „Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord" finden[22] und in einem dieser Bände ein bis dahin völlig unbekanntes Werk Eulers ausfindig machen. Dessen richtiger Titel lautete: „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$", und der Beitrag war nicht im Jahre 1751, sondern bereits 1743 erschienen (Euler 1743). Über diesen Fund und die die Zeitschrift betreffenden Details berichtete Gauß in einem Brief vom 8.5.1844 Paul Heinrich Fuß in aller Ausführlichkeit[23]. Eulers Beitrag war anonym erschienen, auch im Inhaltsverzeichnis wurde der Name des Autors nicht genannt. Damit ist klar: Gauß hatte eine publizierte Arbeit von Euler aufgefunden, die bislang völlig unbekannt geblieben war – welch ein Triumph!

Paul Heinrich Fuß fügte nunmehr in seinem Handexemplar des Verzeichnisses der Eulerschen Schriften folgende Verbesserung hinzu: „N. 3 existiert gar nicht unter diesem Titel; dagegen aber befindet sich im Journal littéraire de l'Allemagne T. 2 part. 1^{e} pag. 115–127 eine Abh. von Euler: Démonstration de la somme de cette Suite $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$ welche Gauss die Gefälligkeit gehabt hat, für mich eigenhändig abzuschreiben. Ich habe sie mit N. 174a bezeichnet u. sie gehörigen Orts eingeschaltet". In der Tat wurde im Nachdruck des Verzeichnisses von Paul Heinrich Fuß, welches im Jahre 1908 erschien, diese Schrift Eulers an der richtigen Stelle mit den richtigen Angaben unter Nr. 174a eingefügt (Stäckel/Ahrens 1908, S. 101). Die richtigen Angaben erschienen erstmals bereits 1849; Paul Heinrich Fuß nämlich teilte sie in der Einleitung zu Eulers zahlentheoretischen Schriften seinen Lesern mit, wobei er auch Gauß' Anteil daran würdigte (Euler 1849, Bd. 1, S. XXIV). So stehen sowohl im Hagenschen Verzeichnis (Hagen 1896, S. 11, Nr. 117) wie im Eneströmschen Verzeichnis (Eneström 1910–1913. S. 15, E 63) die richtigen Angaben.

22 SUB Göttingen, Sign. 8 EPH LIT 172/13.

23 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe B: Paul Heinrich Fuß 2 (2 S.).

Eulers „Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres" von 1751 (E 175)

Nebenbei sei hier bemerkt, dass es in der Tat eine Arbeit Eulers mit dem Titel „Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs" (E 175) gibt, nur war diese nicht im „Journal littéraire" veröffentlicht worden, sondern in der „Bibliothèque impartiale"; die Jahresangabe 1751 aber war richtig (Euler 1751). Diese Abhandlung wurde von Euler am 22.6.1747 der Berliner Akademie vorgestellt (Winter 1957, S. 113): „M^{r} Euler a lu un Mémoire intitulé ‚Découverte d'une proprieté extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs'". Das Manuskript der gedruckten Abhandlung befindet sich noch heute im Archiv der Berliner Akademie, und zwar in einem Bande, in dem Abschriften von der Akademie vorgestellten Beiträgen gesammelt wurden. Am Rande von Eulers Schrift befindet sich ein mit Bleistift geschriebener Vermerk: „Journal littéraire de l'Allemagne 1751 Janv. et Févr. Euler"[24]. Wann und von wem dieser Vermerk hinzugefügt wurde, läßt sich nicht mehr rekonstruieren.

In der Tat wurde die Zeitschrift „Bibliothèque impartiale" in Leiden herausgegeben, und zwar von Samuel Formey. Was Euler anbelangt, so wurden in dieser Zeitschrift eine Rezension sowie zwei Werke von ihm veröffentlicht[25]. Der Name dieser Zeitschrift fehlt in Nikolaus Fuß' Verzeichnis der Schriften Eulers. Die „Bibliothèque impartiale", deren erster Band 1750 herauskam, war insbesondere literarischen, aber auch sozialen und politischen Themen gewidmet, nur gelegentlich wurden in ihr auch naturgeschichtliche Beiträge veröffentlicht, so von Georges Buffon oder von Albrecht von Haller. Mathematische Beiträge aber sind in dieser Zeitschrift eine Ausnahme. Interessant ist ferner, dass dieser spezielle in der Staatsbibliothek zu Berlin vorhandene Band, der Eulers Beitrag „Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres" enthält[26], aus der Bibliothek Friedrichs des Großen (1712–1786, reg. ab 1740) stammt, denn der Band besitzt einen eingeklebten Vermerk: „Dieses Buch besaß einen Einband Friedrich des Großen, ersetzt am 13.12.1982". Eingeklebt wurde ferner ein mit einem geprägten Wappen versehenes Lederstück des alten Einbandes. Die anderen Bände dieser Zeitschrift enthalten keine derartigen Vermerke; es kann also durchaus sein, dass Euler diesen Band, der seinen Beitrag „Découverte" enthielt,

24 Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, Sign.: I-M 84, Bl. 143–149.

25 Veröffentlicht wurden dort E 175 und E 176 sowie eine Rezension von E 144.

26 Vorhanden in der Preußischen Staatsbibliothek, Potsdamer Straße, Sign. Ad 3080.

Friedrich dem Großen als Geschenk überreicht hatte, der ihn dann mit einem speziellen Einband versehen ließ.

Dieses Werk Eulers „Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres" wurde gleich zweimal, sowohl 1849 unter den zahlentheoretischen Schriften als auch 1862, von Paul Heinrich und Nikolaus Fuß jun., veröffentlicht (Euler 1849 Bd. 2, S. 639–647, und Euler 1862, Bd. 1, S. 76–84). Paul Heinrich Fuß hatte ebenso wie sein Briefpartner C. G. J. Jacobi diese Schrift Eulers für eine noch unveröffentlichte Arbeit gehalten, weswegen Jacobi eine Abschrift aus dem Berliner Manuskript in Auftrag gab, die er Paul Heinrich Fuß am 23.1.1849 zusandte (Stäckel/Ahrens 1908, S. VI und 73–75)[27].

Im Verzeichnis der Eulerschen Schriften, die Paul Heinrich Fuß herausgegeben hatte, stand dieser Titel „Découverte d'une loi extraordinaire des nombres", wie bereits berichtet, unter Nr. 3, Paul Stäckel verbesserte die Angaben, indem er „Exhib. Berl. 1747. Juni 22. Bibliothèque impartiale 3 (1751), p. 10. Comm. ar. 2 (1849). p. 639. Op post. 1 (1862). p. 76" hinzufügte (Stäckel/Ahrens 1908, S. 84). Eulers Werk „Découverte" taucht in Hagens Verzeichnis von Eulers Schriften nicht auf.

Resumée

Wie Paul Stäckel mit Recht ausführte, „hatte Gauß statt der gesuchten eine bis dahin unbekannte Abhandlung Eulers entdeckt" (Stäckel 1907/8, S. 38). Die gesuchte Arbeit war die „Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs" (E 175), die gefundene die „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} + \text{etc.}$" Während erstere eine zahlentheoretische Schrift ist, gehört die neu gefundene in den Bereich Analysis, speziell zu den Reihen.

3.2. Gauß' Abschrift

Wie bereits berichtet, schrieb Gauß am 8.5. und am 15.5.1844 an Paul Heinrich Fuß. Diese beiden Briefe waren bislang bereits bekannt, die Originale befinden sich, dank besonderen Umständen, in Göttingen. Ein Neffe von Paul Heinrich Fuß nämlich, Viktor Fuß (1839–1915), hat sie zusammen mit zwei anderen Briefen dem Gauß-Archiv, d.h. der

27 Siehe hierzu auch Leonhard Euler, Opera omnia (1) 2, S. XXII–XXIII (Ferdinand Rudio).

Handschriftenabteilung der Göttinger Staats- und Universitätsbibliothek, zukommen lassen (Stäckel 1907).

Völlig unbekannt war aber bislang, dass Gauß sich nur einen Tag später, am 16.5.1844, abermals bei Paul Heinrich Fuß gemeldet hat. Dieser Brief wurde zusammen mit der Gaußschen Abschrift im Jahre 2009 in der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften zusammen mit der Abschrift neu entdeckt[28]: Gauß hatte die Abschrift also in nur einem Tag angefertigt!

Hier sei der vollständige Text des Briefes wiedergegeben:

„Verehrtester Herr Staatsrath

Angeschlossen erhalten Sie die Abschrift des in meinen beiden letzten Briefen besprochenen Eulerschen Aufsatzes. Da sie sich so compendiös hat einrichten lassen, so habe[29] ich den Umweg durch die Vossische Buchhandlung für unnöthig gehalten.

Sie ist vollkommen treu, bis auf die offenbaren Druckfehler und Monstruositäten in den Formeln welche ich verbessert habe. Sogar an die Eulersche Orthographie habe ich mich im Allgemeinen treu gehalten, also j'avois geschrieben anstatt des mir sonst gewohnten j'avais. Nur wo das Original sich selbst nicht treu bleibt worin z. B. moyen und moïen, employer und emploier, nous sommes parvenu und nous sommes parvenus und vielleicht noch in ein Paar andern ähnlichen Fällen, habe ich gleichförmig die mir gewohnte (letzere) Art beibehalten.

Nur über die 13 untersten Zeilen der dritten Seite (welche im Original auf einem besondern herauszuschlagenden breitern Blatte stehen) muß ich noch eine Bemerkung machen (oder wiederhohlen, da sie mit roth schon am Schluß der Copie angedeutet ist). Die letzten Bruchcoefficienten vor den Potenzen von π sind im Original mit gröbern Zifern gesetzt, was ich während des Abschreibens übersehen hatte. Es sieht also z.B. die letzte Zeile so aus[30]

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \&c. = \frac{2^{25}}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 27} \; \frac{76977927}{2} \; \pi^{26}$$

Bei einem Wiederabdruck müßte aber dieser Umstand gehörig beachtet werden, weil sonst die nachher folgenden von mir roth unterstrichenen Worte unverständlich sein würden.

---

28 St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften, f. 136 op. 3, Nr. 13, l. 59–61.

29 Original: habe habe.

30 Darstellung im „Journal littéraire d'Allemagne“:

$$1 + \frac{1}{2^{26}} + \frac{1}{3^{26}} + \frac{1}{4^{26}} + \frac{1}{5^{26}} + \&c. = \frac{2^{25}.}{1.\,2.\,3.} \frac{76977927}{\ldots\ldots 27.\quad 2} \pi^{26}.$$

> Es gereicht mir zu besonderem Vergnügen, durch diese Copienahme eine Pietätspflicht gegen meinen grossen Lehrer zu entledigen, dessen verehrtem Urenkel ich mich zu freundlichem Andenken bestens empfehle.
>
> Göttingen den 16 Mai 1844. C. F. Gauß“

Es war also die Pietätspflicht gegen den großen Lehrer Euler, die Gauß veranlasst hatte, eigenhändig eine Abschrift anzufertigen. Paul Heinrich Fuß hatte, wie ein Vermerk auf dem Brief zeigt, diesen Brief von Gauß am 12./24.5.1844 erhalten und antwortete noch am selben Tag:

> „Verehrtester Herr Hofrath
>
> Wo finde ich Worte, um Ihnen zu danken für die große Gefälligkeit, mit der Sie sich nicht allein der Mühe des Nachforschens nach jener Abhandlung Eulers unterzogen, u[nd] mir über deßen Erfolg so ausführlichen u[nd] genügenden Bericht abstatteten, sondern sogar, – ich erröthe, in der That, wenn ich nur daran denke, daß ich die Veranlassung dazu gab, – Ihre kostbare Zeit zur Abschrift jener Abhandlung opferten. Dieser Zug gehört der Geschichte der Wißenschaft an, u[nd] die Abschrift will ich in Ehren halten, als ein frisches Blatt in Eulers Verdienstkrone, 60 Jahre nach seinem Tode hineingeflochten. […] Da erhielt ich Ihr erstes Schreiben vom 8ten Mai, u[nd] ehe ich noch Zeit gefunden Ihnen für Alles darin Enthaltene zu danken, u[nd] Sie zu bitten, mir die Abschrift durch irgend einen zuverläßigen Copisten treu besorgen zu laßen, mir die Correctionen selbst vorbehaltend, erhalte ich am heutigen Tage Ihre Zeilen vom 16ten mit der mich zugleich beschämenden, erfreuenden u[nd] rührenden Beilage. Nochmals also meinen aufrichtigen Dank dafür“[31].

Paul Heinrich Fuß fügte am Ende von Gauß’ Abschrift noch folgende Bemerkung hinzu:

> „Diese Abhandlung Eulers ist dieselbe die in dem Verzeichniß seiner Schriften (Lobrede) u[nd] daraus in meinem Verzeichniß Nro irrthümlich unter dem Titel „Découverte d’une loi extraordinaire des nombres (Journ[al] Littér[aire] de l’Allem[agne] 1751. Jan[vier] et février) angeführt ist. Diese Abschrift ist auf meine Veranlassung von Gauß eigenhändig gemacht, weil der Abdruck so fehlerhaft ist, daß er von keinem gewöhnlichen Abschreiber hat gemacht werden können.
>
> 12 Mai 1844
>
> Fuss“

Wie Gauß bereits in seinem Brief an Paul Heinrich Fuß geschrieben hatte, hatte er in seiner Abschrift Druckfehler im Text und Monstrositäten in den Formeln beseitigt. In der Tat war das „Journal littéraire

31 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe A: Paul Heinrich Fuß 5 (2 S.).

d'Allemagne" eine Zeitschrift, in der normalerweise keine mathematischen Beiträge veröffentlicht wurden. Demzufolge war auch nicht die Möglichkeit gegeben, eine korrekte Drucklegung zu gewährleisten. Diese mangelhafte Darstellung der mathematischen Inhalte entstellte die Aussagen doch in erheblichem Maße und machte es einem fachlich nicht genügend informierten Leser unmöglich, die Inhalte zu verstehen. Im Folgenden wird versucht, in Form von zwei Tabellen einen Eindruck von Gauß' Korrekturen zu vermitteln. Als Grundlage diente dabei der Text im „Journal littéraire" (= Original); die genaue Stelle wurde mit Hilfe der Seitenangabe und der Anzahl der Zeilen, von oben gerechnet, festgehalten. Die Tabellen erlauben somit einen Vergleich zwischen Originaldruck und Gauß' Abschrift.

Im Text gestattete sich Gauß kleine Veränderungen in der Orthographie und in der Zeichensetzung.

Tafel 1: Gauß' Änderungen in der Orthographie und in der Zeichensetzung

Seite	Zeile von oben	Original	Gauß' Korrektur
115	7	De la somme	de la somme
	7	Suite	suite
	16	parce qu'elle	parcequ'elle
	22	Suites	suites
116	9	connoissance	connaissance
	10	Suites	suites
	14	Suites	suites
	14	Géomêtres	géomêtres
	21	quarré	carré
	25	Feu	feu
	26	long tems	longtems
	26	en vain	envain
	28	Théorie	théorie
	31	différente	differente
117	1	moyen	moïen
	2	dite	ditte
	3	employée	emploiée
	6	aparence	apparence
	16	quelconq	quelconque
	17	Théorie	théorie
	20	rayon	raion
	21	quelconq	quelconque
	26	c'est-à-dire si	c'est-à-dire, si
	27	circonférence	circonference
	27	1 : π	1 : π,
	29	emploie	emploïe
118	8	&	et
	11	ch.	&c.
	20	s'évanouïsse	s'évanouisse

119	3f	intégrable	integrable
	7	précedent	précedant
	8	réfléxion qu'il	réflexion, qu'il
	8/9	generalement	généralement
	19	Delà	Dela
120	3	&	et
	4f	sds, nous	sds nous
	5	achevée,	achevée
	10	vû	vu
	12	cœfficient	coëfficient
	15	dénominateur	denominateur
	17	par tout	partout
	21	De là	Dela
121	5	&	et
	14	ainsi, que	ainsi que
	18	parvenu	parvenus
	20	impairs	impaires
	22	dabord	d'abord
122	10	vuë	vue
	11/12	dont jobtiens	, dont j'obtiens
	13	qui	, qui
	19	procède	procede
	20	series	serie
	23	ou	où
	24	parce que	parceque
	25	voions	voïons
	26	que	, que
123	1	&	, et
	3	croitre	croître
	3	par tout	partout
	4	parce que	parceque
	7	&	et
	7	par tout	partout
	10	&	et
124	6	&c.	fehlt
	15	&	et
	17	&	et
	19	generale	générale
125	1	qui dans le cas = 1	, qui dans le cas x = 1
	2	&	et
	6	par son coefficient	fehlt
	12	&	et
	12	&	et
126	1	methodes, toutes	méthodes toutes
	4	employer	emploïer
	5	Hautes Puissances	hautes puissances
	13	&c. je n'ai	&c., je n'ai
	16	connue laquelle	connue, laquelle
	20	paires. que	paires que
127	1	deja	déja
	2	différentes	differentes

Die Monstrositäten in den Formeln dagegen konnten nur verbessert werden, wenn man die mathematischen Inhalte im Eulerschen Aufsatz auch verstand, was für Gauß natürlich kein Problem war. Im Originaltext im „Journal littéraire“ hatte man des Öfteren auf Bruchstriche verzichtet und Zähler und Nenner in verschiedenen Zeilen wiedergegeben. Die Vorzeichen waren verwechselt, falsche Buchstaben eingefügt und die Exponenten öfters wie Faktoren wiedergegeben worden. Auch hatten sich einige falsche Zahlenangaben eingeschlichen usw. Vor allem aber waren die Formeln vielfach nicht in einer Zeile wiedergegeben, sondern erst in der folgenden Zeile beendet worden. Auf Seite 124, Zeile 8/9, ist sowohl die Formel im Original wie auch die von Gauß vorgenommene Verbesserung fehlerhaft. Auf die Seite 126 folgte ein größeres, extra eingeheftetes, nicht paginiertes als „(*Pag. 126)“ bezeichnetes Blatt, auf dem in 13 Zeilen 13 Reihen aufgelistet waren, mit jeweils steigenden Potenzen. Der letzte Absatz lautete im „Journal littéraire“ (S. 126/7): „La loi que ces expressions tiennent, est en partie si connuë qu'elle n'a pas besoin d'explication. La seule difficulté qui se trouve, est dans les fractions, qui sont representées en des caractères differens; $\frac{1}{2}\ \frac{1}{6}\ \frac{1}{6}\ \frac{3}{10}\ \frac{5}{6}\ \frac{691}{210}\ \frac{35}{2}$ &c. mais j'ai déja [sic] donné deux méthodes differentes pour pousser ces fractions encore plus loin“. Gauß unterstrich „en des caractères differens“ mit roter Tinte und verbesserte die Schreibweise der Brüche in: $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{6}$, $\frac{3}{10}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{691}{210}$, $\frac{35}{2}$ &c. Ebenfalls mit roter Tinte fügte er folgende Fußnote hinzu: „Ceci se rapporte à l'original; dans cette copie on avait negligé de se conformer à cette circonstance“ (l. 61v).

Tafel 2: Gauß' Änderungen in den Formeln

Seite	Zeile	Original	Gauß' Änderungen bzw. Korrekturen
117	23/24	$= \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ & $s = \int\frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$	$ds = \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$ & $s = \int \frac{dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
118	10/11	$\frac{1.3}{2.4.5}\ x\ ^5 + \frac{1.2.5.}{2.4.6.7.}\ x + \frac{1.3.5.6.}{2.4.6.8.9}$ $x\ ^9$ + ch.	$\frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}x^5 + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}x^7 + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}x^9$ + &c.
	13–15	$sds = \frac{xdx}{\sqrt{(1\ xx)}} + \frac{1}{2.3}\ \frac{x^3dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1.\ 3\quad x^5dx}{2.4.5.\ \sqrt{(1\ xx)}} + \frac{1.3.5.}{2.4.6.7.} + \frac{x^7dx}{\sqrt{(1\ xx)}} + \begin{matrix}1.3.5.7\\2.4\ 6.8.9\end{matrix}\ \frac{x^9dx}{\sqrt{(1-xx)}}$	$sds = \frac{xdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1}{2\cdot3}\frac{x^3dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1\cdot3}{2\cdot4\cdot5}\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1\cdot3\cdot5}{2\cdot4\cdot6\cdot7}\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{1\cdot3\cdot5\cdot7}{2\cdot4\cdot6\cdot8\cdot9}\frac{x^9dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	16	+ &c. 3 1 2 4	+ &c.

119	10	$\int\frac{x^{n+2}dx}{\surd(1-xx)} = \frac{n\times 1}{n\times 2}\int\frac{x^n\,dx}{\surd(1-xx)} -$	$\frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	11	$\frac{x^{n+1}}{n\times 2}\surd(1-xx)$	$\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}.$
	14/15	$\frac{-x^{n+1}}{n+2}\surd(1-xx)$	$-\frac{x^{n+1}}{n+2}\sqrt{(1-xx)}.$
	18	$\int\frac{x^{n+2}dx}{\surd(1-xx)} = \frac{n+1}{n\times 2}\int\frac{x^n\,dx}{\surd(1-xx)}$	$\int\frac{x^{n+2}dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{n+1}{n+2}\int\frac{x^n dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	26	$\int\frac{x5\,dx}{\surd(1-xx)}$	$\int\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
120	1	$\int\frac{x7\,dx}{\surd(1-xx)} = \frac{6}{7}\int\frac{x5\,dx}{\surd(1-xx)}$	$\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{6}{7}\frac{x^5dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	2	$\int\frac{x9\,dx}{\surd(1-xx)} = \frac{8}{9}\int\frac{x7\,dx}{\surd(1-xx)} =$	$\frac{x^9dx}{\sqrt{(1-xx)}} = \frac{8}{9}\int\frac{x^7dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
122	½	$\frac{\pi\pi}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} +$ $\frac{1}{76} + \frac{1}{49} +$ &c	$\frac{\pi\pi}{6} = 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+\frac{1}{49}$ +&c
	15	$dx\,2$	dx^2
	22/23	$y = \alpha xx + bx4 + \gamma x6 + \delta x8 + \epsilon x$ 10 + &c.	$y = \alpha xx + \beta x^4 + \gamma x^6 + \delta x^8 + \varepsilon x^{10}$ + &c.
123	6	$dx\,2$	dx^2
	9/10	$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4$ $bx3 + 6\gamma x5 + 8\delta x7 +$ &c.	$\frac{dy}{dx} = 2\alpha x + 4\beta x^3 + 6\gamma x^5 + 8\delta x^7$ + &c,
	12/13	$\frac{ddy}{dx} = 2\alpha + 3\cdot 4bx^2$ $+ 5\cdot 6\gamma x^4 + 7\cdot 8\delta x^6 +$ &c.	$\frac{ddy}{dx^2} = 2\alpha + 3\cdot 4\beta xx$ $+5\cdot 6\gamma x^4 + 7\cdot 8\delta x^6$ + &c.
	16	$\frac{ddy}{dx} - \frac{xxddy}{dx} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0$	$\frac{ddy}{dx^2} - \frac{xxddy}{dx^2} - \frac{xdy}{dx} - 1 = 0$
	19–21	$\left.\begin{array}{l}\times 2\alpha\times 3\cdot 4bx^2\times 5\cdot 6\gamma x^4\times 7\cdot 8\delta x^6\times \&c.\\ -\ 2\alpha x^2 - 3\cdot 4bx^4 - 5\cdot 6\gamma x^6 - \&c.\\ -\ 2\alpha x^2 - 4bx^4 - 6\gamma x^6 - \&c.\end{array}\right\}$	$\left.\begin{array}{r}2\alpha + 3\cdot 4\beta + 5\cdot 6\gamma x^4 + 7\cdot 8\delta x^6\ \&c.\\ -2\alpha xx - 3\cdot 4\beta x^4 - 5\cdot 6\gamma x^6 - \&c.\\ -2\alpha xx - 4\beta x^4 - 6\gamma x^6 - \&c.\end{array}\right\} = 0$ -1 [32]
124	1	$\alpha = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$	$= \frac{1}{2}$
	6	&c.	fehlt
	8	$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{x^4}{4}\times\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{0}$	$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{xx}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^4}{6}$
	9	$\times\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8}\times\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\frac{x^{10}}{10}$ &c.	$+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^6}{8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{x^8}{10}$ + &c. [33]
	13	$\frac{s3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\surd(1-xx)}\times\frac{2}{3\cdot 4}\int\frac{x4\,do}{\surd(1-xx)}$	$\frac{s^3}{6} = \frac{1}{2}\int\frac{xxdx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2}{3\cdot 4}\int\frac{x^4dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	14	$\times\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\int\frac{x6\,dx}{\surd(1-xx)}\times\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}\int\frac{x8\,dx}{\surd(1-xx)}$	$+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5\cdot 6}\int\frac{x^6dx}{\sqrt{(1-xx)}} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 8}\int\frac{x^8dx}{\sqrt{(1-xx)}}$

32 Es sei hier noch eigens vermerkt, dass im Original die „– 1“ fehlt und durch Gauß ergänzt wurde (siehe die vierzeilige Gleichung!).

33 Gauß hat sich, was die Exponenten von x anbelangt, geirrt; richtig ist:
$$y = \frac{ss}{2} = \frac{xx}{2} + \frac{2}{3}\cdot\frac{x^4}{4} + \frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\cdot\frac{x^6}{6} + \frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\cdot\frac{x^8}{8} + \frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\cdot\frac{x^{10}}{10}\ \&c.$$

	17	$ſ = \frac{\pi}{2}$ & $\frac{ſ3}{6} = \frac{\pi 3}{49}$	$s = \frac{\pi}{2}$ et $\frac{s^3}{6} = \frac{\pi^3}{48}$
125	1	dans le cas = 1	dans le cas $x = 1$
	5	$\int \frac{x 6 dx}{V (1-xx)}$	$\int \frac{x^6 dx}{\sqrt{(1-xx)}}$
	7/8	par ſon coefficient	fehlt
	9	$\frac{ſ3}{6}$	$\frac{s^3}{6}$
	10	$\frac{\pi 3}{48}$	$\frac{\pi^3}{48}$
	19	$\frac{1}{49}$&c.	$\frac{1}{49}$ + &c
126	12/13	quarrés $\frac{1}{14} + \frac{1}{24} + \frac{1}{34} + \frac{1}{44} + \frac{1}{5}$ + &c.	biquarrés $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \frac{1}{5^4}$ + &c.,

Da Eulers Beitrag „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$ + etc.“ in einer bei Mathematikern ziemlich unbekannten Zeitschrift veröffentlicht worden war, blieb er von der Fachwelt unberücksichtigt. Daran änderte leider auch die Gaußsche Abschrift nichts, da Paul Heinrich Fuß diese Arbeit nicht veröffentlichte, denn Eulers Schriften zur Analysis standen in der näheren Zukunft noch nicht zur Drucklegung an. So blieb Eulers Beitrag der Fachwelt auch weiterhin unbekannt.

3.3. Das „Journal littéraire d'Allemagne“

Vorläufer des „Journal littéraire d'Allemagne“ war die Zeitschrift „Bibliothèque germanique ou Histoire littéraire de l'Allemagne de la Suisse et des Pays du Nord“, die in Amsterdam erschien und von der in den Jahren zwischen 1720 und 1741 insgesamt 50 Bände herauskamen. Es gab zunächst mehrere Herausgeber, ab 1734 gehörte auch Samuel Formey (1711–1797) dazu. Ab 1738 war Formey sogar Alleinherausgeber der „Bibliothèque germanique“ (Stäckel/Ahrens 1908, S. 71f). Es waren einige Gelehrte aus Berlin und anderen Orten des Königreichs Preußen, die sich zusammengefunden hatten, um in französischer Sprache über eine große Anzahl von wichtigen und bemerkenswerten Veröffentlichungen aus dem deutschen Sprachraum sowie aus dem Norden, vor allem aus Dänemark und Schweden, aber auch aus Russland, Rechenschaft abzulegen[34]. In der Zeitschrift wurden bisweilen sehr umfangreiche Besprechungen einzelner Beiträge vorgestellt, aber es wurde auch über die Inhalte ganzer Zeitschriftenbände berichtet. Die „Biblio-

34 Bibliothèque germanique 1, 1720, S. III.

thèque germanique“ war also in erster Linie ein Referatenorgan. Bereits ab 1736 erschienen in ihr auch Rezensionen mehrerer Werke von Euler, also zu einer Zeit, als Euler noch in St. Petersburg wirkte.

Nach 50 Bänden wurde der Titel der Zeitschrift in „Journal littéraire d'Allemagne du Suisse et du Nord“ geändert; ferner wurde diese nun nicht mehr in Amsterdam, sondern in La Haye, Den Haag, herausgegeben. Wie im Vorwort des ersten Bandes vermerkt wurde, war nur der Titel verändert worden, nicht aber die angestrebten Inhalte der Zeitschrift: „Ce titre est presque tout ce qu'il aura de nouveau. Nous nous conformerons au plan de la Bibliothèque Germanique, sur lequel il suffit de renvoier à la Préface qui est à la tête de cette Bibliothèque, et à l'Avertissement du Tome III“ (fol.*2r). Auch jetzt zählte wiederum Samuel Formey zu den Herausgebern.

Nachdem Euler 1741 von der Petersburger an die Berliner Akademie gewechselt war, lernten sich er und Samuel Formey persönlich kennen. Formey, in Berlin geboren, entstammte einer Hugenottenfamilie. Er wirkte zunächst als reformierter Prediger in Brandenburg, bevor er eine Stelle an der französischen Kirche in Berlin-Friedrichshain erhielt. 1737 wurde er Lehrer für Rhetorik am Collège français, am französischen Gymnasium in Berlin, wo er 1739 eine Professur für Philosophie erhielt. Am 23.1.1744 wurde Formey Ordentliches Mitglied der Berliner Akademie. Er war Herausgeber zahlreicher Zeitschriften, im Zusammenhang mit Euler sind vor allem die „Bibliothèque germanique“, das „Journal littéraire d'Allemagne“, die „Nouvelle bibliothèque germanique“ sowie die „Bibliothèque impartiale“ von Bedeutung.

Vom „Journal littéraire“ erschienen insgesamt nur zwei Bände, die aus vier Teilbänden bestanden, nämlich die ersten zwei Teile in den Jahren 1741 und 1742 sowie der dritte und der vierte Teil im Jahre 1743. Hier erschien u.a. eine Inhaltsangabe des sechsten Bandes der „Mémoires de l'Académie des sciences de Petersbourg“, der auch mehrere Beiträge Eulers enthielt. Eine ausführliche Besprechung wurde sodann im Falle von Eulers Arbeit „Solutio singularis casus circa tautochonismum“[35] vorgestellt. In demselben Band wurde auch Eulers „Démonstration“ veröffentlicht. Im Register, d.h. in der „Table des matières“, taucht in der Tat der Name Euler auf, und zwar mit einem Hinweis auf die Seiten 38 und 115.

35 Euler, Leonhard: Solutio singularis casus circa tautochronismum. Comment. acad. sc. Petropol. 6 (1732/3) 1738, S. 28–36. In: Opera omnia (2) 6, S. 65–74. (E 24). Eine Besprechung dieser Arbeit im „Journal littéraire d'Allemagne“ 2: 1, 1743, S. 36–47.

Nachfolger des „Journal littéraire d'Allemagne" wurde die Zeitschrift „Nouvelle Bibliothèque germanique", von der in den Jahren 1746–1760 insgesamt 26 Bände erscheinen sollten, und zwar wiederum in Amsterdam. Formey wirkte zunächst mit anderen als Herausgeber, ab 1750 aber war er der alleinige Herausgeber auch dieser Zeitschrift. Hier erschienen ebenfalls wieder zahlreiche Rezensionen Eulerscher Werke und zwar mehr als 30, die hier nicht einzeln aufgeführt werden sollen.

In Jahr 1746 war Formey Assistent des Beständigen Sekretärs der Berliner Akademie geworden. 1748 wurde er selbst Beständiger Sekretär; darüber hinaus übernahm er 1788 noch das Amt des Direktors der philosophischen Klasse der Akademie. Im Jahre 1760 heiratete Eulers ältester Sohn Johann Albrecht Anna Hagemeister, die mit der Familie Formey verwandt war. Johann Albrecht Euler bezeichnete Samuel Formey als „Onkel". In der Tat waren Johann Albrechts Schwiegermutter und Formeys erste Ehefrau Schwestern.

3.4. Die Edition von Stäckel (1907/8) und die Edition in den „Opera omnia" (1925)

Paul Stäckel (1862–1919) hatte in Berlin Mathematik studiert, wo er 1885 promoviert wurde. 1899 wurde er Ordentlicher Professor in Kiel, 1905 wechselte er an die TH Hannover, 1908 an die TH Karlsruhe und 1913 an die Universität Heidelberg. Es war das Studium des in Göttingen vorhandenen Briefwechsels zwischen Paul Heinrich Fuß und Gauß, das Stäckel veranlasste, sich mit Eulers Arbeit „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc." zu beschäftigen. Stäckel kannte jedoch nur die in Göttingen befindlichen Briefe, nicht aber, wie bereits erwähnt, Gauß' Schreiben vom 16.5.1844, das erst kürzlich aufgespürt wurde. So war ihm zwar bekannt, dass Gauß eine Abschrift angefertigt und in dieser sowohl sprachliche Änderungen vorgenommen als auch mathematische Monstrositäten beseitigt hatte, aber die Gaußsche Abschrift selbst stand ihm nicht zur Verfügung. Daher war Stäckels Quelle Eulers Originalpublikation im „Journal littéraire d'Allemagne". Endlich, im Jahre 1907/8, erfuhr Eulers Beitrag eine weitere Veröffentlichung, begleitet von Stäckels Aufsatz unter dem Titel: „Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen" (Stäckel 1907/8). Was die Orthographie und die Zeichensetzung anbelangt, so hielt sich Stäckel in stärkerem Maße als Gauß an das Original. Im Falle der mathematischen Monstrositäten aber verbesserte er diese, ohne seine Änderungen im

Detail darzulegen. Stäckels Änderungen und Gauß' Verbesserungen stimmen im Großen und Ganzen miteinander überein, was nicht verwundert, weil beide die in Eulers Beitrag vorgestellten mathematischen Sachverhalte voll und ganz beherrschten.
Im Jahre 1911 erschien unter der Ägide der Schweizerischen Naturforschenden Gesellschaft der erste Band von Eulers „Opera omnia". Alsbald standen auch Eulers Beiträge zur Theorie der Reihen auf dem Programm, so dass Eulers Schrift „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc." in den 1925 erschienenen Band 14 der ersten Serie Eingang fand; Grundlage hierfür war Stäckels Aufsatz, der, was ziemlich ungewöhnlich ist, ebenfalls in die „Opera omnia" aufgenommen wurde. So erfährt der Leser der „Opera omnia" weder hier noch aus dem Nachbericht (Faber 1935, S. XXXVI–XXXVIII), dass der vorgestellte Text nicht überall mit dem im „Journal littéraire d'Allemagne" veröffentlichten Originaltext übereinstimmt, sondern vorher durch Stäckel einer gründlichen Korrektur unterzogen worden war.

4. Vorgeschichte, Umfeld und Eulers Theorie der Reihe der reziproken Quadratzahlen

4.1. Euler und die Theorie der Reihen

Unendliche Reihen traten bereits in der Antike auf. Mit der Entwicklung des „Calculus" kam der Theorie der unendlichen Reihen eine besondere Bedeutung zu. Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) gelang es, für die alternierende Reihe der ungeraden reziproken Zahlen folgende Summe abzuleiten (Leibniz 1682):

$$\frac{1}{1} - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \frac{1}{9} - \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{1}{15} + \frac{1}{17} - \frac{1}{19} \text{ etc.} = \frac{\pi}{4}.$$

Es war dies ein völlig unerwartetes, sensationelles Ergebnis.

Leonhard Euler hat sich sein ganzes Leben lang mit der Theorie der unendlichen Reihen beschäftigt (Faber 1935; Hofmann 1959; Pengelley 2007; Sandifer 2004; Sandifer 2005; Sandifer 2007b; Sandifer 2008). Wie Georg Faber (1877–1966) mit Recht festgestellt hat, bilden diese Arbeiten „zusammen mit dem ersten Band von Eulers ‚Introductio in analysin infinitorum' (Lausanne 1748, Opera (1) 8) einen der wichtigsten Ausschnitte aus Eulers Gesamtwerk" (Faber 1935, S. VII). Im Einzelfalle kann man Eulers Arbeiten nicht unbedingt eindeutig dem Thema Reihen zuordnen; es gibt daher unterschiedliche Angaben, wie viele Arbeiten er über Reihen verfasst hat. So erwähnt Paul Heinrich Fuß in seinem Verzeichnis von Eulers Schriften unter dem Thema „Series" insgesamt 72 Arbeiten (Fuß P. H. 1843, S. LXVII–LXXII, Nr. 120–192). Hagen teilt in seinem Verzeichnis das Kapitel „Reihen" in drei Kapitel, nämlich „Series in genere", „Series in specie" und „Series particulares", ein und zählt insgesamt 77 Beiträge auf (Hagen 1896, S. 10–15, Nr. 98–175).

In den Bänden der „Opera omnia" sind innerhalb der ersten Serie die vier Bände 14, 15, 16,1 und 16,2 mit insgesamt 82 Abhandlungen den unendlichen Reihen, Produkten und Kettenbrüchen gewidmet. Diese Bände sind zwischen 1925–1935 erschienen. Mit nur ganz wenigen Ausnahmen waren fast alle diese Beiträge Eulers in lateinischer Sprache verfasst und in St. Petersburg gedruckt worden.

4.2. Das sogenannte Basler Problem

Ein besonderes zum Thema Reihen gehörendes Problem betrifft die Frage nach der Summe der reziproken Quadratzahlen, also die Frage nach der Summe von

$$1 + \tfrac{1}{4} + \tfrac{1}{9} + \tfrac{1}{16} + \tfrac{1}{25} + \tfrac{1}{36} + \text{etc.}$$

Diese Reihe hat wohl als Erster Pietro Mengoli (1626–1686) im Jahre 1650 erwähnt[36], später noch weitere Mathematiker. Die eigentliche Diskussion setzte aber erst 1689 ein, als Jakob I Bernoulli (1654–1705), der seit 1687 an der Universität Basel eine Professur für Mathematik bekleidete, eingestand, dass er zu keiner Lösung gekommen sei[37].

Otto Spiess (1878–1966) beginnt seinen 1945 erschienenen Aufsatz „Die Summe der reziproken Quadratzahlen" mit der Feststellung: „Die Geschichte der Mathematik kennt eine Florentiner Aufgabe, ein Petersburger und ein Königsberger Problem – mit weit besserem Recht könnte man von einem Basler Problem reden, wenn man darunter die Aufgabe versteht, die Summe der reziproken ganzen Quadratzahlen zu bestimmen" (Spiess 1945, S. 66). Als Grund für diese Auffassung gibt er an, dass es aus Basel stammende Mathematiker gewesen seien, die die wesentlichen Beiträge zu diesem Problem geliefert hätten. Seit Spiess hat sich daher auch die Bezeichnung „Basler Problem"[38] eingebürgert. In der Tat haben zu diesem Problem Leonhard Euler, Johann I Bernoulli,

36 Pietro Mengoli: Novae quadraturae geometricae. Bologna 1650; die erwähnte Reihe steht auf der vorletzten Seite der Vorrede.

37 Opera omnia (4) A 2, S. 45 und S. 160, Anm. 13, ferner Spiess 1945, S. 66.

38 Englisch: Basel Problem.

Nikolaus I Bernoulli und Daniel Bernoulli Beiträge geliefert, Gelehrte also, die alle gebürtige Basler waren[39]. „Den Vogel abgeschossen hat aber Euler, der [das Problem] zuerst und von verschiedenen Seiten bezwang und dadurch die andern Lösungen erst hervorrief", so Otto Spiess (Spiess 1945, S. 86). Ed Sandifer, der eine Liste der „Top Ten Theorems" aufgestellt hat, die von Euler gelöst worden sind, nennt unter Nr. 1 Eulers Lösung des Basler Problems (Sandifer 2007c).

Im Folgenden sollen lediglich zwei Arbeiten von Euler näher beleuchtet werden, in denen es um das Basler Problem geht, nämlich „De summis serierum reciprocarum" (Euler 1740), die aber bereits aus dem Jahr 1735 stammt, sowie die „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc." (Euler 1743). Paul Heinrich Fuß hatte den engen Zusammenhang zwischen diesen beiden Arbeiten erkannt, trägt doch die erste Arbeit in seinem Verzeichnis der Eulerschen Schriften die Nummer 174, während er der zweiten, wie bereits erwähnt, die neue Nummer 174a zugeordnet hat (Stäckel/Ahrens 1908, S. 101).

4.2.1. Euler: De summis serierum reciprocarum (E 41)

Leonhard Eulers Arbeit „De summis serierum reciprocarum" erschien zwar erst im Jahre 1740 und zwar in Band VII der „Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae", in dem die Beiträge aus den Jahren 1734 und 1735 veröffentlicht wurden. Tatsächlich hatte Euler diese Arbeit bereits am 5./16.12.1735 der akademischen Konferenz in St. Petersburg vorgelesen. Im Protokoll heißt es dazu: „Hr. Prof. Euler producirte und verlas eine Dissertation de summis serierum reciprocarum, und nachdem er sie absolviret, hat er sie wieder mit sich nach Haus genommen"[40]. Es ist besonders diese Arbeit, die mit Eulers Lösung des Basler Problems in Verbindung gebracht wird. Daher gibt es hierzu auch eine Fülle von Literatur, so (Spiess 1945, S. 67–70; Hofmann 1959, S. 185; Dunham 1999, S. 45–48; Havil 2007, S. 50–52; Sandifer 2007a, S. 157–165, Knobloch 2008, S. 13f). Sandifer zeichnete darüber hinaus diesen Beitrag Eulers (E 41) mit der höchsten Bewertung, drei Sternen, aus (Sandifer 2007a, S. XI), was soviel wie „Glanzleistung" bedeutet.

---

39 Was die Beiträge von Nikolaus I Bernoulli und Daniel Bernoulli zum Basler Problem anbelangt, so wird im Folgenden auf sie nicht eingegangen werden; es sei hierfür auf die Literatur verwiesen (Spiess 1945, S. 70–85).

40 Procès-verbaux des séances de l'Académie Impériale des Sciences 1 (1725–1743), St. Petersburg 1897, S. 229, 5. December.

Euler selbst berichtete über die Genese seines 1740 publizierten Ergebnisses: „Ich bin aber neulich völlig unerwartet auf einen eleganten Ausdruck für die Summe dieser Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16}$ + etc. geführt worden, der von der Kreisquadratur abhängt, so dass wenn man die wahre Summe dieser Reihe hätte, daraus zugleich die Kreisquadratur folgte. Ich fand nämlich, dass das Sechsfache der Summe dieser Reihe dem Quadrat des Umfangs des Kreises gleich ist, dessen Durchmesser 1 ist oder wenn man die Summe jener Reihe gleich s setzt, $\sqrt{6s}$ zu 1 das Verhältnis des Umfanges zum Durchmesser erhalten wird“[41] (Euler 1740, § 2), d.h. wenn $\frac{\pi^2}{6} = s$, so ist $\pi = \sqrt{s \cdot 6}$.

In der Gleichung sin x = 0 ersetzt Euler die Sinusfunktion durch die Reihe:

$x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \ldots = 0$, diese Gleichung hat die Nullstellen 0, $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$.

Die Nullstelle x = 0 wird ausgeschaltet, so dass man durch x teilen kann:

(⋆) $1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots = 0 = \frac{\sin x}{x}$ mit den Nullstellen $\pm\pi, \pm 2\pi, \pm 3\pi, \ldots$

Nun gilt

(⋆⋆) $\frac{\sin x}{x} = (1 - \frac{x^2}{\pi^2})(1 - \frac{x^2}{4\pi^2})(1 - \frac{x^2}{9\pi^2})(\ldots)\ldots$

Jetzt wird eine Überlegung zwischengeschaltet. Euler betrachtet nunmehr die Gleichung

1–sin x = 0 mit den Wurzeln $\frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2}, \ldots$; alle diese Wurzeln sind Doppelwurzeln, weil die Gerade $y = 1$ die Sinusfunktion berührt und nicht schneidet. Also sind die Nullstellen $\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, -\frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, -\frac{7\pi}{2} \ldots$.

Da $1 - \sin x = 1 - x + \frac{x^3}{3!} - \frac{x^5}{5!} + \ldots$

41 Diese Übersetzung des lateinischen Textes stammt von Eberhard Knobloch, dem hierfür sehr herzlich gedankt sei.

$$=\left(1-\frac{2x}{\pi}\right)^2\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)^2\left(1-\frac{2x}{5\pi}\right)^2\left(1+\frac{2x}{7\pi}\right)^2\ldots;\text{ es gilt.}$$

$$-1 = -\frac{4}{\pi}+\frac{4}{3\pi}-\frac{4}{5\pi}+\ldots,$$

d.h. $\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+-\ldots$; das Ergebnis ist also ein bekanntes Resultat, nämlich die Leibnizreihe.

Euler kommt zu dem Schluss (§ 10): „Hieraus leuchtet eine große Bekräftigung dieser Methode hervor, wenn diese etwa jemandem nicht hinreichend sicher erscheinen sollte, so dass es in keiner Weise gestattet ist, an dem übrigen, was aus dieser Methode abgeleitet wurde, zu zweifeln“[42]. Das heißt, Euler kann bei dem oben unterbrochenen Problem getrost fortfahren. Aus den Gleichungen (*) und (**) folgt:

$$\frac{1}{3!}=\frac{1}{\pi^2}+\frac{1}{4\pi^2}+\frac{1}{9\pi^2}+\ldots,\ \text{d.h. } 1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\ldots\ldots=\frac{\pi^2}{6}=S_2.$$

Mittels eines Analogieschlusses, der natürlich kein strenger Beweis ist, ist es ihm also gelungen, die Behauptung zu beweisen.

Im Folgenden beschäftigt sich Euler u.a. mit höheren Potenzreihen und zeigt, dass

$$S_4=\frac{\pi^4}{90},\ S_6=\frac{\pi^6}{945},\ S_8=\frac{\pi^8}{9450},\ S_{10}=\frac{\pi^{10}}{93555},\ S_{12}=\frac{691\cdot\pi^{12}}{6825\cdot 93555},\ \text{usw.}$$

d.h. die Summe der reziproken Werte der geraden Potenzen aller natürlichen Zahlen läßt sich stets in einfacher Weise durch die Bernoulli-Zahlen ausdrücken[43].

4.2.2. Das Basler Problem in Eulers Briefwechsel mit Johann I Bernoulli

Die Entdeckung der Summen $S_2 = \frac{\pi^2}{6}$ und $S_4 = \frac{\pi^4}{90}$ hatte Euler vor der Drucklegung seiner oben erwähnten Abhandlung am 8.6.1736 James Stirling[44] und kurze Zeit später, in einem nicht mehr auffindbaren

42 Die Übersetzung ist abermals Eberhard Knobloch zu verdanken.
43 Siehe Opera omnia (4) A 2, S. 160, Anm. 13.
44 Ebenda.

Brief, vermutlich im August 1736, auch Daniel Bernoulli mitgeteilt (Stäckel 1907/8, S. 42). Daniel Bernoulli antwortete am 12.9.1736:

> „Das theorema summationis seriei
>
> $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9}$ etc. $= \frac{pp}{6}$ und $1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4}$ etc. $= \frac{p^4}{90}$
>
> ist sehr merkwürdig[45]. Sie werden ohne Zweifel a posteriori darauf gekommen seyn. Ich möchte die Solution gern von Ihnen sehen“ (Fuß P. H. 1843, Bd. 2, S. 433–435, Lettre VIII, hier S. 435).

Da seit 1998 der Briefwechsel zwischen Euler und Johann I Bernoulli, der ganz in lateinischer Sprache geführt wurde, in deutscher Übersetzung vorliegt, sollen aus ihm hier einige der für unser Thema relevanten Abschnitte vorgestellt werden.

Durch Daniel erfuhr Johann I Bernoulli von Eulers Lösung des Problems und versuchte nun seinerseits, die Lösung selbst zu finden, was ihm auch gelang. In dem Brief vom 2.4.1737 nämlich ließ er Euler wissen[46]:

> „Ferner habe ich vernommen, dass Sie eine Methode gefunden haben, die Reihe der Brüche
>
> $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} +$ etc., d.h. $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} +$ etc.
>
> zu summieren, deren Nenner nämlich wie die Quadrate der natürlichen Zahlen 1, 2, 3, 4 etc. fortlaufen, was meinem Bruder Jakob ehemals unergründlich blieb, wie er selbst […] eingesteht. Sie fanden als Summe dieser Reihe cc/6,[47] wobei c der Umfang eines Kreises mit dem Durchmesser gleich 1 bezeichnet wird. Mein Daniel versuchte, die Quelle dieses Sachverhalts aufzuspüren, jedoch erfolglos, obwohl Sie ihm in Ihrem letzten Brief – wenn ich nicht irre – einen grundlegenden Hinweis gegeben haben. Sobald er mir aber die von Ihnen gefundene Summe cc/6 – und sonst nichts – genannt hatte, sah ich ein, dass die Reihensumme auf die Kreisquadratur zurückgeführt werden kann. Neugierig, woraus der analytische Ansatz zu gewinnen wäre, entdeckte ich bald selbst aus eigener Kraft das ganze Geheimnis unter Zuhilfenahme eines eleganten Satzes von Newton, der ohne Beweis in seiner ‚Algebra', p. 251, London 1707, steht. Den Beweis dieses Theorems aber habe ich auch gefunden. Dort wird angegeben, wie aus den Koeffizienten einer beliebigen gegebenen Gleichung die Summe nicht nur der Wurzeln, sondern auch aus den Wurzeln die Summe der Quadrate, der Kuben, der Biquadrate etc. bestimmt werden kann. Da-

45 Daniel Bernoulli schreibt *p* anstelle von π.

46 Brief Nr. 12, in: Opera omnia (4) A 2, S. 151–161, hier S. 156f.

47 Johann I Bernoulli schreibt c (circumferentia) anstelle von π.

mit Sie also beurteilen können, ob ich das Wesen der Sache berührt habe, drücke ich hier die Summen der Reihen aus, in denen die Nenner die vierten, dann auch die sechsten Potenzen der natürlichen Zahlen 2, 3, 4, 5, etc. durchlaufen. Ich fand nämlich (indem ich für jede einzelne eine neue Rechnung aufstellte)

$$1 + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^4} + \frac{1}{4^4} + \text{etc.} = \frac{c^4}{90}$$

und ebenso

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.} = \frac{c^6}{940}\,.$$

Aus diesen Reihen wird man weiter die Summe

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.}$$

herausfinden, und so kann man beliebig zu höheren Exponenten weitergehen. Doch die Rechnung wird Schritt für Schritt mühsamer, und sie erstreckt sich nur auf geradzahlige Exponenten. Wenn diese jedoch ungerade sind, so gestehe ich, die Sache noch nicht im Griff zu haben. Wenn Sie im Besitz einer Methode für ungeradzahlige Potenzen sein sollten, etwa um diese Reihe

$$1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^3} + \text{etc.}$$

zu summieren, so würde ich mich dankbar von Ihnen belehren lassen. Übrigens bleibt bei diesem Unterfangen ein gewisser Skrupel, der daher rührt, dass man als Hypothese annimmt, die Bestimmung der Wurzeln hänge von den Koeffizienten der Glieder einer beliebigen, auch unendlichen Gleichung ab. Dies trifft zwar im allgemeinen zu, doch kommt es sehr oft vor, dass in einer vorliegenden Gleichung ausser den brauchbaren Wurzeln (die das Problem lösen) auch unbrauchbare oder fremde drin stecken, ja sogar auch unmögliche oder imaginäre."

Am 27.8./7.9.1737 antwortete Euler, dass die geäußerten Bedenken gerechtfertigt seien[48]:

„Die Summierung der Reihen der reziproken geraden Potenzen, die Sie mir beschrieben haben, stimmt fast ganz mit meiner Methode überein. Indessen, was die Resultate über die Beschaffenheit der Koeffizienten betrifft, so glaube ich, ist es wegen eines Schreibfehlers geschehen, dass Sie die Summe der Reihe

$$1 + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^6} + \frac{1}{4^6} + \text{etc.}$$

48 Brief Nr. 13, in: Opera omnia (4) A 2, S. 161–175, hier S. 168f.

$c^6/940$ gesetzt haben, da diese doch $c^6/945$ beträgt. Für die übrigen geraden Potenzen wird die Rechnung nicht nur länger, sondern die Resultate werden auch ungeheuer kompliziert: so wird

$$1 + \frac{1}{2^8} + \frac{1}{3^8} + \frac{1}{4^8} + \text{etc.} = \frac{c^8}{9450}$$

und

$$1 + \frac{1}{2^{10}} + \frac{1}{3^{10}} + \text{etc.} = \frac{c^{10}}{93555}$$

Auch wenn die Nenner einem gewissen Gesetz zu folgen scheinen, so waren die Zähler bis dahin nur zufällig 1, denn die Summe von

$$1 + \frac{1}{2^{12}} + \frac{1}{3^{12}} + \text{etc.}$$

hat 691 im Zähler. Die ungeraden Potenzen kann ich nicht summieren, und ich glaube nicht, dass ihre Summe von der Kreisquadratur abhängt. […] Der Einwand, den Sie gegen diese Methode anbringen, wiegt schwer, jedoch glaube ich aber nicht daran, einen leichten Beweis dafür erbringen zu können, dass jene Gleichung keine komplexen Wurzeln besitzt. So weist ja die Newtonsche Regel auf keine komplexen Wurzeln hin, woraus man vielleicht vollständigere Gewissheit ableiten könnte. Da aber dieselbe Methode die Leibnizsche Reihe $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - etc.$ liefert und da die Summen der übrigen Reihen mit denen, welche ich schon längst durch Approximation bestimmt habe, sehr genau übereinstimmen, wird man diese Tatsache gleichsam für eine Bestätigung der Methode halten können."

Im Folgenden schilderte Euler im Detail eine weitere Beweismethode, die auf Integrationen beruht, und die er dann 1743 (siehe Abschnitt 4.2.3) veröffentlichen sollte.

Johann I Bernoulli war sehr angetan und antworte Euler am 26.10.1737[49]:

„Was Sie zu den Reihen sagen, ist ganz prächtig und Ihres Scharfsinnes wirklich würdig. Geradezu wunderbar dünkt mich Ihre zweite Methode die Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ zu summieren",

die er im weiteren Verlauf des Briefes erläuterte.

Und Euler freute sich darüber, dass sich Johann I freute, denn am 10./21.12.1737 antwortete er diesem[50]:

„Dass meine zweite, rein analytische Methode, womit ich die Summe der Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \text{etc.}$ herausgefunden habe, in so hohem Masse Ihren Beifall findet, freut mich sehr. Ich selbst zöge sie der anderen weitaus vor, wenn es möglich wäre, sie gleich wie jene an die höheren Potenzen

49 Brief Nr. 14, in: Opera omnia (4) A 2, S. 175–191, hier S. 185.
50 Brief Nr. 15, in: Opera omnia (4) A 2, S. 191–198, hier S. 195.

> anzupassen, was ich allerdings bis heute nicht fertig bringen konnte, auch wenn ich nicht daran zweifle, dass sie ebenso allgemein ist. Alle Bedenken aber, die gegen die andere vorgebracht werden können, werden jedenfalls durch die Übereinstimmung dieser Methode mit der früheren behoben".

Auch in später zwischen Euler und Johann I Bernoulli gewechselten Briefen spielt die Reihe der reziproken Quadratzahlen noch eine wichtige Rolle, doch können diese Details hier übergangen werden. Für das Folgende ist es wesentlich, festzuhalten, dass Johann I Bernoulli die von Euler 1740 veröffentlichte Methode auch selbst gefunden hat. Dass er diese Methode später, ohne Euler auch nur zu erwähnen, als seine eigene veröffentlichte, ist typisch für ihn[51]. Des Weiteren ist von Bedeutung, dass Euler über seine 1743 veröffentlichte Methode bereits im Jahre 1737 verfügt hatte. Er selbst zog diese zweite Methode seiner ersten Methode, die er 1740 publiziert hatte (E 41), im Prinzip zwar vor, bedauerte aber gleichzeitig, dass sich das Verfahren nicht auf höhere Potenzen ausdehnen lasse.

4.2.3. Euler: Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ &c. (E 63)

Euler schrieb sein Werk „Démonstration De la somme de cette Suite […]" zwischen 1740 und 1742, denn er zitierte dort sein 1740 veröffentlichtes Werk „De summis serierum reciprocarum" (E 41), und 1743 wurde die Abhandlung veröffentlicht (Stäckel 1907/8, S. 52). Dieses Werk (E 63) stellt unter den Beiträgen Eulers zur Theorie der Reihen eine von nur wenigen Ausnahmen dar: es ist nicht in St. Petersburg publiziert worden, und es war nicht in Latein, sondern auf Französisch geschrieben. Es war dies auch die einzige Arbeit, die Euler im „Journal littéraire" veröffentlicht hat. Euler hatte 1741 St. Petersburg verlassen und war nach Berlin übergesiedelt, wo er die nächsten 25 Jahre an der dortigen Akademie wirken sollte. Vielleicht war der Umzug der Grund dafür, dass er seinen Beitrag nicht mehr in St. Petersburg und noch nicht in den Berliner Akademieschriften veröffentlichte. In der Berliner Akademie stellte er sich am 6.9.1742 vor, indem er eine Liste mit sieben Problemen vorlegte, die er für wichtig hielt[52], darunter Nr. 4: „De

---

51 Siehe Opera omnia (4) A 2, S. 46: „[Johann I Bernoulli] nahm seine Nachentdeckung in den vierten Band seiner Werke (JB 152) auf, ohne über die Priorität seines Lieblings- und Meisterschülers Euler auch nur eine Silbe zu verlieren!"

52 Archiv der Berlin-Brandenburgischen Akademie der Wissenschaften, PAW 1700–1811, I: IV, 37, S. 148.

summis serierum reciprocarum ex potestatibus numerorum naturalium ortarum" („Über die Summation reziproker Reihen, die aus Potenzen natürlicher Zahlen hervorgehen") (Stäckel/Ahrens 1908, S. 21, Havil 2007, S. 52f).

An Namen erwähnte Euler lediglich „Ludolf a Keulen"[53] als den Schöpfer eines möglichst genauen Wertes von π und Jacques Bernoulli (Jakob I Bernoulli), der sich vergeblich um eine Lösung des später so genannten Basler Problems bemüht hatte (Euler 1743, Opera S. 178).

Eigentlich geht es Euler um die Summe der allgemeinen Reihe

$$1+\frac{1}{2^n}+\frac{1}{3^n}+\frac{1}{4^n}+\frac{1}{5^n}+\frac{1}{6^n}+etc.$$

Er liefert zwei verschiedene Beweise, die beide ganz anders verlaufen als sein 1740 veröffentlichter erster Beweis (siehe Abschnitt 4.2.1). Beide Beweise basieren auf Integrationsmethoden und gliedweise durchgeführter Integration, sind aber nur für n = 2 praktikabel, für Potenzen mit n > 2 funktionieren beide Verfahren nicht mehr (Euler 1743, Opera S. 178).

Im Folgenden sollen beide Beweismethoden nur kurz skizziert werden.

In dem Kreis mit r = 1 gilt x = sin s,

d.h., s = arc sin x = $x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}\frac{x^9}{9}+\ldots$ mit

s = $\frac{\pi}{2}$ für x = 1.

$\frac{1}{2}$ (arc sin x)^2 =

$$\int_0^x \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}dx=\int_0^x \left(x+\frac{1}{2}\frac{x^3}{3}+\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\frac{x^5}{5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6}\frac{x^7}{7}+\ldots\right)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\,.$$

Setzt man x = 1 und integriert gliedweise, so kommt man zu

$$\frac{\pi\pi}{8}=1+\frac{1}{3\cdot 3}+\frac{1}{5\cdot 5}+\frac{1}{7\cdot 7}+\frac{1}{9\cdot 9}+etc.$$ (Faber 1935, S. XXXVI).

53 Ludolph van Ceulen (1540–1610) veröffentlichte 1596 in Delft sein Werk „Van den Circkel".

Bildet man nun $S_2 - \frac{1}{4}\ S_2$, so erhält man $1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}+\frac{1}{81}+etc.$ = $\frac{3}{4}\ S_2$, d.h. = $\frac{3}{4}\frac{\pi\pi}{6}=\frac{\pi\pi}{8}$.

Ed Sandifer hat diesen ersten Beweis Eulers in aller Ausführlichkeit und mit allen Zwischenschritten vorgestellt, die hier nicht wiederholt werden sollen (Sandifer 2007a, S. 368f).

Genau diese Beweismethode hatte Euler in seinem Brief vom 27.8./7.9.1737 auch Johann I Bernoulli geschildert. Ferner erwähnte er am 10./21.12.1737 gegenüber Bernoulli auch, dass sich dieses Verfahren nicht auf höhere Potenzen ausweiten lasse (siehe Abschnitt 4.2.2).

Dagegen hat Sandifer auf eine Beschreibung des zweiten Beweises verzichtet, in dem Euler von der Differentialgleichung

$(1-x^2)\frac{d^2y}{dx^2}-x\frac{dy}{dx}-1=0$ ausgeht, die die Lösung

$\frac{1}{2}(\arcsin x)^2=\frac{xx}{2}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8}+\frac{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8}{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}\frac{x^{10}}{10}+etc.$ hat.

Daraus folgt:

$$\frac{1}{6}\ (\text{arc sin x})^3\ =\ \int_0^x(\frac{x^2}{2}+\frac{2}{3}\frac{x^4}{4}+\frac{2\cdot 4}{3\cdot 5}\frac{x^6}{6}+\frac{2\cdot 4\cdot 6}{3\cdot 5\cdot 7}\frac{x^8}{8}+...)\frac{dx}{\sqrt{(1-x^2}}\ .$$

Gliedweise durchgeführte Integration für x = 1 ergibt

$\frac{\pi^3}{48}=\frac{1}{2\cdot 2}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{4\cdot 4}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{6\cdot 6}\frac{\pi}{2}+\frac{1}{8\cdot 8}\frac{\pi}{2}+etc.$, woraus folgt:

$\frac{\pi^2}{6}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+etc.$ (siehe Faber 1935, S. XXXVIf).

Den Schluss der vorliegenden Arbeit bildet eine Zusammenstellung der Summe der Reihen S_2, S_4, S_6, …, S_{26}, wobei die Faktoren von π^{2n} die später so genannten Bernoullizahlen darstellen. Hier erwähnt Euler jedoch nicht den Namen Jakob I Bernoullis, der als erster im Jahre 1713 in seiner „Ars conjectandi" diese – rationalen – Zahlen vorgestellt hatte.

Im Gegensatz zu Eulers Arbeit „De summis serierum reciprocarum" (E 41) zeichnet Ed Sandifer Eulers „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$ + &c." nicht mit drei Sternen, sondern nur mit einem Stern aus und lässt seine Leser überdies noch wissen: „A correct, but rather boring, solution to the problem" (Sandifer

2007a, S. XIII). Man muss sich dieser Meinung wahrhaftig nicht anschließen, wird doch in der ersten dieser beiden Arbeiten von Euler vielmehr eine Analogiebetrachtung und kein einwandfreier Beweis geboten. Dies geschah erst in der zweiten Arbeit aus dem Jahre 1743; in der ersten Arbeit wurde zwar dank einer genialen Idee die exakte Summe der Reihe abgeleitet, in der zweiten Arbeit jedoch wird die Aussage streng bewiesen: „Démonstration“ ist das erste Wort im Titel! Paul Stäckel hingegen beurteilt Eulers 1743 veröffentlichte Arbeit wie folgt (Stäckel 1907/8, S. 54): „So hat Euler nicht nur zuerst die Summen der reziproken geraden Potenzen der natürlichen Zahlen bestimmt, sondern auch den Zusammenhang der dabei auftretenden Koeffizienten mit anderen wichtigen Formeln der Analysis nachgewiesen. Seine Untersuchungen über diesen Gegenstand gehören zu den schönsten und tiefsten, mit denen uns sein Genius beschenkt hat.“

Auf seine 1743 veröffentlichten Beweise kam Euler in späteren Arbeiten nicht mehr zu sprechen. Wohl aber beschäftigte er sich auch weiterhin mit der Summe der reziproken Quadratzahlen und gelangte dabei auch noch zu wesentlich weiter reichenden Ergebnissen (Spiess 1945, S. 70–86; Faber 1935, S. XVI–XXXIX).

4.2.4. Reihen bzw. das Basler Problem in Eulers Nachlass

Nachdem Leonhard Euler am 7./18.9.1783 in St. Petersburg verstorben war, blieb sein Nachlass in der dortigen Akademie; er befindet sich heute in der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften. Der Nachlass enthält zahlreiche Arbeiten Eulers zu Mathematik, Mechanik, Astronomie, Geodäsie und Physik sowie wissenschaftliche und technische Gutachten, ferner Notizbücher. Dazu kommen eine Beschreibung der dienstlichen und der persönlichen Dokumente, Annotationen zu Protokollnotizen der akademischen Versammlung und Eulers Korrespondenz (Kopelevič u.a. 1962, S. 17–24). Eine detaillierte Beschreibung des handschriftlichen wissenschaftlichen Nachlasses findet sich auf den folgenden Seiten (ebenda 1962, S. 27–119).

Was die mathematischen Manuskripte anbelangt, so werden in ihnen auch zahlreiche Arbeiten genannt, die unter den Titel „Reihen, Produkte und Kettenbrüche“ fallen (ebenda 1962, S. 37–40, Nr. 57–80). Dieser Bestand konnte hier gar nicht in Betracht gezogen werden, es bleibt zukünftigen Eulerforschern vorbehalten, diesen Schatz auszubeuten.

Doch zu den bereits erwähnten Notizbüchern lässt sich bereits jetzt etwas mehr sagen. Der Inhalt dieser Notizbücher sollte eigentlich in der

4. Serie von Eulers Opera omnia, Reihe B, veröffentlicht werden; aber leider wurde dieses Projekt fallengelassen. Euler hinterließ zwölf Notizbücher, russisch: записные книжки, die chronologisch geordnet sind und mehr als 3000 Seiten umfassen (Kopelevič u.a. 1962, S. 114–119, Nr. 129–140). Die Inhalte der einzelnen Bücher sind heterogen, da Euler stets gleichzeitig über mehrere Themen gearbeitet hat. Doch sind diese Notizbücher in jüngerer Zeit durch eine detailliertere Inhaltsangabe besser erschlossen worden. Eine erste verbesserte Inhaltsangabe wurde 1988 in russischer Sprache veröffentlicht. Sie wurde 2007 in einer englischen Übersetzung einer größeren Allgemeinheit zugänglich gemacht (Knobloch 1988/2007). Bereits aus ihr geht hervor, dass es vor allem die Notizbücher Nr. 131 und 132 sind, in denen u.a. auch das Thema „Reihen, Produkte und Kettenbüche" behandelt wird (Knobloch 1988/2007, §1.4.) Das Notizbuch Nr. 131 umfasst die Jahre von 1736 bis 1740 und das Notizbuch Nr. 132 die Jahre von 1740 bis 1744. Daher verwundert es nicht, dass es hier auch zahlreiche Notizen Eulers gibt, die das Basler Problem betreffen. Einen noch detaillierteren Blick auf diese Notizbücher gestattet eine 1999 in russischer Sprache erschienene Beschreibung; hier wird das Thema Reihen noch ausführlicher vorgestellt (Matvievskaja/ Gorlova 1999, S. 330–338). Die Auswertung dieser Notizen würde es erlauben, einen noch wesentlich tieferen Einblick in Eulers Gedankenentwicklung zu bekommen. Doch auch diese Arbeit kann hier nicht geleistet werden und muss künftigen Eulerforschern überlassen bleiben.

Die Notizbücher sowie zahlreiche weitere wissenschaftliche Manuskripte Eulers befinden sich in der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie im sogenannten Eulerfond, das ist der fond 136. Das handschriftliche Material wird unter der Signatur fond 136, opis' 1, die Eulersche Korrespondenz unter fond 136, opis' 2, aufbewahrt.[54]

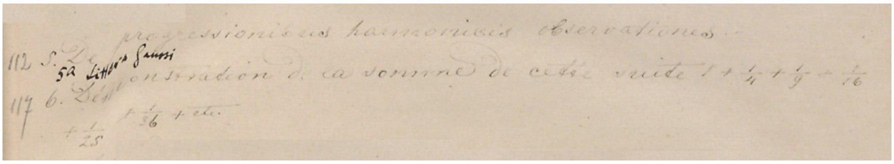
5. Der Fundort: fond 136, opis' 3, Nr. 13

Um hier gleich die Pointe vorwegzunehmen: Gauß' Abschrift befindet sich in der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften in einem Band unter der Signatur fond 136, opis' 3, Nr. 13 (Roussanova 2009). Dieser 460 Blätter umfassende Band wurde, wie die Archivaufzeichnungen zeigen, in jüngerer Zeit nur

54 Üblicherweise werden in russischen Archiven Archivalien mit „fond" bezeichnet und in „opis'" untergliedert.

zweimal ausgeliehen bzw. eingesehen, nämlich am 14.3.1997 von Herrn Kopylov und am 26.2.2009 von Elena Roussanova.

Dieser Band ist ein Konvolut, das bis auf eine Ausnahme bereits veröffentlichte Arbeiten von Euler enthält, sozusagen zusammengebundene Sonderdrucke der einzelnen Arbeiten. Der Band beginnt mit drei Seiten, die von Hand geschrieben sind, und zwar dem sog. „Index" (l. 2r und 2v) sowie einem Blatt mit der Überschrift „Trigonom. Analysis und Reihensummirung" (l. 3r)[55]. Der „Index" (l. 2r und 2v) gibt den Inhalt des Konvoluts wieder; es handelt sich um die Titel von insgesamt 38 Arbeiten Eulers, oftmals in Kurzzversion, ohne bibliographische Angaben, die von 1 bis 38 durchnummeriert sind. In diesem „Index" wurde zwischen Titel Nr. 5 und Titel Nr. 6 mit anderer Tinte eingefügt, „Nr. 5a „Littera Gaussi":



Es folgt die Nr. 6 mit dem Titel „Démonstration de la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$ + etc." Ab Nr. 7 geht es wieder mit den gedruckten Arbeiten Eulers weiter. Der Band ist vielleicht deshalb von den Eulerforschern nicht beachtet worden, weil er ansonsten nur bereits veröffentlichte Beiträge und keinerlei Manuskripte von Euler enthält.

Hier sei der Inhalt des „Index" (l. 2r und 2v) wiedergegeben, wobei soweit wie nötig die Titel der Eulerschen Arbeiten, die bibliographischen Angaben, der Publikationsort in den „Opera omnia" sowie die Eneströmnummern ergänzt wurden. Diese Ergänzungen sind durch [] gekennzeichnet:

1. De summatione innumerabilium progressionum. [Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), 1738, S. 91–105, in Opera omnia (1) 14, S. 25–41. **(E 20)**]

2. De progressionibus transcendentibus etc [seu quarum termini generales algebraice dari nequeunt. Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1730/1), 1738, in Opera omnia (1) 14, S. 1–24. **(E 19)**]

---

55 Im Russischen wird Blatt mit „list" bezeichnet, hier abgekürzt durch l.; im Folgenden wurde den gezählten Blättern, um Vorder- bzw. Rückseite zu kennzeichnen, die lateinischen Bezeichnungen recto (abgekürzt r) und verso (abgekürzt v) beigegeben.

3. Methodus generalis summandi progressiones. [Comment. acad. sc. Petrop. 6 (1732/3), 1738, S. 68–97, in Opera omnia (1) 14, S. 42–72. **(E 25)**]

4. De linea celerrimi descensus in medio quocunque resistente. [Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 135–149, in Opera omnia (1) 25, S. 41–53. **(E 42)**]

5. De progressionibus harmonicis observationes. [Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 150–161, in Opera omnia (1) 14, S. 87–100. **(E 43)**]

5a Littera Gaussi

6. Démonstration de la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36}$ + etc. [Abschrift von Gauß aus dem „Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord" (La Haye) 2 : 1, 1743, S. 115–127, in Opera omnia (1) 14, S. 177–186. **(E 63)**]

7. Methodus universalis Serierum convergentium summas [quam proxime inveniendi. Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 3–9, in Opera omnia (1) 14, S. 101–107. **(E 46)**]

8. Inventio summae cujusque seriei ex dato termino generali. [Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 9–22, in Opera omnia (1) 14, S. 108–123. **(E 47)**]

9. Theorematum quorundam ad numeros primos spectantium demonstratio. [Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 141–146, in Opera omnia (1) 2, S. 33–37. **(E 54)**]

10. Methodus universalis series summandi ulterius promota. [Comment. acad. sc. Petrop. 8 (1736), 1741, S. 147–158, in Opera omnia (1) 14, S. 124–137. **(E 55)**]

11. Variae observationes circa series infinitas. [Comment. acad. sc. Petrop. 9 (1737), 1744, S. 160–188, in Opera omnia (1) 14, S. 216–244. **(E 72)**]

12. De seriebus quibusdam considerationes. [Comment. acad. sc. Petrop.12 (1740), 1750, S. 53–96, in Opera omnia (1) 14, S. 407–462. **(E 130)**]

13. De minimis oscillationibus corporum tam rigidorum quam flexibilium [Methodus nova et facilis. Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 99–122, in Opera omnia (2) 10, S. 17–34. **(E 40)**]

14. De summis serierum reciprocarum. [Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 123–134, in Opera omnia (1) 14, S. 73–86. **(E 41)**]

15. De seriebus divergentibus. [Novi Comment. acad. sc. Petrop. 5 (1754/5), 1760, S. 205–237, in Opera omnia (1) 14, S. 585–617. **(E 247)**]

16. Methodus aequationes differentiales altiorum graduum integrandi ulterius promota. [Novi Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1750/1), 1753, S. 3–35, in Opera omnia (1) 22, S. 181–213. **(E 188)**]

17. De serierum determinatione [seu nova methodus inveniendi terminos generales serierum. Novi Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1750/1), 1753, S. 36–85, in Opera omnia (1) 14, S. 463–515. **(E 189)**]

18. Consideratio quarumdam serierum, [quae singularibus proprietatibus sunt praeditae. Novi Comment. acad. sc. Petrop. 3 (1750/1), 1753, S. 86–108, in Opera omnia (1) 14, S. 516–541. **(E 190)**]

19. Observationes circa novum et singulare progressionum genus. [Novi Comment. acad. sc. Petrop. 20 (1775), 1776, S. 123–139, in Opera omnia (1) 7, S. 246–261. **(E 476)**]

20. Meditationes circa singulare Serierum genus. [Novi Comment. acad. sc. Petrop. 20 (1775), 1776, S. 140–186, in Opera omnia (1) 15, S. 217–267. **(E 477)**]

21. De seriebus, in quibus producta ex binis terminis contiguis datam constituunt progressionem. [Opuscula analytica 1, 1783, S. 3–47, in Opera omnia (1) 15, S. 338–382. **(E 550)**]

22. Exercitationes analyticae. [Novi Comment. acad. sc. Petrop. 17 (1772), 1773, S. 173–204, in Opera omnia (1) 15, S. 131–167. **(E 432)**]

23. De eximio usu methodi interpolationum [in serierum doctrina. Opuscula analytica 1, 1783, S. 157–210, in Opera omnia (1) 15, S. 435–497. **(E 555)**]

24. De relatione inter ternas pluresve quantitates instituenda. [Opuscula analytica 2, 1785, S. 91–101, in Opera omnia (1) 4, S. 136–145. **(E 591)**]

25. Evolutio producti infiniti $[(1-x)(1-xx)(1-x^3)(1-x^4)(1-x^5)(1-x^6)\ etc.]$ in seriem simplicem. [Acta acad. sc. Petrop. (1780: I), 1783, S. 47–55, in Opera omnia (1) 3, S. 472–479. **(E 541)**]

26. De mirabilibus proprietatibus numerorum pentagonalium. [Acta acad. sc. Petrop. (1780: I), 1783, S. 56–75, in Opera omnia (1) 3, S. 480–496. **(E 542)**]

27. De transformatione serierum in fractiones continuas, [ubi simul haec theoria non mediocriter amplificatur. Opuscula analytica 2, 1785, S. 138–177, in Opera omnia (1) 15, S. 661–700. **(E 593)**]

28. De seriebus potestatum reciprocis methodo nova et facillima summandis. [Opuscula analytica 2, 1785, S. 257–274, in Opera omnia (1) 15, S. 701–721. **(E 597)**]

29. De summa seriei ex numeris primis formatae $[\frac{1}{3}-\frac{1}{5}+\frac{1}{7}+\frac{1}{11}-\frac{1}{13}-\frac{1}{17}+\frac{1}{19}+\frac{1}{23}-\frac{1}{29}+\frac{1}{31}-etc.$ ubi numeri primi formae 4n − 1 habent signum positivum formae autem 4n + 1 signum negativum. Opuscula analytica 2, 1785, S. 240–256, in Opera omnia (1) 4, S. 146–162. **(E 596)**]

30. De plurimis quantitatibus transcendentibus, quas nullo modo per formulas integrales exprimere licet. [Acta acad. sc. Petrop. 4 (1780: II), 1784, S. 31–37, in Opera omnia (1) 15, S. 522–527. **(E 565)**]

31. De inductione ad plenam certitudinem evehenda. [Acta acad. sc. Petrop. 4 (1780: II), 1784, S. 38–48, in Opera omnia (1) 4, S. 116–124. **(E 566)**]

32. De serie Lambertina, [plurimisque eius insignibus proprietatibus. Acta acad. sc. Petrop. (1779: II), 1783, S. 29–51, in Opera omnia (1) 6, S. 350–369. **(E 532)**]

33. Variae considerationes circa series hypergeometricas. [Nova acta acad. sc. Petrop. 8 (1790), 1794, S. 3–14, in Opera omnia (1) 16,1, S. 178–192. **(E 661)**]

34. De formulis exponentialibus replicatis. [Acta acad. sc. Petrop. 1 (1777: I), 1778, S. 38–60, in Opera omnia (1) 15, S. 268–297. **(E 489)**]

35. Integratio aequationis differentialis huius [$dy + yydx = \dfrac{Adx}{(a+2bx+cxx)^2}$.

Mém. acad. sc. St. Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, S. 3–15, in Opera omnia (1) 23, S. 379–392. **(E 734)**]

36. De insigni paradoxo, quod in analysi maximorum et minimorum occurit. [Mém. acad. sc. St. Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, S. 16–25, in Opera omnia (1) 25, S. 286–292. **(E 735)**]

37. De summatione serierum [in hac forma contentarum:

$\frac{a}{1}+\frac{a^2}{4}+\frac{a^3}{9}+\frac{a^4}{16}+\frac{a^5}{25}+\frac{a^6}{36}+etc.$

Mém. acad. sc. St. Pétersbourg 3 (1809/10), 1811, S. 26–42, in Opera omnia (1) 16,2, S. 117–138. **(E 736)**]

38. Methodus succincta summas serierum infinitarum per formulas differentiales investigandi. [Mém. acad. sc. St. Pétersbourg 5 (1812), 1815, S. 45–56, in Opera omnia (1) 16,2, S. 200–213. **(E 746)**]

Man kann davon ausgehen, dass diese Zusammenstellung auf Paul Heinrich Fuß zurückgeht. Die Handschrift, in der l. 2r und 2v sowie 3r geschrieben wurden, stimmt mit der Handschrift von Paul Heinrich Fuß überein. Dieser wollte wohl die Inhalte eines dem Thema „Reihen“ gewidmeten Bandes von Eulers Werken zusammenstellen. Dabei rechnete er hier auch einige Arbeiten dazu, die nach seinem eigenen Verzeichnis von Eulers Schriften nicht unbedingt dem Kapitel „Reihen“ zugeordnet waren, denn nur 28 der hier vorgestellten 38 Arbeiten Eulers kommen auch in Fuß’ Verzeichnis der Eulerschen Schriften im Kapitel „Reihen“ vor.

Ferner wurde links, neben der Spalte mit den Zahlen 1 bis 38, von anderer Hand noch eine weitere Spalte mit Zahlen hinzugefügt: 98, 110, 99 usw. Wie eine Analyse ergab, handelt es sich dabei um die Nummern, die Eulers Arbeiten gemäß dem Verzeichnis von Johann Georg Hagen haben. Das bedeutet, diese Nummern können nur in der Zeit zwischen 1896 und 1913 hinzugefügt worden sein, da Hagens Verzeichnis 1896 erschienen ist und man nach 1913 wohl den Eneströmnummern den Vorzug gegeben hätte.

Angehängt an dieses Inhaltsverzeichnis mit dem Titel „Index“ gibt es, wie bereits erwähnt, noch ein weiteres handgeschriebenes Blatt 3r, mit der Überschrift „Trigonom. Analysis und Reihensummirung. 2. Summation und Transformation der unendlichen Reihen. Unendliche Producte“.

Auch dieses Blatt enthält eine Liste Eulerscher Arbeiten. Dort sind allerdings nur 38 Nummern ohne Titel und ohne bibliographische Angaben genannt, wobei sich die Nummern auf das von Paul Heinrich Fuß 1843 herausgegebene Verzeichnis der Eulerschen Schriften beziehen. Diese Nummern sollen hier unerwähnt bleiben, damit sie nicht etwa zu weiteren Verwirrungen beitragen. Unter diesen Nummern befindet sich auch die Nr. 174a, d.h. Eulers „Démonstration De la somme de cette Suite […]“, die Fuß erst nachträglich und handschriftlich in sein Verzeichnis der Eulerschriften eingefügt hat.

Wie eine Überprüfung der Nummern in dem Verzeichnis von Paul Heinrich Fuß und der Titel aus der oben angeführten Tabelle ergab, wurden 30 dieser 38 Titel auch in die neue Liste aufgenommen. Acht Titel der ersten Liste wurden weggelassen, und zwar die Titel mit den laufenden Nummern **4 (E 42), 9 (E 54), 13 (E 40), 16 (E 188), 26 (E 542), 31 (E 566), 35 (E 734)** und **36 (E 735)**. Alle diese Titel finden sich auch nicht unter „Reihen“ in dem Verzeichnis von Paul Heinrich Fuß aufgelistet. Es haben also inhaltliche Gründe dafür gesprochen, auf diese Titel zu verzichten. Dafür kamen folgende acht Titel neu hinzu, die allesamt unter „Reihen“ fielen.

De termino generali serierum hypergeometricarum. Nova acta acad. sc. Petrop. 7 (1789), 1793, S. 42–63, in Opera omnia (1) 16,1, S. 139–162. **(E 652)**

Dilucidationes in capita postrema Calculi mei differentialis de functionibus inexplicabilibus. In: Institutiones calculi differentialis, Pavia 1787, S. 705–732. Wiederabgedruckt in Mém. acad. sc. St. Pétersbourg 4, 1813, S. 88–119, in Opera omnia (1) 16,1, S. 1–33. **(E 613)**

Specimen transformationis singularis serierum. Nova acta acad. sc. Petrop. 12 (1794), 1801, S. 58–70, in Opera omnia (1) 16,2, S. 41–55. **(E 710)**

De singulari ratione differentiandi et integrandi, quae in summis serierum occurrit. Nova acta acad. sc. Petrop. 6, (1788), 1790, S. 3–15, in Opera omnia (1) 16,1, 122–138. **(E 642)**

De summatione serierum in quibus terminorum signa alternantur. Nova acta acad. sc. Petrop. 2 (1784), 1788, S. 46–69, in Opera omnia (1) 16,1, 47–78. **(E 617)**

De numero memorabili in summatione progressionis harmonicae naturalis occurrente. Acta acad. sc. Petrop. 5 (1781: II), 1785, S. 45–75, in Opera omnia (1) 15, S. 569–603. **(E 583)**

De summis serierum numeros Bernoullianos involventium. Novi Comment. acad. sc. Petrop. 14 (1769), 1770, S. 129–167, in Opera omnia (1) 15, S. 91–130. **(E 393)**

Exercitatio analytica; ubi imprimis seriei maxime generalis summatio traditur. Nova acta acad. sc. Petrop. 9 (1791), 1795, S. 41–53, in Opera omnia (1) 16,1, S. 266–281. **(E 685)**

Es war dies also eine verbesserte Liste für einen möglicherweise geplanten Band von Eulers Schriften über Reihen. Hier auf Blatt 3r wurden ferner zwei Spalten mit je zwei Zahlenreihen aufgeschrieben, einerseits die Nummern der Eulerschen Arbeit in dem Verzeichnis von Paul Heinrich Fuß und andererseits die Anzahl der Seiten des Beitrages von Euler. Diese Seitenzahlen wurden aufsummiert und ergaben eine Summe von 876 Seiten – es hätte dies also ein stattlicher Band werden können. Paul Heinrich Fuß hat ja 1848 in dem Briefwechsel mit C. G. J. Jacobi einen geplanten Band über Reihen mit dem Titel „Analytische Trigonometrie und Summation der Reihen" erwähnt, der sogar 47 Schriften Eulers enthalten sollte (Stäckel/Ahrens 1907/8, S. 53). Aber leider kam es nicht zur Realisierung eines solchen Bandes.

Der Vollständigkeit halber sei erwähnt, dass auf dem Blatt 1v des Konvoluts noch ein Nachtrag erwähnt wird, nämlich die Nr. 12a mit dem Titel „Solutio problematum quorundam astronomicorum" (E 39)[56]; die Seite 1r ist leer. Das offizielle, von Archivaren in jüngerer Zeit erstellte Inhaltsverzeichnis des gesamten Konvolutes fond 136, opis' 3, Nr. 13 weist insgesamt 40 Nummern aus, erstens, weil der Brief von Gauß mitgezählt, und zweitens, weil noch die Nr. 12a, hier als Nr. 14, hinzugezählt wurde.

In dem Konvolut befindet sich der Brief von Gauß, den dieser am 16.5.1844 an Paul Heinrich Fuß geschrieben hat, auf der Seite 59r. Da Paul Heinrich Fuß über keine Kopie von Eulers Aufsatz „Démonstration De la somme de cette Suite. $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ etc." verfügte, folgt nun konsequenterweise die von Gauß angefertigte Abschrift auf den Blättern 60 und 61, d.h. l. 60r, 60v, 61r und 61v.

56 Leonhard Euler: Solutio problematum quorundam astronomicorum. Comment. acad. sc. Petrop. 7 (1734/5), 1740, S. 97–98, in Opera omnia (2) 28, S. 26–27 (E 39).

Den Abschluss bildet das Couvert von Gauß' Brief an Paul Heinrich Fuß (l. 62v). Siehe die Faksimiles im folgenden Beitrag.

Schlusswort: Gauß und die Theorie der Reihen

Zum Schluss soll noch kurz das Thema Gauß und die Theorie der Reihen gestreift werden. In der Mathematik des 19. Jahrhunderts spielte die Theorie der unendlichen Reihen nicht mehr die gleiche Rolle wie im 18. Jahrhundert. So verwundert es auch nicht, dass Gauß nichts zu den Arbeiten der Klassiker des 18. Jahrhunderts über die Theorie der unendlichen Reihen beigetragen, sondern im Jahre 1813 lediglich eine auf einem anderen Niveau befindliche Arbeit über die hypergeometrische Reihe vorgelegt hat (Gauß 1813). Dieser liegen zwar auch Arbeiten von Euler zugrunde, wie Recherchen ergaben (Schlesinger 1912, S. 136f, 139), aber Gauß zitiert hier keinerlei Beiträge von anderen Gelehrten, auch die von Euler nicht.

Dennoch gibt es direkte Hinweise darauf, dass sich Gauß in jungen Jahren mit der Theorie der unendlichen Reihen beschäftigt hat. Im Jahre 1793 nämlich gelangte Johann Friedrich Pfaffs „Versuch einer neuen Summationsmethode" in Gauß' private Bibliothek. Das Werk befindet sich noch heute unter der Nummer 588 in der in Göttingen vorhandenen Gauß-Bibliothek (Pfaff 1788). Es enthält den handschriftlichen Vermerk „C. F. Gauß 1793". Es war Paul Heinrich Fuß, dem Gauß sehr viel später seine Beweggründe für den Kauf dieses Werkes schildern sollte:

> „Vielleicht hat eine kleine Anekdote in Beziehung auf diese Schrift einiges Interesse für Sie. Sie ist autentisch, da ich sie aus Pfaffs eignem Munde habe. Pfaff hatte ihr in der Handschrift den Titel gegeben, Versuch einer neuen Methode die reciproken Reihen zu summiren, wodurch wirklich der Inhalt gut bezeichnet wird. Durch Vermittlung eines Gönners fand die Schrift in dem Buchhändler Himburg in Berlin einen Verleger, welcher ohne Pfaffs Vorwissen beim Druck den Titel eigenmächtig in ‚Versuch einer neuen Summationsmethode' abänderte. Pfaff war damit selbst unzufrieden, da die Schrift gar nicht die Praetension machen konnte noch sollte,

> eine neue Summationsmethode (schlechthin) zu geben. Richtig gerechnet hatte aber der Buchhändler gewiß, denn mancher kaufte das Buch, worin er eine neue allgemeine Summationsmethode zu finden erwartete, der wohl eine Monographie über einen so ganz speciellen Gegenstand nicht gekauft hätte. Ich darf mich, als einen damals noch sehr jungen Knaben, als Beispiel eines solchen Käufers wenige Jahre nach der Erscheinung des Buches anführen“[57].

Das Exemplar in der Gauß-Bibliothek enthält zahlreiche Anmerkungen und Eintragungen von Gauß’ eigener Hand, was bedeutet, dass dieser das Werk auch gelesen hat. Am Ende, auf der letzten Seite, vermerkt Gauß wiederum ein Zitat aus einem Werk von Euler:

> „On sait par l’experience que lorsqu’une recherche est fort épineuse les premiers efforts nous en eclairoissent ordinairement fort peu; et ce n’est que par des efforts reiterés et en envisageant la chose sous plusieurs points de vue qu’on parvient à une connoisance accomplie“,

wobei er auch die Quelle nennt[58]. Gleich darunter befinden sich zahlreiche mathematische Formeln aus dem Bereich der Reihen, worunter auch $\frac{\pi^2}{6}$ vorkommt. Ferner machen die bereits erwähnten Leiste-Notizen sogar noch etwas deutlicher, dass sich auch Gauß mit der von Euler so erfolgreich untersuchten Reihe $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} +$ usw. beschäftigt hat. Dort nämlich notierte Gauß auf der leeren Seite links vom Titelblatt u.a. folgende Reihen (Leiste 1790):

$$1-\frac{1}{9}+\frac{1}{25}-\frac{1}{49}\ldots=0.916$$

$$1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}\ldots=\frac{\pi\pi}{6}=1{,}6$$

$$1+\frac{1}{9}+\frac{1}{25}+\frac{1}{49}\ldots=\frac{\pi\pi}{8}=1{,}2$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{16}+\frac{1}{36}+\frac{1}{64}\ldots=\frac{\pi\pi}{24}=0{,}4$$

$$1+\frac{1}{16}+\frac{1}{49}+\frac{1}{100}\ldots=$$

57 SUB Göttingen, Gauß-Nachlass, Briefe B: Paul Heinrich Fuß 2 (2 S.).

58 Euler, Leonhard: Du mouvement d’un corps solide quelconque lorsqu’il tourne autour d’un axe mobile. Mémoires Académie des sciences de Berlin 16 (1760) 1767, S. 176–227 (E 336), hier S. 178. In: Opera omnia (2) 8, S. 313–356, hier S. 315.

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{25}+\frac{1}{64}+\frac{1}{121}\ldots=$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{36}+\frac{1}{81}+\frac{1}{144}\ldots=\frac{\pi\pi}{54}=0.18$$

$$1+\frac{1}{25}+\frac{1}{81}+\frac{1}{169}\ldots=1{,}074833$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{36}+\frac{1}{100}+\frac{1}{196}\ldots=\frac{1}{32}\pi\pi$$

$$\frac{1}{9}+\frac{1}{49}+\frac{1}{121}+\frac{1}{225}\ldots=0{,}15886$$

$$\frac{1}{16}+\frac{1}{64}+\frac{1}{144}+\frac{1}{256}\ldots=\frac{1}{96}\pi\pi\ .$$

Literaturverzeichnis

Dunham 1999 Dunham, William: Euler: the master of us all. Washington 1999.

Eneström 1910–1913 Eneström, Gustaf: Verzeichnis der Schriften Leonhard Eulers. Jahresberichte der Deutschen Mathematikervereinigung. Ergänzungsband 4, Leipzig 1910–1913.

Euler 1740 Euler, Leonhard: De summis serierum reciprocarum. Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae 7 (1734/5), 1740, S. 123–134. In: Opera omnia (1) 14, Leipzig, Berlin 1925, S. 73–86. (E 41).

Euler 1743 Euler, Leonhard: Démonstration De la somme de cette Suite. $1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}+$ etc. Journal littéraire d'Allemagne, de Suisse et du Nord (La Haye) 2 : 1, 1743, S. 115–127. Ferner in: Bibliotheca Mathematica (3) 8, 1907/8, S. 54–60. In: Opera omnia (1) 14, Leipzig, Berlin 1925, S. 177–186. (E 63)

Euler 1747/1844 Euler, Leonhard: Rettung der Göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister. Berlin 1747, 2. Aufl. Berlin 1844. In: Opera omnia (3) 12, Zürich 1960, S. 269–286. (E 92)

Euler 1751 Euler, Leonhard: Découverte d'une loi tout extraordinaire des nombres par rapport à la somme de leurs diviseurs. Bibliothèque impartiale 3, 1751, S. 10–31. In: Opera omnia (1) 2, Leipzig, Berlin 1915, S. 241–253. (E 175)

Euler 1849 Euler, Leonhard: Commentationes arithmeticae collectae. Auspiciis academiae imperialis scientiarum Petropolitanae ediderunt auctoris pronepotes P. H. Fuss et Nicolaus Fuss. 2 Bde, St. Petersburg 1849. (E 791)

Euler 1862 Euler, Leonhard: Opera posthuma mathematica et physica anno MDCCCXLIV detecta quae academiae scientiarum Petropolitanae obtulerunt ejusque auspiciis ediderunt auctoris pronepotes Paulus Henricus Fuss et Nicolaus Fuss. 2 Bde, St. Petersburg 1862. (E 805)

Faber 1935 Faber, Georg: Übersicht über die Bände 14, 15, 16, 16* der ersten Serie [der Euler-Edition]. In: Leonhard Euler: Opera omnia (1) 16,2, Leipzig, Berlin 1935, S. VII–CXII.

Fuchs 1978 Fuchs, Werner: Die Leiste-Notizen des jungen Gauß. Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft 15, 1978, S. 19–38.

Fuß N. 1783 Fuß, Nikolaus: Eloge de Monsieur Léonard Euler, lu à l'académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg le 23 octobre 1783. Avec une liste complette des ouvrages de M. Euler. St. Petersbourg 1783.

Fuß N. 1786 Fuß, Nikolaus: Lobrede auf Herrn Leonhard Euler; von dem Verfasser selbst aus dem französischen übersetzt und mit verschiedenen Zusätzen vermehrt, nebst einem vollständigen Verzeichnis der Eulerschen Schriften. Basel 1786. In: Euler Opera omnia (1) 1, Leipzig und Berlin 1911, S. XLIII–XCV (ohne Schriftenverzeichnis).

Fuß N. 1787 Fuß, Nikolaus: Eloge de Léonard Euler, lu à l'académie impériale des sciences de Saint-Pétersbourg le 23 octobre 1783. In: Nova Acta Academiae Scientiarum imperialis Petropolitanae, Saint-Petersbourg 1, (1783), 1787, S. 159–212.

Fuß P. H. 1822 Fuß, Paul Heinrich: De curva quadam transcendente, ejusque proprietatibus. Mémoires de l'Académie impériale des sciences de St. Pétersbourg 8 (1817, 1818), 1822, S. 147–160 (vorgelegt am 23.4.1817).

Fuß P. H. 1842 Fuß, Paul Heinrich: Extrait du procès verbal de l'académie impériale des sciences de St. Pétersbourg du 24 Septembre (6 Octobre). Journal für die reine und angewandte Mathematik 23, 1842, S. 196–198.

Fuß P. H. 1843 Fuß, Paul Heinrich (Hrsg.): Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIII[ème] siècle, précédée d'une notice sur les travaux de Léonard Euler. 2 Bde, St. Petersburg 1843.

Fuß, Paul Heinrich: Systematische Liste der Schriften Leonhard Eulers, siehe Stäckel/Ahrens 1907/8, S. 79–163.

Gauß 1813 Gauß, Carl Friedrich: Disquisitiones generales circa seriem infinitam

$$1+\frac{\alpha\cdot\beta}{1\cdot\gamma}x+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot\beta\cdot(\beta+1)}{1\cdot2\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)}xx+\frac{\alpha\cdot(\alpha+1)\cdot(\alpha+2)\cdot\beta\cdot(\beta+1)\cdot(\beta+2)}{1\cdot2\cdot3\cdot\gamma\cdot(\gamma+1)\cdot(\gamma+2)}x^3+etc.$$

Commentationes societatis regiae scientiarum Gottingensis recentiores 2 (1811–1813) 1813, commentationes classis mathematicae, 46 S. In: Werke 3, Göttingen 1866, S. 123–162.

Hagen 1896 Hagen, Johann Georg: Index operum Leonardi Euleri. Berlin 1896.

Havil 2007 Havil, Julian: Gamma. Eulers Konstante, Primzahlstrände und die Riemannsche Vermutung. Aus dem Englischen übs. von M. Stern. Berlin, Heidelberg 2007.

Hofmann 1959 Hofmann, Joseph Ehrenfried: Um Eulers erste Reihenstudien. In: Sammelband, der zu Ehren des 250. Geburtstages Leonhard Eulers der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin vorgelegten Abhandlungen. Hrsg. von Kurt Schröder, Berlin 1959, S. 139–208.

Knobloch 1988/2007. Knobloch, Eberhard: Matematičeskie zapisnye knižki Leonarda Ėjlera. In: Razvitie idej Leonarda Ėjlera i sovremennaja nauka, hrsg. von N. N. Bogoljubov, G. K. Michajlov und A. P. Juškevič, Moskau 1988. S. 102–121.

Englische Übersetzung: Euler's Mathematical Notebooks. In: Euler and Modern Science, hrsg. von N. N. Bogolyubov, G. K. Mikhajlov, and A. P. Yushkevich. Translated from Russian by Robert Burns. The MAA Tercentenary Euler Celebration 4, 2007, S. 97–118.

Knobloch 2008 Knobloch, Eberhard: Euler transgressing limits: The infinite and music theory. In: Quaderns d'Història de l'Enginyeria 9, 2008, S. 9–24.

Kopelevič u.a. 1962 Kopelevič, Ju. Ch.; Krutikova, M. V.; Michajlov, G. K.; Raskin, N. M. (Hrsg.): Rukopisnye materialy L. Ėjlera v archive akademii nauk SSSR. Bd. 1, Moskau 1962.

Leiste 1790 Leiste, Christian: Die Arithmetik und Algebra zum Gebrauch bey dem Unterrichte. Wolfenbüttel 1790.

Leibniz 1682 Leibniz, Gottfried Wilhelm: De Vera Proportione Circuli ad Quadratum Circumscriptum in Numeris rationalibus expressa. Acta Eruditorum 1682, S. 41–46. In: C. I. Gerhardt (Hrsg): G. W. Leibniz Mathematische Schriften 5, Halle 1858, Nachdruck Hildesheim 1962, S. 118–122.

Matvievskaja/Gorlova 1999 Matvievskaja, G. P.; Gorlova, V. D.: Zapisnye knižki Ėjlera: Zametki, otnosjaščiesja k analitičeskoj teorii čisel, rjadam i zepnym drobjam. Istoriko-matematičeskie issledovanija 3 (38), 1999, S. 315–361.

Pengelley 2007 Pengelley, David J.: Dances between continous and discrete: Euler's summation formula. In: Bradley, Robert (Hrsg.) et al., Euler at 300. An Appreciation. The MAA Tercentenary Euler Celebration 5, 2007, S. 169–189.

Pfaff 1788 Pfaff, Johann Friedrich: Versuch einer neuen Summationsmethode nebst andern damit zusammenhängenden Bemerkungen. Berlin 1788.

Reich 2005 Reich, Karin: Gauß' geistige Väter: nicht nur „summus Newton", sondern auch „summus Euler". In: „Wie der Blitz einschlägt, hat sich das Räthsel gelöst". Hrsg. von E. Mittler, Göttingen 2005, S. 105–117.

Roussanova 2009 Roussanova, Elena: Ein wertvoller Fund im Archiv der Akademie der Wissenschaften in St. Petersburg. Mitteilungen der Gauß-Gesellschaft 46, 2009, S. 77–80.

Sandifer 2004 Sandifer, Ed: Basel Problem with integrals. In: How Euler Did It. MAA Online, März 2004.

Sandifer 2005 Sandifer, Ed: Bernoulli numbers. In: How Euler Did It. MAA Online, September 2005.

Sandifer 2007a Sandifer, Edward: The Early Mathematics of Leonhard Euler. The MAA Tercentenary Euler Celebration 1, 2007.

Sandifer 2007b Sandifer, Edward: Some Facets of Euler's Work on Series. In: Leonhard Euler: Life, Work and Legacy, hrsg. Robert E. Bradley, C. Edward Sandifer, Amsterdam u.a. 2007 (= Studies in the History and Philosophy of Mathematics 5), S. 279–302.

Sandifer 2007c Sandifer, Ed: Euler's Greatest Hits. In: How Euler Did It. MAA Online, Februar 2007.

Sandifer 2008 Sandifer, Ed: Multi-zeta functions. In: How Euler Did It. MAA Online, January 2008.

Schlesinger 1922–1933 Schlesinger, Ludwig: Über Gauss' Arbeiten zur Funktionentheorie. In: Gauß Werke 10,2, Göttingen 1922–1933, 2. Aufsatz.

Spiess 1945 Spiess, Otto: Die Summe der reziproken Quadratzahlen. In: Festschrift zum 60. Geburtstag von Prof. Dr. Andreas Speiser. Zürich 1945, S. 66–86.

Stäckel 1907 Stäckel, Paul: Vier neue Briefe von Gauß. Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen. Mathematisch-physikalische Klasse 1907, S. 372–373.

Stäckel 1907/8 Stäckel, Paul: Eine vergessene Abhandlung Leonhard Eulers über die Summe der reziproken Quadrate der natürlichen Zahlen. Bibliotheca Mathematica (3) 8, 1907/8, S. 37–60. Ebenso in Euler, Opera omnia (1) 14, Leipzig und Berlin 1925, S. 156–176 bzw. 186.

Stäckel/Ahrens 1908 Stäckel, Paul; Ahrens, Wilhelm (Hrsg.): Der Briefwechsel zwischen C. G. J. Jacobi und P. H. von Fuss. Herausgegeben, erläutert und durch einen Abdruck der Fussschen Liste der Eulerschen Werke ergänzt. Leipzig 1908.

Struve 1856 Struve, Otto: Éloge de P. H. Fuss. Compte-rendu de l'Académie impériale des sciences de St.-Pétersbourg 1856, S. 89–122. Sonderdruck St. Pétersbourg 1857, 18 S.

Winter 1957 Winter Eduard: Die Registres der Berliner Akademie der Wissenschaften 1746–1766. Berlin 1957.

Danksagung:
An dieser Stelle sei der St. Petersburger Filiale des Archivs der Russländischen Akademie der Wissenschaften, insbesondere Frau Dr. I. V. Tunkina, ganz herzlich gedankt, sowohl für die Verfügungstellung der Archivalien als auch für die Publikationserlaubnis.